

**ÇUKUROVA ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Muhammet Serdar ÇAVUŞ

**KESİRLİ (FRACTIONAL) DİFERANSİYEL DENKLEMLER TEORİSİ VE
DİELEKTRİK DURULMANIN KESİRLİ MASTER DENKLEMİ
YÖNTEMİYLE ANALİZİ**

FİZİK ANABİLİM DALI

ADANA,2006

ÇUKUROVA ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

KESİRLİ (FRACTIONAL) DİFERANSİYEL DENKLEMLER TEORİSİ VE
DİELEKTRİK DURULMANIN KESİRLİ MASTER DENKLEMİ
YÖNTEMİYLE ANALİZİ

Muhammet Serdar ÇAVUŞ

YÜKSEK LİSANS TEZİ
FİZİK ANABİLİM DALI

Bu tez 16/01/2006 Tarihinde Aşağıdaki Jüri Üyeleri Tarafından Oybirliği/Oyçokluğu İle Kabul Edilmiştir.

İmza:.....	İmza:.....	İmza:.....
Prof. Dr. Süleyman BOZDEMİR	Prof. Dr. Emrullah MEHMETOV	Doç. Dr. Doğan DÖNMEZ
DANIŞMAN	ÜYE	ÜYE

Bu tez Enstitümüz Fizik Anabilim Dalında hazırlanmıştır.

Kod No:

Prof. Dr. Aziz ERTUNÇ
Enstitü Müdürü
İmza ve Mühür

Bu çalışma Çukurova Üniversitesi Bilimsel Araştırma Projeleri Birimi tarafından desteklenmiştir.

Proje No: FEF2005YL17

Not: Bu tezde kullanılan özgün ve başka kaynaktan yapılan bildirişlerin, çizelge, şekil ve fotoğrafların kaynak gösterilmeden kullanımı, 5846 Sayılı Fikir ve sanat Eserleri Kanunundaki hükümlere tabidir.

ÖZ

YÜKSEK LİSANS TEZİ

**KESİRLİ (FRACTIONAL) DİFERANSİYEL DENKLEMLER TEORİSİ VE
DİELEKTRİK DURULMANIN KESİRLİ MASTER DENKLEMİ
YÖNTEMİYLE ANALİZİ**

Muhammet Serdar ÇAVUŞ

**ÇUKUROVA ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
FİZİK ANABİLİM DALI**

Danışman: Prof. Dr. Süleyman BOZDEMİR

Yıl: 2006, Sayfa: 77

Jüri: Prof. Dr. Süleyman BOZDEMİR

Prof. Dr. Emrullah MEHMETOV

Doç. Dr. Doğan DÖNMEZ

Bu çalışmada önce kesirli dereceden diferansiyel hesap tekniği ele alındı; bu tekniğin tanımları ve çıkış noktaları ayrıntılı bir şekilde incelendikten sonra özellikleri ve çözüm yöntemleri verildi.

Bu hesap tekniği kullanılarak, Ising modelinden elde edilen kesirli master denkleminin bir çözümü ortaya kondu ve Dielektrik durulma süreçlerine uygulandı. Kesirli master denkleminin çözümünden Cole-Cole dağılım bağıntısı ile KWW ve Cebirsel bozunum durulma fonksiyonları elde edildi. Elde edilen bu sonuçlar Ising modelinin analizinden elde edilen daha önceki dağılım (dispersiyon) bağıntılarıyla karşılaştırıldı. Kesirli master denkleminde elde edilen sonuçların daha kapsamlı olduğu görüldü.

Anahtar Kelimeler: Kesirli Diferansiyel, Dielektrik Durulma, Ising modeli

ABSTRACT

MSc. THESIS

<p>THEORY OF FRACTIONAL DIFFERENTIAL EQUATIONS AND ANALYSIS OF DIELECTRIC RELAXATION BY USING THE METHOD OF FRACTIONAL MASTER EQUATION</p>

Muhammet Serdar ÇAVUŞ

**DEPARTMENT OF PHYSICS
INSTITUTE OF NATURAL AND APPLIED SCIENCES
UNIVERSITY OF ÇUKUROVA**

Supervisor: Prof. Dr. Süleyman BOZDEMİR

Yıl: 2006, Pages: 77

Jury: Prof. Dr. Süleyman BOZDEMİR

Prof. Dr. Emrullah MEHMETOV

Assoc. Prof. Dr. Doğan DÖNMEZ

In this study at first fractional order differential calculus technique has been considered; then descriptions and origins of this technique have been examined in detail, the properties and the methods of the solution are given.

By using this technique, a solution of the fractional master equation obtained from the Ising model has been produced, and this solution is applied to the dielectric relaxation process. From the solution of the fractional master equation we have obtained the Cole-Cole dispersion relation, KWW and algebraic decay relaxation functions. Then these solutions have been compared with the ones obtained from the analysis of the Ising model. As a result, it is shown that the solutions obtained from the present fractional master equation are more general than the solutions from the Ising model.

Key Words: Fractional Calculus, Dielectric Relaxation, Ising model

TEŞEKKÜR

Kesirli diferansiyel hesap tekniği, fiziksel olayları açıklamak için yapılan matematiksel yaklaşımlara yeni bir boyut kazandırmasının yanı sıra, fiziksel olayların yorumlarına da katkıda bulunmuştur. Bu makalede kesirli hesap tekniğinin dielektrik durulumaya bir uygulaması yapılmıştır. Öncelikle yüksek lisans çalışmamda bana yakın ilgi ve destek veren danışman hocam Prof. Dr. Süleyman Bozdemir'e teşekkür ederim. Ayrıca bu tez çalışmasında bana yardımcı olan ve yetişmemde emeği geçen Fizik Bölümü'nün tüm öğretim üyelerine ve bu çalışmayı destekleyen Çukurova Üniversitesi Rektörlüğü'ne de teşekkürlerimi sunmayı bir borç bilirim.

İÇİNDEKİLER	SAYFA
ÖZ.....	I
ABSTRACT.....	II
TEŞEKKÜR.....	III
İÇİNDEKİLER.....	IV
ÇİZELGELER DİZİNİ.....	VII
ŞEKİLLER DİZİNİ.....	VIII
SİMGELER VE KISALTMALAR.....	IX
1. GİRİŞ.....	1
1.1. İletkenler, Yalıtkanlar ve Dielektrikler.....	1
1.2. Dipol.....	3
1.3. Kutuplanma Çeşitleri.....	4
1.3.1. Elektronik Kutuplanma.....	4
1.3.2. Atomik Kutuplanma.....	5
1.3.3. İyonik Kutuplanma.....	6
1.3.4. Yönelme Kutuplanması.....	7
1.3.5. Arayüzey Kutuplanması.....	
1.4. Dielektrik Sabiti ve Kutuplanabilirlik.....	8
1.5. Vakum Ortamdaki ve Maddesel Ortamdaki Maxwell Denklemleri.....	10
1.6. Zamana Bağlı Alanlarda Lineer Dielektrikler.....	13
1.7. Frekansa Bağlı Kompleks Dielektrik Fonksiyonu.....	18
2. ÖNCEKİ ÇALIŞMALAR	21
2.1. Deneysel Sonuçların Yorumuna Dayanan Empirik Fonksiyonlar.....	21
2.2. Kesirli Diferansiyel İle Yeni Yaklaşımlar.....	23
2.3. Zamana Bağlı Ising Modeline Dayalı Çalışmalar.....	26
3. MATERYAL VE METOD.....	27
3.1. Diferansiyel Denklemler.....	27
3.2. Kesirli (Fractional) Diferansiyel Hesap Tekniği.....	29
3.2.1. Gama Fonksiyonu.....	29
3.2.2. Beta Fonksiyonu.....	32
3.2.3. Laplace Dönüşümü.....	32

3.2.4. Mittag-Leffler Fonksiyonları.....	33
3.3. Keyfi Dereceden Türev ve İntegraller (Diferintegraller).....	33
3.3.1. Türev.....	35
3.3.2. İntegral.....	37
3.3.3. Türev ve İntegralin Ortak İfadesi.....	38
3.3.3.1.Grünwald-Letnikov tanımı.....	38
3.3.3.2. Riemann-Liouville Tanımı.....	39
3.3.3.3. Cauchy Tanımı.....	45
3.3.3.4. Genelleştirilmiş Cauchy Tanımı ve Riemann-Liouville Tanımı.	46
3.3.3.5. Caputo Kesirli Türevi.....	49
3.3.4. Kesirli Türev ve İntegrallerin Özellikleri.....	51
3.3.4.1. Lineerlik.....	51
3.3.4.2. Homojen Olma Özelliği.....	52
3.3.4.3. Bir Serinin Diferintegrali.....	52
3.3.4.4. Kesirli Türevlerin Leibniz Kuralı.....	53
3.3.4.5. Birleşme özelliği.....	53
3.3.4.6. Bileşik Fonksiyonların Kesirli Türevleri.....	54
3.3.4.7. Bir Parametreye Bağlı Bir İntegralin Riemann- Liouville Kesirli Türevi.....	55
3.3.4.8. Ölçek değişikliği.....	55
3.4. Kesirli Diferansiyel Tekniğinde Kullanılan Bazı Önemli Dönüşümler.....	58
3.4.1. Kesirli Türev ve İntegrallerin Laplace Dönüşümü.....	56
3.4.1.1. Riemann-Liouville ve Grünwald-Letnikov Kesirli İntegrallerinin Laplace Dönüşümü.....	57
3.4.1.2. Riemann-Liouville Kesirli Türevin Laplace Dönüşümü.....	57
3.4.1.3. Caputo Türevinin Laplace Dönüşümü.....	58
3.4.1.4. Grünwald-Letnikov Kesirli Türevinin Laplace Dönüşümü.....	58

3.4.2. Kesirli Türevlerin Fourier Dönüşümleri.....	58
3.4.2.1. Kesirli İntegrallerin Fourier Dönüşümü.....	59
3.4.2.2. Kesirli Türevlerin Fourier Dönüşümü.....	59
4. DİELEKTRİK DURULMANIN KESİRLİ (FRACTIONAL) MASTER DENKLEMİ YÖNTEMİYLE ANALİZİ.....	61
4.1. Kesirli Dereceden Türev ve İntegraller.....	61
4.2. Durulma Süreçleri.....	63
4.3. Zamana Bağlı Spin-Spin Korelasyon Fonksiyonları.....	65
5. TARTIŞMA VE SONUÇ.....	69
KAYNAKLAR.....	71
ÖZGEÇMİŞ.....	74
EKLER.....	75
Ek 1. (4.27) Kesirli Diferansiyelinin Açık Çözümü.....	75

ÇİZELGELER DİZİNİ

SAYFA

Çizelge 1.1. Bazı materyallerin kutuplanma türleri ve statik ϵ_r katsayıları..... 9

ŞEKİLLER DİZİNİ	SAYFA
Şekil.1.1. Su molekülünün dipol momenti.....	4
Şekil.1.2. Elektronik kutuplanma.....	5
Şekil.1.3. Atomik kutuplanma.....	6
Şekil.1.4. İyonik kutuplanma.....	7
Şekil.1.5. Yönelme kutuplanması.....	8
Şekil.1.6. Arayüzey kutuplanma.....	9
Şekil 1.7. Yoğun fazdaki polar bileşikler için frekansa bağlı Dielektrik sabitinin dağılımı ve kayıp pikleri.....	17
Şekil 2.1. Gama fonksiyonu eğrisi.....	28
Şekil 2.2. Mittag-Leffler fonksiyonu.....	31
Şekil 3.1. Cauchy integral formülünün C yolu.....	42
Şekil 3.2. Diferintegral formülündeki C yolu.....	43
Şekil 3.3. Diferintegral formülündeki C' kapalı yolu.....	44
Şekil 3.4. $\oint_{\rightarrow L_1}$, $\oint_{\rightarrow L_2}$ ve \oint_{C_o} integralleri yolu.....	46

SİMGELER VE KISALTMALAR

P : Kutuplanma vektörü

D : Yerdeğiştirme vektörü

E, E₀ : Dış elektrik alan

ϵ_r : Bağlı dielektrik sabiti

ϵ : Dielektrik sabiti (permitivite)

ϵ_0 : Boşluğun elektriksel geçirgenliği

ϵ' : Bağlı dielektrik sabitinin gerçel kısmı

ϵ'' : Bağlı dielektrik sabitinin sanal kısmı

σ : Yüzey yük yoğunluğu

χ : Kutupsal duyunluk

$\chi(\omega)$: Normalize edilmiş kompleks dielektrik fonksiyonu

1. GİRİŞ

1.1. İletkenler, Yalıtkanlar ve Dielektrikler

Maddelerin dielektrik özelliklerinin sistemli bir şekilde incelenmesi 1870'lerden sonra yoğunluk kazanmıştır. Dielektrik bilimi, dielektriklerin kutuplanma ve onun durulma mekanizmasını mikroskobik düzeyde, özellikle zamanla değişen elektrik alan altındaki davranışını inceler (Böttcher C.J.F., Bordevijk P., 1978).

Yiyecek bilimi, kimya, biyoloji, tıp, ilaç araştırmaları, nano teknoloji, askeri savunma, elektronik, malzeme bilimi, tarım vs. alanlarında, incelenen malzemenin yapısal özelliklerinin anlaşılmasında dielektrik ölçümler yaygın bir şekilde kullanılmaktadır. Maddelerin dielektrik özellikleri nem oranı, kimyasal yoğunluk, biyokütle, hacim yoğunluğu, kusurlar, kimyasal reaksiyonlar, mekanik gerilme ve diğer fiziksel özellikleriyle ilişkilidir (Agilent Technologies, 2005).

Genel olarak maddeleri iletkenler ve yalıtkanlar olmak üzere iki sınıfa ayırabiliriz. İletkenler, içlerinde elektrik akımının oluşmasını sağlayan çok sayıda serbest yük taşıyıcıları bulduran malzemelerdir. Çoğunlukla elektronlar olarak nitelendirebileceğimiz bu serbest yük taşıyıcıları, iletken materyal içerisinde bir elektrik alan etkisi altında her yönde kolayca hareket edebilirler. Hareketleri süresince diğer yük taşıyıcıları ya da kusurlar gibi faktörlerle etkileşim içindedirler (Böttcher C.J.F., Bordevijk P., 1978).

Elektriksel yalıtkanlıkla ilgili çalışmalar yalıtkanlar ve dielektrikler şeklinde iki sınıfa ayrılmıştır. Yalıtkanlar olarak nitelendirilen malzemeler mümkün olan en düşük elektriksel iletkenliğe ve yüksek elektrik alan içinde meydana gelebilecek bozulmalara karşı en yüksek dirence sahip olacak şekilde ele alınır. Bunun yanı sıra uzun ömür, düşük maliyet, yüksek sıcaklığa dayanabilirlik gibi özelliklerinin de olması istenir. Bundan anlaşılacağı üzere yalıtkan bir malzemenin ele alımında malzemenin iç fiziksel özellikleri pek dikkate alınmaz, daha çok kullanım alanına yönelik bir dizi özellikleri incelenir. Dielektrik ile ilgili çalışmalar ise yalıtkanları da içerisine alan daha genel ve temel yapıdadır. Dielektrik olaylar yukarıda da sözünü

ettiğimiz gibi, özellikle zamanla değişen elektrik alanı altında dielektrik materyalin kutuplanma ve durulma sürecinin mikroskobik mekanizmasının anlaşılması üzerine kuruludur

Yalıtkanlar, metaller ve yarı iletkenlerden farklı olarak kendine has özelliklere sahiptir ve bu özellikleri bant teorisiyle açıklanabilmektedir. Bu teoriye göre farklılık, yalıtkanların, yarı iletken ve metallerin valans bantları ile iletkenlik bantlarının birbirine göre uzaklık farklarından, yani yasaklanmış bölgenin genişliğinden ve bu seviyeler arasındaki Fermi seviyesinin konumundan kaynaklanmaktadır.

Dielektrik malzemeler, içindeki yüklü parçacıkların onu oluşturan atomlara ve moleküllere sıkı sıkıya bağlı olduğu, elektrik akımını oluşturabilecek serbest yük taşıyıcıları olmayan materyallerdir. Genel olarak şiddetli elektrik alanı etkisi altında dielektrik materyal içerisinde belirli bir kutuplanma gözlenebilir. Dielektrik bir ortamı oluşturan yapılar moleküller, atomik çekirdekler ve elektronlardır. Bu yüklü parçacıklar bir dış elektrik alan etkisi altında kaldıklarında denge konumlarından bir miktar ayrılırlar fakat sözünü ettiğimiz bu yapılar birbirinden tamamen kopup bağımsız olarak hareket etmezler. Elektrik alan, dielektrik malzemeyi bu şekilde bir miktar kutuplar; pozitif ve negatif yükler, elektrik alanın yönüne göre birbirlerine zıt yönde hareket ederler ve materyal kutuplanmış olur. Kutuplanma, dış elektrik alanının şiddetinin materyal içinde zayıflamasına neden olur. Bir dış elektrik alanı etkisiyle kutuplanmaya zorlanan yükler, elektrik alanın ortamdaki kaldırılması durumunda zamanla eski denge konumlarına geri dönerler. Buna dielektrik durulma denir ve bu durulma esnasında materyal içinde çok az bir miktarda elektrik akımı meydana gelir. Tipik bir dielektrikte iletkenlik iyi bir iletkenin 10^{20} kez daha küçüktür ve bu derece bir iletkenlik ihmal edilebilir (Böttcher C.J.F., Bordevijk P., 1978).

Dielektrikler elektriği iletmediği için yalıtıcı malzeme olarak bir kondansatörün levhaları arasına, kondansatörün kapasitesini arttırmak üzere yerleştirilebilir. Bu özellik dielektrik maddeyi oluşturan atom ve moleküllerin elektrik alan etkisiyle negatif yük merkezleri ile pozitif yük merkezlerinin birbirlerine göre ayrılması sonucu oluşan kutuplanmadan kaynaklanmaktadır.

1.2. Dipol

Dielektrik içindeki atom veya moleküllerin pozitif yük merkezleri ile negatif yük merkezlerinin birbirinden ayrılması bir dipolü oluşturur. Tanım olarak aralarında l uzaklığı olan eşit büyüklükteki fakat zıt işaretli iki noktasal yükün oluşturduğu sisteme dipol denir. Bu noktasal yükler e ve $-e$ ise dipol moment;

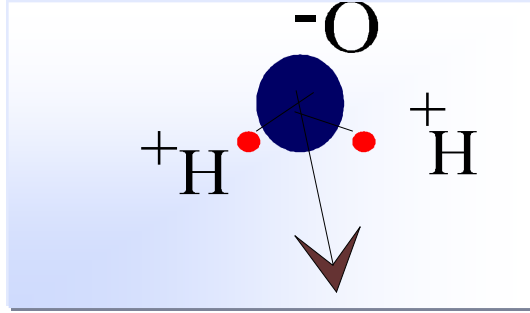
$$p = el \quad (1.1)$$

şeklinde verilir.

Dielektrik maddeler polar ve polar olmayan olmak üzere kabaca iki sınıfa ayrılabilir. Bu iki sınıf maddede kutuplanma mekanizmaları birbirinden farklılıklar gösterir. Bunlardan, polar olmayan ortamlardaki kutuplanma, daha çok dış bir etki altında oluşan dipol momentlerin meydana getirdiği kutuplanmadır: Dielektrik madde üzerinde herhangi bir dış etki yok ise, negatif ve pozitif yük merkezlerinin hemen hemen çakışık olması nedeniyle dipol momentler oluşmaz. Soygazlar buna iyi bir örnektir. Ancak, tek tip soygaz atomlarını bir araya getirerek bir kristal oluşturmak için atomlar sıkıca paketlenirken aralarında oluşan Van der Waals bağ kuvvetinin dipol etkileşmelerine bağlı olması, bu tür maddelerin de anlık olarak dipol momentlere sahip olduğunu göstermektedir.

Dış bir elektrik alan etkisi sonucu pozitif ve negatif yük merkezleri bir birlerinden bir miktar ayrılarak dipol momentler oluştururlar. Bu kutuplanma dış alanın şiddetiyle doğru orantılıdır (Ufuktepe Y., Bozdemir S., 1997,)

İçerisinde ısısal uyarılmadan dolayı rasgele dağılmış pozitif ve negatif yük merkezlerinin çakışık olmaması nedeniyle doğrudan dipol moment dağılımına sahip olan maddelere ise polar maddeler denir. Polar dielektrikler bir elektrik alan içine konulduğunda içerisinde rasgele yönelmiş olan dipoller elektrik alan yönüne paralel olmaya çalışırlar ve böylelikle dielektrikte net bir kutuplanma meydana gelir. Bu tür maddelere HCl, H₂O, HBr, NH₃, MgCl, vb. örnek olarak verilebilir.



Şekil.1.1. Su molekülünün dipol momentini

1.3. Kutuplanma Çeşitleri

Daha önce dielektrik maddeleri polar ve polar olmayanlar olarak iki kısma ayırmıştık ve bunlar hakkında bazı genel bilgiler vermiştik. Polar ve polar olmayan dielektriklerin bir diğer farklı özellikleri ise bu maddelerin kutuplanma mekanizmalarının birbirinden farklı oluşudur. Bu kısımda kutuplanma mekanizmaları hakkında bazı temel bilgiler verilecektir.

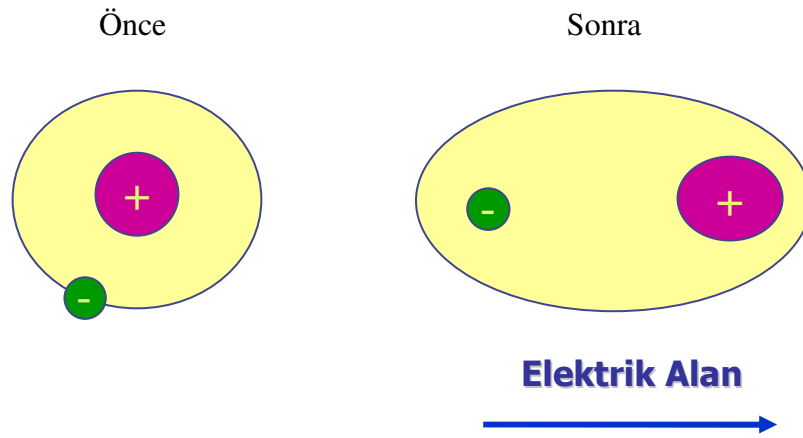
Dielektriklerde temel olarak elektronik, atomik, iyonik, yönelme ve arayüzey kutuplanması olmak üzere beş çeşit kutuplanma meydana gelmektedir.

1.3.1. Elektronik Kutuplanma

Bir elektrik alan etkisinde olan tüm atomlarda ve iyonlarda bu tür bir kutuplanma meydana gelir. Elektronik kutuplanma, bir atomdaki elektronların oluşturduğu negatif yüklerin dağılım merkezinin, çekirdeğin yük merkezine göre dış elektrik alan etkisiyle atomik ölçekte kayması sonucu gerçekleşir. Polar olmayan dielektriklerde elektronik kutuplanma oluşur ve bu maddelerin optik kırılma indislerinin karesi dielektrik sabitine eşittir:

$$n^2 = \epsilon$$

Buna Maxwell bağıntısı denmektedir. Fiziksel açıklamasını yapacak olursak: Elektromanyetik dalganın elektrik vektörü madde içindeki yüklere bir kuvvet uygular ve bu kuvvet yüklerin başlangıçtaki konumlarının değişmesine sebep olur. Sonuçta bir dipol meydana gelir. Elektronların bağlanma kuvvetlerine göre kutuplanmanın derecesi de değişecektir. Elektronik kutuplanma yaklaşık 10^{15} - 10^{16} Hz frekansta gerçekleşmektedir.



Şekil.1.2. Elektronik kutuplanma

Elektrik alanın sürekli değişmesi durumunda, elektronlar bu değişime tepki verebildiği sürece ya da değişimi izleyebildiği sürece elektrik dipol momentleri oluşacaktır. Örneğin ağır iyonlar elektromanyetik alanı kızılötesi bölgeye kadar izleyebildiklerinden görünür bölgede kutuplanmaya çok az katkıda bulunurlar. Oysaki elektronlar bu bölgede de tepki verebildiklerinden bir elektronik kutuplanma oluştururlar. Değişen elektrik alan altında sürekli yön değiştiren bu dipoller uyarıldıkları frekans ile ışımaya yaparlar. Bu yüklerin varlığı ve elektromanyetik alan ile etkileşimi herhangi kayda değer bir enerji kaybına neden olmaz, yalnızca geçişini geciktirir. Bu materyal, elektromanyetik dalganın hızını azaltarak, kendi içindeki dalganın hızının boşluktakine oranı şeklinde bilinen bir kırılma indisine sahip olur. Bu noktada optiksel kırılma indisi elektronik kutuplanmadan türemektedir.

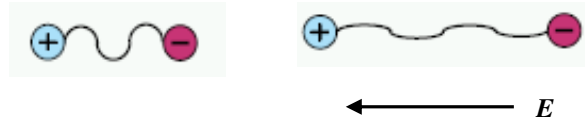
Kutuplanmayan yükler içeren ortamlarda ise $\epsilon = 1$ 'dir ve böylece $n=1$ olduğu görülür. Daha büyük kütleli atomlar daha fazla sayıda elektron içereceğinden, yoğun

ortamlar az yoğun ortamlara göre birim hacminde daha fazla yük bulunduracaktır. Yoğunluktaki bu değişim ışığın kırılmasına neden olmaktadır.

1.3.2. Atomik Kutuplanma

Elektronik ve atomik kutuplanmaların her ikisinde de yükler, dış alan etkisiyle birbirlerine göre konum değiştirirler ve bu nedenle bu tür kutuplanmalara uyarılmış (induced) kutuplanma denmektedir. Bir dış elektrik alan altında yüklü atomların veya atom gruplarının birbirine göre yer değiştirmeleri bir etkileşmeli dipol moment yaratır; bu, dielektriğin atomik kutuplanmasıdır (Chunxiang Zhu).

Elektronik ve atomik kutuplanmanın her ikisine birden deformasyon kutuplanma da denir. Bu iki kutuplanma türü de, aynı şekilde, bir dış elektrik alan altında yüklü parçacıkların (elektronlar ve atomlar) yer değiştirmesine ilişkindir. Atomik kutuplanma yaklaşık 10^{13} - 10^{14} Hz aralığında gerçekleşmektedir.

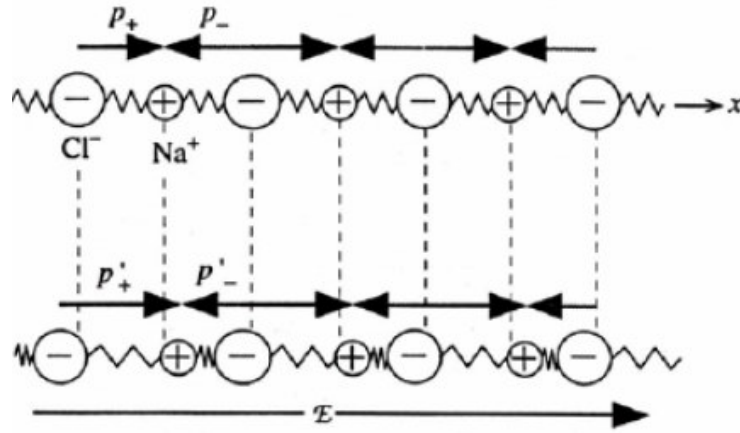


Şekil 1.3. Atomik Kutuplanma

1.3.3. İyonik Kutuplanma

Bir dış elektrik alan altında kristal içindeki anyon ve katyonların doğal konumlarına göre göreceli olarak yer değiştirmesi iyonik kutuplanma olarak tanımlanır. Bu kutuplanma sonrasında net bir dipol moment oluşur.

İyonlar elektronlara göre daha ağır olduklarından iyonik kutuplanma süresi yaklaşık 10^{-13} - 10^{-12} s arasındadır (infra-red frekansı). Bu kutuplanmanın varlığında Maxwell ilişkisi geçerli değildir ve bağıl dielektrik katsayısı optik kırılma indisinden her zaman büyük olacaktır. İyonik kutuplanma genel olarak iyonik materyallerde oluşur (Böttcher C.J.F., Bordevijk P., 1978, Chunxiang. Zhu, Feldman Y).

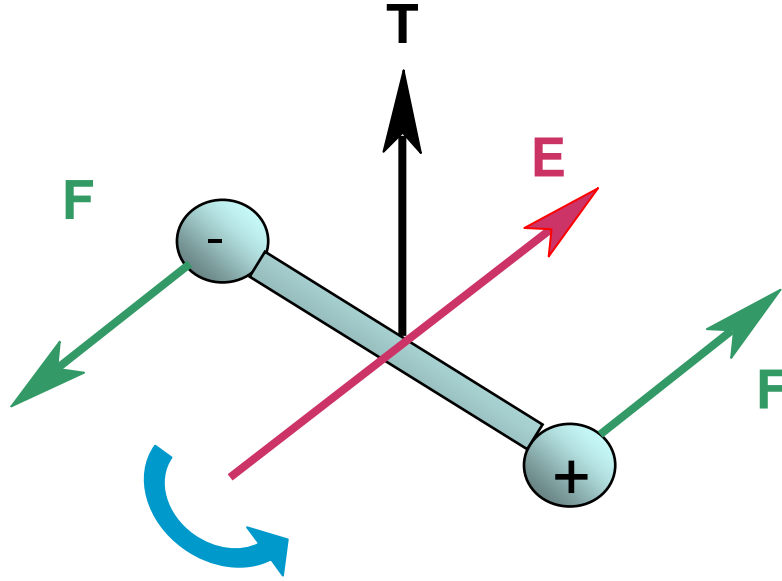


Şekil 1.4. İyonik kutuplanma (NaCl -Sodyum Klorür)

1.3.4. Yönelme Kutuplanması

Yönelme kutuplanması, dış bir elektrik alan etkisi olmadan da elektik dipol momentleri içeren, polar maddeler olarak adlandırılan dielektriklerde oluşur. Bazı dielektriklerde dört kutuplu (kuardropol) , sekiz kutuplu (oktupol) vb. çok kutuplar bulunabilmektedir, fakat bunların kutuplanmaya katkısı oldukça azdır. Böyle elektrik momentlerine bir dış elektrik alan bir tork uygulayarak onları kendisiyle aynı yönelime zorlayacaktır ve bunun sonucunda yönelim kutuplanması oluşacaktır. Dipol kutuplanmada sıcaklık etkileri de göz önünde tutulmalıdır. Yönelim kutuplanmasında dipol momente sahip moleküllerin bir dış alan uygulanmadan önceki durumuna yeniden geçmesi için moleküllerin büyüklükleri ve ortamın viskozları ile doğru orantılı bir zamana gereksinim vardır.

Elektronik, atomik ve iyonik kutuplanmaların ortak yönü, her bir kutuplanma sürecinde yüklerin dönmeyip, birbirlerinden uzaklaşmalarıdır. Yönelme kutuplanmasında ise kalıcı dipoller, dış alan etkisiyle dönmeye zorlanırlar. Yönelme kutuplanması 10^3 - 10^9 Hz aralığında gözlenir (Ufuktepe Y. Bozdemir S., 1997, Feldman Y).



Şekil.1.5. Yönelme kutuplanması

1.3.5. Arayüzey (İnterfacial) ya da Uzay Yük (Space Charge) kutuplanması

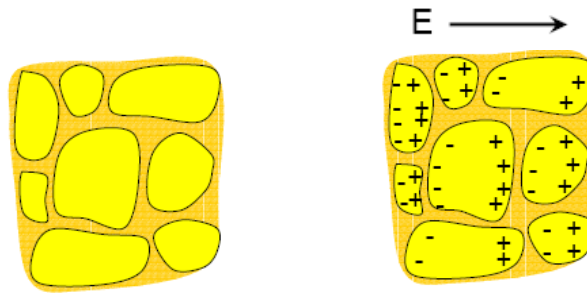
Elektronik, atomik ve yönelme kutuplanmalarında atom ve moleküller, çevrelerinin kutuplanmasıyla değişikliğe uğrayan, temelde ise uygulanan dış alanı da içeren bir yerel alan etkisi altında kaldıkları varsayılır. Burada genelde homojen maddeler ele alınmaktadır.

Arayüzey kutuplanması genel olarak elektriksel açıdan heterojen materyallerde gözlenir. Bunlar daha çok saf materyallerin karışımlarından ortaya çıkan maddelerdir. Daha önce sözünü ettiğimiz kutuplanmalardan farklı olarak arayüzey kutuplanması hareketli yüklü parçacıkların bir dış elektrik alan altında arayüzeylerde toplanmasıyla meydana gelmektedir. Buna aynı zamanda uzay yükü (space charge) kutuplanması adı da verilmektedir.

Örneğin polikristal materyallerde birleşme yüzeylerinde serbest yükler birikebilirler. Bu da kristalin arayüzey kutuplanmasını doğurur. Bu birikmiş yüklerden doğan kutuplanma diğer kutuplanmalara bir katkı sağlar.

Arayüzey kutuplanması üzerine temel düşünce, kristaller arası ayırıcı yüzeylerle bağlantılıdır. Bu yüzeyler serbest yüklerin bir kristalden diğerine hareketini

dokusunun yüzey katmanının oksidasyon ile kaplanmasından kaynaklanabilir. Bu konuda çalışanlardan bir kısmı arayüzey kutuplanmasının nedeninin gerçek tek bir kristaldeki kusurlar (boşluklar, safsızlıklar, çatlaklar, vb.) üzerinde boşluk yüklerinin birikimi olduğunu söylemişlerdir (Koşal M. 2001). Bu kutuplanma mekanizması düşük ve orta düzeyde frekanslardaki dielektrik yapıların tasarımında büyük rol oynamaktadır. Arayüzey kutuplanması 10^{-3} - 10^3 Hz aralığında ortaya çıkmaktadır. Bu kutuplanma türüne örnek olarak $Pb(Zr_{0.52}Ti_{0.48})O_3$, $SrTiO_3$, $La_{0.9}Sr_{0.1}Ga_{0.8}Mg_{0.2}O_3$ vb. verilebilir



Şekil 1.6. Arayüzey – Uzay Yük kutuplanması

Yukarıda kısaca tanımlarını verdiğimiz kutuplanma türlerine ilişkin birkaç örnek aşağıda verilmiştir (NC State University):

Çizelge 1.1. Bazı materyallerin kutuplanma türleri ve statik ϵ_r katsayıları

ÖRNEK	KUTUPLANMA	STATİK ϵ_r	
Ar gaz	Elektronik	1.0005	Gazlarda küçük N
Ar sıvı (T<87.3 K)	Elektronik	1.53	Van der Vals bağ
Si crastal	Elektronik	11.9	Kovalent katı
NaCl kristal	İyonik	5.90	İyonik kristal katı
CsCl kristal	İyonik	7.20	İyonik kristal katı
Su	Yönelme	80	Dipolar sıvı
Nitrometan (27 °C)	Yönelme	34	Dipolar sıvı
PVC (plyvinyl chloride)	Yönelme	7	Katı içinde kısmen engellenmiş dipolar yönelme

1.4. Dielektrik Sabiti ve Kutuplanabilirlik

Elektrik alanın dielektrik maddeler üzerindeki etkileri dielektrik sabiti, duygunluk, kutuplanabilirlik ve elektriksel kutuplanma gibi kavramlarla tanımlanır. Dielektrik sabiti, bir malzemenin elektriksel açıdan ne kadar yalıtkan olduğunu bir derecesidir. Sabit bir potansiyel altında yüklenen bir kondansatörün levhaları arasında bir dielektrik madde yerleştirildiğinde potansiyel farkının düştüğü gözlenir çünkü dielektrik maddenin kutuplanması sonucunda oluşan kutuplanma alanı, dış alana zıt yönde olduğu için onu zayıflatacaktır. Boşluktaki kondansatörün alanının dielektrik ortamdaki ölçülen iç alana oranı veya boşluktaki potansiyel farkının maddesel ortamın bulunduğu haldeki potansiyel farkına oranı o maddenin dielektrik sabiti olarak adlandırılır. Bu tanım başka bir biçimde, boşlukta iki elektriksel yük arasındaki elektrostatik kuvvetin aynı yüklerin maddesel bir ortamda iken aralarındaki elektrostatik kuvvete oranı olarak da verilebilir.

Dielektrik ortamın kutuplanması o ortama etki eden elektrik alan nedeniyle gerçekleşmektedir. Bununla birlikte kutuplanma derecesi sadece elektrik alan şiddetine de bağlı değildir. Ortamı oluşturan moleküllerin özellikleri de bir etkindir. Eğer ortamı oluşturan dielektrik madde izotropik ise kutuplanma, ona neden olan elektrik alanıyla orantılı olacaktır. Bu durumda kutuplanma

$$\mathbf{P} = \epsilon_0 \chi \mathbf{E} \quad (1.2)$$

ile verilir. Burada χ dielektrik duygunluk olarak adlandırılır ve boyutsuz bir niceliktir. Makroskobik \mathbf{E} alanı ile \mathbf{P} polarizasyonu arasındaki bağlantı χ katsayısı ile sağlanır.

Elektrostatik bir ortam için

$$\mathbf{D} = \epsilon_0 \mathbf{E} + \mathbf{P} \quad (1.4)$$

eşitliği geçerlidir. Burada D 'ye elektrik öteleme vektörü veya elektrik akı yoğunluğu denir. D 'nin kaynağı serbest yüklerdir ve (1.2) denkleminin yardımıyla

$$D = \epsilon_r \epsilon_0 E \quad (1.5)$$

bağıntısı elde edilir. Burada $1 + \chi = \epsilon_r$ alınmıştır. Burada ϵ_r boyutsuz bir niceliktir ve dielektrik katsayısı adını alır. $\epsilon_r \epsilon_0 = \epsilon$ seçildiği takdirde yerdeğiştirme vektörü ve elektrik alan arasındaki bağıntı

$$D = \epsilon E \quad (1.6)$$

ile verilir. Burada ϵ , dielektrik sabiti (permittivity) olarak adlandırılır.

İzotropik ya da kübik yapıdaki bir ortamın boşluğa göre dielektrik sabiti ϵ_r ise makroskobik E alanı cinsinden

$$\epsilon_r = \frac{\epsilon_0 E + P}{\epsilon_0 E} = 1 + \chi \quad (1.3)$$

şeklinde tanımlanır.

1.5. Vakum Ortamdaki ve Maddesel Ortamdaki Maxwell Denklemleri

Vakum ortamda ρ yük yoğunluğu ve J akım yoğunluğu için yük korunumunu ifade eden süreklilik denklemi

$$\text{div } \mathbf{J} + \frac{d\rho}{dt} = 0 \quad (1.7)$$

Faraday-Maxwell denklemi

$$\mathit{curl} \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \quad (1.8)$$

$$\mathit{div} \mathbf{B} = 0 \quad (1.9)$$

Amper-Maxwell denklemi

$$\frac{1}{\mu_0} \mathit{curl} \mathbf{B} = \varepsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} + \mathbf{J} \quad (1.10)$$

Gauss yasası

$$\mathit{div} \mathbf{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0} \quad (1.11)$$

ifadelerinin hepsine birden Maxwell denklemleri denir. Maddesel ortamda bu ifadeler biraz değişmektedir. Maxwell, \mathbf{E} ve \mathbf{B} alan vektörlerine ek olarak maddesel ortamın elektromanyetik özelliklerini tanımlamayı kolaylaştıran \mathbf{D} ve \mathbf{H} şeklinde iki vektör daha tanımlamıştır. Vakum bir ortamda bu vektörler arasındaki bağıntılar

$$\mathbf{D} = \varepsilon_0 \mathbf{E} \quad (1.12)$$

$$\mathbf{H} = \frac{1}{\mu_0} \mathbf{B} \quad (1.13)$$

şeklinindedir. Buna göre Gauss yasası ve Ampere-Maxwell denklemleri

$$\mathit{div} \mathbf{D} = \rho \quad (1.14)$$

$$\mathit{curl} \mathbf{H} = \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} + \mathbf{J} \quad (1.15)$$

olur. Burada $\frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}$ ye yerdeğiştirme akımı denir ve \mathbf{D} , MKS birim sisteminde $coulomb/m^2$ ile verilir. \mathbf{H} 'ye manyetik alan şiddeti denir ve birimi A/m ile verilmektedir. \mathbf{B} ise manyetik alan vektörüdür (manyetik indüksiyon veya manyetik akı yoğunluğu vektörü de denir). Birimi $Weber/m^2 = Tesla$ 'dır.

Vakum ortam için elektrik alandan dolayı meydana gelen enerji yoğunluğu

$$u = \frac{1}{2} \mathbf{D} \cdot \mathbf{E} \text{ veya } u = \frac{1}{2} \epsilon_0 E^2 \quad (1.16)$$

şeklinde ifade edilir.

Buraya kadar olan tartışmanın büyük bir kısmı kaynakları, olması istendiği gibi tanımlanmış yük ve akımlardan oluşan vakum ortamlardaki alanlarla ilgiliydi. Maddesel ortamlar elektromanyetik kuvvetlerin etkin olduğu temel yüklü parçacıkların bir araya gelerek oluşturduğu ortamlardır. Yani ortamın kendisi zaten elektromanyetik kuvvetlerin etkisiyle yapılanmış ve oluşmuştur. Maddesel ortamlardaki bu temel parçacıkların yoğunluğu atom ve molekülleri oluşturmak üzere belli guruplar halinde bir araya gelmişlerdir. Diğerleri ise belli guruplara bağlı olmayıp maddesel ortam içinde, iletkenlerde olduğu gibi, serbestçe hareket edebilmektedir. Bu yüzden elektromanyetik kuvvetin etkisinde kalacak olan bu yükleri bağlı yükler ve serbest yükler şeklinde ayırmak çok doğru olacaktır. Buna göre (1.8-1.11) eşitlikleri ile verilen Maxwell denklemlerini maddesel ortamlara uyguladığımız zaman buradaki ρ ve \mathbf{J} maddesel ortamın kendisini oluşturan temel yüklü parçacıklar da dahil olmak üzere tüm yük ve akım yoğunluklarını içine alır. Bağlı yük ve akım yoğunluklarını ρ_b , \mathbf{J}_b ve serbest yük ve akım yoğunluklarını da ρ_f , \mathbf{J}_f ile gösterelim. Bunlara göre Maxwell denklemleri

$$\text{curl} \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \quad (1.17)$$

$$\text{div} \mathbf{B} = 0 \quad (1.18)$$

$$\frac{1}{\mu_0} \text{curl} \mathbf{B} = \varepsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} + \mathbf{J}_b + \mathbf{J}_f \quad (1.19)$$

$$\varepsilon_0 \text{div} \mathbf{E} = \rho_b + \rho_f \quad (1.20)$$

şeklinde olacaktır. Normal bir iletken için akım yoğunluğu serbest elektronların oluşturduğu \mathbf{J}_f akım yoğunluğudur ve deneylerden $\mathbf{J}_f = \sigma \mathbf{E}$ olduğu bilinmektedir. Dielektrik ve magnetik bir ortam için ρ_b ve \mathbf{J}_b ile \mathbf{E} ve \mathbf{B} arasındaki ilişki bu şekilde doğrudan değildir. Bu ilişki \mathbf{D} ve \mathbf{H} gibi vektörlerle sağlanmaktadır. Bağlı yük ve akım yoğunluğu, polarizasyon \mathbf{P} ve magnetizasyon \mathbf{M} cinsinden

$$\rho_b = -\text{div} \mathbf{P} \quad \text{ve} \quad \mathbf{J}_b = \frac{\partial \mathbf{P}}{\partial t} + \text{curl} \mathbf{M} \quad (1.21)$$

şeklinde ifade edilir. Bunlara göre Maxwell denklemleri;

$$\frac{1}{\mu_0} \text{curl} \mathbf{B} = \varepsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} + \frac{\partial \mathbf{P}}{\partial t} + \text{curl} \mathbf{M} + \mathbf{J}_f \quad (1.22)$$

$$\varepsilon_0 \text{div} \mathbf{E} = -\text{div} \mathbf{P} + \rho_f \quad (1.24)$$

$$\text{curl} \left(\frac{1}{\mu_0} \mathbf{B} - \mathbf{M} \right) = \frac{\partial}{\partial t} (\varepsilon_0 \mathbf{E} + \mathbf{P}) + \mathbf{J}_f \quad (1.25)$$

$$\text{div} (\varepsilon_0 \mathbf{E} + \mathbf{P}) = \rho_f \quad (1.26)$$

Burada $\mathbf{H} = \frac{1}{\mu_0} \mathbf{B} - \mathbf{M}$ ve $\mathbf{D} = \varepsilon_0 \mathbf{E} + \mathbf{P}$ şeklinde tanımlarsak Maxwell denklemleri

$\text{curl} \mathbf{H} = \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} + \mathbf{J}_f$ ve $\text{div} \mathbf{D} = \rho_f$ şeklinde olur. Ayrıca maddesel ortamların homojen

ve lineer özelliklerine bağlı olarak \mathbf{D} ve \mathbf{H} vektörlerini dielektrik geçirgenlik ε ve magnetik geçirgenlik μ cinsinden;

$$\mathbf{D} = \varepsilon \mathbf{E} \quad (1.27)$$

$$H = \frac{1}{\mu} B \quad (1.28)$$

şeklinde yazarız.

1.6. Zamana Bağlı Alanlarda Lineer Dielektrikler

Statik durumlarda, yani zamandan bağımsız elektrik alanın neden olduğu kutuplanma elektrik alan şiddetiyle orantılı ve denge halindedir. Dinamik durumda ise elektrik alan zamanla değişmektedir ve kutuplanma da elektrik alan şiddetiyle bir denge içinde olmak zorunda değildir. Dinamik durumda, elektrik alan şiddeti zamanla değiştiği için bu değişen alanın neden olduğu kutuplanma da değişir.

Mikroskobik parçacıklar (moleküller, iyonlar, atomlar ve elektronlar) kutuplanmanın belli bir değerine ulaşmak için 10^{-6} s veya daha az olan karakteristik bir zamana ihtiyaç duyarlar. Şayet elektrik alan şiddeti hissedilir bir şekilde periyodik olarak değişirse madde içindeki mikroskobik parçacıklar bu değişime uygun bir kutuplanma gerçekleştiremeyebilir. Yani elektrik alan şiddetinin değişim hızına yetişemeyen bir kutuplanma meydana gelir. Bu durumda kutuplanma, elektrik alanın değişimiyle aynı anda gerçekleşemez, bir gecikme gözlenir. Bu durum ‘mikroskobik parçacıkların elektrik alan değişimine olan tepkisi bir zaman gecikmesiyle olur’ şeklinde ifade edilebilir.

Elektrik alan şiddetinin zamanla değişimi mikroskobik parçacıkların kutuplanmasıyla karşılaştırıldığında yeterince yavaşsa bu durumda kutuplanmayla elektrik alan şiddeti bir uyum içinde olur. Bu duruma yarı-statik durum denir ve $E(t)$ ile orantılı bir $P(t)$ kutuplanması görülür. Lineer ve izotropik bir dielektrik için

$$P(t) = \epsilon_0 \chi E(t) \text{ ve } D(t) = \epsilon \epsilon_0 E(t) \quad (1.29)$$

yazabiliriz. Statik durum için geçerli olan bağıntılar yarı-statik durum için de geçerlidir. İzotropik bir ortam ile, kendi içerisinde lineer olan yani malzeme üzerinde herhangi bir noktanın diğer noktalardan bir farka sahip olmaması, bir baksa deyişle malzeme üzerinde yapılan bir ölçümün malzemenin yönünden veya herhangi bir

noktasından bağımsız olmasını kastediyoruz. Amorf katılar, polarizasyon teorisinde izotropik bir ortam teşkil ederler. Lineer kristal yapıya sahip olmayan bu maddeler, elektrik alanın uygulanma yönünden bağımsız olarak her noktasında yönden bağımsız özdeş kutuplanmalar gösterirler.

Dinamik durum için en kolayı elektrik alanın harmonik olarak ele alınmasıdır. Bu halde zamana bağlı elektrik alan

$$\mathbf{E}(t) = \mathbf{E}^0 \cos \omega t \quad (1.30)$$

ile verilir. Burada E^0 genliktir ve ω da sinüzoidal değişimin açısal frekansıdır. Eğer sinüzoidal elektrik alanın frekansı çok yüksek ise mikroskobik parçacıklar bu değişime aynı anda (eş zamanlı olarak) bir tepki veremezler. Yarı-statik durumda da aynısı söz konusudur. Lineer, izotropik bir madde için yer değiştirme vektörü \mathbf{D} , elektrik alanla δ faz farkıyla bir tepki içindedir. Yani yer değiştirmedeki gecikme δ faz farkıyla olmaktadır. Bunu

$$\mathbf{D}(t) = \mathbf{D}^0 \cos(\omega t - \delta) \quad (1.31)$$

şeklinde ifade ederiz. Buradan

$$\mathbf{D}(t) = \mathbf{D}^0 \cos \delta \cos \omega t + \mathbf{D}^0 \sin \delta \sin \omega t \quad (1.33)$$

elde edilir. (1.31) denklemi, frekansın yeterince küçük olması durumunda δ sıfır olur ve statik durumu karşılar.

Elektrik alanın frekansı değiştiği zaman δ faz farkı da frekansa bağlı olarak değişecektir. Eğer frekans yeterince düşük ise δ sıfır olacak ve durgun veya yarı durgun şartlara ulaşacaktır.

$$D = D_0 \cos \delta \cos \omega t + D_0 \sin \delta \sin \omega t \quad (1.34)$$

$$D = D_1 \cos \omega t + D_2 \sin \omega t \quad (1.35)$$

$$\varepsilon'(\omega) = \frac{D_1}{E_0} = (D_0/E_0) \cos \delta \quad (1.36)$$

$$\varepsilon''(\omega) = \frac{D_2}{E_0} = (D_0/E_0) \sin \delta \quad (1.37)$$

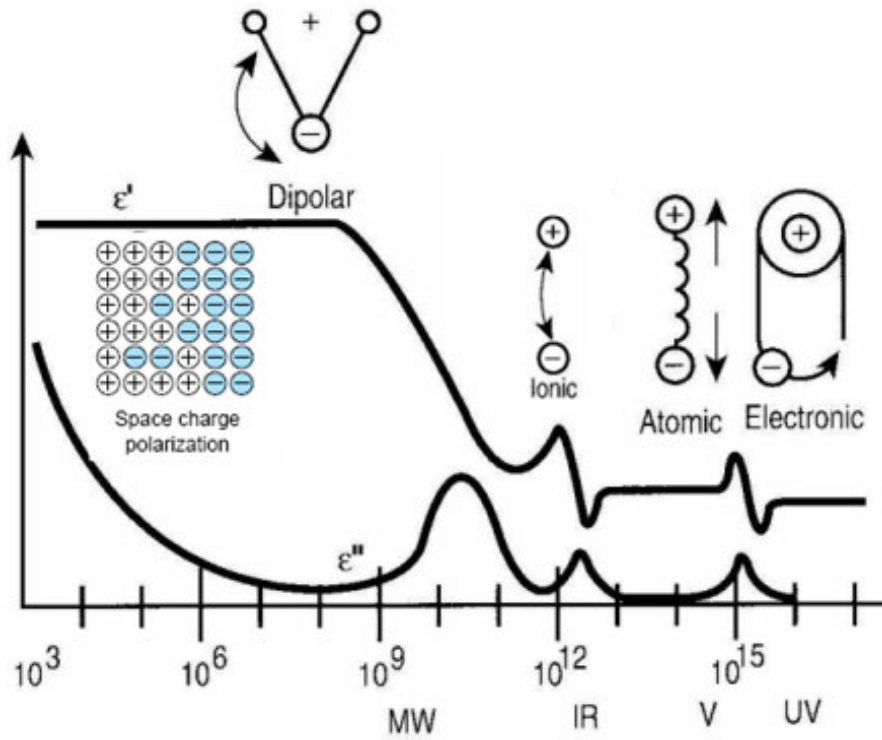
Böylece periyodik bir alan için D ile E arasındaki ilişki genlik ve faz farkı yerine $\varepsilon'(\omega)$ ve $\varepsilon''(\omega)$ gibi frekansa bağlı dielektrik sabitleri cinsinden yazılır. (1.33) denklemini daha kapalı bir biçimde

$$\mathbf{D}(t) = \varepsilon'(\omega)\mathbf{E}^0 \cos \omega t + \varepsilon''(\omega)\mathbf{E}^0 \sin \omega t \quad (1.38)$$

şeklinde yazılabilir.

Frekansın sıfır olması durumunda (1.38) denklemini statik duruma indirgenir ve burada $\varepsilon'(0) = \varepsilon$ statik durumdaki dielektrik sabitine karşılık gelir. Buradan, $\varepsilon'(\omega)$ 'nın sinüzoidal bir alan etkisindeki bir malzemede bir genelleştirilmiş dielektrik sabiti olduğunu söyleyebiliriz. Böylece $\varepsilon'(\omega)$, “frekansa bağlı dielektrik sabiti” olarak adlandırılır.

$\mathbf{D}(t)$ yi belirleyen diğer bir parametre ise $\varepsilon''(\omega)$ dir. Bu parametre $\mathbf{E}(t)$ ye göre $\pi/2$ lik faz farkına sahip olan $\mathbf{D}(t)$ nin diğer bileşeninin genliğinin bir ölçüsüdür ve “kayıp faktörü” olarak adlandırılır. Frekansa bağlı olan $\varepsilon'(\omega)$ ve $\varepsilon''(\omega)$, dielektrik sabit ve kayıp faktörü uygun deneylerle frekansın fonksiyonu olarak hesaplanabilirler. Düşük frekanslarda $\varepsilon'(\omega)$ ifadesi statik durumdaki ε a eşittir, bu halde $\varepsilon''(\omega)$ sıfır olmaktadır. Frekans yükselirken $\varepsilon'(\omega)$ azalır fakat $\varepsilon''(\omega)$ ise artar.



Şekil 1.7. Yoğun fazdaki polar bileşikler için frekansa bağlı dielektrik sabitinin dağılımı ve kayıp pikleri

ϵ' ile ϵ'' 'nın frekansa göre değişimleri arasında ters bir ilişki vardır: ϵ' 'nin azaldığı noktalarda ϵ'' artmakta ve Şekil 1. 'den de görüldüğü gibi pikler birbirine zıt yönde olmaktadır.

DeneySEL gerçEKler bize kutuplanmaların arayüzey, yönelim (orientation), iyonik, atomik ve elektronik olmak üzere beş kısımda gerçekleştiğini göstermektedir. Kutuplanmalar moleküllerin, iyonların, atomların ve de elektronların bir dış elektrik alan etkisiyle hareketlerinden oluşmaktadır

Bu beş kısım kutuplanmanın her biri farklı karakteristik zamanlara sahiptirler. Bu, Şekil 1.7 'den kolayca görülmektedir. İlk olarak 10^{-3} - 10^3 Hz aralığında arayüzey kutuplanmaları, 10^3 - 10^9 Hz aralığında yönelme kutuplanmaları, 10^{12} - 10^{13} Hz aralığında iyonik kutuplanma, 10^{14} - 10^{15} Hz atomik ve yukarı frekanslarda ise elektronik kutuplanma gözlenmektedir.

kutuplanmaları, 10^3 - 10^9 Hz aralığında yönelme kutuplanmaları, 10^{12} - 10^{13} Hz aralığında iyonik kutuplanma, 10^{14} - 10^{15} Hz atomik ve yukarı frekanslarda ise elektronik kutuplanma gözlenmektedir.

Bu kutuplanma süreçleri her frekansta üst üste binerek bir tepki oluşturmazlar, yani moleküler düzeyde bir tepkiyle karşılandıktan sonra elektrik alanın frekansı daha da arttırılırsa elektrik alanın bu artan frekansına karşı moleküller bir tepki vermekte gecikirler. Frekans daha da arttığında moleküller hiç tepki veremez hale gelirler. Moleküler düzeyden atomik düzeye geçildiğinde yalnızca atomlar ve elektronlar bu yüksek frekansa bir cevap ya da bir tepki verebilirler. Atomik frekans aşılnca atomlar da moleküller gibi bu yüksek frekansa tepki veremezler. Dış alanın frekansı elektronun frekansı yakınlarında ise yalnızca elektronlardan kaynaklanan bir tepki vardır.

Frekansa bağlı dielektrik sabiti ve kayıp faktörü, farklı frekans bölgelerinde farklı davranışlar göstermektedir. Elektromanyetik spektrumun optik bölgesinde bunların davranışı kırılma indisi ve absorpsiyon ölçümleriyle belirlenir. Kırılma indisinin frekansa göre gösterdiği değişime dağılım (dispersion) adı verilir. Optik bölgede frekansla kırılma indisindeki artış normal dağılım özelliği gösterir. Bazı özel durumlarda bunun tam tersi olabilmektedir; frekansın artan değerlerine karşılık kırılma indisinde bir azalma olur, ki buna anormal dağılım denir. Sonraları, moleküler hareketlerin elektrik alanın gerisinde kaldığı frekanslarda tüm polar bileşiklerde bu durum gözlenmiş ve aslında bu dağılımın normal olduğu anlaşılmıştır.

Yönelme kutuplanması için dağılım bölgesinde frekansa bağlı dielektrik sabitinin frekansa göre değişimini veren eğri, atomik ve elektronik kutuplanma için olandan farklılık gösterir. ϵ'' 'nün atomik ve elektronik kutuplanma için verdiği maksimumlar diğerinden daha keskindir. Bu, yönelim kutuplanma ve uyarım (induce) kutuplanma veren moleküler süreçlerin her dağılım bölgesinde farklı kaynaklı olması sonucudur. Yönelme ve uyarılma ile oluşan kutuplanmaların dinamik davranışlarındaki farklılık durulma ve rezonans olaylarıyla karakterize edilebilir (Böttcher, C.J.F. Bordevijk, 1978).

1.7. Frekansa Bağlı Kompleks Dielektrik Fonksiyonu

Değişken bir alan içindeki dielektrik için D ile E arasındaki ilişki frekansa bağlıdır. Dielektrik ortamı oluşturan materyalin, moleküler veya elektronik titreşimlerinin öz frekanslarına yakın olan frekans değerlerinde, durgun veya yarı durgun durum için geçerli olan $D = \epsilon E$ bağıntısı artık geçerli değildir. Yani elektrik alan E ile polarizasyon P ve D arasında bir faz gecikmesi olur. Her hangi bir anda P ve D 'in değeri aynı andaki E 'nin değeri ile belirlenemez. Sebep-sonuç ilkesine göre t anındaki uyarılma, t zamanından önceki E 'in yapmış olduğu etki sonucunda ortaya çıkar. Yani ϵ artık bir sabit olmaktan çıkarak frekansa bağlı olarak bir dağılım gösterir. Genel olarak dispersiyon adı verilen olayın meydana geldiği yüksek frekans değerlerine sahip periyodik alanlar için kompleks dielektrik sabiti, lineer ve izotropik dielektrikler için ortamın özelliklerine ve frekansa bağlı olarak

$$\frac{\epsilon^*(\omega) - \epsilon_\infty}{\epsilon_s - \epsilon_\infty} = \int_0^\infty f(\tau) e^{-i\omega\tau} d\tau \quad (1.39)$$

ile verilir (Landau ve Lifshitz, 1960). Burada $f(\tau)$ tepki fonksiyonu olarak bilinir. Ortamın özelliklerine ve zamana bağlı bir fonksiyondur ve birim elektriksel alan başına kutuplanmadaki gecikmeyi verir. $f(t)$ tepki fonksiyonu; $f(t) = -\frac{d\phi(t)}{dt}$ eşitliği ile ifade edilir. Burada $\phi(t)$ durulma fonksiyonu olup tanım gereği $t = 0$ anında sabit bir dış alanın kaldırılmasından sonra sistemin birim hacimdeki toplam elektrik dipol momentinin zamanla nasıl bozunacağını ifade eder ve $\phi(t) = \frac{P(t)}{P(0)}$ ile verilir. Buna göre harmonik alan içindeki sistemi karakterize eden kompleks dielektrik sabiti $\epsilon^*(\omega)$ ile $\phi(t)$ durulma fonksiyonu arasındaki bağıntı

$$\frac{\varepsilon^*(\omega) - \varepsilon_\infty}{\varepsilon_s - \varepsilon_\infty} = \int_0^\infty \exp(-i\omega t) \left(-\frac{d}{dt}\phi(t)\right) dt \quad (1.40)$$

veya bu eşitliğin sağ tarafının kısmi integrali alınırsa

$$\frac{\varepsilon^*(\omega) - \varepsilon_\infty}{\varepsilon_s - \varepsilon_\infty} = 1 - i\omega \int_0^\infty \exp(-i\omega t) \phi(t) dt \quad (1.41)$$

şeklinde integral denklemiyle verilir. Kompleks dielektrik sabiti $\varepsilon^*(\omega)$, ω 'nın sonsuza yaklaşan limit değerinde, ε_∞ ve ω 'nın sıfıra yaklaşan limit değerinde de ε_s gibi bir değere eşit olur. $\frac{\varepsilon^*(\omega) - \varepsilon_\infty}{\varepsilon_s - \varepsilon_\infty}$ ifadesine normalize edilmiş kompleks dielektrik

fonksiyonu denir ve genelde $\chi(\omega)$ ile gösterilir. Normalize edilmiş dielektrik fonksiyonu $\chi(\omega)$ 'nın reel kısmı $\varepsilon'(\omega)$, sanal kısmı $\varepsilon''(\omega)$ olmak üzere $\chi(\omega) = \varepsilon'(\omega) - i\varepsilon''(\omega)$ ile verilir. (1.40) ve (1.41) eşitliklerinden yararlanarak bir sistemin durulma fonksiyonu analitik olarak verildiğinde veya deneysel olarak ölçüldüğünde onun normalize edilmiş kompleks dielektrik sabitinin reel ve sanal kısımları bulunabilir.

Dielektrik içinde ısı şeklinde açığa çıkan enerji $\varepsilon''(\omega)$ ile orantılıdır. Dielektrik içinde birim hacimde, birim zamanda açığa çıkan enerji:

$$W = \frac{\omega}{2\pi} \int_0^{2\pi/\omega} IE dt \quad (1.42)$$

ile verilir. Burada I kondansatör içindeki akımdır; $I = \frac{dq}{dt}$, q ise kondansatör levhalarındaki yüzey yük yoğunluğudur. Ayrıca $D = q$ olduğu için akım;

$$I = \frac{dD}{dt} = \omega(-D_1 \sin \omega t + D_2 \cos \omega t) \quad (1.43)$$

şeklinde olur. Buradan da birim hacimde birim zamanda açığa çıkan enerji şu şekilde olur:

$$W = \frac{\omega}{2\pi} \int_0^{2\pi/\omega} \omega(-D_1 \sin \omega t + D_2 \cos \omega t) E_0 \cos \omega t dt \quad (1.44)$$

$$W = \frac{\omega}{4\pi} D_2 E_0 = \left(\frac{\omega}{4\pi}\right) E_0^2 \varepsilon'' \quad (1.45)$$

Görüldüğü gibi dielektrik sabitinin sanal kısmı $\varepsilon''(\omega)$, frekansa bağlı olarak, absorbe edilen enerjiyi, yani dielektrik içindeki enerji kaybını belirler. Benzer şekilde $\varepsilon'(\omega)$ 'nın da depolanan enerjiyi belirlediği gösterilebilir.

Normalize edilmiş dielektrik fonksiyonu $\chi(\omega) = \varepsilon'(\omega) - i\varepsilon''(\omega)$ 'nun reel ve sanal bileşenleri arasında Kramers-Kronig dönüşümleri Landau ve Lifshitz (1960) tarafından ortaya konmuş, daha sonra Sıtkı Eker (1997) tarafından yüksek lisans çalışması olarak dielektrikte bir takım uygulamaları yapılmıştır:

$$\varepsilon'(\omega) = \frac{2}{\pi} \text{P} \int_0^{\infty} \frac{\chi''(x)}{x^2 - \omega^2} dx \quad (1.46)$$

$$\varepsilon''(\omega) = -\frac{2}{\pi} \text{P} \int_0^{\infty} \frac{\chi'(x)}{x^2 - \omega^2} dx \quad (1.47)$$

Kramers-Kronig bağıntıları katıların dielektrik davranışlarının yorumunda temel bir öneme sahiptir. Bağıntı, lineer bir sistemde dielektrik fonksiyonunun sanal kısmı belli bir frekans aralığında biliniyorsa reel kısmını bulma olanağı verir ve bunun tersi de mümkündür.

2. ÖNCEKİ ÇALIŞMALAR

2.1. Deneysel Sonuçların Yorumuna Dayanan Ampirik Fonksiyonlar

Şimdiye kadar yapılan deneysel ve teorik çalışmalar $\phi(t)$ durulma fonksiyonu için değişik modeller ve ifadeler ortaya koymuştur. Üstel durulma türüne ait ilk sistemli çalışmalar Maxwell (1867) ve Debye'a (1929) kadar uzanır. İlk yapılan modellerden biri Debye modelidir: Debye, birbiriyle etkileşmediği varsayılan dipollerden oluşan sistemlerde, dipollerin sürtünmeli bir ortamda difüzyon hareketini ele alarak, $\phi(t)$ durulma fonksiyonunun

$$\phi(t) = e^{-t/\tau} \quad (2.1)$$

biçiminde üstel olması gerektiğini ortaya koymuştur. Burada τ 'ya durulma zamanı denir. Durulma fonksiyonunun türevini alıp (1.40) eşitliğinde yerine koyarsak, normalize edilmiş kompleks dielektrik fonksiyonu;

$$\chi(\omega) = \frac{1}{1 + i\omega\tau} \quad (2.2)$$

şeklinde bulunur. Reel ve sanal kısımlarını ayırırsak

$$\chi'(\omega) = \frac{1}{1 + \omega^2\tau^2} \quad (2.3)$$

$$\chi''(\omega) = \frac{\omega\tau}{1 + \omega^2\tau^2} \quad (2.4)$$

şeklindeki eşitlikler elde edilir. Fakat deneysel sonuçların yorumuna dayanan empirik çalışmalar, dielektrik durulmanın dinamik davranışını belirleyen fonksiyonların klasik Debye üstel durulma yasasına uymadığını göstermektedir (Cole ve Cole, 1941).

Frekansa bağlı normalize edilmiş kompleks dielektrik fonksiyonu ile ilgili, gözlemlere dayanan en önemli ampirik ifadelerden ilki Cole ve Cole (1941) tarafından önerilmiştir;

$$\chi(\omega) = \frac{1}{1 + (i\omega\tau)^{1-\alpha}} \quad , \quad 0 < \alpha < 1 \quad (2.5)$$

Buna alternatif olarak başka bir ampirik ifade Davidson ve Cole (1950) tarafından önerilmiştir;

$$\chi(\omega) = \frac{1}{[1 + (i\omega\tau)]^\beta} \quad , \quad 0 < \beta < 1 \quad (2.6)$$

Havriliak ve Negami (1966) tarafından önerilen fonksiyon ise bu ikisinin bir kombinasyonu olup

$$\chi(\omega) = \frac{1}{\{1 + (i\omega\tau)^{1-\alpha}\}^\beta} \quad , \quad 0 < \alpha < 1, \quad 0 < \beta < 1 \quad (2.7)$$

şeklindedir. Kohlrausch (1854), Williams ve Watts (1970) tarafından ortaya konulan zaman bölgesindeki durulma fonksiyonu ise;

$$\phi(t) = \exp[-(t/\tau)^\beta] \quad , \quad 0 < \beta < 1 \quad (2.8)$$

şeklindedir ve bu fonksiyon KWW fonksiyonu olarak adlandırılır. Bu saydığımız ampirik fonksiyonlar sadece deneysel gözlemleri ifade eden matematiksel fonksiyonlardır. Yani birçok durulma olaylarını açıklayan genel kuramsal modellerden çıkartılmamıştır (Eker S., 2004).

2.2. Kesirli Diferansiyel İle Durulma Süreçlerine Yaklaşımlar

Kesirli diferansiyel hesap tekniği, fiziksel olayları açıklamak için yapılan matematiksel yaklaşımlara yeni bir boyut kazandırmasının yanı sıra, fiziksel olayların yorumlarına da katkıda bulunmuştur. Fiziksel olayları betimleyen diferansiyel denklemlerin dereceleri, ele alınan fiziksel olayda bir değişim hızını belirlemektedir. Bu noktada kesirli dereceden diferansiyel, tamsayı dereceden diferansiyel denklemlerin bazı fiziksel olayları açıklamaktaki zayıflıklarını kapatmakla birlikte fiziksel olayın karakterinin anlaşılmasında da büyük bir rol oynamaktadır.

Kesirli diferansiyel hesap tekniğinin dielektrik durulma mekanizmalarına uygulanması henüz yeterli değildir. Kesirli diferansiyele ait uygulamalar daha fazla difüzyon denklemleri üzerinde yoğunlaşmıştır. Debye türü durulma süreçlerinin kesirli diferansiyel ile çözümü K.B Oldham., J. Spanier (1974), K.S. Miller, B. Ross (1993), I. Podlubny (1999) ve R. Hilfer (2000) gibi bilim adamlarının yazdıkları kitaplarda örnek olarak verilmiştir. Ralf Metzler ve Joseph Klafter tarafından (Metzler R, Klafter J., 2000) anomalous difüzyon süreçlerinin kesirli boyutta incelenmesi yapılırken bu tür bir durulma süreci de ele alınmıştır. Debye türü durulma süreçlerinin kesirli dereceden çözümleri fiziğin farklı ilgi alanlarına yansımıştır.

Zener durulma teorisi Glarum (1960) tarafından geliştirildi ve ortaya kondu. Glarum'un geliştirdiği durulma modelinde, dielektrik ortamda mevcut kusurların bir difüzyon hareketi yaptıkları varsayılır. Bu kusurların dipollerle etkileşmeleri veya onların bir uyarma ile karşılaşması sonucu durulma gerçekleşir. Daha sonrasında bu teori, Shlesinger (1984) ve Blumen (1984) tarafından anormal (anomalous) dinamik sistemlere genişletildi. Bu teoriyi temel alan Glöckle ve Nonnenmacher (1993) ise kesirli durulma süreçlerini çıkardılar (Metzler R., Klafter J., 2002).

2.3. Zamana Bağlı Ising Modeline Dayalı Çalışmalar

Zamana bağlı Ising modelini Glouber (1963) geliştirmiştir. Glouber'in zamana bağlı Ising modeline dayanan bu çalışmasını dielektrik durulmaya ilk defa Anderson (1970) uygulamıştır. En yakın dipol etkileşmelerini dikkate alarak birinci mertebeden bir diferansiyel denklem takımı yazmış ve nümerik olarak çözmüştür.

Daha sonra Bozdemir (1981), Anderson'un bu uygulamasından esinlenerek Glouber'in dinamik Ising modelini sonlu ve sonsuz elemanlı dipol zincirlerinin durulmasına uygulamış ve ilk defa ilgili dipol korelasyon fonksiyonlarının ve kompleks dielektrik sabitinin analitik ifadelerini türetmeyi başarmıştır. Bozdemir'in İsing modelinde her bir dipolün iki bileşeni olduğu dikkate alınmaktadır. Bileşenlerden birisi moleküler zincir eksenine dik olara yönelmekte, diğer bileşen ise zincir eksenine boyunca yönelmektedir. Bu modelde zincir boyunca konumlanan her dipolün yönelme olasılığı zamana bağlı olarak komşu dipollerin anlık yönelme olasılığına bağlıdır. Glouber'in zaman abağılı Ising modelini bu duruma uygulamıştır. Sonlu bir zincir veya sonsuz bir dipol zincirinin içindeki tek bir dipolün durulma fonksiyonunun Debye tipinde olmadığı ortaya konmuştur. Bu davranış dipoller arasındaki en yakın etkileşmelerin doğal bir sonucuna bağlanmıştır. Modelin nitel davranışının dielektrik durulma verileriyle uyumlu olduğunu göstermiştir.

Daha sonra Skinner (1983), Anderson (1970) ve Bozdemir'in (1981) yaptığı bu modelleri temel alan bir çalışma yapmıştır. Skinner bu çalışmasında öncekilerden farklı geçiş olasılıkları seçerek tek boyutlu moleküler zincir için korelasyon fonksiyonu bulmuştur. Elde ettiği sonuç KWW durulma fonksiyonunun $0.5 \leq \beta \leq 0.74$ değerleri için bu empirik fonksiyona uymaktadır. Bu çalışmasını polimerlerde, dielektrik durulmaya ve polarize olmuş ışık saçılmasına uygulamıştır.

Brey ve Prados (1995) düşük sıcaklık limitinde geçerli olan bir çalışma yapmış ve elde ettiği sonuçlar Cole-Davidson ($\beta_{CD} = 0.5$) tipinde dielektrik fonksiyonu olup Bozdemir'in elde ettiği sonuçlara değişik bir yoldan ulaşmış ve bu sonuçları doğrulamıştır (Eker S., 2004).

3. MATERYAL VE METOD

3.1. Diferansiyel Denklemler

Bilim ve tekniğin yasaları, matematik diline aktarıldığında birtakım denklemler aracılığı ile ifade edilir. Cebir, geometri ve analiz statik problemlerin birçoğunun çözümü için yeterli olmaktadır. Buna karşılık, doğadaki olayları tasvir eden yasaların büyük bir çoğunluğu, bir veya daha fazla büyüklüğün, diğer birtakım büyüklüklere göre değişim hızlarını içerir. Bu değişim hızları matematik olarak türev işlemi ile ifade edilir. Her bir sürecin matematik formülasyonunda değişik değişim hızları, değişik türevler olarak karşımıza çıkar ve bir fiziksel süreci tasvir eden yasalar, türevleri de içeren birtakım matematiksel bağıntılar haline dönüşür. Süreci karakterize eden fonksiyonların yanı sıra bunların sonlu mertebeden türevlerini de içeren bu türden matematiksel bağıntılara diferansiyel denklem adı verilir.

Net bir ifadeyle, birtakım bağımsız değişkenleri, bu değişkenin fonksiyonlarını ve fonksiyonların sonlu mertebeden türevlerini içeren denkleme diferansiyel denklem denir. Diferansiyel denklem, bir tek bağımsız değişkenin bilinmeyen fonksiyon veya fonksiyonlarını içerirse, adi, aksine birden fazla bağımsız değişkenin bilinmeyen fonksiyon veya fonksiyonlarını içeriyorsa, kısmi türevli diferansiyel denklem adını alır.

Bir diferansiyel denklemin içerdiği en yüksek mertebeli türevin mertebesine, diferansiyel denklemin mertebesi adı verilir.

Doğal bilimler ve sosyal bilimlerdeki süreçlerin matematik modellerinin oluşturulmasında karşımıza genel olarak diferansiyel denklemler çıkmaktadır. Adi diferansiyel denklemler günümüzde fizik, kimya, biyoloji, sosyoloji, işletme ve hemen hemen tüm mühendislik dallarında yaygın bir şekilde kullanılmaktadır. Buna rağmen, herhangi bir sürecin adi diferansiyel denklem yardımıyla tasvir edilebilmesi, başka bir deyişle bu sürecin bir matematiksel modelinin kurulabilmesi için birtakım genel koşulların sağlanması gerekmektedir. Bu koşullar şu şekilde sıralanabilir:

1. Süreç evrimsel olmalıdır: Yani, süreç ölçülebilir bir zaman süresinde belirli yasalara uygun olarak gelişmelidir. Klasik mekanik ve elektrik devrelerinde yer alan

birçok sürece evrimsel süreç gözüyle bakılabilir. Gerçekten, bu süreçleri idare eden yasalar, bakılan süreç boyunca zamana göre değişmemektedir. Evrimsel olmayan sürece örnek olarak mekanik darbenin herhangi bir cisim üzerinde yarattığı etki gösterilebilir.

2. Süreç, matematiksel olarak, sonlu sayıda parametrenin yardımıyla tasvir edilebilmelidir: Örneğin Galileo-Newton mekaniği uyarınca bir taneciğin serbest hareketi, bu taneciğin üç boyutlu uzayda her bir t anındaki $(x(t), y(t), z(t))$ koordinatları ve $(\dot{x}(t), \dot{y}(t), \dot{z}(t))$ hız vektörü ile tek değerli olarak belirlenir, yani taneciğin hareketi matematiksel olarak altı parametre ile tasvir edilebilir. Benzer şekilde, n taneciğin hareketi sözü edilen mekanik çerçevesinde matematiksel olarak $6n$ parametrenin yardımı ile verilebilir.

Buna karşın, iki ucundan tutturulmuş bir telin bir dış kuvvetin tesiri altında küçük genlikli titreşim hareketi, sonlu sayıda parametre ile ifade edilemez. Bu hareket, bilindiği gibi,

$$\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} - a^2 \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2} = 0 \quad (3.1)$$

şeklinde kısmi türevli bir denklem yardımıyla incelenir. Burada $u(x,t)$, t anında telin x koordinatının Ox ekseninden uzaklığını gösteren bir fonksiyondur. Kısmi türevli diferansiyel denklemlerle ifade edilen süreçlerin başka örnekleri elektrodinamik, hidrodinamik, dalga kuramı gibi alanlarda meydana çıkmaktadır.

3. Süreç diferansiyellenebilir fonksiyonlar yardımıyla tasvir edilebilecek bir süreç olmalıdır: Örneğin, bir uydunun dünya etrafında dönerken çizdiği yörünge ve hızı diferansiyellenebilir fonksiyonlarla ifade edilebildiklerinden bu hareketi bir adi diferansiyel denklem ile tasvir etmek mümkündür. Buna karşın, Brown taneciğinin yörüngesi sonlu zaman süresinde, pratik olarak, sonsuz sayıda zikzak yapan bir eğri olduğundan, bu eğri diferansiyellenebilir bir eğri değildir. Bu nedenle, bu hareketin bir adi diferansiyel denklem aracılığı ile ifade edilebilmesi beklenemez.

4. Sürecin deterministik bir süreç olması gerekmektedir: Diğer bir deyişle, sürecin bir anda belli olan durumuna göre geçmişi ve geleceği tek değerli olarak

belirlenebilmelidir. Örneğin, bir top mermisinin kendi yörüngesinin herhangi bir noktasındaki koordinatı ve hızı verildiğinde bu merminin nereden geldiğini ve nereye isabet edeceğini, Newton'un hareket yasaları ile belirlemek mümkündür. Bunun aksine, herhangi bir $t = t_0$ anında ortamın tüm noktalarında belli olan sıcaklık biliniyorsa, $t < t_0$ zaman süresinde bu ortamın sıcaklığını, yani sürecin geçmişini tek değerli olarak belirlemek mümkün değildir. Bu şekilde olan sürece yarı-stokastik süreç denir. Kuantum mekaniğinde taneciğin hareketi stokastik bir süreçtir, çünkü bu sürecin geçmişi ve geleceği bu sürecin verilmiş andaki durumuna göre belirlenemez. Stokastik ve yarı-stokastik süreçlerin adi diferansiyel denklemler ile ifade edilen matematiksel modelini yapmak mümkün değildir (Hasanov E., Uzgören G, Büyükaksoy A., 2002).

3.2. Kesirli (Fractional) Diferansiyel Hesap Tekniği

Türev ve integral genel olarak teknolojinin temelini oluşturmaktadır ve aynı zamanda doğal ve yapay sistemlerin çalışma prensiplerini anlamada çok önemli bir araçtır. Kesirli diferansiyel, matematiksel analizin bir kolu olarak, kendi adından da tahmin edileceği üzere, türev ve integralin tam olmayan (keyfi) derecelere genişletilmiş bir şeklidir. Konu, diferansiyel hesap kadar eski olup Leibniz ve Newton'un diferansiyel hesaplama tekniğini bulmalarına kadar uzanır (Bayın S., 2004).

Bir fonksiyonun birinci, ikinci, üçüncü vs. türevlerinin nasıl alındığını biliyoruz fakat $3/2$ nci türevini nasıl alabiliriz? Aynı şekilde bir fonksiyonu iki ya da üç defa integre edebiliriz ama $1/2$ defa integre edebilir miyiz? Leibniz 1695'te L'Hospital'a sorduğu "Tam sayı dereceden türevler, kesirli dereceden türevlere genelleştirilebilir mi?" sorusu kesirli diferansiyelin doğum tarihi olarak gösterilebilir. Leibniz'in kesirli türevler üzerine ortaya attığı bu soru, 300 yıldan daha fazla bir zamandır üzerinde çalışılan bir konu olmuştur. Leibniz'in yanı sıra Liouville, Riemann, Weyl, Fourier, Laplace, Lagrange, Euler, Abel, Lacroix, Grunwald ve Letnikov gibi ünlü birçok matematikçi de bu konu üzerinde çalışmışlardır (Loverro A., 2004).

O günden bu yana hızla artan bir biçimde, kesirli diferansiyel denklemler birçok fiziksel süreçlere uygulandı ve incelenen fiziksel süreçleri çok daha iyi betimleyen sonuçlar elde edildi. Viscoelasticity, akışkanlar, elektrokimya, fraktal süreçler, birçok difüzyon süreçleri vs. bu uygulamalar arasında yer almaktadır.

Kesirli hesap tekniğinin matematik uygulamalarının çoğu 20.yy. bitmeden ortaya koyulmuştur fakat mühendislik ve bilimsel uygulamalarda heyecan verici başarılar elde etmesi ancak geçtiğimiz yüz yıl içerisinde gerçekleşebilmiştir. Şu var ki kesirli diferansiyel denklemler anlaması oldukça güç olmasının yanı sıra tamsayı kuvvetli diferansiyellere göre daha doğru ya da kesin olduğu da söylenemez.

Kesirli hesabın tanımları ve kullanımını anlamak için bazı matematik tanımlarını iyi bilmek gerekmektedir. Bunlar öncelikle Gama fonksiyonları, Beta fonksiyonları, Laplace dönüşümleri ve Mittag-Leffler fonksiyonlarıdır (Podlubyn I., 1999).

3.2.1. Gama Fonksiyonu

Daha sonra da görüleceği üzere gama fonksiyonu, kesirli diferansiyel ile doğrudan ilişkilidir. Gama fonksiyonunun en basit anlamı faktöriyelin bütün reel sayılar için genelleştirilmesidir. Gama fonksiyonun tanımı

$$\Gamma(z) = \int_0^{\infty} e^{-u} u^{z-1} du, \quad z \in R \quad (3.2)$$

ile verilir. En belirgin özelliklerinden birisi

$$\Gamma(z+1) = z\Gamma(z), \quad z \in N_+, \Gamma(z) = (z-1)! \quad (3.3)$$

dir. Bu ifade kısmi integral yöntemiyle kolayca elde edilebilir:

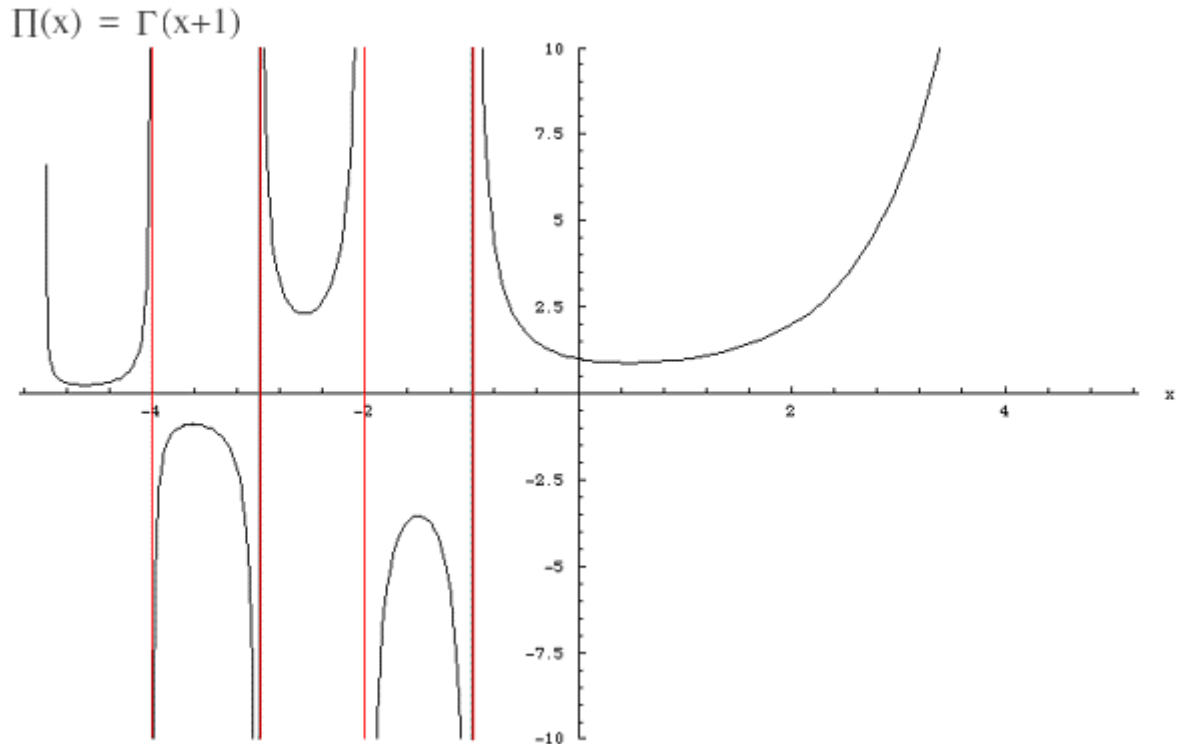
$$\Gamma(z+1) = \int_0^{\infty} e^{-t} t^z dt = \left[-e^{-t} t^z \right]_{t=0}^{\infty} + z \int_0^{\infty} e^{-t} t^{z-1} dt = z\Gamma(z) \quad (3.4)$$

Buradan açıkça görülmektedir ki $\Gamma(1) = 1$ dir ve (3.3) denklemini kullanılarak $z=1, 2, 3, \dots$ için

$$\Gamma(n+1) = n\Gamma(n) = n(n-1)! = n! \quad (3.5)$$

olduğu görülür.

Şekil 2, sıfır noktası civarında gama fonksiyonunun davranışını göstermektedir. Gama fonksiyonu pozitif bölgede her noktada tanımlı olmasına karşın, negatif tamsayı değerlerinde sonsuza gitmektedir (Arfken G.B., Weber H.J. 1995).



Şekil 2.1. Gama fonksiyonu eğrisi

3.2.2. Beta Fonksiyonu

Çoğu durumda gama fonksiyonunun değerlerinin belirli kombinasyonları yerine beta fonksiyonu olarak adlandırılan bir bağıntı kullanmak daha uygundur.

Beta fonksiyonu çoğunlukla

$$B(z, \omega) = \int_0^1 \tau^{z-1} (1-\tau)^{\omega-1} d\tau, \quad \text{Re}(z) > 0, \quad \text{Re}(\omega) > 0$$

şeklinde tanımlanır. En belirgin özellikleri arasında

$$B(p, q) = \frac{\Gamma(p)\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)} = B(q, p) \quad (3.6)$$

verilebilir (Arfken G.B., Weber H.J. 1995).

3.2.3. Laplace Dönüşümü

Laplace dönüşümü genel olarak karmaşık denklemlerin çözümünde kullanılan çok faydalı bir yöntemdir. Laplace dönüşümü

$$L\{f(t)\} = \int_0^{\infty} e^{-st} f(t) dt = \tilde{f}(s) \quad (3.7)$$

şeklinde verilir. Şayet (3.7) denklemi yakınsak ise $f(t)$ fonksiyonunun Laplace dönüşümü mevcuttur denir. Bunun için gerek şart e^{-st} 'nin azalma oranına nispeten $f(t)$ 'nin daha hızlı bir oranda büyümesidir.

Yaygın olarak kullanılan Laplace konvülyasyonu

$$f(t) * g(t) = \int_0^t f(t-\tau)g(\tau)d\tau = g(t)f(t) \quad (3.8)$$

ile verilir. (3.8) bağıntısının Laplace dönüşümü ise

$$L\{f(t) * g(t)\} = \tilde{f}(s)\tilde{g}(s) \quad (3.9)$$

şeklindedir. Bir $f(t)$ fonksiyonunun n . tamsayı dereceden türevinin Laplace dönüşümü

$$L\{f^{(n)}(t)\} = s^n \tilde{f}(s) - \sum_{k=0}^{n-1} s^{n-k-1} f^{(k)}(0) = s^n \tilde{f}(s) - \sum_{k=0}^{n-1} s^k f^{(n-k-1)}(0) \quad (3.10)$$

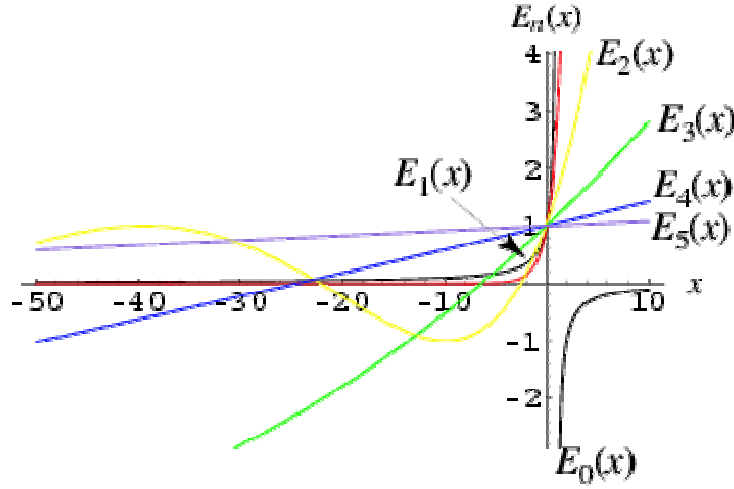
ile verilir ve Laplace dönüşümünün sıklıkla kullanılan önemli özelliklerinden biridir (Podlubny I., 1999,).

3.2.4. Mittag-Leffler Fonksiyonları

Mittag-Leffler fonksiyonları (Mittag-Leffler G.) kesirli diferansiyel yönteminde çok yaygın kullanım alanları bulan oldukça önemli bir fonksiyondur. Eksponansiyel fonksiyon e^z , tamsayı dereceden diferansiyel denklemler teorisinde çok önemli bir rol oynar. Onun bir parametrelili genelleştirilmiş şekli

$$E_\alpha(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{\Gamma(\alpha k + 1)} \quad (3.11)$$

ile Mittag-Leffler tarafından verilmiştir.



Şekil 2.2. Mittag-Leffler fonksiyonları

Mittag-Leffler tipi iki parametrelili fonksiyona genelleştirme ise ilk olarak Agarwal ve Humbert tarafından Laplace dönüşüm tekniği kullanılarak yapılmış olup, kesirli dereceden diferansiyel hesapta önemli bir yere sahiptir. İki parametrelili Mittag-Leffler fonksiyonu

$$E_{\alpha,\beta}(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{\Gamma(\alpha k + \beta)} \quad (3.12)$$

seri açılımıyla verilir.

(3.12) denklemden

$$E_{1,1}(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{\Gamma(k+1)} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{k!} = e^z \quad (3.13)$$

$$E_{1,2}(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{\Gamma(k+2)} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{(k+1)!} = \frac{1}{z} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^{k+1}}{(k+1)!} = \frac{e^z - 1}{z} \quad (3.14)$$

$$E_{1,3}(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{\Gamma(k+3)} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{(k+2)!} = \frac{1}{z^2} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^{k+2}}{(k+2)!} = \frac{e^z - 1 - z}{z^2} \quad (3.15)$$

ve en genel haliyle

$$E_{1,m}(z) = \frac{1}{z^{m-1}} \left\{ e^z - \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{k} \right\} \quad (3.16)$$

elde edilir (Podlubyn I., 1999, Oldham K.B., Spanier J., 1974).

Hiperbolik sinüs ve hiperbolik kosinüs, Mittag-Leffler fonksiyonunun özel birer durumlarıdır:

$$E_{2,1}(z^2) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^{2k}}{\Gamma(2k+1)} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^{2k}}{(2k)!} = \cosh(z) \quad (3.17)$$

$$E_{2,2}(z^2) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^{2k}}{\Gamma(2k+2)} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^{2k+1}}{(2k+1)!} = \frac{\sinh(z)}{z} \quad (3.18)$$

3.3. Keyfi Dereceden Türev ve İntegraller (Diferintegraller)

3.3.1. Türev

Türev, en yalın haliyle

$$\frac{df}{dx} = \frac{df(x)}{dx} = \lim_{\delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \delta x) - f(x)}{\delta x} \quad (3.19)$$

şeklinde tanımlanır. Bu ifadenin ardışık olarak türevleri alındığı takdirde

$$\frac{d^2 f}{dx^2} = \lim_{k \rightarrow 0} \frac{\lim_{k_1 \rightarrow 0} \frac{f(x+k+k_1) - f(x+k)}{k_1}}{k}$$

$k = k_1 = \delta x$ aynı değerler olarak seçilirse

$$= \lim_{\delta x \rightarrow 0} \frac{f(x) - 2f(x - \delta x) + f(x - 2\delta x)}{(\delta x)^2}$$

....

....

$$\frac{d^n f}{dx^n} = \lim_{\delta x \rightarrow 0} \frac{\sum_{j=0}^n (-1)^j \binom{n}{j} f(x - j\delta x)}{(\delta x)^n} \quad (3.20)$$

ile türevin en genel tanımına ulaşılır. δx , $N \rightarrow \infty$ giderken $[a, x]$ aralığında N eşit parçaya bölünürse; yani

$$\delta_N x = \frac{[x-a]}{N} \quad N=1, 2, 3, \dots \quad (3.21)$$

olsun. Bu durumda (3.20) bağıntısı

$$\frac{d^n f}{dx^n} = \lim_{\delta_N x \rightarrow 0} \frac{\sum_{j=0}^n (-1)^j \binom{n}{j} f(x - j\delta_N x)}{(\delta_N x)^n} \quad (3.22)$$

halini alacaktır. Bu ifadede $j > n$ değerleri için kombinasyon terimi sıfır olacağından toplamın sınırını $N-1$ 'e kadar alınabilir ve limitin sürekli durumlarda var olduğu sınırlamasıyla n . dereceden türev

$$\frac{d^n f}{dx^n} = \lim_{N \rightarrow 0} \frac{\sum_{j=0}^{N-1} (-1)^j \binom{n}{j} f(x - j \frac{x-a}{N})}{(\frac{x-a}{N})^n} \quad (3.23)$$

şeklinde ifade edilebilir (Bayın S. 2004).

3.3.2. İntegral

Bir fonksiyonun integrali, onun altındaki alana eşit olacağından Riemann toplamı olarak

$$\begin{aligned} \frac{d^{-1} f}{d(x-a)^{-1}} &= \int_a^x f(x_0) dx_0 \\ &= \lim_{\delta_N x \rightarrow 0} \{ \delta_N x [f(x) + f(x - \delta_N x) + f(x - 2\delta_N x) + \dots + f(a + \delta_N x)] \} \\ &= \lim_{\delta_N x \rightarrow 0} \left\{ (\delta_N x) \sum_{j=0}^{N-1} f(x - j\delta_N x) \right\} \end{aligned} \quad (3.24)$$

şeklinde yazılır. Burada da (3.21) yaklaşımı kullanıldı. Bu ifade daha da genelleştirilebilir. İkinci integral

$$\begin{aligned} \frac{d^{-2} f}{d(x-a)^{-2}} &= \int_a^x dx_1 \int_a^{x_1} f(x_0) dx_0 \\ &= \lim_{\delta_N x \rightarrow 0} \{ [\delta_N x]^2 [f(x) + 2f(x - \delta_N x) + 3f(x - 2\delta_N x) + \dots + Nf(a + \delta_N x)] \} \\ &= \lim_{\delta_N x \rightarrow 0} \left\{ [\delta_N x]^2 \sum_{j=0}^{N-1} (j+1) f(x - j\delta_N x) \right\} \end{aligned} \quad (3.25)$$

şeklinde yazılır ve üçlü integral ise

$$\begin{aligned} \frac{d^{-3}f}{d(x-a)^{-3}} &= \int_a^x dx_2 \int_a^{x_2} dx_1 \int_a^{x_1} f(x_0) dx_0 \\ &= \lim_{\delta_N x \rightarrow 0} \left\{ [\delta_N x]^3 \sum_{j=0}^{N-1} \frac{(j+1)(j+2)}{2} f(x - j\delta_N x) \right\} \end{aligned} \quad (3.26)$$

ile verilir. Buradan n ardışık integral ise

$$\begin{aligned} \frac{d^{-n}f}{d(x-a)^{-n}} &= \lim_{\delta_N x \rightarrow 0} \left\{ [\delta_N x]^n \sum_{j=0}^{N-1} \binom{j+n-1}{j} f(x - j\delta_N x) \right\} \\ &= \lim_{N \rightarrow 0} \left\{ \left[\frac{x-a}{N} \right]^n \sum_{j=0}^{N-1} \binom{j+n-1}{j} f\left(x - j\left(\frac{x-a}{N}\right)\right) \right\} \end{aligned} \quad (3.27)$$

olacaktır (Bayın S., 2004). Burada (3.27) denklemi (3.23) denklemiyle oldukça benzerdir. Aradaki fark, kombinasyon terimi ve (3.23) 'dan farklı olarak (3.27) ifadesinde toplamda daima pozitif katsayıların gelmesidir.

3.3.3. Türev ve İntegralin Ortak İfadesi

3.3.3.1 Grünwald-Letnikov tanımı:

Grünwald ve Letnikov türevin genel tanımından yola çıkmış ve gama fonksiyonlarından faydalanmışlardır. Gama fonksiyonlarının

$$(-j) \binom{n}{j} = \binom{j-n-1}{j} = \frac{\Gamma(j-n)}{\Gamma(-n)\Gamma(j+1)} \quad (3.28)$$

özdeşliği esas alınmıştır. Bu ifadeden yararlanılarak n 'nin negatif ve pozitif değerleri için hem türevi hem de integrali aynı anda sağlayan

$$\frac{d^n f}{d(x-a)^n} = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{\sum_{j=0}^{N-1} \frac{\Gamma(j-n)}{\Gamma(j+1)} f(x - j \frac{x-a}{N})}{\left(\frac{x-a}{N}\right)^n \Gamma(-n)} \quad (3.29)$$

ifadesi yazabilir. Burada n 'nin pozitif değerleri için türevin (3.23) genel tanımına, pozitif değerleri için ise integralin (3.27) genel tanımına ulaşılmaktadır.

n yerine tüm değerleri alabilen q ifadesi yazıldığı takdirde (3.29) bağıntısı en genel haliyle

$$\frac{d^q f}{d(x-a)^q} = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{\sum_{j=0}^{N-1} \frac{\Gamma(j-q)}{\Gamma(j+1)} f(x - j \frac{x-a}{N})}{\left(\frac{x-a}{N}\right)^q \Gamma(-q)} \quad (3.30)$$

şeklinde ifade edilir ve bu bağıntı Grünwald-Letnikov tanımı olarak adlandırılır (Podlubny I. 1999, Bayın S. 2004).

3.3.3.2. Riemann-Liouville Tanımı

Sıkça kullanılan bu tanım Cauchy formülünden yararlanılarak elde edilir. İlk olarak

$$f(x) = \frac{dF(x)}{dx} \quad (3.31)$$

gibi bir türev tanımlanmış olsun. Her iki tarafın a 'dan x 'e kadar integralini alınırsa,

$$\int_a^x f(t) dt = F(t) \Big|_a^x \quad (3.32)$$

$$\int_a^x f(t) dt = F(x) - F(a) \quad (3.33)$$

olacaktır. Her iki tarafın x 'e göre türevi alınırsa

$$\frac{d}{dx} \int_a^x f(t) dt = \frac{dF(x)}{dx} \quad (3.34)$$

$$\frac{d}{dx} \int_a^x f(t) dt = f(x) \quad (3.35)$$

olduğu görülür.

$$I = \int_{U(x)}^{V(x)} f(t) dt \quad (3.36)$$

şeklinde bir integral göz önüne alalım. Görüldüğü üzere I fonksiyonu $U(x)$ ve $V(x)$ 'e bağlıdır. Bu durumda kısmi türevin

$$\frac{dI}{dx} = \frac{\partial I}{\partial V(x)} \frac{\partial V(x)}{\partial x} + \frac{\partial I}{\partial U(x)} \frac{\partial U(x)}{\partial x} \quad (3.37)$$

özdeşliğinden faydalanarak, bu ifadede (3.36) bağıntısı yerine yazılırsa

$$\frac{d}{dx} \int_{U(x)}^{V(x)} f(t) dt = \frac{\partial}{\partial V(x)} \int_{U(x)}^{V(x)} f(t) dt \frac{\partial V(x)}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial U(x)} \int_{U(x)}^{V(x)} f(t) dt \frac{\partial U(x)}{\partial x} \quad (3.38)$$

bulunur. Eşitliğin sağı, (3.35) özdeşliği göz önüne alınarak yeniden düzenlenirse

$$\frac{d}{dx} \int_{U(x)}^{V(x)} f(t) dt = f(V) \frac{dV}{dx} - f(U) \frac{dU}{dx} \quad (3.39)$$

elde edilir. Burada ‘-’ işareti (3.38) denkleminin sağ tarafındaki son integral teriminin sınırlarının yer değiştirmesi neticesinde olmuştur.

İntegralin alma işleminin

$$\frac{d}{dx} \int_a^b f(x,t) dt = \int_a^b \frac{\partial f(x,t)}{\partial x} dt \quad (3.40)$$

özelliğinden faydalanılarak (burada a ve b birer sabittirler) ve

$$I = \int_{U(x)}^{V(x)} f(x,t) dt \quad (3.41)$$

integrali için,

$$I = I(x, V(x), U(x)) \quad (3.42)$$

olduğuna göre (3.38) ve (3.39) denklemlerinin daha kapalı şekli

$$\frac{d}{dx} \int_{U(x)}^{V(x)} f(x,t) dt = f(x,V) \frac{dV}{dx} - f(x,U) \frac{dU}{dx} + \int_{U(x)}^{V(x)} \frac{\partial f(x,t)}{\partial x} dt \quad (3.43)$$

halini alır ve bu ifade *Leibniz kuralı* olarak adlandırılır.

Aşağıdaki integral verilmiş olsun

$$I_n(x) = \int_a^x (x-t)^{n-1} f(t) dt \quad (3.44)$$

Burada $n > 0$ ve tamsayı, a ise sabittir. Bu integralde Leibniz'in (3.43) denklemini kullanılırsa; burada $F(x, t) = (x - t)^{n-1} f(t)$ olduğu görülmektedir, $I_n(x)$ 'in türevi için

$$\frac{dI_n(x)}{dx} = (n-1) \int_a^x (x-t)^{n-2} f(t) dt + [(x-t)^{n-1} f(t)]_{t=x} \quad (3.45)$$

yazarız. Eşitliğin sağındaki ikinci ifadenin $n > 1$ için sifıra gittiği açıktır ve bu nedenle $n > 1$ için

$$\frac{dI_n(x)}{dx} = (n-1)I_{n-1} \quad (3.46)$$

ve $n=1$ için ise

$$\frac{dI_1}{dx} = f(x) \quad (3.47)$$

olacaktır. (3.45) denkleminin k defa türevi alınırsa

$$\frac{d^k I_n}{dx^k} = (n-1)(n-2)\dots(n-k)I_{n-k} \quad (3.48)$$

İfadesi elde edilir. $k=n-1$ değeri için daha kullanışlı olarak

$$\frac{d^{n-1} I_n}{dx^{n-1}} = (n-1)! I_1(x) \quad (3.49)$$

yazılır ve (3.47) ifadesi de göz önüne alınırsa

$$\frac{d^n I_n}{dx^n} = (n-1)! f(x) \quad (3.50)$$

denklemini elde edilir. Burada $n \geq 1$ değerleri için (3.49) ve (3.50) denklemleri kullanılarak

$$\begin{aligned} I_1(x) &= \int_a^x f(x_1) dx_1 \\ I_2(x) &= \int_a^x I_1(x_2) dx_2 = \int_a^x \int_a^{x_2} f(x_1) dx_1 dx_2 \\ &\dots \\ &\dots \\ I_n(x) &= (n-1)! \int_a^x \int_a^{x_n} \dots \int_a^{x_3} \int_a^{x_2} f(x_1) dx_1 dx_2 \dots dx_n \end{aligned} \quad (3.51)$$

genel ifadesine ulaşılır. Burada

$$\int_a^x \int_a^{x_n} \dots \int_a^{x_3} \int_a^{x_2} f(x_1) dx_1 dx_2 \dots dx_n = \frac{1}{(n-1)!} \int_a^x (x-t)^{n-1} f(t) dt \quad (3.52)$$

Cauchy integrali olarak bilinir. Bu ifadenin sağ tarafı bir operatör ile temsil edilirse ve n yerine her değeri alabilen bir q değeri yazılırsa, ifade

$$\frac{d^q f}{d(x-a)^q} = \frac{1}{\Gamma(-q)} \int_a^x (x-t)^{-q-1} f(t) dt \quad ; q < 0 \quad (3.53)$$

şeklini alır. Bu ifade Riemann-Liouville kesirli integrali olarak adlandırılır. Basit bir matematiksel işlem ile $n > q$ olmak şartıyla $q \geq 0$ değerleri için

$$\frac{d^q f}{d(x-a)^q} = \frac{d^n}{dx^n} \left[\frac{1}{\Gamma(n-q)} \int_a^x (x-t)^{-(q-n)-1} f(t) dt \right] \quad (3.54)$$

bağıntısı elde edilebilir. (3.54) denklemi Riemann-Liouville kesirli türevi olarak bilinir. Bu yöntemle yazılan (3.53) integrali sadece $q < 0$ değerleri için yakınsatır; bu denklem $q \geq 0$ için $n > q$ olmak koşuluyla çözülür. (3.54) denkleminde görüldüğü gibi n kez türevin integrale uygulanması uygulamada zorluklar yaşanmasına neden olabilmektedir.

(3.50) denkleminde (3.44) bağıntısı yerine yazılırsa

$$\frac{d^n}{dx^n} \int_a^x (x-t)^{n-1} f(t) dt = (n-1)! f(x) \quad (3.55)$$

bulunur. Burada ifadenin n defa integrali alınır ve bir operatörle temsil edilirse

$$\int_a^x (x-t)^{n-1} f(t) dt = (n-1)! \frac{d^n}{dx^n} f(x) \quad (3.56)$$

$$\frac{1}{\Gamma(-n)} \int_a^x (x-t)^{-n-1} f(t) dt = \frac{d^n}{dx^n} f(x) \quad (3.57)$$

olduğu görülür. Bu ifade n 'nin negatif değerleri için geçerlidir çünkü gösterim integral temsili içindir (Bayın, S., 2004, Podlubny I.,1999, Miller K.S., Ross B., 1993).

3.3.3.3. Cauchy Tanımı

Kesirli diferansiyelin Grünwald ve Riemann-Liouville tanımları en genel tanımlardır. Şimdi ele alacağımız Cauchy tanımı bunlar kadar kullanışlı değildir.

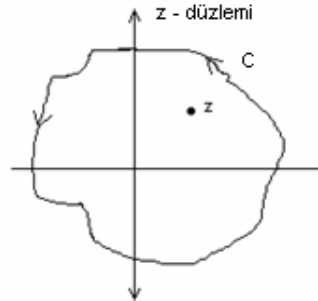
Kapalı bir C yolu üzerinde ve içinde analitik olan bir $f(z)$ fonksiyonunun n . dereceden türevi

$$\frac{d^n f(z_0)}{dz_0^n} = \frac{n!}{2\pi i} \oint \frac{f(z) dz}{(z - z_0)^{n+1}}, \quad n \geq 0 \text{ ve tamsayı} \quad (3.58)$$

ile verilir. Burada z , C kapalı yolu üzerinde bir noktayı, z_0 ise C içinde herhangi bir noktayı göstermektedir. Formülü z_0 noktasını reel eksen üzerinde bir nokta olarak ve herhangi bir q değeri için

$$\frac{d^q f(x)}{dx^q} = \frac{\Gamma(q+1)}{2\pi i} \oint \frac{f(z) dz}{(z - x)^{q+1}} \quad (3.59)$$

şeklinde yeniden düzenleyelim. Bu formül Şekil 3 'te gösterilen C yolu için ve q 'nun pozitif tamsayı değerleri için geçerlidir. q 'nun negatif tamsayı olduğu durumlarda ise $\Gamma(q+1)$ fonksiyonu sonsuz olacağından tanımsızdır. q 'nun negatif ve tamsayıdan farklı değerleri için ise diferintegral tanımı olarak kullanılabilir.

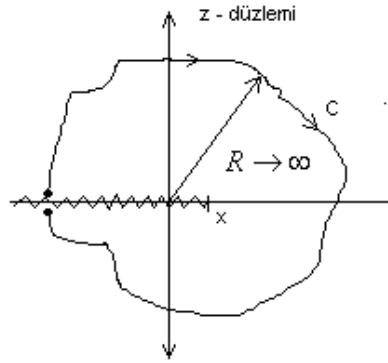


Şekil 3.1. Cauchy integral formülünün C yolu

Ancak bu durumda x dal noktası olacağından kesik çizginin yönüne dikkat edilmesinin yanı sıra C yolu da Şekil 3 'deki gibi olmayacaktır. Kesik çizgisini şekilde gösterildiği gibi dal noktasının solunda ve reel eksen üzerinde sonsuza kadar uzanacak şekilde seçilir ve C yolunu da Şekil 4 'te gösterildiği gibi alırsa,

$$\frac{d^q f(x)}{dx^q} = \frac{\Gamma(q+1)}{2\pi i} \oint \frac{f(z) dz}{(z-x)^{q+1}}, \quad q < 0, \neq \text{tamsayı} \quad (3.60)$$

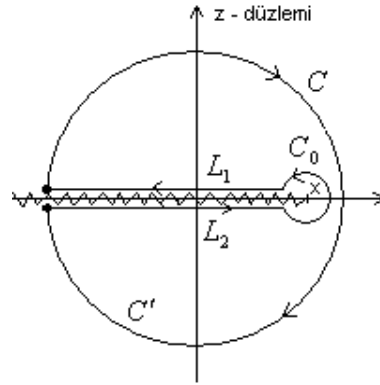
formülü, q 'nun negatif ve tamsayıdan farklı değerleri için diferintegral tanımı olarak kullanılabilir. Burada integral, C yolunun yarıçapının sonsuza gittiği durumda, saat yönünde hesaplanır (Bayın S., 2004).



Şekil 3.2. Diferintegral formülündeki C yolu

3.3.3.4. Genelleştirilmiş Cauchy Tanımı ve Riemann-Liouville Tanımı

(3.60) tanımı bu haliyle kullanmak zordur ($z = x$ 'de kapalı integral analitik değildir). Bu nedenle integral için şu şekilde bir yol seçelim:

Şekil 3.3. Diferintegral formülündeki C' kapalı yolu

Şayet bu yeni C' kapalı yolunu izlersek

$$\frac{f(z)}{(z-x)^{q+1}} \quad (3.61)$$

fonksiyonu analitik olacağından

$$\oint_{C'} \frac{f(z)dz}{(z-x)^{q+1}} = 0 \quad (3.62)$$

yazabiliriz. Burada C' yolu

$$C' = C + C_0 + L_1 + L_2 \quad (3.63)$$

parçalarından oluşmaktadır. C_0 yoluna ait integral, yolun yarıçapının sıfıra gittiği durumda hesaplandığından yolun üzerinde bir nokta için

$$z - x = \delta e^{i\theta} \quad (3.64)$$

yazarsak

$$\oint_C \frac{f(z)dz}{(z-x)^{q+1}} \quad (3.65)$$

integrali, q 'nun negatif ve tamsayı değerleri haricinde

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} \oint_{C_0} \frac{f(x + \delta e^{i\theta}) \delta i e^{i\theta} d\theta}{\delta^{q+1} e^{i(q+1)\theta}} = \lim_{\delta \rightarrow 0} f(x) (\delta^{-q}) i \int_0^{2\pi} e^{-iq\theta} d\theta \rightarrow 0 \quad (3.66)$$

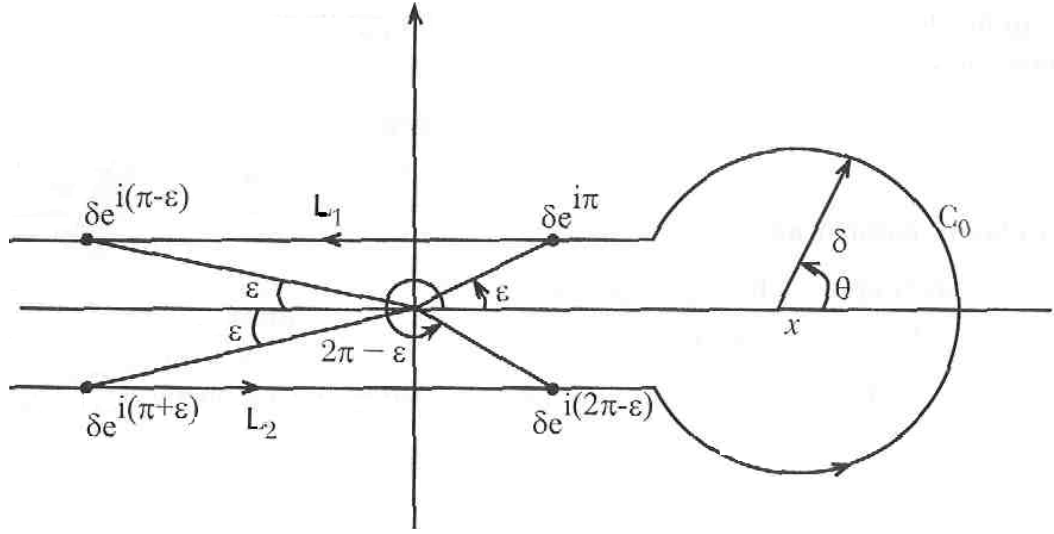
olacaktır. Burada $\delta \rightarrow 0$ limitinde C_0 integralinin sıfır olması için $q < 0$ alınmıştır.

Bu sonucu kullanarak (3.60) denklemindeki integrali ise

$$\begin{aligned} \oint_C \frac{f(z)dz}{(z-x)^{q+1}} &= - \left[\oint_{L_1} \frac{f(z)dz}{(z-x)^{q+1}} + \oint_{L_2} \frac{f(z)dz}{(z-x)^{q+1}} \right] \\ &= \oint_{L_1} \frac{f(z)dz}{(z-x)^{q+1}} - \oint_{L_2} \frac{f(z)dz}{(z-x)^{q+1}} \end{aligned} \quad (3.67)$$

şeklinde yazabiliriz. Çevrim, saat yönünde olduğundan ilk denklemden (-) ortak parantezi kullandık.

Bu durumda $\left[\oint_{L_1} - \oint_{L_2} \right] dz$ integrali daha kolay hesaplanabilir.



Şekil 3.4. $\oint_{\rightarrow L_1}$, $\oint_{\rightarrow L_2}$ ve \oint_{C_0} integralleri yolu

İntegralin önce $[-\infty, 0]$ arasındaki kısımlarını hesaplayalım.

$$\begin{aligned} & \lim_{\phi \rightarrow 0} \left[\int_{-\infty}^0 \frac{f(\delta e^{i(\pi-\phi)}) d\delta e^{i(\pi-\phi)}}{(\delta e^{i(\pi-\phi)} - x)^{q+1}} - \int_{-\infty}^0 \frac{f(\delta e^{i(\pi+\phi)}) d\delta e^{i(\pi+\phi)}}{(\delta e^{i(\pi+\phi)} - x)^{q+1}} \right] \\ &= \lim_{\phi \rightarrow 0} \left[e^{i(\pi-\phi)} - e^{i(\pi+\phi)} \right] \int_{-\infty}^0 \frac{f(\delta e^{i\pi}) d\delta}{(-\delta - x)^{q+1}} = 0 \end{aligned} \quad (3.68)$$

buluruz. \oint_C integralinin kalan kısmını yazılırsa

$$\oint_C \frac{f(z) dz}{(z-x)^{q+1}} = \lim_{\phi \rightarrow \infty} \left[\int_0^x \frac{f(\delta e^{i\phi}) e^{i\phi} d\delta}{(\delta-x)^{q+1} e^{i(q+1)\phi}} - \int_{-\infty}^0 \frac{f(\delta e^{i(2\pi-\phi)}) e^{i(2\pi-\phi)} d\delta}{(\delta-x)^{q+1} e^{i(q+1)(2\pi-\phi)}} \right] \quad (3.69)$$

elde edilir. Bu ifadeyi (3.60) denkleminde yerine yazar ve yeniden düzenlersek

$$\begin{aligned}
\frac{d^q f(x)}{dx^q} &= \frac{\Gamma(q+1)}{2\pi i} \left[1 - e^{-i(q+1)2\pi} \right] \int_0^x \frac{f(\delta) d\delta}{(\delta-x)^{q+1}} \\
&= \frac{\Gamma(q+1)}{2\pi i} \left[2i \sin(\pi q) (-1)^q \right] \int_0^x \frac{f(\delta) d\delta}{(\delta-x)^{q+1}} \\
&= -\frac{\Gamma(q+1)}{\pi} \sin(\pi q) \int_0^x \frac{f(\delta) d\delta}{(x-\delta)^{q+1}} \tag{3.70}
\end{aligned}$$

elde ederiz. Burada Γ fonksiyonunun

$$\Gamma(-q) = \frac{-\pi \operatorname{cosec}(\pi q)}{\Gamma(q+1)} \tag{3.71}$$

özelliğinden faydalanarak

$$\frac{d^q f(x)}{dx^q} = \frac{1}{\Gamma(-q)} \int_0^x \frac{f(\delta) d\delta}{(x-\delta)^{q+1}}, \quad q < 0, \neq \text{tamsayı} \tag{3.72}$$

bağıntısını elde ederiz. Bu ifade (3.53) Riemann-Liouville tanımıyla aynıdır (Bayın S., 2004).

3.3.3.5. Caputo Kesirli Türevi

Kesirli diferansiyel tekniğin Riemann-Liouville tanımları kesirli türev-integral ve onun uygulamalarıyla ilgilenen saf matematiksel çalışmalarda çok büyük bir rol oynamıştır. Bununla birlikte modern teknolojinin gelişimi saf matematiğin uygulama ve ele alınış şeklini de etkilemiştir.

Kesirli diferansiyel tekniğinde, başlangıç koşullarını fiziksel durumlara en uygun şekilde veren Caputo olmuştur. Caputo'nun tanımı

$${}_a^c D_t^\alpha = \frac{1}{\Gamma(\alpha - n)} \int_a^t \frac{f^{(n)}(\tau) d\tau}{(t - \tau)^{\alpha + 1 - n}}, \quad (n - 1 < \alpha < n) \quad (3.73)$$

ile verilir. Caputo yaklaşımının en temel avantajı, Caputo kesirli türevlerinin tamsayı dereceden diferansiyel denklemlerdekiyle aynı formda başlangıç koşullarına sahip olmasıdır. Başka bir ifadeyle $t = a$ alt limitinde, bilinen bir fonksiyonun tam derece türevlerinin limit değerlerini içermesidir (Podlubyn I., 1999,).

3.3.4. Kesirli Türev ve İntegrallerin Özellikleri

3.3.4.1. Lineerlik

Kesirli türevler de tamsayı türevlere benzer bir lineerlik özelliğine sahiptir:

$$D^p(\lambda f(t)) + \mu D^p g(t) = \lambda D^p f(t) + \mu D^p g(t) \quad (3.74)$$

Bu özellik doğrudan Grünwald-Letnikov tanımından

$$\begin{aligned} {}_a D_t^p(\lambda f(t)) + \mu D^p g(t) &= \lim_{h \rightarrow 0} \lim_{nh = t - a} h^{-p} \sum_{r=0}^n (-1)^r \binom{p}{r} (\lambda f(t - rh) + \mu g(t - rh)) \\ &= \lambda \lim_{h \rightarrow 0} \lim_{nh = t - a} h^{-p} \sum_{r=0}^n (-1)^r \binom{p}{r} f(t - rh) \\ &\quad + \mu \lim_{h \rightarrow 0} \lim_{nh = t - a} h^{-p} \sum_{r=0}^n (-1)^r \binom{p}{r} g(t - rh) \\ &= \lambda {}_a D_t^p f(t) + \mu {}_a D_t^p g(t) \end{aligned} \quad (3.75)$$

olduğu görülebilir. Aynı şekilde p dereceden ($k-1 \leq p < k$) Riemann-Liouville kesirli türevleri için

$$\begin{aligned}
{}_a D_t^p (\lambda f(t) + \mu g(t)) &= \frac{1}{\Gamma(k-p)} \frac{d^k}{dt^k} \int_a^t (t-\tau)^{k-p-1} (\lambda f(\tau) + \mu g(\tau)) d\tau \\
&= \frac{\lambda}{\Gamma(k-p)} \frac{d^k}{dt^k} \int_a^t (t-\tau)^{k-p-1} f(\tau) d\tau \\
&\quad + \frac{\mu}{\Gamma(k-p)} \frac{d^k}{dt^k} \int_a^t (t-\tau)^{k-p-1} g(\tau) d\tau \\
&= \lambda {}_a D_t^p f(t) + \mu {}_a D_t^p g(t)
\end{aligned} \tag{3.76}$$

lineerlik özelliği doğrulanabilir (Podlubny I., 1999, Miller K.S., Ross B., 1993).

3.3.4.2. Homojen Olma Özelliği

Diferentellerin homojen olma özelliği

$${}_0 D_t^\alpha [Cf(t)] = C[{}_0 D_t^\alpha f(t)] \tag{3.77}$$

ile verilir. Burada C herhangi bir sabittir (Felber F.S., 2005).

3.3.4.3. Bir Serinin Diferintegralı

Düzgün yakınsak bir serinin diferintegralin doğrusallık özelliğinden faydalanılarak bütün k değerleri için

$$\frac{d^k}{d(x-a)^k} \sum_{j=0}^{\infty} f_j = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{d^k f_j}{d(x-a)^k} \tag{3.78}$$

şeklinde terim terim diferintegrali alınabilir. Diferintegralenen seri de aynı aralıkta düzgün yakınsaktır (Bayın S., 2004).

3.3.4.4. Kesirli Türevlerin Leibniz Kuralı

Eğer $f(t)$ ve $\varphi(t)$ fonksiyonlarının türevleri $[a,t]$ aralığında sürekliseler

$${}_a D_t^\alpha (\varphi(t) f(t)) = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{\alpha}{k} \varphi^{(k)}(t) {}_a D_t^{\alpha-k} f(t) \quad (3.79)$$

ifadesi Leibniz kuralı olarak adlandırılır. Leibniz kuralı özellikle kesirli türevi bilinen bir fonksiyon ile bir polinomun çarpımının kesirli türevini hesaplamada çok kullanışlıdır (Podlubny I., 1999, Miller K.S., Ross B., 1993).

3.3.4.5. Birleşme özelliği

Diferintegrallerle yapılan işlemlerde

$$D^\alpha D^\beta = D^\beta D^\alpha$$

$$D^\alpha D^\beta = D^{\alpha+\beta}$$

$$D^\alpha f = g \rightarrow f = D^{-\alpha} g$$

gibi işlemler ancak belirli durumlarda geçerlidir. Bir $f(t)$ sürekli fonksiyonu için α ve β pozitif sayılar olmak üzere $\alpha < \beta$, yani $\alpha - \beta < 0$ olduğu durumlarda

$${}_a D_t^\alpha \left[{}_a D_t^{-\beta} f(t) \right] = {}_a D_t^{\alpha-\beta} f(t) \quad (3.80)$$

eşitliği geçerlidir. Ancak, önce türevin sonra da integralin alındığı durumlarda ise

$${}_a D_t^{-\beta} [{}_a D_t^\alpha f(t)] = {}_a D_t^{\alpha-\beta} f(t) - \sum_{k=\beta-\alpha}^{\beta-1} \frac{(t-a)^k}{k!} f^{(\alpha+k-\beta)}(a) \quad (3.81)$$

denklemleri ile diferenteller hesaplanır (Miller K.S., Ross B., 1993, Bayın S., 2004).

3.3.4.6. Bileşik Fonksiyonların Kesirli Türevleri

Herhangi bir $\varphi(t)$ fonksiyonu

$$\varphi(t) = F(h(t)) \quad (3.82)$$

şeklinde verilen bir bileşik fonksiyon olsun. Burada $h(t)$ diferansiyellenebilir bir fonksiyondur. Bu durumda $\varphi(t)$ 'nin kesirli dereceden türevi

$$\begin{aligned} {}_a D_t^p F(h(t)) &= \frac{(t-a)^{-p}}{\Gamma(1-p)} \varphi(t) \\ &+ \sum_{k=1}^{\infty} \binom{p}{k} \frac{k!(t-a)^{k-p}}{\Gamma(k-p+1)} \sum_{m=1}^k F^{(m)}(h(t)) \sum_{r=1}^k \frac{1}{a_r!} \left(\frac{h^{(r)}(t)}{r!} \right)^{a_r} \end{aligned} \quad (3.83)$$

ile verilir. Bu ifade Bruno zincir kuralı olarak adlandırılır. Burada toplam \sum

$$\sum_{r=1}^k r a_r = k \quad \text{ve} \quad \sum_r a_r = m \quad (3.84)$$

olmak üzere a_1, a_2, \dots, a_k 'nin negatif olmayan tamsayı değerleri üzerinden alınır (Podlubny I., 1999, Miller K.S., Ross B., 1993, Oldham K.B., Spanier J., 1974)

3.3.4.7. Bir Parametreye Bağlı Bir İntegralin Riemann-Liouville Kesirli Türevi

Üst limitiyle aynı parametreye bağımlı iki parametrelili bir integralin türevi

$$\frac{d}{dt} \int_0^t F(t, \tau) d\tau = \int_0^t \frac{\partial F(t, \tau)}{\partial t} d\tau + F(t, t-0) \quad (3.85)$$

şeklinde verilir. Böyle bir integralin Riemann-Liouville kesirli türevi ise, $(0 < \alpha < 1)$ olmak üzere

$${}_0 D_t^\alpha \int_0^t K(t, \tau) d\tau = \int_0^t {}_\tau D_t^\alpha K(t, \tau) d\tau + \lim_{\tau \rightarrow t-0} {}_\tau D_t^{\alpha-1} K(t, \tau) \quad (3.86)$$

ile verilir. Eğer $K(t, \tau)$ yerine $K(t-\tau)f(\tau)$ şeklinde bir fonksiyon alırsak yukarıdaki bağıntı

$${}_0 D_t^\alpha \int_0^t K(t-\tau)f(\tau) d\tau = \int_0^t {}_0 D_t^\alpha K(\tau)f(t-\tau) d\tau + \lim_{\tau \rightarrow +0} f(t-\tau) {}_0 D_t^{\alpha-1} K(\tau) \quad (3.87)$$

halini alır (Podlubny I., 1999).

3.3.4.8. Ölçek değişikliği

Bir fonksiyonun alt limit a 'ya göre ölçek değişikliği

$$x \rightarrow \beta(x-a) + a \quad (3.88)$$

olarak anlaşılır burada β sabit olup ölçek faktörüdür. Alt limitin sıfır olduğu durumda $x \rightarrow \beta x$ olacaktır. Alt limitin sıfırdan farklı olduğu durumlarda ölçek değişikliği diferentegrallerde

$$\frac{d^\alpha f(\beta(x-a)+a)}{[d(\beta(x-a))]^\alpha} = \beta^{-\alpha} \frac{d^\alpha f(\beta(x-a)+a)}{[d(x-a)]^\alpha} \quad (3.89)$$

olarak verilir. Bu formül a 'nın sıfır olduğu durumlarda daha kullanışlıdır. Bu durumda formül

$$\frac{d^\alpha f(\beta x)}{[d(\beta x)]^\alpha} = \beta^{-\alpha} \frac{d^\alpha f(\beta x)}{[dx]^\alpha} \quad (3.90)$$

halini alır (Bayın S., 2004, Loverro A., 2004).

3.4. Kesirli Diferansiyel Tekniğinde Kullanılan Bazı Önemli Dönüşümler

Kesirli diferansiyel hesap tekniği ile çözülen birçok problemde aşağıdaki dönüşümleri iyi bilmek ve kullanmak çok kullanışlıdır.

3.4.1. Kesirli Türev ve İntegrallerin Laplace Dönüşümü

(3.7) denkleminde de hatırlanacağı üzere bir $f(t)$ fonksiyonun Laplace dönüşümü

$$F(s) = L\{f(t); s\} = \int_0^{\infty} e^{-st} f(t) dt \quad (3.91)$$

ile verilir. Burada $F(s)$ kompleks s değişkeninin bir fonksiyonudur. Diğer bir özelliği olarak $f(t)$ fonksiyonunun ters Laplace dönüşümü

$$f(t) = L^{-1}\{F(s); t\} = \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} e^{st} F(s) ds, \quad c = \text{Re}(s) > c_0 \quad (3.92)$$

şeklindedir (Podlubny I., 1999, Miller K.S., Ross B., 1993).

3.4.1.1. Riemann-Liouville ve Grünwald-Letnikov Kesirli İntegrallerinin Laplace Dönüşümü

$\alpha > 0$ olmak üzere

$$L\{ {}_0 D_t^{-\alpha} f(t); s \} = s^{-\alpha} F(s) \quad (3.93)$$

denklemini Riemann-Liouville ve Grünwald-Letnikov tarafından kesirli integrallerin Laplace dönüşümü olarak verilir (Podlubny I., 1999, Miller K.S., Ross B., 1993).

3.4.1.2. Riemann-Liouville Kesirli Türevin Laplace Dönüşümü

Riemann-Liouville kesirli türevlerinin Laplace dönüşümü, $\alpha > 0$ olmak üzere

$$L\{ {}_0 D_t^\alpha f(t); s \} = s^\alpha F(s) - \sum_{k=0}^{n-1} s^k \left[{}_0 D_t^{\alpha-k-1} f(t) \right]_{t=0} \quad (3.94)$$

$$(n-1 \leq \alpha < n)$$

ile verilir. Bununla birlikte $t = 0$ alt limitinde kesirli türevlerin limit değerlerinin fiziksel gösteriminin bulunmaması nedeniyle pratik olarak uygulanabilirliği sınırlıdır (Podlubny I., 1999, Miller K.S., Ross B., 1993).

3.4.1.3. Caputo Türevinin Laplace Dönüşümü

Caputo kesirli türevinin Laplace dönüşüm denklemi

$$L\{ {}_0^C D_t^\alpha f(t); s \} = s^\alpha F(s) - \sum_{k=0}^{n-1} s^{\alpha-k-1} f^{(k)}(0) , \quad (n-1 \leq \alpha < n) \quad (3.95)$$

ile verilir. Caputo kesirli türevinin Laplace dönüşümünün bu ifadesi $f(t)$ ve onun türevlerini içermektedir. Bu haliyle bazı fiziksel süreçlere uygulanması çok daha kolaydır. Örneğin, $f(0)$ başlangıç durumu, $f'(0)$ başlangıç hızı ve $f''(0)$ başlangıç ivmesi olabilir. Bununla birlikte lineer kesirli diferansiyel denklemlerin çözümünde de kullanışlı bir ifadedir (Podlubny I., 1999, Miller K.S., Ross B., 1993).

3.4.1.4. Grünwald-Letnikov Kesirli Türevinin Laplace Dönüşümü

$0 < \alpha < 1$ olmak üzere

$$L\{ {}_0 D_t^\alpha f(t); s \} = s^\alpha F(s) \quad (3.96)$$

ile verilen bağıntı Grünwald-Letnikov kesirli türevinin Laplace dönüşümü olarak adlandırılır (Podlubny I., 1999, Miller K.S., Ross B., 1993).

3.4.2. Kesirli Türevlerin Fourier Dönüşümleri

$(-\infty, \infty)$ aralığında integrallenebilen sürekli bir $h(t)$ sürekli fonksiyonu için Fourier dönüşümü

$$F_e \{ h(t); \omega \} = \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega t} h(t) dt \quad (3.97)$$

ile verilir. Benzer şekilde ters Fourier dönüşümü ise

$$h(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} H_e e^{-i\omega t} d\omega \quad (3.98)$$

şeklindedir (Podlubny I., 1999, Miller K.S., Ross B., 1993).

3.4.2.1. Kesirli İntegrallerin Fourier Dönüşümü

$0 < \alpha < 1$ olmak üzere

$$F_e \left\{ {}_{-\infty} D_t^{-\alpha} g(t); \omega \right\} = (i\omega)^{-\alpha} G(\omega) \quad (3.99)$$

ile verilen denkleme Riemann-Liouville kesirli türevin Fourier dönüşümü denir. Bu dönüşüm Grünwald-Letnikov ${}_{-\infty} D_t^{-\alpha} g(t)$ kesirli integrali ve Caputo ${}_{-\infty}^C D_t^{-\alpha} g(t)$ kesirli integralleri için de geçerlidir (Podlubny I., 1999, Miller K.S., Ross B., 1993).

3.4.2.2. Kesirli Türevlerin Fourier Dönüşümü

Riemann-Liouville, Grünwald-Letnikov ve Caputo denklemlerini aynı formda, alt limitler için $a = -\infty$ için,

$$\left. \begin{array}{l} {}_{-\infty} D_t^{\alpha} g(t) \\ {}_{-\infty} D_t^{\alpha} g(t) \\ {}_{-\infty}^C D_t^{\alpha} g(t) \end{array} \right\} = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \int_{-\infty}^t \frac{g^{(n)}(\tau) d\tau}{(t-\tau)^{\alpha+1-n}} = {}_{-\infty} D_t^{\alpha-n} g^{(n)}(t) \quad (3.100)$$

$$(n-1 < \alpha < n)$$

şeklinde yazabiliriz.

Böylelikle $a = -\infty$ alt limitinde Riemann-Liouville, Grünwald-Letnikov ve Caputo Kesirli türevlerin Fourier dönüşümü

$$\begin{aligned}
F_e \{D^\alpha g(t); \omega\} &= (-i\omega)^{\alpha-n} F_e \{g^{(n)}(t); \omega\} \\
&= (-i\omega)^{\alpha-n} (-i\omega)^n G(\omega) \\
&= (-i\omega)^\alpha G(\omega)
\end{aligned} \tag{3.101}$$

ile verilir. Burada D_α gösterimi Rieman-Liouville ${}_{-\infty}D_t^{-\alpha} g(t)$, Grünvald-Letnikov ${}_{-\infty}D_t^{-\alpha} g(t)$ ve Caputo ${}_{-\infty}^C D_t^{-\alpha} g(t)$ kesirli türevlerini temsil etmektedir (Podlubny I., 1999, Miller K.S., Ross B., 1993).

4. DİELEKTRİK DURULMANIN KESİRLİ (FRACTIONAL) MASTER DENKLEMİ YÖNTEMİYLE ANALİZİ

Birçok bilim adamı dielektrik maddelerin fiziksel özelliklerini açıklayabilmek için yüzyıldan fazla bir zamandır kuramsal ve deneysel çalışmalar yapmıştır. Bu çalışmalar sonucunda dielektrik maddelerin yapısını açıklayan bir takım temel bağıntılar ve kuramlar geliştirilmiştir. Özellikle dielektrik ortamlarda deneysel olarak gözlemlenen durulma eğrilerinin, yani dielektrik fonksiyonun frekansa bağlı olarak değişimini veren eğrilerin genelde Debye tipinde olmaması dielektrik biliminin en önemli sorunlarından birisi olmuştur. Bu konuda çalışmalar yoğun bir biçimde devam etmektedir.

Bu çalışmaların bir devamı olarak bu kısımda, kinetik Ising modelinden elde edilen master denkleminin kesirli (fractional) hesap tekniği ile çözüm yöntemleri ortaya konmuş ve dielektrik durulma süreçlerine uygulanmış, önceki çözümlerle karşılaştırılmıştır.

4.1. Kesirli Dereceden Türev ve İntegraller

Kesirli türev ve integralin orijinleri değişik, birbirinden farklı birçok tanımı vardır. Bölüm III 'den hatırlanacağı üzere kesirli diferansiyel denklemlerin ifadelerinde kullanılan en önemli tanımlar aşağıdaki gibidir:

Kesirli integral hesabı için en genel tanım

$${}_c D_x^{-\nu} f(x) = \frac{1}{\Gamma(\nu)} \int_c^x (x-t)^{\nu-1} f(t) dt \quad (4.1)$$

şeklinde verilir. Burada $c = 0$ için denklem

$${}_0 D_x^{-\nu} f(x) = \frac{1}{\Gamma(\nu)} \int_0^x (x-t)^{\nu-1} f(t) dt \quad , \nu > 0, t > 0 \quad (4.2)$$

4. DİELEKTRİK DURULMANIN KESİRLİ (FRACTIONAL) MASTER DENKLEMİ YÖNTEMİYLE ANALİZİ Muhammet Serdar ÇAVUŞ

Riemann-Liouville kesirli integrali adını alır (Watson D.P., 2004). Burada $D^{-\nu}$, ν . dereceden kesirli integral operatörüdür. Riemann-Liouville kesirli türevi ise

$$\frac{d^\nu f}{d(x-a)^\nu} = \frac{d^n}{dx^n} \left[\frac{1}{\Gamma(n-\nu)} \int_a^x (x-t)^{-(n-\nu)-1} f(t) dt \right], \quad n > \nu, \quad \nu \geq 0 \quad (4.3)$$

ile verilmektedir.

Başlangıç koşullarının daha kolay kullanılabilmesi ile dikkati çeken bir diğer tanım

$${}_0^c D_t^\alpha f(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha-n)} \int_0^t \frac{f^{(n)}(\tau) d\tau}{(t-\tau)^{\alpha+1-n}}, \quad (n-1 < \alpha < n) \quad (4.4)$$

ile verilen *Caputo* denklemdir (Podlubny I., 1999).

4.2. Durulma Süreçleri

Bilindiği gibi üstel olmayan durulmalar, sıvı ve katı maddeler fiziğinin uzun zamandır süren ve halen önemini koruyan, araştırılmaların sürdürüldüğü bir konusu olmuştur (Metzler R., Klafter J., 2002). Farklı maddelerin (dielektirikler, yarı iletkenler, ferromanyetikler vs.) durulma özellikleri genelde (bir step fonksiyonu elektrik alanının etkisi altında akan elektirik akımını temsil eden) zaman bölgesi tepki (response) fonksiyonu $f(t)$ cinsinden ya da onun Fourier dönüşümünün frekansa bağlı gerçel ve sanal bileşenleri cinsinden ifade edilir(Uchaikin V.V., 2003):

$$\tilde{f}(i\omega) = \int_0^\infty e^{-i\omega t} f(t) dt = \varphi'(\omega) - i\varphi''(\omega) \quad (4.5)$$

Burada $f(t) = -d\Phi(t)/dt$ olup, $\Phi(t)$ durulma fonksiyonudur. Durulma süreçleri klasik anlamda eksponansiyel fonksiyonlar cinsinden;

4. DİELEKTRİK DURULMANIN KESİRLİ (FRACTIONAL) MASTER DENKLEMİ YÖNTEMİYLE ANALİZİ Muhammet Serdar ÇAVUŞ

$$\phi(t) = \exp(-t/\tau) , t \geq 0 \quad (4.6)$$

şeklinde tanımlanmaktadır. (4.6) bağıntısı genelde Maxwell-Debye durulma fonksiyonu olarak adlandırılır. Burada τ karakteristik zaman ölçeğidir ve normalize edilmiş başlangıç koşulu $\phi(0) = 1$ 'dir. (4.6) bağıntısı

$$\frac{d\phi(t)}{dt} = -\tau^{-1}\phi(t) \quad (4.7)$$

durulma denklemini sağlar.

Bununla birlikte çoğu sistemlerde dinamik davranışlar ideal exponansiyel modelden belirgin sapmalar gösterir. Zaman bölgesindeki deneysel sonuçlar genellikle Kohlrausch-Williams-Watts (KWW) eksponansiyel fonksiyonu cinsinden

$$\phi(t) = e^{-(t/\tau)^\beta} , 0 < \beta < 1 \quad (4.8)$$

ya da asimtotik kuvvet yasası cinsinden

$$\phi(t) = \frac{1}{1 + (t/\tau)^\delta} , \delta > 0 \quad (4.9)$$

tanımlanır (Metzler R., Klafter J., 2002).

Genel olarak, kompleks sistemlerde deneysel sonuçlarla uyumlu olan üç empirik durulma fonksiyonu vardır:

(i) KWW fonksiyonu

$$\Phi(t) \approx \exp\left[-\left(\frac{t}{\tau}\right)^\alpha\right] , 0 < \alpha < 1, t > \tau \quad (4.10)$$

(ii) Eksponansiyel-logaritmik fonksiyon

$$\Phi(t) \approx \exp\left[-B \ln^\alpha\left(\frac{t}{\tau}\right)\right] \quad (4.11)$$

(iii) Algebraic decay (Cebirsel bozunum)

$$\Phi(t) \approx \left(\frac{t}{\tau}\right)^{-\alpha} \quad (4.12)$$

Burada α , τ ve B , uygun-sabit parametrelerdir (Novikov V.V., Wojciechowski K.W., Privalko V.P., 2000).

Deneysel olarak sistemler, genellikle normalize edilmiş kompleks alınganlık $\chi(\omega) = \chi'(\omega) - i\chi''(\omega)$ 'nın sürücü frekansı ω 'nın bir fonksiyonu kabul edildiği dış bir harmonik sürücü altında frekans uzayında incelenirler. Birinci bölümde de verildiği gibi tanım olarak $\chi(\omega)$

$$\chi(\omega) = \int_0^\infty e^{-i\omega t} d(-\phi(t)) = 1 - i\omega \int_0^\infty e^{-i\omega t} \Phi(t) dt \quad (4.13)$$

ilişkisi ile kısa süreli durulma fonksiyonuna bağlıdır. Burada $\Phi(t) = \phi(t) / \phi(0)$ 'dır (Metzler R., Klafter J., 2002).

4.3. Zamana Bağlı Spin-Spin Korelasyon Fonksiyonları

Sonsuz bir-boyutlu Ising modelini ele alalım. Sistemin durumu, spin vektörü $\sigma = \{\sigma_i\}$ ile belirlenir, burada $\sigma_i = \pm 1$, i . konumdaki spindir. σ konfigürasyonu için sistemin enerjisi

4. DİELEKTRİK DURULMANIN KESİRLİ (FRACTIONAL) MASTER DENKLEMİ YÖNTEMİYLE ANALİZİ Muhammet Serdar ÇAVUŞ

$$H(\sigma) = -J \sum_i \sigma_i \sigma_{i+1} \quad (4.14)$$

dir. Burada J pozitif bir sabittir. Sistemin durumu Glauber dinamikli (Glauber R.J., 1963) Markov süreci ile tanımlanır. Bu nedenle, t' zamanında σ' verilmişken sistemin t zamanında σ konumunda bulunma koşullu olasılığı $P_{1/1}(\sigma, t / \sigma', t')$, master denklemini sağlar

$$\frac{\partial P_{1/1}(\sigma, t / \sigma', t')}{\partial t} = \sum_{i=-\infty}^{\infty} [\omega_i(R_i \sigma) P_{1/1}(R_i \sigma, t / \sigma', t') - \omega_i(\sigma) P_{1/1}(\sigma, t / \sigma', t')] \quad (4.15)$$

Burada $R_i \sigma$, i . spinin dönmesiyle σ 'dan elde edilen konfigürasyondur (yani σ_i durumu $-\sigma_i$ durumuna dönmüştür), $\omega_i(\sigma)$ ise dönme için geçiş olasılığıdır ve

$$\omega_i(\sigma) = \frac{\alpha}{2} \left[1 - \frac{\gamma}{2} \sigma_i (\sigma_{i-1} + \sigma_{i+1}) \right] \quad (4.16)$$

dir. Burada α , sistemin durumunun zaman skalasını tanımlamak için bir başka pozitif sabittir. γ

$$\gamma = \tanh \frac{2J}{k_B T} \quad (4.17)$$

ile verilir ve ısı banyosunun T sıcaklığının bir fonksiyonudur (k_B , Boltzmann sabiti). Denge zaman korelasyon fonksiyonu $\langle \sigma_i(0) \sigma_i(t) \rangle_{eq}$ için

$$A_{i,j}(t) = \langle \sigma_i(t) \sigma_i(0) \rangle_{eq} = \sum_{\sigma} \sum_{\sigma'} \sigma_i \sigma_j P_{1/1}(\sigma, t / \sigma', 0) P_{eq}(\sigma') \quad (4.18)$$

4. DİELEKTRİK DURULMANIN KESİRLİ (FRACTIONAL) MASTER DENKLEMİ YÖNTEMİYLE ANALİZİ Muhammet Serdar ÇAVUŞ

şeklinde bir fonksiyon tanımlamak uygundur. Burada sistemin denge dağılım fonksiyonu

$$P_{eq} = \frac{e^{-H(\sigma)/k_B T}}{\sum_{\sigma} e^{-H(\sigma)/k_B T}}$$

dır. (4.18) denkleminin zamana göre türevi

$$\frac{\partial A_{i,j}(t)}{\partial t} = -\alpha A_{i,j}(t) + \frac{\alpha\gamma}{2} [A_{i-1,j}(t) + A_{i+1,j}(t)] \quad (4.19)$$

olur. Bu denklemde

$$A_{i,j}(0) = \langle \sigma_i \sigma_j \rangle_{eq} = \eta^{|i-j|} \quad (4.20)$$

başlangıç koşulu ve

$$\eta = \tanh \frac{J}{k_B T} \quad (4.21)$$

göz önüne alınırsa, (4.19) denkleminin yapısı ve (4.20) denkleminde verilen başlangıç koşulu $A_{i,j}$ 'nin $|i-j|$ 'nin bir fonksiyonu olduğunu ifade eder. Böylece

$$f_n(t) = A_{i,j}(t) = \langle \sigma_{j+n}(t) \sigma_j(0) \rangle_{eq} \quad (4.22)$$

şeklinde bir fonksiyon tanımlarız. Burada $n = i - j$ 'dir. Bu fonksiyon

$$\frac{\partial}{\partial t} f_n = -\alpha f_n + \frac{\alpha\gamma}{2} [f_{n-1} + f_{n+1}] \quad (4.23)$$

4. DIELEKTRİK DURULMANIN KESİRLİ (FRACTIONAL) MASTER DENKLEMİ YÖNTEMİYLE ANALİZİ Muhammet Serdar ÇAVUŞ

şeklinde bir denklemi sağlar ve burada n tamsayısı $-\infty < n < \infty$ aralığındadır (Brey J.J., Prados A., 1996).

(4.23) denklemini zamanın ve konumun bir fonksiyonu olarak

$$\frac{\partial}{\partial t} f(x, t) = -\alpha f(x, t) + \frac{\alpha\gamma}{2} [f(x-1, t) + f(x+1, t)] \quad (4.24)$$

şeklinde yazılabiliriz. (4.24) denklemi seriye açıldığı takdirde, yüksek mertebe türevli terimlerin ihmal edilmesiyle

$$\frac{\partial}{\partial t} f(x, t) = (\alpha\gamma - \alpha) f(x, t) + \frac{\alpha\gamma}{2} \frac{\partial^2 f(x, t)}{\partial x^2} \quad (4.25)$$

difüzyon bağıntısına ulaşılır. (4.25) denklemini, değişkenlerine ayırma yöntemiyle çözebiliriz; $f(x, t) = \phi(t)R(x)$. Çözümün zamana bağlı kısım için

$$\frac{d}{dt} \phi(t) = -\lambda \phi(t) \quad (4.26)$$

yazabiliriz. Burada λ ayırma parametresidir Bu ifadenin çözümü bilinen Debye durulma fonksiyonunu verir. Fakat doğada gözlenen olaylar her zaman tam diferansiyel denklemlere uymayabilir; örneğin anormal difüzyon olayında görüldüğü gibi.

(4.26) denklemini kesirli diferansiyel denklem şeklinde ifade edersek

$${}_0D_t^\nu \phi(t) = -\lambda \phi(t) \quad (4.27)$$

yazabiliriz. Burada ${}_0D_t^\nu$, (4.6) ile verilen Caputo diferansiyel operatörüdür. başlangıç koşulu

4. DİELEKTRİK DURULMANIN KESİRLİ (FRACTIONAL) MASTER DENKLEMİ YÖNTEMİYLE ANALİZİ Muhammet Serdar ÇAVUŞ

$$\lim_{t \rightarrow 0} \phi(t) = \phi(0) \quad (4.28)$$

ve $\lambda = 1/\tau^\nu$ seçildiği takdirde (4.27) denkleminin çözümü, (4.28) başlangıç koşulu altında kesirli diferansiyel denklemler çözüm tekniği ile

$$\Phi(t) = E_\nu\left(- (t/\tau)^\nu\right) \quad (4.29)$$

elde edilir (Hilfer R., 2002, Elwakı S.A., Zahran M.A., 1999). (4.27) denkleminin çözümünde $\phi(0) = 1$ başlangıç koşulu olarak alınmıştır [Çözümün ayrıntıları Ek 1 'de verilmiştir] . Burada $E(.)$

$$E_\alpha(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{\Gamma(\alpha k + 1)} \quad (4.30)$$

ile tanımlanan Mittag-Leffler fonksiyonudur. Buradan $t/\tau \ll 1$ için

$$\Phi(t) \approx 1 - \frac{(t/\tau)^\nu}{\Gamma(\nu+1)} + \dots = \exp\left[- \frac{(t/\tau)^\nu}{\Gamma(\nu+1)}\right], \quad 0 < \nu \leq 1 \quad (4.31)$$

KWW (Kolraush-William-Watts) fonksiyonu elde edilir. $t/\tau \gg 1$ değerleri için

$$\Phi(t) \approx \frac{\sin(\nu\pi)}{\pi} \frac{\Gamma(\nu)}{(t/\tau)^\nu} \quad (4.32)$$

asimtotik davranış ile karşılaşırız (Mainardi F., Raberto M., Gorenflo R., Scalas E., 2000). Bu denklemin, aynı zamanda empirik olarak verilen (4.12) algebraic decay fonksiyonu ile aynı biçimde olduğu görülmektedir.

4. DİELEKTRİK DURULMANIN KESİRLİ (FRACTIONAL) MASTER DENKLEMİ YÖNTEMİYLE ANALİZİ Muhammet Serdar ÇAVUŞ

(4.29) denklemi, (4.13) denkleminde yerine yazılarak, frekans bölgesinde, kolayca

$$\chi(\omega) = \frac{1}{1 + (i\omega\tau)^v}, \quad 0 < v \leq 1 \quad (4.33)$$

empirik Cole-Cole bağıntısını verdiği gösterilebilir [Çözümün ayrıntıları Ek 2 'de verilmiştir].

Stokastik Master durulma denklemi (4.23), jenerasyon fonksiyonu yöntemiyle uygun sınır koşulları altında çözümü Prados (1996) tarafından

$$\chi(\omega) = \alpha \frac{1 - \eta^2}{1 + \eta^2} \frac{1}{[(i\omega + \alpha)^2 - \alpha^2 \gamma^2]^{1/2}} \quad (4.34)$$

bağıntısı ile verilmiştir. (Brey J.J., Prados A., 1996). Bu ifade düşük sıcaklıklarda Cole-Davidson dağılımına dönüşmektedir:

$$\chi(\omega) = \frac{1}{(1 + i\omega\tau_{CD})^{\beta_{CD}}} \quad (4.35)$$

Burada τ_{CD} sabit ve $\beta_{CD} = 1/2$ 'dir (Brey J.J., Prados A., 1996).

(4.33) tipi denklemlerin daha ayrıntılı analitik çözümleri sonlu ve sonsuz dipol zincirleri için Bozdemir (1981) ve Monte Carlo simülasyonu yöntemiyle analizi Eker S., Bozdemir S. ve Özdemir M. (2005) tarafından yapılmıştır. Bu çalışmalardan da Debye, Cole-Cole ve Cole-Davidson tipi dağılım fonksiyonları elde edilmiştir.

5. TARTIŞMA VE SONUÇ

Bu çalışmada, kinetik Ising modelinden elde edilen stokastik master durulma denkleminin kesirli diferansiyel denkleme dönüştürülerek elde edilen çözümünün Cole-Cole empirik fonksiyonunu verdiği gösterilmiştir. Buradaki çözüm bize Debye türü olmayan davranışları anlatan Master denkleminin tam diferansiyel olmadığını, kesirli diferansiyel yapıda olduğunu göstermektedir. Kesirli olmayan master denkleminin çözümü ile kesirli olan master denkleminin çözümü karşılaştırıldığında kesirli olan master denkleminin sonucunun diğerinden daha genel ve kapsamlı olduğu görülmektedir. Bu iki denklemin sonuçları belli aralıklarda birbiriyle örtüşmektedir. Kesirli diferansiyel denklemin çözümünden KWW fonksiyonu ve cebirsel bozunum (algebraic decay) fonksiyonu elde edilebilmektedir. Buna karşın Ising tipi master denkleminin çözümünden elde edilen ifadenin grafiği çizildiğinde Debye, Cole-Cole ve Cole-Davidson tipi eğrilerin elde edildiği (Bozdemir S., 1981) gösterilmiştir.

Ayrıca Debye tipi olmayan davranışların, Mittag-Leffler fonksiyonları ile de tanımlanabileceği ve bu fonksiyonların durulma süreçlerinin tanımında önemli bir rol oynayabileceği bu çalışmayla ortaya konmuştur. Bu doğasıyla kesirli hesap tekniği, çok karmaşık yapıdaki sistemlerin davranışlarını anlamaya yönelik yeni bir bakış açısı getirmiştir. Doğa her zaman doğrusal bir içeriğe sahip değildir ve doğayı tanımlayacak fiziksel denklemlerin niteliği, yine doğanın kendisi gibi kesirli bir yapıya sahip olabilir. Kesirli diferansiyel tekniği oldukça yeni uygulama alanları bulmasına karşın, doğanın bu kesirli davranışına başarılı bir yöntem olarak uygulanabileceği anlaşılmaktadır. Ancak uyarılmış bir sistemin durulması sırasında zamanın fractional yapıda bir davranış göstermesinin altında yatan fiziksel mekanizma hala anlaşılabilmiş değildir, gizemini korumaya devam etmektedir.

KAYNAKLAR

- ADAM LOVERRO, 2004. Fractional Calculus: History, Defination and Aplications for the Engineer, Depertment of Aerospace and Mechanical Engineering University of Notre Dame, IN 46555, USA
- AGILENT TECHNOLOGİES, 2005, Microwave Dielectric Spectroscopy CPAC Sponsor's Meeting, May 2
- ARFKEN G.B., WEBER H.J. 1995. Mathematical Methods for Physicist, Fourth Edition, Academic Pres
- BOZDEMİR S., 1981. Phys. Status Solidi B 103 (1981) 459, Phys. Status Solidi B 104 (1981)37
- BÖTTCHER C.J.F., BORDEVİJK P., 1978. Theoriy of Electric Polarization, Volume 1,2, Elsevier Publishing, Amsterdam
- BREY J. J., PRADOS A., 1996. Low-temperature Relaxation in the one-dimensional Ising Model, Physical Reviev E, Volume 53, number 1,
- CARL F. LORENZO, TOM T. HARTLEY, 2005. <http://www.nasatech.com/Briefs/Oct02/LEW17139.html>, 9.08.2005
- COLE K.S., COLE R.H., 1941, J. Chem. Physics, 9 :341
- EKER S., 1997. Kramer-Kronig Dönüşümlerinin Nümerik İntegrasyonu ve Dielektrik Verilerine Uygulaması, Yüksek Lisans Tezi, Çukurova Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Fizik Anabilim Dalı
- EKER S., 2004. Dielektrik Durulma Mekanizmasının Zamana Bağlı Ising Modeli Kullanılarak Monte Carlo Simülasyonu, Doktora Tezi, Çukurova Üniversitesi FenBilimleri Enstitüsü Fizik Anabilim Dalı
- EKER S., BOZDEMİR S., ÖZDMİR M., 2005, Monte Carlo Simulation of the Dielectric Relaxation Mechanism by Using the Time-Dependent Ising Model
- ELWAKIL S.A., ZAHRAN M.A., 1999. Fractional Integral of Master Equation, PII: SO960-0779(98)001176-3, Chaos, Solitons&Fractals Vol. 10, No. 9, pp. 1545, 1999, 0960-0779/99/5
- FELBER F.S., 2005. New Exact Solutions of Differential Equations Derived by Fractional Calculus, Applied Mathematics and Computation, 0096-3003/\$

- GLAUBER R.J., 1963, Time Dependent Statistics of the Ising Model, Journal of Mathematical Physics, Volume 4, Number 2
- HASANOV E., UZGÖREN G., BÜYÜKAKSOY A., 2002. Diferansiyel Denklemler Teorisi, Papatya Yayıncılık
- HILFER R., 2002. Experimental evidence for fractional time evolution in glass forming materials, Chemical physics 284 (2002) 399-408
- KIRAN M. KOLWANKAR, 1998. Studies Of Fractal Structures And Processes Using Methods Of The Fractional Calculus, , arXiv:chao-dyn/9811008 v1 4 Nov 1998
- LANDAU L.D., LIFSHITZ E.M. 1960. Electrodynamics of Continuous Media, Pergamon Pres, Oxford
- MAINARDI F., RABERTO M., GORENFLO R., SCALAS E., 2000. Fractional calculus and Continuous-time finance II: the waiting-time distribution, arXiv:cond-mat/0006454 v2 11
- MARCIA KLEINZ, THOMAS J. OSLER, 2000. The College Mathematics Journal, Vol. 31, No. 2, (2000), pp. 82-887
- MEHMET KOŞAL, 2001. MOS Yapısında SiO_2 'nin Kompleks Dielektrik Sabitinin Frekansa Bağlı Değişiminin C-V Ölçüm Yöntemleriyle Belirlenmesi, Çukurova Üniversitesi Fen bilimleri Enstitüsü Fizik Anabilim Dalı
- MELTEM UYSAL (AYDIN), 1997. Dielektrikte Yeni Gelişmeler Üzerine Bir Araştırma, Yüksek Lisans Tezi, Ç. Ü. Fen bilimleri Enstitüsü Fizik Anabilim Dalı
- METZLER R., NONNENMACHER T.F., 2003. Fractional Relaxation Processes and Fractional Models for the Description of a Class of Viscoelastic Materials, International Journal of Plasticity 19 (2003) 941-959
- METZLER R., KLAFTER J., 2000. The Random Walk's Guide to Anomalous Diffusion: A fractional Dynamics Approach, Physics Reports 339 (2000) 1-77
- MİLLER K. S., ROSS B., 1993. An Introduction to the Fractional Calculus and Fractional Differential Equations, John Wiley & Sons, Inc. 1993, ISBN 0-71-58884-9

- MİTTAG-LEFFLER G. 1905, Acta Math. 29 (1905) 101.
- NOVIKOV V.V., WOJCIECHOWSKI K.W., PRIVALKO V.P., 2000. Anomalous dielectric Relaxation of İnhomogeneous Media With Chaotic Structure, J. Phys.: Condens. Matter 12 (2000) 4869-4879
- NC STATE UNIVERSITY, *Principles of Electronic Materials and Devices, Second Edition*, S.O. Kasap (©McGraw-Hill, 2002), <http://Materials.USask.Ca>
- OLDHAM K.B., SPANIER J.,1974. The Fractional Calculus, Academic Pres, New York
- PODLUBYN I., 1999. Fractional Differential Equations, Academic Press
- RALF METZLER, JOSEPH KLAFTER, 2002. From Stretched Exponential To Inverse Power-Law: Fractional Dynamics, Cole–Cole Relaxation Processes, And Beyond, Journal of Non-Crystalline Solids 305 (2002) 81-87
- SELÇUK B., 2004. Fen ve Mühendislik Bilimlerinde Matematik Yöntemler, Genişletilmiş ikinci baskı, Ders Kitapları Anonim Şirketi, Eylül 2004, ISBN 975-443-397-6
- UCHAİKİN V.V., 2003. Relaxation Processes and Fractional Differential Aquations, International Journal of Theoretical Physics, Vol. 42, No. 1
- UFUKTEPE Y. BOZDEMİR S., 1997, Elektromanyetik Teori, Baki Kitap ve Yayınevi, ISBN: 975-96039-8-5
- WATSON D.P., 2004. Fractional Calculus and Its Applications, Department of Mathematics, Mry Washington College
- CHUNXIANG ZHU, Dept of ECE, National Universty of Singapore, www.ece.nus.edu.sg/stfpage/elezhucx/myweb/2_Dielectric_loss.pdf, 24 Aralık 2005

ÖZGEÇMİŞ

1978 Almanya doğumluyum. İlk, orta ve lise eğitimimi Adana'da tamamladım. 1997'de Karadeniz Teknik Üniversitesi Fizik Bölümü'ne girdim. Dört yıllık eğitimimin ardından Çukurova Üniversitesi Fizik Bölümü'nde yüksek lisansa başladım. Halen Çukurova Üniversitesinde yüksek lisans öğrencisiyim.

Yayımlarım:

- “Klasik Fiziğin Kuramı ve Felsefesi”, e-Çağdaş Fizik Dergisi,Sayı 26, Nisan 2005
- “Einstein’ın Rölativite Kuramları”, Cumhuriyet Bilim Teknik Dergisi, Sayı:937, Mart 2005
- “Kuantum Kuramı ve Felsefesi”, e-Çağdaş Fizik dergisi, Sayı 26, Nisan 2005
- “Klasik Fiziğin Evrimine Bir Bakış”, Bilim ve Ütopya dergisi, Sayı:132,Haziran 2005

Seminer-Konferans ve Bildiriler:

- “Kesirli (Fractional) Diferansiyel Denklemler ve Fizik Uygulamaları”, Çukurova Üniversitesi, 13 Haziran 2005
- Düzen ya da Karmaşa “KAOS”, Çukurova Üniversitesi, 28 Eylül 2005
- “Klasik Fiziğin Kuramı ve Felsefesi”, Sözlü Bildiri, 23. Uluslararası Fizik Kongresi, Muğla Üniversitesi, 13-16 Eylül 2005
- “21. yy. Fizik/Fen Eğitimi/Öğretimi Nasıl Olmalı”, Sözlü Bildiri, 23. Uluslararası Fizik Kongresi, Muğla Üniversitesi, 13-16 Eylül 2005
- “Kuantum Kuramı ve Felsefesi”, Sözlü Bildiri, 23. Uluslararası Fizik Kongresi, Muğla Üniversitesi, 13-16 Eylül 2005
- “Kesirli (Fractional) Master Denklemi-Çözüm yöntemleri ve Fiziğe Uygulamaları, Sözlü Bildiri, 23. Uluslararası Fizik Kongresi, Muğla Üniversitesi, 13-16 Eylül 2005

EKLER

Ek 1. (4.27) Kesirli Diferansiyelinin Açık Çözümü

Kesirli dereceden diferansiyel şeklinde

$${}_0D_t^\nu \phi(t) = -\lambda \phi(t) \quad (1)$$

ile verilen (4.27) denkleminde kesirli dereceden türevlerin Laplace dönüşümü uygulanırsa

$$L\{{}_0D_t^\nu \phi(t)\} = s^\nu \Phi(s) - \sum_{k=0}^{n-1} s^{\nu-k-1} \phi^{(k)}(0) \quad , \quad n-1 < \nu \leq n \quad (2)$$

elde edilir. Burada $k=0$ alınır ve (4.28) denkleminde verilen başlangıç koşulu kullanılırsa (1) denkleminin

$$s^\nu \Phi(s) - s^{\nu-1} = -\lambda \Phi(s) \quad (3)$$

halini alacaktır. Bu ifade düzenlendiği takdirde

$$\Phi(s) = \frac{s^{\nu-1}}{s^\nu + \lambda} \quad (4)$$

olarak elde edilir. Mittag-Leffler fonksiyonlarının

$$\int_0^\infty e^{-pt} t^{\alpha k + \beta - 1} E_{\alpha, \beta}^{(k)}(\pm mt^\alpha) dt = \frac{k! p^{\alpha - \beta}}{(p^\alpha \mp m)^{k+1}} \quad , \quad \operatorname{Re}(p) > |a|^{1/\alpha} \quad (5)$$

Laplace dönüşümü özelliğinden (Podlubyn I., 1999) faydalanarak (4) denkleminin ters Laplace dönüşümünün sonucu, $k=0$ ve $\beta=1$ karşılaştırması yapılarak

$$\Phi(t) = E_\nu(-\lambda t^\nu) \quad (6)$$

şeklinde elde edilir. Burada, Bölüm 4 'de yapıldığı gibi $\lambda = 1/\tau^\nu$ seçilirse durulma fonksiyonun

$$\Phi(t) = E_\nu\left(-\left(t/\tau\right)^\nu\right) \quad (7)$$

ile verilen (4.29) bağıntısı elde edilir.

EK 2. (4.33) Cole-Cole bağıntısının açık çıkarımı

(4.29) denklemi, (4.30) Mittag-Leffler fonksiyonun açık ifadesi şeklinde (4.13) denklemde yerine yazılırsa

$$\begin{aligned} \chi(\omega) &= 1 - i\omega \int_0^\infty e^{-i\omega t} \Phi(t) dt \\ &= 1 - i\omega \int_0^\infty e^{-i\omega t} \sum_{k=0}^\infty \frac{\left(-\left(t/\tau\right)^\nu\right)^k}{\Gamma(\nu k + 1)} dt \\ &= 1 - i\omega \int_0^\infty e^{-i\omega t} \sum_{k=0}^\infty \frac{(-1)^k t^{\nu k}}{\Gamma(\nu k + 1) \tau^{\nu k}} dt \\ &= 1 - i\omega \sum_{k=0}^\infty \frac{(-1)^k}{\Gamma(\nu k + 1) \tau^{\nu k}} \int_0^\infty e^{-i\omega t} t^{\nu k} dt \end{aligned} \quad (8)$$

elde edilir. (8) denklemdeki integral ifadesini çözmek için; $i\omega t = y$ ve $\nu k = x$ dönüşümleri yapılırsa

$$\begin{aligned}
\chi(\omega) &= 1 - i\omega \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{\Gamma(\nu k + 1)\tau^{\nu k}} \int_0^{\infty} e^{-y} \frac{y^x}{(i\omega)^x} \frac{dy}{i\omega} \\
&= 1 - i\omega \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{\Gamma(\nu k + 1)\tau^{\nu k}} \frac{1}{(i\omega)^{x+1}} \int_0^{\infty} e^{-y} y^x dy
\end{aligned} \tag{9}$$

bulunur. Gama fonksiyonunun (3.2) tanımını kullanılarak

$$\begin{aligned}
\chi(\omega) &= 1 - i\omega \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{\Gamma(\nu k + 1)\tau^{\nu k}} \left(\frac{1}{(i\omega)^{\nu k + 1}} \Gamma(\nu k + 1) \right) \\
&= 1 - \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(i\omega\tau)^{\nu k}} \\
&= 1 - \frac{1}{1 + \frac{1}{(i\omega\tau)^\nu}}
\end{aligned}$$

ve böylece

$$\chi(\omega) = \frac{1}{1 + (i\omega\tau)^\nu} \tag{10}$$

olarak elde ederiz.