T.C.
İSTANBUL ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

YÜKSEK LİSANS TEZİ

KISMİ-EĞİK ALTMANİFOLDLARIN GEOMETRİSİ

Sibel GERDAN

Matematik Anabilim Dalı

Matematik Programı

Danışman

Doç. Dr. Hakan Mete TAŞTAN

II. Danışman

Doç. Dr. Hülya DURU

Haziran, 2015

İSTANBUL

Bu çalışma 02/06/ 2015 tarihinde aşağıdaki jüri tarafından Matematik Anabilim Dalı Matematik programında Yüksek Lisans Tezi olarak kabul edilmiştir.

Tez Jürisi:

İmza
Doç. Dr. Hakan Mete TAŞTAN
İstanbul Üniversitesi
Fen Fakültesi

İmza
Prof. Dr. Kamuran SAYGILI
İstanbul Üniversitesi
Fen Fakültesi

İmza
Prof.Dr. Salim YÜCE
Yıldız Teknik Üniversitesi
Fen Edebiyat Fakültesi

İmza
Doç. Dr. Ender ABADOĞLU
Yeditepe Üniversitesi
Fen Edebiyat Fakültesi

İmza
Yrd. Doç. Dr. Beran PİRİNÇÇİ
İstanbul Üniversitesi
Fen Fakültesi

ÖNSÖZ

Bu çalışma boyunca yönlendirmeleri ve bilgi birikimi ile her konuda bana destek olan danışmanım Doç. Dr. Hakan Mete TAŞTAN'a ve yüksek lisans eğitimim boyunca burs desteği sağlayan Türkiye Bilimsel ve Teknolojik Araştırma Kurumu(TÜBİTAK)' na teşekkürlerimi sunarım.

Haziran, 2015 Sibel GERDAN

İÇİNDEKİLER

SİMGE VE KISALTMA LİSTESİ

Simgeler	**Açıklama**
$\mathbb{R}$	: Reel sayılar cismi
$\mathbf{M}$	: Diferansiyellenebilir manifold
$\mathbb{R}^{\mathbf{m}}$	: m-boyutlu Öklid uzayı
$\mathbf{T_pM}$	: p noktasındaki teğet uzayı
BoyM	: M manifoldunun boyutu
$\mathbf{I}$	: Özdeşlik dönüşümü
$\mathbf{C}^{\infty}$	: Diferansiyellenebilirlik sınıfı
$\mathfrak{F}(\mathbf{M})$	: M üzerindeki diferansiyellenebilir fonksiyonların kümesi
$\mathfrak{X}(\mathbf{M})$	: M üzerindeki diferansiyellenebilir vektör alanlarının kümesi
$\mathbf{dF_p}$	: F dönüşümünününp noktasındaki diferansiyel(türev) dönüşümü
∇	: Levi-Civita ya da Riemanniyen koneksiyon
$\mathbf{J}$	: Hemen hemen kompleks yapı
$\mathcal{D}^{\perp}$	: Ters-değişmez dağılım
$\mathcal{D}^{\theta}$	: θ eğik açılı eğik dağılım
$\bigwedge^{\mathbf{r}}\mathbf{M}$	: Anti-simetrik kovaryant tensörlerin uzayı

Kısaltmalar	**Açıklama**
g.k.K.	: Global konformal K$\ddot{a}$hler manifold
y.k.K.	: Yerel konformal K$\ddot{a}$hler manifold

ÖZET

YÜKSEK LİSANS TEZİ

KISMİ-EĞİK ALTMANİFOLDLARIN GEOMETRİSİ

Sibel GERDAN

İstanbul Üniversitesi

Fen Bilimleri Enstitüsü

Matematik Anabilim Dalı

Danışman: Doç. Dr. Hakan Mete TAŞTAN

II. Danışman: Doç. Dr. Hülya DURU

Bu tez çalışmasını amacı, kısmi-eğik altmanifoldların geometrisini incelemektir. Biz bu çalışmada yerel konformal Kähler manifoldların kısmi-eğik altmanifoldlarına odaklanacağız.

Bu çalışma beş ana bölümden oluşmaktadır. Birinci bölümde tez boyunca üzerinde çalışacağımız konuların temeli sayılan çalışmalar verilmiştir.

İkinci bölüm, dört alt bölümden oluşmaktadır. Birinci alt bölümde diferansiyellenebilir manifoldların geometrisinin temel tanım ve kavramları verilmektedir. Bu bölümde manifold kavramı, bir manifoldun teğet ve ko-teğet uzayı tanıtılmakta ve bunun yanısıra manifoldlar arasında tanımlanan fonksiyonlar ile ilgili özellikler sunulmakta ve manifold teorisini çalışmada temel oluşturan altdaldırma, üstdaldırma, türev dönüşüm gibi fonksiyonlar verilmektedir. Ayrıca manifold üzerinde lineer koneksiyon tanımlanmakta ve manifold üzerinde tensör alanı, tensör türevi gibi kavramlardan bahsedilmektedir. İkinci alt bölümde Riemanniyen manifold kavramı ile bu manifold üzerinde tanımlanan Riemanniyen koneksiyon, eğrilik tensörü, kesitsel eğrilik gibi kavramlardan bahsedilip, Riemanniyen geometrinin en temel teoremlerinden biri verilmektedir. Ayrıca Riemanniyen altmanifold kavramı ve bunların geometrisini incelemeye yarayan Gauss, Codazzi ve Ricci denklemleri sunulmuştur. Üçüncü altbölümde Kähleriyen manifold kavramı ve bu manifoldun temel özellikleri verilmektedir. Kähler manifoldların holomorfik, ters-değişmez ve eğik altmanifoldları gibi altmanifold sınıfları tanıtılmaktadır. Bunun yanısıra Şahin [23] tarafından yapılan çalışma aracılığıyla bir Kähler manifoldun kısmi-eğik altmanifoldları karakterize etmeye yarayan teoremler sunulmaktadır. Dördüncü alt bölümde yerel konformal Kähler manifoldun temel tanım ve teoremleri ve bu manifold tipine örnekler verilmektedir.

Üçüncü bölümde, tez boyunca faydalanılan araçlardan ve uygulanan yöntemlerden oluşmaktadır.

Dördüncü bölüm tezimizin esas kısmını oluşturur. Bu bölümde bir yerel konformal Kähler manifoldun kısmi-eğik altmanifoldları çalışılmıştır. Kısmi-eğik altmanifoldların tanımında içerilen ters-değişmez ve eğik dağılımların integrallenebilirliği için koşullar verilmiştir. Aynı zamanda bu dağılımların tümel-jeodezik yapraklanma tanımlaması için gerek ve yeter koşullar elde edilmiştir. Bölüm paralel standart yapılı kısmi-eğik altmanifoldlar için verilen bazı sonuçlar ile bitmektedir.

Beşinci bölümde ise çalışmanın genel bir değerlendirmesi yapılmaktadır.

Haziran 2015, 83 sayfa.

Anahtar kelimeler: Ters-değişmez dağılım, eğik dağılım, kısmi-eğik altmanifold, yerel konformal Kähler manifold.

SUMMARY

M. Sc. THESIS

GEOMETRY OF HEMI-SLANT SUBMANIFOLDS

Sibel GERDAN

İstanbul University

Institute of Graduate Studies in Science and Engineering

Department of Mathematics

Supervisor: Doç. Dr. Hakan Mete TAŞTAN

Co-Supervisor: Doç. Dr. Hülya DURU

The main aim here is researching the geometry of hemi-slant submanifolds. In this studying we focus on hemi-slant submanifolds of a locally conformal Kähler manifold.

This study consists of five main chapters. In the first chapter, the studies that regarded as the basis of the issues we work throughout the thesis are given.

The second chapter consists of four subsections. In the first subsection, we give basic definitions and notions of differentiable manifolds. In this section we introduce definition of a manifold, tangent and co-tangent space. Beside this we present some properties of functions that are defined between manifolds and we give the definitions of inmersion, submersion and differential map which are base of studying the manifold theory. Also, we give definition of linear connection, tensor field , differential of a tensor on a manifold. In the second subsection, we present the definition of Riemannian manifold and notions of Riemannian connection, curvature tensor, sectional curvature etc. Beside this we give one of fundamental theorem of Riemannian geomety. Also, we present the Gauss, Codazzi and Ricci equations to analyse the Riemannian submanifolds and the geometry of them. In the third subsection, we give definition of Kähler manifold and some properties of it. We introduce holomorfic, anti-invariant and slant submanifolds of a Kähler manifold. Also, with the help of study of Şahin [23], we give some theorems to characterize hemi slant submanifolds of a Kähler manifold. In the fourth subchapter we give basic definitions, theorems and examples of a locally conformal Kähler manifold.

In the third chapter, we describe the tools and applied methods we use through this thesis.

The fourth chapter is essential part of our thesis.In this section we study hemi-slant submanifolds of a locally conformal Kähler manifold. We give conditions for the integrability of anti-invariant and slant distributions which are involved in the definition of hemi-slant submanifolds. We also get necessary and sufficient conditions for these distributions to define totally geodesic foliations. The section ends with some results for hemi-slant submanifolds with parallel canonical structures.

In the fifth chapter, we rewiew the study.

June 2015, 83 pages.

Keywords: Anti-invariant distribution, slant distribution, hemi-slant submanifold, locally conformal Kähler manifold.

1. GİRİŞ

Altmanifoldlar teorisi diferansiyel geometrideki popüler araştırma alanlarından birisidir. Bir hemen hemen Hermityen manifoldta, onun hemen hemen kompleks yapısı çeşitli tiplerde altmanifold belirler. Örneğin *invaryant* ve *ters invaryant* altmanifoldlar böyledir. Şöyle ki; birinci durumda altmanifoldun teğet uzayı hemen hemen kompleks yapının davranışı altında invaryant kalırken, ikinci durumda ters-invaryant kalır, yani altmanifoldun teğet uzayı normal uzayın içine resmedilir.

İnvaryant ve ters-invaryant altmanifoldların doğal genelleştirilmeleri olarak, Bejancu [2], *CR-altmanifold* kavramına giriş yaptı. Bir CR-altmanifold ne invaryant ne de ters invaryant ise ona has CR-altmanifold denir. O zamandan beri CR-altmanifoldlar, hemen hemen Hermityen manifoldların değişik altsınıflarında yoğun bir biçimde çalışıldı.

Tıpkı CR-altmanifoldlar gibi *eğik* altmanifoldlar da invaryant ve ters-invaryant manifoldların bir genelleştirilmesi olarak Chen [7] tarafından ortaya atıldı. Bir eğik altmanifold ne invaryant ne de ters-invaryant ise ona has eğik altmanifold denir. Bir has CR-altmanifoldun asla bir has eğik altmanifold olamayacağını gözlemleyebiliriz.

Öte yandan CR-altmanifoldlar ve eğik altmanifoldları birer özel durum olara içeren *yarı-eğik altmanifold* kavramı Papaghiuc [20] tarafından tanımlandı. Gerçekten, yarı-eğik altmanifoldun eğik açısı $\theta = \dfrac{\pi}{2}$ iken bir CR-altmanifold ve yarı-eğik altmanifoldun değişmez dağılımı $\mathcal{D} = \{0\}$ ise bir eğik altmanifold elde edilir. Dolayısıyla $\theta \neq 0$ ve $\mathcal{D} \neq \{0\}$ durumunda yarı-eğik altmanifolda has denir.

Yarı-eğik altmanifold kavramının bir genelleştirilmesi olarak Carriazo [3], *iki-eğik* altmanifold kavramına giriş yaptı. Öte yandan bu altmanifold tipinin altsınıflarından birisi ise *ters-eğik* altmanifold olarak adlandırıldı. Burada ters-eğik altmanifoldun teğet demeti bir eğik dağılım $\mathcal{D}^\theta$ ile bir ters-invaryant dağılım $\mathcal{D}^\perp$ in direkt toplamından oluşmaktadır. Eğer $\theta \neq \dfrac{\pi}{2}$ ve $\mathcal{D}^\perp \neq \{0\}$ ise, o ters-eğik altmanifolda has denir.

Bir has yarı-eğik altmanifold kavramı ile bir has ters-eğik altmanifold kavramının birbirlerini içermediğini kolayca görebiliriz.

Bununla birlikte Şahin [23], ters-eğik altmanifoldları *kısmi-eğik* olarak yeniden adlandırdı. Çünkü ters-eğik adı eğik dağılım yokmuş gibi algılanabilirdi.

Şimdiye kadar bahsettiğimiz tüm altmanifold tipleri Ronsse [21] tarafından, verilen *kapsamlı ve çarpık (generic and skew) CR*-altmanifoldların birer özel durumu olarak görülebilir.

Bu tezin asıl konusu olan kısmi-eğik altmanifoldlar Şahin [23] tarafından, K$\ddot{a}$hleriyen manifoldlarda çalışıldı.

Bir yerel çarpım Riemanniyen manifoldun kısmi-eğik altmanifoldları ise Taştan ve Özdemir [26] tarafından, detaylı olarak çalışılmıştır.

Biz bu tezde hemen hemen Hermityen manifoldların başka bir altsınıfı olan yerel konformal K$\ddot{a}$hler manifoldların kısmi-eğik altmanifoldlarını çalışacağız.

2. GENEL KISIMLAR

2.1. DİFERANSİYELLENEBİLİR MANİFOLDLAR

Bu bölümde diferansiyellenebilir manifoldların geometrisinin temel tanım ve kavramlarını vereceğiz.

2.1.1. Manifoldlar

Tanım 2.1. [24] M bir Hausdorff uzayı olsun. Eğer $\forall p \in M$,

$$\varphi : \mathcal{U} \to \varphi(\mathcal{U}) \subset \mathbb{R}^m$$

biçiminde bir φ homeomorfizması (eşyapısı) bulunabiliyorsa M ye bir *topolojik manifold* denir. Burada $\mathcal{U}$, M nin p yi içeren uygun bir açık alt kümesidir.

Bu tanıma dayanarak bir topolojik manifoldun yerel olarak Öklidyen uzayı andırdığını görebiliriz. Şimdi M bir Hausdorff uzayı ve $\varphi : \mathcal{U} \to \varphi(\mathcal{U}) \subset \mathbb{R}^m$, Tanım 2.1 deki gibi olsun. Bu durumda φ ye M de bir *koordinat sistemi*, $\mathcal{U}$ ya M de bir *koordinat komşuluğu* ve $(\mathcal{U}, \varphi)$ çiftine de M de bir *harita* denir. $m = Boy(\mathbb{R}^m)$ sayısına ise $(\mathcal{U}, \varphi)$ haritasının *boyutu* denir. $\mathcal{U} \cap \mathcal{V} \neq \varnothing$ olmak üzere $(\mathcal{U}, \varphi)$ ile $(\mathcal{V}, \psi)$, M de m-boyutlu iki harita olsun. Eğer $\varphi \circ \psi^{-1}$ bir r-inci mertebeden diffeomorfizm ise, yani; $\varphi \circ \psi^{-1} \in C^r(\psi(\mathcal{U} \cap \mathcal{V}))$ ve $\psi \circ \varphi^{-1} \in C^r(\varphi(\mathcal{U} \cap \mathcal{V}))$ ise $(\mathcal{U}, \varphi)$ ve $(\mathcal{V}, \psi)$ haritalarına C^r-bağdaşırlar denir. Eğer $\mathcal{U} \cap \mathcal{V} = \varnothing$ ise, bu iki haritanın C^∞-bağdaştıklarını kabul ediyoruz.

Artık manifold üzerinde analiz yapabilmeyi sağlayan atlas kavramı verilebilir.

Tanım 2.2. [9] M, m-boyutlu manifold olsun. I bir indis cümlesi olmak üzere M üzerinde haritaların bir ailesi olan $\mathcal{A} = \{(\mathcal{U}_i, \varphi_i)\}_{i \in I}$ kümesi için aşağıdaki şartlar sağlanıyorsa $\mathcal{A}$ koleksiyonuna M üzerinde r-inci mertebeden *diferansiyellenebilir yapı* (veya r-inci mertebeden *atlas*) adı verilir:

A1) $\bigcup_{i \in I} \mathcal{U}_i = M.$

A2) $\mathcal{A}$ daki herhangi iki harita C^r-bağdaşır.

A3) $\mathcal{A}$ maksimaldir , yani eğer bir $(\overline{U}, \overline{\varphi})$ haritası $\mathcal{A}$ daki bütün haritalar ile C^r-bağdaşıyor ise bu durumda $(\overline{U}, \overline{\varphi}) \in \mathcal{A}$ dır.

Ek olarak eğer $\mathcal{A}$ atlası her mertebeden diferansiyellenebiliyorsa M manifolduna C^∞-*manifold* adı verilir. Bu tez boyunca C^∞-manifoldlarla çalışıldığından bundan sonra manifold denildiğinde C^∞-manifold anlaşılacaktır.

Örnek 2.1. [24] $\mathbb{R}^m$ Öklidyen uzayı bir m-boyutlu manifolddur. Bu manifoldun atlası bir tek $(\mathbb{R}^m, I)$ haritasından oluşur, burada I birim fonksiyonu göstermektedir.

Örnek 2.2. [19] $x, y \in \mathbb{R}^3 \backslash \{0\}$ olmak üzere $\mathbb{R}^3 \backslash \{0\}$ kümesinde aşağıdaki biçimde bir bağıntı tanımlansın.

$$x \sim y \;\Leftrightarrow\; \exists \lambda \in \mathbb{R} \backslash \{0\}; \;\; x = \lambda y$$

Bu "$\sim$" bağıntısının $\mathbb{R}^3 \backslash \{0\}$ kümesi üzerinde bir denklik bağıntısı olduğu kolayca görülebilir. $\mathbb{R}^3 \backslash \{0\}$ uzayının "$\sim$" denklik bağıntısına göre bölüm uzayı $\mathbb{R}(P^2)$ ile gösterilsin. Bu durumda $[\,x\,]$, x elemanının "$\sim$" bağıntsna göre denklik sınıfı olmak üzere,

$$\mathbb{R}(P^2) = \{ \; [\,x\,] \mid x \in \mathbb{R}^3 \backslash \{0\} \}$$

olur. $x = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \backslash \{0\}$ olmak üzere, $[\,x\,] \in \mathbb{R}(P^2)$ noktası $[\,x\,] = [x_1, x_2, x_3]$ ile gösterilsin. Bu uzayda $i = 1, 2, 3$ olmak üzere, $\mathcal{U}_i = \{ \; [\,x\,] \mid x_i \neq 0\}$ kümeleri tanımlansın.

$\bigcup_{i=1}^{3} \mathcal{U}_i = \mathbb{R}(P^2)$ olduğu kolayca görülebilir. $\varphi_i \; : \; \mathcal{U}_i \; \rightarrow \; \mathbb{R}^2$ fonksiyonları aşağıdaki biçimde tanımlansın.

$$\varphi_1([\,x\,]) = (\frac{x_2}{x_1}, \frac{x_3}{x_1}) \;,\; \varphi_1([\,x\,]) = (\frac{x_1}{x_2}, \frac{x_3}{x_2}) \;,\; \varphi_3([\,x\,]) = (\frac{x_1}{x_3}, \frac{x_2}{x_3})$$

fonksiyonları tanımlansın. φ_i fonksiyonlarının bileşenleri rasyonel ifadelerden oluşmaktadır. Rasyonel ifadeler payda sıfır olmadığı sürece sürekli olacağından φ_i fonksiyonları süreklidir. Öte yandan φ_i fonksiyonları bire-birdir. Gerçekten, $x = (x_1, x_2, x_3)$, $y = (y_1, y_2, y_3) \in \mathbb{R}^{n+1} \backslash \{0\}$ için $[\,x\,], [\,y\,] \in \mathcal{U}_1$ olmak üzere,

$$\varphi_1([\,x\,]) = \varphi_1([\,y\,]) \Rightarrow (\frac{x_2}{x_1}, \frac{x_3}{x_1}) = (\frac{y_2}{y_1}, \frac{y_3}{y_1}) \Rightarrow [1, \frac{x_2}{x_1}, \frac{x_3}{x_1}] = [1, \frac{y_2}{y_1}, \frac{y_3}{y_1}]$$

eşitliği bulunur. Buradan, "$\sim$" denklik bağıntısının tanımı gereği $[x_1, x_2, x_3] = [y_1, y_2, y_3]$ yani, $[\,x\,] = [\,y\,]$ elde edilir. Bu φ_1 in bire-bir olduğunu gösterir. φ_2 ve φ_3 ün bire-birliği de benzer şekilde gösterilebilir. $\mathcal{U}_i$ lerin φ_i altındaki görüntüsü $\mathcal{V}_i \subset \mathbb{R}^2$ olsun. $z = (z_1, z_2) \in \mathcal{V}_1$, $(y_1, y_2) \in \mathcal{V}_2$, $(w_1, w_2) \in \mathcal{V}_3$ için,

$$\varphi_1{}^{-1}(z_1, z_2) = [1, z_1, z_2]\ ,\ \varphi_2{}^{-1}(y_1, y_2) = [y_1, 1, y_2]\ ,\ \varphi_3{}^{-1}(w_1, w_2) = [w_1, w_2, 1]$$

dir. $\varphi_i{}^{-1}$ fonksiyonları süreklidir. O halde φ_i fonksiyonları eşyapıdır.

$i = 1, 2, 3$ için $(\mathcal{U}_i, \varphi_i)$ haritalarının C^∞-bağdaştıklarını göstermek gerekir. $\varphi_1 \circ \varphi_2^{-1} : \varphi_2(\mathcal{U}_1 \cap \mathcal{U}_2) \to \varphi_1(\mathcal{U}_1 \cap \mathcal{U}_2)$ olmak üzere $t = (t_1, t_2) \in \varphi_2(\mathcal{U}_1 \cap \mathcal{U}_2)$ olsun.

$$\varphi_1 \circ \varphi_2^{-1}(t_1, t_2) = \varphi_1([t_1, 1, t_2]) = (\frac{1}{t_1}, \frac{t_2}{t_1})$$

$[t_1, 1, t_2] \in \mathcal{U}_1 \cap \mathcal{U}_2$ için $t_1 \neq 0$ olduğundan $\varphi_1 \circ \varphi_2^{-1}$ in bileşenleri diferansiyellenebilirdir. $\varphi_2 \circ \varphi_1^{-1} : \varphi_1(\mathcal{U}_1 \cap \mathcal{U}_2) \to \varphi_1(\mathcal{U}_1 \cap \mathcal{U}_2)$ için de benzer şekilde gösterilebilir. O halde $(\mathcal{U}_1, \varphi_1)$ ie $(\mathcal{U}_2, \varphi_2)$ haritaları C^∞-bağdaşırlar. Diğer haritaların da C^∞-bağdaştığı benzer şekilde gösterilebilir.

O halde $\mathcal{A} = \{(\mathcal{U}_i, \varphi_i)\,;\, i = 1, 2, 3\}$ kümesi $\mathbb{R}(P^2)$ üzerinde 2-boyutlu bir atlas olur. Sonuçta $\mathbb{R}(P^2)$ reel projektif düzlemi 2-boyutlu bir manifolddur.

Örnek 2.3. [24] $f : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ sürekli bir fonksiyon ve

$$M = \{(x_1, \ldots, x_m, x_{m+1})|\ x_{m+1} = f(x_1, \ldots, x_m)\}$$

olsun. M kümesi f fonksiyonunun grafiği olarak adlandırılır. Bu durumda M, m-boyutlu bir manifolddur. Gerçekten, $\phi : M \to V = \mathbb{R}^m$ vektörel fonksiyonu

$$\phi(x_1, \ldots, x_m, x_{m+1}) \to (x_1, \ldots, x_m)$$

izdüşümü ile verilirse sürekli olur. Diğer taraftan

$$\phi^{-1}(x_1, \ldots, x_m) = (x_1, \ldots .x_m, f(x_1, \ldots, x_m))$$

olduğundan ϕ^{-1} de sürekli olur. Bu durumda (M, ϕ), m-boyutlu bir atlas tanımlar. Böylece M bir m-boyutlu manifold olur.

Tanım 2.3. [19] M bir manifold olsun. Eğer $\xi : \mathcal{U} \to \mathbb{R}^m$ bir koordinat sistemi ise, bu durumda $f \circ \xi^{-1} : \xi(\mathcal{U}) \to \mathbb{R}$ bileşke fonksiyonu f için ξ cinsinden *koordinat gösterimi* olarak adlandırılır. Yani, $\mathcal{U}$ üzerinde

$$f = (f \circ \xi^{-1})(x_1, \ldots, x_n)$$

dir. Eğer M deki her ξ koordinat sistemi için $f \circ \xi^{-1}$ koordinat gösterimi Öklidyen manada diferansiyellenebilir ise bu durumda $f : M \to \mathbb{R}$ fonksiyonu C^∞*-diferansiyellenebilirdir* (smooth) denir. M üzerindeki bütün C^∞*-diferansiyellenebilir* reel-değerli fonksiyonların kümesi $\mathfrak{F}(M)$ ile gösterilecektir.

Aşağıda bir manifold üzerinde cebir çalışmamızı sağlayan kavramlar verilmektedir.

2.1.2. Teğet ve Ko-teğet Uzay

Tanım 2.4. [9] M bir manifold olsun. Bu durumda her $f, g \in \mathfrak{F}(M)$ ve $a, b \in \mathbb{R}$ için,

(i) $v_p(af + bg) = av_p(f) + bv_p(g)$

ii) $v_p(fg) = v_p(f)g + fv_p(g)$

koşullarını sağlayan $v_p : \mathfrak{F}(M) \to \mathbb{R}$ dönüşümüne M manifoldunun p noktasındaki teğet vektörü denir.

p noktasındaki teğet vektörlerden oluşan kümeyi T_pM ile gösterirsek bu kümenin aşağıda tanımlanan toplama ve skalerle çarpım işlemlerine göre $\mathbb{R}$ üzerinde bir vektör uzayı olduğu görülebilir.

$(v + w)(f) = v(f) + w(f)$ (Toplama) ve $(cv)(f) = cv(f)$ (Skalerle çarpım)

Burada $v, w \in T_pM$, $c \in \mathbb{R}$ ve $f \in \mathfrak{F}(M)$ dir. Bu durumda T_pM ye M nin p noktasındaki *teğet uzayı* denir.

Aşağıdaki tanım bir manifold üzerinde kısmi türevin nasıl tanımlandığını söylemektedir.

Tanım 2.5. [19] $(\mathcal{U}, \varphi)$, M de bir harita ve $\varphi = (x_1, \ldots, x_m)$ olsun. $p \in \mathcal{U}$ olmak üzere, $f \in \mathfrak{F}(\mathcal{U})$ ise

$$\frac{\partial f}{\partial x_i} \mid_p = \frac{\partial}{\partial u_i}(f \circ \varphi^{-1}) \mid_{\varphi(p)}$$

dir. Burada $(u_1, \ldots, u_m)$, $\mathbb{R}^m$ in doğal koordinatlarıdır.

Yardımcı Teorem 2.1. [19] $\varphi = (x_1, \ldots, x_m)$ ve $\varphi(p) = 0 \in \mathbb{R}^m$ olmak üzere $(\mathcal{U}, \varphi)$, M de bir harita olsun. Bu durumda $\forall f \in \mathfrak{F}(\mathcal{U})$, $f_i(p) = \frac{\partial f}{\partial x_i}(p)$ olacak biçimde öyle $f_1, \ldots, f_m \in \mathfrak{F}(\mathcal{U})$ fonksiyonları vardır ki;

$$f = f(p) + \sum_{i=1}^{m} x_i f_i$$

dir.

Şimdi manifoldlar teorisinde önemli bir yeri olan baz teoremi verilecektir.

Teorem 2.1. [19] M bir manifold ve $(\mathcal{U}, \varphi)$, M de bir harita olsun. $\varphi = (x_1, \ldots, x_m)$ olmak üzere, $v \in T_pM$ ise $v = \sum_{i=1}^{m} v(x_i) \frac{\partial}{\partial x_i} \mid_p$ dir ve $\{\frac{\partial}{\partial x_i} \mid_p\}$, T_pM nin bir bazıdır.

Kanıt: $v \in T_pM$, $f \in \mathfrak{F}(\mathcal{U})$ ve $p \in \mathcal{U}$ olsun. Burada $i = 1, \ldots, m$ olmak üzere $x_i(p) = 0$ yani $\varphi(p) = 0 \in \mathbb{R}^m$ varsayabiliriz. f, Yardımcı Teorem 2.1 deki gibi olmak üzere,

$$\begin{aligned} v(f)(p) &= v(f(p) + \sum_{i=1}^{m} x_i f_i) = v(f(p)) + v(\sum_{i=1}^{m} x_i f_i) \\ &= \sum_{i=1}^{m} \{v(x_i) f_i + x_i(p) v(f_i)\} = \sum_{i=1}^{m} v(x_i) \frac{\partial}{\partial x_i} \mid_p \end{aligned}$$

Buradan $v = \sum_{i=1}^{m} v(x_i) \frac{\partial}{\partial x_i} \mid_p$ elde edilir. Şimdi $\{\frac{\partial}{\partial x_i} \mid_p\}_{1 \leq i \leq m}$ nin lineer bağımsız olduğunu gösterelim. $a_1, \ldots, a_m \in \mathbb{R}$ olmak üzere, $\sum_{i=1}^{m} a_i \frac{\partial}{\partial x_i} \mid_p = 0$ olsun. $i = 1, 2, 3$ için $U_i = \frac{\partial}{\partial x_i}$ ve $j = 1, \ldots, m$ olmak üzere,

$$\sum_{i=1}^{m} a_i \frac{\partial}{\partial x_i} \mid_p (x_j) = 0 \Rightarrow \sum_{i=1}^{m} a_i \frac{\partial x_j}{\partial x_i} \mid_p = \sum_{i=1}^{m} a_i \delta_i^j = a_j = 0$$

elde edilir. O halde, $\{\frac{\partial}{\partial x_i} \mid_p\}_{1 \leq i \leq m}$ lineer bağımsız ve dolayısıyla T_pM nin bazı olur.

Tanım 2.6. [9] M bir manifold olsun. Her $p \in M$ noktasına T_pM uzayında bir X_p teğet vektörünü karşılık getiren X fonksiyonuna *vektör alanı* denir. Böylece M manifoldu üzerinde bir vektör alanı

$$X : M \to \bigcup_{p \in M} T_pM$$

biçiminde bir fonksiyon olacaktır. Eğer X, M de bir vektör alanı ve $f \in \mathfrak{F}(M)$ ise bu durumda Xf, M üzerinde $\forall p \in M$, $(Xf)(p) = X_p(f)$ ile tanımlı reel-değerli fonksiyonunu gösterir. Xf, her $f \in \mathfrak{F}(M)$ için diferansiyellenebiliyorsa X vektör alanı *diferansiyellenebilirdir* denir. M üzerindeki vektör alanları aşağıdaki gibi birbirleriyle toplanabilir veya bir $f \in \mathfrak{F}(M)$ fonksiyonu ile çarpılabilir:

$$(X+Y)(p) = X_p + Y_p \qquad , \qquad (fX)(p) = f(p)X_p$$

Bu iki işleme göre M üzerindeki bütün diferansiyellenebilir vektör alanlarının kümesi olan $\mathfrak{X}(M)$, $\mathfrak{F}(M)$ halkası üzerinde bir modüldür. Eğer $\varphi = (x_1, x_2, \ldots, x_m)$, $\mathcal{U} \subset M$ üzerinde bir koordinat sistemi ise bir X vektör alanı, Teorem 2.1 yardımıyla

$$X = \sum_{i=1}^{m} X^i \frac{\partial}{\partial x_i}$$

şeklinde ifade edilebilir. Burada X^i, X vektör alanının bileşenidir.

Örnek 2.4. [24] x, y, $\mathbb{R}^2$ nin doğal koordinatları olmak üzere $X = x\frac{\partial}{\partial y}$ ve $Y = x\frac{\partial}{\partial x}$, $\mathbb{R}^2$ de vektör alanıdır.

Tanım 2.7. [19] M bir manifold olsun. T_pM teğet uzayında tanımlı reel-değerli lineer dönüşümlerin kümesi T_p^*M ile gösterilir. T_p^*M uzayı T_pM uzayının *dual uzayı* olarak adlandırılır.

Tanım 2.8. [19] M bir manifold olsun. Bu durumda $p \in M$ noktasına T_p^*M dual uzayının bir θ_p elemanını karşılık getiren θ fonksiyonuna bir 1-*form* denir. Böylece M

manifoldu üzerinde bir 1-form

$$\theta : M \to \bigcup_{p\in M} T_p^*M$$

biçiminde bir fonksiyon olacaktır. $\theta(p) = \theta_p \in T_p^*M$ olduğundan, θ ile $\theta(p)$ arasında ayrım yapmayıp θ_p ye de 1-form diyeceğiz. Dual uzayın tanımı gereği $\theta_p : T_pM \to \mathbb{R}$ biçiminde bir lineer fonksiyondur. T_p^*M uzayına *ko-teğet uzay* da denir.

Eğer M üzerinde, θ bir 1-form ve X bir vektör alanı ise θX, her p noktasında değeri, θ_p nin X_p de aldığı değere eşit olan reel-değerli bir fonksiyonu gösterir. Yani; $\theta X(p) = \theta_p(X_p)$ dir. Her $X \in \mathfrak{X}(M)$ için θX diferansiyellenebilirse θ, 1-formu *diferansiyellebilirdir* denir. $\mathfrak{X}^*(M)$, M üzerindeki diferansiyellenebilir bütün 1-formların kümesi olmak üzere, bu küme aşağıda tanımlanan toplama ve reel-değerli fonksiyon işlemlerine göre $\mathfrak{F}(M)$ halkası üzerinde bir modüldür:

$$(\theta + w)(p) = \theta_p \qquad , \qquad (f\theta)(p) = f(p)\theta_p$$

Burada $\theta, w \in \mathfrak{X}^*(M)$ ve $f \in \mathfrak{F}(M)$ dir.

Tanım 2.9. [19] M bir manifold olsun. $f \in \mathfrak{F}(M)$ nin diferansiyeli df, bir 1-formdur öyle ki, M ye teğet her v vektörü için

$$df(v) = v(f)$$

dir. $\varphi = (x_1, \ldots, x_m)$, $\mathcal{U} \subset M$ üzerinde bir koordinat sistemi olsun. $dx_i(\dfrac{\partial}{\partial x_j}) = \delta_i^j$ olduğundan, $\{dx_1, \ldots, dx_m\}$ 1-formlar kümesi $\mathcal{U}$ üzerinde, $\{\dfrac{\partial}{\partial x_1}, \ldots, \dfrac{\partial}{\partial x_m}\}$ bazına karşılık gelen doğal dual bazdır. O halde herhangi bir θ, 1-formu

$$\theta = \sum_{i=1}^{m} \theta(\frac{\partial}{\partial x_i})\, dx_i$$

ile ifade edilebilir. Bu eşitlik Teorem 2.1 de verilen $v = \displaystyle\sum_{i=1}^{m} v(x_i) \frac{\partial}{\partial x_i} \mid_p$ eşitliğine karşılık gelir.

Örnek 2.5. [24] $f_i : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}; i = 1, 2, 3$ olmak üzere

$$\psi = f_1 dx_1 + f_2 dx_2 + f_3 dx_3 = \sum_{i=1}^{3} f_i dx_i$$

$\mathbb{R}^3$ de bir 1-formdur.

2.1.3. Manifoldlar Arası Fonksiyonlar

M ve N sırası ile m ve n-boyutlu iki manifold olsun.

Tanım 2.10. [24] $F : M \to N$ bir fonksiyon olsun. Bu durumda $p \in M$ noktasının komşuluğundaki harita (U, ϕ) ve $F(p) \in N$ noktasının komşuluğundaki harita (V, φ) olmak üzere, $\phi(U) \subset \mathbb{R}^m$ den $\varphi(V) \subset \mathbb{R}^n$ kümesine olan $\varphi \circ F \circ \phi^{-1}$ fonksiyonu Öklidyen anlamda diferansiyellenebiliyorsa, F fonksiyonu $p \in M$ noktasında *C^∞-diferansiyellenebilirdir* denir.

Bundan sonra C^∞-diferansiyellenebilir olan $F : M \to N$ fonksiyonlarına *dönüşüm* denilecektir.

Örnek 2.6. [24] α, M de bir eğri ve $F : M \to N$ bir dönüşüm olsun. Bu durumda $\beta = F \circ \alpha$, N de bir eğridir.

Tanım 2.11. [19] $F : M \to N$ bir dönüşüm olsun. Eğer F dönüşümünün tersi de dönüşüm ise $F : M \to N$ dönüşümüne *diffeomorfizm* denir.

Örnek 2.7. [9] $a, b \in \mathbb{R}$ ve $(a, b) \subset \mathbb{R}$ de bir açık aralık olmak üzere, $F(t) = \dfrac{t}{(1 - t^2)}$ ile verilen $F : (-1, 1) \to (a, b)$ dönüşümü bir diffeomorfizmdir.

Tanım 2.12. [19] $F : M \to N$ bir dönüşüm ve $p \in M$ olsun. $v \in T_pM$ ve $g \in \mathfrak{F}(M)$ olmak üzere, $dF_p(v)[g] = v[g \circ F]$ biçiminde tanımlanan

$$dF_p : T_pM \to T_{F(p)}N$$

dönüşümüne F nin *türev* veya *diferansiyel dönüşümü* denir. Bu dönüşüm lineer bir dönüşümdür ve F_{*p} ile de gösterilir.

Aşağıdaki yardımcı teorem türev dönüşümünü belirlemek için kullanılır.

Yardımcı Teorem 2.2. [19] $F : M \to N$ bir dönüşüm ve $\xi = (x_1, \ldots, x_m)$ ve $\eta = (y_1, \ldots, y_n)$ sırasıyla $p \in M$ ve $F(p) \in N$ noktalarının komşuluklarına ait iki koordinat sistemi olsun. Bu durumda

$$dF_p(\frac{\partial}{\partial x_j} \mid_p) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial (y^i \circ F)}{\partial x_j}(p) \frac{\partial}{\partial y_i} \mid_{F(p)} \qquad ; \qquad (1 \leq j \leq m)$$

Tanım 2.13. [19] $F : M \to N$ bir dönüşüm ve $\xi = (x_1, \ldots, x_m)$ ve $\eta = (y_1, \ldots, y_n)$ sırasıyla $p \in M$ ve $F(p) \in N$ noktalarının komşuluklarına ait iki koordinat sistemi olsun.

$$\left(\frac{\partial (y^i \circ F)}{\partial x_j}(p) \right)_{1 \leq i \leq n \ , \ 1 \leq j \leq m}$$

matrisi F nin, p noktasında ξ ve η koordinat sistemlerine göre *Jakobiyen matrisi* olarak adlandırılır. $F_* \simeq JF_*$ dır. Yani, bir türev dönüşümü onun Jakobiyen matrisi ile temsil edilir.

Örnek 2.8. [19] $\phi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ olmak üzere,

$$\phi(x, y) = (x^2 - 2y \ , \ 4x^3 y^2)$$

dönüşümü verilsin. $\phi_1(x, y) = x^2 - 2y$, $\phi_2(x, y) = 4x^3 y^2$ ve $p = (1, 2)$ olmak üzere, Yardımcı Teorem 2.2 kullanılırsa,

$$d\phi_p \simeq \begin{pmatrix} \frac{\partial \phi_1}{\partial x}(p) & \frac{\partial \phi_1}{\partial y}(p) \\ \frac{\partial \phi_2}{\partial x}(p) & \frac{\partial \phi_2}{\partial y}(p) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 48 & 16 \end{pmatrix}$$

olarak bulunur.

Tanım 2.14. [9] $F : M \to N$ bir dönüşüm olsun. Eğer dF_p türev dönüşümü her $p \in M$ için bire-bir ise $F : M \to N$ dönüşümüne *daldırma* bazen de *üstdaldırma* (immersion) denir. Özel olarak, $F : M \to N$ daldırması bire-bir ise $F : M \to N$ ye *gömme* (imbedding) denir.

Yardımcı Teorem 2.3. [19] $F : M \to N$ bir dönüşüm ve $p \in M$ olsun. Bu durumda aşağıdaki ifadeler eşdeğerdir:

1) dF_p türev dönüşümü bire-birdir.

2) M ve N de seçilen herhangi iki koordinat sistemi için F nin p noktasındaki Jakobiyen matrisinin rankı m dir.

3) Eğer $y^1, \ldots, y^n$, $F(p) \in N$ noktasında bir koordinat sistemi ise bu durumda $1 \leq i_1 \leq \ldots \leq i_m \leq n$ koşulunu sağlayan tamsayılar vardır öyle ki; $y^{i_1} \circ F, \ldots, y^{i_m} \circ F$ fonksiyonları $p \in M$ noktasının bir komşuluğunda bir koordinat sistemi oluşturur.

Örnek 2.9. [9] $\alpha : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ olmak üzere,

$$\alpha(t) = (t^3 - 4t, t^2 - 4)$$

dönüşümü verilsin. $d\alpha = ((3t^2 - 4)\, dt, 2t\, dt) \neq (0,0)$ ve rank$(d\alpha) = 1$ olduğundan α bir üstdaldırmadır. $\alpha(2) = \alpha(-2)$ olduğundan α bire-bir değildir. O halde bir gömme olamaz.

Tanım 2.15. [19] $F : M \to N$ bir dönüşüm olsun. $\forall p \in M$ için dF_p türev dönüşümü örten ise $F : M \to N$ dönüşümüne *altdaldırma* (submersion) denir.

Yardımcı Teorem 2.4. [19] $F : M \to N$ bir dönüşüm ve $p \in M$ olsun. Aşağıdaki ifadeler eşdeğerdir:

1) dF_p türev dönüşümü üzerinedir.

2) M ve N de seçilen herhangi iki koordinat sistemi için F nin p noktasındaki Jakobiyen matrisinin rankı n dir.

3) Eğer $y^1, \ldots, y^n$, $F(p) \in N$ noktasında bir koordinat sistemi ise bu durumda $p \in M$ noktasında $y^1 \circ F, \ldots, y^n \circ F, x^{n+1}, \ldots, x^m$ formunda bir koordinat sistemi vardır.

Örnek 2.10. [19] $m \geq n$ için $(t_1, \ldots, t_m)$ noktasını, $(t_1, \ldots, t_n)$ noktasına resmeden $\mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ projeksiyonu bir altdaldırmadır.

Teorem 2.2. [9] $F : M \to N$ bir dönüşüm ve $\forall p \in M$, $dF_p : T_pM \to T_{F(p)}N$ üzerine olsun. Burada $q = F(p)$ dir. Bu durumda

$$\widetilde{M} = \{p \in M : F(p) = q\}$$

kümesi bir manifolddur ve Boy$\widetilde{M}$ =Boy$M-$Boy$N$ dir, hatta $i : \widetilde{M} \to M$ içerme dönüşümü bir gömmedir.

2.1.4. Manifoldlar Üzerinde Lineer Koneksiyonlar

Tanım 2.16. [8] M bir manifold, M manifoldunun bir $\mathcal{U}$ açık kümesi üzerinde vektör alanları X ve Y olmak üzere, $f \in \mathfrak{F}(M)$ fonksiyonu için

$$[X, Y]f = X(Y(f)) - Y(X(f))$$

biçiminde tanımlanan

$$[\ ,\ ] : \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) \to \mathfrak{X}(M)$$

operatörüne X ve Y vektör alanlarının *Lie* ya da *parantez operatörü* denir. Herhangi $f, g \in \mathfrak{F}(M)$ için,
$[X, Y](f + g) = [X, Y](f) + [X, Y](g)$ ve $[X, Y](fg) = [X, Y](f)g + [X, Y](g)f$
eşitliklerini görmek zor değildir.

Bu operatörün özellikleri aşağıdaki teorem ile verilmiştir.

Teorem 2.3. [8] M bir manifold, $X, Y, Z \in \mathfrak{X}(M)$ ve $f, g \in \mathfrak{F}(M)$ olsun. Aşağıdaki özellikler sağlanır.

1) $[X, Y] = -[Y, X]$

2) $[X + Y, Z] = [X, Z] + [Y, Z]$

3) $[fX, gY](fg) = fX(g)Y + gY(f)X + fg[X, Y]$

4) $[X, [Y, Z]] + [Y, [Z, X]] + [Z, [X, Y]] = 0$

Burada 4. özellik *Jakobi Özdeşliği* olarak adlandırılır.

Tanım 2.17. [24] M bir manifold olsun. Bu durumda $X, Y, Z \in \mathfrak{X}(M)$ ve $f \in \mathfrak{F}(M)$ olmak üzere

1) $\nabla_{X+Y} Z = \nabla_X Z + \nabla_Y Z$

2) $\nabla_X (Y + Z) = \nabla_X Y + \nabla_X Z$

3) $\nabla_{fX} Y = f \nabla_X Y$

4) $\nabla_X (fY) = X(f)Y + f \nabla_X Y$

koşullarını sağlayan $\nabla : \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) \to \mathfrak{X}(M)$ fonksiyonuna *afin* veya *lineer koneksiyon* adı verilir. $\nabla_X Y$ vektör alanına Y vektör alanının X vektör alanı boyunca *kovaryant türevi* denir.

Örnek 2.11. [24] $\mathbb{R}^m$ Öklidyen uzayının doğal koordinat fonksiyonları $x^1, \ldots, x^m$ ve $X = \sum_{i=1}^{m} f^i \frac{\partial}{\partial x^i}$ ile $Y = \sum_{i=1}^{m} g^i \frac{\partial}{\partial x^i}$, $\mathbb{R}^m$ de iki vektör alanı olsun. Burada f^i ve g^i verilen doğal koordinat fonksiyonlarına göre vektör alanlarının bileşenlerini göstermektedir. Şimdi

$$\nabla_X Y = \sum_{i=1}^{m} X[g^i] \frac{\partial}{\partial x^i} = \sum_{i,j=1}^{m} f^j \frac{\partial g^i}{\partial x_j} \frac{\partial}{\partial x^i}$$

ile tanımlı $\nabla \;\; : \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) \to \mathfrak{X}(M)$ dönüşümü göz önüne alalım. Bu durumda ∇, $\mathbb{R}^m$de bir afin koneksiyondur. Bu koneksiyona Öklidyen uzayın *standart koneksiyonu* denir.

2.1.5. Manifold Üzerinde Tensör Alanları

Tanım 2.18. [19] $V_1, \ldots, V_s$, $\mathcal{K}$ halkası üzerinde modüller olsun. Bu durumda $v_i \in V_i$ olmak üzere $V_1 \times \ldots \times V_s$ bütün $(v_1, \ldots, v_s)$ elemanlarının kümesidir. $V_1 \times \ldots \times V_s$, $\mathcal{K}$ üzerinde bir modüldür. W, $\mathcal{K}$ üzerinde başka bir modül olmak üzere $1 \leq i \leq s$ ve $v_j \in V_j (j \neq i)$ için

$$v \to A(v_1, \ldots, v_{i-1}, v, v_{i+1}, \ldots, v_s)$$

fonksiyonu $\mathcal{K}$-lineer ise

$$A : V_1 \times \ldots \times V_s \to W$$

fonksiyonu $\mathcal{K}$-katlı-lineer olarak adlandırılır. V, $\mathcal{K}$ üzerinde bir modül ise V den $\mathcal{K}$ ya tüm $\mathcal{K}$-lineer fonksiyonların kümesi olan V^* da $\mathcal{K}$ üzerinde bir modüldür ve V nin *dual modülü* olarak adlandırılır.

Eğer $1 \leq i \leq s$ için $V_i = V$ ise $V_1 \times \ldots \times V_s$ notasyonu kısaca V^s olarak gösterilebilir.

Tanım 2.19. [19] $r \geq 0, s \geq 0$, $(r, s) \neq (0, 0)$ olmak üzere,

$$A : (V^*)^r \times V^s \to \mathcal{K}$$

$\mathcal{K}$-katlı-lineer fonksiyonu V üzerinde (r, s) tipinden bir tensör olarak adlandırılır.

Tanım 2.20. [19] $\mathfrak{X}(M)$ üzerinde Tanım 2.19 deki gibi tanımlanan bir A tensörü, M

üzerinde bir *tensör alanı* olarak adlandırılır. Böylece A, (r,s) tipinden bir tensör ise

$$A : \mathfrak{X}^*(M)^r \times \mathfrak{X}(M)^s \to \mathfrak{F}(M)$$

şeklinde bir $\mathfrak{F}(M)$-katlı-lineer fonksiyondur. $\theta^1, \ldots, \theta^r$, $1-$formlar ve $X_1, \ldots, X_s$ vektör alanları olmak üzere A katlı-lineer fonksiyonu

$$f = A(\theta^1, \ldots, \theta^r, X_1, \ldots, X_s)$$

şeklinde bir reel-değerli fonksiyon üretir. Burada θ^i, A nın i-inci *kontravaryant* bileşeni ve X_j, A nın j-inci *kovaryant* bileşeni olarak adlandırılır. M üzerindeki (r,s) tipinden bütün tensör alanlarının kümesi $\mathcal{T}^r_s(M)$ ile gösterilecektir.

Örnek 2.12. [19] $E : \mathfrak{X}^*(M) \times \mathfrak{X}(M) \to \mathfrak{F}(M)$ fonksiyonu $E(\theta, X) = \theta X$ ile verilsin. Herhangi $\theta, \theta_1, \theta_2 \in \mathfrak{X}^*(M),\ X, X_1, X_2 \in \mathfrak{X}(M)$ için,
$E(\theta_1 + \theta_2, X) = E(\theta_1, X) + E(\theta_2, X)$
$E(\theta, X_1 + X_2) = E(\theta, X_1) + E(\theta, X_2)$
olduğundan E fonksiyonu toplamaya göre lineerliği sağlar. Öte yandan E her iki bileşene göre $\mathfrak{F}(M)$-lineerdir, yani keyfi bir $f \in \mathfrak{F}(M)$ için
$E(f\theta, X) = (f\theta)X = f(\theta X) = fE(\theta, X)$
$E(\theta, fX) = \theta(fX) = (f\theta)X = fE(\theta, X)$.
Bu yüzden E, $\mathfrak{X}(M)$ modülünün temel özelliklerine göre, M üzerinde $(1,1)$ tipinden bir tensör alanıdır.

Örnek 2.13. [19] Belirli bir $\omega \neq 0$, 1-formu için $F : \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) \to \mathfrak{F}(M)$ fonksiyonu her X, Y vektör alanı için $F(X,Y) = X(\omega Y)$ ile verilsin. $X_1, X_2 \in \mathfrak{X}(M)$ ve $f \in \mathfrak{F}(M)$ olmak üzere,
$F(X_1 + X_2, Y) = F(X_1, Y) + F(X_2, Y)$
$F(fX, Y) = fF(X, Y)$
olduğundan, F, X bileşenine göre hem toplamaya göre lineer hem de $\mathfrak{F}(M)$-lineerdir. Y bileşenine göre toplamanın lineerliği X bileşenine benzer şekilde gösterilebilir. Fakat F, Y bileşenine göre $\mathfrak{F}(M)$-lineer değildir. Çünkü,
$F(X, fY) = X\omega(fY) = X(f\omega Y) = (Xf)\omega Y + fF(X, Y)$
dir. Bu yüzden, F bir tensör alanı değildir.

Bir manifold üzerinde , bir tensör alanının türevinin nasıl hesaplanacağı aşağıdaki tanımda verilecektir.

Tanım 2.21. [19] M bir manifold ve A bu manifold üzerinde (r, s) tipinden bir tensör alanı olsun. Aşağıdaki gibi tanımlanan $\mathfrak{D} : \mathcal{T}_s^r(M) \to \mathcal{T}_s^r(M)$, $\mathbb{R}$-lineer fonksiyonuna *tensör türevi* denir: $\theta^1, \ldots, \theta^r \in \mathfrak{X}^*(M)$ ve $X_1, \ldots, X_s \in \mathfrak{X}(M)$ olmak üzere,

$$\begin{aligned}\mathfrak{D}[A(\theta^1, \ldots, \theta^r, X_1, \ldots, X_s) &= (\mathfrak{D}A)(\theta^1, \ldots, \theta^r, X_1, \ldots, X_s) \\ &+ \sum_{i=1}^{r} A(\theta^1, \ldots, \mathfrak{D}\theta^i, \ldots, \theta^r, X_1, \ldots, X_s) \\ &+ \sum_{j=1}^{s} A(\theta^1, \ldots, \theta^r, X_1, \ldots, \mathfrak{D}X_j, \ldots, X_s)\end{aligned}$$

Örnek 2.14. [24] Bir $\theta,$ 1-formunun $\mathfrak{D}$ tensör türevi,

$$(\mathfrak{D}\theta)(X) = \mathfrak{D}(\theta X) - \theta(\mathfrak{D}X)$$

şeklinde hesaplanır. Burada $X \in \mathfrak{X}(M)$ dir.

Tanım 2.22. [24] M bir manifold ve ∇ da bu manifold üzerinde bir lineer koneksiyon olsun. Bu durumda $T : \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) \to \mathfrak{X}(M)$ olmak üzere,

$$T(X, Y) = \nabla_X Y - \nabla_Y X - [X, Y]$$

ile verilen fonksiyon $(1, 2)$ tipinden bir tensör alanıdır. Bu tensör alanına ∇ lineer koneksiyonunun *torsiyon tensörü* denir. $T = 0$ olması durumunda ∇ lineer koneksiyonu *torsiyonsuzdur* denir.

Tanım 2.23. [24] M bir manifold ve ∇ da bu manifold üzerinde bir lineer koneksiyon olsun. Bu durumda $R : \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) \to \mathfrak{X}(M)$ olmak üzere,

$$R(X, Y)Z = \nabla_X \nabla_Y Z - \nabla_Y \nabla_X Z - \nabla_{[X,Y]} Z$$

ile verilen fonksiyon $(1, 3)$ tipinden bir tensör alanıdır. Bu tensör alanına ∇ lineer koneksiyonunun *eğrilik tensörü* denir.

Şimdi herhangi bir r-formun dış türev tanımı verilecektir.

Tanım 2.24. [31] M bir manifold olsun. $\{i_1, \ldots, i_r\}$, $\{1, 2, \ldots, r\}$ nin permütasyonu ve $w_{i_1 \ldots i_r}$ diferansiyellenebilir fonksiyonlar olmak üzere,

$$w = w_{i_1 \ldots i_r} dx^{i_1} \wedge dx^{i_2} \wedge \ldots \wedge dx^{i_r}$$

M üzerinde herhangi bir r-form olmak üzere bu durumda w nin d dış türevi

$$(dw)(X_0, X_1, \ldots, X_r) = \frac{1}{r+1} \sum_{i=0}^{r} (-1)^i X_i(w(X_0, \ldots, \hat{X}_i), \ldots, X_r)$$

$$+ \frac{1}{r+1} \sum_{0 \leq i < j \leq r} (-1)^{i+j} w([X_i, X_j], X_0, \ldots, \hat{X}_i, \ldots, \hat{X}_j, \ldots, X_r)$$

ile verilir, burada " ˆ " notasyonu üstünde olduğu terimin ihmal edildiği anlamına gelmektedir.

Tanım 2.25. [24] M bir manifold ve $X, Y_1, \ldots, Y_{r-1}$ M üzerinde vektör alanları olsun. Bu durumda

$$\omega \to (i_X \omega)(Y_1, \ldots, Y_{r-1}) = \omega(X, Y_1, \ldots, Y_{r-1})$$

ile verilen $i_X : \bigwedge^r M \to \bigwedge^{r-1} M$ dönüşümü

i. $(i_X)^2 = 0$

ii. Eğer $\omega \in \bigwedge^r M$ ise

$$i_X(\omega \wedge \overline{\omega}) = (i_X \omega) \wedge \overline{\omega} + (-1)^r \omega \wedge (i_X \overline{\omega})$$

gerçeklenir, burada $\overline{\omega}$ keyfi formdur,

şartlarını sağlarsa i_X dönüşümüne *iç türev* denir. Burada $\bigwedge^r M = \{\phi \mid \phi(X_1, \ldots, X_r) = sgn\sigma\phi(X_1, \ldots, X_r)$ ve σ permütasyon$\}$ anti-simetrik kovaryant tensörlerin uzayıdır.

2.2. RIEMANNİYEN MANİFOLDLAR

Bu bölümde Riemanniyen manifoldların geometrisinden bahsedilecektir. Riemanniyen manifold tanımı, Levi-Civita koneksiyonu, eğrilik tensörü, kesitsel eğrilik, uzay form gibi kavramlar verilecektir.

Tanım 2.26. [24] M bir manifold ve

$$g : \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) \to \mathfrak{F}(M)$$

bir $(0, 2)$ tipinden tensör alanı olsun. Eğer g, simetrik ve pozitif tanımlı ise, yani $\forall X, Y \in \mathfrak{X}(M)$,

a) $g(X, Y) = g(Y, X)$ ve

b) $g(X, X) \geq 0$ ve $g(X, X) = 0 \Leftrightarrow X = 0$

koşullarını sağlanıyorsa g, $(0, 2)$ tipinden tensör alanına *Riemanniyen metrik* veya *metrik tensör* adı verilir. Bu durumda (M, g) ikilisine bir *Riemanniyen manifold* denir.

Tanım 2.27. [24] (M, g) bir Riemanniyen manifold olsun. M üzerindeki bir ∇ koneksiyonu, $\forall X, Y, Z \in \mathfrak{X}(M)$,

$$X[g(Y, Z)] = g(\nabla_X Y, Z) + g(Y, \nabla_X Z) \tag{2.1}$$

koşulunu sağlarsa, bu ∇ koneksiyonuna g ile *uyumlu (compatible) koneksiyon* denir. Tanım 2.21 dan bu koşulun $\nabla g = 0$ koşuluna denk olduğunu görebiliriz. Bu durumda g ye ∇ ya göre *paralel* denir.

Yardımcı Teorem 2.5. [19] M bir Riemanniyen manifold olsun. $V \in \mathfrak{X}(M)$ olmak üzere V^*,

$$V^*(X) = g(V, X)$$

koşulunu sağlayan bir 1-form olsun. Bu durumda $V \to V^*$ nin, $\mathfrak{X}(M)$ den $\mathfrak{X}^*(M)$ ye bir $\mathfrak{F}(M)$-lineer izomorfizm olduğu kolayca görülebilir.

Aşağıdaki teorem Riemann geometrisinin en temel teoremlerinden birisidir.

Teorem 2.4. [19] (M, g) bir Riemanniyen manifold olsun. Bu manifold üzerinde

$\forall X, Y \in \mathfrak{X}(M)$,

$$[X, Y] = \nabla_X Y - \nabla_Y X \tag{2.2}$$

ve

$$X[g(Y, Z)] = g(\nabla_X Y, Z) + g(Y, \nabla_X Z) \tag{2.3}$$

koşullarını sağlayan bir tek ∇ koneksiyonu vardır. ∇, M nin *Levi-Civita* koneksiyonu ya da Riemanniyen koneksiyon olarak adlandırılır ve

$$2g(\nabla_Y Z), X) = Yg(Z, X) + Zg(X, Y) - Xg(Y, Z) - g(Y, [Z, X])$$

$$+g(Z, [X, Y]) + g(X, [Y, Z])$$

Koszul formülü ile karakterize edilir.

İspat: Kabul edelim ki ∇, M üzerinde (2.2) ve (2.3) koşullarını sağlayan bir koneksiyon olsun. Koszul formülünün sağ tarfındaki ilk üç terim için (2.3) ve son üç terim için (2.2) eşitlikleri kullanılırsa, $2g(\nabla_Y Z), X)$ elde edilir ve Yardımcı Teorem 2.5 dan ∇ tektir.

Varlık için Koszul formülünün sağ tarafına eşit olan $F(Y, Z, X)$ tensörünü tanımlayalım. Sabit $Y, Z \in \mathfrak{X}(M)$ için doğrudan hesaplama ile $X \to F(Y, Z, X)$ fonksiyonunun $\mathfrak{F}(M)$-lineer olduğu görülür ve böylece bu fonksiyon bir 1-formdur. Yardımcı Teorem 2.5 den, $\nabla_Y Z$ ile göstereceğimiz bir tek vektör alanı vardır öyle ki; her $X \in \mathfrak{X}(M)$ için $2g(\nabla_Y Z), X) = F(Y, Z, X)$ dir. Koszul formülü sağlanır ve bu formülden (2.3) koşulunun varlığını görebiliriz. (2.2) koşulunu kanıtlamak için,

$$2g(\nabla_Y Z - \nabla_Z Y, X) = F(Y, Z, X) - F(Z, Y, X)$$

eşitliğinden yola çıkalım. Bu eşitliğin sağ tarafı

$$g(X, [Y, Z]) - g(X, [Z, Y]) = 2g([Y, Z], X)$$

ifadesine indirgenir. Buradan istenilen elde edilir.

(2.2) ve (2.3) koşullarını sağlayan koneksiyon *Riemanniyen koneksiyonu* veya *metrik* *koneksiyon* olarak da adlandırılır.

M bir Riemanniyen manifold olsun. $\varphi = (x_1, \ldots, x_n)$ olmak üzere $(\mathcal{U}, \varphi)$, M manifoldu üzerinde bir koordinat sistemi ve $X_1, \ldots, X_n$ koordinat sisteminin belirlediği ortonormal çatı olsun. Bu durumda

$$\nabla_{X_k} X_j = \sum_{i=1}^{n} \Gamma_{kj}^{i} X_i$$

ile tanımlı $\Gamma_{kj}^{i} : \mathcal{U} \to \mathfrak{F}(M)$ fonksiyonlarını ele alalım. Bu fonksiyonlara *Christoffel sembolleri* denir. ∇ Levi-Civita koneksiyonu olduğundan (2.3) eşitliği kullanılırsa

$$\begin{aligned} X_i(g(X_r, X_j)) + X_j(g(X_r, X_i)) - X_r(g(X_i, X_j)) &= g(\nabla_{X_i} X_r, X_j) + g(X_r, \nabla_{X_i} X_j) \\ &+ g(\nabla_{X_j} X_r, X_i) + g(X_r, \nabla_{X_j} X_i) - g(\nabla_{X_r} X_i, X_j) - g(X_i, \nabla_{X_r} X_j) \\ &+ \sum_{i=1}^{n} \Gamma_{ir}^{k} g(X_k, X_j) + \sum_{i=1}^{n} \Gamma_{ij}^{k} g(X_r, X_k) + \sum_{i=1}^{n} \Gamma_{jr}^{k} g(X_k, X_i) \\ &+ \sum_{i=1}^{n} \Gamma_{ji}^{k} g(X_r, X_k) - \sum_{i=1}^{n} \Gamma_{ri}^{k} g(X_k, X_j) - + \sum_{i=1}^{n} \Gamma_{rj}^{k} g(X_i, X_k) \\ &+ \sum_{i=1}^{n} \{ (\Gamma_{ir}^{k} - \Gamma_{ri}^{k}) g(X_k, X_j) + (\Gamma_{jr}^{k} - \Gamma_{rj}^{k}) g(X_k, X_i) \\ &\qquad + (\Gamma_{ji}^{k} - \Gamma_{ij}^{k}) g(X_r, X_k) \} \end{aligned}$$

olur. Diğer taraftan $f \in \mathfrak{F}(M)$ için

$$\begin{aligned} [X_k, X_s](f) &= X_k(X_s(f)) - X_s(X_k(f)) \\ &= X_k\left(\frac{\partial f}{\partial X_s}\right) - X_s\left(\frac{\partial f}{\partial X_k}\right) \\ &= \frac{\partial^2 f}{\partial X_k \partial X_s} - \frac{\partial^2 f}{\partial X_s \partial X_k} = 0 \end{aligned}$$

olduğundan $[X_k, X_s] = 0$ bulunur. Böylece

$$[X_k, X_s] = \nabla_{X_k} X_s - \nabla_{X_s} X_k = \sum_{i=1}^{n} \Gamma_{sk}^{t} X_t - \sum_{i=1}^{n} \Gamma_{ks}^{t} X_t = \sum_{i=1}^{n} (\Gamma_{sk}^{t} - \Gamma_{ks}^{t}) X_t$$

ve $\{X_1, \ldots, X_n\}$ lineer bağımsız olduğundan

$$\Gamma_{sk}^{t} = \Gamma_{ks}^{t}$$

elde edilir. Buna göre

$$X_i(g(X_r,X_j)) + X_j(g(X_r,X_i)) - X_r(g(X_i,X_j)) = 2\sum_{i=1}^{n}\Gamma_{ji}^k g_{kr}$$

$$X_i[g_{rj}] + X_j[g_{ri}] - X_r[g_{ij}] = 2\sum_{i=1}^{n}\Gamma_{ji}^k g_{kr}$$

$$1 \leq i,j,k,r \leq n$$

dir. Burada $g_{ij} = g(X_i, X_j)$ ve $[g_{ij}]$, g_{ij} nin matrisini göstermektedir. Böylece

$$[\Gamma_{ji}^k] = \frac{1}{2}\, g^{kr}\{X_i[g_{rj}] + X_j[g_{ri}] - X_r[g_{ij}]\}$$

$$= \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} g^{kr}\{\frac{\partial g_{rj}}{\partial X_i} + \frac{\partial g_{ri}}{\partial X_j} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial X_r}\}$$

elde edilir, burada g^{kr}, $[g_{kr}]$ matrisinin tersi olan matrisin bileşenlerini göstermektedir. Buradan

$$\Gamma_{ji}^k = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} g^{kr}\{\frac{\partial g_{rj}}{\partial X_i} + \frac{\partial g_{ri}}{\partial X_j} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial X_r}\} \tag{2.4}$$

olur. Bu ifade Christoffel sembollerini dolayısıyla Levi-Civita koneksiyonunun metrik tensörün bileşenleri türünden elde edileceğini göstermektedir.[24]

Aşağıda bir Riemanniyen manifoldunun eğrilik tensörünün simetri özellikleri verilecektir.

Teorem 2.5. [19] R, bir (M,g) Riemanniyen manifoldu üzerindeki ∇ Riemanniyen koneksiyonunun eğrilik tensörü olsun. $p \in M$ ve $x,y,z,w \in T_pM$ ise, bu durumda,

i) $R(x,y) + R(y,x) = 0$,

ii) $R(x,y;z,w) = -R(x,y;w,z)$,

iii) $R(x,y)z + R(y,z)x + R(z,x)y = 0$,

iv) $R(x,y;z,w) = R(z,w;x,y)$, burada $R(x,y;z,w) = g(R(x,y)z,w)$ dir.

İspat: Kovaryant türev ve parantez operatörü, vektör alanları üzerinde yerel işlemler olduğundan, p nin herhangi komşuluğunda çalışmak yeterli olur. Çünkü kanıtlanacak olan özdeşlikler tensör eşitlikleridir, bir komşuluk üzerinde $x, y, \ldots$ teğet vektörleri uygun bir yolla $X, Y, \ldots$ vektör alanlarına genişletilebilir. Ele alınan durumda diferansiyellenebilir genişlemeleri seçeriz. Böylece bu vektör alanlarının bütün parantez operatör işlemleri sıfır olur. (Bu durum bir koordinat sistemi ile ilgili olarak vektör alanlarının bileşenlerini sabit almakla sağlanabilir.) Bu durumda, her $X, Y, Z, W \in \mathfrak{X}(M)$ için, $R(X,Y)Z = \nabla_X\nabla_Y Z - \nabla_Y\nabla_X Z = [\nabla_X, \nabla_Y]Z$ yazabiliriz.

i) Parantez operatörü ters-simetrik olduğundan, eğrilik tensörünün tanımı gereği istenilen kolayca sağlanır.

ii) Polarizasyondan dolayı $g(R(X,Y)Z,Z) = 0$ olduğunu göstermek yeterlidir. $[X,Y] = 0$ olduğundan,

$$\begin{aligned} g(R(X,Y)Z,Z) &= g(\nabla_X\nabla_Y Z, Z) - g(\nabla_Y\nabla_X Z, Z) \\ &= Yg(\nabla_X Z, Z) - g(\nabla_X Z, \nabla_Y Z) - Xg(\nabla_Y Z, Z) + g(\nabla_Y Z, \nabla_X Z) \\ &= \tfrac{1}{2}YXg(Z,Z) - \tfrac{1}{2}XYg(Z,Z) = 0 \end{aligned}$$

iii) Varsayalım ki $F : \mathfrak{X}(M)^3 \to \mathfrak{X}(M)$ sadece $\mathbb{R}$-lineer olan bir fonksiyon olsun. X, Y, Z üzerinden devirsel toplam;

$$\Omega F(X,Y,Z) = F(X,Y,Z) + F(Y,Z,X) + F(Z,X,Y)$$

şeklindedir. X, Y, Z nin permütasyonu $\Omega F(X,Y,Z)$ yi değiştirmez. Sonuç olarak, $\Omega R(X,Y)Z = \Omega\nabla_X\nabla_Y Z - \Omega\nabla_Y\nabla_X Z = \Omega\nabla_X\nabla_Z Y - \Omega\nabla_X\nabla_Y Z = \Omega\nabla_X[Z,Y] = 0$

iv) **iii)** den dolayı herhangi $X, Y, Z, W \in \mathfrak{X}(M)$ için $g(\Omega R(X,Y)Z, W) = 0$ dır. O halde, X, Y, Z, W nin dairesel permütasyonu üzerinden toplam alınırsa, $g(\Omega g(R(Y,V)X,W) + g(\Omega R(V,X)W,Y) + g(\Omega R(X,W)Y,V) + g(\Omega R(W,Y)V,X) = 0$ elde edilir. Buradan Ω devirsel toplamını açarsak, $g(R(Y,V)X + R(V,X)Y + R(X,Y)V, W) + g(R(V,X)W + R(X,W)V + R(W,V)X, Y) + g(R(X,W)Y + R(W,Y)X + R(Y,X)W, V) + g(R(W,Y)V + R(Y,V)W + R(V,W)Y, X) = 0$

elde edilir. Burada **i)** ve **ii)** kullanılırsa,

$$2g(R(X,Y)Z,W) + 2g(R(W,Z)X,Y) = 0$$

sonucu çıkar. Buradan $g(R(X,Y)Z,W) = g(R(Z,W)X,Y)$ bulunur.

Tanım 2.28. [31] (M,g) bir Riemanniyen manifold ve ∇ onun Riemann koneksiyonu olsun. Eğer $\{E_1,\dots,E_n\}$, M üzerinde yerel ortonormal çatı alanı ise , bu durumda

$$S(X,Y) = \sum_{i=1}^{n} g(R(E_i,X)Y,E_i) \tag{2.5}$$

ifadesi $(0,2)$ tipinden bir simetrik tensör alanı tanımlar ve bu tensöre M nin *Ricci* tensörü denir. S Ricci tensörünü kullanarak M nin r *skaler eğriliği*

$$r = \sum_{i=1}^{n} S(E_i,E_i) \tag{2.6}$$

ile tanımlanır.

Tanım 2.29. [31] (M,g) bir Riemanniyen manifold olsun. X ve Y , M nin bir noktasında lineer bağımsız iki vektör olsun. X ile Y tarafından gerilen düzlem kesiti için *kesitsel eğrilik*

$$K(X,Y) = \frac{R(X,Y;Y,X)}{g(X,X)g(Y,Y) - g^2(X,Y)} \tag{2.7}$$

ile tanımlanır. Eğer kesitsel eğrilik bütün düzlem kesitleri için aynı c sabitine eşit ise M ye *sabit eğrilikli uzay* ya da bir *reel-uzay-form* denir ve $M(c)$ ile gösterilir.

2.2.1. Riemanniyen Manifoldların Altmanifoldları

Bu bölümde altmanifoldların geometrisini ilgilendiren temel tanım ve teoremleri vereceğiz. Altmanifold, altmanifoldlar üzerine indirgenmiş konneksiyon gibi kavramlardan ve Gauss ile Weingarten formüllerinden bahsedilecektir.

Tanım 2.30. [24] (M,g) ile $(\overline{M},\overline{g})$ Riemanniyen manifoldlar olsun. $p \in M$ olmak üzere, $\phi : M \to \overline{M}$ dönüşümü $\forall X_p, Y_p \in T_pM$,

$$g(X_p,Y_p) = \overline{g}(d\phi_p(X), d\phi_p(Y))$$

koşulunu sağlarsa ϕ ye *izometrik dönüşüm* denir. Bu durumda, $\phi_* = d\phi$ türev dönüşümü p noktasında bire-birdir çünkü, $\phi_{*p}(X_p) = 0$ iken $X_p = 0$ olmaktadır. M manifoldunun her noktasında izometrik olan bir ϕ dönüşümü bir daldırmadır ve *izometrik daldırma* (isometric immersion) olarak adlandırılır. Dahası ϕ dönüşümü bire-bir ise M den $\overline{M}$ ye bir *izometrik gömme* (isometric imbedding) olarak adlandırılır.

Aşağıda aralarında bir daldırma tanımlanan manifoldların koordinat sistemleri arasındaki ilişkiyi açıklayan bir teorem verilmektedir.

Teorem 2.6. [8] $n < m$ olmak üzere M ve $\overline{M}$ sırası ile n ve m boyutlu manifoldlar olsun. Eğer $F : M \to \overline{M}$ bir dönüşüm ve keyfi bir $p \in M$ noktası için dF_p türev dönüşümü bire-bir ise bu durumda $\varphi = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ olmak üzere p nin civarında $(\mathcal{U}, \varphi)$ ve $\psi = (y_1, y_2, \ldots, y_n)$ olmak üzere $q = F(p)$ nin komşuluğunda öyle bir $(\mathcal{V}, \varphi)$ koordinat sistemi vardır ki $F(\mathcal{U}) \subset \mathcal{V}$ olur ve herhangi $x \in \mathcal{U}$ için $F_{\mathcal{U}}$ yerel koordinatlar cinsinden aşağıdaki gibi ifade edilebilir:

$$y_i(F(x)) = x_i(x)\ ,\ 1 \leq i \leq n \qquad , \qquad y_j(F(x)) = 0\ ,\ n+1 \leq j \leq m$$

Tanım 2.31. [19] Eğer aşağıdaki koşullar sağlanırsa M ye $\overline{M}$ nin bir *diferansiyellenebilir altmanifoldu* veya *gömülmüş altmanifoldu* denir:

1) M, $\overline{M}$ nin bir topolojik alt uzayı,

2) $\phi : M \to \overline{M}$ içerme dönüşümü diferansiyellenebilirdir ve her $p \in M$ noktasında $d\phi$ diferansiyel dönüşümü bire-birdir.

Örnek 2.15. [19] Koordinat sistemleri altmanifold üretirler. Örneğin, $\mathbb{R}^3$ teki $z = 1$ düzlemi $(x, y, 1) \to (x, y)$ dönüşümü altında $\mathbb{R}^2$ ye diffeomorfiktir. $z = 1$ düzlemi $\mathbb{R}^3$ de bir altmanifolddur.

Örnek 2.16. [19] $\mathcal{U}$, M nin açık alt kümesi olsun. M nin diferansiyellenebilir yapısını $\mathcal{U}$ ya kısıtlayarak, $\mathcal{U}$ yu M ile aynı boyutlu bir manifold yapan diferansiyellenebilir bir yapı elde edilir. $\varphi : \mathcal{U} \to M$ dönüşümü $\forall p \in \mathcal{U}$, $\varphi(p) = p$ biçiminde tanımlı olsun. Bu durumda $\varphi(\mathcal{U})$, M nin gömülmüş bir altmanifoldu olur ve bu altmanifold M nin *açık altmanifoldu* olarak adlandırılır.

Tanım 2.32. [24] M, $\overline{M}$ manifoldunun alt manifoldu ve $i : M \to \overline{M}$ içerme fonksiyonu olsun. $\overline{\mathcal{U}}$, $\overline{M}$ nin bir açık komşuluğu ve $\mathcal{U} = M \cap \overline{U}$ olsun. Herhangi $p \in M$ için

$$\overline{X}(p) = X(p)$$

yani $di_p(X) = \overline{X}_p$ koşulunu sağlayan $\overline{X} \in \mathfrak{X}(\overline{\mathcal{U}})$ vektör alanına $X \in \mathfrak{X}(\mathcal{U})$ vektör alanınının *diferansiyellenebilir genişlemesi* denir.

$(\overline{M}, g)$ ve M sırası ile m-boyutlu Riemann manifoldu ve n-boyutlu keyfi manifold olsun. Bu durumda $\phi : M \to \overline{M}$ daldırmasını göz önüne alalım. ϕ daldırması M üzerine

$$\phi_p^* g(X_p, Y_p) = g(d\phi_p(X), d\phi_p(Y)) \ ; \ X, Y \in T_pM) \ , \ p \in M$$

ile tanımlı $\phi^* g$, simetrik, bilineer ve pozitif tanımlı formunu, yani Riemanniyen metriğini indirger. Bu formu da g ile gösterelim. Bu durumda (M, g) bir Riemanniyen manifold ve ϕ de izometrik daldırma olur. $m - n$ sayısına M altmanifoldunun ek boyutu denir. Herhangi bir daldırma yerel olarak bir gömme olduğundan $\overline{M}$ nin M altmanifoldu üzerindeki yerel açılımlarla çalışacağız. Şöyle ki; $\phi(p)$ ile p ve $\phi^*(X)$ ile $X \in \mathfrak{X}(M)$ özdeş olarak kabul edilecektir. $p \in M$ noktasında altmanifoldun teğet uzayı T_pM olsun. Bu durumda T_pM , $T_p\overline{M}$ teğet uzayının altvektör uzayıdır. T_pM uzayına dik olan uzayı $T_p^{\perp}M$ ile gösterelim. $T_p^{\perp}M$ uzayına normal uzay ve bu uzayın meydana getirdiği teğet demete *normal demet* denir ve $T^{\perp}M$ ile gösterilir. Böylece $T_p\overline{M}$ uzayı için

$$T_p\overline{M} = T_pM \oplus T_p^{\perp}M \tag{2.8}$$

ayrışımı geçerlidir. Buna bağlı olarak $T^{\perp}M$ normal demeti için

$$T\overline{M} = TM \oplus TM^{\perp} \tag{2.9}$$

ayrışımı da kolayca yazılabilir. $N \in T_pM^{\perp}$ vektörüne *normal vektör* ve birim normal vektöre de *normal kesit* denir. Normal vektör alanlarının kümesi $\mathfrak{X}^{\perp}(M)$ ile gösterilir. $\overline{M}$ üzeindeki Levi-Civita koneksiyonunu $\overline{\nabla}$ ile gösterelim. Herhangi $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$ ve $N \in \mathfrak{X}^{\perp}(M)$ için,

$$\overline{\nabla}_X Y = \nabla_X Y + h(X, Y) \tag{2.10}$$

$$\overline{\nabla}_X N = -A_N X + \nabla^{\perp}_X N \tag{2.11}$$

denklemleri M altmanifoldu için temel denklemlerdir ve *Gauss* ve *Weingarten* formülleri olarak adlandırılırlar. Burada $\nabla_X Y \in \mathfrak{X}(M)$ ve $h(X,Y) \in \mathfrak{X}^{\perp}(M)$, sırasıyla $\overline{\nabla}_X Y$ nin teğet ve normal bileşenleridir. $h : \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) \to \mathfrak{X}^{\perp}(M)$ fonksiyonu, $(0,2)$-tipinden bir simetrik tensör alanıdır ve M nin *ikinci temel formu* olarak adlandırılır.

$A_N X \in \mathfrak{X}(M)$ ve $\nabla^{\perp}_X N \in \mathfrak{X}^{\perp}(M)$ sırasıyla $\overline{\nabla}_X N$ nin teğet ve normal bileşenleridir. $A_N : \mathfrak{X}(M) \to \mathfrak{X}(M)$ lineer dönüşümü $(1,1)$-tipinden bir tensör alanıdır ve *Weingarten endomorfizmi* olarak adlandırılır. İkinci temel form h ile A şekil operatörü

$$g(A_N X, Y) = g(h(X,Y), N) \tag{2.12}$$

denklemi ile bağlantılıdır. İkinci temel form h nın $\nabla_X h$ kovaryant türevi

$$\nabla_X(h)(Y,Z) = \nabla^{\perp}_X h(Y,Z) - h(\nabla_X Y, Z) - h(Y, \nabla_X Z) \tag{2.13}$$

ile tanımlanır. (2.12) aracılığıyla (2.13)'e denk olan

$$(\nabla_X A)_N Y = \nabla_X(A_N Y) - A_{\nabla^{\perp}_X N} Y - A_N \nabla_X Y \tag{2.14}$$

denklemi tanımlanabilir. Burada $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$ ve $N \in \mathfrak{X}^{\perp}(M)$ dir.

$\overline{R}$ ve R sırası ile $\overline{M}$ ve M nin Riemann eğrilik tensörleri olmak üzere , Gauss ve Weingarten formülleri aracılığıyla

$$\overline{R}(X,Y)Z = R(X,Y)Z - A_{h(X,Y)}X + A_{h(X,Z)}Y + (\nabla_X h)(Y,Z) - (\nabla_Y h)(X,Z) \tag{2.15}$$

denklemi elde edilir. Burada $X, Y, Z \in \mathfrak{X}(M)$ dir. M ye teğet herhangi W vektör alanı için *Gauss denklemi* (2.15) aracılığıyla,

$$g(\overline{R}(X,Y)Z, W) = g(R(X,Y)Z, W) - g(h(X,W), h(Y,Z)) + g(h(Y,W), h(X,Z)) \tag{2.16}$$

ile tanımlanır. (2.15) nın normal bileşenini alarak *Codazzi denklemi* olarak adlandırılan

$$(\overline{R}(X,Y)Z)^{\perp} = (\nabla_X h)(Y,Z) - (\nabla_Y h)(X,Z) \tag{2.17}$$

denklemini elde ederiz. M nin normal demetinin $R^{\perp}$ eğrilik tensörü $X,Y \in \mathfrak{X}(M)$ ve $N \in \mathfrak{X}^{\perp}(M)$ için

$$R^{\perp}(X,Y)N = \nabla^{\perp}_X \nabla^{\perp}_Y N - \nabla^{\perp}_Y \nabla^{\perp}_X N - \nabla^{\perp}_{[X,Y]} N \tag{2.18}$$

ile verilir.

Gauss ve Weingarten formülleri kullanılarak ,

$$\overline{R}(X,Y)N = R^{\perp}(X,Y)N - h(X, A_N Y) + h(Y, A_N X) - (\nabla_X A)_N Y + (\nabla_Y A)_N X \tag{2.19}$$

denklemi elde edilir. U, M ye normal bir vektör alanı olsun. Bu durumda

$$[A_U, A_V] = A_U A_V - A_V A_U$$

olmak üzere

$$g(\overline{R}(X,Y)N, U) = g(R^{\perp}(X,Y)N, U) + g([A_U, A_V]X, Y) \tag{2.20}$$

eşitliği elde edilir. Bu denkleme *Ricci denklemi* adı verilir.[31]

Tanım 2.33. [31] M, $\overline{M}$ nin n boyutlu bir altmanifoldu olsun. $\{E_1, \ldots, E_n\}$, M ye teğet ortonormal çatı alanı ve h, M nin ikinci temel formu olmak üzere; H *ortalama eğrilik vektör alanı*

$$H = \sum_{i=1}^{n} h(E_i, E_i) \tag{2.21}$$

ile tanımlanır.

Tanım 2.34. [31] M, $\overline{M}$ nin bir altmanifoldu olsun. Eğer $h = 0$ ise M ye *tümel jeodezik*, eğer $H \equiv 0$ ise *minimal altmanifold* denir. Ek olarak, eğer $\forall X, Y \in TM$, $h(X,Y) = g(X,Y)H$ ise, bu durumda M ye *tümel umbilik altmanifold* denir.

Tanım 2.35. [31] $\xi \in \mathfrak{X}^{\perp}(M)$ olsun. Eğer $\forall X \in \mathfrak{X}(M)$, $\nabla^{\perp}_X \xi = 0$ ise, ξ ye *paralel* *normal vektör alanı* denir.

Şimdi, ileride altmanifold sınıflarını tanımlamada yardımcı olacak bir tanım verilecektir.

Tanım 2.36. [24] M bir manifold olmak üzere bu manifold üzerinde bir $\mathcal{D}$ *dağılımı*, M nin her p noktasına T_pM nin r-boyutlu bir $\mathcal{D}_p$ altuzayını atar. M nin her p noktası, bir $\mathcal{U}$ komşuluğuna sahip ve bu komşuluktaki q noktasında $\mathcal{D}_q$ nun bazı olacak şekilde $X_1, X_2, \ldots, X_r$ diferansiyellenebilir vektör alanları var ise $\mathcal{D}$ ye r-boyutlu bir *diferansiyellebilir dağılım* (düzgün dağılım) denir. $X_1, X_2, \ldots, X_r$ kümesi $\mathcal{U}$ içinde $\mathcal{D}$ için bir yerel baz olarak adlandırılır. $\forall p \in M$ için $X_p \in \mathcal{D}_p$ ise X vektör alanı $\mathcal{D}$ ye aittir denir. Eğer herhangi $X, Y \in \mathcal{D}$ için $[X, Y] \in \mathcal{D}$ ise $\mathcal{D}$ dağılımına *involutiv* denir. Bundan sonra dağılım denildiğinde onun diferansiyellenebilir dağılım olduğu anlaşılacaktır. Her $p \in M$ için, $\mathcal{D}$ dağılımının tümleyen ortogonal dağılımı $\mathcal{D}^{\perp} : p \to \mathcal{D}_p^{\perp} \in T_pM$ ile gösterilir.

Tanım 2.37. [24] $\overline{M}$, bir manifold ve $\mathcal{D}$, $\overline{M}$ üzerinde r-boyutlu bir dağılım olsun. M, $\overline{M}$ manifoldunun bir altmanifoldu olmak üzere, eğer M nin her p noktasında M manifoldunun teğet uzayı ile $\mathcal{D}_p$ aynı ise M ye $\mathcal{D}$ dağılımının *integral manifoldu* denir. Yani, $f : M \to \overline{M}$ bir gömme olmak üzere her $p \in M$ için, $f_*(T_pM) = D_p$ dir. Eğer $\mathcal{D}$ dağılımının M manifoldunu kapsayan başka bir integral manifoldu yoksa bu manifolda dağılımın *maksimal integral manifoldu* denir.

Tanım 2.38. [24] $\overline{M}$ bir manifold ve M, $\overline{M}$ manifoldunun bir altmanifoldu olsun. Eğer her $p \in M$ için, $\mathcal{D}$ dağılımının p noktasını kapsayan bir maksimal integral manifoldu varsa $\mathcal{D}$ dağılımına *integrallenebilirdir* denir.

Şimdi bir dağılımın involutiv olması ve integrallenebilir olması kavramlarını ilişkilendiren ve Frobenius Teoremi olarak bilinen teoremi verilecektir.

Teorem 2.7. (Frobenius Teoremi)[8] $\overline{M}$, bir manifold ve $\mathcal{D}$, $\overline{M}$ üzerinde r-boyutlu bir dağılım olsun. Bu durumda her involutiv dağılım integrallenebilirdir. Üstelik $\mathcal{D}$ dağılımının, $\forall p \in M$ noktasından geçen bir tek maksimal integral manifoldu vardır ve p noktasını ihtiva eden diğer tüm integral manifoldlar bu maksimal integral manifoldunun bir açık altmanifoldudur.

Tanım 2.39. [31] $\overline{M}$ bir manifold olsun ve $\mathcal{D}$, $\overline{M}$ manifoldu üzerinde bir dağılım olsun. Eğer herhangi $X, Y \in D$ için $\overline{\nabla}_X Y \in D$ ise $\mathcal{D}$ dağılımına *içparalel dağılım* (autoparallel distribution) denir. Eğer herhangi $X \in D$ ve $U \in TM$ için $\overline{\nabla}_U X \in D$ ise $\mathcal{D}$ dağılımına *paralel dağılım* denir.

Bu tanımdan açıkça görülür ki, $\mathcal{D}$ dağılımı $\overline{M}$ üzerinde içparalelse, integrallenebilir ve $\mathcal{D}$ dağılımı $\overline{M}$ üzerinde içparalelse, Gauss formülünden $\overline{M}$ içinde tümel jeodeziktir. $\mathcal{D}$ dağılımının paralel olması için gerek ve yeter koşulun $\mathcal{D}^{\perp}$ dağılımının paralel olması olduğunu görmek zor değildir.

Tanım 2.40. [31] $\overline{M}$ bir manifold ve M, $\overline{M}$ manifoldunun bir altmanifoldu olsun. $\mathcal{D}_1$ ile $\mathcal{D}_2$, M üzerinde iki dağılım olmak üzere, eğer $X \in \mathcal{D}_1$ ve $Y \in \mathcal{D}_2$ iken $h(X, Y) = 0$ oluyorsa, bu durumda M ye $(\mathcal{D}_1, \mathcal{D}_2)$-*karışık tümel jeodeziktir* denir.

2.3. KÄHLERİYEN MANİFOLDLAR

Bu bölümde K$\ddot{a}$hleriyen manifold kavramı ve bu manifolfdun temel özellikleri verilecektir.

2.3.1. Hemen Hemen Kompleks Manifoldlar

Bu bölümde hemen hemen kompleks yapı kavramından ve hemen hemen kompleks manifold, hemen hemen Hermityen manifold gibi manifold sınıflarından bahsedilecektir.

Tanım 2.41. [31] M, m-boyutlu bir Riemanniyen manifold olsun. M üzerinde bir J tensör alanı, her $p \in M$ için T_pM teğet uzayının

$$J_p^2 = -I_p \tag{2.22}$$

koşulunu sağlayan bir endomorfizmi ise J ye *hemen hemen kompleks yapı* denir. Burada I birim dönüşümdür. M nin her noktasında aynı J yapısına sahip M manifolduna *hemen hemen kompleks manifold* denir.

J hemen hemen kompleks yapısının matrisini (J_i^j) ile gösterirsek, matris çarpımını kullanarak Tanım 2.41 dan,

$$\mid (J_i^j)(J_i^j) \mid = (-1)^m$$

elde edilir. O halde bir M Riemanniyen manifoldu üzerinde bir hemen hemen kompleks yapının olması için gerek koşul M nin çift boyutlu olmasıdır. [13]

Tanım 2.42. [31] M, J hemen hemen kompleks yapısı ile bir hemen hemen kompleks manifold olsun. M üzerinde herhangi X ve Y vektör alanı için,

$$g(JX, JY) = g(X, Y) \tag{2.23}$$

koşulunu sağlayan bir g Riemanniyen metriği *Hermityen metrik* olarak adlandırılır. Üzerinde Hermityen metrik tanımlanan bir hemen hemen kompleks manifolda *hemen hemen Hermityen manifold* denir.

Örnek 2.17. $\mathbb{R}^3$ de

$$S^2(1) = \{(x, y, z) \ | \ x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$$

birim küresi için $J : TS^2 \to TS^2$ olmak üzere;

$$JX = X \wedge N$$

endomorfizmini tanımlayalım. Burada N, S^2 nin birim normali ve "$\wedge$" vektörel çarpımdır. "$< \, , \, >$", $\mathbb{R}^3$ deki iç çarpım olmak üzere, üçlü özdeşlik sayesinde
$J^2X = J(JX) = J(X \wedge N) = (X \wedge N) \wedge N =< X, N > N- < N, N > X = -X$
olduğundan $J^2X = -X$ sağlanır. Böylece J, S^2 üzerinde hemen hemen kompleks yapı olur.

Örnek 2.18. [31] Kompleks sayıların $(z_1, \ldots, z_n)$ tipinde bütün n-lilerinden oluşan vektör uzayı C^n olsun. Eğer

$$z^k = x^k + iy^k \ ; \ x^k, y^k \in \mathbb{R} \ , \ k = 1, \ldots, n$$

olacak şekilde kurulursa, C^n, $\mathbb{R}^{2n}$ reel vektör uzayı olarak tanımlanabilir. Tanımlama

$$(z_1, \ldots, z_n) \to (x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_n)$$

lineer izomorfisi ile verilebilir. R^{2n} in kompleks yapısı *kanonik kompleks yapı* olarak adlandırılan

$$J_0 : (x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_n) \to (y_1, \ldots, y_n, -x_1, \ldots, -x_n)$$

ile tanımlanır. R^{2n} in doğal bazı cinsinden kanonik kompleks yapı,

$$J_0 = \begin{pmatrix} 0 & I_n \\ -I_n & 0 \end{pmatrix}$$

ile verilir.

Teorem 2.8. [31] J hemen hemen kompleks yapısı, $\forall X, Y, Z \in \mathfrak{X}(M)$ için,
i) $(\nabla_X J)Y = \nabla_X JY - J\nabla_X Y$
ii) $(\nabla_X J)JY = -J(\nabla_X J)Y$
iii) $g((\nabla_X J)Y, Z) = -g((\nabla_X J)Z, Y)$
özelliklerine sahiptir.

Kanıt: i. Tensör alanlarının kovaryant türev tanımından elde edilir.

ii. **i)** yi kullanacak olursak,

$$\begin{aligned}(\nabla_X J)JY &= \nabla_X J^2 Y - J(\nabla_X JY) = -\nabla_X Y - J(\nabla_X JY) = JJ\nabla_X Y - J(\nabla_X JY) \\ &= J(J(\nabla_X Y) - (\nabla_X JY)) = -J((\nabla_X J)Y)\end{aligned}$$
$$\Rightarrow (\nabla_X J)JY = -J(\nabla_X J)Y$$

iii. $$\begin{aligned}g((\nabla_X J)Y, Z) &= g(\nabla_X JY, Z) - g(J\nabla_X Y, Z) = g(\nabla_X JY, Z) + g(\nabla_X Y, JZ) \\ &= g(\nabla_X JY, Z) - g(JY, \nabla_X Z) + [g(\nabla_X Y, JZ) - g(Y, \nabla_X JZ)] \\ &= g(Y, J(\nabla_X Z)) - g(Y, \nabla_X JZ) = -g((\nabla_X J)Z, Y)\end{aligned}$$

Aşağıda hemen hemen Hermityen manifoldları sınıflandırmamızda rol oynayan bir kavram tanıtılacaktır.

Tanım 2.43. [31] M bir hemen hemen Hermityen manifold olsun. J ile g, sırasıyla M

üzerinde hemen hemen kompleks yapı ve Hermityen metrik olmak üzere, $\forall X, Y \in \mathfrak{X}(M)$;

$$\Phi(X, Y) = g(X, JY)$$

ile tanımlanan yapıya M nin *temel formu* denir. Bu durumda $\Phi(JX, JY) = \Phi(X, Y)$ eşitliği Hermityen metriğin ve hemen hemen kompleks yapının özellikleri kullanılarak kolayca görülür.

Üzerinde sırasıyla, J hemen hemen kompleks yapısı ve Hermityen metrik tanımlanan hemen hemen Hermityen manifold M, kısaca (M, g, J) ile gösterilecektir.

Tanım 2.44. [31] (M, g, J) hemen hemen Hermityen manifold olsun. $\forall X, Y \in \mathfrak{X}(M)$,

$$N(X, Y) = [JX, JY] - J[X, JY] - J[JX, Y] - [X, Y] \tag{2.24}$$

ifadesi M nin *Nijenhuis tensörü* olarak adlandırılır.

Teorem 2.9. [31] (M, g, J) hemen hemen Hermityen manifold olsun. N, M nin Nijenhuis tensörü olmak üzere $\forall X, Y \in \mathfrak{X}(M)$,

$$N(X, Y) = \nabla_X(J)(JY) - \nabla_{JY}(J)(X) + \nabla_{JX}(J)(Y) - \nabla_Y(J)(JX) \tag{2.25}$$

eşitliği gerçeklenir, burada ∇, M nin Riemanniyen koneksiyonunu göstermektedir.

İspat: $[X, Y] = \nabla_X Y - \nabla_Y X$ olduğundan, tensör türevini kullanarak

$$\begin{aligned} N(X, Y) = {} & -\nabla_X Y + \nabla_Y X - J\nabla_{JX} Y + J\nabla_Y JX - J\nabla_X JY + J\nabla_{JY} X + \nabla_{JX} JY \\ & -\nabla_{JY} JX = -\nabla_X Y - J\nabla_X JY - \nabla_{JY} JX + J\nabla_{JY} X + \nabla_{JX} JY - J\nabla_{JX} Y \\ & +\nabla_Y X + J\nabla_Y JX = \nabla_X(J)(JY) - \nabla_{JY}(J)(X) + \nabla_{JX}(J)(Y) - \nabla_Y(J)(JX) \end{aligned}$$

Yardımcı Teorem 2.6. [31] (M, g, J) hemen hemen Hermityen manifold olsun. Bu durumda ∇ Riemanniyen koneksiyonunun kovaryant türevi, g metrik tensörü ve N Nijenhuis tensörü $\forall X, Y, Z \in \mathfrak{X}(M)$,

$$2g((\nabla_X J)Y, Z) - g(JX, N(Y, Z)) = 3d\Phi(X, JY, JZ) - 3d\Phi(X, Y, Z)$$

koşulunu sağlar.

Teorem 2.10. [31] (M, g, J) bir hemen hemen Hermityen manifold olsun. ∇, g metrik tensörünün Riemanniyen koneksiyonu, N, M nin Nijenhuis tensörü ve Φ, M nin temel formu olmak üzere, bu durumda aşağıdaki ifadeler birbirine eşdeğerdir:

a) $\nabla J = 0$,

b) $\nabla \Phi = 0$,

c) $N = 0$ ve $d\Phi = 0$.

İspat: $X, Y, Z \in \mathfrak{X}(M)$ olsun.

$a \Rightarrow b :$ $\nabla J = 0$ olsun. Tanım 2.21 i kullanarak,

$$\begin{aligned}\nabla_X(\Phi)(Y,Z) &= X[\Phi(Y,Z)] - \Phi(\nabla_X Y, Z) - \Phi(Y, \nabla_X Z)\\ &= X[g(JY,Z)] - g(J\nabla_X Y, Z) - g(JY, \nabla_X Z)\\ &= g(\nabla_X(JY), Z) + g(JY, \nabla_X Z) - g(J\nabla_X Y, Z) - g(JY, \nabla_X Z)\\ &= g(\nabla_X(J)Y, Z)\end{aligned}$$

elde edilir. Bu yüzden $\nabla J = 0 \Leftrightarrow \nabla\Phi = 0$ dir.

$b \Rightarrow c :$ $\nabla\Phi = 0$ olsun. σ, $X, Y, Z \in \mathfrak{X}(M)$ üzerinden devirsel toplam olmak üzere $d\Phi(X, Y, Z) = \sigma\nabla_X(\Phi)(Y, Z)$ olduğundan $d\Phi = 0$ dır. Dahası Yardımcı Teorem 2.6 dan $N = 0$ elde edilir.

$c \Rightarrow a :$ $N = 0$ ve $d\Phi = 0$ olsun. Yardımcı Teorem 2.6 dan $\nabla J = 0$ ve böylece $\nabla\Phi = 0$ elde edilir.

Tanım 2.45. [31] (M, g, J) bir hemen hemen Hermityen manifold olsun. Eğer $\forall X, Y \in \mathfrak{X}(M)$,

$$(\nabla_X J)Y = 0$$

ise, başka deyişle J paralel ise M ye bir *Kähleriyen manifold* denir.

Diferansiyellenebilir manifold tanımında $\mathbb{R}^m$ yerine m-boyutlu C^m kompleks sayılar uzayını alalım. ξ ile η, M diferansiyellenebilir manifoldu üzerinde herhangi iki koordinat sistemi olsun. $p \in \mathbb{R}^m$ olmak üzere $\eta \circ \xi^{-1}(p)$ ile $\xi \circ \eta^{-1}(p)$ fonksiyonları p nin holomorfik fonksiyonu oluyor ise bu durumda M manifoldu *kompleks manifold* olarak adlandırılır.

Örnek 2.19. [31] M bir kompleks manifold ve $(z_1, z_2, \ldots, z_n)$, $p \in M$ nin bir $\mathcal{U}$ komşuluğunda üzerinde bir kompleks yerel koordinat sistemi olsun. $z_j = x_j + iy_j, \;\; j = 1, \ldots, n$
yazılabilir. T_pM üzerinde

$$J(\frac{\partial}{\partial x_j}) = \frac{\partial}{\partial y_j} \;\; , \;\; J(\frac{\partial}{\partial y_j}) = -(\frac{\partial}{\partial x_j}) \;\; , j = 1, \ldots, n.$$

$$(\frac{\partial}{\partial z_j}) = \frac{1}{2}(\frac{\partial}{\partial x_j}) - i(\frac{\partial}{\partial y_j}) \text{ ve } (\frac{\partial}{\partial \bar{z}_j}) = \frac{1}{2}(\frac{\partial}{\partial x_j}) + i(\frac{\partial}{\partial y_j})$$

olmak üzere

$$J(\frac{\partial}{\partial z_j}) = i\frac{\partial}{\partial z_j} \;\; , \;\; J(\frac{\partial}{\partial \bar{z}_j}) = -i(\frac{\partial}{\partial \bar{z}_j})$$

$$Z_a = \frac{\partial}{\partial z^a} \;\; , \;\; Z_{\bar{a}} = \bar{Z}_a = \frac{\partial}{\partial \bar{z}^a}, \;\; a = 1, \ldots, n.$$

vektör alanları tanımlansın.

$$g_{AB} = g(Z_A, Z_B), \;\; A, B = 1, \ldots, n, \bar{1}, \ldots, \bar{n}.$$

yazılabilir. Bu durumda $g_{ab} = g_{\bar{a}\bar{b}} = 0$ ve $(g_{a\bar{b}})$ bir Hermityen matristir. g metriği için

$$ds^2 = 2\sum_{a,b} g_{a\bar{b}} dz^a d\bar{z}^b$$

yazılabilir. Φ, M nin temel iki formu olsun. Herhangi Z, W kompleks vektör alanları için

$$Z = \sum_a (dz^a(Z)Z_a + d\bar{z}^a(Z)\bar{Z}_a) \;\; , W = \sum_a (dz^b(W)Z_b + d\bar{z}^b(W)\bar{Z}_b)$$

yazılabilir. Bu durumda

$$\Phi(Z, W) = -i\sum_{a,b} g_{a\bar{b}} dz^a(Z)dz^b(W) - d\bar{z}^a(W)d\bar{z}^b(Z)$$

buradan,

$$\Phi = -2i \sum_{a,b} g_{a\bar{b}} dz^a \wedge d\bar{z}^b$$

şeklinde bulunur. Şimdi

$$ds^2 = \sum_{j=1}^{n} dz^j d\bar{z}^j$$

metriği ile C^n n-boyutlu kompleks uzayı ele alınsın. Φ temel 2-formu

$$\Phi = -i \sum_{j=1}^{n} dz^j \wedge d\bar{z}^j$$

ile verilir. Φ nin kapalı olduğunu görmek zor değildir. Bu yüzden bu metrik C^n üzerinde K$\ddot{a}$hleriyen yapı tanımlar.

Tanım 2.46. [11] (M, g, J) hemen hemen Hermityen manifold olsun. N, M nin (2.24) eşitliği ile verilen Nijenhuis tensörü olsun. $\forall X, Y \in \mathfrak{X}(M)$için eğer $N(X, Y) = 0$ ise M manifoldu *Hermityen manifold* olarak adlandırılır.

Şimdi K$\ddot{a}$hleriyen manifold ve Hermityen manifold arasındaki ilişkiyi veren bir teorem verilecektir.

Teorem 2.11. [11] Herhangi bir Kahleriyen manifold Hermityen manifolddur, yani K$\ddot{a}$hleriyen manifoldlar sınıfını $\mathcal{K}$ ile, Hermityen manifold sınıfını $\mathcal{H}$ ile gösterirsek, $\mathcal{K} \subset \mathcal{H}$ kapsaması geçerlidir.

İspat: M bir Kahleriyen manifold olsun. O halde $\forall X, Y \in \mathfrak{X}(M)$ için $(\nabla_X J)Y = 0$ gerçeklenir. O halde N, M nin Nijenhuis tensörü olmak üzere (2.25) eşitliğinden $N = 0$ elde edilir. Bu ise M nin Hermityen manifold olduğu anlamına gelir.

2.3.2. K$\ddot{a}$hleriyen Manifoldların Bazı Altmanifoldları

Bu bölümde K$\ddot{a}$hler manifoldların, holomorfik, ters holomorfik ve eğik altmanifoldları gibi önemli altmanifold sınıflarının tanımı verilecektir.

M manifoldu, $(\overline{M}, J, g)$ K$\ddot{a}$hler manifoldunun içine izometrik olarak gömülmüş bir Riemanniyen manifold olsun. $\overline{M}$ nin metrik tensörünün yanısıra, M için metrik tensör de g ile gösterilecektir.

Tanım 2.47. [31] $\forall p \in M$ için, T_pM teğet uzayı J altında değişmez kalıyorsa, yani $J(T_pM) \subset T_pM$ ise, M ye $\overline{M}$ nin bir *holomorfik altmanifoldu* denir.

Bazı kaynaklarda holomorfik altmanifolda *değişmez (invaryant) altmanifold* da denilmektedir.

Tanım 2.48. [31] $\forall p \in M$ için, $J(T_pM) \subset T_p^{\perp}M$ ise M ye $\overline{M}$ nin bir *ters-holomorfik altmanifoldu* veya *tümel gerçel (totally real) altmanifoldu* denir.

Şimdi bu tezde üzerinde çalışılacak altmanifold tipini tanımlamaya elveren bir altmanifold tipi tanımlanacaktır.

Tanım 2.49. [7] Bir $p \in M$ noktasında M ye teğet herhangi X vektör alanı için, JX ile T_pM teğet uzayı arasındaki açı $\theta(X)$ ile gösterilir ve bu açı X in *Wirtinger açısı* olarak adlandırılır ve $\forall X, Y \in T_pM$ için

$$cos\theta(X) = \frac{\mid g(JX, Y) \mid}{\mid JX \mid \mid Y \mid}$$

ile tanımlanır. Sıfır olmayan bir X vektör alanı için, $\theta(X)$ Wirtinger açısı sabit ise ($p \in M$ ve $X \in T_pM$ nin seçiminden bağımsız ise) bu durumda M ye $\overline{M}$ nin bir *eğik (slant) altmanifoldu* denir.

Bu tanım holomorfik ve ters-holomorfik altmanifold kavramlarının bir genelleştirmesidir. Gerçekten, holomorfik ve ters-holomorfik altmanifoldlar sırasıyla $\theta = 0$ ve $\theta = \frac{\pi}{2}$ Wirtinger açılarına karşılık gelen altmanifoldlardır. Eğer, bir eğik altmanifold ne holomorfik ne de ters-holomorfik alt ise o altmanifolda bir *has eğik altmanifold* denir.

M, $(\overline{M}, g, J)$ K$\ddot{a}$hleriyen manifoldu içine izometrik olarak gömülmüş bir Riemanniyen altmanifold olsun. Herhangi $U \in TM$ için

$$JU = PU + FU \tag{2.26}$$

yazılabilir, burada PU ve FU sırası ile JU nun teğet ve normal bileşenleridir. Benzer şekilde, herhangi $\xi \in T^{\perp}M$ için

$$J\xi = t\xi + f\xi \tag{2.27}$$

yazılabilir, burada $t\xi$ ve $f\xi$, sırası ile $J\xi$ nin teğet ve normal bileşenleridir.

2.3.3. Bir K$\ddot{a}$hler Manifoldun Kısmi-Eğik Altmanifoldları

Bu bölümde, bir $\overline{M}$ K$\ddot{a}$hler manifoldunun kısmi eğik altmanifoldları tanımlayıp bu altmanifoldlar karakterize edilecektir.

$(\overline{M}, g, J)$ bir hemen hemen Hermityen manifold ve M, $\overline{M}$ nin bir altmanifoldu olsun. $\mathcal{D}$, M üzerinde bir dağılım olsun. Eğer $X \in \mathcal{D}_p$ için JX ile D_p arasındaki açı sabit ise yani $p \in M$ ve $X \in \mathcal{D}_p$ nin seçiminden bağımsız ise $\mathcal{D}$ dağılımına bir *eğik dağılım* denir. θ sabit açısı $\mathcal{D}$ eğik dağılımının *eğik açısı* olarak adlandırılır.

Tanım 2.50. [23] $(\overline{M}, g, J)$ bir K$\ddot{a}$hler manifold ve M, $\overline{M}$ nin bir altmanifoldu olsun. Bu durumda
a) TM teğet demeti $TM = \mathcal{D}^{\perp} \oplus \mathcal{D}^{\theta}$ ortogonal doğrudan ayrışımını mümkün kılar,
b) $\mathcal{D}^{\perp}$ dağılımı anti-invaryanttır(ters-değişmez) yani $J\mathcal{D}^{\perp} \subseteq T^{\perp}M$,
c) $\mathcal{D}^{\theta}$ dağılımı θ eğik açısı ile eğiktir,
koşullarını sağlayan $\mathcal{D}^{\perp}$ ve $\mathcal{D}^{\theta}$ ortogonal tümleyen dağılımına sahip M altmanifolduna $\overline{M}$ nin bir *kısmi-eğik altmanifoldu* denir. Bu altmanifolda bazı kaynaklarda [28] sözde eğik (pseudo-slant) de denir. Bu durumda θ, M nin eğik açısı olarak adlandırılır.

Bir kısmi-eğik altmanifoldun $\mathcal{D}^{\perp}$ anti-invaryant dağılımı, $\theta = \frac{\pi}{2}$ ye karşılık gelen bir eğik dağılımdır. Açıktır ki, kısmi-eğik altmanifoldlar bi-eğik altmanifoldların özel durumlarıdır [3]. Dahası $\mathcal{D}^{\perp}$ ve $\mathcal{D}^{\theta}$ dağılımlarının boyutu sırası ile m_1 ve m_2 ile gösterilirse bu durumda

a) $m_2 = 0$ ise M bir anti-invaryant altmanifolddur.
b) $m_1 = 0$ ve $\theta = 0$ ise M bir invaryant altmanifolddur.
c) $m_1 = 0$ ve $\theta \neq 0, \frac{\pi}{2}$ ise bu durumda M, θ eğik açılı bir has eğik altmanifolddur.
d) $\theta = \frac{\pi}{2}$ ise M bir anti-invaryant altmanifolddur.

Uyarı 2.1. [23] Dikkat edelim ki Carriazo [3] tarafından kısmi-eğik altmanifoldlar, ters-eğik altmanifoldlar adı altında bi-eğik altmanifoldların özel bir durumu olarak tanımlanmıştır. Fakat "ters-eğik" tanımı eğik parçası olmayan altmanifoldu andırdığı için kısmi-eğik altmanifold deyişi tercih edilir.

Uyarı 2.2. [23] K$\ddot{a}$hler manifoldların has kısmi-eğik altmanifoldları ve has yarı-eğik altmanifoldları arasında herhangi bir kapsama bağıntısı geçerli değildir.

Örnek 2.20. [23] M, $\mathbb{R}^6$ nın

$$x_1 = \frac{\varphi}{\sqrt{2}} cos\tau \ , \ x_2 = \frac{\varphi}{\sqrt{2}} sin\tau \ , \ x_3 = \frac{\varphi}{\sqrt{2}} \ , \ x_4 = 0 \ , \ x_5 = t \ , \ x_6 = t, \ \varphi \neq 0$$

ile verilen bir altmanifoldu olsun. TM uzayının yerel çatısının

$$Z_1 = -\frac{\varphi}{\sqrt{2}} sin\tau \frac{\partial}{\partial x_1} + \frac{\varphi}{\sqrt{2}} cos\tau \frac{\partial}{\partial x_2} \ , \ Z_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} cos\tau \frac{\partial}{\partial x_1} + \frac{1}{\sqrt{2}} sin\tau \frac{\partial}{\partial x_2} + \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{\partial}{\partial x_3}$$

$$Z_3 = \frac{\partial}{\partial x_5} + \frac{\partial}{\partial x_6}$$

olduğu görülebilir. $\mathbb{R}^6$ nın

$$(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6) \rightarrow (x_2, -x_1, x_4, -x_3, x_6, -x_5)$$

standart (kanonik) kompleks yapısı kullanılarak

$$JZ_1 = -\frac{\varphi}{\sqrt{2}} sin\tau \frac{\partial}{\partial x_2} - \frac{\varphi}{\sqrt{2}} cos\tau \frac{\partial}{\partial x_1} \ , \ JZ_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} cos\tau \frac{\partial}{\partial x_2} - \frac{1}{\sqrt{2}} sin\tau \frac{\partial}{\partial x_1} + \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{\partial}{\partial x_4}$$

$$JZ_3 = \frac{\partial}{\partial x_6} - \frac{\partial}{\partial x_5}$$

elde edilir. Buradan, $g(JZ_3, Z_3) = 0$ olduğundan JZ_3 ün TM ye ortogonal olduğu görülebilir. Böylece $D^{\perp} = span\{Z_3\}$ gerçeklenir. Dahası

$$cos\theta = \frac{\mid g(JZ_2, Z_1) \mid}{\mid JZ_2 \mid\mid Z_1 \mid} = \frac{\frac{|\varphi|}{2}}{\frac{|\varphi|}{\sqrt{2}}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

olduğundan $\mathcal{D}^{\theta} = span\{Z_1, Z_2\}$ nin, $\theta = \frac{\pi}{4}$ eğik açılı eğik dağılım olduğunu görmek kolaydır. Böylece M, $\mathbb{R}^6$ nın has kısmi-eğik altmanifoldudur.

Örnek 2.21. [23] $M, \mathbb{R}^8$ in

$$x_1 = \varphi \ , \ x_2 = \theta \ , \ x_3 = kcos\theta \ , \ x_4 = ksin\theta$$

$$x_5 = sin\theta_1 \ , \ x_6 = cos\theta_1 \ , \ x_7 = cos\theta_2 \ , \ x_8 = sin\theta_2$$

ile verilen bir altmanifoldu olsun. TM nin yerel çatısı

$$Z_1 = \frac{\partial}{\partial x_2} - ksin\theta \frac{\partial}{\partial x_3} + kcos\theta \frac{\partial}{\partial x_4} \ , \ Z_2 = \frac{\partial}{\partial x_1}$$

$$Z_3 = cos\theta_1 \frac{\partial}{\partial x_5} - sin\theta_1 \frac{\partial}{\partial x_6} \ , \ Z_4 = -sin\theta_2 \frac{\partial}{\partial x_7} + cos\theta_2 \frac{\partial}{\partial x_8}$$

elde edilir. Buradan $\mathbb{R}^8$ in J standart kompleks yapısı kullanılarak

$$JZ_1 = -\frac{\partial}{\partial x_1} - ksin\theta \frac{\partial}{\partial x_4} - kcos\theta \frac{\partial}{\partial x_3} \ , \ JZ_2 = \frac{\partial}{\partial x_2}$$

$$JZ_3 = cos\theta_1 \frac{\partial}{\partial x_6} + sin\theta_1 \frac{\partial}{\partial x_5} \ , \ JZ_4 = -sin\theta_2 \frac{\partial}{\partial x_8} - cos\theta_2 \frac{\partial}{\partial x_7}$$

bulunur.

$$cos\alpha = \frac{\mid g(JZ_2, Z_1) \mid}{\mid JZ_2 \mid\mid Z_1 \mid} = \frac{1}{\sqrt{1+k^2}}$$

olduğundan $\mathcal{D}^\alpha = span\{Z_1, Z_2\}$ dağılımı, $\alpha = cos^{-1}(\frac{1}{\sqrt{1+k^2}})$ eğik açılı eğik dağılımdır ve $\mathcal{D}^\perp = span\{Z_3, Z_4\}$ olduğu kolayca görülebilir. O halde M, $\mathbb{R}^8$ in has kısmi-eğik altmanifoldudur.

M bir $\overline{M}$ K$\ddot{a}$hler manifoldunun bir kısmi-eğik altmanifoldu olsun. $\mathcal{D}^\perp$ ve $\mathcal{D}^\theta$ üzerindeki izdüşümler sırası ile P_1 ve P_2 ile gösterilin. Bu durumda herhangi $X \in \mathfrak{X}(M)$ için

$$X = P_1X + P_2X \tag{2.28}$$

yazılabilir. J kompleks yapısı (2.28) eşitliğine uygulanırsa ve (2.26) eşitliği kullanılırsa,

$$JX = JP_1X + PP_2X + FP_2X \tag{2.29}$$

elde edilir. Böylece

$$JP_1X \in \mathfrak{X}^{\perp}(M) \ \ , \ \ PP_1X = 0 \tag{2.30}$$

$$PP_2X \in \mathcal{D}^{\theta} \ \ , \ \ FP_2X \in \mathfrak{X}^{\perp}(M) \tag{2.31}$$

elde edilir. Böylece $X \in \mathfrak{X}(M)$ için

$$PX = PP_2X \tag{2.32}$$

Yardımcı Teorem 2.7. [23] $(\overline{M}, g, J)$ bir K$\ddot{a}$hler manifold ve M, $\overline{M}$ nin bir has kısmi-eğik altmanifoldu olsun. Bu durumda

$$J(\mathcal{D}^{\perp})\perp F(\mathcal{D}^{\theta}) \tag{2.33}$$

gerçeklenir.

İspat: Herhangi $X \in \mathcal{D}^{\perp}$ ve $Z \in \mathcal{D}^{\theta}$ için (2.26) eşitliğinden, $g(JX, FP_2Z) = g(JX, JP_2Z - PP_2Z)$ elde edilir. Böylece $g(JX, PP_2Z) = 0$ ve $P_1Z = 0$ olduğundan $g(JX, FP_2Z) = g(JX, JZ)$. (2.23) den $\mathcal{D}^{\perp}$ ve $\mathcal{D}^{\theta}$ ortogonal olduğundan $g(JX, FP_2Z) = g(X, Z) = 0$ ve ispat tamamlanır.

$(\overline{M}, g, J)$ bir K$\ddot{a}$hler manifold olsun. Herhangi $X, Y \in \mathfrak{X}(\overline{M})$ için (2.26) eşitliğinden $g(JX, Y) = g(PX+FX, Y) = g(PX, Y)$ ve $g(X, JY) = g(X, PY + FY) = g(X, PY)$ ve $g(X, JY) = g(JX, J^2Y) = -g(JX, Y)$ olduğundan $g(PX, Y) = -g(X, PY)$ elde edilir. Buradan $g(P^2X, Y) = -g(PX, PY) = g(X, P^2Y)$. O halde $P^2 = Q$ endomorfizmi simetriktir.

$JX = PX+FX \Rightarrow \mid J^2 \mid = \mid P^2+F^2 \mid = 1$. Öte yandan $\mid P^2 \mid \leq \mid P^2 + F^2 \mid = 1 \Rightarrow \mid Q \mid \leq 1$. Herhangi $X \in \mathfrak{X}(\overline{M})$ için $QX = \lambda X$ dersek, $\mid QX \mid = \mid \lambda X \mid \leq 1$ olduğundan $\mid \lambda \mid \leq 1$, dolayısıyla $\lambda \in [-1, 1]$ elde edilir.
$\mid PX \mid^2 = g(PX, PX) = -g(X, P^2X) = -g(X, \lambda X) = -\lambda \mid X \mid^2$. Buradan $-\lambda \geq 0$ ve dolayısıyla $\lambda \leq 0$ elde edilir. Sonuç olarak $\lambda \in [-1, 0]$ bulunur.

Teorem 2.12. [23] M, $(\overline{M}, g, J)$ K$\ddot{a}$hler manifoldunun bir altmanifoldu olsun. Bu durumda,

M nin eğik altmanifold olması için gerek ve yeter koşul

$$P^2 = \lambda I \tag{2.34}$$

eşitliğini sağlayan bir $\lambda \in [-1, 0]$ sabitinin var olmasıdır. Dikkat edelim ki, eğer θ, M nin eğik açısı ise bu durumda $\lambda = -cos^2\theta$ sağlanır.

İspat: M, $\overline{M}$ nin bir eğik altmanifoldu olsun. Bu durumda $cos\theta(X)$, $x \in M$ ve $X \in T_xM$ in seçiminden bağımsızdır. Bu durumda $cos\theta(X)$ PX ile JX arasındaki açı olarak da düşünülebilir. Böylece, Herhangi $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$ için (2.26) ve $g(JX, JY) = g(X, Y)$ eşitlikleri kullanlarak,

$$cos\ \theta(X) = \frac{|\ g(PX, JX)\ |}{|\ X\ |\ |\ PX\ |} = \frac{|\ g(JPX, J^2X)\ |}{|\ X\ |\ |\ PX\ |} = -\frac{|\ g(JPX, X)\ |}{|\ X\ |\ |\ PX\ |} = -\frac{|\ g(P^2X, X)\ |}{|\ X\ |\ |\ PX\ |} \tag{2.35}$$

elde edilir. Öte yandan $g(JX, JX) = g(X, X)$ olduğundan

$$cos\ \theta(X) = \frac{|\ g(PX, JX)\ |}{|\ PX\ |\ |\ JX\ |} = \frac{|\ g(PX, PX)\ |}{|\ PX\ |\ |\ JX\ |} = \frac{|\ PX\ |^2}{|\ PX\ |\ |\ JX\ |} = \frac{|\ PX\ |}{|\ JX\ |} \tag{2.36}$$

olduğu görülür. O halde, (2.35) ve (2.36) eşitliklerinden,

$$cos^2\theta(X) = -\frac{|\ g(P^2X, X)\ |}{|\ X\ |\ |\ PX\ |}.\frac{|\ PX\ |}{|\ JX\ |} = -\frac{|\ g(P^2X, X)\ |}{|\ X\ |^2}$$

elde edilir. $0 \leq cos^2\theta \leq 1$ olduğundan $P^2X = \lambda X, \lambda \in [-1, 0]$ olur.
Tersine, herhangi $X \in TM$ ve $\lambda \in [-1, 0]$ sabiti için, $P^2X = \lambda X$ olsun. Bu durumda (2.36) eşitliğinden $cos^2\theta(X) = -\lambda$ elde edilir. Böylece $\theta(X)$, M üzerinde sabittir. Dolayısıyla M, $\overline{M}$ nin eğik altmanifoldudur.

Böylece aşağıda kısmi-eğik altmanifoldları karakterize etmeye yarayan teorem elde edilir.

Teorem 2.13. [23] $\mathcal{D}$, M üzerinde bir dağılım olsun. Bu durumda $\mathcal{D}$ nin eğik olması için gerek ve yeter şart

$$(PT)^2X = \lambda X\ ,\quad X \in (\mathcal{D})$$

koşulunu sağlayan bir $\lambda \in [0, 1]$ sabitinin var olmasıdır. Burada T, $\mathcal{D}$ üzerindeki ortogonal izdüşümü göstermektedir. Dahası bu durumda $\lambda = -cos^2\theta$.

Teorem 2.13, Cabrerizo ve diğ. [4] tarafından Sasakiyen durumda kanıtlandı. Kısmi-eğik altmanifoldları karakterize etmek için bu teorem kullanılabilir.

Teorem 2.14. [23] M, bir $\overline{M}$ $K\ddot{a}$hler manifoldunun bir altmanifoldu olsun. Bu durumda M nin bir kısmi-eğik altmanifold olması için gerek ve yeter koşul M üzerinde

i) $\mathcal{D} = \{X \in \mathfrak{X}(M) \mid P^2X = \lambda X\}$

ii) $\mathcal{D}$ ye ortogonal herhangi $X \in \mathfrak{X}(M)$ için $PX = 0$

koşullarını sağlayan $\mathcal{D}$ dağılımının ve $\lambda \in [-1, 0]$ sabitinin var olmasıdır. Dahası bu durumda $\lambda = -cos^2\theta$ sağlanır ve θ burada M nin eğik açısını göstermektedir.

İspat: $M, \overline{M}$ nin bir kısmi eğik altmanifoldu olsun. Bu durumda $\lambda = -cos^2\theta$ ve $\mathcal{D} = \mathcal{D}^\theta$. Kısmi-eğik altmanifoldun tanımı gereği $X \in \mathfrak{X}(M)$ için $PP_1X = 0$ idi. O halde **ii)** koşulunun sağlandığı görülebilir. Aksine **i)** ve **ii)** koşullarının sağlanması $TM = \mathcal{D} \oplus \mathcal{D}^\perp$ anlamına gelir.$P(\mathcal{D}) \subseteq \mathcal{D}$ olduğundan **ii)** gereği $\mathcal{D}^\perp$ anti-invaryant bir dağılımdır. Böylece kanıt tamamlanır.

Şimdi kısmi-eğik altmanifoldları karakterize eden başka bir teorem verilecektir.

Teorem 2.15. [23] M, bir $\overline{M}$ $K\ddot{a}$hler manifoldunun bir altmanifoldu olsun. Bu durumda M nin bir kısmi-eğik altmanifold olması için gerek ve yeter koşul M üzerinde

a) $\mathcal{D} = \{X \in \mathfrak{X}(M) \mid tFX = \kappa X\}$

b) $\mathcal{D}$ ye ortogonal herhangi $X \in \mathfrak{X}(M)$ için $PX = 0$

koşullarını sağlayan $\mathcal{D}$ dağılımının ve $\kappa \in [0, 1]$ sabitinin var olmasıdır. Dahası bu durumda $\kappa = -sin^2\theta$, burada θ, M nin eğik açısını göstermektedir.

İspat: (2.26) eşitliğine J kompleks yapısı uygulanarak $X \in \mathfrak{X}(M)$ için

$$-X = JPX + JFX = P^2X + FPX + tFX + fFX$$

elde edilir. Burada teğet ve normal kısımları kıyaslanarak

$$-X = P^2X + tFX \quad ve \quad FPX + tFX = 0 \tag{2.37}$$

bulunur. M bir kısmi-eğik altmanifold ise **b)** seçeneği açıktır. **a)** seçeneğine bakılacak olursa Teorem 2.14 den $X \in \mathcal{D}^\theta$ için $P^2X = -cos^2\theta X$. Bu durumda (2.37) deki ilk eşitlikten $X \in \mathcal{D}^\theta$ için $tFX = cos^2\theta X - X \Rightarrow tFX = X(cos^2\theta - 1) \Rightarrow tFX = -sin^2\theta X$ bulunur. Böylece $\mathcal{D} = \mathcal{D}^\theta$. Aksine **a)** ve **b)** koşullarının sağlanması $TM = \mathcal{D} \oplus \mathcal{D}^\perp$ anlamına gelir. Dahası **b)** koşulundan $\mathcal{D}^\perp$ dağılımının anti-invaryant olduğu sonucu çıkarılır. **a)** koşulu ve (2.37) eşitliğinden $X \in \mathcal{D}$ için $-X = P^2X + \kappa X$ ve $\kappa \in [-1, 0]$ elde edilir. Böylece $X \in \mathcal{D}$ için $P^2X = -(1+\kappa)X$. Burada $-(1+\kappa) = \lambda$ denilirse $\lambda \in [-1, 0]$ olur. Böylece iddia Teorem 2.14 den doğrulanır.

Teorem 2.15 den aşağıdaki sonuç elde edilir.

Sonuç 2.1. [23] M, bir $\overline{M}$ K$\ddot{a}$hler manifoldunun bir kısmi-eğik altmanifoldu olsun. Bu durumda herhangi $Y \in \mathcal{D}^\theta$ için

$$tFY = -sin^2\theta Y \tag{2.38}$$

ve

$$fFY = -FPY \tag{2.39}$$

eşitlikleri sağlanır.

Şimdi K$\ddot{a}$hler manifoldların eğik altmanifoldları için bir karakterizasyon verilecektir.

Teorem 2.16. [23] M, bir $\overline{M}$ K$\ddot{a}$hler manifoldunun bir altmanifoldu olsun. Bu durumda M nin , $\overline{M}$ nin eğik bir altmanifoldu olması için gerek ve yeter koşul $X \in \mathfrak{X}(M)$ için

$$tFX = \kappa X$$

eşitliğini gerçekleyen bir $\kappa \in [-1, 0]$ sabitinin var olmasıdır.

Teorem 2.14 den aşağıdaki yardımcı teorem elde edilir.

Yardımcı Teorem 2.8. [23] M, bir $\overline{M}$ K$\ddot{a}$hler manifoldunun bir kısmi-eğik altmanifoldu olsun. Bu durumda $X, Y \in \mathcal{D}^\theta$ için

$$g(PX, PY) = cos^2\theta\ g(X, Y) \tag{2.40}$$

$$g(FX, FY) = sin^2\theta\ g(X, Y) \tag{2.41}$$

İspat: $X, Y \in \mathcal{D}^\theta$ için (2.26) eşitliğinden $g(PX, PY) = g(JX - FX, PY)$ elde edilir. Böylece $g(PX, PY) = g(JX - FX, PY) = -g(X, JPY)$. Teorem 2.14, **i.** kullanılarak

$$\begin{aligned} g(PX, PY) &= -g(X, JPY) = -g(X, P^2Y + FPY) = -g(X, -cos^2\theta Y) \\ &= cos^2\theta g(X, Y) \end{aligned}$$

olur, eşitlik (2.40) elde edilir. Yardımcı Teorem 2.7, (2.40) eşitliğine uygulanırsa (2.41) eşitliği elde edilir. Yani $g(JX, JY) = g(PX, PY) + g(FX, FY) = cos^2\theta\ g(X, Y) + g(FX, FY)$ bulunur. Buradan $(1 - cos^2\theta)g(X, Y) = g(FX, FY)$, yani $g(FX, FY) = sin^2\theta\ g(X, Y)$ elde edilir.

Şimdi dağılımların integrallenebilirliği ve bir $\overline{M}$ K$\ddot{a}$hleriyen manifoldu içinde tümel jeodezik olarak gömülmüş kısmi-eğik altmanifold üzerindeki dağılımlar incelenecektir. İlk olarak M kısmi-eğik altmanifoldu üzerindeki $\mathcal{D}^\perp$ dağılımının integrallenebilirliği ele alınacaktır.

Teorem 2.17. [23] M, bir $\overline{M}$ K$\ddot{a}$hleriyen manifoldunun bir has kısmi-eğik altmanifoldu olsun. Bu durumda $\mathcal{D}^\perp$ anti-invaryant dağılımı integrallenebilirdir.

İspat: Bilinir ki $\overline{M}$ bir K$\ddot{a}$hleriyen manifold ise $\forall X, Y \in \mathfrak{X}(\overline{M})$; $\Omega(X, Y) = g(X, JY)$ ile tanımlanan temel 2-form ve d dış türevi için Teorem 2.10 gereği $d\Omega = 0$. Temel 2-form Ω kapalı olduğundan $X \in \mathcal{D}^\theta$ ve $Y, Z \in \mathcal{D}^\perp$ için

$$\begin{aligned} d\Omega(PX, Y, Z) = \tfrac{1}{3}\{&PX\Omega(Y, Z) - Y\Omega(PX, Z) + Z\Omega(PX, Y) \\ &-\Omega([PX, Y], Z) + \Omega([PX, Z], Y) - \Omega([Y, Z], PX)\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} d\Omega(PX, Y, Z) = \tfrac{1}{3}\{&PXg(Y, JZ) - Yg(PX, JZ) + Zg(PX, JY) \\ &- g([PX, Y], JZ) + g([PX, Z], JY) - g([Y, Z], JPX)\} = 0 \end{aligned}$$

$\mathcal{D}^\perp$ ve $\mathcal{D}^\theta$ ortogonal ve $\mathcal{D}^\perp$ anti-invaryant dağılım olduğundan $-Yg(PX, JZ) = g([Y, Z], JPX)$ elde edilir. (2.26) eşitliği kullanılarak, $Yg(PX, JZ) = -Yg(JPX, Z) = -Yg(P^2X + FPX, Z) = -Yg(FPX, Z)$ bulunur. Teorem 2.14 ve yine (2.26) eşitliğinden,

$$\begin{aligned} Yg(FPX, Z) &= g([Y, Z], JPX) = g([Y, Z], P^2X + FPX) \\ &= -cos^2\theta g([Y, Z], X) + g([Y, Z], FPX) \end{aligned}$$

bulunur. $Y, Z \in \mathfrak{X}(M)$ ve $FPX \in \mathfrak{X}^\perp(M)$ olduğundan

$$cos^2\theta g([Y, Z], X) = 0$$

elde edilir. M nin has kısmi-eğik altmanifold olması $\theta \neq \dfrac{\pi}{2}$ olduğu anlamına geldiğinden $cos^2\theta \neq 0$ ve böylece $g([Y,Z],X) = 0$ sonucuna ulaşılır. Buradan $[Y,Z] \in \mathcal{D}^{\perp}$ elde edilir ki bu $\mathcal{D}^{\perp}$ dağılımının integrallenebilir olduğu anlamına gelir.

$\mathcal{D}^{\theta}$ eğik dağılımı için aşağıdaki teorem verilecektir.

Teorem 2.18. [23] M, bir $\overline{M}$ K$\ddot{a}$hler manifoldunun bir has kısmi-eğik altmanifoldu olsun. Bu durumda $\mathcal{D}^{\theta}$ eğik dağılımının integrallenebilir olması için gerek ve yeter koşul $X, Y \in \mathcal{D}^{\theta}$ için

$$FP_2[X,Y] = h(X,PY) - h(PX,Y) + \nabla^{\perp}_X FY - \nabla^{\perp}_Y FX \tag{2.42}$$

eşitliği gerçeklenir.

İspat: $\overline{M}$ K$\ddot{a}$hler manifold olduğundan herhangi $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$ için $\overline{\nabla}_X(J)Y = 0$ olacağından tensör türevi kullanılarak $J\overline{\nabla}_X Y = \overline{\nabla}_X(JY)$ olduğu görülür. Buradan hareketle Gauss ve Weingarten formülleri, (2.26) ve (2.27) kullanılarak

$$\begin{aligned} J\overline{\nabla}_X Y &= J(\nabla_X Y + h(X,Y)) = J\nabla_X Y + Jh(X,Y) \\ &= JP_1\nabla_X Y + JP_2\nabla_X Y + th(X,Y) + fh(X,Y) \\ &= JP_1\nabla_X Y + PP_2\nabla_X Y + FP_2\nabla_X Y + th(X,Y) + fh(X,Y) \end{aligned}$$

ve bunun yanısıra

$\overline{\nabla}_X(JY) = \overline{\nabla}_X(PY + FY) = \nabla_X(PY) + h(X,PY) - A_{FY}X + \nabla^{\perp}_X FY$ ifadeleri elde edilir. $J\overline{\nabla}_X Y = \overline{\nabla}_X(JY)$ eşitliğinde $X, Y \in \mathcal{D}^{\theta}$ için normal kısımlar kıyaslanırsa

$$JP_1\nabla_X Y = h(X,PY) + \nabla^{\perp}_X FY - FP_2\nabla_X Y - fh(X,Y) \tag{2.43}$$

bulunur. Bu ifade X ile Y nin yeri değiştirilerek yeniden yazılırsa

$$JP_1\nabla_Y X = h(Y,PX) + \nabla^{\perp}_Y FX - FP_2\nabla_Y X - fh(Y,X) \tag{2.44}$$

bulunur. (2.43) ve (2.44) eşitlikleri taraf tarafa çıkarılırsa

$$JP_1[X,Y] = h(X,PY) - h(PX,Y) + \nabla^{\perp}_X FY - \nabla^{\perp}_Y FX - FP_2[X,Y]$$

elde edilir. $\mathcal{D}^\theta$ integrallenebilir olması için gerek ve yeter koşul $[X,Y] \in \mathcal{D}^\theta$ olmasıdır, yani $P_1[X,Y] = 0$ olur. Bu ise iddiayı kanıtlar.

Tanım 2.51. [31] Bir manifoldun teğet demetinin integrallenebilir altdemetlerinin oluşturduğu topluluğa *yapraklanma (foliation)* denir.

Teorem 2.19. [23] M, bir $\overline{M}$ K$\ddot{a}$hler manifoldunun bir has kısmi-eğik altmanifoldu olsun. Bu durumda $\mathcal{D}^\theta$ dağılımının tümel jeodezik yapraklanma tanımlaması için gerek ve yeter koşul herhangi $X, Y \in \mathcal{D}^\theta$ ve $Z \in \mathcal{D}^\perp$ için

$$g(A_{JZ}PY, X) = g(A_{FPY}Z, X) \tag{2.45}$$

koşulunun sağlanmasıdır.

İspat: Gauss formülünden $X, Y \in \mathcal{D}^\theta$ ve $Z \in \mathcal{D}^\perp$ için $g(\nabla_X Y, Z) = g(\overline{\nabla}_X Y, Z)$ gerçeklenir. $\overline{M}$ için $\overline{\nabla}_X(J)Y = 0$ koşulu sağlandığından $g(\nabla_X Y, Z) = g(\overline{\nabla}_X JY, JZ)$ bulunur. (2.26) eşitliğinden $g(\nabla_X Y, Z) = g(\overline{\nabla}_X PY, JZ) + g(\overline{\nabla}_X FY, JZ)$. Böylece, (2.33) eşitliğinden ve $\overline{\nabla}$ koneksiyonu Levi-Civita koneksiyonu olduğundan

$$g(\nabla_X Y, Z) = -g(PY, \overline{\nabla}_X JZ) - g(FY, \overline{\nabla}_X JZ)$$

Şimdi Weingarten formülü ve $g(X,Y) = g(JZ, JY)$ özellikleri kullanılırsa,

$$\begin{aligned} g(\nabla_X Y, Z) &= g(PY, A_{JZ}X) - g(JFY, J\overline{\nabla}_X JZ) = g(PY, A_{JZ}X) - g(JFY, \overline{\nabla}_X J^2 Z) \\ &= g(PY, A_{JZ}X) + g(JFY, \overline{\nabla}_X Z) \end{aligned}$$

elde edilir. (2.27) eşitliğinden ve Gauss formülünden

$$g(\nabla_X Y, Z) = g(PY, A_{JZ}X) + g(tFY, \nabla_X Z) + g(fFY, h(X,Z))$$

bulunur. Böylece Sonuç 2.1 den

$$g(\nabla_X Y, Z) = g(PY, A_{JZ}X) - sin^2\theta g(Y, \nabla_X Z) - g(FPY, h(X,Z)) \tag{2.46}$$

elde edilir. (2.12) ilişkisinden,

$$g(PY, A_{JZ}X) = (JZ, h(PY,X)) = g(JZ, h(X,PY)) = g(A_{JZ}PY, X)$$

$g(FPY, h(X,Z)) = g(FPY, h(Z,X)) = g(A_{FPY}Z, X)$
$g(\nabla_X Y, Z) - sin^2\theta g(\nabla_X Y, Z) = cos^2\theta g(\nabla_X Y, Z)$
Bu bilgiler (2.46) eşitliğinde kullanılırsa

$$cos^2\theta g(\nabla_X Y, Z) = g(A_{JZ}PY, X) - g(A_{FPY}Z, X)$$

elde edilir. Buradan $\mathcal{D}^\theta$ dağılımının tümel jeodezik foliasyon tanımlaması $\nabla_X Y \in \mathcal{D}^\theta$ anlamına geldiğinden iddia yukarıdaki eşitlikten kanıtlanır.

Teorem 2.20. [23] M, bir $\overline{M}$ K$\ddot{a}$hler manifoldunun bir has kısmi-eğik altmanifoldu olsun. Bu durumda $\mathcal{D}^\perp$ dağılımının M üzerinde bir tümel jeodezik yapraklanma tanımlaması için gerek ve yeter koşul herhangi $W, Z \in \mathcal{D}^\perp$ ve $X \in \mathcal{D}^\theta$ için

$$g(A_{JW}PX, Z) = g(A_{FPX}W, Z) \tag{2.47}$$

koşulunun sağlanmasıdır.

Kanıt: (2.26) eşitliği ile Gauss ve Weingarten formülleri kullanılırsa
$J\overline{\nabla}_Z W = \overline{\nabla}_Z JW$ olduğundan

$$g(\nabla_Z W, X) = -g(A_{JW}Z, PX) + g(J\overline{\nabla}_Z W, FX)$$

bulunur.
$J\overline{\nabla}_Z W = J\nabla_Z W + Jh(Z,W) = JP_1\nabla_Z W + JP_2\nabla_Z W + Jh(Z,W)$
$\qquad = PP_2\nabla_Z W + FP_2\nabla_Z W + JP_1\nabla_Z W + Jh(Z,W)$
olduğundan
$g(\nabla_Z W, X) = -g(A_{JW}Z, PX) + g(FP_2\nabla_Z W, FX) + g(Jh(Z,W), FX)$
$\qquad$=-$g(A_{JW}Z, PX) + g(FP_2\nabla_Z W, FX) - g(h(Z,W), JFX)$
bulunur. Böylece (2.27), (2.41) eşitliklerinden ve Sonuç 2.1 den
$g(\nabla_Z W, X) = -g(A_{JW}Z, PX) + sin^2\theta g(P_2\nabla_Z W, X) - g(h(Z,W), fFX)$
$\qquad$=$-g(A_{JW}Z, PX) + sin^2\theta g(P_2\nabla_Z W, X) + g(h(Z,W), FPX)$ elde edilir.
Böylece $g(\nabla_Z W, X) = g(P_2\nabla_Z W, X)$ olduğundan

$$cos^2\theta g(P_2\nabla_Z W, X) = -g(A_{JW}Z, PX) + g(A_{FPX}W, Z)$$

bulunur. $\mathcal{D}^{\perp}$ dağılımının M üzerinde bir tümel jeodezik yapraklanma tanımlaması $\nabla_Z W \in \mathcal{D}^{\perp}$ anlamına gelir, yani $P_2 \nabla_Z W = 0$ olacağından iddia yukarıdaki eşitlikten elde edilir.

2.4. YEREL KONFORMAL KÄHLER MANİFOLDLAR

Bu bölümde yerel konformal K$\ddot{a}$hler manifold ile ilgili temel tanım ve teoremler verilecek ve K$\ddot{a}$hler manifoldla ilişkisi incelenecektir.

Tanım 2.52. [10] $(\overline{M}, g, J)$ bir kompleks n-boyutlu Hermityen manifold olsun. Burada J ve g, sırası ile $\overline{M}$ nin kompleks yapısı ve Hermityen metriğidir. Eğer $\overline{M}$ nin her noktası bir $\mathcal{U}_i$ komşuluğuna sahip yani $\overline{M}$ nin $\{\mathcal{U}_i\}_{i\in I}$ açık örtüsü var öyle ki, g nin $\mathcal{U}_i$ ye kısıtlanışı $g|_{\mathcal{U}_i}$, $\mathcal{U}_i$ nin bir g_i K$\ddot{a}$hler metriğine konformal ise yani bir $f_i : \mathcal{U}_i \to \mathbb{R}$ diferansiyellenebilir fonksiyonu için

$$g_i = e^{-f_i} g|_{\mathcal{U}_i} \tag{2.48}$$

koşulu sağlanıyorsa bu durumda $(\overline{M}, g, J)$ *yerel konformal Kähler manifold* (kısaca *y.k.K manifold*) olarak adlandırılır. Eğer (2.48) eşitliği $\mathcal{U}_i = \mathcal{U}$ için sağlanıyor ve $\mathcal{U} = \overline{M}$ ise bu durumda $(\overline{M}, g)$, *global konformal Kähler manifold* (kısaca *g.k.K manifold*) olarak adlandırılır. Bu durumda g_i, $\overline{M}$ üzerinde bir K$\ddot{a}$hler metriktir ve böylece $(\overline{M}, g_i)$ bir K$\ddot{a}$hler manifolddur.

Ω ile Ω_i sırası ile (J, g) ve (J, g_i) ile ilgili temel 2-formlar olsun. Bu durumda (2.48) eşitliğinden

$$\Omega_i = e^{-f_i} \Omega|_{U_i} \tag{2.49}$$

eşitliğinin gerçeklendiği kolayca görülür.

Teorem 2.21. [10] $(\overline{M}, g, J)$ Hermityen manifoldunun *y.k.K.* manifold olması için gerek ve yeter koşul $\overline{M}$ üzerinde global olarak tanımlı bir ω, 1-formunun var olmasıdır öyle ki;

$$d\Omega = \omega \wedge \Omega \ , \ (d\omega = 0) \tag{2.50}$$

koşulu sağlanır.

İspat: $d\Omega_i = 0$ gerçeğini kullanırsak, (2.49) eşitliğinin dış türevini aldığımızda $\mathcal{U}_i$ üzerinde

$$d\Omega = df_i \wedge \Omega$$

gerçeklenir. Böylece, $\mathcal{U}_{ij} = \mathcal{U}_i \cap \mathcal{U}_j$ üzerinde,

$$(df_i - df_j) \wedge \Omega = 0$$

elde edilir. Bu yüzden (Ω dejenere olmadığından) $\mathcal{U}_{ij}$ üzerinde $df_i = df_j$ gerçeklenir. Bu nedenle df_i yerel 1-formları $\overline{M}$ üzerinde kapalı 1-formlar olurlar, yani $\omega|_{\mathcal{U}_i} = df_i$ gerçeklenir.

Tersine ω, $\overline{M}$ üzerinde (2.50) eşitliğini sağlayan 1-form olsun. Klasik Poincar$\acute{e}$ yardımcı teoreminden [12], $\overline{M}$ nin $\{\mathcal{U}_i\}_{i\in I}$ açık örtüsü ve $f_i : \mathcal{U}_i \to \mathbb{R}$ diferansiyel fonksiyonlar ailesi vardır öyle ki, $\mathcal{U}_i$ üzerinde $\omega = df_i$ dir. (2.50) eşitliğinden $d\Omega = df_i \wedge \Omega$ gerçeklenir öyle ki, $d(e^{-f_i}\Omega) = 0$ gerçeklenir, yani, $e^{-f_i}g$ ifadesi $\mathcal{U}_i$ üzerinde bir K$\ddot{a}$hler metriktir.

Teorem 2.21 ile verilen kapalı 1-form ω, $\overline{M}$ *y.k.K.* manifoldunun *Lee formu* olarak adlandırılır [17]. Eğer ω Lee formu tam ise bu durumda $(\overline{M}, J, g)$ manifoldu global konformal K$\ddot{a}$hler, $\omega = 0$ ise $(\overline{M}, J, g)$ manifoldu K$\ddot{a}$hler manifold olur.

$(\overline{M}, J, g)$ manifoldu $n > 1$ kompleks boyutlu bir Hermityen manifold olsun. $\delta = d^*$ iç türev gösterilsin ve $\overline{M}$ üzerinde

$$\omega = \frac{1}{n-1}(\delta\Omega) \circ J \qquad (2.51)$$

1-formu tanımlansın. Eğer (2.50) eşitliğini sağlayan global tanımlı ω 1-formu varsa bu durumda bu 1-form tek türlü belirlidir ve (2.51) eşitliğindeki gibi gösterilir. Aynı zamanda, $\overline{M}$ bir Hermityen yüzey ise (yani $n = 2$) bu durumda (2.51) ifadesi ile verilen 1-form (2.50) eşitliğini sağlar ve genellikle kapalı değildir [30].

Tanım 2.53. [10] $(\overline{M}, J, g)$ manifoldu bir *y.k.K.* manifold olsun. Bu manifoldun B Lee vektör alanı herhangi $U \in \mathfrak{X}(\overline{M})$ için

$$g(B,U) = \omega(U)$$

ile verilir.

Şimdi verilen manifoldun Riemanniyen metriği ile onun yerel konformal olduğu metriğin koneksiyonları arsındaki ilişkiyi veren teorem verilecektir.

Teorem 2.22. [10] $\{g_i\}_{i\in I}$ yerel K$\ddot{a}$hler metriklerinin D^i Levi-Civita koneksiyonları, $\overline{M}$ üzerinde herhangi $X, Y \in \mathfrak{X}(\overline{M})$ için,

$$D_X Y = \overline{\nabla}_X Y - \frac{1}{2}(\omega(X)Y + \omega(Y)X - g(X,Y)B) \tag{2.52}$$

ile verilen global tanımlı torsiyonsuz bir D lineer koneksiyonuna genelleştirilir. Burada $\overline{\nabla}$, $\overline{M}$ nin Riemanniyen koneksiyonudur.

Ispat: N bir C^∞ manifold ve $\tilde{g} = e^\sigma g$, N üzerinde konformal olarak bağlantılı iki Riemanniyen metrik olsun. Bu durumda $\widetilde{\nabla}$ ve $\overline{\nabla}$ sırasıyla $\tilde{g}$ ve g nin koneksiyonları olmak üzere herhangi $X, Y \in \mathfrak{X}(N)$ için

$$\widetilde{\nabla}_X Y = \overline{\nabla}_X Y - \frac{1}{2}(X(\sigma)Y + Y(\sigma)X - g(X,Y)(d\sigma)^{'}) \tag{2.53}$$

eşitliği geçerlidir. Burada σ, N üzerinde diferansiyellenebilir fonksiyondur ve herhangi $X \in \mathfrak{X}(N)$ için $g(X,(d\sigma)^{'}) = d\sigma(X)$ eşitliğini gerçekler. $(\overline{M}, J, g)$ bir *y.k.K.* manifold olsun. Şimdi bir önceki düşünce $N = \mathcal{U}_i$ ve $\sigma = -f_i$ olduğunda uygulansın. Bu durumda (2.53) eşitliğinden herhangi $X, Y \in \mathfrak{X}(\mathcal{U}_i)$ için $\omega = d\sigma$ olmak üzere

$$D^i_X Y = \overline{\nabla}_X Y - \frac{1}{2}(\omega(X)Y + \omega(Y)X - g(X,Y)\omega^{'})$$

elde edilir, bu yüzden D^i yerel koneksiyonları global tanımlı bir D lineer koneksiyonuna genelleştirilir.

Teorem 2.23. [10] $(\overline{M}, J, g)$ Hermityen manifoldunun bir *y.k.K.* manifold olması için gerek ve yeter koşul $\overline{M}$ üzerinde bir ω kapalı 1-formu vardır öyle ki, (2.52) eşitliği ile verilen D koneksiyonu ile ilgili olarak $\overline{M}$ nin J kompleks yapısı paraleldir.

İspat: Herhangi $X, Y, Z \in \mathfrak{X}(M)$ için

$$g((D_X J)Y, Z) = (d\Omega)(X, JY, JZ) - (d\Omega)(X, Y, Z)$$

gerçeklenir. Eğer $(\overline{M}, J, g)$ bir *y.k.K.* manifold ise burumda (2.50) eşitliğinden

$$g((D_X J)Y, Z) = \omega(X)\Omega(JY, JZ) - \omega(X)\Omega(Y, Z) = 0$$

Tersine, $DJ = 0$ ve $Dg = \omega \otimes g$ eşitliklerinden $D\Omega = \omega \otimes \Omega$ eşitliğine ulaşılır ve bu durumda (2.50) eşitliğinden

$$(d\Omega)(X, Y, Z) = \frac{1}{6}\sum_{XYZ}(D_X\Omega)(Y, Z)$$

elde edilir, burada $\sum_{XYZ}$, X, Y, Z üzerinden devirsel toplamı göstermektedir.

Sonuç 2.2. [10] $(\overline{M}, J, g)$ Hermityen manifoldunun *y.k.K.* manifold olması için gerek ve yeter koşul herhangi $X, Y \in \mathfrak{X}(\overline{M})$ için

$$\overline{\nabla}_X JY = J\overline{\nabla}_X Y + \frac{1}{2}\{\theta(Y)X - \omega(Y)JX - g(X, Y)A - \Omega(X, Y)B\} \qquad (2.54)$$

eşitliğinin gerçeklenmesidir, burada $\theta = \omega \circ J$ ve $A = -JB$ sırasıyla anti-Lee form ve anti-Lee vektör alanıdır.

Sonuç 2.3. [10] Herhangi *y.k.K.* manifold üzerinde $\overline{\nabla}_B J = \overline{\nabla}_A J = 0$.

Örnek 2.22. [15] Bir *y.k.K.* manifold örneği verilmeden önce örnekte kullanılacak yapılar hakkında bilgi verilecektir.

M, $(2m + 1)$-boyutlu bir manifold olsun. M üzerinde bir (ϕ, ξ, η, g) ***hemen hemen değme(contact) metrik yapı*** herhangi $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$ için M üzerinde

$$\eta(\xi) = 1\ ,\ \varphi^2 = -I + \eta \otimes \xi\ ,\ g(\phi X, \phi Y) = g(X, Y) - \eta(X)\eta(Y)$$

koşullarını sağlayan bir $(1, 1)$ tipinden ϕ tensör alanı, bir ξ vektör alanı, bir η 1-formu ve bir g metrik tensör alanından oluşur. Bu koşullar aynı zamanda

$$\phi\xi = 0\ ,\ \eta(\phi X) = 0\,,\ \eta(X) = g(X,\xi) \tag{2.55}$$

anlamına da gelir.

Bir hemen hemen değme metrik yapı, eğer $d\eta = \Phi$ ise bir *değme metrik yapı* olarak adlandırılır, burada Φ, $\Phi(X,Y) = g(X,\phi Y)$ ile tanımlanan temel iki formdur. ϕ nin N_ϕ Nijenhuis torsiyonu

$$N_\phi(X,Y) = \phi^2[X,Y] + [\phi X,\phi Y] - \phi[\phi X,Y] - \phi[X,\phi Y]$$

ile tanımlanır.

Bir değme metrik manifold *normal* ise yani

$$N_\phi + 2d\eta \otimes \xi = 0$$

koşulunu sağlarsa bir *Sasakiyen manifold* olarak adlandırılır. Sasakiyen manifold üzerinde

$$(\nabla_X\phi)Y = g(X,Y)\xi - \eta(Y)X \tag{2.56}$$

koşulu sağlanır . Herhangi hemen hemen değme metrik yapı (2.56) koşulunu sağlarsa bir *Sasakiyen yapı* olur [31].

E, B, F birer topolojik uzay ve $\pi : E \to B$ bir sürekli-örten fonksiyon olmak üzere aşağıda verilen yerel aşikarlık koşulunu sağlayan (E, B, π, F) yapısına bir *lif demeti* (fiber bundle) denir. Burada B demetin *taban* uzayı, E *tümel* uzayı ve F de *lif* tir. $\forall x \in E$ için $\pi(x)$ in bir $U \subset B$ açık komşuluğu olsun, öyle ki $\phi : \pi^{-1}(U) \to U \times F$ bir homeomorfizmi vardır, burada $U \times F$ bir çarpım uzayıdır. $\pi : \pi^{-1}(U) \to U$ ve $proj_1 : U \times F \to U$ bir doğal izdüşümdür. Bütün $\{U_i, \varphi_i\}$ lerin kümesi demetin yerel triviyalliği olarak adlandırılır. B deki her p için $\pi^{-1}(p)$, F ye homeomorfiktir ve p üzerindeki *lif* olarak adlandırılır. (E, B, π, F) lif demeti $F \longrightarrow E \longrightarrow B$ ile gösterilir.

Fibrasyon (fibration), topolojide bir lif demeti kavramının bir genelleştirmesidir. Fibrasyon bir lif demeti gibidir fakat liflerin aynı uzay olması gerekmez, daha doğrusu homotopi eşdeğerlidir.

Fubini-Study metrik projektif Hilbert uzayı yani *kompleks projektif uzay* CP^n üzerinde bir K$\ddot{a}$hler metriktir, yani $CP^n = S^{2n+1} \setminus S^1$ bölümü üzerine indirgenmiş metriktir. $S^1 \longrightarrow S^{2n+1} \longrightarrow CP^n$ iyi-bilinen Hopf fibrasyonudur.

Şimdi, $\mathbb{R}^{n+2}$, $(2n+2)$-boyutlu bir Öklidyen uzay olsun ve (,) kanonik iç çarpımına ve $\{e_1, e_2, \ldots, e_{2n+1}, e_{2n+2}\}$ standart ortonormal bazına sahip olsun. $\mathbb{R}^{n+2}$ nin J_0 kompleks yapısını

$$J_0 e_{2m-1} = e_{2m} \quad , \quad J_0 e_{2m} = -e_{2m-1} \quad , 1 \leq m \leq n+1$$

ile tanımlayalım. S^{2n+1}, $(2n+1)$-boyutlu bir birim küre olsun ve bu küre üzerinde $\mathbb{R}^{n+2}$ nin $(J_0, (\ ,\ ))$ K$\ddot{a}$hler yapısından indirgenmiş (ϕ, ξ, η, h) kanonik Sasakian yapısı var olsun. ξ vektör alanı $\pi : S^{2n+1} \to CP^n$ Hopf fibrasyonunu tanımlar, burada CP^n, kanonik Fubini-Study metriğine sahip n-boyutlu kompleks uzaydır.

$S^1 = \{e^{it}, t \in \mathbb{R}$ ve $i = \sqrt{-1}\}$ bir birim çember olsun. $\overline{M} = S^{2n+1} \times S^1$ üzerinde J kompleks yapısı $\overline{M}$ üzerinde $\eta(U) = 0$ koşulunu sağlayan herhangi U vektör alanı için

$$JT = \xi \quad , \quad JU = \phi U$$

ile tanımlanır, burada $T = \dfrac{\partial}{\partial t}$, S^1 üzerinde kanonik birim vektör alanıdır. Bu durumda $(S^{2n+1} \times S^1, J)$, $\overline{M} = S^{2n+1} \times S^1$ üzerinde $g = h + 1$ çarpım metriğine sahip bir *y.k.K.* manifolddur. $\overline{M}$ nin Lee formu $\omega = 2dt$ ile gösterilir.

Örnek 2.23. [10] $\lambda \in C, |\ \lambda\ | \neq 1$ ve $\triangle_\lambda$, $C^n \setminus \{0\}$ uzayının $z \to \lambda z$ dönüşümleri tarafından oluşturulan devirsel grubu olsun. Bu durumda $\triangle_\lambda$, $C^n \setminus \{0\}$ üzerinde kompleks analitik dönüüşümlerin düzgün sürekli olmayan grubu gibi davranır [16]. Böylece bölüm uzayı $CH^n_\lambda = C^n \setminus \{0\}/\triangle_\lambda$ bir kompleks manifold yapısına sahiptir. Bu *kompleks Hopf manifold*dur [14].

$f : C^n \setminus \{0\} \to \mathbb{R} \times S^{2n-1}$,

$$z \to \left(\frac{1}{\pi}\, exp\, \left(\frac{\sqrt{-1}\pi}{2} log \mid z \mid \right),\ \frac{z}{\mid z \mid} \right)$$

ile verilen bir difeomorfizm olsun. Eğer $\lambda = e^2$ ise bu durumda f sırası ile $C^n \setminus \{0\}$ ve $\mathbb{R} \times S^{2n-1}$ üzerinde $\triangle_\lambda$ ve $\mathbb{Z}$ nin hareketleri ile yer değiştirir. Böylece f, bir $F : CH^n_\lambda \approx S^1(\frac{1}{\pi}) \times S^{2n-1}$ difeomorfizmi indirger öyle ki aşağıdaki diyagram değişmelidir:

$$\begin{array}{ccc} C^n \setminus \{0\} & \longrightarrow & \mathbb{R} \times S^{2n-1} \\ \downarrow & & \downarrow \\ CH^n_\lambda = C^n \setminus \{0\}/\triangle_\lambda & \longrightarrow & (\mathbb{R} \times S^{2n-1})/\mathbb{Z} \approx S^1(\frac{1}{\pi}) \times S^{2n-1} \end{array}$$

Burada $\pi : C^n \setminus \{0\} \to CH^n_\lambda = C^n \setminus \{0\}/\triangle_\lambda$ ve
$p : \mathbb{R} \times S^{2n-1} \to (\mathbb{R} \times S^{2n-1})/\mathbb{Z} \approx S^1(\frac{1}{\pi}) \times S^{2n-1}$ doğal örten fonksiyonlardır.
$C^n \setminus \{0\}$ üzerindeki Hermityen metrik $t \in [-1, \infty)$ için

$$g_t = 4\, \frac{\mid z \mid^{2t} \delta_{jk} dz^j \otimes d\bar{z}^k + t \mid z \mid^{2(t-1)} (\sum \bar{z}^j dz^j) \otimes (\sum z^k d\bar{z}^k)}{\mid z \mid^{2(t+1)}}$$

ile verilir. g_t nin $d\Omega_t = \omega_t \wedge \Omega_t$ koşulunu sağlayan K$\ddot{a}$hler 2-formu için

$$\omega_t = -(1+t)\frac{\sum(z^j d\bar{z}^j + \bar{z}^j dz^j)}{\mid z \mid^2}$$

ile verilir öyle ki, $t \neq -1$ için bu form tam değildir. İki durum incelenebilir:

i) $t = 0$ ise, ilgili metrik

$$g_0 = \frac{\delta_{jk} dz^j \otimes d\bar{z}^k}{\mid z \mid^2}$$

$C^n \setminus \{0\}$ üzerinde global konformal K$\ddot{a}$hler metriktir ve

$$\omega_0 = -\frac{\sum(z^j d\bar{z}^j + \bar{z}^j dz^j)}{\mid z \mid^2}$$

ile verilen Lee formuna sahiptir. CH^n_λ üzerine indirgenmiş g_0 metriği *Boothby metriği* olarak adlandırılır.

ii) $t \neq 0$ ise Lee vektör alanı

$$B_t = -\frac{1}{2}(z^j \frac{\partial}{\partial z_j} + \bar{z}^j \frac{\partial}{\partial \bar{z}^j})$$

ile veriliri ve t ye bağlı değildir. B_t nin g_t nin Levi-Civita koneksiyonu ile ilgili olarak paralel olmadığı görülebilir.

3. MALZEME VE YÖNTEM

Tez boyunca diferansiyel geometrideki temel kavramlar verilip tezin özünü oluşturan kısmi-eğik altmanifold ve eğik, ters-değişmez dağılımlar üzerinde durulmaktadır. Bu kavramların tarih içindeki oluşum süreci hakkında genel bilgiler verilmiştir. Dağılım sınıfları aracılığı ile tanımlanan kısmi-eğik altmanifold geometrisi incelenmiştir. Kähler manifoldların kısmi-eğik altmanifoldları, yerel konformal Kähler manifoldların kısmi-eğik altmanifoldları üzerinde detaylı şekilde çalışılmıştır.

Bu çalışma yapılırken diferansiyel geometri alanındaki kitaplar kütüphane ve web aracılığı ile taranmıştır. Bunun yanısıra hemen hemen Hermityen manifoldlar ve tez çalışmasının amacını oluşturan kısmi-eğik altmanifoldların geometrisi üzerine yapılan makaleler kronolojik olarak incelenmiştir. Tezin doküman haline getirilmesi için Latex programı kullanılmıştır.

4. BULGULAR

4.1. BİR YEREL KONFORMAL K$\ddot{A}$HLER MANİFOLDUN KISMİ-EĞİK ALTMANİFOLDLARI

Bu bölümde bir yerel konformal K$\ddot{a}$hler manifoldun kısmi-eğik altmanifoldları çalışılacaktır. Kısmi eğik altmanifold tanımındaki ters-değişmez ve eğik dağılımların integrallenebilirliği için koşullar verilecektir. Aynı zamanda bu dağılımların tümel jeodezik yapraklanma tanımlaması için gerek ve yeter koşullar verilecektir. Bölüm paralel standart yapıya sahip kısmi eğik altmanifoldlar için bazı sonuçlar ile bitecektir.

Yardımcı Teorem 2.7 yardımıyla bir $\overline{M}$ *y.k.K* manifoldunun bir M kısmi-eğik altmanifoldu için M nin $T^{\perp}M$ normal demeti

$$T^{\perp}M = F(\mathcal{D}^{\theta}) \oplus J(\mathcal{D}^{\perp}) \oplus \mu \tag{4.1}$$

şeklinde ayrıştırılır. Burada μ, $F(\mathcal{D}^{\theta}) \oplus J(\mathcal{D}^{\perp})$ in $T^{\perp}M$ içindeki ortogonal tümleyen dağılımıdır ve μ, $T^{\perp}M$ nin J altında invaryant kalan altdemetidir. Gerçekten $\xi \in \mu$ olmak üzere herhangi $X \in \mathcal{D}^{\perp}$ için, $g(J\xi, X) = g(J^2\xi, JX) = -g(\xi, FX) = 0$ gerçeklenir. Dolayısıyla, $\mathcal{D}^{\perp} \perp J(\mu)$ bulunur. Öte yandan, $Z \in \mathcal{D}^{\theta}$ için $g(J\xi, Z) = -g(\xi, JZ) = -g(\xi, PZ + FZ) = g(\xi, FZ) = 0$ gerçeklenir. Buradan da $J(\mu) \perp \mathcal{D}^{\theta}$ bulunur. O halde, $Y \in TM$ ve $\overline{Z} \in T\overline{M}$ için $g(J\xi, JY) = g(\xi, Y) = 0$ ve $g(J\xi, F\overline{Z}) = g(J\xi, J\overline{Z}) = g(\xi, \overline{Z}) = 0$ olduğundan, $J\xi \in \mu$ elde edilir. (2.26) ve (2.27) eşitliklerinden ve $J^2 = -I$ gerçeğinden herhangi $X \in TM$ için

$$-X = J^2X = J(PX + FX) = JPX + JFX = P^2X + FPX + tFX + fFX$$

ve $X \in T^{\perp}M$ için

$$-X = J^2X = J(tX + fX) = JtX + JfX = PtX + FtX + tfX + f^2X$$

olduğundan

$$\begin{array}{ll} (a) \quad P^2 + tF = -I & (c) \quad FP + fF = 0 \\ (b) \quad f^2 + Ft = -I \quad , & (d) \quad tf + Pt = 0 \end{array} \tag{4.2}$$

eşitlikleri elde edilir.

Yardımcı Teorem 4.1. M, bir $\overline{M}$ hemen hemen Hermityen manifoldunun has kısmi-eğik altmanifoldu olsun. Bu durumda

$$\textbf{a)}\ P\mathcal{D}^{\perp} = \{0\} \ \ , \ \ \textbf{b)}\ P\mathcal{D}^{\theta} = \mathcal{D}^{\theta} \tag{4.3}$$

Kanıt: $\mathcal{D}^{\perp}$ dağılımı anti-invaryant olduğundan (2.26) eşitliği gereği **a)** elde edilir. $X \in \mathcal{D}^{\perp}$ ve $Z \in \mathcal{D}^{\theta}$ için $g(JX, JZ) = g(X, Z)$ gerçeğini ve (2.26) eşitliğini kullanarak, $g(PZ, X) = g(JZ, X) = -g(Z, JX) = 0$ elde edilir. Böylece, $P\mathcal{D}^{\theta} \perp \mathcal{D}^{\perp}$ sonucu çıkarılır. $P\mathcal{D}^{\theta} \subseteq TM$ olduğundan, $P\mathcal{D}^{\theta} \perp \mathcal{D}^{\perp}$ ise $P\mathcal{D}^{\theta} \subseteq \mathcal{D}^{\theta}$ sonucu çıkar. $W \in \mathcal{D}^{\theta}$ olsun. (2.34) eşitliğini kullanarak

$$W = \frac{1}{cos^2\theta}(cos^2\theta W) = -\frac{1}{cos^2\theta}P^2 W = -\frac{1}{cos^2\theta}P(PW)$$

Bu yüzden, $W \in P\mathcal{D}^{\theta}$ ve buradan, $\mathcal{D}^{\theta} \subseteq P\mathcal{D}^{\theta}$ elde edilir ve dolayısıyla **b)** kanıtlanır.

M bir $\overline{M}$ *y.k.K.* manifoldunun kısmi-eğik altmanifoldu olsun. $\widetilde{\nabla}$ ve $\overline{\nabla}$ sırası ile g ve $e^{-\sigma} g|_{\mathcal{U}}$ metriklerinin Riemanniyen koneksiyonlarını göstermek üzere

$$\widetilde{\nabla}_U V = \overline{\nabla}_U V - \frac{1}{2}\{\omega(U)V + \omega(V)U - g(U, V)B\} \tag{4.4}$$

idi. $\widetilde{\nabla}$ koneksiyonu, $\widetilde{M}$ üzerinde torsiyonsuz lineer koneksiyondur ve *Weyl koneksiyonu* olarak adlandırılır. $\widetilde{\nabla}$ koneksiyonunun

$$\widetilde{\nabla} J = 0 \tag{4.5}$$

koşulunu sağladığı bilinmektedir.

M üzerinde anti-invaryant $\mathcal{D}^{\perp}$ ve eğik $\mathcal{D}^{\theta}$ dağılımlarına sahip olsun. $\overline{M}$ nin B *Lee vektör* *alanı* için M boyunca

$$B = B^T + B^N \tag{4.6}$$

yazabiliriz, burada B^T ve B^N sırası ile B nin teğet ve normal kısmıdır.

Aşağıda bir *y.k.K* manifoldun bir kısmi-eğik altmanifolduna örnek verilecektir.

Örnek 4.1. $(\mathbb{R}^6 \setminus \{0\}, g, J)$ hemen hemen Hermityen manifoldu ele alınsın, burada $g = \lambda^{-1}(dx_1^2 + \ldots + dx_6^2)$ $(\lambda = x_1^2 + \ldots + x_6^2)$ bir Riemanniyen metriktir ve J hemen hemen kompleks yapısı

$$J\partial_1 = \partial_2,\ J\partial_2 = -\partial_1, \ldots,\ J\partial_5 = \partial_6,\ J\partial_6 = -\partial_5$$

ile tanımlanır. Son olarak $\mathbb{R}^6 \setminus \{0\}$ üzerinde $\tilde{g} = \lambda g$ Riemanniyen metriği düşünülsün. Bu durumda $(\mathbb{R}^6 \setminus \{0\}, \tilde{g}, J)$ bir K$\ddot{a}$hler manifolddur. Bu yüzden $(\mathbb{R}^6 \setminus \{0\}, g, J)$

$$w = -2\lambda^{-1}(x_1 dx_1 + \ldots + x_6 dx_6)$$

ile verilen Lee forma sahip bir global konformal K$\ddot{a}$hler manifolddur. Sonuç olarak Lee vektör alanı

$$B = -2(x_1\partial_1 + \ldots + x_6\partial_6)$$

Şimdi M, $(\mathbb{R}^6 \setminus \{0\}, g, J)$ nin

$$f(u, v, w) = (\frac{u}{\sqrt{2}}\ cosv, \frac{u}{\sqrt{2}}\ sinv, \frac{u}{\sqrt{2}}\ , 0, w, 0)$$

ile verilen bir altmanifoldu olsun, burada $u, w \neq 0$. Bu durumda TM nin yerel çatısı

$$Z = \frac{1}{\sqrt{2}}\ (cosv\partial_1 + sinv\partial_2 + \partial_3)\ ,\ W = \frac{u}{\sqrt{2}}(-sinv\partial_1 + cosv\partial_2)\ ,\ X = \partial_5$$

elde edilir.
$JX = \partial_6$ olduğundan $\mathcal{D}^\perp = span\{X\}$. Dahası $JZ = \dfrac{1}{\sqrt{2}}\ (cosv\partial_2 - sinv\partial_1 + \partial_4)$ ve

$$cos\theta = \frac{\mid g(JZ, W) \mid}{\mid JZ \mid \mid W \mid} = \frac{\frac{|u|}{2}(sin^2 v + cos^2 v)}{\frac{|u|}{\sqrt{2}}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

olduğundan $\theta = \dfrac{\pi}{4}$. Böylece $\mathcal{D}^\theta = span\{Z, W\}$, $\theta = \dfrac{\pi}{4}$ eğik açılı bir eğik dağılımdır. Sonuçta M, $(\mathbb{R}^6 \setminus \{0\}, g, J)$ nin bir has kısmi-eğik altmanifoldudur.

Şimdi $\mathcal{D}^\perp$ anti-invaryant ve $\mathcal{D}^\theta$ eğik dağılımının integrallenebilirliği çalışılacaktır.

Yardımcı Teorem 4.2. M, $\overline{M}$ *y.k.K.* manifoldunun herhangi altmanifoldu olsun. Bu durumda herhangi $U, V \in TM$ için

$$\nabla_U PV - A_{FV}U - \frac{1}{2}\omega(JV)U + \frac{1}{2}g(U, PV)B^T$$

$$= P\nabla_U V + th(U, V) - \frac{1}{2}\omega(V)PU + \frac{1}{2}g(U, V)(PB^T + tB^N) \tag{4.7}$$

ve

$$\nabla^\perp_U FV + h(U, PV) + \frac{1}{2}g(U, PV)B^N$$

$$= F\nabla_U V + fh(U, V) - \frac{1}{2}\omega(V)PU + \frac{1}{2}g(U, V)(FB^T + fB^N) \tag{4.8}$$

İspat: (4.4) eşitliğinde V yerine JV yazarsak ve herhangi $U, V \in TM$ için (4.5) eşitliği ile Gauss ve Weingarten formülleri kullanılırsa,

$$\begin{aligned}
\widetilde{\nabla}_U(JV) &= \overline{\nabla}_U(JV) - \frac{1}{2}\{\omega(U)JV + \omega(JV)U - g(U, JV)B\} \\
&= \overline{\nabla}_U(PV) + \overline{\nabla}_U(FV) - \frac{1}{2}\{\omega(U)JV + \omega(JV)U - g(U, JV)B\} = \nabla_U(PV) \\
&\quad + h(U, PV) + \nabla^\perp_U(FV) - A_{FV}U - \frac{1}{2}\omega(U)JV - \frac{1}{2}\omega(JV)U \\
&\quad + \frac{1}{2}g(U, PV + FV)(B^T + B^N) \\
J\widetilde{\nabla}_U V &= J(\overline{\nabla}_U V - \frac{1}{2}\{\omega(U)V + \omega(V)U - g(U, V)B\}) = J\nabla_U V + Jh(U, V) \\
&\quad - \frac{1}{2}\,\omega(U)JV - \frac{1}{2}\,\omega(V)JU + \frac{1}{2}\,g(U, V)JB \\
&= P\nabla_U V + F\nabla_U V + th(U, V) + fh(U, V) - \frac{1}{2}\,\omega(U)JV - \frac{1}{2}\,\omega(V)(PU + FU) \\
&\quad + \frac{1}{2}\,g(U, V)(PB^T + FB^T + tB^N + fB^N)
\end{aligned}$$

$J\widetilde{\nabla}_U V = \widetilde{\nabla}_U(JV)$ eşitliği kullanılırsa

$$\nabla_U(PV) + h(U, PV) + \nabla^\perp_U(FV) - A_{FV}U$$

$$-\frac{1}{2}\,\omega(U)JV - \frac{1}{2}\,\omega(JV)U + \frac{1}{2}\,g(U, JV)B \tag{4.9}$$

$$= P\nabla_U V + F\nabla_U V + th(U,V) + fh(U,V)$$
$$-\frac{1}{2}\,\omega(U)JV - \frac{1}{2}\,\omega(V)JU + \frac{1}{2}\,g(U,V)JB$$

eşitliği elde edilir. Buradan, teğet ve normal bileşenler kıyaslanarak, istenilen (4.7) ve (4.8) eşitlikleri elde edilir.

Önerme 1. M, $\overline{M}$ *y.k.K.* manifoldunun bir kısmi-eğik altmanifoldu olsun. Bu durumda $\mathcal{D}^{\perp}$ anti-invaryant dağılımının integrallenebilir olması için gerek ve yeter koşul herhangi $X, Y \in \mathcal{D}^{\perp}$ için

$$A_{FX}Y + \frac{1}{2}\,\omega(FX)Y = A_{FY}X + \frac{1}{2}\,\omega(FY)X \tag{4.10}$$

koşulunun sağlanmasıdır.

İspat: $X, Y \in \mathcal{D}^{\perp}$ olsun. Bu durumda (4.3) **a)** eşitliğini (4.7) eşitliğinde kullanırsak

$$-A_{FY}X - \frac{1}{2}\,\omega(FY)X = P\nabla_X Y + th(X,Y) + \frac{1}{2}\,g(X,Y)(PB^T + tB^N)$$

eşitliği elde edilir. Bu eşitliği X ile Y nin yerini değiştirip yeniden yazarsak,

$$-A_{FX}Y - \frac{1}{2}\,\omega(FX)Y = P\nabla_Y X + th(Y,X) + \frac{1}{2}\,g(Y,X)(PB^T + tB^N)$$

elde edilir. h ve g simetrik tensör alanları olduğundan

$$P[X,Y] = A_{FX}Y - A_{FY}X + \frac{1}{2}\,\{\omega(FX)Y - \omega(FY)X\} \tag{4.11}$$

bulunur. $\mathcal{D}^{\perp}$ dağılımının integrallenebilir olması için gerek ve yeter koşul herhangi $X, Y \in \mathcal{D}^{\perp}$ için $[X,Y] \in \mathcal{D}^{\perp}$ olmasıdır, yani (4.3) **a)** eşitliği gereği $P[X,Y] = 0$ olmasıdır. Bu yüzden istenilen (4.11) eşitliğinden elde edilir.

Önerme 2. M, $\overline{M}$ *y.k.K.* manifoldunun bir kısmi-eğik altmanifoldu olsun. Bu durumda $\mathcal{D}^{\theta}$ eğik dağılımının integrallenebilir olması için gerek ve yeter koşul herhangi $Z, W \in \mathcal{D}^{\theta}$ için

$$\nabla_Z PW - \nabla_W PZ + A_{FZ}W - A_{FW}Z + g(Z,PW)B^T \in \mathcal{D}^{\theta} \tag{4.12}$$

koşulunun sağlanmasıdır.

İspat: $\mathcal{D}^\theta$ eğik dağılımının integrallenebilir olması için gerek ve yeter koşul herhangi $Z, W \in \mathcal{D}^\theta$ için $[Z, W] \in \mathcal{D}^\theta$ olmasıdır, yani (4.3) **b)** eşitliğinden $P[Z, W] \in \mathcal{D}^\theta$ olmasıdır. Herhangi $Z, W \in \mathcal{D}^\theta$ için (4.7) eşitliğini kullanarak

$$\nabla_Z PW - A_{FW}Z - \frac{1}{2}\omega(JW)Z + \frac{1}{2}g(Z, PW)B^T$$

$$= P\nabla_Z W + th(Z, W) - \frac{1}{2}\omega(W)PZ + \frac{1}{2}g(Z, W)(PB^T + tB^N) \tag{4.13}$$

elde edilir. Bu eşitlik Z ile W nun yerini değiştirerek yeniden yazılır ve iki eşitlik taraf tarafa çıkarılırsa

$$P[Z, W] = \nabla_Z PW - \nabla_W PZ + A_{FZ}W - A_{FW}Z + g(Z, PW)B^T$$

$$-\frac{1}{2}\omega(JW)Z + \frac{1}{2}\omega(JZ)W + \frac{1}{2}\omega(W)PZ - \frac{1}{2}\omega(Z)PW \tag{4.14}$$

bulunur. (4.14) eşitliğinde (4.3) **b)** eşitliği kullanılırsa (4.12) sağlanır.
Önerme 2, Taştan ve Tripathi [25] tarafından, bir *y.k.K.* manifoldun yarı-eğik (semi-slant) altmanifoldları için de kanıtlanmıştır.

M, $\overline{M}$ *y.k.K.* manifoldunun bir kısmi-eğik altmanifoldu olsun. $\widetilde{\nabla}$ ile ilgili Gauss ve Weingarten formülleri sırası ile herhangi $U, V \in TM$ ve $\xi \in T^\perp M$ için

$$\widetilde{\nabla}_U V = \widehat{\nabla}_U V + \widetilde{h}(U, V) \tag{4.15}$$

ve

$$\widetilde{\nabla}_U \xi = -\widetilde{A}_\xi U + \widetilde{\nabla}^\perp_U \xi \tag{4.16}$$

ile verilir, burada $\widehat{\nabla}$ ve $\widetilde{\nabla}^\perp$ sırası ile $\widetilde{\nabla}$ ve $T^\perp M$ ile ilgili olarak M deki indirgenmiş Riemanniyen ve indirgenmiş normal koneksiyondur. $\widetilde{h}$, M nin $\widetilde{\nabla}$ ile ilgili olan ikinci temel formudur. Dahası, ikinci temel form $\widetilde{h}$ ile $\widetilde{A}$ şekil operatörü

$$g(\widetilde{h}(U, V), \xi) = g(\widetilde{A}_\xi U, V) \tag{4.17}$$

eşitliği ile bağlantılıdır.

(2.10), (2.11),(4.15) ve (4.16) eşitlikleri kullanarak aşağıdaki yardımcı teorem elde edilir.

Yardımcı Teorem 4.3. M, $\overline{M}$ *y.k.K.* manifoldunun bir kısmi-eğik altmanifoldu olsun. Bu durumda herhangi $U, V \in TM$ ve $\xi \in T^{\perp}M$ için

$$\widehat{\nabla}_U V = \nabla_U V - \frac{1}{2}\left\{\omega(U)V + \omega(V)U - g(U,V)B^T\right\} \tag{4.18}$$

$$\widetilde{h}(U,V) = h(U,V) + \frac{1}{2}\, g(U,V)B^N \tag{4.19}$$

$$\widetilde{A}_{\xi}U = A_{\xi}U + \frac{1}{2}\,\omega(\xi)U \tag{4.20}$$

$$\widetilde{\nabla}^{\perp}_U \xi = \nabla^{\perp}_U \xi - \frac{1}{2}\omega(U)\xi \tag{4.21}$$

İspat: Herhangi $U, V \in TM$ ve $\xi \in T^{\perp}M$ için

$$\begin{aligned}
\widetilde{\nabla}_U V &= \overline{\nabla}_U V - \frac{1}{2}\left\{\omega(U)V + \omega(V)U - g(U,V)(B^T + B^N)\right) \\
\widehat{\nabla}_U V + \widetilde{h}(U,V) &= \nabla_U V + h(U,V) - \frac{1}{2}\left\{\omega(U)V + \omega(V)U\right\} + \frac{1}{2}\, g(U,V)B^T \\
&\quad + \frac{1}{2}\, g(U,V)B^N
\end{aligned}$$

Burada teğet ve normal parçalar kıyaslanırsa (4.18) ve (4.19) eşitlikleri elde edilir.

$$\begin{aligned}
\widetilde{\nabla}_U \xi &= \overline{\nabla}_U \xi - \frac{1}{2}\left\{\omega(U)\xi + \omega(\xi)U - g(\xi,U)B\right\} \\
-\widetilde{A}_{\xi}U + \widetilde{\nabla}^{\perp}_U \xi &= -A_{\xi}U + \nabla^{\perp}_U \xi - \frac{1}{2}\left\{\omega(U)\xi + \omega(\xi)U\right\}
\end{aligned}$$

Burada teğet ve normal parçalar kıyaslanırsa (4.20) ve (4.21) eşitlikleri elde edilir.

Yardımcı Teorem 4.3, Shahid ve Husain [22] tarafından, bir *y.k.K.* manifoldun kapsamlı (generic) altmanifoldları [6] için Yardımcı Teorem 2.1 olarak kanıtlanmıştır.

Önerme 1 ve (4.20) eşitliğinden aşağıdaki sonucu elde ederiz.

Sonuç 4.1. M, $\overline{M}$ *y.k.K.* manifoldunun bir has kısmi-eğik altmanifoldu olsun. Bu durumda anti-invaryant $\mathcal{D}^{\perp}$ dağılımının integrallenebilmesi için gerek ve yeter koşul herhangi $X, Y \in \mathcal{D}^{\perp}$ için

$$\widetilde{A}_{FX}Y = \widetilde{A}_{FY}X \tag{4.22}$$

koşulunun sağlanmasıdır.

İspat: Önerme 1 den herhangi $X, Y \in \mathcal{D}^{\perp}$ için
$A_{FX}Y + \dfrac{1}{2}\,\omega(FX)Y = A_{FY}X + \dfrac{1}{2}\,\omega(FY)X$
sağlanır. Burada $FX, FY \in T^{\perp}M$ olduğundan (4.20) eşitliği kullanılırsa (4.22) eşitliği elde edilir.

Yardımcı Teorem 4.4. M, $\overline{M}$ *y.k.K.* manifoldunun bir kısmi-eğik altmanifoldu olsun. Bu durumda herhangi $X \in \mathcal{D}^{\perp}$ ve $U \in TM$ için

$$-P(\widehat{\nabla}_U X) = \widetilde{A}_{FX}U + t\widetilde{h}(U, X) \tag{4.23}$$

koşulu gerçeklenir.

İspat: $X \in \mathcal{D}^{\perp}$ ve $U \in TM$ için, $\widetilde{\nabla}_U JX = J\widetilde{\nabla}_U X$ ve (4.15) eşitliğinden
$\widetilde{\nabla}_U(PX + FX) = J(\widehat{\nabla}_U X + \widetilde{h}(U, X))$
elde edilir. (4.3) **b)** eşitliğinden $PX = 0$ olacağından,
$\widetilde{\nabla}_U FX = J(\widehat{\nabla}_U X + \widetilde{h}(U, X))$
bulunur. Böylece $FX \in T^{\perp}M$ olduğundan, (4.16) eşitliği gereği
$-\widetilde{A}_{FX}U + \widetilde{\nabla}^{\perp}_U FX = P\widehat{\nabla}_U X + F\widehat{\nabla}_U X + t\widetilde{h}(U, X) + f\widetilde{h}(U, X)$
bulunur. Bu eşitliğin teğet kısımları alınırsa,
$-\widetilde{A}_{FX}U = P\widehat{\nabla}_U X + t\widetilde{h}(U, X)$ elde edilir.

Teorem 4.1. M, $\overline{M}$ *y.k.K.* manifoldunun bir has kısmi-eğik altmanifoldu olsun. Bu durumda ters-değişmez $\mathcal{D}^{\perp}$ dağılımı integrallenebilirdir.

İspat: (4.3) **a)** ve **b)** eşitliklerinden herhangi $X, Y \in \mathcal{D}^{\perp}$ ve $U \in TM$ için, Yardımcı Teorem 4.4 gereği $0 = g(-P\widehat{\nabla}_U X, Y) = g(\widetilde{A}_{FX}U, Y) + g(t\widetilde{h}(U, X), Y)$ yazılır. Bu eşitlik de kullanılarak bazı hesaplamalar yapılırsa, $\forall U \in TM$ için

$$g(\widetilde{A}_{FX}Y,U) = g(\widetilde{A}_{FX}U,Y) = g(\widetilde{h}(U,Y),FX) = g(\widetilde{h}(U,Y),JX) = -g(J\widetilde{h}(U,Y),X)$$
$$= -g(t\widetilde{h}(U,Y),X) = g(\widetilde{A}_{FY}U,X) = g(\widetilde{h}(U,X),FY)$$
$$= g(\widetilde{h}(X,U),FY) = g(\widetilde{A}_{FY}X,U)$$

elde edilir. O halde $\widetilde{A}_{FX}Y = \widetilde{A}_{FY}X$ bulunur. Sonuç 4.1 den istenilen elde edilir.

Tanım 4.1. M_1 ve M_2, M nin tümel jeodezik altmanifoldları olsun. Eğer M, M_1 ve M_2 nin bir çarpım manifoldu ise, bu durumda M bir yerel Riemanniyen çarpım manifoldu olur.

Sırada bir *y.k.K.* manifoldun bir has kısmi-eğik altmanifoldunun ters-değişmez altmanifold ile eğik bir altmanifoldun Riemanniyen çarpımı olduğu durum çalışılacaktır.

Teorem 4.2. M, $\overline{M}$ *y.k.K.* manifoldunun bir has kısmi-eğik altmanifoldu olsun. Bu durumda $\mathcal{D}^\theta$ eğik dağılımının M üzerinde tümel jeodezik bir yapraklanma tanımlaması için gerek ve yeter koşul herhangi $Z, W \in \mathcal{D}^\theta$ ve $X \in \mathcal{D}^\perp$ için

$$g(A_{FX}W + \frac{1}{2}\,\omega(FX)W, Z) = g(A_{FW}X, Z) \tag{4.24}$$

İspat: $(\overline{M}, g', J)$ bir Kähler manifold ve $X \in \mathcal{D}^\perp$ için $PX = 0$ ve dolayısıyla $FX = JX$ olduğundan, Teorem 2.19 den $g'(\widetilde{A}_{FX}PW, Z) = g'(\widetilde{A}_{FPW}X, Z)$ elde edilir. Burada $W = PW$ yazılırsa

$$g'(\widetilde{A}_{FX}W, Z) = g'(\widetilde{A}_{FW}X, Z) \tag{4.25}$$

elde edilir. (4.20) eşitliğinden

$$g'(A_{FX}W + \frac{1}{2}\,\omega(FX)W, Z) = g'(A_{FW}X + \frac{1}{2}\,\omega(FW)X, Z) \tag{4.26}$$

elde edilir. $g'(X, Z) = 0$ olduğundan, $g'(A_{FX}W + \frac{1}{2}\,\omega(FX)W, Z) = g'(A_{FW}X, Z)$ eşitliği, yani istenilen elde edilir.

Teorem 4.3. M, $\overline{M}$ *y.k.K.* manifoldunun bir has kısmi-eğik altmanifoldu olsun. Bu durumda $\mathcal{D}^\perp$ ters-değişmez dağılımının M üzerinde tümel jeodezik bir yapraklanma tanımlaması için gerek ve yeter koşul herhangi $X, Y \in \mathcal{D}^{\perp}$ ve $Z \in \mathcal{D}^{\theta}$ için

$$g(A_{FX}Z, Y) = g(A_{FZ}X + \frac{1}{2}\,\omega(FZ)X, Y) \tag{4.27}$$

koşulunun sağlanmasıdır.

İspat: $(\overline{M}, g^{'}, J)$ bir K$\ddot{a}$hler manifold ve $X, Y \in \mathcal{D}^{\perp}$ için $PX = 0$ ve dolayısıyla $FX = JX$ olduğundan, Teorem 2.20 den $X, Y \in \mathcal{D}^{\perp}$ ve $Z \in \mathcal{D}^{\theta}$ için
$g^{'}(\widetilde{A}_{FX}PZ, Y) = g^{'}(\widetilde{A}_{FPZ}X, Y)$
yazılır. Burada $Z = PZ$ yazılırsa,

$$g^{'}(\widetilde{A}_{FX}Z, Y) = g^{'}(\widetilde{A}_{FZ}X, Y) \tag{4.28}$$

elde edilir. Buradan (4.20) eşitliğinden

$$g^{'}(A_{FX}Z + \frac{1}{2}\,\omega(FX)Z, Y) = g^{'}(A_{FZ}X + \frac{1}{2}\,\omega(FZ)X, Y) \tag{4.29}$$

elde edilir. $g^{'}(Y, Z) = 0$ olduğundan,
$g^{'}(A_{FX}Z, Y) = g^{'}(A_{FZ}X + \frac{1}{2}\,\omega(FZ)X, Y)$
eşitliği, yani istenilen elde edilir.

Sonuç 4.2. M, $\overline{M}$ *y.k.K.* manifoldunun bir has kısmi-eğik altmanifoldu olsun. Bu durumda M nin $M = M_{\mathcal{D}^{\perp}} \times M_{\mathcal{D}^{\theta}}$ yerel Riemanniyen çarpım manifold olması için gerek ve yeter koşul $X \in \mathcal{D}^{\perp}$ ve $Z \in \mathcal{D}^{\theta}$ için

$$A_{FX}Z + \frac{1}{2}\,\omega(FX)Z = A_{FZ}X + \frac{1}{2}\,\omega(FZ)X \tag{4.30}$$

koşulunun sağlanmasıdır, burada $M_{\mathcal{D}^{\perp}}$ ve $M_{\mathcal{D}^{\theta}}$, sırası ile $\overline{M}$ nin ters-değişmez ve eğik bir altmanifoldudur.

İspat: (4.28), (4.25) eşitlikleri gereği herhangi $U \in TM$ gereği

$$g^{'}(\widetilde{A}_{FX}Z, U) = g^{'}(\widetilde{A}_{FZ}X, U)$$

elde edilir, buradan (4.20) gereği istenilen bulunur.

4.2. PARALEL STANDART YAPILI KISMİ-EĞİK ALTMANİFOLDLAR

Bu bölümde altmanifoldun teğet demeti üzerinde paralel standart izdüşüm yapısına sahip bir *y.k.K.* manifoldun kısmi-eğik altmanifoldları çalışılacaktır.

M, bir $\overline{M}$ *y.k.K.* manifoldunun $\mathcal{D}^{\perp}$ ters-değişmez dağılımına ve $\mathcal{D}^{\theta}$ eğik dağılımına sahip bir altmanifoldu olsun. $P : TM \to TM$ endomorfizması için $U, V \in TM$ olmak üzere

$$(\widetilde{\nabla}_U P)V = \widehat{\nabla}_U PV - P\widehat{\nabla}_U V \tag{4.31}$$

yazılsın.

Herhangi $U \in TM$ için $(\widehat{\nabla}_U P) = 0$ ise P ye *paralel*dir denir. (4.15), (4.16) eşitlikleri ve $\widetilde{\nabla}_U JV = J\widetilde{\nabla}_U V$ gerçeğinden

$$\widehat{\nabla}_U PV + \widetilde{h}(U, PV) - \widetilde{A}_{FV}U + \widetilde{\nabla}^{\perp} FV = P\widehat{\nabla}_U V + F\widehat{\nabla}_U V + t\widetilde{h}(U, V) + f\widetilde{h}(U, V) \tag{4.32}$$

yazılabilir. Buradan, teğet kısımlar alınırsa,

$$(\widetilde{\nabla}_U P)V = t\widetilde{h}(U, V) + \widetilde{A}_{FV}U$$

elde edilir.

$$\begin{aligned} g(t\widetilde{h}(U, V), W) &= g(J\widetilde{h}(U, V), W) = -g(\widetilde{h}(U, V), JW) = -g(\widetilde{h}(U, V), FW) \\ &= -g(\widetilde{A}_{FW}V, U) \end{aligned}$$

bulunur, böylece herhangi $U, V, W \in TM$ için

$$g((\widetilde{\nabla}_U P)V, W) = g(\widetilde{A}_{FV}W - \widetilde{A}_{FW}V, U) \tag{4.33}$$

elde edilir.

Önerme 3. M, bir $\overline{M}$ *y.k.K.* manifoldunun bir altmanifoldu olsun. Bu durumda P nin paralel olması için gerek ve yeter koşul herhangi $U, V \in TM$ için

$$A_{FU}V - A_{FV}U = \frac{1}{2}\{\omega(FV)U - \omega(FU)V\} \tag{4.34}$$

eşitliğinin gerçeklenmesidir.

İspat: (4.33) ve (4.20) eşitliklerinden istenilen çıkar.

Teorem 4.4. M, bir $\overline{M}$ *y.k.K.* manifoldunun bir kısmi-eğik altmanifoldu olsun. Bu durumda P nin paralel yani $\widetilde{\nabla}P \equiv 0$ olması için gerek ve yeter koşul $\mathcal{D}^{\perp}$ ters-değişmez dağılımının iç paralel olmasıdır.

İspat: P paralel olsun. (4.31) eşitliği gereği $\widehat{\nabla}_X PY = P\widehat{\nabla}_X Y$ gerçeklenir. Herhangi $X, Y \in \mathcal{D}^{\perp}$ için (4.3) **a)** eşitliğini kullanarak kullanarak $PY = 0$ olacağından

$$0 = (\widetilde{\nabla}_X P)Y = P\widehat{\nabla}_X Y$$

bulunur. Yine (4.3) **a)** eşitliğini kullanarak $\widehat{\nabla}_X Y \in \mathcal{D}^{\perp}$ sonucuna ulaşırız. Bu ise $\mathcal{D}^{\perp}$ dağılımının iç paralel olduğunu söyler.

Şimdi bir *y.k.K.* manifoldunun tümel umbilik kısmi-eğik altmanifoldları için bir karakterizasyon verilecektir.

Teorem 4.5. M, bir $\overline{M}$ *y.k.K.* manifoldunun tümel umbilik bir kısmi-eğik altmanifoldu olsun. Eğer P paralel ve $dim\mathcal{D}^{\perp} \geq 2$ ise bu durumda M nin $\widetilde{H}$ ortalama eğrilik vektör alanı μ dağılımına aittir.

İspat: $dim\mathcal{D}^{\theta} \geq 2$ olduğundan $g(Z, W) = 0$ ve $\| Z \| = 1$ koşullarını sağlayan $Z, W \in \mathcal{D}^{\theta}$ seçilebilir. Bu durumda (4.17) eşitliğinden ve M nin tümel umbilik oluşu gerçeğinden $g(\widetilde{H}g(Z, Z), FW) = g(\widetilde{h}(Z, Z), FW) = g(\widetilde{A}_{FW}Z, Z)$ elde edilir. [3] de Yardımcı Teorem 3.5 den $\widetilde{A}_{FW}Z = \widetilde{A}_{FZ}W$ olduğunu biliyoruz. Böylece, $g(\widetilde{H}, FW) = g(\widetilde{A}_{FZ}W, Z) = g(\widetilde{h}(Z, W), FZ) = 0$ elde edilir. Buradan

$$\widetilde{H} \perp F(\mathcal{D}^{\theta}) \tag{4.35}$$

söylenir. Diğer taraftan, $dim\mathcal{D}^{\perp} \geq 2$ hipotezi gereği $g(X, Y) = 0$ ve $\| Y \| = 1$ koşullarını sağlayan $X, Y \in \mathcal{D}^{\perp}$ seçebiliriz. Yine (4.17) eşitliğini kullanarak

$g(\widetilde{H}g(Y,Y),FX) = g(\widetilde{h}(Y,Y),FX) = g(\widetilde{A}_{FX}Y,Y)$ bulunur. Teorem 4.4 ve Sonuç 4.1 den $\widetilde{A}_{FX}Y = \widetilde{A}_{FY}X$ olduğunu biliyoruz. Bu yüzden $g(\widetilde{H},FX) = g(\widetilde{A}_{FY}X,Y) = g(\widetilde{h}(X,Y),FY) = 0$ elde edilir. Buradan

$$\widetilde{H}\perp F(\mathcal{D}^{\perp}) \tag{4.36}$$

bulunur. İddia (4.36), (4.35) ve (4.1) eşitliklerinden çıkar.

Normal demet değerli 1-form F için herhangi $U,V \in TM$ için

$$(\widetilde{\nabla}_U F)V = \widetilde{\nabla}^{\perp}_U FV - F\widehat{\nabla}_U V \tag{4.37}$$

yazılır. Eğer herhangi $U \in TM$ için $(\widetilde{\nabla}_U F) = 0$ ise F *paralel* olarak adlandırılır. (4.15) ve (4.16) eşitliklerini kullanarak herhangi $U,V \in TM$ için

$$\widehat{\nabla}_U PV + \widetilde{h}(U,PV) - \widetilde{A}_{FV}U + \widetilde{\nabla}^{\perp}FV = P\widehat{\nabla}_U V + F\widehat{\nabla}_U V + t\widetilde{h}(U,V) + f\widetilde{h}(U,V) \tag{4.38}$$

işlemlerinden sonra bu eşitliğin normal kısmı alınarak ve (4.37) eşitliği kullanılarak

$$(\widetilde{\nabla}_U F)V = f\widetilde{h}(U,V) - \widetilde{h}(U,PV) \tag{4.39}$$

bulunur. Böylece herhangi $U \in TM$ ve $\xi \in T^{\perp}M$ için
$g(f\widetilde{h}(U,V),\xi) = g(J\widetilde{h}(U,V),\xi) = -g(\widetilde{h}(U,V),J\xi) = -g(\widetilde{h}(U,V),f\xi)$
$g(\widetilde{h}(U,PV),\xi) = g(\widetilde{h}(PV,U),\xi) = g(\widetilde{A}_{\xi}PV,U)$
olduğundan

$$g((\widetilde{\nabla}_U F)V,\xi) = -g(\widetilde{A}_{f\xi}V + \widetilde{A}_{\xi}PV,U) \tag{4.40}$$

elde edilir.

Önerme 4. M, bir $\overline{M}$ *y.k.K.* manifoldunun bir altmanifoldu olsun. Eğer F in paralel olması için gerek ve yeter koşul herhangi $U \in TM$ ve $\xi \in T^{\perp}M$ için

$$A_{F\xi}U + A_{\xi}PU = -\frac{1}{2}\left\{\omega(f\xi)U + \omega(\xi)PU\right\} \tag{4.41}$$

koşulunun sağlanmasıdır.

İspat: F paralel ise (4.40) eşitliğinden herhangi $U \in TM$ ve $\xi \in T^{\perp}M$ için $\widetilde{A}_{f\xi}U = -\widetilde{A}_{\xi}PU$ bulunur. Buradan (4.20) eşitliği kullanılırsa istenilen elde edilir.

Teorem 4.6. M, bir $\overline{M}$ *y.k.K.* manifoldunun bir has kısmi-eğik altmanifoldu olsun. Eğer F paralel ise bu durumda M karışık tümel jeodeziktir.

Kanıt: F paralel olsun. Bu durumda (4.39) eşitliğinden herhangi $U, V \in TM$ için

$$f\widetilde{h}(U,V) = \widetilde{h}(U,PV) \tag{4.42}$$

sağlanır. Özelllikle (4.42) eşitliğinde $V = X \in \mathcal{D}^{\perp}$ yazarsak, (4.3) **a)** nın yardımı ile $PX = 0$ olacağından

$$f\widetilde{h}(U,X) = f\widetilde{h}(U,PX) = 0 \tag{4.43}$$

elde edilir. Bu durumda (4.43) eşitliğinden $U \in TM$ ve $X \in \mathcal{D}^{\perp}$ için

$$\widetilde{h}(U,X) = 0 \tag{4.44}$$

bulunur. İddia (4.19) eşitliğinden çıkar.

5. TARTIŞMA VE SONUÇ

Bu tez çalışmasına diferansiyellenebilir manifoldlar, Riemanniyen manifoldlar, hemen hemen Hermityen manifoldlar, Kähler manifoldlar ve bunların altmanifoldlarını tanıyarak başlandı. Daha sonra Kähler manifoldların kısmi-eğik altmanifoldları üzerine yapılan çalışmalar hatırlandı. Tezin Bulgular bölümünde Taştan ve Tripathi [25] tarafından yerel konformal Kähler manifoldların yarı-eğik altmanifoldları üzerine yapılan çalışmanın ve Taştan ve Özdemir [26] tarafından yerel çarpım Riemanniyen manifoldların kısmi-eğik altmanifoldarı üzerine yapılmış çalışmanın ışığında özgün sonuçlar sunuldu. Yardımcı Teorem 4.1 de bir hemen hemen Hermityen manifoldun kısmi-eğik altmanifoldlarının sağladığı koşullar verildikten sonra,Yardımcı Teorem 4.2 de bir *y.k.K.* manifoldun herhangi bir altmanifoldu için birtakım denklemler verildi. Önerme 1 ve Önerme 2 de $\mathcal{D}^{\theta}$ ve $\mathcal{D}^{\perp}$ dağılımlarının integrallenebilirliği için gerek ve yeter koşullar sunuldu. Yardımcı Teorem 4.3 de bir *y.k.K.* manifoldun bir kısmi-eğik altmanifoldu için verilen denklemlerden yola çıkarak, Sonuç 4.1 de $\mathcal{D}^{\perp}$ dağılımın integrallenebilirliği için gerek ve yeter koşul verildi. Yardımcı Teorem 4.4 de bir *y.k.K* manifoldun kısmi-eğik bir altmanifoldu için denklem sunuldu. Teorem 4.1 de de bir *y.k.K.* manifoldun kısmi-eğik bir altmanifoldu için $\mathcal{D}^{\perp}$ dağılımın integrallenebileceği söylendi. $\mathcal{D}^{\theta}$ ve $\mathcal{D}^{\perp}$ dağılımlarının tümel jeodezik bir yapraklanma tanımlaması için gerek ve yeter koşullar sırası ile Teorem 4.2 ve Teorem 4.3 de verildi. Sonuç 4.2 de bir *y.k.K.* manifoldun bir has kısmi-eğik altmanifoldunun bir yerel çarpım Riemanniyen manifold olması için bir gerek ve yeter koşul sunuldu. Önerme 3 de bir *y.k.K.* manifoldun bir altmanifoldu için P endomorfizminin paralel olması için gerek ve yeter koşul verildikten sonra Teorem 4.4 de bir *y.k.K.* manifoldun bir kısmi-eğik altmanifoldu için P endomorfizminin paralel olması için gerek ve yeter koşul verildi. Bir *y.k.K.* manifoldun tümel umbilik bir kısmi-eğik altmanifoldu için bir karakterizasyon Teorem 4.5 de sunuldu. Önerme 4 de de bir *y.k.K.* manifoldun bir altmanifoldu için F normal değerli 1-formunun paralel olması için bir gerek ve yeter koşul verildi. Buradan hareketle Teorem 4.6 da bir *y.k.K.* manifoldun bir kısmi-eğik altmanifoldu için F normal değerli 1-formunun paralel olması durumunda sağlanan bir koşul sunuldu. Bir *y.k.K.* manifoldun bir kısmi-eğik altmanifoldu için Örnek 4.1 de bir örnek sunuldu.

Bu tezde çalışılan kısmi-eğik altmanifoldlar daha önce de bahsettiğimiz gibi değişmez (invariant), ters-değişmez (anti-invariant), eğik ve CR-altmanifoldların genelleştirilmesidir. Kısmi-eğik altmanifoldların bir ters-değişmez dağılımı $\mathcal{D}^{\perp}$ i ihtiva eden diğer tipteki altmanifoldlara ilk bakışta gözüken benzerliği, $\mathcal{D}^{\perp}$ dağılımının daima integrallenebilir olmasıdır. Öte yandan bu tezde elde edilen diğer sonuçlar başka tiplerdeki altmanifoldların çalışmasında elde edilen sonuçlara benzemektedir. Bu çalışmayı çevreleyen manifold bakımından kıyaslarsak, elde edilen sonuçlar yine benzerlik taşımaktadır. Gerçekten, Şahin [23] tarafından elde edilen bir K$\ddot{a}$hler manifoldun kısmi-eğik altmanifoldlarıyla ilgili sonuçlar bizim elde ettiğimiz sonuçlarla bire-bir uyuşmaktadır. Bu benzerliğin çevreleyen manifoldların üzerindeki metriklerin konformal olmalarından kaynaklandığı görülebilir. Çevreleyen manifoldun yaklaşık K$\ddot{a}$hler [28] olması durumunda ise elde edilen sonuçlar bizim sonuçlarımıza daha az benzerdir. Örneğin $\mathcal{D}^{\perp}$ ters-değişmez dağılım, çevreleyen manifoldun yaklaşık K$\ddot{a}$hler olması durumunda daima integrallenebilir değildir. Dolayısıyla kısmi-eğik altmanifoldların geometrisinin çevreleyen manifold üzerindeki yapıdan direkt olarak etkilendiğini söyleyebiliriz.

Bu çalışma yerel konformal K$\ddot{a}$hler manifoldların kısmi-eğik altmanifoldları için eğrilik bağıntılarını çalışmaya ışık tutacak niteliktedir. Bu tezde elde edilen sonuçların benzerleri değme manifoldlar ile onların farklı tipleri olan Sasakiyen, kosimplektik(cosymplectic), Kenmotsu v.b. manifoldlara uygulanabilir.

KAYNAKLAR

[1]. Al-Solamy, F. R., Khan, M. A. and Uddin, S., 2011, Totally umbilical hemi-slant submanifolds of Kähler manifolds, *Abstract and Applied Analysis*, Article ID 987157, 9.

[2]. Bejancu, A., 1978, CR-submanifolds of a Kaehler manifold I, *Proceedings of the American Mathematical Society*, 69, 135-142.

[3]. Carriazo, A., 2000, Bi-slant immersions, *Proceedings of International Conference on Recent Advances in Mathematical Sciences (ICRAMS)* , 88-97.

[4]. Cabrerizo, J.L., Carriazo, A., Fern$\acute{a}$ndez, L.M. and Fern$\acute{a}$ndez, M., 1999, Semi-slant submanifolds of a Sasakian manifold, *Geometriae Dedicata*, 78, 183-199.

[5]. Chen, B.Y., 1981, $CR-$manifolds of a Kaehler manifold. II, *Journal of Differential Geometry*, 16(3), 493-509.

[6]. Chen, B.Y., 1981, Differential geometry of real submanifolds in a Kaehler manifold, *Monatshefte Fur Mathematik*, 91, 257-274.

[7]. Chen, B.Y., 1990, Slant immersions, *Bulletin of the Australian Mathematical Society*, 41, 135-137.

[8]. Chern, S.S., Chen, W.H. and Lam, K.S., 1998, *Lectures on differential geometry*, World Scientific, London, ISBN: 9810234945.

[9]. De, U.C. and Shaikh A.A, *Differential Geometry of Manifolds*, Alpha Science İnternational Limited, Oxford.

[10]. Dragomir, S. and Ornea, L., 1955, *Locally conformal Kähler geometry*, Springer Science +Business Media, New York, ISBN: 978-1-4612-7387-5.

[11]. Gray, A., 1965, Minimal varieties and almost Hermitian submanifolds, *Michigan Mathematical Journal*, 12(3), 273-287.

[12]. Goldberg, S.I., 1962, *Curvature and homology*, Academic Press, London, ISBN: 62-13106.

[13]. Hsiung, C.C., 1995, *Almost complex and complex structures*, World Scientific, London, ISBN: 981-02-1712-9.

[14]. Ise, M., 1960, On the geometry of Hopf manifolds, *Osaka Journal of Mathematics*, 12, 387-402.

[15]. Jamal, N., Khan, K.A. and Khan V.A., 2010, Generic warped product submanifolds of locally conformal Kähler manifolds, *Acta Mathematica Scienta*, 30B(5), 1457-1468.

[16]. Kobayashi, S. and Nomizu, K., 1969, *Faundations of differential geometry volume II*, Interscience Publishers, London, ISBN: 68-19209.

[17]. Lee, H.C., 1943, A kind of even dimensional differential geometry and its application to exterior calculus, *American Journal of Mathematics*, 65, 433-438.

[18]. Li, H. and Liu, X., 2005, Semi-slant submanifolds of a locally product manifold, *Georgian Mathematical Journal*, 12(2), 273-282.

[19]. O'Neill, B., 1983, *Semi-Riemannian geometry with applications to relativity*, Academic Press, London, ISBN: 0-12-526740-1.

[20]. Papaghiuc, N., 1994, Semi-slant submanifolds of a Kählerian manifold, *Analele Ştiinţifice ale Universităţii "Alexandru Ioan Cuza" din Iaşi Matematica*, 40, 55-61.

[21]. Ronsse, G.S., 1990, Generic and skew CR-submanifolds of a Kähler manifold, *Bulletin of the Institute of Mathematics Academia Sinica*, 18 , 127–141.

[22]. Shahid, M.H. and Husain, S.I., 1998, Generic submanifolds of a locally conformal Kähler manifold, *Soochow Journal of Mathematics*, 14(1), 111-117.

[23]. Şahin, B., 2009, Warped product submanifolds of Kaehler manifolds with a slant factor, *Annales Polonici Mathematici*, 95, 3, 207-226.

[24]. Şahin, B, 2012, *Manifoldların Diferansiyel Geometrisi*, Nobel, Ankara.

[25]. Taştan, H.M. and Tripathi, M.M., 2014, Semi-slant submanifolds of a locally conformal Kähler manifold, *Analele Ştiinţifice ale Universităţii "Alexandru Ioan Cuza" din Iaşi Matematica*, 1-13.

[26]. Taştan, H.M.and Özdemir, F., 2015, The geometry of hemi-slant submanifolds of a locally product Riemannian manifold, *Turkish Journal of Mathematics*, 39(2), 268-284.

[27]. Tripathi, M.M., 2000, On CR submanifolds of nearly and closely cosympletic manifolds, *Ganita*, 51(1), 45-56.

[28]. Uddin, S., Khan, M.A. and Singh, K., 2012, A note on totally umbilical pseudo-slant submanifolds of nearly Kähler manifold, *Acta Universitatis Apulensis Mathematics-Informatics*, 29, 279-285.

[29]. Vaisman, I., 1980, Some curvature properties of locally conformal Kähler manifolds, *Transactions of the American Mathematical Society*, 259(2), 439-447.

[30]. Vaisman, I., 1982, Some curvature properties of complex surfaces, *Annali di Matematica Pura ed Applicata*, 32, 1-18.

[31]. Yano, K. and Kon, M., 1984, *Structures on manifolds*, World Scientific, Singapore.

ÖZGEÇMİŞ

Kişisel Bilgiler

Adı Soyadı	Sibel Gerdan
Uyruğu	T.C.
Doğum yılı, Yeri	1990, Rize.
Telefon	05377140688
E-mail	sibelgerdan@gmail.com

Eğitim

Derece	Kurum/Anabilim Dalı/Programı	Yılı
Lisans	İ.Ü. Fen Fakültesi/Matematik Bölümü	2012
Lise	75. Yıl IMKB Anadolu Lisesi	2008