T.C.
İSTANBUL ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

YÜKSEK LİSANS TEZİ

SÜREKLİ KESİRLER VE PADÉ YAKLAŞIMLARI

Sabire Ceyda OKTAR

Matematik Anabilim Dalı

Matematik Programı

Danışman

Yrd. Doç. Dr. Fatma ÇALIŞKAN

Haziran , 2015

İSTANBUL

Bu çalışma 10/Haziran/ 2015 tarihinde aşağıdaki jüri tarafından Matematik Anabilim Dalı Matematik programında Yüksek Lisans Tezi olarak kabul edilmiştir.

Tez Jürisi:

Yrd. Doç. Dr. Fatma ÇALIŞKAN
İstanbul Üniversitesi
Fen Fakültesi

Prof. Dr. Kamuran SAYGILI
İstanbul Üniversitesi
Fen Fakültesi

Prof. Dr. Erhan ÇALIŞKAN
İstanbul Üniversitesi
Fen Fakültesi

Prof. Dr. İ. Müfit GİRESUNLU
İstanbul Üniversitesi
Fen Fakültesi

Yrd. Doç. Dr. Ayberk ZEYTİN
Galatasaray Üniversitesi
Fen Fakültesi

Bu çalışma İstanbul Üniversitesi Bilimsel Araştırma Projeleri Yürütücü Sekreterliğinin 38005 numaralı projesi ile desteklenmiştir.

ÖNSÖZ

Bu tez çalışması boyunca bilgi birikimi ve yönlendirmeleriyle bana her zaman destek olan danışmanım Yrd. Doç. Dr. Fatma ÇALIŞKAN' a teşekkürlerimi sunarım. Yüksek lisansım boyunca Yurtiçi Yüksek Lisans Burs Programı ile destek sağlayan TÜBİTAK' a bu imkan için teşekkür ederim. Bugüne kadar yanımda olan aileme teşekkürü borç bilirim.

Haziran, 2015 Sabire Ceyda OKTAR

İÇİNDEKİLER

TABLO LİSTESİ

Sayfa No

SİMGE VE KISALTMA LİSTESİ

Simgeler	**Açıklama**
$\mathbf{f_n}$	**:** Sürekli Kesrin n inci Yaklaşımı
$\mathbf{A_n}$	**:** Sürekli Kesrin n inci Yaklaşımının Payı
$\mathbf{B_n}$	**:** Sürekli Kesrin n inci Yaklaşımının Paydası
$\mathbf{r_n}$	**:** Sürekli Kesrin n inci Kalan Kısmı
$\mathbf{Frac}(\alpha)$	**:** α Reel Sayısının Kesir Kısmı
$\lfloor\alpha\rfloor$	**:** α Reel Sayısının Tam Değeri
$\overline{\alpha}$	**:** α Reel Sayısının Eşleniği
$\mathbf{C}(\mathbf{z})$	**:** Formal Kuvvet Serisi
$\mathcal{P}$	**:** Formal Kuvvet Serileri Kümesi
$\mathbf{L}(\mathbf{z})$	**:** Formal Laurent Serisi
$\mathcal{L}$	**:** Formal Laurent Serileri Kümesi
$\mathbf{degP}(\mathbf{z})$	**:** $P(z)$ Polinomunun Derecesi
$\mathbf{R_{m,n}}$	**:** Padé Yaklaşımı
$\mathbf{c_{m,n}}$	**:** Toeplitz Determinantı
$\mathbf{c_{m/n}}$	**:** Hankel Determinantı

ÖZET

YÜKSEK LİSANS TEZİ

SÜREKLİ KESİRLER VE PADÉ YAKLAŞIMLARI

Sabire Ceyda OKTAR

İstanbul Üniversitesi

Fen Bilimleri Ensititüsü

Matematik Anabilim Dalı

Danışman : Yrd. Doç. Dr. Fatma ÇALIŞKAN

Bu tez çalışmasında matematiğin bir çok alanında uygulamaya sahip özellikle sayılar teorisi alanında önemli bir yeri olan sürekli kesirler konusu incelenmiş ve sürekli kesirlerin bir uygulama alanı olarak Padé yaklaşımları ile ilişkisi araştırılmıştır. İki ana alt başlık altında toplanan bu çalışmanın ilk bölümünde sürekli kesirlerin genel özellikleri ayrıntılı bir şekilde incelenmiştir. Bu bölümün ilk kısmında genel tanım ve teoremler, ikinci kısmında basit sürekli kesirler, üçüncü kısmında periyodik basit sürekli kesirler ve son kısmında birinci ve ikinci tür en iyi yaklaşımlar üzerinde durulmuştur. İkinci bölümde ise Padé yaklaşımları incelenmiştir. Bu bölümün ilk kısmında genel tanım ve teoremler, ikinci kısmında Padé tablosu ve sürekli kesirler ile Padé yaklaşımları arasındaki ilişki verilmiştir.

Haziran 2015, 88 Sayfa.

Anahtar kelimeler: Sürekli kesirler, en iyi yaklaşımlar, Padé yaklaşımı, Padé tablosu, C-kesri.

SUMMARY

M.Sc. THESIS

CONTINUED FRACTIONS AND PADÉ APPROXIMATIONS

Sabire Ceyda OKTAR

İstanbul University

Institute of Graduate Studies in Science and Engineering

Department of Mathematics

Supervisor : Asst. Prof. Dr. Fatma ÇALIŞKAN

In this thesis, continued fractions, which have many applications in many areas of mathematics, especially in number theory, were examined and their relationship between Padé approximations were investigated as one of their application. Gathered in two main subtitles, in this study, in the first chapter general properties of continued fractions were analyzed in detail. In the first part of this chapter, general definitions and theorems, in the second part simple continued fractions, in the third part periodic simple continued fractions and in the last part the first and the second kind of best approximations were dwelt upon. In the second chapter, Padé approximations were investigated. In the first part of this chapter, general definitions and theorems and in the second part Padé table and the relationship between Padé aprroximations and continued fractions were given.

June 2015, 88 Pages.

Keywords: Continued fractions, best approximations, Padé approximation, Padé table, C-fraction.

1. GİRİŞ

Sürekli kesirlerin temeli Euclid algoritmasına kadar dayanır. Bu algoritma ile iki doğal sayının en büyük ortak bölenini bulmak aslında basit sonlu bir sürekli kesrin elde edilmesini sağlar. a, b pozitif tam sayılar ve $a > b$ olsun. $\ell_o = a$ ve $\ell_1 = b$ olmak üzere a, b sayı ikilisine Euclid algoritması uygulanırsa $k = 0, 1, \ldots, n$ için

$$\ell_k = \ell_{k+1} b_k + \ell_{k+2}, \quad 0 \leq \ell_{k+1} < \ell_k,\ b_k \in \mathbb{N}$$

elde edilir. Bir n doğal sayısı için $\ell_{n+2} = 0$ olup $\ell_n = \ell_{n+1} b_n$ bulunur. Burada ℓ_{n+1} sayısı a, b ikilisinin en büyük ortak bölenine karşılık gelir. Euclid algoritması

$$\frac{\ell_k}{\ell_{k+1}} = b_k + \frac{1}{\frac{\ell_{k+1}}{\ell_{k+2}}}$$

biçiminde yazılır ve her $k = 0, 1, \ldots, n$ için tekrar edilirse

$$\frac{a}{b} = b_0 + \cfrac{1}{b_1 + \cfrac{1}{b_2 + \cfrac{1}{\ddots \, \cfrac{1}{b_n}}}}$$

bulunur.

Bazı yunan matematikçiler alanı verilen bir karenin bir kenar ölçüsünü bulmak için sürekli kesirleri kullanmışlardır. Bu matematikçilerden biri olan Theon of Alexandria' nın çalışmasında karenin bir kenarı

$$\sqrt{A} = \sqrt{b_0^2 + a_1} = b_0 + \cfrac{a_1}{2b_0 + \cfrac{a_1}{2b_0 + \cfrac{a_1}{2b_0 + \cfrac{a_1}{\ddots}}}}$$

biçiminde bulunmuştur, burada A karenin alanını ve b_0 da $b^2 \leq A$ koşulunu sağlayan en büyük pozitif b tam sayısını göstermektedir.

Sürekli kesirlerin kullanıldığı bir başka alan ise günümüzde Diofant denklemleri olarak adlandırılan denklemlerin çözümüdür. a ve b aralarında asal ve $a > b$ olmak üzere a, b, c pozitif tam sayıları için

$$ax + by = c$$

Diofant denklemi göz önüne alınsın.

$$\frac{A_{n-1}}{B_{n-1}} = b_0 + \cfrac{1}{b_1 + \cfrac{1}{b_2 + \cfrac{1}{\ddots \cfrac{1}{b_{n-1}}}}}$$

biçiminde adlandırılırsa Euclid algoritması yardımıyla

$$aB_{n-1} - bA_{n-1} = \pm 1$$

olduğu görülür. $aB_{n-1} - bA_{n-1} = 1$ olduğu durum incelenirse

$$ax + by = c(aB_{n-1} - bA_{n-1})$$

olacağından

$$\frac{cB_{n-1} - x}{b} = \frac{y + cA_{n-1}}{a} = t$$

elde edilir. O halde verilen Diofant denklemin çözümleri

$$x = cB_{n-1} - bt, \quad y = at - cA_{n-1}, \quad t = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$$

şeklindedir. Avrupa' da bu metod, bir çok matematikçi tarafından yeniden bulunmuştur.

Hint matematikçi Bhascara, yukarıdaki koşullar altında $ax - by = c$ denkleminin çözümlerinin de $\frac{a}{b}$ kesrinin sürekli kesir açılımıyla bulunabileceğini ispatlamıştır. Ayrıca bu açılımın $f_n = \frac{A_n}{B_n}$ yaklaşımları için

$$A_n = b_n A_{n-1} + A_{n-2}$$

$$B_n = b_n B_{n-1} + B_{n-2}$$

$$A_n B_{n-1} - A_{n-1} B_n = (-1)^{n-1}$$

eşitliklerinin sağlandığını göstermiştir.

Günümüzdeki adıyla sonsuz sürekli kesirleri kullanan ilk matematikçi ise, karmaşık sayıları ortaya koyan Rafael Bombelli’ dir. Bombelli, yayınladığı kitapta $\sqrt{13}$ sayısının sonsuz sürekli kesir açılımını tam olarak

$$3+\cfrac{4}{6+\cfrac{4}{6+\cfrac{4}{\ddots}}}$$

biçiminde bulmuştur. Burada Bombelli’ nin $\sqrt{13}$ için yaptığı çalışmanın Theon’ un çalışmasıyla örtüşmektedir. Theon’ un çalışmasında $13 = A = b_0^2 + a_1$ için

$$\sqrt{A} = b_0 + \cfrac{a_1}{2b_0+\cfrac{a_1}{2b_0+\cfrac{a_1}{\ddots}}}$$

biçimindedir.

17. yüzyılda John Wallis $\frac{4}{\pi}$ sayısını incelenmiş ve bu sırada yazdığı kitapta ilk defa "sürekli kesirler" ifadesini kullanmıştır. Aynı kitapta $\frac{4}{\pi}$ saysına karşılık gelen sürekli kesrin yaklaşımlarının, sırasıyla, bu sayıdan büyük ve küçük olarak devam ettiğini ifade etmiştir.

18. yüzyıl, sürekli kesirlerin altın çağı olarak adlandırılabilir. Euler, 1737 yılındaki çalışmasında her rasyonel sayının bir sonlu sürekli kesir ile ifade edilebildiğini ve her irrasyonel sayının da bir sonsuz sürekli kesir ile ifade edildiğini ispatlamıştır. Buna ek olarak periyodik sürekli kesirlerin karşılık geldiği değerlerin birer kuadratik denklemin kökü olduğunu ispatlamıştır. Ayrıca e ve $\frac{e+1}{e-1}$ sayılarının sürekli kesir açılımlarını vermiştir. 1748 yılında ise $f_n = \frac{A_n}{B_n}$ yaklaşımlar dizisinin pay ve paydaları için rekürans denklemlerini ifade etmiştir. Bunların yanı sıra

$$f_n - f_{n-1} = (-1)^{n-1}\frac{a_1a_2\ldots a_n}{B_1B_2\ldots B_n}$$

yardımıyla bir C sürekli kesrinin

$$C = b_0 + \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{a_1a_2\ldots a_n}{B_1B_2\ldots B_n}$$

olduğunu göstermiştir.

20. yüzyılın başlarına kadar sürekli kesirlerle ilgili incelemeler hız kazanmıştır, bu süreçte sürekli kesirler çeşitlendirilmiş ve bir çok matematikçi tarafından incelenmiştir. Günümüzde sürekli kesirler, bu altyapı ışığında Diofant ve Pell denklemleri, verilen bir sayının çarpanlara ayrılışı gibi pek çok alanda kullanılmaktadır.

Padé yaklaşımlarının tarihsel süreci de sürekli kesirler kadar ayrıntılı ve aşamalı olmuştur. Padé yaklaşımları ve bu yaklaşımlar yardımıyla oluşturulan Padé Tablosu adını 1863-1953 yılları arasında yaşamış olan Fransız matematikçi H. Padé' den alır. Padé yaklaşımı, belirli kurallar çerçevesinde verilen mertebeden bir rasyonel fonksiyon ile bir seriye en iyi yaklaşımdır. $P_{m,n}(x)$ en fazla m inci dereceden, $Q_{m,n}(x)$ en fazla n inci dereceden iki polinom olmak üzere,

$$\frac{P_{m,n}(x)}{Q_{m,n}(x)}$$

biçimindeki ifade verilen fonksiyonun bir Padé yaklaşımını verir. Bu yaklaşımların uygun bir biçimde dizilişi ise Padé tablosu olarak adlandırılır. Bir formal kuvvet serisinin $[m, n]$ biçimindeki Padé yaklaşımının seri açılımı, seriye $m + n$ inci katsayıya kadar denk gelir.

Sürekli kesirler ve Padé yaklaşımları ile ilgili olarak daha ayrıntılı bilgi için Brezinski[1], Baker[2], Khintchine[3], Jones ve Thron[4]' un çalışmalarına bakılabilir.

Bu tez çalışmasının amacı, sürekli kesirlerin ve Padé yaklaşımının teorik özelliklerinin araştırılması, sürekli kesirler ile Padé yaklaşımlarının birbirleriyle olan ilişkilerinin incelenmesidir. Bu çerçevede sürekli kesirler ve Padé yaklaşımları ile ilgili yapılacak çalışmalara temel olması hedeflenmektedir.

Genel Kısımlar bölümü, sürekli kesirler ve sürekli kesirlerin bir uygulama alanı olarak Padé yaklaşımları olmak üzere iki alt bölüme ayrılmıştır. Sürekli kesirler bölümünde genel tanım ve teoremler ifade edilmiş ve örneklere yer verilmiştir. Basit sürekli kesirler ve periyodik basit sürekli kesirler için ayrı ayrı incelemeler yapılmıştır. Yaklaşım teorisinin temelini oluşturan, bir sürekli kesre ait birinci tür ve ikinci tür en iyi yaklaşımların tanımları yapılmış ve en iyi yaklaşımlarla ilgili bazı özellikler ifade edilmiştir. Padé yaklaşımları ile ilgili bölümde ise sürekli kesirler bölümünde de olduğu gibi genel tanım ve teoremler ifade edilmiş ve örnekler verilmiştir. Ayrıca Padé tablosu ve C-tablosu tanımları yapılmış ve bu tabloların genel özellikleri incelenmiştir. Son olarak sürekli kesirler ile Padé yaklaşımları arasındaki ilişki verilmiştir.

Malzeme ve Yöntem bölümünde çalışma sırasında kullanılan malzeme ve yöntemlere değinilmiştir. Bulgular bölümünde tez çalışması boyunca yapılan incelemeler sonucunda elde edilen bilgiler kısaca özetlenmiştir. Tartışma ve Sonuç bölümündeyse elde edilen bulgular yorumlanmıştır. Son olarak Kaynaklar bölümünde bu tez çalışmasında kullanılan makale ve kitapların listesi verilmiştir.

2. GENEL KISIMLAR

2.1. SÜREKLİ KESİRLER

2.1.1. Genel Tanım ve Teoremler

Tanım 2.1. $b_0 \in \mathbb{C}$ ve her $n \in \mathbb{N}$ için $a_n, b_n \in \mathbb{C}$ olmak üzere

$$b_0 + \cfrac{a_1}{b_1 + \cfrac{a_2}{b_2 + \cfrac{a_3}{b_3 + \cfrac{a_4}{\ddots}}}} \tag{2.1}$$

biçimindeki ifadelere sürekli kesir denir. (2.1) sürekli kesri

$$b_0 + \underset{n=1}{\overset{\infty}{\mathcal{K}}} \left(\frac{a_n}{b_n} \right) \tag{2.2}$$

şeklinde de gösterilir. (2.1) sürekli kesri

$$b_0 + \cfrac{a_1}{b_1 + \cfrac{a_2}{b_2 + \cfrac{a_3}{b_3 + \cfrac{a_4}{\ddots + \frac{a_k}{b_k}}}}} \tag{2.3}$$

biçiminde ise sonlu sürekli kesir olarak adlandırılır. (2.3) sürekli kesri

$$b_0 + \underset{n=1}{\overset{k}{\mathcal{K}}} \left(\frac{a_n}{b_n} \right) \tag{2.4}$$

şeklinde de gösterilir.

Tanım 2.2. Bir sürekli kesirde

$$b_0 + \cfrac{a_1}{b_1 + \cfrac{a_2}{b_2 + \cfrac{a_3}{\ddots + \cfrac{a_n}{b_n}}}}$$

ifadesine sürekli kesrin n inci yaklaşımı denir ve f_n ile gösterilir. O halde bir sürekli kesrin n inci yaklaşımının pay ve paydası sırasıyla A_n ve B_n olarak adlandırılırsa $f_n = \frac{A_n}{B_n}$ biçiminde yazılır.

Sonlu bir sürekli kesir için f_n yaklaşımları sonlu sayıdadır. $n = k$ olması durumunda f_n yaklaşımı sürekli kesrin değerine eşit olur.

Tanım 2.3. Bir sürekli kesir için özel olarak -1 inci yaklaşım $A_{-1} = 1$ ve $B_{-1} = 0$ olmak üzere

$$f_{-1} = \frac{A_{-1}}{B_{-1}}$$

biçiminde alınır.

Tanım 2.4. Bir sürekli kesirde

$$b_n + \cfrac{a_{n+1}}{b_{n+1} + \cfrac{a_{n+2}}{\ddots}}$$

ifadesine sürekli kesrin n inci kalanı denir ve r_n ile gösterilir. Sonlu bir sürekli kesir için r_n kalanları sonlu sayıdadır. $n = 0$ olması durumunda r_n kalanı sürekli kesrin kendisine eşit olur.

Örnek 2.1. $e = 2,71828181828459\ldots$ sayısına karşılık gelen

$$2 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{4 + \cfrac{1}{\ddots}}}}}}$$

biçimindeki ifade bir sonsuz sürekli kesirdir. Bu sürekli kesrin ilk 4 yaklaşımı

$$f_0 = 2, \quad f_1 = 2 + \frac{1}{1} = 3, \quad f_2 = 2 + \frac{1}{1 + \frac{1}{2}} = \frac{8}{3}, \quad f_3 = 2 + \frac{1}{1 + \frac{1}{2 + \frac{1}{1}}} = \frac{11}{4}$$

şeklinde bulunur. İlk 3 kalan kısmı ise

$$r_0 = 2 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{2+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{4+\cfrac{1}{\ddots}}}}}},$$

$$r_1 = 1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{4+\cfrac{1}{\ddots}}}}},$$

$$r_2 = 2 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1+\cfrac{1}{4+\cfrac{1}{\ddots}}}}$$

şeklindedir.

Örnek 2.2.

$$1 + \cfrac{2}{1 + \cfrac{2}{1+\cfrac{2}{1+\frac{2}{3}}}}$$

biçimindeki ifade bir sonlu sürekli kesirdir. Bu sürekli kesir için f_n yaklaşımları aşağıdaki gibi sonlu sayıdadır ve $k = 4$ için f_4 yaklaşımı sürekli kesrin belirttiği sayıya eşit olur.

$$f_0 = 1, \quad f_1 = 1 + \frac{2}{1} = 3, \quad f_2 = 1 + \frac{2}{1 + \frac{2}{1}} = \frac{5}{3}$$

$$f_3 = 1 + \cfrac{2}{1 + \cfrac{2}{1+\frac{2}{1}}} = \frac{11}{5}, \quad f_4 = 1 + \cfrac{2}{1 + \cfrac{2}{1+\cfrac{2}{1+\frac{2}{3}}}} = \frac{41}{21}$$

Bu sonlu sürekli kesrin ilk 3 kalan kısmı ise

$$r_0 = 1 + \cfrac{2}{1 + \cfrac{2}{1+\cfrac{2}{1+\frac{2}{3}}}} = \frac{41}{21},$$

$$r_1 = \cfrac{2}{1 + \cfrac{2}{1+\cfrac{2}{1+\frac{2}{3}}}} = \frac{10}{11},$$

$$r_2 = 1 + \cfrac{2}{1 + \cfrac{2}{1+\frac{2}{3}}} = \frac{5}{11}$$

biçimindedir.

Teorem 2.1. $A_{-1} = 1,\ A_0 = b_0,\ B_{-1} = 0,\ B_0 = 1$ başlangıç koşulları olmak üzere, bir sürekli kesrin n inci pay ve paydası sırasıyla $n = 1, 2, 3, \ldots$ için

$$\begin{aligned} A_n &= b_n A_{n-1} + a_n A_{n-2} \\ B_n &= b_n B_{n-1} + a_n B_{n-2} \end{aligned} \tag{2.5}$$

eşitliklerini sağlar. Bu eşitliklere rekürans denklemleri denir [2].

İspat. Bir sürekli kesrin ilk üç yaklaşımı

$$f_0 = \frac{A_0}{B_0} = \frac{b_0}{1}, \quad f_1 = \frac{A_1}{B_1} = \frac{a_1 + b_1 b_0}{b_1}, \quad f_2 = \frac{A_2}{B_2} = \frac{b_0 a_2 + a_1 b_2 + b_0 b_1 b_2}{a_2 + b_1 b_2}$$

biçimindedir. (2.5) eşitliklerinde $n = 1$ için

$$\begin{aligned} A_1 &= b_1 A_0 + a_1 A_{-1} = b_1 b_0 + a_1 \\ B_1 &= b_1 B_0 + a_1 B_{-1} = b_1 \end{aligned}$$

bulunur. $k \leq n$ olmak üzere her $k \in \mathbb{N}$ için

$$\begin{aligned} A_k &= b_k A_{k-1} + a_k A_{k-2} \\ B_k &= b_k B_{k-1} + a_k B_{k-2} \end{aligned}$$

eşitliklerinin doğru olduğu varsayılıp $n+1$ için (2.5) eşitliklerinin doğru olduğu gösterilebilir. f_n yaklaşımından f_{n+1} yaklaşımının elde edilmesi için a_n yerine $a_n b_{n+1}$ ve b_n yerine $b_n b_{n+1} + a_{n+1}$ yazmak yeterlidir. Bu düzenleme sonucunda elde edilen f_n yaklaşımının payı $A_n^{'}$ olarak adlandırılırsa

$$A_n^{'} = (b_n b_{n+1} + a_{n+1}) A_{n-1} + a_n b_{n+1} A_{n-2}$$

biçimini alır. $A_n^{'}$ aynı zamanda f_{n+1} yaklaşımının da payı olduğundan

$$A_{n+1} = (b_n b_{n+1} + a_{n+1}) A_{n-1} + a_n b_{n+1} A_{n-2}$$

yazılabilir. Buradan

$$A_{n+1} = b_{n+1}(b_n A_{n-1} + a_n A_{n-2}) + a_{n+1} A_{n-1}$$

olup

$$A_{n+1} = b_{n+1}A_n + a_{n+1}A_{n-1}$$

elde edilir. Benzer işlemler B_{n+1} için yapılırsa

$$B_{n+1} = b_{n+1}B_n + a_{n+1}B_{n-1}$$

elde edilir. O halde her $n \in \mathbb{N}$ için reküurans denklemleri gerçeklenir.

Teorem 2.2. (2.1) sürekli kesrinin n inci yaklaşımının pay ve paydası sırasıyla A_n ve B_n olmak üzere

$$A_{n-1}B_n - B_{n-1}A_n = (-1)^n \prod_{k=1}^{n} a_k \quad (n \in \mathbb{N}) \tag{2.6}$$

eşitliği geçerlidir. (2.6) ifadesi determinant formülü olarak adlandırılır. Bu formülün her iki yanı (-1) ile çarpılırsa

$$A_nB_{n-1} - B_nA_{n-1} = (-1)^{n-1} \prod_{k=1}^{n} a_k \quad (n \in \mathbb{N}) \tag{2.7}$$

elde edilir [2].

İspat. $n = 1$ için

$$A_0B_1 - B_0A_1 = b_0b_1 - 1.(a_1 + b_1b_0) = -a_1 = (-1)^1 a_1$$

bulunur. $k \in \mathbb{N}$ olmak üzere her $k < n$ için doğru olduğu varsayılsın. O halde n için

$$A_{n-1}B_n - B_{n-1}A_n = \begin{vmatrix} A_{n-1} & A_n \\ B_{n-1} & B_n \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} A_{n-1} & b_nA_{n-1} + a_nA_{n-2} \\ B_{n-1} & b_nB_{n-1} + a_nB_{n-2} \end{vmatrix}$$

$$= -a_n \begin{vmatrix} A_{n-2} & A_{n-1} \\ B_{n-2} & B_{n-1} \end{vmatrix}$$

olup indüksiyonun ikinci adımından

$$A_{n-1}B_n - B_{n-1}A_n = (-1)^n \prod_{k=1}^{n} a_k$$

bulunur.

Tanım 2.5.

$$b_0 + \mathop{\mathcal{K}}_{n=1}^{\infty} \left(\frac{a_n}{b_n}\right) \tag{2.8}$$

ve

$$b_0^* + \mathop{\mathcal{K}}_{n=1}^{\infty} \left(\frac{a_n^*}{b_n^*}\right) \tag{2.9}$$

n inci yaklaşımları sırasıyla f_n ve f_n^* olan iki sürekli kesir olsun. Her $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ için $f_n = f_n^*$ oluyorsa bu sürekli kesirlere denk sürekli kesirler denir.

Teorem 2.3. (2.8) ve (2.9) sürekli kesirlerinin denk olması için gerek ve yeter koşul $s_0 = 1$ olmak üzere $\{s_n\}$ sıfırdan farklı sayılar dizisi için

$$\begin{aligned} a_n^* &= s_n s_{n-1} a_n, \quad && n \in \mathbb{N} \\ b_n^* &= s_n b_n, && n \in \mathbb{N} \cup \{0\} \end{aligned}$$

olmasıdır [4].

Teorem 2.3 ifadesini sağlayan bir $\{s_n\}$ dizisi yardımıyla (2.1) sürekli kesrine denk olan bir sürekli kesir

$$b_0^* = s_0 b_0 = b_0, \quad b_1^* = s_1 b_1, \quad b_2^* = s_2 b_2, \ldots$$

ve

$$a_1^* = s_1 s_0 a_1 = s_1 a_1, \quad a_2^* = s_2 s_1 a_1 = s_1 a_2, \ldots$$

eşitlikleri yardımıyla

$$b_0 + \cfrac{s_1 a_1}{s_1 b_1 + \cfrac{s_1 s_2 a_2}{s_2 b_2 + \cfrac{s_2 s_3 a_3}{s_3 b_3 + \cfrac{s_3 s_4 a_4}{\ddots}}}} \tag{2.10}$$

biçiminde gösterilir. (2.10) sürekli kesrinin her $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ için n inci yaklaşımlarının pay ve paydaları sırasıyla $A_n^{'}$ ve $B_n^{'}$ olsun. $A_n \neq A_n^{'}$ ve $B_n \neq B_n^{'}$ olmasına karşın $f_n^{'} = f_n$ eşitliği sağlanır.

Bir sürekli kesirde her $n \in \mathbb{N}$ için $b_n \neq 0$ olması durumunda $s_n = b_n^{-1}$ alınarak oluşturulan

(2.10) sürekli kesri

$$b_0 + \cfrac{a_1^{'}}{1 + \cfrac{a_2^{'}}{1 + \cfrac{a_3^{'}}{1 + \cfrac{a_4^{'}}{\ddots}}}} \tag{2.11}$$

biçimini alır. Burada $a_1^{'} = \frac{a_1}{b_1}$ ve $j \geq 2$ doğal sayıları için $a_j^{'} = \frac{a_j}{b_j b_{j-1}}$ şeklindedir. O halde (2.1) yerine (2.11) sürekli kesri göz önüne alınabilir.

Tanım 2.6. (2.8) ve (2.9) sürekli kesirlerinde her $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ için $f_n^* = f_{2n}$ oluyorsa (2.9) sürekli kesrine (2.8) sürekli kesrinin çift kısmı denir.

Tanım 2.7. (2.8) ve (2.9) sürekli kesirlerinde her $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ için $f_n^* = f_{2n+1}$ oluyorsa (2.9) sürekli kesrine (2.8) sürekli kesrinin tek kısmı denir.

Bir sürekli kesrin çift kısmını oluşturmak için ilk olarak bu sürekli kesrin (2.11) biçiminde yazılması gereklidir. (2.11) sürekli kesri için

$$f_2 = \frac{A_2}{B_2} = b_0 + \frac{a_1^{'}}{1 + a_2^{'}} \tag{2.12}$$

olur.

$$\frac{a_2^{'}}{1 + \frac{a_3^{'}}{1 + a_4^{'}}} = \frac{a_2^{'}(1 + a_4^{'})}{1 + a_4^{'} + a_3^{'}} = a_2^{'} - \frac{a_2^{'} a_3^{'}}{1 + a_3^{'} + a_4^{'}}$$

eşitliği kullanılarak

$$f_4 = \frac{A_4}{B_4} = b_0 + \cfrac{a_1^{'}}{1 + a_2^{'} - \cfrac{a_2^{'} a_3^{'}}{1 + a_3^{'} + a_4^{'}}} \tag{2.13}$$

elde edilir. Benzer şekilde her $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ için

$$\frac{a_{2k}^{'}}{1 + \frac{a_{2k+1}^{'}}{1 + a_{2k+2}^{'}}} = \frac{a_{2k}^{'}(1 + a_{2k+2}^{'})}{1 + a_{2k+2}^{'} + a_{2k+1}^{'}} = a_{2k}^{'} - \frac{a_{2k}^{'} a_{2k+1}^{'}}{1 + a_{2k+1}^{'} + a_{2k+2}^{'}}$$

eşitlikleri yardımıyla (2.10) sürekli kesrinin çift kısmı

$$b_0 + \cfrac{a_1^{'}}{1 + a_2^{'} - \cfrac{a_2^{'} a_3^{'}}{1 + a_3^{'} + a_4^{'} - \cfrac{a_4^{'} a_5^{'}}{1 + a_5^{'} + a_6^{'} - \cfrac{a_6^{'} a_7^{'}}{\ddots}}}} \tag{2.14}$$

biçiminde bulunur.

Bir sürekli kesrin tek kısmını oluşturmak için ilk olarak bu sürekli kesrin (2.11) biçiminde yazılması gereklidir. (2.11) sürekli kesri için

$$f_1 = \frac{A_1}{B_1} = b_0 + a_1^{'} \tag{2.15}$$

olur.

$$\frac{a_1^{'}}{1 + \frac{a_2^{'}}{1+a_3^{'}}} = \frac{a_1^{'}(1 + a_3^{'})}{1 + a_3^{'} + a_2^{'}} = a_1^{'} - \frac{a_1^{'}a_2^{'}}{1 + a_2^{'} + a_3^{'}}$$

eşitliği kullanılarak

$$f_3 = \frac{A_3}{B_3} = b_0 + a_1^{'} - \frac{a_1^{'}a_2^{'}}{1 + a_2^{'} + a_3^{'}} \tag{2.16}$$

elde edilir. Benzer şekilde her $k \in \mathbb{N}$ için

$$\frac{a_{2k+1}^{'}}{1 + \frac{a_{2k+2}^{'}}{1+a_{2k+3}^{'}}} = \frac{a_{2k+1}^{'}(1 + a_{2k+3}^{'})}{1 + a_{2k+2}^{'} + a_{2k+3}^{'}} = a_{2k+1}^{'} - \frac{a_{2k+1}^{'}a_{2k+2}^{'}}{1 + a_{2k+2}^{'} + a_{2k+3}^{'}}$$

eşitlikleri yardımıyla (2.10) sürekli kesrinin tek kısmı

$$b_0 + a_1^{'} - \cfrac{a_1^{'}a_2^{'}}{1 + a_2^{'} + a_3^{'} - \cfrac{a_3^{'}a_4^{'}}{1+a_4^{'}+a_5^{'} - \cfrac{a_5^{'}a_6^{'}}{1+a_6^{'}+a_7^{'} - \cfrac{a_7^{'}+a_8^{'}}{\ddots}}}} \tag{2.17}$$

biçiminde bulunur.

Örnek 2.3. $b_0 = 1$ ve her $n \in \mathbb{N}$ için $b_n = 2, a_n = 1$ olmak üzere

$$1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{\ddots}}}}$$

sürekli kesri ele alınsın. Bu sürekli kesrin (2.11) formu aşağıdaki gibidir:

$$1 + \cfrac{\frac{1}{2}.1}{\frac{1}{2}.2 + \cfrac{\frac{1}{2}.\frac{1}{2}.1}{\frac{1}{2}.2+\cfrac{\frac{1}{2}.\frac{1}{2}.1}{\frac{1}{2}.2+\cfrac{\frac{1}{2}.\frac{1}{2}.1}{\ddots}}}} = 1 + \cfrac{\frac{1}{2}}{1 + \cfrac{\frac{1}{4}}{1+\cfrac{\frac{1}{4}}{1+\cfrac{\frac{1}{4}}{\ddots}}}}$$

Dolayısıyla $a_1^{'} = \frac{1}{2}$ ve $n \geq 2$ için $a_n^{'} = \frac{1}{4}$ olur. Bu bilgiler (2.14) ve (2.17) eşitliklerinde yazılırsa sürekli kesrin çift ve tek kısımları sırasıyla

$$1 + \cfrac{\frac{1}{2}}{\frac{5}{4} - \cfrac{\frac{1}{16}}{\frac{3}{2} + \cfrac{\frac{1}{16}}{\frac{3}{2} + \cfrac{\frac{1}{16}}{\ddots}}}} \quad \text{ve} \quad \frac{3}{2} - \cfrac{\frac{1}{8}}{\frac{3}{2} - \cfrac{\frac{1}{16}}{\frac{3}{2} + \cfrac{\frac{1}{16}}{\frac{3}{2} + \cfrac{\frac{1}{16}}{\ddots}}}}$$

biçiminde bulunur.

2.1.2. Basit Sürekli Kesirler

$b_0 \in \mathbb{R}$ ve her $i \in \mathbb{N}$ için $a_i, b_i \in \mathbb{R}^+$ olmak üzere

$$b_0 + \cfrac{a_1}{b_1 + \cfrac{a_2}{b_2 + \cfrac{a_3}{b_3 + \cfrac{a_4}{\ddots}}}}$$

şekllindeki bir sürekli kesir, sürekli kesirlerin denkliği kullanılarak

$$b_0 + \cfrac{1}{b_1 + \cfrac{1}{b_2 + \cfrac{1}{b_3 + \cfrac{1}{\ddots}}}}, \ b_0 \in \mathbb{R}, \ b_i \in \mathbb{R}^+ (i = 1, 2, \ldots) \tag{2.18}$$

biçimine getirilebilir. Sayılar teorisinde bu sürekli kesirler, (2.1) sürekli kesirlerinden daha çok kullanılmaktadır. (2.18) sürekli kesirleri kısaca

$$[b_0; b_1, b_2, \ldots] \tag{2.19}$$

olarak da ifade edilir. (2.18) kesrinin sonlu olması durumunda bu gösteriliş

$$[b_0; b_1, b_2, \ldots, b_k] \tag{2.20}$$

biçimini alır. (2.18) sürekli kesrinin n inci yaklaşımının payı ve paydası sırasıyla A_n ve B_n olmak üzere rekürans denklemleri her $n \in \mathbb{N}$ için

$$\begin{aligned} A_n &= b_n A_{n-1} + A_{n-2} \\ B_n &= b_n B_{n-1} + B_{n-2} \end{aligned} \tag{2.21}$$

ve determinant formülü

$$A_{n-1}B_n - B_{n-1}A_n = (-1)^n \tag{2.22}$$

biçimini alır. (2.18) biçimindeki sürekli kesrin n inci yaklaşımı

$$f_n = \frac{A_n}{B_n} = [b_0; b_1, b_2, \ldots, b_n]$$

ve n inci kalan kısmı

$$r_n = b_n + \cfrac{1}{b_{n+1} + \cfrac{1}{b_{n+2} + \cfrac{1}{\ddots}}} = [b_n; b_{n+1}, b_{n+2}, \ldots]$$

şeklinde gösterilir.

Teorem 2.4. (2.18) biçimindeki bir sürekli kesrin n inci yaklaşımının pay ve paydası sırasıyla A_n ve B_n olmak üzere her $n \in \mathbb{N}$ için

$$\frac{A_{n-1}}{B_{n-1}} - \frac{A_n}{B_n} = \frac{(-1)^n}{B_n B_{n-1}} \tag{2.23}$$

eşitliği geçerlidir [3].

İspat.

$$\frac{A_{n-1}}{B_{n-1}} - \frac{A_n}{B_n} = \frac{A_{n-1}B_n - A_n B_{n-1}}{B_n B_{n-1}}$$

olur. (2.22) determinant formülünden

$$\frac{A_{n-1}}{B_{n-1}} - \frac{A_n}{B_n} = \frac{(-1)^n}{B_n B_{n-1}}$$

elde edilir.

Teorem 2.5. Her $n \in \mathbb{N}$ için

$$A_{n-2}B_n - B_{n-2}A_n = (-1)^{n-1} b_n \tag{2.24}$$

eşitliği sağlanır [3].

İspat. (2.18) biçimindeki bir sürekli kesir için (2.21) rekürans denklemleri kullanılarak

$$A_{n-2}B_n = b_n B_{n-1} A_{n-2} + B_{n-2} A_{n-2}$$

ve

$$B_{n-2}A_n = b_n A_{n-1}B_{n-2} + A_{n-2}B_{n-2}$$

olup bu iki eşitlik taraf tarafa çıkarılırsa

$$A_{n-2}B_n - B_{n-2}A_n = b_n(A_{n-2}B_{n-1} - B_{n-2}A_{n-1})$$

elde edilir. (2.22) determinant formülünden

$$A_{n-2}B_n - B_{n-2}A_n = (-1)^{n-1}b_n$$

bulunur.

Sonuç 2.1. $n \geq 2$ olmak üzere her $n \in \mathbb{N}$ için

$$\frac{A_{n-2}}{B_{n-2}} - \frac{A_n}{B_n} = \frac{(-1)^{n-1}b_n}{B_n B_{n-2}} \tag{2.25}$$

olur [3].

Not 2.1. Bu incelemeler sonucunda yaklaşımların dağılımlarına ilişkin önemli bilgiler elde edilebilir. (2.25) eşitliği çift yaklaşımların artan bir dizi, tek yaklaşımların ise azalan bir dizi olduğunu gösterir. (2.23) eşitliği ise her tek yaklaşımın kendinden sonraki çift yaklaşımdan büyük olduğunu gösterir. O halde aşağıdaki teorem ifade edilebilir.

Teorem 2.6. (2.18) biçimindeki bir sürekli kesrin yaklaşımları aşağıdaki özellikleri sağlar:
i) Çift yaklaşımlar artan bir dizi şeklindedir,

$$f_0 < f_2 < f_4 < \dots$$

ii) Tek yaklaşımlar azalan bir dizi şeklindedir,

$$f_1 > f_3 > f_5 > \dots$$

iii) Her tek yaklaşım ardışık çift yaklaşımından büyüktür [3].

Not 2.2. (2.18) biçimindeki bir sürekli kesre karşılık $\{\frac{A_n}{B_n}\}_{n=1}^{\infty}$ yaklaşımlar dizisi vardır. Her yaklaşım bir reel sayıyı temsil eder. Yaklaşımlar dizisinin α gibi bir limiti varsa bu durumda α sayısı, sürekli kesrin değeri olarak göz önüne alınır ve böylece

$$\alpha = b_0 + \underset{n=1}{\overset{\infty}{\mathcal{K}}} \left(\frac{1}{b_n}\right)$$

yazılır. Bu durumda (2.18) biçimindeki sürekli kesir yakınsaktır, denir. Eğer yaklaşımlar dizisinin limiti yoksa (2.18) biçimindeki sürekli kesir ıraksaktır, denir. Yakınsak bir sürekli kesir için Teorem 2.6 ya ek olarak her tek yaklaşımın her çift yaklaşımdan büyük olduğu söylenebilir. Bir α sayısına yakınsayan (2.18) sürekli kesrinin yaklaşımları ile bu kesrin değeri olan α sayısı arasındaki ilişki

$$f_0 < f_2 < f_4 < \ldots < f_{2n} < \ldots < \alpha < \ldots < f_{2n+1} < \ldots < f_5 < f_3 < f_1$$

biçiminde gösterilebilir.

Teorem 2.7. (2.18) biçimindeki bir sonsuz sürekli kesrin değeri $\alpha \in \mathbb{R}$ olsun. Bu durumda her $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ için

$$\left|\alpha - \frac{A_n}{B_n}\right| < \frac{1}{B_n B_{n+1}} \tag{2.26}$$

eşitsizliği sağlanır [3].

İspat. α sayısı (2.18) biçimindeki bir sonsuz sürekli kesrin değeri olduğundan $\frac{A_{n+1}}{B_{n+1}} \neq \alpha$ olur. f_{n+1} yaklaşımı ile f_n yaklaşımlarından biri tek diğeri çift yaklaşım olacağından reel eksende α sayısının zıt taraflarında kalırlar. Bu nedenle

$$\left|\alpha - \frac{A_n}{B_n}\right| < \left|\frac{A_{n+1}}{B_{n+1}} - \frac{A_n}{B_n}\right| \tag{2.27}$$

olur. Burada (2.23) eşitliğinden yararlanılırsa

$$\left|\frac{A_{n+1}}{B_{n+1}} - \frac{A_n}{B_n}\right| = \frac{1}{B_n B_{n+1}} \tag{2.28}$$

elde edilir. (2.27) ve (2.28) birlikte göz önüne alındığnda teoremin ispatı tamamlanır.

Not 2.3. Teorem 2.7 için α sayısı (2.18) biçimindeki bir sonlu sürekli kesrin değeri olarak alınırsa $0 \leq n < k$ koşulunu sağlayan her n tam sayısı için de 2.26 eşitsizliği sağlanır. Burada $\alpha = \frac{A_{k+1}}{B_{k+1}}$ olduğundan $n = k$ olması durumunda eşitsizlik eşitlik halini alır.

Yardımcı Teorem 2.1. Her $n \in \mathbb{N}$ için $0 < b_n < 1$ olacak şekilde b_n reel sayıları göz önüne alınsın. Bu durumda $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ yakınsak ise $\prod\limits_{n=1}^{\infty}(1-b_n)$ yakınsaktır.

İspat. Her $n \in \mathbb{N}$ için b_n reel sayıları $0 < b_n < 1$ koşulunu sağlamak üzere $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ yakınsak olsun. $\prod\limits_{n=1}^{\infty}(1-b_n)$ sonsuz çarpımı A ile gösterilsin. Buradan

$$\ln A = \ln \prod_{n=1}^{\infty}(1-b_n) = \sum_{n=1}^{\infty} \ln(1-b_n)$$

elde edilir. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ serisi yakınsak olduğundan $\lim\limits_{n\to 0} b_n = 0$ olur. O halde

$$\lim_{b_n \to 0} \frac{-(\ln(1-b_n))}{b_n} = 1$$

bulunur. Bu durumda limit yakınsaklık testinden $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ serisi ile $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \ln(1-b_n)$ serisi aynı anda yakınsak veya ıraksak olmak zorundadır. O halde hipotezden $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \ln(1-b_n)$ serisi de yakınsaktır. Böylelikle sonsuz çarpımın da yakınsak olduğu ispatlanmış olur.

Teorem 2.8. (2.18) biçimindeki bir sürekli kesrin yakınsak olması için gerek ve yeter koşul

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n \tag{2.29}$$

serisinin ıraksak olmasıdır [3].

İspat. (2.18) biçimindeki bir sürekli kesrin yakınsak olması için gerek ve yeter koşul tek ve çift yaklaşımlar dizilerinin aynı limite sahip olmasıdır. O halde (2.23) eşitliğinden (2.18) biçimindeki bir sürekli kesrin yakınsak olması için gerek ve yeter koşulun $n \to \infty$ için $B_n B_{n+1} \to \infty$ olmasıdır.

(2.29) serisi yakınsak olsun. Her $n \in \mathbb{N}$ için $b_n > 0$ olduğundan, (2.21) denklemlerinin ikincisinden

$$B_n > B_{n-2} \tag{2.30}$$

yazılır. Diğer yandan herhangi bir n için $B_n > B_{n-1}$ veya $B_{n-1} > B_n$ olacaktır.

$B_n > B_{n-1}$ olması durumunda

$$B_n = b_n B_{n-1} + B_{n-2} < b_n B_n + B_{n-2}$$

olur. (2.29) yakınsak olduğundan $\{b_n\}$ sıfır dizisidir. O halde $b_n < 1$ eşitsizliğini sağlayan n_0 doğal sayısından büyük n değerleri için

$$B_n < \frac{B_{n-2}}{1 - b_n}$$

bulunur.

$B_{n-1} > B_n$ olması durumunda (2.30) eşitsizliğinden $B_{n-1} > B_{n-2}$ bulunur.

$$B_n = b_n B_{n-1} + B_{n-2} < b_n B_{n-1} + B_{n-1} = (b_n + 1) B_{n-1}$$

elde edilir. $b_n < 1$ için

$$1 + b_n < \frac{1}{1 - b_n}$$

eşitsizliği sağlandığından

$$B_n < \frac{B_{n-1}}{1 - b_n}$$

bulunur. O halde her $n \geq n_0$ için

$$B_n < \frac{1}{1 - b_n} B_l \qquad (2.31)$$

olacak biçimde $l \leq n$ doğal sayısı vardır. $l \geq n_0$ ise (2.31) eşitsizliği B_l sayısına da uygulanabilir. Bu şekilde devam edilirse $n > l > \ldots > r > n_0$ ve $s \leq n_0$ doğal sayıları ile

$$B_n < \frac{B_s}{(1 - b_n)(1 - b_l) \ldots (1 - b_r)} \qquad (2.32)$$

elde edilir. Yardımcı Teorem 2.1 den

$$\prod_{n=n_0}^{\infty} (1 - b_n)$$

yakınsaktır. Bu sonsuz çarpımın limiti ι ile gösterilsin.O halde $\iota \in \mathbb{R}^+$ olup

$$(1-b_n)(1-b_l)\ldots(1-b_r) \geq \prod_{n=n_0}^{n}(1-b_n) \geq \iota$$

olur. $\max\{B_0, B_1, \ldots, B_{n_0-1}, B_{n_0}\} = Q$ olarak adlandırılırsa (2.32) eşitsizliği

$$B_n < \frac{Q}{\iota}$$

olur. Aynı eşitsizlik $n+1$ için de sağlanacağından $B_n B_{n+1} < \frac{Q^2}{\iota^2}$ bulunur.

$$\lim_{n\to\infty} B_n B_{n+1} \leq \frac{Q^2}{\iota^2}$$

elde edilir. O halde (2.18) biçimindeki sürekli kesir ıraksak olur.

(2.29) serisi ıraksak olsun. (2.21) denklemlerinin ikincisinden her $k \in \mathbb{N}$ için $B_k > B_{k-2}$ olduğundan

$$\min\{B_0, B_1\} = c$$

olarak adlandırılırsa

$$B_k \geq c \tag{2.33}$$

olur. Buradan

$$B_k = b_k B_{k-1} + B_{k-2} \geq c b_k + B_{k-2}$$

bulunur.

$$k = 2 \text{ için } B_2 \geq B_0 + cb_2$$
$$k = 4 \text{ için } B_4 \geq B_2 + cb_4$$
$$\vdots$$
$$2k \text{ için } B_{2k} \geq B_{2k-2} + cb_{2k}$$

eşitlikleri taraf tarafa toplanırsa

$$B_{2k} \geq B_0 + c\sum_{n=1}^{k} b_{2n} \tag{2.34}$$

elde edilir. Benzer biçimde

$$k = 3 \text{ için } B_3 \geq B_1 + cb_3$$
$$k = 5 \text{ için } B_5 \geq B_3 + cb_5$$
$$\vdots$$
$$2k + 1 \text{ için } B_{2k+1} \geq B_{2k-1} + cb_{2k+1}$$

eşitlikleri taraf tarafa toplanırsa

$$B_{2k+1} \geq B_1 + c \sum_{n=1}^{k} b_{2n+1} \tag{2.35}$$

elde edilir. (2.34) ve (2.35) eşitsizliklerinden

$$B_{2k+1} + B_{2k} \geq B_0 + B_1 + c \sum_{n=1}^{2k+1} b_n$$

olup her k doğal sayısı için

$$B_k + B_{k-1} > c \sum_{n=1}^{k} b_n$$

bulunur. O halde B_k ve B_{k-1} sayılarından biri $\frac{c}{2} \sum\limits_{n=1}^{k} b_n$ sayısından büyüktür. (2.33) eşitsizliğinden de diğer sayı c sayısından küçük olmayacağından

$$B_k B_{k-1} > \frac{c^2}{2} \sum_{n=1}^{k} b_n$$

bulunur. Bu durumda (2.29) serisi ıraksak olduğundan $B_k B_{k+1}$ ifadesi de ıraksak olur. Sonuç olarak (2.18) sürekli kesri yakınsaktır.

Tanım 2.8. $b_0 \in \mathbb{Z}$ ve her i doğal sayısı için $b_i \in \mathbb{Z}^+$ olmak üzere

$$b_0 + \cfrac{1}{b_1 + \cfrac{1}{b_2 + \cfrac{1}{b_3 + \cfrac{1}{\ddots}}}} \tag{2.36}$$

biçimindeki sürekli kesirlere basit sürekli kesir denir.

Tanım 2.9. Herhangi bir α reel sayısı için

$$\alpha_0 = \alpha, \tag{2.37}$$

$$\alpha_n = \frac{1}{\text{Frac}(\alpha_{n-1})}, \quad n \in \mathbb{N} \tag{2.38}$$

$$b_n = \lfloor \alpha_n \rfloor, \quad n \in \mathbb{N} \cup \{0\} \tag{2.39}$$

olmak üzere

$$b_0 + \cfrac{1}{b_1 + \cfrac{1}{b_2 + \cfrac{1}{b_3 + \cfrac{1}{\ddots}}}} \tag{2.40}$$

biçiminde tanımlanan sürekli kesire α reel sayısının basit sürekli kesir açılımı denir. Burada $\lfloor \alpha_n \rfloor$, α_n sayısının tam kısmına, Frac(α_{n-1}) ise α_{n-1} sayısının kesir kısmına karşılık gelir. Diğer bir deyişle $\alpha_{n-1} = \lfloor \alpha_{n-1} \rfloor + \text{Frac}(\alpha_{n-1})$ dir. (2.40) kesri

$$b_0 + \underset{n=1}{\overset{\infty}{\mathcal{K}}} \left(\frac{1}{b_n} \right) \tag{2.41}$$

şeklinde gösterilir. Uygun bir n için Frac$(\alpha_{n-1}) = 0$ ise (2.40) basit sürekli kesri sonludur ve bu kesir b_{n-1} ile biter ve

$$b_0 + \underset{i=1}{\overset{n-1}{\mathcal{K}}} \left(\frac{1}{b_i} \right) \tag{2.42}$$

olarak gösterilebilir.

Not 2.4. α $(\neq 1)$ reel sayısının basit sürekli kesir açılımı $[b_0; b_1, b_2, \ldots, b_{n-1}]$ sonlu sürekli kesri olsun. $[b_0; b_1, b_2, \ldots, b_{n-1} - 1, 1]$ sonlu sürekli kesrinin değeri de α sayısına karşılık gelir. Bu durumda α sayısına karşılık gelen iki farklı sürekli kesir gösterilişi bulunduğu görülse de Tanım 2.9 dan b_{n-1} değeri daima 1 den farklı olduğundan, bu çalışma boyunca $\alpha = [b_0; b_1, b_2, \ldots, b_{n-1}]$ alınacaktır ($\alpha = 1$ olması durumunda $b_{n-1} = 1$ olup $\alpha = [1]$ şeklinde yazılır).

Örnek 2.4. $e = 2,71828181828459\ldots$(Euler sabiti) ele alınsın. (2.37) eşitliğinden

$$\alpha = \alpha_0 = e \text{ ve } b_0 = \lfloor e \rfloor = 2$$

olur. (2.38) eşitliğinden

$$\alpha_1 = \frac{1}{\text{Frac}(e)} = \frac{1}{0,718281828459\ldots} = 1,392211191\ldots$$

eşitliğinden $b_1 = \lfloor \alpha_1 \rfloor = 1$ bulunur.

$$\alpha_2 = \frac{1}{\text{Frac}(\alpha_1)} = 2,549646778\ldots, \quad b_2 = \lfloor \alpha_2 \rfloor = 2$$

olur. $n = 3, 4, 5$ için de b_n sayıları aşağıdaki hesaplar yardımıyla

$$\alpha_3 = \frac{1}{\text{Frac}(\alpha_2)} = 1,819350244\ldots, \quad b_3 = \lfloor \alpha_3 \rfloor = 1$$

$$\alpha_4 = \frac{1}{\text{Frac}(\alpha_3)} = 1,220479286\ldots, \quad b_4 = \lfloor \alpha_4 \rfloor = 1$$

$$\alpha_5 = \frac{1}{\text{Frac}(\alpha_4)} = 4,535573476\ldots, \quad b_5 = \lfloor \alpha_5 \rfloor = 4$$

şeklinde elde edilir. Bu şekilde devam edilerek

$$e = 2 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{4 + \cfrac{1}{\ddots}}}}}}$$

bulunur. O halde Örnek 2.1 de göz önüne alınan sürekli kesir e sayısının basit sürekli kesir açılımıdır.

Örnek 2.5. $\frac{\sqrt{5}-1}{2} = 0,618033989\ldots$ (Altın Oran-1) reel sayısı ele alınsın. (2.37) eşitliğinden

$$\alpha = \alpha_0 = \frac{\sqrt{5}-1}{2} \text{ ve } b_0 = \lfloor \frac{\sqrt{5}-1}{2} \rfloor = 0$$

olur. (2.38) eşitliğinden

$$\alpha_1 = \frac{1}{\text{Frac}(\alpha_0)} = \frac{1}{\frac{\sqrt{5}-1}{2} - 0} = \frac{\sqrt{5}+1}{2} = 1,618033989\ldots$$

ve $b_1 = \lfloor \alpha_1 \rfloor = 1$ olur.

$$\alpha_2 = \frac{1}{\text{Frac}(\alpha_1)} = \frac{1}{\frac{\sqrt{5}+1}{2} - 1} = \frac{\sqrt{5}+1}{2} = 1,618033989\ldots$$

ve $b_2 = \lfloor \alpha_2 \rfloor = 1$ biçiminde devam edilirse

$$\frac{\sqrt{5}-1}{2} = \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{\ddots}}}}} = [0; 1, 1, 1, \ldots]$$

olduğu görülür. Bu durumda altın oranın basit sürekli kesir açılımı

$$\frac{\sqrt{5}+1}{2} = \frac{\sqrt{5}-1}{2} + 1 = 1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{\ddots}}}}} = [1; 1, 1, 1, \ldots]$$

olarak elde edilir.

Örnek 2.6. $\frac{17}{3}$ rasyonel sayısının basit sürekli kesir açılımı aşağıdaki incelemeler yardımıyla

$$\alpha = \alpha_0 = \frac{17}{3} \quad \text{ve} \quad b_0 = \lfloor \frac{17}{3} \rfloor = 5$$

$$\alpha_1 = \frac{1}{\text{Frac}(\alpha_0)} = \frac{1}{\frac{2}{3}} \quad \text{ve} \quad b_1 = \lfloor \alpha_1 \rfloor = 1$$

$$\alpha_2 = \frac{1}{\text{Frac}(\alpha_1)} = \frac{1}{\frac{1}{2}} \quad \text{ve} \quad b_2 = \lfloor \alpha_2 \rfloor = 2$$

olduğundan $\frac{17}{3} = [5; 1, 2]$ biçiminde bulunur. Burada $\text{Frac}(\alpha_2) = 0$ olduğundan $\frac{17}{3}$ rasyonel sayısının basit sürekli kesir açılımı b_2 ile biter.

Bir rasyonel sayının basit sürekli kesir açılımı Euclid algoritması yardımı ile de bulunabilir. Euclid algoritmasındaki ardışık bölümler, rasyonel sayının basit sürekli kesir açılımındaki b_i sayılarına denk gelir. Örnek 2.6 daki $\frac{17}{3}$ rasyonel sayısının sürekli kesir açılımı bu yöntem ile de bulunabilir:

$$\begin{aligned} 17 &= \underline{5}.3+2, \qquad && b_0 = 5 \\ 3 &= \underline{1}.2+1, && b_1 = 1 \\ 2 &= \underline{2}.1, && b_2 = 2 \end{aligned}$$

O halde $\frac{17}{3} = [5;1,2]$ elde edilir.

Not 2.5. Bundan sonra, özel olarak basit sürekli kesirler incelenecektir. Bu koşulları sağlayan sürekli kesirler için (2.29) serisi ıraksak olacağından (2.40) sürekli kesri yakınsaktır. Bu durumda (2.40) sürekli kesrinin değeri bir α reel sayısına karşılık gelir. Ayrıca basit sürekli kesirlerin n inci yaklaşımının pay ve paydası olan A_n ve B_n sayılarının aralarında asal olduğu determinant formülü ile bulunur.

Tanım 2.10. $n \in \mathbb{N}$ için $b_n \in \mathbb{Z}^+$ olmak üzere $b_n > 1$ olması durumunda

$$\frac{iA_{n-1}+A_{n-2}}{iB_{n-1}+B_{n-2}} \quad (i = 1, 2, \ldots, b_n - 1)$$

kesirlerine ortalama kesirler denir. Başka bir deyişle ortalama kesirler

$$\frac{A_{n-2}}{B_{n-2}}, \frac{A_{n-1}+A_{n-2}}{B_{n-1}+B_{n-2}}, \frac{2A_{n-1}+A_{n-2}}{2B_{n-1}+B_{n-2}}, \ldots, \frac{b_nA_{n-1}+A_{n-2}}{b_nB_{n-1}+B_{n-2}} = \frac{A_n}{B_n} \tag{2.43}$$

dizilişinde f_{n-2} ile f_n yaklaşımları arasında kalan kesirlerdir. n çift sayı ise (2.43) artan bir dizi, n tek sayı ise (2.43) azalan bir dizi oluşturur.

Örnek 2.7. Örnek 2.1 deki yaklaşımlar göz önüne alınarak f_0 ve f_2 arasındaki ortalama kesirler aşağıdaki işlemler yardımıyla bulunur:

$$f_0 = \frac{2}{1} = \frac{A_0}{B_0}, \quad f_1 = \frac{3}{1} = \frac{A_1}{B_1}, \quad b_2 = 2$$

olup

$$f_0 = \frac{A_0}{B_0}, \quad \frac{A_1+A_0}{B_1+B_0} = \frac{3+2}{1+1} = \frac{5}{2}, \quad \frac{2A_1+A_0}{2B_1+B_0} = \frac{2.3+2}{2.1+1} = \frac{8}{3} = f_2$$

elde edilir. O halde $\frac{5}{2}$ sayısı (2.1) sürekli kesri için bir ortalama kesirdir. $n = 2$ olduğundan $f_0 < \frac{5}{2} < f_2$ olduğu görülür. Dolayısıyla $\frac{5}{2}$ ortalama kesri, e sayısına f_0 yaklaşımından daha yakındır.

Benzer biçimde f_3 ve f_5 arasındaki ortalama kesirler de

$$f_3 = \frac{11}{4}, \quad f_4 = \frac{19}{7}, \quad f_5 = \frac{87}{32}, \quad b_5 = 4$$

olup

$$f_3 = \frac{A_3}{B_3} = \frac{11}{4}, \quad \frac{A_4 + A_3}{B_4 + B_3}, \quad \frac{2A_4 + A_3}{2B_4 + B_3}, \quad \frac{3A_4 + A_3}{3B_4 + B_3}, \quad \frac{4A_4 + A_3}{4B_4 + B_3} = \frac{A_5}{B_5} = \frac{87}{32} = f_5$$

elde edilir. Bu durumda ortalama kesirler

$$f_3, \frac{30}{11}, \frac{49}{18}, \frac{68}{25}, f_5$$

biçiminde bulunur. O halde $\frac{30}{11}, \frac{49}{18}, \frac{68}{25}, \frac{87}{32}$ sayıları (2.1) sürekli kesri için birer ortalama kesirdir. $n = 5$ olduğundan

$$f_3 > \frac{30}{11} > \frac{49}{18} > \frac{68}{25} > f_5$$

olduğu görülür. Dolayısıyla bu dizilişteki her ortalama kesir e sayısına bir önceki kesirden daha yakındır.

Teorem 2.9. Her $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ için

$$\left| \alpha - \frac{A_n}{B_n} \right| > \frac{1}{B_n(B_n + B_{n+1})} \tag{2.44}$$

eşitsizliği geçerlidir [3].

İspat. $\frac{A_n + A_{n+1}}{B_n + B_{n+1}}$ kesri $\frac{A_n}{B_n}$ ile $\frac{A_{n+1}}{B_{n+1}}$ kesirlerinin ortanca değeri olduğundan $\frac{A_n}{B_n}$ ve $\frac{A_{n+1}}{B_{n+1}}$ kesirleri arasındadır. Diğer yandan $\frac{A_n + A_{n+1}}{B_n + B_{n+1}}$ bir ortalama kesir olduğundan α sayısına göre f_n veya f_{n+1} yaklaşımlarından sadece biri ile aynı tarafta bulunur. Bu nedenle, (2.22) determinant formülü de kullanılarak

$$\left| \alpha - \frac{A_n}{B_n} \right| > \left| \frac{A_n + A_{n+1}}{B_n + B_{n+1}} - \frac{A_n}{B_n} \right| = \frac{1}{B_n(B_n + B_{n+1})}$$

elde edilir.

Teorem 2.10. $k, n \in \mathbb{N}$ ve $n \leq k$ olmak üzere

$$[b_0; b_1, b_2, \ldots, b_k] = \frac{A_{n-1}r_n + A_{n-2}}{B_{n-1}r_n + B_{n-2}} \tag{2.45}$$

eşitliği gerçeklenir [3].

İspat. $0 < n \leq k$ için

$$[b_0; b_1, b_2, \ldots, b_k] = [b_0; b_1, b_2, \ldots, b_{n-1}, r_n]$$

olur. Eşitliğin sağ tarafındaki sürekli kesrin $n-1$ inci yaklaşımı $\frac{A_{n-1}}{B_{n-1}}$ kesridir. n inci yaklaşımı ise $\frac{A_n}{B_n}$ kesri olup bu değer sürekli kesrin değerine eşit olur. Rekürans formüllerinin yardımıyla $A_n = A_{n-1}r_n + A_{n-2}$ ve $B_n = B_{n-1}r_n + B_{n-2}$ olacağından

$$[b_0; b_1, b_2, \ldots, b_k] = \frac{A_n}{B_n} = \frac{A_{n-1}r_n + A_{n-2}}{B_{n-1}r_n + B_{n-2}}$$

bulunur.

Not 2.6. Bu teoremde değeri α olan bir sonsuz sürekli kesir alınması halinde de her n doğal sayısı için

$$\alpha = [b_0; b_1, b_2, \ldots] = \frac{A_{n-1}r_n + A_{n-2}}{B_{n-1}r_n + B_{n-2}} \tag{2.46}$$

eşitliği sağlanır.

Teorem 2.11. Her α reel sayısına karşılık, değeri bu sayı olan tek bir basit sürekli kesir vardır. α sayısının rasyonel olması için gerek ve yeter koşul basit sürekli kesir açılımının sonlu olmasıdır. α sayısının irrasyonel olması için gerek ve yeter koşul basit sürekli kesir açılımının sonsuz olmasıdır [3].

İspat. $\lfloor \alpha \rfloor = b_0$ olsun. $\alpha = b_0$ olması durumunda α bir rasyonel sayı olup $\alpha = [b_0]$ biçiminde yazılacağından α sayısının basit sürekli kesir açılımı sonlu olur. O halde teoremin ifadesi sağlanır. $b_0 < \alpha < b_1$ ise Tanım 2.9 dan α reel sayısına karşılık bir basit sürekli kesir vardır. Üstelik bu gösteriliş tektir çünkü α reel sayısına karşılık gelen iki sürekli kesir yazılışı

$$\alpha = b_0 + \cfrac{1}{b_1 + \cfrac{1}{b_2 + \cfrac{1}{b_3 + \cfrac{1}{\ddots}}}} = b_0' + \cfrac{1}{b_1' + \cfrac{1}{b_2' + \cfrac{1}{b_3' + \cfrac{1}{\ddots}}}}$$

şeklinde olsa tanım gereği $\lfloor\alpha\rfloor = b_0$ ve $\lfloor\alpha\rfloor = b_0^{'}$ olacağından $b_0 = b_0^{'}$ elde edilir. Her $k = 0, 1, 2, \ldots, n$ için $b_k = b_k^{'}$ kabul edilsin. İndüksiyon kabulünden

$$A_k = A_k^{'} \quad \text{ve} \quad B_k = B_k^{'} \tag{2.47}$$

olur. (2.46) eşitliği kullanılırsa

$$\alpha = \frac{A_n r_{n+1} + A_{n-1}}{B_n r_{n+1} + B_{n-1}}$$

ve

$$\alpha = \frac{A_n^{'} r_{n+1}^{'} + A_{n-1}^{'}}{B_n^{'} r_{n+1}^{'} + B_{n-1}^{'}}$$

olup

$$\frac{A_n r_{n+1} + A_{n-1}}{B_n r_{n+1} + B_{n-1}} = \frac{A_n^{'} r_{n+1}^{'} + A_{n-1}^{'}}{B_n^{'} r_{n+1}^{'} + B_{n-1}^{'}} \tag{2.48}$$

bulunur. (2.48) eşitliğinde (2.47) eşitlikleri yazılırsa

$$\frac{A_n r_{n+1} + A_{n-1}}{B_n r_{n+1} + B_{n-1}} = \frac{A_n r_{n+1}^{'} + A_{n-1}}{B_n r_{n+1}^{'} + B_{n-1}}$$

elde edilir. O halde $r_{n+1} = r_{n+1}^{'}$ bulunur. Diğer yandan $\lfloor r_{n+1}\rfloor = b_{n+1}$ ve $\lfloor r_{n+1}^{'}\rfloor = b_{n+1}^{'}$ olacağından $b_{n+1} = b_{n+1}^{'}$ bulunur. Sonuç olarak, aynı değere eşit olan basit sürekli kesir tek türlü belirlidir.

Teoremin diğer önermeleri iki durum altında incelenebilir. α rasyonel sayı olsun. Bu durumda bütün r_n kalan kısımları rasyoneldir. O halde $\frac{a}{b} = r_n$ olacak şekilde $a \in \mathbb{Z}, b \in \mathbb{Z}^+$ vardır.

$$r_n - b_n = \frac{a}{b} - b_n = \frac{a - b_n b}{b}$$

olup $a - b_n b = c$ olarak adlandırılırsa $\frac{c}{b} = r_n - b_n < 1$ elde edilir. $c = 0$ olması durumunda $r_n - b_n = 0$ olup $r_n = b_n$ olacağından $r_n \in \mathbb{Z}$ olur. O halde sürekli kesir sonludur ve böylece ispat biter. $c \neq 0$ olması durumunda $\frac{1}{r_{n+1}} = \frac{c}{b}$ olduğundan $r_{n+1} = \frac{b}{c} > 1$ olur. r_{n+1} kalan kısmının paydası r_n kalan kısmının paydasından daha küçüktür. Dolayısıyla

$r_1, r_2, \ldots$ dizisinde belli bir adımdan sonra $r_n = b_n$ tamsayısına ulaşılır. Bu durumda

$$\alpha = b_0 + \underset{n=1}{\overset{k}{\mathcal{K}}} \left(\frac{1}{b_n}\right)$$

olup basit sonlu sürekli kesre ulaşılır.

α irrasyonel sayı olsun. Bu durumda bütün r_n kalan kısımları irrasyoneldir. A_k ve B_k aralarında asal ve $B_k > 0$ olmak üzere

$$b_0 + \underset{n=1}{\overset{k}{\mathcal{K}}} \left(\frac{1}{b_n}\right) = \frac{A_k}{B_k}$$

olsun.

$$\alpha = \frac{A_{n-1}r_n + A_{n-2}}{B_{n-1}r_n + B_{n-2}} \tag{2.49}$$

ve

$$\frac{A_n}{B_n} = \frac{A_{n-1}b_n + A_{n-2}}{B_{n-1}b_n + B_{n-2}} \tag{2.50}$$

olur. (2.49) ve (2.50) eşitlikleri taraf tarafa çıkarılıp düzenlenirse

$$\alpha - \frac{A_n}{B_n} = \frac{(A_{n-1}B_{n-2} - A_{n-2}B_{n-1})(r_n - b_n)}{(B_{n-1}r_n + B_{n-2})(B_{n-1}a_n + B_{n-2})} \tag{2.51}$$

elde edilir. (2.51) eşitliği yardımıyla

$$\left|\alpha - \frac{A_n}{B_n}\right| < \frac{1}{(B_{n-1}r_n + B_{n-2})(B_{n-1}b_n + B_{n-2})} < \frac{1}{B_n^2}$$

olur. $n \to \infty$ için limit alınırsa $\frac{A_n}{B_n}$ sayısı α sayısına yakınsar. O halde

$$b_0 + \underset{n=1}{\overset{\infty}{\mathcal{K}}} \left(\frac{1}{b_n}\right)$$

sonsuz sürekli kesri α değerine karşılık gelir.

2.1.3. Periyodik Basit Sürekli Kesirler

Periyodik sürekli kesirler ve kuadratik irrasyoneller için Kendirli[5], Kumar[6] ve Çallıalp[7] ' in çalışmalarına bakılabilir.

Tanım 2.11. α irrasyonel sayısı, $a, b, c \in \mathbb{Q}$ ve $a \neq 0$ olmak üzere

$$ax^2 + bx + c$$

biçimindeki ikinci dereceden bir denklemin kökü oluyorsa α sayısına kuadratik irrasyonel denir.

Teorem 2.12. Bir α reel sayısının kuadratik irrasyonel olması için gerek ve yeter koşul $d > 0$ tam kare olmamak üzere

$$\alpha = \frac{U_0 + \sqrt{d}}{V_0}, \quad V_0 \neq 0$$

eşitliğini sağlayan $V_0 | d - U_0^2$ olacak biçimde U_0, V_0, d tam sayılarının var olmasıdır [5].

İspat. α reel sayısı bir kuadratik irrasyonel olsun. α sayısını kök kabul eden ikinci dereceden rasyonel katsayılı denklem $ax^2 + bx + c = 0$ olsun.

$$a = \frac{e}{f}, \quad b = \frac{g}{h}, \quad c = \frac{j}{k}, \ f \neq 0, \ h \neq 0, \ k \neq 0$$

olacak biçimde e, f, g, h, j, k tam sayıları vardır. $ax^2 + bx + c = 0$ denklemi fhk tam sayısı ile çarpılırsa

$$ehkx^2 + gfkx + fhj = 0$$

tam katsayılı denklemi elde edilir. O halde α sayısı ikinci dereceden tam katsayılı bir denklemin kökü olarak da düşünülebilir. Bu denklemin diskriminantı Δ olmak üzere kökleri

$$\alpha = \frac{-gfk + \sqrt{\Delta}}{2ehk} \quad \text{ise } d = \Delta, \ U_0 = -gfk, \ V_0 = 2ehk$$

ve

$$\alpha = \frac{-gfk - \sqrt{\Delta}}{2ehk} \quad \text{ise } d = \Delta, \ U_0 = gfk, \ V_0 = -2ehk$$

şeklinde yazılabilir. O halde ikinci dereceden tam katsayılı denklemin bir kökü

$$\alpha = \frac{U_0 + \sqrt{d}}{V_0}, \quad V_0 \neq 0$$

şeklindedir, burada U_0, V_0, d tam sayılar olup d bir tam kare değildir (d tam kare olsa α sayısı rasyonel olurdu). Üstelik

$$\frac{d - U_0^2}{V_0} = \frac{(gfk)^2 - 4eh^2 fjk - (\mp gfk)^2}{\pm 2ehk} = \pm 2fhj$$

olduğundan $V_0 | d - U_0^2$ elde edilir.

U_0, V_0, d birer tam sayı ve d tam kareden farklı olmak üzere $\alpha = \frac{U_0+\sqrt{d}}{V_0}$ $(V_0 \neq 0)$ biçimindeki reel sayı bir irrasyonel sayı olup

$$x^2 - \frac{2U_0}{V_0}x + \frac{U_0^2 - d}{V_0^2} = 0$$

denkleminin bir kökü olduğundan kuadratiktir.

Yardımcı Teorem 2.2. α bir kuadratik irrasyonel olsun. Bu durumda $s \neq 0$ olmak üzere s, t rasyonel sayıları ile oluşturulan $\beta = s\alpha + t$ sayısı ve $AD - BC \neq 0$ koşulunu sağlayan A, B, C, D tam sayıları ile oluşturulan $\gamma = \frac{A\alpha+B}{C\alpha+D}$ sayısı kuadratik irrasyoneldir.

İspat. α kuadratik irrasyonel sayısını kök kabul eden ikinci dereceden denklem $ax^2 + bx + c = 0$ olsun. $\beta = s\alpha + t$ irrasyonel sayısı yardımıyla $\alpha = \frac{\beta - t}{s}$ olarak da yazılabilir. O halde β sayısı

$$a\left(\frac{x-t}{s}\right)^2 + b\left(\frac{x-t}{s}\right) + c = 0$$

denkleminin kökü olduğundan kuadratiktir.

$\gamma = \frac{A\alpha+B}{C\alpha+D}$ sayısı için $AD - BC = 0$ olsaydı γ rasyonel sayı olurdu. $AD - BC \neq 0$ olsun. Bu durumda

$$\overline{\alpha}\alpha = \frac{c}{a} \quad \text{ve} \quad \overline{\alpha} + \alpha = \frac{-b}{a}$$

eşitlikleri kullanılarak

$$\gamma = \frac{A\alpha+B}{C\alpha+D} = \frac{(A\alpha+B)(C\overline{\alpha}+D)}{(C\alpha+D)(C\overline{\alpha}+D)}$$

$$= \frac{a(AD-BC)\alpha+aBD-bBC+cAC}{aD^2-bCD+cC^2}$$

$$= \frac{a(AD-BC)}{aD^2-bCD+cC^2}\alpha + \frac{aBD-bBC+cAC}{aD^2-bCD+cC^2}$$

bulunur. O halde $\frac{a(AD-BC)}{aD^2-bCD+cC^2} \neq 0$ olduğundan γ sayısı kuadratik irrasyoneldir.

Yardımcı Teorem 2.3. $\alpha = \alpha_0 = \frac{U_0+\sqrt{d}}{V_0}$ kuadratik irrasyonel olsun. $i = 0, 1, 2, \ldots$ için

$$b_i = \lfloor \alpha_i \rfloor, \quad U_{i+1} = b_i V_i - U_i, \quad V_{i+1} = \frac{d - U_{i+1}^2}{V_i}$$

olacak biçimde

$$\alpha_i = \frac{U_i + \sqrt{d}}{V_i}$$

sayıları oluşturulsun. Bu durumda $i = 0, 1, 2, \ldots$ için U_i, V_i birer tam sayı, $V_i \neq 0,\ V_i | d - U_i^2$ olup

$$\alpha = [b_0; b_1, b_2, \ldots]$$

biçiminde yazılır [5].

İspat. Teoremin ilk kısmının ispatı i üzerinden indüksiyonla kolayca elde edilir. $i = 0$ için Teorem 2.12 den $\alpha = \frac{U_0+\sqrt{d}}{V_0}$ şeklinde yazılır ve $U_0, V_0 \in \mathbb{Z},\ V_0 \neq 0,\ V_0 | d - U_0^2$ sağlanır. $U_{i+1} = b_i V_i - U_i$ olduğundan U_{i+1} tam sayıdır.

$$V_{i+1} = \frac{d - U_{i+1}^2}{V_i} = \frac{d - (b_i V_i - U_i)^2}{V_i} = \frac{d - U_i^2}{V_i} + (-b_i^2 V_i + 2 b_i U_i) \tag{2.52}$$

olup indüksiyon hipotezi gereği $V_i | d - U_i^2$ olduğundan V_{i+1} bir tam sayıdır. (2.52) eşitliğinden V_i tam sayısı $V_i = \frac{(d-U_{i+1}^2)}{V_{i+1}}$ biçiminde yazılabileceğinden

$$V_{i+1} | d - U_{i+1}^2$$

olmak zorundadır. Burada d bir tam kare olmadığından $d \neq U_{i+1}^2$ olup $V_{i+1} \neq 0$ olur. Bu durumda

$$\begin{aligned} \alpha_i - b_i = \tfrac{U_i+\sqrt{d}}{V_i} - b_i &= \tfrac{\sqrt{d}-(-U_i+b_iV_i)}{V_i} \\ = \tfrac{\sqrt{d}-U_{i+1}}{V_i} &= \tfrac{d-U_{i+1}^2}{V_i(\sqrt{d}+U_{i+1})} \\ = \tfrac{V_{i+1}}{\sqrt{d}+U_{i+1}} &= \tfrac{1}{\alpha_{i+1}} \end{aligned}$$

elde edilir. O halde $\alpha_i = b_i + \frac{1}{\alpha_{i+1}}$ olup $\alpha = [b_0; b_1, b_2, \ldots]$ bulunur.

Tanım 2.12. $[b_0; b_1, b_2, \ldots]$ biçimindeki basit sonsuz sürekli kesri ele alınsın. n_o ve T, $T \geq 1$ ve $n_0 > 0$ koşullarını sağlayan iki tamsayı olsun. Her $n \geq n_0$ doğal sayısı için $b_n = b_{n+T}$ oluyorsa $[b_0; b_1, b_2, \ldots]$ sürekli kesrine periyodik basit sürekli kesir denir ve

$$[b_0; b_1, \ldots, b_{n_0-1}, \overline{b_{n_0}, b_{n_0+1}, \ldots, b_{n_0+T-1}}]$$

biçiminde gösterilir. $n_0 = 0$ olması durumunda $[b_0; b_1, b_2, \ldots]$ sürekli kesrine tam periyodik basit sürekli kesir denir ve

$$[\overline{b_0; b_1, \ldots, b_{T-1}}]$$

biçiminde gösterilir. Periyodik basit sürekli kesrin bütün kalan kısımları da periyodiktir, yani her $n \geq n_0$ için $r_n = r_{n+T}$ olur.

Örnek 2.8. Örnek 2.5 te elde edilen $[0; 1, 1, 1, \ldots]$ sürekli kesri bir periyodik basit sürekli kesirdir ve $[0, \overline{1}]$ şeklinde de ifade edilir. Aynı örnekte elde edilen $[1; 1, 1, 1, \ldots]$ sürekli kesri ise tam periyodik basit sürekli kesirdir ve $[\overline{1}]$ şeklinde ifade edilir.

Teorem 2.13. Bir α reel sayısının kuadratik irrasyonel olması için gerek ve yeter koşul α sayısının basit sürekli kesir açılımının periyodik olmasıdır [6].

İspat. α sayısının basit sürekli kesir açılımı periyodik ise

$$\alpha = [b_0; b_1, \ldots, b_{n_0-1}, \overline{b_{n_0}, b_{n_0+1}, \ldots, b_{n_0+T-1}}]$$

biçiminde yazılır ve

$$r_{n_0} = [\overline{b_{n_0}, b_{n_0+1}, \ldots, b_{n_0+T-1}}] = [b_{n_0}, b_{n_0+1}, \ldots, b_{n_0+T-1}, r_{n_0}]$$

olur. Bu durumda $A_n^{'}$ ve $B_n^{'}$, r_{n_0} sayısının n inci yaklaşımlarının pay ve paydası olmak üzere (2.46) eşitliğinden

$$r_{n_0} = \frac{A'_{n_0+T-1} r_{n_0} + A'_{n_0+T-2}}{B'_{n_0+T-1} r_{n_0} + B'_{n_0+T-2}}$$

elde edilir. O halde r_{n_0} irrasyonel sayısı

$$B'_{n_0+T-1} x^2 + (B'_{n_0+T-2} - A'_{n_0+T-1})x + A'_{n_0+T-2} = 0$$

denkleminin bir kökü olur. O halde r_{n_0} kuadratik irrasyoneldir. α için

$$\alpha = [b_0; b_1, b_2, \ldots, b_{n_0-1}, r_{n_0}]$$

olduğu kullanılırsa (2.45) eşitliğinden

$$\alpha = \frac{A_{n_0-1} r_{n_0} + A_{n_0-2}}{B_{n_0-1} r_{n_0} + B_{n_0-2}}$$

elde edilir. r_{n_0} kuadratik irrasyonel ve α irrasyonel sayı olduğundan Yardımcı Teorem 2.2 den α kuadratik irrasyonel olmak zorundadır.

Yardımcı Teorem 2.3 de belirtilen şekilde α kuadratik sayısından elde edilen b_i sayıları ile α sayısı $\alpha = [b_0; b_1, b_2, \ldots, \alpha_i]$ biçiminde yazılabilir. Periyodikliğin gösterilmesi için öncelikle V_i, U_i sayılarının sınırlı olduğu gösterilmelidir. (2.46) eşitliğinden

$$\alpha = \frac{A_{i-1} \alpha_i + A_{i-2}}{B_{i-1} \alpha_i + B_{i-2}} \tag{2.53}$$

elde edilir. (2.53) eşitliğinin her iki tarafının eşleniği alınırsa

$$\overline{\alpha} = \frac{\overline{\alpha_i} A_{i-1} + A_{i-2}}{\overline{\alpha_i} B_{i-1} + B_{i-2}} \tag{2.54}$$

elde edilir. (2.54) eşitliğinden

$$\overline{\alpha_i} = -\frac{B_{i-2}}{B_{i-1}} \left(\frac{\overline{\alpha} - \frac{A_{i-2}}{B_{i-2}}}{\overline{\alpha} - \frac{A_{i-1}}{B_{i-1}}} \right)$$

bulunur. f_n yaklaşımlar dizisinin limiti α olduğundan yeterince büyük i değerleri için $\overline{\alpha_i}$

negatiftir. O halde

$$\alpha_i - \overline{\alpha_i} = \frac{U_i + \sqrt{d}}{V_i} - \frac{U_i - \sqrt{d}}{V_i} = \frac{2\sqrt{d}}{V_i} > 0$$

olacağından V_i pozitif olur. Bu durumda

$$1 \leq V_i \leq V_i V_{i+1} = d - U_{i+1}^2 \leq d$$

olduğundan V_i sınırlıdır ve

$$U_{i+1}^2 < U_{i+1}^2 + V_i V_{i+1} = d$$

olduğundan U_i de sınırlıdır. Sonuç olarak (U_i, V_i) ikilileri sonlu sayıda yazılabilir. O halde uygun i ve $i+k$ için $(U_i, V_i) = (U_{i+k}, V_{i+k})$ gerçeklenecektir. Bu eşitlikler yardımıyla,

$$\alpha_i = \tfrac{U_i+\sqrt{d}}{V_i} = \tfrac{U_{i+k}+\sqrt{d}}{V_{i+k}} = \alpha_{i+k},$$

$$b_i = \lfloor \alpha_i \rfloor = \lfloor \alpha_{i+k} \rfloor = b_{i+k},$$

$$U_{i+1} = b_i V_i - U_i = b_{i+k} V_{i+k} - U_{i+k} = U_{i+k+1},$$

$$V_{i+1} = \tfrac{d-U_{i+1}^2}{V_i} = \tfrac{d-U_{i+k+1}^2}{V_{i+k}} = V_{i+k+1}$$

bulunur. Bu şekilde devam edilirse

$$\alpha = [b_0; b_1, b_2, \ldots, \overline{b_i, b_{i+1}, \ldots, b_{i+k-1}}]$$

elde edilir.

Örnek 2.9. $\sqrt{3}$ kuadratik irrasyonel sayısının basit sürekli kesir açılımı aşağıdaki biçimdedir.

$\sqrt{3} = 1,732050808\ldots$ olup (2.37) eşitliğinden

$$\alpha = \alpha_0 = \sqrt{3}, \qquad b_0 = \lfloor\sqrt{3}\rfloor = 1$$

$$\alpha_1 = \frac{1}{\text{Frac}(\sqrt{3})} = \frac{1}{\sqrt{3}-1} = \frac{\sqrt{3}+1}{2}, \quad b_1 = \lfloor\alpha_1\rfloor = 1$$

$$\alpha_2 = \frac{1}{\text{Frac}(\alpha_1)} = \sqrt{3}+1, \qquad b_2 = \lfloor\alpha_2\rfloor = 2$$

olur. $n = 3, 4$ için de b_n sayıları aşağıdaki hesaplar yardımıyla

$$\alpha_3 = \frac{1}{\text{Frac}(\alpha_2)} = \frac{\sqrt{3}+1}{2}, \quad b_3 = \lfloor\alpha_3\rfloor = 1$$

$$\alpha_4 = \frac{1}{\text{Frac}(\alpha_3)} = \sqrt{3}+1, \quad b_4 = \lfloor\alpha_4\rfloor = 2$$

şeklinde elde edilir. Dolayısıyla,

$$\sqrt{3} = 1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{\ddots}}}}}} = [1; \overline{1,2}]$$

olur.

$[1; \overline{1,2}]$ periyodik sürekli kesrinin değerinin $\sqrt{3}$ olduğu da bulunabilir. $r_1 = [\overline{1,2}]$ ve

$$[1; \overline{1,2}] = 1 + \frac{1}{r_1} \tag{2.55}$$

gerçeklenir.

$$r_1 = [1; 2, \overline{1,2}] = [1; 2, r_1] = 1 + \frac{1}{2 + \frac{1}{r_1}}$$

eşitliğinden $2r_1^2 - 2r_1 - 1 = 0$ elde edilir. Buradan $r_1 = \frac{1+\sqrt{3}}{2}$ olup (2.55) eşitliğinde yazılırsa $[1; \overline{1,2}] = \sqrt{3}$ elde edilir.

2.1.4. Birinci ve İkinci Tür En İyi Yaklaşımlar

Bir irrasyonel sayıyı belirli kesinlikte bir rasyonel sayı ile ifade etmek ya da payı ve paydası büyük olan bir rasyonel sayıyı, pay ve payda değerleri daha küçük olan bir rasyonel sayı ile ifade etmek için sürekli kesir yaklaşımları kullanılır.

Tanım 2.13. α bir reel sayı ve $\frac{a}{b}(a \in \mathbb{Z}, b \in \mathbb{Z}^{+})$ bir rasyonel sayı olsun. $0 < d \leq b$ olacak şekildeki her d tam sayısı ve keyfi c tam sayıları ile oluşturulan $\frac{a}{b}$ kesrinden farklı bütün $\frac{c}{d}$ rasyonel sayıları için

$$\left|\alpha - \frac{c}{d}\right| > \left|\alpha - \frac{a}{b}\right| \tag{2.56}$$

eşitsizliği gerçekleniyorsa $\frac{a}{b}$ kesrine α sayısının bir birinci tür en iyi yaklaşımı denir.

Diğer bir deyişle $\frac{a}{b}$ bir rasyonel sayı olmak üzere bu kesrin paydasına eşit veya daha küçük paydaya sahip olan rasyonel sayılar, α reel sayısına $\frac{a}{b}$ kesrinden daha uzak oluyorsa $\frac{a}{b}$ kesrine α reel sayısının bir birinci tür en iyi yaklaşımı denir.

Teorem 2.14. α reel sayısının her birinci tür en iyi yaklaşımı α sayısına karşılık gelen sürekli kesrin ya uygun bir n için n inci yaklaşımıdır ya da bir ortalama kesridir [3].

İspat. $\frac{a}{b}$ kesri α reel sayısının bir birinci tür en iyi yaklaşımı olsun. $b_0 = \lfloor \alpha \rfloor$ olarak adlandırılırsa

$$b_0 \leq \frac{a}{b} \leq b_0 + 1 \tag{2.57}$$

eşitsizliği geçerlidir çünkü $\frac{a}{b} < b_0$ olsaydı $\frac{b_0}{1}$ kesri α sayısına $\frac{a}{b}$ kesrinden daha yakın olurdu, bu ise $\frac{a}{b}$ kesrinin bir birinci tür en iyi yaklaşım olması ile çelişirdi, $\frac{a}{b} > b_0 + 1$ olsaydı, $b_0 < \alpha < b_0 + 1$ olup $\frac{b_0+1}{1}$ kesri α sayısına $\frac{a}{b}$ kesrinden daha yakın olurdu ve $\frac{a}{b}$ kesrinin bir birinci tür en iyi yaklaşım olması ile çelişirdi.
$\frac{a}{b} = b_0$ ise $\frac{a}{b}$ sıfırıncı yaklaşım olup teoremin iddiası doğru olur.
$\frac{a}{b} = b_0 + 1$ ise

$$\frac{a}{b} = \frac{b_0 + 1}{1} = \frac{b_0 + 1}{1 + 0} = \frac{A_0 + A_{-1}}{B_0 + B_{-1}}$$

olup $\frac{a}{b}$ bir ortalama kesirdir. O halde teoremin iddiası doğru olur.
$b_0 < \frac{a}{b} < b_0 + 1$ ise $\frac{a}{b}$ birinci tür en iyi yaklaşımı α sayısının bir n inci yaklaşımı ya da ortalama kesridir, aksi olsaydı $\frac{a}{b}$ iki ardışık ortalama kesrin arasında kalırdı. Bu durumda

uygun bir n, r ikilisi için

$$\begin{aligned}
\frac{1}{b(B_nr+B_{n-1})} &\leq \left|\frac{a}{b}-\frac{A_nr+A_{n-1}}{B_nr+B_{n-1}}\right| \\
&< \left|\frac{A_n(r+1)+A_{n-1}}{B_n(r+1)+B_{n-1}}-\frac{A_nr+A_{n-1}}{B_nr+B_{n-1}}\right| \qquad (2.58) \\
&= \frac{1}{(B_n(r+1)+B_{n-1})(B_nr+B_{n-1})}
\end{aligned}$$

olup bu eşitsizlikten $b > B_n(r+1)+B_{n-1}$ elde edilirdi. O halde $\frac{A_n(r+1)+A_{n-1}}{B_n(r+1)+B_{n-1}}$ ortalama kesrinin paydası b sayısından daha küçüktür. Her ardışık ortalama kesir, sürekli kesrin değerine kendinden önceki ortalama kesirden daha yakın olduğundan, $\frac{A_n(r+1)+A_{n-1}}{B_n(r+1)+B_{n-1}}$ kesri α sayısına $\frac{a}{b}$ kesrinden daha yakındır. Bu durum $\frac{a}{b}$ kesrinin bir birinci tür en iyi yaklaşım olması ile çelişir.

Not 2.7. Teorem 2.14 ün her durumda geçerliliğini koruyabilmesi için -1 inci yaklaşımın da göz önüne alınması gerekir. Ayrıca her ortalama kesir, bir birinci tür en iyi yaklaşım olmak zorunda değildir. Bu durumlarla ilgili aşağıdaki örnekler incelenebilir.

Örnek 2.10. $\frac{1}{3}$ kesri $\frac{1}{4}$ sayısının bir birinci tür en iyi yaklaşımıdır. Bu durumda -1 inci yaklaşımdan vazgeçilirse, $\frac{1}{4}$ sayısı için $f_0 = \frac{0}{1}$ ve $f_1 = \frac{1}{4}$ olacağından $\frac{1}{3}$ bir n inci yaklaşım ya da ortalama kesir olamaz. f_{-1} yaklaşımının var olduğu kabul edilirse,

$$\frac{0}{1}, \frac{0+1}{1+0} = \frac{1}{1}, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}$$

olduğundan $\frac{1}{3}$ bir ortalama kesir olur.

Örnek 2.11. $\frac{1}{2}$ kesri $\frac{4}{5}$ sayısının bir ortalama kesridir.

$$\frac{4}{5} = \frac{1}{\frac{5}{4}} = \frac{1}{1+\frac{1}{4}}$$

şeklinde yazılır. Burada

$$f_0 = 0,\ f_1 = 1,\ f_2 = \frac{4}{5}$$

olup

$$\frac{0}{1}, \frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{4}{5}$$

olduğundan $\frac{1}{2}$ ortalama kesirdir. Diğer yandan

$$\left|\frac{4}{5}-\frac{1}{1}\right| < \left|\frac{4}{5}-\frac{1}{2}\right|$$

olduğundan $\frac{1}{2}$ bir birinci tür en iyi yaklaşım değildir.

Tanım 2.14. α bir reel sayı ve $\frac{a}{b}(a \in \mathbb{Z}, b \in \mathbb{Z}^+)$ bir rasyonel sayı olsun. $0 < d \leq b$ olacak şekilde her d tam sayısı ve keyfi c tam sayıları ile oluşturulan $\frac{a}{b}$ kesrinden farklı bütün $\frac{c}{d}$ rasyonel sayıları için

$$|d\alpha - c| > |b\alpha - a|$$

oluyorsa $\frac{a}{b}$ kesrine α sayısının bir ikinci tür en iyi yaklaşımı denir.

Teorem 2.15. Her ikinci tür en iyi yaklaşım, bir birinci tür en iyi yaklaşımdır [3].

İspat. $\frac{a}{b}$, α sayısının bir ikinci tür en iyi yaklaşımı olup bir birinci tür en iyi yaklaşımı olmasa, bir $0 < d \leq b$ olacak şekilde bir d tam sayısı ve c tam sayısı ile oluşturulan $\frac{a}{b}$ kesrinden farklı $\frac{c}{d}$ rasyonel sayıları için

$$\left|\alpha - \frac{c}{d}\right| \leq \left|\alpha - \frac{a}{b}\right|$$

olurdu. Buradan

$$d\left|\frac{d\alpha - c}{d}\right| \leq d\left|\frac{b\alpha - a}{b}\right| \leq b\left|\frac{b\alpha - a}{b}\right|$$

olup $|d\alpha - c| \leq |b\alpha - a|$ elde edilirdi ki bu durum $\frac{a}{b}$ sayısının α sayısının bir ikinci tür en iyi yaklaşımı olması ile çelişirdi.

Not 2.8. Her birinci tür en iyi yaklaşım bir ikinci tür en iyi yaklaşım olmak zorunda değildir. Bu durum için aşağıdaki örnek incelenebilir.

Örnek 2.12. $\frac{1}{3}$ kesri $\frac{1}{5}$ sayısının bir birinci tür en iyi yaklaşımıdır. O halde $0 < d \leq b$ olacak şekilde her d tam sayısı ve keyfi c tam sayıları ile oluşturulan $\frac{1}{3}$ kesrinden farklı $\frac{c}{d}$ rasyonel sayıları için

$$\left|\frac{1}{5}-\frac{c}{d}\right| > \left|\frac{1}{5}-\frac{1}{3}\right|$$

olur. Ancak $\frac{1}{3}$ kesri $\frac{1}{5}$ sayısının bir ikinci tür en iyi yaklaşımı olsaydı, $\frac{c}{d} = \frac{0}{1}$ için $1 < 3$ olup

$$\left|1.\frac{1}{5}-0\right| < \left|3.\frac{1}{5}-1\right|$$

çelişkisi elde edilirdi.

Not 2.9. Teorem 2.14 ve Teorem 2.15 yardımıyla her ikinci tür en iyi yaklaşımın ya α reel sayısının n inci yaklaşımı ya da ortalama kesri olduğu söylenilebilir. İkinci tür en iyi yaklaşımlar için daha kesin sonuçlar da geçerlidir.

Teorem 2.16. Bir α reel sayısının her ikinci tür en iyi yaklaşımı α sayısının uygun bir n için bir n inci yaklaşımıdır [3].

İspat. $\frac{a}{b}$ kesri α reel sayısının bir ikinci tür en iyi yaklaşımı olsun. O halde $0 < d \leq b$ olacak şekilde her d tam sayısı ve keyfi c tam sayıları ile oluşturulan $\frac{a}{b}$ kesrinden farklı $\frac{c}{d}$ rasyonel sayıları için $|d\alpha - c| > |b\alpha - a|$ gerçeklenir. Teorem 2.15 ten $\frac{a}{b}$ aynı zamanda α sayısına bir birinci tür en iyi yaklaşım olur ve (2.57) doğru olur. $\frac{a}{b}$ kesri α sayısının bir n inci yaklaşımı olmasa ya uygun bir t doğal sayısı için f_{t-1} ile f_t yaklaşımları arasında kalırdı ya da f_1 yaklaşımından büyük olurdu.

$\frac{a}{b}$ kesrinin f_{t-1} ile f_t yaklaşımları arasında olması durumunda $a, b, A_{t-1}, B_{t-1} \in \mathbb{Z}$ olduğundan $|aB_{t-1} - bA_{t-1}| = 0$ ise $\frac{a}{b} = \frac{A_{t-1}}{B_{t-1}}$ olup $\frac{a}{b} = f_{t-1}$ çelişkişi elde edilirdi, $|aB_{t-1} - bA_{t-1}| = m \geq 1$ ise

$$\left|\frac{a}{b} - \frac{A_{t-1}}{B_{t-1}}\right| = \frac{m}{bB_{t-1}} \geq \frac{1}{bB_{t-1}} \tag{2.59}$$

ve

$$\left|\frac{a}{b} - \frac{A_{t-1}}{B_{t-1}}\right| < \left|\frac{A_t}{B_t} - \frac{A_{t-1}}{B_{t-1}}\right| = \frac{1}{B_t B_{t-1}} \tag{2.60}$$

sağlanır. (2.59) ve (2.60) eşitsizliklerinden

$$\frac{1}{bB_{t-1}} \leq \frac{1}{B_t B_{t-1}}$$

elde edilir. Buradan $B_{t-1} > 0$ olduğundan $b > B_t$ elde edilir. Diğer yandan

$$\left|\alpha - \frac{a}{b}\right| \geq \left|\frac{A_{t+1}}{B_{t+1}} - \frac{a}{b}\right| \geq \frac{1}{bB_{t+1}}$$

ve

$$\left|\alpha - \frac{a}{b}\right| = \frac{|b\alpha - a|}{b} \geq \frac{1}{bB_{t+1}}$$

olduğundan

$$|b\alpha - a| \geq \frac{1}{B_{t+1}} \tag{2.61}$$

elde edilir. Aynı zamanda

$$\left|\alpha - \frac{A_t}{B_t}\right| = \frac{|\alpha B_t - A_t|}{|B_t|} = \frac{|\alpha B_t - A_t|}{B_t}$$

olduğundan Teorem 2.7 kullanılırsa,

$$|\alpha B_t - A_t| < \frac{1}{B_{t+1}} \tag{2.62}$$

olur. (2.61) ve (2.62) eşitsizliklerinden $|\alpha B_t - A_t| < |b\alpha - a|$ elde edilir. Bu durum $\frac{a}{b}$ kesrinin α sayısına bir ikinci tür en iyi yaklaşım olmasıyla çelişirdi.

$\frac{a}{b} > f_1$ olması durumunda,

$$\left|\alpha - \frac{a}{b}\right| > \left|\frac{A_1}{B_1} - \frac{a}{b}\right| \geq \frac{1}{bB_1}$$

olduğundan

$$|b\alpha - a| > \frac{1}{B_1} = \frac{1}{b_1} \tag{2.63}$$

olur. Diğer yandan Teorem 2.7 yardımıyla

$$|\alpha - \frac{b_0}{1}| = |\alpha - b_0| < \frac{1}{b_1} \tag{2.64}$$

olur. (2.63) ve (2.64) eşitsizliklerinden

$$|\alpha - b_0| < |b\alpha - a|$$

elde edilir. Bu durum $\frac{a}{b}$ kesrinin α reel sayısının bir ikinci tür en iyi yaklaşımı olmasıyla çelişirdi.

O halde her ikinci tür en iyi yaklaşımın uygun bir n için bir n inci yaklaşım olduğu elde edilir.

Teorem 2.17. α bir reel sayı ve $\lfloor\alpha\rfloor = b_0$ olmak üzere $\alpha \neq b_0 + \frac{1}{2}$ olacak şekildeki her α reel sayısının her n inci yaklaşımı bir ikinci tür en iyi yaklaşımdır [3].

İspat. $\alpha = b_0 + \frac{1}{2}$ olması durumunda f_0 yaklaşımı olan $\frac{b_0}{1}$ aslında bir ikinci tür en iyi yaklaşım değildir çünkü

$$|\alpha-(b_0+1)|=\frac{1}{2}=|\alpha-b_0|$$

olur, burada $d=1=b$ alınırsa $\frac{b_0+1}{1}$ ile $\frac{b_0}{1}$ kesirlerinin α sayısına olan uzaklıkları eşittir.

α reel sayısının basit sürekli kesir açılımı

$$\alpha=b_0+\underset{n=1}{\overset{\infty}{\mathcal{K}}}\left(\frac{1}{b_n}\right)$$

olup bu sürekli kesrin n inci yaklaşımları ele alınsın. x pozitif bir tam sayı ve $y=1,2,\ldots,B_n$ olmak üzere bütün $|y\alpha-x|$ sayıları ele alınsın. Uygun bir x için $|y\alpha-x|$ değerini en küçük yapan y sayısı y_0 ile gösterilsin (bu koşulu sağlayan y değerlerinin birden fazla olması durumunda bu y değerlerinin en küçüğü y_0 olarak alınır). $|y_0\alpha-x|$ değerini en küçük yapan x sayısı da x_0 ile gösterilsin. x_0 sayısı tektir çünkü $x_0^{'}\neq x_0$ olmak üzere $x_0^{'}$ sayısı için de $|y_0\alpha-x_0|=|y_0\alpha-x_0^{'}|$ olsa,

$$\left|\alpha-\frac{x_0}{y_0}\right|=\left|\alpha-\frac{x_0^{'}}{y_0}\right|$$

olup

$$\alpha-\frac{x_0}{y_0}=-\alpha+\frac{x_0^{'}}{y_0}$$

elde edilirdi. Buradan

$$\alpha=\frac{x_0+x_0^{'}}{2y_0} \tag{2.65}$$

bulunurdu. (2.65) sadeleştirilemeyen bir kesirdir, aksi olsa, $(x_0+x_0^{'},2y_0)=l,\ l>1$ olacak şekilde bir l tam sayısı bulunurdu. Bu durumda

$$x_0+x_0^{'}=lp,\quad 2y_0=lq,\quad (p,q)=1$$

olacak şekilde p,q tam sayıları var olurdu. $l>2$ olması durumunda

$$\frac{q}{y_o}=\frac{2}{l}<1$$

olacağından $q<y_0$ bulunurdu. Diğer yandan $|\alpha-\frac{p}{q}|=0$ olduğundan $|q\alpha-p|=0$ olup

y_0 sayısının tanımı ile çelişirdi. $l = 2$ olması durumunda $2y_0 = 2q$ olup $y_0 = q$ bulunurdu. Bu durumda

$$|q\alpha - p| = |y_0\alpha - p| = 0 < |y_0\alpha - x_0|$$

olup x_0 sayısının tanımıyla çelişirdi ($|y_0\alpha - x_0| = 0$ olsa $x_0 = x_0^{'}$ çelişkisi elde edilirdi). O halde $x_0 = x_0^{'}$ olmak zorundadır.

Bu koşullar altında α bir rasyonel sayı olacağından α sayısının basit sürekli kesir açılımı sonlu olup uygun bir n doğal sayısı için $\alpha = f_n = \frac{A_n}{B_n}$ olur. (2.65) eşitliğinden, $A_n = x_0 + x_0^{'}$ ve $B_n = 2y_0 (= b_n B_{n-1} + B_{n-2})$ elde edilir. $n > 1$ için $b_n > 2$ veya $b_n = 2$ olabilir. Bu durumda $B_{n-1} < y_0$ olur.

$$|B_{n-1}\alpha - A_{n-1}| = \left| B_{n-1}\frac{A_n}{B_n} - A_{n-1} \right| = \left| \frac{B_{n-1}A_n - A_{n-1}B_n}{B_n} \right| \tag{2.66}$$

olup burada (2.22) determinant formülü kullanılırsa

$$|B_{n-1}\alpha - A_{n-1}| = \left| \frac{(-1)^{n-1}}{B_n} \right| = \frac{1}{B_n} = \frac{1}{2y_0} \leq \frac{1}{2} \leq |y_0\alpha - x_0|$$

halini alır bu ise y_0 sayısının tanımıyla çelişir. $n = 1$ için $b_n = 2$ olursa $\alpha = b_0 + \frac{1}{2}$ ve $y_0 = 1$ olup teoremin ifadesinde dışlanan durum ortaya çıkar.

2.2. PADÉ YAKLAŞIMLARI

2.2.1. Genel Tanım ve Teoremler

Bu bölümde $\mathcal{P}$ kümesi, $c_m \in \mathbb{C}$ $(m = 0, 1, 2, \ldots)$ olmak üzere

$$C(z) = c_0 + c_1 z + c_2 z^2 + \ldots = \sum_{m=0}^{\infty} c_m z^m$$

şeklindeki tüm formal kuvvet serilerini göstermektedir. Burada sıfırdan farklı z kompleks sayıları için sonsuz serilerin yakınsaklığı göz ardı edilir. Başka bir ifadeyle $\mathcal{P}$ kümesi, $\mathbb{C}$ üzerinde tanımlı

$$(c_0, c_1, c_2, \ldots)$$

şeklindeki dizilerin kümesi olarak da göz önüne alınabilir. Serilerde toplama ve skalerle çarpma işlemine göre $\mathcal{P}$, $\mathbb{C}$ üzerinde sonsuz boyutlu bir vektör uzayıdır. $\mathcal{P}$ kümesi Cauchy çarpımı işlemine göre birim elemanlı değişmeli bir yarı grup olduğundan $\mathcal{P}$ bir tamlık bölgesidir. $c_0 \neq 0$ koşulunu sağlayan bütün $C(z) = \sum\limits_{m=0}^{\infty} c_m z^m$ serileri, $\mathcal{P}$ kümesinin terslenebilen elemanlarıdır. Padé yaklaşımları ile ilgili daha ayrıntılı bilgi için Jones ve Thron[4]'un çalışmasına bakılabilir.

Tanım 2.15. $L := L(z) = c_m z^m + c_{m+1} z^{m+1} + \ldots, c_m \neq 0$ olmak üzere

$$\begin{array}{rcl} \lambda: \ \mathcal{L} & \to & \mathbb{R} \cup \{+\infty\} \\ L & \mapsto & \lambda(L) = \begin{cases} m & , \ L \neq 0 \\ +\infty & , \ L = 0 \end{cases} \end{array}$$

şeklinde tanımlanan λ fonksiyonu aşağıdaki özellikleri sağlar: $L_1, L_2 \in \mathcal{L}$ olmak üzere

1) $\lambda(L_1 L_2) = \lambda(L_1) + \lambda(L_2)$

2) $L_2 \neq 0$ ise $\lambda(L_1/L_2) = \lambda(L_1) - \lambda(L_2)$

3) $\lambda(L_1 \pm L_2) \geq \min[\lambda(L_1), \lambda(L_2)]$

4) $\lambda(L_1) \neq \lambda(L_2)$ ise $\lambda(L_1 \pm L_2) = \min[\lambda(L_1), \lambda(L_2)]$

Tanım 2.16. $c_m \neq 0$ olmak üzere $c_m z^m + c_{m+1} z^{m+1} + \ldots$ biçimindeki bir seri $n \leq m$ olmak üzere $O(z^n)$ ile gösterilir.

Örnek 2.13. $2z^3 + 3z^4 + 4z^5 + \ldots$ serisi $O(z^3)$ ile gösterilir. $z^5 + z^7 + \ldots$ serisi de yine $O(z^3)$ ile gösterilir. Bu seri aynı zamanda $O(z^4)$ veya $O(z^5)$ ile de gösterilebilir.

Tanım 2.17. Bir $C(z) \in \mathcal{P}$ serisinin en az $m+n$ inci terimine kadar karşılık gelen

$$\frac{P_{m,n}(z)}{Q_{m,n}(z)}$$

rasyonel fonksiyonuna $C(z)$ serisinin $[m,n]$ biçimindeki Padé formu denir, burada $deg(P_{m,n}(z)) \leq m$ ve $deg(Q_{m,n}(z)) \leq n$ şeklindedir.

Tanım 2.18. $(P_{m,n}(z), Q_{m,n}(z)) = 1$ ise $C(z)$ serisine karşılık gelen $[m,n]$ biçimindeki Padé formu, $[m,n]$ biçimindeki Padé yaklaşımı olarak adlandırılır ve

$$R_{m,n}(z) = \frac{P_{m,n}(z)}{Q_{m,n}(z)}$$

şeklinde gösterilir.

Örnek 2.14.

$$P_{0,1}(z) = 1 \quad \text{ve} \quad Q_{0,1}(z) = 1 - z$$

olmak üzere $C(z) = 1+z+z^2+2z^3+3z^4+\ldots$ serisinin $[0,1]$ biçimindeki Padé yaklaşımı

$$R_{0,1} = \frac{1}{1-z}$$

şeklindedir.

Not 2.10. $C(z)$ serisinin $[m,n]$ biçimindeki Padé formu $\frac{P_{m,n}(z)}{Q_{m,n}(z)}$ ise negatif olmayan uygun bir k tam sayısı için

$$C(z)Q_{m,n}(z) - P_{m,n}(z) = O(z^{m+n+1+k}) \tag{2.67}$$

gerçeklenir. Bu eşitlik kısaca $CQ_{m,n} - P_{m,n} = O(z^{m+n+1+k})$ biçiminde de ifade edilir.

$p_i, q_j \in \mathbb{C}$ ($i = 0, 1, \ldots, m$ ve $j = 0, 1, \ldots, n$) için $P_{m,n}(z) = p_0 + p_1 z + \ldots + p_m z^m$ ve $Q_{m,n}(z) = q_0 + q_1 z + \ldots + q_n z^n$ alınırsa (2.67) eşitliğinden,

$$
\begin{aligned}
&c_0q_0 &&= p_0\\
&c_1q_0 + c_0q_1 &&= p_1\\
&c_2q_0 + c_1q_1 + c_0q_2 &&= p_2\\
&\vdots &&\vdots\\
&c_mq_0 + c_{m-1}q_1 + \cdots + c_0q_m &&= p_m\\
&c_{m+1}q_0 + c_mq_1 + \cdots + c_{m-n+1}q_n &&= 0\\
&\vdots &&\vdots\\
&c_{m+n}q_0 + c_{m+n-1}q_1 + \cdots + c_mq_n &&= 0
\end{aligned}
\tag{2.68}
$$

olacak şekilde $m+n+1$ denklemli $m+n+2$ bilinmeyenli lineer denklem sistemi elde edilir. Bu denklem sistemi kısaca

$$
S_{mn} := \sum_{j=0}^{n} c_{i-j}q_j = \begin{cases} p_i, & i = 0,1,\ldots,m \\ 0, & i = m+1,\ldots,m+n \end{cases} \tag{2.69}
$$

şeklinde gösterilir.

(2.68) sistemindeki ilk m tane denklemin oluşturduğu sistem S^p_{mn}, diğer denklemlerin oluşturduğu sistem S^q_{mn} ile gösterilir. (2.68) sisteminin ilk denklemi $c_0q_0 = p_0$ olduğundan, (2.68) sistemi $m+n+1$ bilinmeyenli lineer denklem sistemi olarak göz önüne alınabilir.

Tanım 2.19. $P_{m,n}(0) = c_0$, $Q_{m,n}(0) = 1$ normalizasyon koşullarını sağlayan $[m,n]$ biçimindeki $R_{m,n}(z)$ Padé yaklaşımı indirgenmiş gösteriliş olarak adlandırılır.

Teorem 2.18. Her $C(z)$ serisi için $[m,n]$ biçiminde bir Padé formu vardır. Bir $C(z)$ serisinin $[m,n]$ biçimindeki her Padé formu $R_{m,n}$ fonksiyonunun farklı bir gösterilişidir [8].

İspat. Herhangi bir $C(z)$ serisine karşılık gelen S_{mn} sisteminin

$$
(p_0, p_1, \ldots, p_m, q_0, q_1, \ldots, q_n)^T
$$

biçiminde trivial olmayan bir çözümü vardır. Bu çözüm için $Q_{m,n}(z) \neq 0$ dır çünkü $Q_{m,n}(z) = 0$ olsa (2.68) sisteminden $P_{m,n}(z) = 0$ olup trivial çözüm elde edilirdi. $Q_{m,n}(z) = O(z^\gamma)$ ve $q_\gamma \neq 0$ ise bu durumda $P_{m,n}(z) = O(z^\gamma)$ ve $p_\gamma = c_0q_\gamma$ olur.

Böylece $\frac{P_{m,n}(z)}{Q_{m,n}(z)}$ kesrinin pay ve paydası q_γ ile sadeleştirildiğinde normalizasyon koşulları gerçeklenir.

$\frac{P_{m,n}(z)}{Q_{m,n}(z)}$ ve $\frac{P'_{m,n}(z)}{Q'_{m,n}(z)}$ bir $C(z)$ formal kuvvet serisinin $[m,n]$ biçimindeki herhangi iki Padé formu olsun. Bu durumda, (2.67) eşitliğinden

$$CQ_{m,n} - P_{m,n} = O(z^{m+n+1+k})$$

ve

$$CQ'_{m,n} - P'_{m,n} = O(z^{m+n+1+k'})$$

olacak biçimde $k, k' \in \mathbb{Z}^+ \cup \{0\}$ sayıları vardır. $Q_{m,n} \neq 0$ ve $Q'_{m,n} \neq 0$ olduğundan sırasıyla

$$(CQ_{m,n} - P_{m,n})Q'_{m,n} = O(z^{m+n+1+k})$$

ve

$$(CQ'_{m,n} - P'_{m,n})Q_{m,n} = O(z^{m+n+1+k'})$$

elde edilir. $\min(k, k') = k$ olarak alınıp bu iki eşitlik taraf tarafa çıkartılırsa

$$(CQ_{m,n} - P_{m,n})Q'_{m,n} - (CQ'_{m,n} - P'_{m,n})Q_{m,n} = O(z^{m+n+1+k}) \qquad (2.70)$$

olup

$$-P_{m,n}Q'_{m,n} + P'_{m,n}Q_{m,n} = O(z^{m+n+1+k})$$

elde edilir. Burada

$$deg(P_{m,n}Q'_{m,n} - P'_{m,n}Q_{m,n}) \leq m + n$$

ve

$$deg(O(z^{m+n+1+k})) \geq m + n + 1 + k$$

olduğundan son eşitliğin gerçeklenmesi için gerek ve yeter koşul (2.70) eşitliğinin her iki tarafının sıfır polinom olmasıdır. O halde

$$\frac{P_{m,n}(z)}{Q_{m,n}(z)} = \frac{P'_{m,n}(z)}{Q'_{m,n}(z)}$$

dir. Sonuç olarak bir $C(z)$ serisinin $[m,n]$ biçimindeki herhangi iki Padé formu tek türlü belirlidir.

2.2.2. Padé Tablosu

Tanım 2.20. Bir $C(z)$ serisinin Padé yaklaşımları $R_{m,n}$ olmak üzere,

$m\diagdown n$	0	1	2	$\cdots$
0	$R_{0,0}$	$R_{0,1}$	$R_{0,2}$	$\cdots$
1	$R_{1,0}$	$R_{1,1}$	$R_{1,2}$	$\cdots$
2	$R_{2,0}$	$R_{2,1}$	$R_{2,2}$	$\cdots$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	

şeklinde ifade edilen yarı sonsuz tabloya $C(z)$ serisinin Padé tablosu denir.

Tanım 2.21. Bir $C(z) = \sum\limits_{m=0}^{\infty} c_m z^m$ formal kuvvet serisi göz önüne alınsın. Her negatif k tam sayısı için $c_k = 0$ ve $m = 0, 1, 2, \ldots$ için $c_{m,0} = 1$ olmak üzere

$$c_{m,n} = \begin{vmatrix} c_m & c_{m-1} & \cdots & c_{m-n+1} \\ c_{m+1} & c_m & \cdots & c_{m-n+2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ c_{m+n-1} & \cdots & \cdots & c_m \end{vmatrix}$$

biçimindeki determinanta Toeplitz determinantı denir [9].

Tanım 2.22. $C(z)$ serisinin $c_{m,n}$ Toeplitz determinantları kullanılarak

$m\diagdown n$	0	1	2	$\cdots$
0	$c_{0,0}$	$c_{0,1}$	$c_{0,2}$	$\cdots$
1	$c_{1,0}$	$c_{1,1}$	$c_{1,2}$	$\cdots$
2	$c_{2,0}$	$c_{2,1}$	$c_{2,2}$	$\cdots$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$

şeklinde ifade edilen yarı sonsuz tabloya $C(z)$ serisinin C-tablosu denir.

Not 2.11. $c_{m,n}$ determinantlarının tanımı gereği

$$c_{m,1} = c_m \quad \text{ve} \quad c_{0,n} = c_0^n \tag{2.71}$$

olarak elde edilir. O halde C-tablosunun ikinci sütunu $C(z)$ serisinin katsayılarına karşılık gelir.

Teorem 2.19. Bir C-tablosundaki $c_{m,n}$ determinantları

$$c_{m-1,n}c_{m+1,n} + c_{m,n-1}c_{m,n+1} = c_{m,n}^2 \tag{2.72}$$

eşitliğini sağlar. Dolayısıyla C-tablosu, determinantların hesaplanması yerine, bu eşitlik yardımıyla da doldurulabilir [8, 9].

Not 2.12. (2.72) eşitliği, indislerden bağımsız olarak

	K	
B	$c_{m,n}$	D
	G	

adlandırılışı yardımıyla

$$KG + BD = c_{m,n}^2 \tag{2.73}$$

biçiminde de yazılabilir. Burada K, G, B, D harfleri $c_{m,n}$ determinantının sırasıyla kuzey, güney, doğu ve batısındaki Topelitz determinantlarını göstermektedir.

Padé tablosu her ne kadar kolay elde edilebilir bir algoritmaya sahip olsa da bazı durumlarda çok fazla aritmetik işlem yapılması gerekir. Bu nedenle bazı durumlarda Padé tablosu yerine C-tablosu da kullanılabilir.

Örnek 2.15. Örnek 2.14 de göz önüne alınan $C(z) = 1 + z + z^2 + 2z^3 + 3z^4 + 4z^5 + \ldots$ serisinin Padé ve C tabloları oluşturulabilir. $C(z)$ serisinin katsayıları

$$c_0 = 1,\ c_1 = 1,\ c_2 = 1,\ c_3 = 2,\ c_4 = 3,\ c_5 = 4, \quad \ldots$$

biçimindedir. $C(z)$ serisinin Padé yaklaşımlarının bulunabilmesi için (2.68) lineer denklem sisteminden yararlanılır. Burada Padé formlarının Padé yaklaşımı olarak bulunabilmesi için $q_0 = 1$ alınacaktır.

$R_{0,1} = \frac{P_{0,1}}{Q_{0,1}}$ Padé yaklaşımının bulunması için $P_{0,1} = p_0$ ve $Q_{0,1} = q_0 + q_1 z$ olmak üzere

$$\begin{aligned} c_0 q_0 &= p_0 \\ c_1 q_0 + c_0 q_1 &= p_1 \end{aligned} \tag{2.74}$$

denklem sisteminin çözülmesi gereklidir. (2.74) denklem sisteminde $C(z)$ serisinin katsayıları yerleştirilirse

$$\begin{aligned} 1 &= p_0 \\ 1 + q_1 &= 0 \end{aligned}$$

olur. O halde $p_0 = 1$ ve $q_1 = -1$ bulunur. Bu durumda $P_{0,1} = p_0 = 1$ ve $Q_{0,1} = 1 - z$ olup

$$R_{0,1} = \frac{1}{1 - z}$$

biçiminde bulunur. $R_{3,2} = \frac{P_{3,2}}{Q_{3,2}}$ Padé yaklaşımının bulunması için $P_{3,2} = p_0 + p_1 z + p_2 z^2 + p_3 z^3$ ve $Q_{3,2} = q_0 + q_1 z + q_2 z^2$ olmak üzere

$$\begin{aligned} c_0 q_0 &= p_0 \\ c_1 q_0 + c_0 q_1 &= p_1 \\ c_2 q_0 + c_1 q_1 + c_0 q_2 &= p_2 \\ c_3 q_0 + c_2 q_1 + c_1 q_2 + c_0 q_3 &= p_3 \\ c_4 q_0 + c_3 q_1 + c_2 q_2 + c_1 q_3 + c_0 q_4 &= p_4 \\ c_5 q_0 + c_4 q_1 + c_3 q_2 + c_2 q_3 + c_1 q_4 + c_0 q_5 &= p_5 \end{aligned} \tag{2.75}$$

denklem sisteminin çözülmesi gereklidir. (2.75) denklem sisteminde $C(z)$ serisinin katsayıları yerleştirilirse

$$\begin{aligned} 1 &= p_0 \\ 1 + q_1 &= p_1 \\ 1 + q_1 + q_2 &= p_2 \\ 2 + q_1 + q_2 &= p_3 \\ 3 + 2q_1 + q_2 &= 0 \\ 4 + 3q_1 + 2q_2 &= 0 \end{aligned}$$

olur. O halde $p_0 = 1,\ p_1 = -1,\ p_2 = 0,\ p_3 = 1,\ q_1 = -2,\ q_2 = 1$ bulunur. Bu durumda

$P_{3,2} = 1 - z + z^3$ ve $Q_{3,2} = 1 - 2z + z^2$ olup

$$R_{3,2} = \frac{1 - z + z^3}{1 - 2z + z^2}$$

biçiminde bulunur. Bu şekilde devam edilirse $C(z)$ serisinin bazı Padé yaklaşımları aşağıdaki gibi elde edilir:

$$R_{2,1} = \frac{1 - z - z^3}{1 - 2z}, \quad R_{2,2} = \frac{1 - z^2}{1 - z - z^3}$$

$$R_{3,1} = \frac{1 - \frac{z}{2} - \frac{z^2}{2} + \frac{z^3}{3}}{1 - \frac{3z}{2}}, \quad R_{3,2} = \frac{1 - z + z^3}{1 - 2z + z^2}$$

$$R_{0,3} = \frac{1}{1 - z - z^3}$$

Sonuç olarak $C(z)$ serisinin Padé tablosu aşağıdaki biçimdedir.

$m \diagdown n$	0	1	2	3	4	5	6	$\cdots$
0	$\vdots$	$\frac{1}{1-z}$	$\frac{1}{1-z}$	$\frac{1}{1-z-z^3}$	$\frac{1}{1-z-z^3}$	$\frac{1}{1-z-z^3}$	$\frac{1}{1-z-z^3+z^6}$	$\cdots$
1	$\vdots$	$\frac{1}{1-z}$	$\frac{1}{1-z}$	$\frac{1}{1-z-z^3}$	$\frac{1}{1-z-z^3}$	$\frac{1}{1-z-z^3}$	$\frac{1-z}{1-2z+z^2-z^3+z^4+z^6}$	$\cdots$
2	$\vdots$	$\frac{1-z-z^3}{1-2z}$	$\frac{1-z^2}{1-z-z^3}$	$\frac{1}{1-z-z^3}$	$\frac{1}{1-z-z^3}$	$\frac{1}{1-z-z^3}$	$\frac{1-z}{1-2z+z^2-z^3+z^4+z^6}$	$\cdots$
3	$\vdots$	$\frac{1-\frac{z}{2}-\frac{z^2}{2}+\frac{z^3}{3}}{1-\frac{3z}{2}}$	$\frac{1-z+z^3}{1-2z+z^2}$	$\frac{1-z+z^3}{1-2z+z^2}$	$\frac{1-z+z^3}{1-2z+z^2}$	$\frac{1-z+z^3}{1-2z+z^2}$	$\frac{1-z+z^3}{1-2z+z^2}$	$\cdots$
4	$\vdots$	$\frac{1-\frac{z}{3}-\frac{z^2}{3}+\frac{2z^3}{3}+\frac{z^4}{3}}{1-\frac{4z}{3}}$	$\frac{1-z+z^3}{1-2z+z^2}$	$\frac{1-z+z^3}{1-2z+z^2}$	$\frac{1-z+z^3}{1-2z+z^2}$	$\frac{1-z+z^3}{1-2z+z^2}$	$\frac{1-z+z^3}{1-2z+z^2}$	$\cdots$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$

Tablo 2.1: C(z) serisinin Padé tablosu

Bu tablonun ilk sütunu $C(z)$ serisinin ilk n terimine karşılık gelir. Başka bir deyişle

$$R_{0,0} = 1, \quad R_{1,0} = 1 + z, \quad R_{2,0} = 1 + z + z^2, \ldots$$

biçiminde bulunur.

Toeplitz determinantları tanımı gereği $m = 0, 1, 2, \ldots$ için $c_{m,0} = 1$ oluyordu. (2.71) eşitliklerinden

$$c_{0,1} = c_0 = 1, \quad c_{1,1} = c_1 = 1, \quad c_{2,1} = c_2 = 1, \quad c_{3,1} = c_3 = 2, \ \ldots$$

ve benzer şekilde

$$c_{0,1} = c_0^1 = 1^1 = 1, \quad c_{0,2} = 1, \quad c_{0,3} = 1, \quad c_{0,4} = 1, \ \ldots$$

bulunur. (2.72) eşitliği yardımıyla

$$c_{0,1}c_{2,1} + c_{1,0}c_{1,2} = c_{1,1}^2$$

olup $c_{1,2} = 1$ elde edilir. Aynı şekilde

$$c_{1,1}c_{3,1} + c_{2,0}c_{2,2} = c_{2,1}^2$$

olup $c_{2,2} = -1$ elde edilir. Bu işlemlere devam edilerek $C(z)$ serisinin C-tablosu

$m \diagdown n$	0	1	2	3	4	5	6	$\cdots$
0	1	1	1	1	1	1	1	$\cdots$
1	1	1	0	1	0	0	1	$\cdots$
2	1	1	-1	1	0	0	1	$\cdots$
3	1	2	1	1	1	1	1	$\cdots$
4	1	3	1	0	0	0	0	$\cdots$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$

Tablo 2.2: C(z) serisinin C-tablosu

şeklinde elde edilir.

Örnek 2.16. $e^z = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$ serisinin Padé tablosunun bir kısmı Örnek 2.15 daki işlemlere benzer işlemler yapılarak aşağıdaki biçimde bulunur.

Tanım 2.23. $C(z)$ formal kuvvet serisi için Toeplitz determinantındaki sütünların değiştirilmesi ile Hankel determinantı elde edilir. $C(z)$ serisinin Hankel determinantları $c_{m/n}$ biçiminde gösterilip

$m\diagdown n$	0	1	2	$\ldots$
0	1	$\frac{1}{1-z}$	$\frac{1}{1-z+\frac{z^2}{2}}$	$\ldots$
1	$1+z$	$\frac{1+\frac{z}{2}}{1-\frac{z}{2}}$	$\frac{1+\frac{z}{3}}{1-\frac{2z}{3}+\frac{z^2}{6}}$	$\ldots$
2	$1+z+\frac{z^2}{2}$	$\frac{1+\frac{2z}{3}+\frac{z^2}{6}}{1-\frac{z}{3}}$	$\frac{1+\frac{z}{2}+\frac{z^2}{12}}{1-\frac{z}{2}+\frac{z^2}{12}}$	$\ldots$
3	$1+z+\frac{z^2}{2}+\frac{z^3}{6}$	$\frac{1+\frac{3z}{4}+\frac{z^2}{4}+\frac{z^3}{24}}{1-\frac{z}{4}}$	$\frac{1+\frac{3z}{5}+\frac{3z^2}{20}+\frac{z^3}{60}}{1-\frac{2z}{5}+\frac{z^2}{20}}$	$\ldots$
4	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$

Tablo 2.3: e^z nin Padé Tablosu

$$c_{m/n} = \begin{vmatrix} c_{m-n+1} & c_{m-1} & \cdots & c_m \\ c_{m-n+2} & c_m & \cdots & c_{m+1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ c_m & \cdots & \cdots & c_{m+n-1} \end{vmatrix}$$

şeklinde tanımlanır [9].

Toeplitz determinantları ile Hankel determinantları arasında

$$c_{m,n} = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} c_{m/n}$$

ilişkisi vardır. Henkel determinantları ile oluşturulan C-tablosu için $c_{m/n}$ determinantları

$$c_{(m-1)/n}c_{(m+1)/n} - c_{m/(n-1)}c_{m/(n+1)} = c_{m/n}^2 \tag{2.76}$$

eşitliğini sağlar[9].

Teorem 2.20. $C(z) \in \mathcal{P}$ ve $c_0 \neq 0$ olmak üzere $\frac{P(z)}{Q(z)}$, $C(z)$ kuvvet serisinin bir Padé formu olsun. $deg(P(z)) = m$, $deg(Q(z)) = n$ ve $C(z)Q(z) - P(z)$ kuvvet serisi tam olarak $z^{m+n+k+1}$ kuvvetiyle başlasın. Bu durumda aşağıdaki ifadeler doğrudur:

a) $k \geq 0$ dır.

b) $R_{\mu,\eta} = \frac{P(z)}{Q(z)}$ olması için gerek ve yeter koşul $m \leq \mu \leq m+k$ ve $n \leq \eta \leq n+k$ olmasıdır.

Teoremin **b)** şıkkını sağlayan (μ, η) çifti için,

c) $\frac{u(z)}{v(z)}$ kesrinin $C(z)$ serisinin $[\mu, \eta]$ biçimindeki bir Padé formu olması için gerek ve yeter koşul

$$u(z) = z^{\sigma_{\mu\eta}} d(z)P(z) \quad \text{ve} \quad v(z) = z^{\sigma_{\mu\eta}} d(z)Q(z) \tag{2.77}$$

olmasıdır, burada $\sigma_{\mu\eta} = \max\{0, (\mu - m) + (\eta - n) - k\}$ ve $d \neq 0$ olmak üzere d nin derecesi en fazla $\chi_{\mu\eta}$ olmak üzere

$$\chi_{\mu\eta} = \begin{cases} \frac{k}{2} - \max\left\{\left|\mu - \eta - \frac{k}{2}\right|, \left|\eta - n - \frac{k}{2}\right|\right\}, & k \leq \infty \\ \min\{\mu - m, \eta - n\}, & k = \infty \end{cases} \tag{2.78}$$

sağlanır.

d) $\mu + \eta - rankS_{\mu\eta} = \eta - rankS^{v}_{\mu\eta} = \chi_{\mu\eta}$ olur.

e)
$$\begin{aligned} c_{\mu,n} &\neq 0, \quad m \leq \mu \leq m+k \\ c_{m,\eta} &\neq 0, \quad n \leq \eta \leq n+k \\ c_{\mu,\eta} &= 0, \quad m < \mu \leq m+k \text{ ve } n < \eta \leq n+k \end{aligned}$$
olur [8].

İspat. Teoremin ispatı için öncelikle bazı incelemeler yapılmalıdır. $\frac{P(z)}{Q(z)}$, Padé formunun karşılık geldiği yaklaşım $R_{\mu,\eta}$ olsun ve $\frac{u(z)}{v(z)}$ kesri $[\mu, \eta]$ biçiminde herhangi bir Padé formu olsun. O halde,

$$deg(u(z)) \leq \mu, \quad deg(v(z)) \leq \eta \quad ve \quad C(z)v(z) - u(z) = O(z^{\mu+\eta+1}) \tag{2.79}$$

olur. u ve v polinomlarının en büyük ortak böleni bulunup çarpanlara ayrıldığında,

$$\begin{aligned} u(z) &= z^{\sigma}(d_0 + d_1 z + \ldots + d_{\chi} z^{\chi})P(z) \\ v(z) &= z^{\sigma}(d_0 + d_1 z + \ldots + d_{\chi} z^{\chi})Q(z) \end{aligned} \tag{2.80}$$

eşitlikleri elde edilir, burada $d_0 d_{\chi} \neq 0$ dır. Bu durumda $C(z)v(z) - u(z) = O(z^{\mu+\eta+1})$ eşitliğinde (2.80) yazılırsa

$$C(z)z^{\sigma}d(z)Q(z) - z^{\sigma}d(z)P(z) = O(z^{\mu+\eta+1})$$

olup

$$z^{\sigma}d(z)(C(z)Q(z) - P(z)) = O(z^{\mu+\eta+1})$$

ve burada

$$z^{\sigma}(C(z)Q(z) - P(z)) = O(z^{\mu+\eta+1})$$

bulunur. Bu bilgiler yardımıyla

$$\begin{cases} \chi \geq 0 \\ \sigma \geq 0 \\ deg(u(z)) = \sigma + \chi + m \leq \mu \\ deg(v(z)) = \sigma + \chi + n \leq \eta \\ \mu + \eta \leq \sigma + m + n + k \end{cases} \tag{2.81}$$

eşitsizlikleri elde edilir. (2.81) eşitsizliklerine denk olarak

$$\begin{cases} \chi \geq 0 \\ \max\{0, (\mu - m) + (\eta - n) - k\} \leq \sigma \\ \sigma + \chi \leq \min\{\mu - m, \eta - n\} \end{cases} \tag{2.82}$$

edilir.

μ ve η, (2.82) eşitsizliklerini sağlayan χ ve σ tam sayılarının bulunabildiği iki tam sayı olsun. Herhangi bir $d(z) = d_0 + d_1 z + \ldots + d_{\chi} z^{\chi} (\neq 0)$ fonksiyonu yardımıyla (2.80) koşulları sağlanacak şekilde $u(z)$ ve $v(z)$ polinomları tanımlanabilir. Bu durumda (2.79) sağlanır. Dolayısıyla $\frac{u(z)}{v(z)}$ kesri $[\mu, \eta]$ biçiminde bir Padé formudur ve $R_{\mu,\eta} = \frac{P(z)}{Q(z)}$ olur. $R_{\mu,\eta} = \frac{P(z)}{Q(z)}$ olması ya da $[\mu, \eta]$ biçimindeki Padé formların genel yapısı ile ilgili problemler (2.80) eşitliklerine geri döner. Şimdi Teorem 2.20 nin ispatı yapılabilir.

a) $\frac{P(z)}{Q(z)}$, $C(z)$ kesrinin bir Padé yaklaşımı olduğundan (2.80) eşitliklerini sağlayan χ, σ, μ, η tam sayıları vardır. O halde

$$2\chi + \sigma \leq (\mu - m) + (\eta - n) - \sigma \leq k$$

olur. $\chi \geq 0$ ve $\sigma \geq 0$ olduğundan $2\chi + \sigma \geq 0$ olup $0 \leq k$ bulunur.

b) $R_{\mu,\eta} = \frac{P(z)}{Q(z)}$ olması için gerek ve yeter koşul (2.80) in (χ, σ) çözümünün olmasıdır.

(2.80) eşitliklerinin (χ, σ) çözümünün olması için gerek ve yeter koşul

$$\max\{0, (\mu - m) + (\eta - n) - k\} \leq \min\{\mu - m, \eta - n\} \tag{2.83}$$

olmasıdır. (2.83) eşitsizliğinin geçerli olması için gerek ve yeter koşul ise

$$m \leq \mu \leq m + k \quad \text{ve} \quad n \leq \eta \leq n + k \tag{2.84}$$

eşitsizliklerinin sağlanmasıdır. (2.84) eşitsizlikleri

$$0 \leq \mu - m \leq k \quad \text{ve} \quad 0 \leq \eta - n \leq k$$

şeklinde de gösterilebilir. (2.83) eşitsizliği doğru ise (2.84) eşitsizliği geçerlidir çünkü

$$\max\{0, (\mu - m) + (\eta - n) - k\} \geq \min\{\mu - m, \eta - n\}$$

varsayımı ile $\min\{\mu - m, \eta - n\} = \mu - m$ olsun. Bu durumda

$$\max\{0, (\mu - m) + (\eta - n) - k\} \geq \mu - m \tag{2.85}$$

olur. (2.85) eşitsizliğinin maksimum değeri 0 olsa $0 \geq \mu - m$ olacağından çelişki elde edilir. O halde maksimum değer $\mu - m + \eta - n - k$ dır. Bu durumda $\min\{\mu - m, \eta - n\} \geq 0$ olur. Buradan $\mu - m \geq 0$ ve $\eta - n \geq 0$ bulunur. Bu durumda (2.85) eşitsizliğinden $\eta - n - k \geq 0$ çelişkisi elde edilir. O halde $m \leq \mu \leq m + k$ ve $n \leq \eta \leq n + k$ için (2.83) gerçeklenmek zorundadır.

(2.83) geçerli iken (2.84) eşitliği geçerlidir çünkü maksimum değer sıfıra eşit veya daha büyük olacağından ve $\max\{0, (\mu - m) + (\eta - n) - k\} \leq \min\{\mu - m, \eta - n\}$ olduğundan $\min\{\mu - m, \eta - n\} \geq 0$ gerçeklenir. O halde $\mu - m \geq 0$ ve $\eta - n \geq 0$ bulunur. $\mu - m > k$ ve $\eta - n \leq k$ olsa, $\mu - m - k > 0$ olacağından

$$\max\{0, \mu - m + \eta - n - k\} = \mu - m + \eta - n - k$$

olur. Buradan $\mu - m + \eta - n - k \leq \eta - n$ olup $\mu - m - k \leq 0$ çelişkisi elde edilir. Benzer biçimde $\eta - n > k$ ve $\mu - m \leq k$ olması durumunda $\eta - n - k \leq 0$ çelişkisi elde edilir.

$\mu - m > k$ ve $\eta - n > k$ olsa, $\mu - m + \eta - n - k \leq \mu - m$ olup $\eta - n - k \leq 0$ çelişkisi elde edilir.

Sonuç olarak $\max\{0, (\mu - m) + (\eta - n) - k\} \leq \min\{\mu - m, \eta - n\}$ ise

$$0 \leq \mu - m \leq k \quad \text{ve} \quad 0 \leq \eta - n \leq k$$

olur. O halde $m \leq \mu \leq m + k$ ve $n \leq \eta \leq n + k$ bulunur. $\min\{\mu - m, \eta - n\} = \eta - n$ olması durumunda da aynı sonuç elde edilir.

c) $[\mu, \eta]$ biçimindeki en genel Padé formu (2.80) eşitsizliklerinde σ nın minimal, χ nin maksimal olmasıyla elde edilir. Bu değerler sırasıyla $\sigma_{\mu\eta}$ ve $\chi_{\mu\eta}$ ile gösterilsin.

$$\sigma_{\mu\eta} = \max\{0, (\mu - m) + (\eta - n) - k\}$$

ve böylece

$$\chi_{\mu\eta} + \sigma_{\mu\eta} = \min\{\mu - m, \eta - n\}$$

olduğundan

$$\chi_{\mu\eta} = \min\{\mu - m, \eta - n\} - \max\{0, (\mu - m) + (\eta - n) - k\} \tag{2.86}$$

elde edilir. (2.86) eşitliği (2.78) eşitliğine karşılık gelir. Bu denklik $k = \infty$ ve $k < \infty$ için ayrı ayrı incelenerek elde edilebilir.

$k = \infty$ ise $\max\{0, (\mu - m) + (\eta - n) - k\} = 0$ olacağından (2.86) eşitliğinden

$$\chi_{\mu\eta} = \min\{\mu - m, \eta - n\}$$

bulunur. O halde (2.78) eşitliği sağlanır.

$k < \infty$ için üç farklı durum ortaya çıkar.

$0 \leq \mu - m \leq \eta - n \leq \frac{k}{2}$ olsun. Bu durumda $\mu - m + \eta - n \leq \frac{k}{2} + \frac{k}{2} = k$ olup $\mu - m + \eta - n - k \leq 0$ elde edilir. Dolayısıyla $\max\{0, (\mu - m) + (\eta - n) - k\} = 0$ olur.

$\min\{\mu - m, \eta - n\} = \mu - m$ olduğundan (2.86) eşitliğinden $\chi_{\mu\eta} = \mu - m$ olur. Diğer yandan

$$\mu - m - \frac{k}{2} \leq \eta - n - \frac{k}{2} \leq 0$$

olduğundan

$$\left|\mu - m - \frac{k}{2}\right| \geq \left|\eta - n - \frac{k}{2}\right|$$

olur. Buradan

$$\max\left\{\left|\mu - m - \frac{k}{2}\right|, \left|\eta - n - \frac{k}{2}\right|\right\} = \left|\mu - m - \frac{k}{2}\right|$$

olur. (2.78) eşitliğinden

$$\frac{k}{2} - \left|\mu - m - \frac{k}{2}\right| = \frac{k}{2} + \mu - m - \frac{k}{2} = \mu - m$$

değeri bulunur. $0 \leq \eta - n \leq \mu - m \leq \frac{k}{2}$ olması durumunda da $\chi_{\mu\eta} = \eta - n$ bulunur.

$\mu - m = \frac{k}{2} - a < \frac{k}{2}$ ve $\eta - n = \frac{k}{2} + b > \frac{k}{2}$ olsun. Bu durumda $\left|\mu - m - \frac{k}{2}\right| = a$ ve $\left|\eta - n - \frac{k}{2}\right| = b$ olur. $\min\{\mu - m, \eta - n\} = \mu - m$ olsun. $\max\{a, b\} = a$ ise $\mu - m + \eta - n - k = b - a < 0$ olduğundan

$$\max\{0, (\mu - m) + (\eta - n) - k\} = 0$$

olur. (2.86) eşitliğinden $\chi_{\mu\eta} = \mu - m$ bulunur. (2.78) eşitliğinden $\chi_{\mu\eta} = \frac{k}{2} - a = \mu - m$ elde edilir. $\max\{a, b\} = b$ ise, benzer işlemlerle (2.86) ve (2.78) eşitliklerinden $\chi_{\mu\eta} = \eta - n$ bulunur.

$\eta - n \geq \mu - m \geq \frac{k}{2}$ olsun. Bu durumda

$$\max\{0, (\mu - m) + (\eta - n) - k\} = \mu - m + \eta - n - k$$

olur. $\min\{\mu - m, \eta - n\} = \mu - m$ olup (2.86) eşitliğinden $\chi_{\mu\eta} = n - \eta + k$ bulunur. (2.78) eşitliğinden de $\chi_{\mu\eta} = n - \eta + k$ elde edilir. Sonuç olarak hem $k < \infty$ hem $k = \infty$ için (2.86) ve (2.78) birbirine denktir.

d) $u(z) = z^{\sigma_{\mu\eta}}d(z)P(z)$ ve $v(z) = z^{\sigma_{\mu\eta}}d(z)Q(z)$ olduğundan u ve v polinomlarını oluşturmak için $d_0, d_1, d_2, \ldots, d_{\chi_{\mu\eta}}$ katsayılarına ihtiyaç vardır. Yani $\chi_{\mu\eta} + 1$ tane parametre yardımıyla $u(z)$ ve $v(z)$ elde edilir. $S_{\mu\eta}$ ve $S^v_{\mu\eta}$ sistemlerinin genel çözümünde $\chi_{\mu\eta} + 1$ tane parametre vardır. $S_{\mu\eta}$ sisteminde $u_0, u_1, \ldots, u_\mu, v_0, v_1, \ldots, v_\eta$ ile gösterilen $\mu+\eta+2$ tane bilinmeyen vardır. $S_{\mu\eta}$ sisteminin ilk denklemi $c_0v_0 = u_0$ olduğundan u_0 ile v_0 lineer bağımlıdır. Dolayısıyla $S_{\mu\eta}$ aslında $\mu + \eta + 1$ tane bilinmeyen içerir. O halde

$$\mu + \eta - rank\ S_{\mu\eta} = \chi_{\mu\eta}$$

bulunur. $S^v_{\mu\eta}$ homojen sisteminde $v_0, v_1, \ldots, v_\eta$ şeklinde $\eta + 1$ tane bilinmeyen vardır. Böylece

$$\eta - rank\ S^v_{\mu\eta} = \chi_{\mu\eta}$$

olur. O halde

$$\mu + \eta - rank\ S_{\mu\eta} = \eta - rank\ S^v_{\mu\eta} = \chi_{\mu\eta}$$

elde edilir.

e) $c_{\mu,\eta} = 0$ olması için gerek ve yeter koşul $S^v_{\mu\eta}$ sisteminin $v_0 = 0$ olmak üzere trivial olmayan bir çözümünün olmasıdır. c) şıkkından

$$\chi_{\mu\eta} + \sigma_{\mu\eta} = \min\{\mu - m, \eta - n\}$$

ve $v_0 = 0$ olduğundan $v(z)$ polinomunun sabit teriminin olmaması için $\sigma > 0$ olmalıdır. O halde $v(z) = O(z^\sigma)$ biçimindedir. $\chi_{\mu\eta} \geq 0$ ve $\sigma_{\mu,\eta} > 0$ olduğundan $\chi_{\mu\eta} + \sigma_{\mu\eta} > 0$ olur. Buradan $\mu - m > 0$ ve $\eta - n > 0$ olup $\mu > m$ ve $\eta > n$ elde edilir. $c_{\mu,\eta} = 0$ olmasi için gerek ve yeter koşul

$$\min\{\mu - m, \eta - n\} > 0$$

olmasıdır. Dolayısıyla, $\mu = m$ ise $\min\{\mu - m, \eta - n\} = 0$ olacağından $c_{m,\eta} \neq 0$ dır. Benzer biçimde $\eta = n$ ise $\min\{\mu - m, \eta - n\} = 0$ olacağından $c_{\mu,n} \neq 0$ dır.

Not 2.13. Teorem 2.20 b) den $C(z)$ kuvvet serisinin Padé yaklaşımlarının eşit olması durumunda, Padé tablosunda $(k+1).(k+1)$ boyutlu blokların oluşacağı elde edilir. Teorem 2.20 e) den ise $C(z)$ kuvvet serisinin C-tablosunda $k.k$ boyutlu 0-blokların oluşacağı elde edilir.

Örnek 2.17. Örnek 2.15 te bulunan Padé ve C-tablosu göz önüne alınsın. Tablo 2.1 de

$$R_{0,1} = R_{0,2} = R_{1,1} = R_{1,2}$$

olup 2.2 lik bir blok elde edilir. Benzer biçimde

$$R_{0,3} = R_{0,4} = R_{0,5} = R_{1,3} = R_{1,4} = R_{1,5} = R_{2,3} = R_{2,4} = R_{2,5}$$

olup 3.3 lük bir blok elde edilir.

Tablo 2.2 de $c_{1,2} = 0$ olup 1.1 lik bir 0-bloğu elde edilir. Benzer biçimde

$$c_{1,4} = c_{1,5} = c_{2,4} = c_{2,5} = 0$$

olup 2.2 lik bir 0-bloğu elde edilir.

Tanım 2.24. Bir [m,n] Padé yaklaşımı için, $deg(P_{m,n}(z)) = m,\ deg(Q_{m,n}(z)) = n$ ve $\lambda(Q_{m,n}(z)C - P_{m,n}(z)) = m + n + 1$ ise bu yaklaşıma normal Padé yaklaşımı denir. Bir formal kuvvet serisinin bütün Padé yaklaşımları normal ise seriye normal seri ve bu seriye ait Padé tablosuna da normal Padé tablosu denir. Padé tablosunun normal olması için gerek ve yeter koşul Padé yaklaşımlarının tabloda tam olarak bir kez görülmesidir.

Sonuç 2.2. Aşağıdaki ifadeler denktir:
i) $R_{m,n} = \frac{P_{m,n}(z)}{Q_{m,n}(z)}$ Padé formu normaldir.
ii) $deg(P_{m,n}(z)) = m,\ deg(Q_{m,n}(z)) = n$ olmak üzere $C(z)Q_{m,n}(z) - P_{m,n}(z)$ fonksiyonunun kuvvet serisi açılımı tam olarak z^{m+n+1} ile başlar.
iii) $c_{m,n},\ c_{m,n+1},\ c_{m+1,n},\ c_{m+1,n+1}$ determinantları sıfırdan farklıdır[8].

Bir $C(z)$ serisinin normal olması için gerek ve yeter koşul

$$c_{m,n} \neq 0, \quad m \geq 0, \quad n \geq 0$$

olmasıdır, özel olarak $c_{m,1} = c_m$ katsayılarının tümünün sıfırdan farklı olması gerekir [8].

Sonuç 2.3. $deg(P(z)) = m$ ve $deg(Q(z)) = n$ olmak üzere $R_{m,n} = \frac{P(z)}{Q(z)}$ kesri $C(z)$ serisinin bir Padé yaklaşımı olsun. $C(z)$ serisinin $R_{m,n}$ rasyonel fonksiyonunun Maclaurin açılımı olması için gerek ve yeter koşul

$$c_{\mu,n} \neq 0, \quad \mu \geq m$$
$$c_{m,\eta} \neq 0, \quad \eta \geq n$$
$$c_{\mu,\eta} = 0, \quad \mu > m \text{ ve } \eta > n$$

olmasıdır [8].

Teorem 2.21. $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ için A_n ve B_n

$$A_{-1} = 1\ ,\ A_0 = b_0\ ,\ B_{-1} = 0\ ,\ B_0 = 1$$

koşullarını sağlayan iki kompleks sayı dizisi olsun. Her $A_n B_{n-1} - A_{n-1} B_n \neq 0$ olsun. Bu durumda her n için n inci kısmi payı A_n, n inci kısmi paydası B_n olan tek türlü belirli

$$b_0(z) + \underset{n=1}{\overset{\infty}{\mathcal{K}}} \left(\frac{a_n(z)}{b_n(z)} \right)$$

sürekli kesri vardır. Ayrıca $b_0 = A_0$, $a_1 = A_1 - A_0 B_1$, $b_1 = B_1$ başlangıç koşulları ile $n = 2, 3, 4, \ldots$ için

$$a_n = \frac{A_{n-1}B_n - A_n B_{n-1}}{A_{n-1}B_{n-2} - A_{n-2}B_{n-1}} \quad \text{ve} \quad b_n = \frac{A_n B_{n-2} - A_{n-2}B_n}{A_{n-1}B_{n-2} - A_{n-2}B_{n-1}}$$

ile ifade edilir [4].

Teorem 2.22. a) Orijinde meromorfik fonksiyonlar dizisi olan $\{R_n(z)\}$' ye karşılık bir formal kuvvet serisinin var olması için gerek ve yeter koşul

$$\lim_{n\to\infty} \lambda(L(R_{n+1} - L(R_n))) = \infty \tag{2.87}$$

olmasıdır.

b) (2.87) mevcut ise $\{R_n(z)\}$ dizisine karşılık gelen formal kuvvet serisi tek türlü belirlidir.

c) Eğer $\{\lambda(L(R_{n+1}) - L(R_n))\}$ dizisi monoton olarak sonsuza yakınsıyorsa, $R_n(z)$ genel teriminin mertebesi $\nu_n = \lambda(L(R_{n+1}) - L(R_n))$ sayısıdır [4].

(2.1) ifadesinde a_n ve b_n elemanları kompleks sayılar olduğu gibi birer fonksiyon da olabilir. Elemanların fonksiyon olması durumunda da sürekli kesirlerin rekürans denklemleri ve determinant formülü gibi genel özellikleri geçerlidir.

Tanım 2.25. Her n doğal sayısı için α_n pozitif tam sayı ve a_n sıfırdan farklı kompleks katsayılar olmak üzere

$$1+\cfrac{a_1 z^{\alpha_1}}{1+\cfrac{a_2 z^{\alpha_2}}{1+\cfrac{a_3 z^{\alpha_3}}{\ddots}}} \tag{2.88}$$

biçimindeki sürekli kesirlere C-kesri denir ve kısaca

$$1+\underset{n=1}{\overset{\infty}{\mathcal{K}}}\left(\frac{a_n z^{\alpha_n}}{1}\right) \tag{2.89}$$

ile ifade edilir.

Tanım 2.26. Her n doğal sayısı için $\alpha_n = 1$ ise (2.88) sürekli kesrine basit C-kesri denir ve kısaca

$$1+\underset{n=1}{\overset{\infty}{\mathcal{K}}}\left(\frac{a_n z}{1}\right) \tag{2.90}$$

şeklinde gösterilir.

Teorem 2.23. **a)** Her $n \in \mathbb{N}$ ve $\alpha_n \in \mathbb{Z}^+$ olmak üzere (2.89) biçimindeki her C-kesri tek türlü belirli $L_0 = 1+c_1 z+c_2 z^2+\ldots$ formal kuvvet serisine karşılık gelir. n inci yaklaşım olan $f_n(z)$ nin mertebesi $\nu_n = \sum_{k=1}^{n+1} \alpha_k$ dır.
b) $L_0 = 1 + c_1 z + c_2 z^2 + \ldots$ biçiminde bir formal kuvvet serisine karşılık ya (2.89) biçiminde bir C-kesri vardır ya da $L_0 = L(f_m)$ olacak şekilde bir

$$f_m(z) = 1+\underset{n=1}{\overset{m}{\mathcal{K}}}\left(\frac{a_n (z)^{\alpha_n}}{1}\right)$$

sonlu C-kesri vardır, burada $a_m \neq 0$ dır ve L_0 serisi $f_m(z)$ rasyonel fonksiyonunun $z = 0$ noktasındaki seri açılımıdır [4].

İspat. a) Her $n \in \mathbb{N}$ için $\alpha_n \in \mathbb{Z}^+$ olacak şekildeki (2.89) C-kesrinin n inci payı $A_n(z)$ ve n inci paydası $B_n(z)$ olsun. Rekürans denklemlerinden $A_{-1} = 1, A_0 = b_0, B_{-1} = 0, B_0 = 1$ olmak üzere $n \geq 1$ için $A_n = b_n A_{n-1} + a_n A_{n-2}$ ve $B_n = b_n B_{n-1} + a_n B_{n-2}$ eşitlikleri vardır. (2.89) C-kesrinde $b_0 = 1$ ve her $i \in \mathbb{N}$ için $a_i := a_i z^{\alpha_i},\ b_i = 1$ olduğundan rekürans denklemleri

$$A_n(z) = A_{n-1}(z) + a_n z^{\alpha_n} A_{n-2}(z)$$

ve

$$B_n(z) = B_{n-1}(z) + a_n z^{\alpha_n} B_{n-2}(z)$$

olarak bulunur, burada $B_n(0) = 1$ dir. Diğer yandan C-kesri için determinant formülü yazılırsa

$$A_n(z)B_{n-1}(z) - B_n(z)A_{n-1}(z) = (-1)^{n-1} \prod_{k=1}^{n} a_k z^{\alpha_k}; \quad n = 1, 2, \ldots$$

elde edilir. Bu eşitlik yardımıyla

$$\begin{aligned} f_{n+1}(z) - f_n(z) &= \tfrac{A_{n+1}(z)}{B_{n+1}(z)} - \tfrac{A_n(z)}{B_n(z)} \\ &= \tfrac{A_{n+1}(z)B_n(z) - A_n(z)B_{n+1}(z)}{B_{n+1}(z)B_n(z)} \\ &= \tfrac{(-1)^{n+1-1} \prod\limits_{k=1}^{n+1} a_k z^{\alpha_k}}{B_{n+1}B_n} \end{aligned}$$

elde edilir. Buradan, $\nu_n := \lambda(L(f_{n+1}) - L(f_n)) = \sum\limits_{k=1}^{n+1} \alpha_k$ olur. Her $k \in \mathbb{N}$ için $\alpha_k \in \mathbb{Z}^+$ olduğundan $n \to \infty$ için $\nu_n \to \infty$ olur. O halde Teorem 2.22 den $f_n(z)$ yaklaşımlar dizisine karşılık gelen bir formal Laurent serisi vardır.

b) $L_0 = 1 + c_1 z + c_2 z^2 + \ldots$ formal kuvvet serisi göz önüne alınsın. $L_0 = L(b_0)$ ise L sonlu, $b_0 = 1$ biçimindeki C-kesrine denk gelir ve aranılan koşullar kendiliğinden sağlanır.

$$L(b_0) = L(1) = 1 \neq L_0$$

olsun. Bu durumda $L_0 - 1 \neq 0$ olur. $L_0 - 1$ serisinin sıfırdan farklı ilk terimi $c_{k_1} z^{k_1}$ ile gösterilip

$$a_1 = c_{k_1} \quad \text{ve} \quad \alpha_1 = k_1 \geq 1$$

olarak yeniden adlandırılsın. $L_1 := \frac{L(a_1 z^{\alpha_1})}{L_0 - 1}$ olsun. O halde

$$L_1 = 1 + c_1^{(1)} z + c_2^{(1)} z^2 + \dots$$

biçiminde bir formal kuvvet serisi olur. Eğer, $n = 1, 2, 3, \dots$ için

$$L_{n-1} \neq L(b_{n-1}) = L(1) = 1$$

ise her $n \geq 1$ için $c_{k_n}^{(n)} z^{k_n}$ (L_{n-1} serisinin sıfırdan farklı ilk terimi) ifadesi olarak alınıp devam edilebilir. Böylece $a_n = c_{k_n}^{(n)}$ ve $\alpha_n = k_n$ olarak adlandırılıp

$$L_n := \frac{L(a_n z^{\alpha_n})}{L_{n-1} - 1}$$

serisi elde edilir. $\lambda(a_n z^{\alpha_n}) = \alpha_n \geq 1$, $\lambda(b_n) = \lambda(1) = 0$ ve $\lambda(L_n) = 0$ olduğundan yeni isimlendirmeyle oluşan C-kesri L_0' a karşılık gelir. Öte yandan uygun bir n doğal sayısı için $n = m \geq 0$ olup $L_k \neq 1$ $(0 \leq k \leq m-1)$ ve $L_m = 1$ olması durumunda ikinci durum da gerçeklenir.

Not 2.14. Bir $C(z) = 1 + c_1 z + c_2 z^2 + c_3 z^3 + \dots$ serisine karşılık gelen C-sürekli kesri aşağıdaki yöntemle bulunur. $C(z)$ serisinin $c_1 z + c_2 z^2 + c_3 z^3 + \dots$ kısmı $c_1 z$ parantezine alınırsa

$$c_1 z + c_2 z^2 + c_3 z^3 + \dots = c_1 z \left(1 + \frac{c_2 z}{c_1} + \frac{c_3 z^2}{c_1} + \right)$$

bulunur. $1 + \frac{c_2 z}{c_1} + \frac{c_3 z^2}{c_1} + \dots$ serisinin tersi $C^{(1)}(z) := 1 + c_1^{(1)} z + c_2^{(1)} z^2 + \dots$ olarak adlandırılsın. Bu durumda

$$C(z) = 1 + \frac{c_1 z}{1 + c_1^{(1)} z + c_2^{(1)} z^2 + \dots} \tag{2.91}$$

elde edilir. $C(z)$ serisi için yapılan adımlar $C^{(1)}(z)$ serisi için yeniden yapılırsa $C^{(2)}(z) := 1 + c_1^{(2)} z + c_2^{(2)} z^2 + \dots$ serisi bulunur ve (2.91) eşitliği

$$C(z) = 1 + \frac{c_1 z}{1 + \frac{c_1^{(1)} z}{1 + c_1^{(2)} z + c_2^{(2)} z^2 + \dots}}$$

halini alır. Bu şekilde devam edilirse $C(z)$ serisinin bir sürekli kesir açılımı bulunmuş olur.

i doğal sayıları için $c_1^{(i)} = 1$ olması istenirse bulunan sürekli kesir yeniden düzenlenebilir [10].

Örnek 2.18. $e^z = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$ serisinin basit C-sürekli kesir açılımı

$$1 + \cfrac{z}{1 + \cfrac{\frac{-z}{2}}{1 + \cfrac{\frac{z}{6}}{\ddots}}}$$

veya

$$1 + \cfrac{z}{1 + \cfrac{z}{-2 + \cfrac{z}{-3 + \cfrac{z}{\ddots}}}} \tag{2.92}$$

olarak elde edilir [10].

Tanım 2.27. Bir $C(z)$ serisinin

$$R_{0,0}, R_{1,0}, R_{1,1}, R_{2,1}, \ldots, R_{m,m}, R_{m+1,m}, \ldots$$

Padé yaklaşımları ile oluşturulan diziye $C(z)$ serisinin Padé yaklaşımlarının merdiven dizisi denir. Bu dizinin merdiven dizisi olarak adlandırılmasının sebebi $C(z)$ serisinin Padé tablosunda aşağıdaki gibi gözükmesidir.

$m \diagdown n$	0	1	2	3	$\cdots$
0	$R_{0,0}$				
1	$R_{1,0}$	$R_{1,1}$			
2		$R_{2,1}$	$R_{2,2}$		
3			$R_{3,2}$	$R_{3,3}$	
4				$R_{4,3}$	$\vdots$
$\vdots$				$\vdots$	$\vdots$

Teorem 2.24. a) $L = 1 + c_1 z + c_2 z^2 + \ldots$ bir formal kuvvet serisi olmak üzere bu serinin Padé yaklaşımlarının merdiven dizisinin tüm terimleri normal olsun. Bu durumda, $a_n \neq 0$ olmak üzere (2.88) biçiminde öyle bir C-kesri vardır ki $m = 0, 1, 2, \ldots$ için

$$f_{2m} = R_{m,m} \quad \text{ve} \quad f_{2m+1} = R_{m+1,m}$$

sağlanır.

b) (2.90) biçimindeki basit C-kesrine karşılık gelen formal kuvvet serisi $L = 1 + c_1 z + c_2 z^2 + \ldots$ olsun. L serisinin Padé yaklaşımları $R_{m,n} = \frac{P_{m,n}(z)}{Q_{m,n}(z)}$ ile gösterilsin. Bu durumda L serisinin merdiven dizisinin Padé yaklaşımları

$$R_{0,0}, R_{1,0}, R_{1,1}, R_{2,1}, R_{2,2} \ldots$$

olmak üzere $m = 0, 1, 2, \ldots$ için $f_{2m} = R_{m,m}$ ve $f_{2m+1} = R_{m+1,m}$ eşitlikleri sağlanır. Üstelik

$$deg(P_{m,n}(z)) = m \quad \text{ve} \quad deg(Q_{m,n}(z)) = n$$

olur. Diğer bir deyişle merdiven dizisindeki yaklaşımlar normaldir [4].

İspat. a) $L = 1 + c_1 z + c_2 z^2 + \ldots$ serisinin merdiven dizisindeki $R_{0,0}, R_{1,0}, R_{1,1}, \ldots$ yaklaşımlarının hepsi normal olsun. Bu dizideki her $R_{m,n}$ için $deg(P_{m,n}(z)) = m$ ve $deg(Q_{m,n}(z)) = n$ dir. $m = 0, 1, 2, \ldots$ olmak üzere $\{A_n\}$ ve $\{B_n\}$ dizileri,

$$A_{2m} = P_{m,m}(z), \quad A_{2m+1} = P_{m+1,m}(z), \quad B_{2m} = Q_{m,m}(z), \quad B_{2m+1} = Q_{m+1,m}(z)$$

biçiminde tanımlansın. O halde L serisinin merdiven dizisindeki yaklaşımlar için

$$R_{m,m} = \frac{P_{m,m}(z)}{Q_{m,m}(z)} = \frac{A_{2m}}{B_{2m}}$$

ve

$$R_{m+1,m} = \frac{P_{m+1,m}(z)}{Q_{m+1,m}(z)} = \frac{A_{2m+1}}{B_{2m+1}}$$

eşitlikleri oluşturulabilir. Bu normal Padé yaklaşımları ile oluşturulan $\{f_n\} := \left\{\frac{A_n}{B_n}\right\}$ dizisinin bütün elemanları birbirinden farklıdır. Birbirinden farklı her n, p doğal sayı çifti için $f_n \neq f_p$ olduğundan $p = n - 1$ alınırsa

$$f_n \neq f_{n-1} \Rightarrow \frac{A_n}{B_n} \neq \frac{A_{n-1}}{B_{n-1}} \Rightarrow A_n B_{n-1} \neq A_{n-1} B_n$$

olur. O halde her n doğal sayısı için

$$A_n B_{n-1} - A_{n-1} B_n \neq 0$$

koşulu sağlanır. Diğer yandan $A_n, B_n \in \mathbb{C}$ olmak üzere $A_{-1} = 1$, $A_0 = b_0$, $B_{-1} = 0$, $B_0 = 1$ varsayımları ile

$$b_0(z) + \underset{n=1}{\overset{\infty}{\mathcal{K}}} \left(\frac{a_n(z)}{b_n(z)} \right)$$

biçiminde n inci yaklaşımının payı A_n ve paydası B_n olan tek bir sürekli kesir bulunur. Bu kesrin elemanları yani kısmi pay ve paydaları,

$$b_0 = A_0, \quad a_1 = A_1 - A_0 B_1, \quad b_1 = B_1 \tag{2.93}$$

olmak üzere $n \in \mathbb{N}$ ($n \geq 2$) için

$$a_n = \frac{A_{n-1}B_n - A_n B_{n-1}}{A_{n-1}B_{n-2} - A_{n-2}B_{n-1}}, \quad b_n = \frac{A_n B_{n-2} - A_{n-2}B_n}{A_{n-1}B_{n-2} - A_{n-2}B_{n-1}} \tag{2.94}$$

biçimindedir. $L = 1 + c_1 z + c_2 z^2 + \ldots$ serisinin $R_{m,n}$ normal Padé yaklaşımlarının payı ve paydası

$$P_{m,n} = p_0 + p_1 z + p_2 z^2 + \ldots + p_m z^m$$

ve

$$Q_{m,n} = 1 + q_1 z + q_2 z^2 + \ldots + q_n z^n$$

şeklinde ifade edilsin. $m = 0,\ n = 0$ için

$$R_{0,0} = \frac{P_{0,0}(z)}{Q_{0,0}(z)} = \frac{A_0}{B_0}$$

olup normalizasyon koşullarından $Q_{0,0}(z) = 1$ ve $P_{0,0}(z) = c_0 = 1$ olduğundan

$$A_0 = 1 \quad \text{ve} \quad B_0 = 1$$

olur. O halde $R_{0,0} = 1$ dir. $m = 1,\ n = 0$ için

$$R_{1,0} = \frac{P_{1,0}(z)}{Q_{1,0}(z)} = \frac{A_1}{B_1}$$

olup burada (2.68) denklem sisteminin geçerli olması için

$$\begin{aligned} c_0 q_0 &= p_0 \\ c_1 q_0 + c_0 q_1 &= p_1 \end{aligned}$$

sağlanmalıdır. $deg(Q_{1,0}(z)) = 0$ olduğundan $q_1 = 0$ olur. $q_0 = 1$ olduğundan $c_1 = p_1$ olmalıdır. $P_{1,0}(z) = 1 + p_1 z = 1 + c_1 z$ ve $Q_{1,0}(z) = q_0 = 1$ dir. O halde

$$A_1 = 1 + c_1 z \quad \text{ve} \quad B_1 = 1$$

bulunur. (2.93) ve (2.94) eşitliklerinden

$$b_0 = A_0 = 1,$$

$$b_1 = B_1 = 1,$$

$$a_1 = A_1 - A_0 B_1 = 1 + c_1 z - 1 = c_1 z$$

olur. $m = 0, 1, 2, \ldots$ için $n = 2m$ ise

$$a_{2m}(z) = \frac{A_{2m-1}B_{2m} - A_{2m}B_{2m-1}}{A_{2m-1}B_{2m-2} - A_{2m-2}B_{2m-1}} = \frac{P_{m,m-1}Q_{m,m} - P_{m,m}Q_{m,m-1}}{P_{m,m-1}Q_{m-1,m-1} - P_{m-1,m-1}Q_{m,m-1}}$$

ve

$$b_{2m}(z) = \frac{A_{2m}B_{2m-2} - A_{2m-2}B_{2m}}{A_{2m-1}B_{2m-2} - A_{2m-2}B_{2m-1}} = \frac{P_{m,m}Q_{m-1,m-1} - P_{m-1,m-1}Q_{m,m}}{P_{m,m-1}Q_{m-1,m-1} - P_{m-1,m-1}Q_{m,m-1}},$$

$n = 2m + 1$ ise

$$a_{2m+1}(z) = \frac{A_{2m}B_{2m+1} - A_{2m+1}B_{2m}}{A_{2m}B_{2m-2} - A_{2m-1}B_{2m}} = \frac{P_{m,m}Q_{m+1,m} - P_{m+1,m}Q_{m,m}}{P_{m,m}Q_{m-1,m-1} - P_{m,m-1}Q_{m,m}}$$

ve

$$b_{2m+1}(z) = \frac{A_{2m+1}B_{2m-1} - A_{2m-1}B_{2m+1}}{A_{2m}B_{2m-1} - A_{2m-1}B_{2m}} = \frac{P_{m+1,m}Q_{m,m-1} - P_{m,m-1}Q_{m+1,m}}{P_{m,m}Q_{m,m-1} - P_{m,m-1}Q_{m,m}}$$

şeklindedir.

Her $n \in \mathbb{N}$ için $a_n(z) = d_n z$ ve $b_n(z) = e_n$ olacak biçimde her elemanı sıfırdan farklı olan $\{d_n\}$ ve $\{e_n\}$ dizilerinin var olduğu gösterilirse sürekli kesirlerin denkliği yardımıyla

$$b_0(z) + \underset{n=1}{\overset{\infty}{\mathcal{K}}} \left(\frac{a_n(z)}{b_n(z)} \right)$$

ifadesinin bir basit C-kesrine denk olduğu bulunur. Burada $a_n(z) = d_n z$ ve $b_n(z) = e_n$ eşitlikleri sadece $n = 2m$ için ispatlanacaktır. Eşitliklerin $n = 2m + 1$ için de doğru olduğu benzer şekilde gösterilebilir.

$$deg(P_{m,m-1}(z)) = m, \ deg(Q_{m,m-1}(z)) = m - 1$$
$$deg(P_{m,m}(z)) = m, \ deg(Q_{m,m}(z)) = m$$

olduğundan

$$deg(P_{m,m-1}(z)Q_{m,m}(z)) = 2m \quad \text{ve} \quad deg(P_{m,m}(z)Q_{m,m-1}(z)) = 2m - 1$$

olur. Buradan

$$deg(P_{m,m-1}(z)Q_{m,m}(z) - P_{m,m}(z)Q_{m,m-1}(z)) = \max\{2m, 2m - 1\} = 2m \tag{2.95}$$

bulunur. Hipotez gereği $L = 1 + c_1 z + c_2 z^2 + \ldots$ formal kuvvet serisinin merdiven dizisindeki Padé yaklaşımları normal olduğundan

$$\lambda(L - L(R_{m,m-1})) = m + m - 1 + 1 = 2m$$

ve

$$\lambda(L - L(R_{m,m})) = m + m + 1 = 2m + 1$$

olur. Bu bilgiler kullanılarak $\lambda(R_{m,m-1} - R_{m,m}) = 2m$ bulunur.

$$\lambda(P_{m,m-1}Q_{m,m} - P_{m,m}Q_{m,m-1}) \geq \lambda(R_{m,m-1} - R_{m,m})$$

olduğundan

$$\lambda(P_{m,m-1}Q_{m,m} - P_{m,m}Q_{m,m-1}) \geq 2m \tag{2.96}$$

elde edilir. (2.95) eşitliğinde parantez içindeki ifadenin derecesi tam olarak $2m$ bulunmuştu. (2.95) eşitliği ve (2.96) eşitsizliğinden bir $k_{2m} \neq 0$ sayısı bulunur ki

$$P_{m,m-1}Q_{m,m} - P_{m,m}Q_{m,m-1} = k_{2m}z^{2m} \tag{2.97}$$

olur. Yani bu eşitliklerin hepsinin geçerli olması için gerek ve yeter koşul parantez içindeki ifadenin sadece $2m$ li terimden oluşmasıdır. Dikkat edilecek olursa $a_{2m}(z)$ ifadesinin payı (2.97) ifadesidir. Benzer biçimde

$$\lambda(P_{m,m-1}Q_{m-1,m-1} - P_{m-1,m-1}Q_{m,m-1}) = 2m - 1$$
$$\lambda(L - L(R_{m,m-1})) = 2m \quad \text{ve} \quad \lambda(L - L(R_{m-1,m-1})) = 2m - 1$$

elde edilir. Burada da parantezin içi sadece $2m-1$ li terimden oluşmak zorundadır. Bu durumda

$$P_{m,m-1}Q_{m-1,m-1} - P_{m-1,m-1}Q_{m,m-1} = l_{2m}z^{2m-1} \tag{2.98}$$

olacak şekilde sıfırdan farklı bir l_{2m} sayısı vardır. $a_{2m}(z)$ ifadesinin paydası (2.98) ifadesidir. Sonuç olarak, (2.97) ve (2.98) eşitliklerinden

$$a_{2m}(z) = \frac{k_{2m}z^{2m}}{l_{2m}z^{2m-1}} = \frac{k_{2m}}{l_{2m}}z$$

olur. $d_{2m} := \frac{k_{2m}}{l_{2m}}$ olarak adlandırılırsa $a_{2m}(z) = d_{2m}z$ olur ve $k_{2m} \neq 0$ olduğundan $d_{2m} \neq 0$ dır. Benzer şekilde $b_{2m}(z) = e_{2m}$ olacak şekilde sıfırdan farklı e_{2m} sayısının varlığı da aşağıdaki gibi gösterilebilir.

$$\lambda(L - L(R_{m,m})) = m + m + 1 = 2m + 1$$
$$\lambda(L - L(R_{m-1,m-1})) = m - 1 + m - 1 + 1 = 2m - 1$$

olduğundan $\lambda(R_{m,m} - R_{m-1,m-1}) = 2m - 1$' dir.

$$\lambda(P_{m,m}Q_{m-1,m-1} - P_{m-1,m-1}Q_{m,m}) \geq \lambda(R_{m,m} - R_{m-1,m-1}) = 2m - 1$$

dir. Diğer yandan parantez içindeki ifadenin derecesi tam olarak $2m - 1$ olduğundan eşitliklerin doğru olabilmesi için gerek ve yeter koşul

$$P_{m,m}Q_{m-1,m-1} - P_{m-1,m-1}Q_{m,m} = g_{2m}z^{2m-1} \tag{2.99}$$

olacak şekilde sıfırdan farklı g_{2m} sayısının bulunmasıdır. (2.99) ifadesi $b_{2m}(z)$ nin payıdır. (2.98) ile (2.99) eşitlikleri göz önüne alınırsa

$$b_{2m}(z) = \frac{g_{2m}z^{2m-1}}{l_{2m}z^{2m-1}} = \frac{g_{2m}}{l_{2m}}$$

elde edilir. $e_{2m} := \frac{g_{2m}}{l_{2m}}$ olarak adlandırılırsa, $b_{2m}(z) = e_{2m}$ olup $e_{2m} \neq 0$ dır. $n = 2m+1$ için de $a_{2m+1} = d_{2m+1}z$ ve $b_{2m+1}(z) = e_{2m+1}$ olacak şekilde sıfırdan farklı d_{2m+1} ve e_{2m+1} sayıları bulunur. O halde her $n \in \mathbb{N}$ için $a_n(z) = d_nz$ ve $b_n(z) = e_n$ olduğundan

$$b_0(z) + \mathop{\mathcal{K}}_{n=1}^{\infty} \left(\frac{a_n(z)}{b_n(z)}\right) = 1 + \mathop{\mathcal{K}}_{n=1}^{\infty} \left(\frac{d_nz}{e_n}\right) \tag{2.100}$$

şeklindedir. Teorem 2.3 göz önüne alınarak $s_0 = 1$ olmak üzere her $n \in \mathbb{N}$ için $\{s_n\} = \{\frac{1}{e_n}\}$ sayı dizisi yardımıyla, (2.100) sürekli kesri,

$$1 + \mathop{\mathcal{K}}_{n=1}^{\infty} \left(\frac{h_nz}{1}\right), \quad (h_n = d_ns_n)$$

basit C-kesrine denk bulunur. O halde teoremin a) şıkkı ispatlanmış olur.

b) $a_n \neq 0$ olmak üzere (2.90) basit C-kesrinin n inci pay, payda ve yaklaşımları sırasıyla A_n, B_n ve f_n olsun. Bu basit C-kesrinde $b_0 = 1 = A_0$ ve her $n \in \mathbb{N}$ için $b_n = 1,\ a_n := a_nz$ olup dır. O halde rekürans denklemleri

$$A_n = A_{n-1} + a_nA_{n-2} \quad \text{ve} \quad B_n = B_{n-1} + a_nB_{n-2}$$

halini alır. A_n ve B_n bu bilgiler ile yeniden yazılırsa, $k \in \mathbb{N}$ için $\beta_{k,k} = a_2a_4 \ldots a_{2k} \neq 0$

ve $\gamma_{k,k} = a_1 a_3 \ldots a_{2k-1} \neq 0$ olmak üzere

$$A_{2k} = 1 + \alpha_{k,1} z + \ldots + \alpha_{k,k} z^k$$
$$B_{2k} = 1 + \beta_{k,1} z + \ldots + \beta_{k,k} z^k$$
$$A_{2k-1} = 1 + \gamma_{k,1} z + \ldots + \gamma_{k,k} z^k$$
$$B_{2k-1} = 1 + \delta_{k,1} z + \ldots + \delta_{k,k-1} z^{k-1}$$

ve

$$deg(A_{2k}) = k, \quad deg(B_{2k}) = k$$
$$deg(A_{2k-1}) = k, \quad deg(B_{2k-1}) = k-1$$

olur. O halde $m \geq 0$ için $f_{2m+1} = \frac{A_{2m+1}}{B_{2m+1}}$ yaklaşımı $[m+1, m]$ tipinde bir rasyonel fonksiyondur. $f_{2m} = \frac{A_{2m}}{B_{2m}}$ yaklaşımı ise $[m, m]$ tipinde bir rasyonel fonksiyondur.

Teorem 2.23 den (2.90) basit C-kesrine karşılık gelen bir $L = 1 + c_1 z + c_2 z^2 + \ldots$ formal kuvvet serisi vardır. Üstelik $n = 0, 1, 2, \ldots$ için $\lambda(L - L(f_n)) = n + 1$ dir. O halde

$$\lambda(L - L(f_{2m})) = 2m + 1 \quad \text{ve} \quad \lambda(L - L(f_{2m+1})) = 2m + 2$$

olur. Sonuç olarak $f_{2m} = R_{m,m}$ ve $f_{2m+1} = R_{m+1,m}$ olup

$$deg(P_{m,m}) = deg(A_{2m}) = m, \qquad deg(Q_{m,m}) = deg(B_{2m}) = m$$
$$deg(P_{m+1,m}) = deg(A_{2m+1}) = m + 1, \quad deg(Q_{m+1,m}) = deg(B_{2m+1}) = m$$

elde edilir.

Örnek 2.19. Örnek 2.18 deki sürekli kesrin n inci yaklaşımları Tablo 2.3 teki Padé yaklaşımlarının merdiven dizisine karşılık gelir.

$$f_0 = 1 = R_{0,0}$$
$$f_1 = 1 + z = R_{1,0}$$
$$f_2 = \frac{2+z}{2-z} = \frac{1-\frac{z}{2}}{1-\frac{z}{2}} = R_{1,1}$$
$$f_3 = \frac{6+4z+z^2}{6-2z} = \frac{1+\frac{2z}{3}+\frac{z^2}{6}}{1-\frac{z}{3}} = R_{2,1}$$

olup $m = 0, 1, 2, \ldots$ için

$$f_{2m} = R_{m,m} \quad \text{ve} \quad f_{2m+1} = R_{m+1,m}$$

sağlanır.

Örnek 2.20. $C(z) = z - \frac{z^3}{3} + \frac{z^5}{5} - \frac{z^7}{7} + \ldots$ serisinin bir sürekli kesir açılımı

$$\cfrac{z}{1 + \cfrac{z^2}{3 + \cfrac{4z^2}{5 + \cfrac{9z^2}{7 + \cfrac{16z^2}{\ddots}}}}}$$

biçiminde bulunur. Bu sürekli kesrin üçüncü yaklaşımı

$$f_3 = \frac{A_3(z)}{B_3(z)} = \frac{15z + 4z^3}{15z + 9z^2}$$

olup f_3 yaklaşımının kuvvet serisi açılımı

$$z - \frac{z^3}{3} + \frac{z^5}{5} - \frac{3z^7}{25} + \ldots$$

şeklindedir. O halde f_3 yaklaşımı $C(z)$ serisinin $[3, 2]$ tipinde Padé yaklaşımı olur [11].

3. MALZEME VE YÖNTEM

Bu tez çalışmasında, tez konusu ile ilgili yayınlanmış ulusal ve uluslarası kitap,makale ve dergiler üniversite kütüphanelerinden ve internet üzerindeki veritabanlarından temin edilerek incelenmiştir. Bu yayınların ilgili kısımları birbirleriyle bağlantılı ve ilişkili hale getirilerek okuyucular için takip edilmesi ve anlaşılması kolay bir metin haline getirilmeye çalışılmıştır. Yazım aşamasında Latex ve Word programları kullanılmıştır.

4. BULGULAR

$b_0 \in \mathbb{C}$ ve her $n \in \mathbb{N}$ için $a_n, b_n \in \mathbb{C}$ olmak üzere

$$b_0 + \cfrac{a_1}{b_1 + \cfrac{a_2}{b_2 + \cfrac{a_3}{b_3 + \cfrac{a_4}{\ddots}}}}$$

biçiminde tanımlanan sürekli kesirlerin bir n doğal sayısına karşılık n inci yaklaşımı olan $f_n = \frac{A_n}{B_n}$ için $A_{-1} = 1,\ A_0 = b_0,\ B_{-1} = 0,\ B_0 = 1$ başlangıç koşulları ile

$$A_n = b_n A_{n-1} + a_n A_{n-2}$$
$$B_n = b_n B_{n-1} + a_n B_{n-2}$$

rekürans formülleri ve

$$A_{n-1}B_n - B_{n-1}A_n = (-1)^n \prod_{k=1}^{n} a_k \quad (n \in \mathbb{N})$$

determinant formülü geçerlidir.

Bir sürekli kesrin her yaklaşımına karşılık gelen bir başka sürekli kesir var ise bu iki sürekli kesre denk sürekli kesirler adı verilir. İki sürekli kesrin denk olması durumunuda n inci yaklaşımları sırasıyla f_n ve f_n^* olmak üzere her n doğal sayısı için $f_n = f_n^*$ sağlanır.

$$b_0 + \underset{n=1}{\overset{\infty}{\mathcal{K}}} \left(\frac{a_n}{b_n}\right)$$

ve

$$b_0^* + \underset{n=1}{\overset{\infty}{\mathcal{K}}} \left(\frac{a_n^*}{b_n^*}\right)$$

biçimindeki iki sürekli kesrin denk olması Teorem 2.3 ün koşullarını sağlayan bir $\{s_n\}$ dizisinin var olmasıyla mümkündür. Denk sürekli kesirler, üzerinde çalışılan sürekli kesrin daha basit sayısal değerlerle ifade edilebilen sürekli kesirlere dönüştürülmesine ve incelemelerin daha kolay yapılmasına olanak sağlaması açısından önem taşır.

Teorem 2.29 de $b_0 \in \mathbb{R}$ ve $b_i \in \mathbb{R}^+$ olmak üzere

$$b_0 + \cfrac{1}{b_1 + \cfrac{1}{b_2 + \cfrac{1}{b_3 + \cfrac{1}{\ddots}}}}$$

sürekli kesrinin yakınsak olması için gerek ve yeter koşulun $\sum b_n$ sonsuz serisinin ıraksak olması gerektiği gösterildi.

Bir sürekli kesirde b_0 tam sayı ve b_i sayılarının doğal sayı olması halinde

$$b_0 + \cfrac{1}{b_1 + \cfrac{1}{b_2 + \cfrac{1}{b_3 + \cfrac{1}{\ddots}}}}$$

sürekli kesri basit sürekli kesir olarak adlandırılır. Teorem 2.8 in bir sonucu olarak her basit sürekli kesrin yakınsak olduğu ve Teorem 2.11 den her α reel sayısının bir tek basit sürekli kesir açılımının olduğu elde edildi. Teorem 2.11 de bir rasyonel sayının basit sürekli kesir açılımının sonlu olduğu ve irrasyonel sayının basit sürekli kesir açılımının sonsuz olduğu gösterildi. Bir reel sayının basit sürekli kesir açılımının periyodik olması için gerek ve yeter koşulun bu sayının bir kuadratik irrasyonel olması Teorem 2.13 te incelendi.

$b_0 \in \mathbb{R}$ ve $b_i \in \mathbb{R}^+$ olmak üzere

$$b_0 + \cfrac{1}{b_1 + \cfrac{1}{b_2 + \cfrac{1}{b_3 + \cfrac{1}{\ddots}}}}$$

biçimindeki bir sürekli kesrin çift yaklaşımları artan, tek yaklaşımları azalan bir dizidir. Üstelik her tek yaklaşım ardışık çift yaklaşımından büyüktür. Bu sürekli kesir bir α reel sayısına yakınsıyorsa yaklaşımlar arasındaki ilişkinin

$$f_0 < f_2 < f_4 < \ldots < f_{2n} < \ldots < \alpha < \ldots < f_{2n+1} < \ldots < f_5 < f_3 < f_1$$

biçiminde olduğu ifade edildi.

α bir reel sayı ve $\frac{a}{b}$ ($a \in \mathbb{Z}$, $b \in \mathbb{Z}^+$) bir rasyonel sayı olmak üzere $0 < d \leq b$ olacak şekildeki her d tam sayısı ve keyfi c tam sayıları ile oluşturulan $\frac{a}{b}$ kesrinden farklı bütün $\frac{c}{d}$ rasyonel sayıları için

$$\left|\alpha - \frac{c}{d}\right| > \left|\alpha - \frac{a}{b}\right|$$

eşitsizliği gerçekleniyorsa $\frac{a}{b}$ kesri α sayısının bir birinci tür en iyi yaklaşımı,

$$|d\alpha - c| > |b\alpha - a|$$

eşitsizliği gerçekleniyorsa $\frac{a}{b}$ kesri α sayısının bir ikinci tür en iyi yaklaşımı olarak adlandırılır. Teorem 2.14 te bir reel sayının her birinci tür en iyi yaklaşımının bu sayıya karşılık gelen sürekli kesrin ya uygun bir n için n inci yaklaşımı ya da bir ortalama kesri olduğu, Teorem 2.15 ve Teorem 2.16 da her ikinci tür en iyi yaklaşımın bir birinci tür en iyi yaklaşım ve her ikinci tür en iyi yaklaşımın bu sayıya karşılık gelen sürekli kesrin uygun bir n için bir n inci yaklaşım olduğu ispat edildi.

Bir $C(z) \in \mathcal{P}$ serisinin en az $m + n$ inci terimine kadar karşılık gelen

$$\frac{P_{m,n}(z)}{Q_{m,n}(z)}$$

rasyonel fonksiyonuna $C(z)$ serisinin $[m, n]$ biçimindeki Padé formu denir. Burada

$$deg(P_{m,n}(z)) \leq m \quad \text{ve} \quad deg(Q_{m,n}(z)) \leq n$$

şeklindedir. $(P_{m,n}(z), Q_{m,n}(z)) = 1$ ise $C(z)$ serisine karşılık gelen $[m, n]$ biçimindeki Padé formu, $[m, n]$ biçimindeki Padé yaklaşımı olarak adlandırılır ve

$$R_{m,n} = \frac{P_{m,n}(z)}{Q_{m,n}(z)}$$

şeklinde gösterilir. Teorem 2.18 de her formal kuvvet serisine karşılık $[m, n]$ biçiminde bir Padé formunun olduğu elde edildi.

Teorem 2.20 den formal kuvvet serisine karşılık gelen Padé yaklaşımlarının eşit olması durumunda, bu yaklaşımlar ile oluşturulan Padé tablosunda belirli bir k değeri için $(k+1).(k+1)$ boyutlu bloklar oluşurken, Toeplitz determinantları ile oluşturulan C-tablosunda $k.k$ boyutlu sıfır blokların oluştuğu elde edildi.

Teorem 2.23 de C-kesirleri ile formal kuvvet serileri arasındaki ilişki verildi. Teorem 2.24 de ise bir formal kuvvet serisinin Padé yaklaşımlarının merdiven dizisi ile, verilen serinin C- kesri arasındaki ilişki ifade edildi.

5. TARTIŞMA VE SONUÇ

Bu tez çalışmasında geniş bir çalışma alanına sahip olan sürekli kesirler ve Padé yaklaşımları konuları ayrı ayrı ele alınarak, aralarındaki ilişki ortaya konmuştur. Padé yaklaşımları ile çalışılan alanlarda uygun durumlarda sürekli kesirler, sürekli kesirlerin bazı kullanım alanlarında da Padé yaklaşımları kullanılabilir.

Sürekli kesirler ile ilgili kaynaklarda genel olarak basit sürekli kesirler incelenirken, bu çalışmada sürekli kesirler en genel haliyle ele alınmıştır.
Rekürans denklemleri algoritmik açıdan basit bir ifadeye sahip olduğundan bilgisayar programlarıyla kolayca hesap edilebildiği için uygulama alanlarında sürekli kesirleri kullanmak elverişlidir. Sürekli kesirler, Diofant ve Pell denklemlerinin çözümünde aktif olarak kullanılır. Bunun dışında bazı diferansiyel denklemlerin çözümünde de kullanılır. Ayrıca reel sayılara en iyi rasyonel yaklaşımları hesaplamada oldukça kullanışlıdır. Sürekli kesirler yardımıyla mühendislik gibi verilerin kullanımını gerektiren alanlarda hata payı belirli bir oranda tutularak rasyonel yaklaşımlarla yapılan çalışmalarda hesaplamaların elde edilmesine olanak sağlar.

Padé yaklaşımları, bir formal kuvvet serisine belirli bir hata payıyla yaklaşımı sağlayan rasyonel fonksiyonları verdiği için önemlidir. Padé yaklaşımının tanımı gereği, formal kuvvet serisinin $[m, n]$ biçimindeki Padé yaklaşımının seri açılımı bu formal kuvvet serisinin en az $m + n$ inci katsayısına kadar eşittir.

Elemanları fonksiyon olarak alınan sürekli kesirler sadece C-kesirleri değildir. C- kesirleri dışında, J, T, g sürekli kesirleri de vardır. Bu tez çalışmasına benzer şekilde J, T, g ve diğer sürekli kesirler çeşitleri ile Padé yaklaşımları ya da formal kuvvet serileri arasındaki ilişkiler araştırılabilir.

Bu çalışmanın devamı olarak sürekli kesirlerin ve Padé yaklaşımlarının hata payları incelenebilir. Ayrıca sürekli kesirler ile Padé yaklaşımları arasındaki ilişkinin varlığı kullanılarak özel durumlar ortaya konabilir.

KAYNAKLAR

[1]. Brezinski, C., 1981, *The Long History of Continued Fractions and Padé Approximants*, Springer Verlag, New York, USA, ISBN: 0-387-15286-5.

[2]. Baker, G.A., 1975, *Part I Algebraic Properties*, Essentials of Padé Approximants, Chapter 1,2,4, Academic Press, New York, USA, ISBN: 0-12-074855-X.

[3]. Khintchine, A.Ya., 1963, *Continued Fractions*, P. Noordhoff, Groningen, The Netherlands.

[4]. Jones, W.B., and Thron, W.J., 1984, *Continued Fractions Analytic Theory and Applications*, Encyclopedia of Mathematics and Its Applications, Browder, F.E.(ed.), 11, Cambridge University Press, New York, USA, ISBN: 978-0-521-30231-9, 1-197.

[5]. Kendirli, B., 2006, *Number Theory*, Mavi Matbaacılık, İstanbul, ISBN: 975-303-21-5.

[6]. Kumar, A., 2012, *Periodic Continued Fractions, Quadratic Irrationalities*, http://ocw.mit.edu/courses/mathematics/18-781-theory-of-numbers-spring-2012/lecture-notes/, [Ziyaret Tarihi: 10 Nisan 2015].

[7]. Çallıalp, F., 2009, *Sayıların Teorisi*, Birsen Yayınevi, İstanbul, ISBN: 978-975-511-518-4.

[8]. Gragg, W.B., 1972, The Pade Table and Its Relation to Certain Algortihms of Numerical Analysis, *SIAM Review*, 14 (1), 1-62.

[9]. Jedynak, R., and Gilewicz, J., 2013, Computation of the c-Table Related to the Padé Approximation, *Journal of Applied Mathematics*, Volume 2013, 1-10.

[10]. Halıcı, S., 2000, *Tek Değişkenli ve Çok Değişkenli Padé Yaklaşımları*, Doktora, Sakarya Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü.

[11]. Lorentzen, L., 2010, Padé Approximation and Continued Fractions, *Applied Numerical Mathematics*, 60 (2010), 1364-1370.

ÖZGEÇMİŞ

Kişisel Bilgiler

Adı Soyadı	Sabire Ceyda Oktar
Uyruğu	T.C.
Doğum tarihi, Yeri	25/06/1990, Şişli/İstanbul
Telefon	05374012331
E-mail	oktars@hotmail.com

Eğitim Bilgileri

Derece	Kurum/Anabilim Dalı/Programı	Yılı
Lisans	İ.Ü. Fen Fakültesi/Matematik	2012
Lise	Galatasaray Lisesi	2008