T.C.
İSTANBUL ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

YÜKSEK LİSANS TEZİ

AMENABLE BANACH CEBİRLERİ VE BEURLING CEBİRLERİ

Mutlu AVCI

Matematik Anabilim Dalı

Matematik Programı

Danışman

Prof. Dr. Serap ÖZTOP

Eylül, 2015

İSTANBUL

Bu çalışma 02/09/2015 tarihinde aşağıdaki jüri tarafından Matematik Anabilim Dalı Matematik programında Yüksek Lisans Tezi olarak kabul edilmiştir.

Tez Jürisi:

Prof. Dr. Serap ÖZTOP (Danışman)
İstanbul Üniversitesi
Fen Fakültesi

Prof. Dr. Erhan ÇALIŞKAN
İstanbul Üniversitesi
Fen Fakültesi

Prof. Dr. Kamuran SAYGILI
İstanbul Üniversitesi
Fen Fakültesi

Doç. Dr. Özgür MARTİN
Mimar Sinan Güzel Sanatlar
Üniversitesi
Fen-Edebiyat Fakültesi

Yard. Doç. Dr. Özkan DEĞER
İstanbul Üniversitesi
Fen Fakültesi

ÖNSÖZ

Yüksek lisans öğrenimimim sırasında ve tez çalışmalarım boyunca gösterdiği destek, özveri ve yönlendirmelerinden dolayı danışmanım Prof. Dr. Serap ÖZTOP' a sonsuz teşekkürlerimi sunarım. Yüksek lisansım boyunca Yurtiçi Yüksek Lisans Burs Programı ile destek sağlayan TÜBİTAK' a teşekkür ederim.
Ayrıca her an desteğini esirgemeyen aileme özellikle ağabeyim Yusuf TİTİZ' e ve eşim Mehmet AVCI' ya teşekkürü bir borç bilirim.

Eylül, 2015 Mutlu AVCI

İÇİNDEKİLER

Sayfa No

SİMGE LİSTESİ

Simgeler	Açıklama
$\mathbf{G}$	: Yerel kompakt grup
μ	: G üzerindeki Haar ölçümü
$\mathbf{C_c(G)}$	: G üzerinde tanımlı kompakt desteğe sahip sürekli fonksiyonlar uzayı
$\mathbf{C_0(G)}$	: G üzerinde tanımlı sonsuzda sıfır olan fonksiyonlar uzayı
$\mathbf{C_b(G)}$	: G üzerinde tanımlı sürekli ve sınırlı fonksiyonlar uzayı
$\mathbf{RUC(G)}$	: G üzerinde tanımlı $C_b(G)$ ye ait sağ düzgün sürekli fonksiyonlar uzayı
$\mathbf{LUC(G)}$	: G üzerinde tanımlı $C_b(G)$ ye ait sol düzgün sürekli fonksiyonlar uzayı
$\mathbf{UC(G)}$	: G üzerinde tanımlı hem sağ hem de sol düzgün sürekli fonksiyonlar uzayı
$\mathbf{L_1(G)}$	: G üzerinde tanımlı reel veya kompleks değerli ölçülebilir ve $\int_G \|f(x)\|dx < \infty$ koşulunu sağlayan fonksiyonlar uzayı
$\mathbf{L_\infty(G)}$	: G üzerindeki esasen sınırlı fonksiyonların uzayı
$\mathbf{w}$	: G üzerindeki ağırlık fonksiyonu
$\mathbf{L_1(w,G)}$	: G üzerindeki ağırlıklı grup cebiri, Beurling cebiri
$\mathbf{L_\infty(w,G)}$	: Beurling cebirinin dual uzayı
$\|\mathbf{f}\|_\mathbf{1}$	: $L_1(G)$ uzayındaki f fonksiyonun normu
$\|\mathbf{f}\|_\mathbf{1,w}$	: $L_1(w,G)$ uzayındaki f fonksiyonun normu
$\mathbf{X^\star}$	: X uzayının dual uzayı
$\mathbf{A^\circ}$	: A kümesinin içi
$\mathbf{b_1(X)}$	: X uzayının birim yuvarı
$\mathbf{M(E)}$	: E üzerinde tanımlı ortalamaların kümesi
$\mathbf{L_a}$	: Sol öteleme operatörü
$\mathbf{R_a}$	: Sağ öteleme operatörü
$\mathbf{suppf}$	: f fonksiyonunun desteği
$\mathbf{H^1(A,X)}$	: 1. Hochschild eş homoloji grubu
$\mathbf{X\hat{\otimes}Y}$	: X ile Y normlu uzaylarının tensör çarpımı
$\|.\|_\pi$	: Projektif norm
$\mathbf{\Delta(x)}$	: Modüler fonksiyon
$\mathbf{z^\star}$	: Zayıf yıldız

ÖZET

YÜKSEK LİSANS TEZİ

AMENABLE BANACH CEBİRLERİ VE BEURLING CEBİRLERİ

Mutlu AVCI

İstanbul Üniversitesi

Fen Bilimleri Enstitüsü

Matematik Anabilim Dalı

Danışman: Prof. Dr. Serap ÖZTOP

Bu tez soyut harmonik analizle ilgilidir ve iki temel amacı vardır.

İlk olarak, hem bir yerel kompakt grubun hem de bir Banach cebirinin amenable olmasını açıklamaktır. Eğer $(L_\infty(G))^\star$ de verilen grup işlemine göre sol değişmezlik koşulunu sağlayan normu 1 olan pozitif , doğrusal bir fonksiyonel varsa G yerel kompakt grubu amenable olarak adlandırılır. Eğer her X Banach A-bimodül için $D : A \to X^\star$ şeklindeki her türev aynı zamanda bir iç türev ise A Banach cebiri amenable olarak ifade edilir. G yerel kompakt grubun amenable olması için gerek ve yeter koşul G nin grup cebirinin amenable olması Johnson Teoremi olarak bilinir.

İkinci olarak, ağırlıklı grup cebirinin yani Beurling cebirinin tanıtılmasından sonra yerel kompakt grubun amenable olması ile Beurling cebirinin amenable olması arasındaki ilişkiyi çeşitli açılardan incelemektir. G yerel kompakt grup üzerinde tanımlı bir ağırlık alt çarpımsal özelliğini sağlayan ölçülebilir, pozitif bir fonksiyondur. Ağırlıklı grup cebiri, w ağırlık fonksiyonuna göre integrallenebilir, G üzerinde tanımlı ölçülebilir fonksiyonların cebiridir. Böylece G üzerinde tanımlı w ağırlık fonksiyonunun ek koşulu ile Johnson Teoremine benzer bir sonuç elde edileceği [5] makalesi temel alınarak gözlemlenmiştir.

Eylül 2015, 69 sayfa

Anahtar kelimeler: Amenable, sınırlı yaklaşık birim, Beurling cebiri, konvolüsyon, ağırlık, diagonal(köşegensel) ideal, değişmez ortalama

SUMMARY

M. Sc. THESIS

AMENABLE BANACH ALGEBRAS AND BEURLING ALBEGRAS

Mutlu AVCI

İstanbul University

Institute of Graduate Studies in Science and Engineering

Department of Mathematics

Supervisor: Prof. Dr. Serap ÖZTOP

This thesis is related to the abstract harmonic analysis and has two main purposes.

Firstly, we examine the amenability of both a locally compact group G and a Banach algebra. A locally compact group G is called amenable if there is a positive linear functional of norm 1 in $(L_\infty(G))^\star$ that is left invariant with respect to the given group operation. A Banach algebra A is amenable if for any A-bimodule X, any derivation $D : A \to X^\star$ is inner. The fact that a locally compact group G is amenable if and only if the group algebra of G is amenable is known as the Johnson Theorem.

Secondly, after introducing a weighted group algebra, namely the Beurling algebra, we examine some aspects of the relationship between the amenability in a locally compact group and the amenability in the Beurling algebra. A weighted on a locally compact group G is a measurable submultiplicative, strictly positive function. The weighted group algebra is the algebra of measurable functions on G that are integrable with respect to the weight w. Therefore, we observe a result similar to the Johnson Theorem based on the main reference [5] with an additional condition on the weight w defined on G.

September 2015, 69 pages

Keywords: Amenable, bounded approximate identity, Beurling algebra, convolution, weight, diagonal ideal, invariant mean.

1. GİRİŞ

Bu çalışmada G yerel kompakt grup ve A Banach cebiri için amenable olma kavramları çalışılmıştır. Daha sonra Beurling cebirine ilişkin tanımlamalar yapılarak Johnson Teoremine benzer şekilde Beurling cebirinin amenable olması ile G yerel kompakt grubun amenable olması ilişkilendirilmiştir. 1940' lardan beri amenable kavramı soyut harmonik analiz için önemli kavramlardan biri olmuştur.

G yerel kompakt grubun amenable olması $L_\infty(G)$ üzerinde sol değişmezlik koşulunu sağlayan normu 1 olan pozitif , doğrusal bir fonksiyonelin var olmasıyla açıklanmıştır.

Yine A Banach cebirinin amenable olması X Banach A -bimodül olmak üzere A Banach cebirinin her $X^\star$-türevinin aynı zamanda bir iç türev olması veya A Banach cebirinin $X^\star$ katsayılı 1. Hochschild eş homoloji (cohomology) grubu $H^1(A, X^\star)$ olmak üzere her X Banach A-bimodül için $H^1(A, X^\star) = \{0\}$ şeklinde tanımlanmıştır.

Banach cebirinin amenable olması ile yerel kompakt grubunun amenable olması arasındaki ilişki ilk kez 1972 yılında B. E. Johnson tarafından [9] çalışmasında incelenmiştir. Buna göre, $L_1(G)$ Banach cebirinin amenable olması için gerek ve yeter koşul G yerel kompakt grubun amenable olmasıdır. Bu, günümüzde Johnson Teoremi olarak bilinir ve Banach cebirlerinin amenable olması incelenirken temel refarans olarak olarak alınır. Ayrıca A. Ya. Khelemskii ve M. V. Sheinberg tarafından [11] makalesinde Banach cebirleri için genel bir homoloji teorisi geliştirilmiştir. Buna göre, Banach cebirlerinin amenable olması için yaklaşık birimin önemi açığa çıkmıştır ve A Banach cebirinin amenable olması için gerek ve yeter koşulun A Banach cebirinin sınırlı bir yaklaşık biriminin ve diagonal idealinin sınırlı bir sağ yaklaşık biriminin olması şeklinde tanımlanmıştır.

Diğer taraftan G yerel kompakt grup, w G üzerinde tanımlı alt çarpımsal koşulu sağlayan pozitif ölçülebilir fonksiyon olsun. Buna göre,

$$L_1(w,G) = \{f : G \to \mathbb{C} \mid \ fw \in L_1(G)\}$$

şeklinde ifade edilmiştir. Bu uzay, girişim (konvolüsyon) işlemine göre birimli olmayan bir Banach cebiridir ve G nin ağırlıklı grup cebiri olarak adlandırılır. Bu cebir ilk kez 1938 yılında A. Beurling tarafından tanıtıldığından Beurling cebiri olarak da adlandırılır. Özel olarak $w = 1$ ise $L_1(G)$ grup cebiri elde edilir. Öte yandan G nin grup cebiri ve ağırlıklı grup cebiri soyut harmonik analizin önemli çalışma alanlarındandır.

Bu tezde G yerel kompakt grup μ Haar ölçüsü olmak üzere $L_1(w,G)$ ağırlıklı grup cebirinin amenable olması ile G yerel kompakt grubun amenable olması [5] makalesi temel alınarak ilişkilendirilmiştir. Johnson Teoremi ağırlıklı durumlar için yorumlanarak $L_1(w,G)$ Beurling cebirinin amenable olması için gerek ve yeter koşul G yerel kompakt grubunun amenable olması ve $\sup\{\Omega(g) \ \mid \ g \in G\} < \infty$ olması şeklinde verilmiştir.

Bu çalışma Giriş, Genel Kısımlar, Bulgular, Malzeme ve Yöntem , Tartışma ve Sonuç olarak beş bölümde düzenlenmiştir.

Genel kısımlar beş alt bölüme ayrılarak tezin genel kapsamı burada verilmiştir. İlk olarak, hazırlık aşaması niteliğinde tezde kullanılan önemli tanım ve teoremler sunulmuştur. İkinci olarak G yerel kompakt grubun amenable olması kavramı verilmiştir. Bunun için öncelikle ortalama (mean) ve değişmez (invaryant) kavramları tanıtılmıştır. Daha sonra amenable gruba ilişkin örnekler ve özellikler verilmiştir. Yine üçüncü alt bölümde genel olarak Banach cebirin amenable olması incelenmiştir. Bunun için öncelikle bimodül, türev, iç türev ve Hochschild eş homoloji kavramları tanıtılmıştır. Daha sonra amenable Banach cebirine ait özellikler sunulmuştur. Son olarak süper-amenable Banach cebiri kavramı ve buna ait özellikler verilmiştir.

Dördüncü alt bölümde amenable olmasını inceleyeceğimiz Banach cebiri olan Beurling cebiri tanıtılmıştır. Bunun için G yerel kompakt grup üzerinde tanımlı ağırlık fonksiyonu w ve temel özellikleri verilmiştir. Bu tez çalışmasının temel amaçlarından biri Beurling cebirinin amenable olması kavramı olduğundan $L_1(G,w)$ ağırlıklı grup cebirine ait özelliklere yer verilmiştir.

Son olarak G yerel kompakt grup, w ağırlık fonksiyonu olmak üzere $L_1(G,w)$ Beurling cebirinin amenable olması ile G yerel kompakt grubun amanable olması Johnson Teoremine benzer şekilde ilişkilendirilmiş ve Johnson'un ağırlıksız durumlar için yaptığı çalışma bu kısımda ağırlıklı durum için uygulanmıştır. Bu uygulanırken A. Ya. Khelemskii ve M. V. Sheinberg [11] ve Grønbæk [5] makaleleri temel alınmıştır.

Malzeme ve Yöntem bölümümde tezde kullanılan yöntemler tanıtılmıştır.

Bulgular bölümde ise Johnson Teoremi ağırlıklı grup cebiri için yorumlanmıştır.

Son bölümde çalışmanın genel bir değerlendirmesi yapılarak konuya ilişkin çalışmalardan bahsedilmiştir.

2. GENEL KISIMLAR

2.1. ÖN BİLGİLER

Bu kısımda tezde kullanılan önemli tanım ve teoremler verilmiştir.

Tanım 2.1. $(X, \|.\|)$ bir normlu uzay ve X, K cismi üzerinde bir cebir olsun. Eğer her $x, y \in X$ için

$$\|xy\| \leq \|x\|\|y\|$$

eşitsizliği sağlanırsa X cebirine K cismi üzerinde bir normlu cebir denir. Eğer her $x, y \in X$ için $xy = yx$ koşulu sağlanırsa X cebirine değişmeli normlu cebir bir $e \in X$ elemanı, her $x \in X$ için $ex = xe = x$ olacak şekilde varsa X'e birimli normlu cebir denir e elemanına da X'in birimi denir. Ayrıca $(X, \|.\|)$ normlu uzayı Banach uzayı ise X normlu cebirine Banach cebiri denir.

Tanım 2.2. $(X, \|.\|)$ normlu cebirinde bir $\{e_\alpha\}_{\alpha\in I}$ ağı verilsin. Eğer her $x \in X$ için $\lim_{\alpha\in I} e_\alpha.x = x$ oluyorsa $\{e_\alpha\}_{\alpha\in I}$ ağı, X normlu cebiri için sol yaklaşık; her $x \in X$ için $\lim_{\alpha\in I} x.e_\alpha = x$ oluyorsa $\{e_\alpha\}_{\alpha\in I}$ ağı, X normlu cebiri için sağ yaklaşık birimdir denir. Yine her iki özellik birden sağlanırsa X normlu cebirinin yaklaşık birimi vardır denir. Eğer $\{e_\alpha\}_{\alpha\in I}$ ağı sınırlıysa X normlu cebirinin sınırlı yaklaşık birimi olarak adlandırılır.

Uyarı 2.1. A bir Banach cebiri olsun. $(e_\alpha)_{\alpha\in I}$ ağı A için sınırlı sol yaklaşık birim ve $(f_\beta)_{\beta\in J}$ A için sınırlı sağ yaklaşık birim öyle ki sırasıyla $M > 0, \quad N > 0$ sayıları ile sınırlı olsun.

$$g_{(\alpha,\beta)} = e_\alpha + f_\beta - f_\beta.e_\alpha$$

şeklinde tanımlı $(g_{\alpha,\beta})_{(\alpha,\beta)\in I\times J}$ ağı A için sınırlı yaklaşık birimdir.

$$I \times J \text{ kümesi her } \alpha \in I,\ \beta \in J \text{ için } \ (\alpha, \beta) \leq (\acute{\alpha}, \acute{\beta}) \Leftrightarrow \alpha \leq \acute{\alpha} \ \text{ için } \ \beta \leq \acute{\beta}$$

bağıntısıyla yönlendirilmiş küme olsun. Her $a \in A$ için

$$\|g_{(\alpha,\beta)}.a - a\| \leq \|e_\alpha.a - a\| + \|f_\beta(a - e_\alpha.a)\|$$

$$\leq \|e_\alpha.a - a\| + N\|a - e_\alpha.a\| \to 0$$

benzer şekilde $a.g_{(\alpha,\beta)} \to a$ gerçeklenir. Yine $(\alpha,\beta) \in I \times J$ için

$$\|g_{(\alpha,\beta)}\| \leq \|e_\alpha\| + \|f_\beta\| + \|f_\beta.e_\alpha\| \leq M + N + M.N$$

olduğundan $(g_{(\alpha,\beta)})$ ağı A için sınırlı yaklaşık birimdir ([8]).

Teorem 2.1. (Cohen Çarpım Teoremi) A bir Banach cebiri olmak üzere eğer X bir Banach sol A-modül ve A cebiri sol sınırlı yaklaşık birime sahip ise her $x \in X$ ve $\delta > 0$ için $x = ay$ ve $\|x - y\| \leq \delta$ koşullarını sağlayan $a \in A$ ve $y \in X$ vardır ([8]).

Tanım 2.3. G bir grup, τ da G üzerinde bir topoloji olsun. Eğer

$$\begin{array}{ccc} G \times G & \to & G \\ (g,h) & \to & gh \end{array}$$

ve

$$\begin{array}{ccc} G & \to & G \\ g & \to & g^{-1} \end{array}$$

dönüşümleri sürekliyse G grubuna bir topolojik grup denir. G topolojik grubu Housdorff ve G topolojik grubunun her noktası kapanışı kompakt bir komşuluğa sahipse G ye yerel kompakt grup denir. Eğer G yerel kompakt grubu değişmeli ise yerel kompakt değişmeli grup olarak adlandırılır. Fakat biz bu tezde değişmeli olmayan yerel kompakt gruplar ile çalışacağız.

Tanım 2.4. G yerel kompakt grup olmak üzere G üzerinde tanımlı sıfırdan farklı, pozitif, her $x \in G$ ve G yerel kompakt grubunda her E Borel kümesi için $\mu(xE) = \mu(E)$ $\quad(\mu(Ex) = \mu(E))$ koşulunu sağlayan regüler Borel ölçümü μ sol (sağ) Haar ölçümü olarak adlandırılır ([7]).

Şimdi tezde kullanılan önemli uzayların tanımlarını verelim.

Tanım 2.5. G, μ sol Haar ölçüsüne sahip bir yerel kompakt grup ve p; $1 \leq p \leq \infty$ koşulunu sağlayan bir reel sayı olsun. $L_p(G)$, G üzerinde tanımlı kompleks değerli μ ölçülebilir ve $\int_G |f|^p d\mu < \infty$ koşulunu sağlayan fonksiyonların denklik sınıflarının uzayıdır.

Ayrıca bu uzayın üzerinde tanımlanan $\|f\|_p = (\int_G |f(x)|^p)d\mu^{\frac{1}{p}}$ normuna göre de bir Banach uzayı olduğu bilinmektedir ([14]).

Özel olarak $p = 1$ ise $L_1(G)$ ile gösterilir. Özellikle bu uzay tez için temel öneme sahip olacaktır. Çünkü her $f, g \in L_1(G)$ için

$$f * g(x) = \int f(y).g(y^{-1}x)dy \tag{2.1}$$

şeklinde diğer bir ifadeyle

$$f * g(x) = \int f(xy^{-1}).\triangle(y^{-1})g(y)dy$$

şeklinde de tanımlanan girişim (konvolüsyon) işlemine göre bir Banach cebiridir ve G' nin grup cebiri olarak adlandırılır. Fakat $p \neq 1$ ise $L_p(G)$ nin Banach cebiri olması için gerek ve yeter koşul G grubunun kompakt olmasıdır ([15]).
Yine özel olarak $p = \infty$ ise $L_\infty(G)$ olarak gösterilir ve bu uzay da G üzerinde tanımlı kompleks değerli ve μ ölçülebilir bütün sınırlı fonksiyonlarının denklik sınıflarının Banach uzayıdır ve üzerindeki norm $\|f\|_\infty = ess\sup_{x\in G}|f(x)|$ şeklinde tanımlanır.

Tanım 2.6. G yerel kompakt grup olmak üzere $C_0(G)$; G üzerinde tanımlı, sürekli ve sonsuzda sıfır olan fonksiyonların uzayı $a \in G$ olmak üzere δ_a Dirac ölçüsü

$$\langle f, \delta_a \rangle = f(a), \qquad (f \in C_0(G))$$

şeklinde tanımlanır.

Tanım 2.7. G yerel kompakt grup olmak üzere $C_b(G)$; G üzerinde tanımlı sürekli tüm sınırlı fonksiyonlarının uzayı olmak üzere
i) $G \to C_b(G), \qquad a \mapsto \delta_a * f$ dönüşümü sürekli ise $f \in C_b(G)$ sol düzgün sürekli

ii) $G \to C_b(G), \qquad a \mapsto f * \delta_a$ dönüşümü sürekli ise $f \in C_b(G)$ sağ düzgün sürekli

iii) Eğer hem sağ hem de sol düzgün sürekliyse $f \in C_b(G)$ düzgün süreklidir denir ([13]).

Yukarıda tanımlanan $C_b(G)$ ve $C_0(G)$ uzayları üzerindeki normun $\|f\| = \sup_{x \in G} |f(x)|$ olduğu bilinmektedir.

Dolayısıyla

$$LUC(G) = \{f \in C_b(G) : f \text{ sol düzgün sürekli}\}$$

$$RUC(G) = \{f \in C_b(G) : f \text{ sağ düzgün sürekli}\}$$

$$UC(G) = \{f \in C_b(G) : f \text{ düzgün sürekli}\}$$

şeklinde tanımlanır.

Tanım 2.8. Tanım 2.6 deki Dirac ölçüsü yardımıyla sağ ve sol öteleme fonksiyonları her $f \in L_1(G)$ için

$$L_a f = \delta_a * f, \qquad R_a f = f * \delta_a$$

şeklinde tanımlanır.

Teorem 2.2. G yerel kompakt grup , $a \in G$ ve $f, g \in L_1(G)$ olmak üzere L_a ve R_a operatörleri aşağıdaki özellikleri sağlar

$a_1)$ $L_a f(x) = f(a^{-1}x)$, $b_1) R_a f(x) = f(xa^{-1}) \triangle(a^{-1})$

$a_2)$ $L_{ab} = L_a L_b$, $b_2) R_{ab} = R_b R_a$

$a_3)$ $L_a(f * g) = (L_a f) * g$, $b_3) R_a(f * g) = f * R_a g$

([12]).

Teorem 2.3. Kabul edelim ki $1 \leq p \leq \infty$ ve $f \in L_1(G)$ olsun. O halde aşağıdakiler sağlanır.

i) (2.1) deki integral hemen hemen her x için mutlak yakınsaktır ve $f * g \in L_p(G)$ olup $\|f\|_p \leq \|f\|_1 \|g\|_p$ gerçeklenir.

ii) $p = \infty$ için $f * g$ süreklidir ([8]).

Teorem 2.4. G yerel kompakt grup için aşağıdakiler gerçeklenir.

i) $f \in L_1(G)$ için $x \to L_x$ dönüşümü süreklidir.

ii) $C_c(G)$; G üzerinde tanımlı, sürekli ve kompakt ddestekli fonksiyonların uzayı olmak üzere $C_c(G)$ uzayı $L_1(G)$ uzayında yoğundur.
iii) $L_1(G)$ Banach cebiri sınırlı yaklaşık birime sahiptir ([14], [12], [8]).

Şimdi tezde kullanılan diğer önemli teoremleri verelim.

Teorem 2.5. (Fubini) X, Y yerel kompakt Housdorff uzayları μ, λ sırasıyla X ve Y uzayları üzerinde regüler ölçüler olmak üzere eğer $\mu \geq 0,\ \lambda \geq 0$ ve $f \geq 0$ fonksiyonu $X \times Y$ üzerinde Borel ölçülebilir bir fonksiyon ise

$$\int\limits_{X\times Y} fd(\mu \times \lambda) = \int\limits_{X}\int\limits_{Y} f(x,y)d\lambda(y)d\mu(x) = \int\limits_{Y}\int\limits_{X} f(x,y)d\mu(x)d\lambda(y) \tag{2.2}$$

Yine eğer $\mu,\ \lambda$ sırasıyla X ve Y uzayları üzerinde kompleks değerli regüler ölçüler, f fonksiyonu $X \times Y$ üzerinde Borel ölçülebilir bir fonksiyon ve

$$\int\limits_{X}\int\limits_{Y} |f(x,y)|d|\lambda|(y)d|\mu|(x) < \infty$$

ise eşitlik (2.2) sağlanır ([14]).

Yine tezde kullanılacak zayıf ve zayıf yıldız topolojilerden bahsedelim.

Tanım 2.9. X bir normlu uzay ve $X^\star$ uzayı X uzayının dual uzayı olmak üzere
i) $X^\star$ uzayı üzerinde tanımlanan zayıf yıldız topoloji, her $x \in X$ için

$$X^\star \to \mathbb{R}, \qquad f \mapsto |\langle x, f\rangle|$$

şeklinde tanımlanan yarı normların yardımıyla tanımlanan yerel konveks topolojidir. Ayrıca $(f_\alpha)_\alpha, X^\star$ uzayındaki bir ağının $f \in X^\star$ dönüşümüne zayıf yıldız yakınsaması için gerek ve yeter koşul her $x \in X$ için $\lim\limits_{\alpha}\langle x, f_\alpha\rangle = \langle x, f\rangle$ olmasıdır.
ii) X uzayı üzerinde tanımlanan zayıf topoloji, her $f \in X^\star$ için

$$X \to \mathbb{R}, \qquad x \mapsto |\langle x, f\rangle|$$

şeklinde tanımlanan yarı normların yardımıyla tanımlanan yerel konveks topolojidir. Ayrıca $(x_\alpha)_\alpha$, X uzayındaki bir ağının $x \in X$ dönüşümüne zayıf yakınsaması için gerek ve yeter koşul her $f \in X^\star$ için $\lim\limits_{\alpha}\langle x_\alpha, f\rangle = \langle x, f\rangle$ olmasıdır.

Bundan sonra bu tezde zayıf ve zayıf yıldız sırasıyla z- ve z⋆- şeklinde gösterilmiştir.

Teorem 2.6. (Hahn-Banach) X bir normlu uzay $M \subseteq X$ bir alt uzay olsun. O halde her $f \in M^\star$ için $\|\grave{f}\| = \|f\|$ gerçekleyen $\grave{f} \in X^\star$ genişlemesi vardır.

Teorem 2.7. (Banach-Alaoğlu) X normlu uzay olmak üzere $X^\star$ dual uzayının kapalı birim yuvarı z⋆-kompakttır.

Teorem 2.8. (Goldstine) X bir Banach uzayı olmak üzere X uzayının birim yuvarı $X^{\star\star}$ dual uzayının birim yuvarında z⋆-yoğundur.

Teorem 2.9. (Markov Kakutani Sabit Nokta Teoremi) X lineer topolojik uzay, $\emptyset \neq K \subseteq X$ konveks kompakt alt kümesi ve $\Im$ K dan kendisine giden sürekli lineer dönüşümlerinin değişmeli ailesi olsun. O halde her $T \in \Im$ için $Tp = p$ sağlayan bir $p \in K$ vardır ([3]).

Teorem 2.10. A bir Banach cebiri ve her $a \in A$ ve $\varphi \in A^\star$ için $\langle e_v a, \varphi \rangle \to \langle a, \varphi \rangle$ koşulunu sağlayan (e_φ) sınırlı ağına sahip olsun. O halde A Banach cebiri bir sınırlı sol yaklaşık birime sahiptir ([1]).

2.2. AMENABLE GRUP VE ÖZELLİKLERİ

Bu bölümde G yerel kompakt grup için amenable kavramı verildi. Bunun için öncelikle ortalama (mean) ve değişmezlik (invaryantlık) kavramları tanıtıldı. G yerel kompakt grubun amenable olması için gerek ve yeter koşul $L_\infty(G)$ üzerinde sol değişmez bir ortalama olması şeklinde ifade edildi.

2.2.1. Sol Değişmez Ortalama

Tanım 2.10. G yerel kompakt grup, E $L_\infty(G)$ uzayının alt uzayı $m : E \to \mathbb{C}$ doğrusal, sınırlı ve $\langle 1, m \rangle = \|m\| = 1$ koşulunu sağlayan bir fonksiyonel olsun. Bu durumda m fonksiyoneli E üzerinde bir ortalama olarak adlandırılır.

Tanım 2.11. G yerel kompakt grup, m fonksiyoneli E üzerinde bir ortalma olsun. Eğer her $g \in G,\ f \in E$ için

$$\langle L_g f, m\rangle = \langle \delta_g * f, m\rangle = \langle f, m\rangle$$

koşulu sağlanırsa m sol değişmezdir denir.

Teorem 2.11. G yerel kompakt grup ve $m : E \to \mathbb{C}$ ve $m(1) = 1$ koşulunu sağlayan bir doğrusal fonksiyonel olmak üzere aşağıdakiler denktir.

i) m bir ortalamadır.

ii) m bir büzülmedir. ($\forall f \in E$ için $|\langle f, m\rangle| \leq \|f\|_\infty$)

iii) m pozitiftir. ($\forall f \in E$ ve $f \geq 0$ için $\langle f, m\rangle \geq 0$

İspat: Kabul edelim ki m bir ortalama olsun. O halde m' nin bir büzülme fonksiyonu olduğunu gösterelim. Her $f \in E$ için $m \in E^*$ olduğundan $|\langle f, m\rangle| \leq \|f\|_\infty.\|m\| = \|f\|_\infty$ olur. Bu durumda m bir büzülmedir. Kabul edelim ki m bir büzülme fonksiyonu olsun. O halde m nin bir ortalama olduğunu gösterelim. Böylece öyle bir $f \in b_1(E)$ vardır ki $|\langle f, m\rangle| \leq 1$ olur ve $\sup_{f \in b_1(E)} |\langle f, m\rangle| = \|m\| \leq 1$ elde edilir. Ayrıca $1 \in b_1(E)$ olduğundan $\|m\| \geq |\langle 1, m\rangle| = 1$ koşulu sağlanır.

O halde $\|m\| = 1$ olur. Böylece m nin bir ortalama olduğu elde edilir.

Kabul edelim ki m bir büzülme fonksiyonu olsun. O halde m nin pozitif olduğunu gösterelim. Öncelikle $f \in E$ reel değerli bir fonksiyon olsun. Eğer$\|f\|_\infty = 0$ ise $|\langle f, m\rangle| \leq \|f\|_\infty$ olduğundan $\langle f, m\rangle = 0$ olur. Bu nedenle $\|f\|_\infty > 0$ alalım. Kabul edelim ki $\langle f, m\rangle = a + ib \quad a, b \in \mathbb{R}$ öyleki $b \neq 0$ ve $t \in \mathbb{R}$ için $b^2 + 2bt > \|f\|_\infty^2$ koşullarını sağlasın.

$$(b+t)^2 \leq |a+i(b+t)|^2 = |\langle f+it1, m\rangle|^2 \leq \|f+it1\|_\infty^2 = \|f\|_\infty^2 + t^2$$

olduğundan $b^2+2bt \leq \|f\|_\infty^2$ çelişkisi elde edilir. O halde $b=0$ olur. Böylece $\langle f,m\rangle \in \mathbb{R}$ olur. Şimdi $f \geq 0$ olduğunu kabul edelim ve $g = \frac{2}{\|f\|_\infty} f - 1$ alalım. Bu durumda $\|g\|_\infty \leq 1$ ve $|\langle g,m\rangle| \leq 1$ olur. Yine f reel değerli bir fonksiyon olduğundan g de reel değerlidir. Üstelik $|\langle g,m\rangle| \in [-1,1]$ gerçeklenir. Böylece

$$\langle f,m\rangle = \frac{\|f\|_\infty}{2}\langle 1+g, m\rangle = \frac{\|f\|_\infty}{2}(1+\langle g,m\rangle) \geq 0$$

olduğundan m pozitif olarak elde edilir.

Kabul edelim ki m pozitif bir fonksiyon olsun. O halde m nin büzülme fonksiyonu olduğunu gösterelim. Öncelikle $f \in E$ reel değerli olsun ve $g = \|f\|_\infty.1 - f$ alalım. O halde $g \geq 0$ olur m büzülme olduğundan $\langle g,m\rangle \geq 0$ elde edilir.

$$\langle f,m\rangle = \langle \|f\|_\infty.1, m\rangle - \langle g,m\rangle \leq \|f\|_\infty \langle 1,m\rangle = \|f\|_\infty$$

Benzer şekilde $g = \|f\|_\infty.1 + f$ alalım. Eğer $\langle f,m\rangle \geq -\|f\|_\infty$ ise $|\langle f,m\rangle| \leq \|f\|_\infty$ olur. Keyfi $f \in E$ için $r > 0, \quad \phi \in [0,2\pi)$ olmak üzere $\langle f,m\rangle = r.e^{i\phi}$ alalım ve $f_1, f_2 \in E$ reel değerli fonksiyonlar olmak üzere $e^{-i\phi}f = f_1 + if_2$ sağlasın. O halde

$$|\langle f,m\rangle| = r = e^{-i\phi}\langle f,m\rangle = \langle e^{-i\phi}f, m\rangle = \langle f_1,m\rangle + i\langle f_2,m\rangle$$

olduğundan $\langle f_2, m\rangle = 0$ elde edilir.

$$|\langle f, m\rangle| = \langle f, m\rangle \leq \|f\|_\infty \leq \|e^{-i\phi} f\|_\infty = \|f\|_\infty$$

m' nin büzülme fonksiyonu olduğu elde edilir. Dolayısıyla denklik gösterilmiş olur.

Tanım 2.12. E üzerinde tanımlanan ortalamaların kümesi $M(E)$ ile gösterilir ve

$$M(E) = \{m|m : E \to \mathbb{C} \text{ doğrusal, sınırlı } \langle 1, m\rangle = \|m\| = 1\}$$

şeklinde tanımlanır.

Teorem 2.12. $M(E)$ kümesi $z^\star$- kompakttır ve konvekstir.

İspat: $(m_\alpha)_\alpha;$ $M(E)$ de bir ağ öyle ki $m \in M(E^*)$ olmak üzere $z^\star - \lim_\alpha m_\alpha = m$ gerçeklensin ve $1 = |\langle 1, m_\alpha\rangle| \to \langle 1, m\rangle$ olduğundan $\langle 1, m\rangle = 1$ olur. Keyfi $f \in E$ için $|\langle f, m_\alpha\rangle| \to \langle f, m\rangle$ ve her m_α için $|\langle f, m_\alpha\rangle| \leq \|f\|_\infty$ olduğundan $|\langle f, m\rangle| \leq \|f\|_\infty$ olur ve $M(E), b_1(E^*)$ tarafından içerilir. Her $m \in M(E)$ için $m \in b_1(E^*)$ olur. Böylece $b_1(E^*)$ Banach- Alaoğlu Teoremi' nden $z^\star$-kompakt olduğuna göre $M(E),$ $z^\star$-kompakttır.

Ayrıca $m, n \in M(E)$ ve $t \in [0, 1]$ olmak üzere

$$\langle 1, tm + (1-t)n\rangle = t\langle 1, m\rangle + (1-t)\langle 1.n\rangle = t + 1 - t = 1$$

olur ve her $f \in E$ için

$$|\langle f, tm + (1-t)n\rangle| \leq t|\langle f, m\rangle| + (1-t)|\langle f, m\rangle| \leq t\|f\|_\infty + (1-t)\|f\|_\infty = \|f\|_\infty$$

elde edilir. Böylelikle $tm + (1-t)n \in M(E)$ olur. Dolayısıyla $M(E)$ konvekstir.

Teorem 2.13. G yerel kompakt grup olmak üzere aşağıdakiler denktir.

i) $L_\infty(G)$ üzerinde sol değişmez bir ortalama vardır.

ii) $C_b(G)$ üzerinde sol değişmez bir ortalama vardır.

iii) LUC(G) üzerinde sol değişmez bir ortalama vardır.

İspat: $L_\infty(G)$ üzerindeki sol değişmez bir ortalamanın $C_b(G)$ ye kısıtlanışı da $C_b(G)$ üzerinde sol değişmez bir ortalamadır.

$$m : L_\infty(G) \to \mathbb{C} \text{ doğrusal} \qquad \langle 1, m\rangle = \|m\| = 1$$

şeklindedir.

$$m|_{C_b(G)} : C_b(G) \to \mathbb{C} \text{ olduğundan her } f \in C_b(G) \text{ için } m(f) = m|_{C_b(G)}(f)$$

gerçeklenir. Benzer şekilde $C_b(G)$ üzerindeki sol değişmez ortalamanın $LUC(G)$ ye kısıtlanışı da $LUC(G)$ üzerinde sol değişmez bir ortalamadır. Dolayısıyla $LUC(G) \subset C_b(G)$ olduğundan benzer şekilde gerçeklenir. Yine $LUC(G)$ üzerinde sol değişmez bir ortalamadan $L_\infty(G)$ üzerinde sol değişmez bir ortalama bulalım. K birimin simetrik, kompakt bir komşuluğu ve m , $LUC(G)$ üzerinde sol değişmez bir ortalama olsun ve

$$\begin{aligned} \bar{m} \ : \ L_\infty(G) &\rightarrow \quad \mathbb{C} \\ \phi \quad &\rightarrow \langle \chi_k * \phi, m\rangle \end{aligned}$$

şeklinde tanımlansın. Böylece $\phi \in L_\infty(G)$ teorem (2.3) den $\chi_k * \phi$ ifadesi G üzerinde süreklidir.

Her $x \in G$ ve $\phi \in L_\infty(G)$ için

$$|\chi_k * \phi(x)| \leq \int_G |\chi_k(t) * \phi(t^{-1}x)| m_G(dt) \leq \|\phi\|_\infty \mu_G(K)$$

olduğundan $\chi_k * \phi \in C_b(G)$ olur. Buna ek olarak $(g_\alpha)_\alpha$ G üzerinde tanımlı ve $g \in G$ ye yakınsayan bir ağ olsun.

$$\|L_{g_\alpha}(\chi_k * \phi) - L_g(\chi_k * \phi)\|_\infty = \|(L_{g_\alpha}\chi_k * \phi) - (L_g\chi_k) * \phi\|_\infty = \|(L_{g_\alpha}\chi_k - L_g\chi_k) * \phi\|_\infty$$

$$\leq \|L_{g_\alpha}\chi_k - L_g\chi_k\|_1 \|\phi\|_\infty \hookrightarrow 0 \text{ olduğundan}$$

$\chi_k * \phi \in LUC(G)$ olur. Böylelikle $\bar{m}$ iyi tanımlıdır. Her $\phi, \psi \in L_\infty(G)$ $\alpha, \beta \in K$ için

$$\bar{m}(\alpha\phi + \beta\psi) = \langle \chi_k * (\alpha\phi + \beta\psi), m\rangle = \alpha\langle \chi_k * \phi, m\rangle + \beta\langle \chi_k * \psi, m\rangle = \alpha\bar{m}(\phi) + \beta\bar{m}(\psi)$$

gerçeklendiğinden $\bar{m}$, $L_\infty(G)$ üzerinde doğrusal bir fonksiyoneldir. Ayrıca $y \in G$ için

$$\chi_k * 1(y) = \int_G \chi_k(t).1(y)\mu_G(dt) = \mu_G(K)$$

olduğundan $\bar{m}(1) = \mu_G(K)$ olur. Buna ek olarak $\phi \in L_\infty$ negatif olmayan bir fonksiyon ve $x \in G$ için

$$t \hookrightarrow \chi_k(t).\phi(t^{-1}x) \geq 0$$

elde edilir. Bu yüzden her $x \in G$ için $\chi_k * \phi(x) \geq 0$ olur ve m fonksiyoneli $LUC(G)$ de bir ortalama olduğundan $\phi \in L_\infty$, $\phi \geq 0$ için

$$\bar{m}(\phi) = \langle \chi_k * \phi, m \rangle \geq 0$$

K nın simetriliğinden; her $x \in G$ için $R_g \chi_k = L_{g^{-1}} \chi_k$ sağlanır.

Bundan dolayı $g \in G$, $x \in G$, $\phi \in L_\infty(G)$ için

$$(\chi_k * L_g\phi)(x) = \int_G \chi_k(y).L_g\phi(y^{-1}x)\mu_G(dy) = \int_G R_g\chi_k(y).\phi(y^{-1}x)\mu_G(dy)$$

$$= \int_G L_{g^{-1}}\chi_k(y).\phi(y^{-1}x)\mu_G(dy) = (L_{g^{-1}}\chi_k)*\phi(x) = L_{g^{-1}}(\chi_k*\phi)(x)$$

olduğundan ve m' nin $LUC(G)$' deki değişmezliğinden $g \in G$, $\phi \in L_\infty$ için

$$\bar{m}(L_g\phi) = \langle \chi_k * L_g\phi, m \rangle = \langle L_{g^{-1}}(\chi_k * \phi), m \rangle = \langle \chi_k * \phi, m \rangle = \bar{m}(\phi)$$

elde edilir.

Eğer normalize edersek $\tilde{m} = \frac{\bar{m}}{\mu_G(K)}$ $L_\infty(G)$ üzerinde sol değişmez bir ortalamadır.

2.2.2. Amenable Grup ve Özellikleri

Tanım 2.13. G yerel kompakt grup olmak üzere eğer $L_\infty(G)$ üzerinde sol değişmez bir ortalama bulabiliyorsak G amenable grup olarak adlandırılır.

Aşağıdaki örnekler [13] kitabından alınmıştır.

Örnek 2.1. G kompakt topolojik grup ve μ normalize edilmiş Haar ölçüsü olmak üzere

$$\begin{array}{rcccc} m & : & L_1(G) & \to & \mathbb{C} \\ & & f & \to & \int f\mu_G \end{array}$$

şeklinde tanımlanan dönüşüm $L_1(G)$ üzerinde sol değişmez bir ortalamadır. m fonksiyoneli $L_\infty(G) \subset L_1(G)$ olmak üzere $L_\infty(G)$ ye kısıtlanışı da sol değişmez bir ortalama olduğundan G amenable gruptur. Şimdi bunu gerçekleyelim.

Her $f, g \in L_1(G)$ $\alpha, \beta \in K$ olmak üzere

$$m(\alpha f + \beta g) = \int_G (\alpha f + \beta g) m_G = \alpha \int_G f m_G + \beta \int_G g m_G$$

$$m(1) = \int_G m_G = 1,$$

için

$$|m(f)| = |\int_G f m_G| \leq \int_G |f| m_G = \|f\|_1 \Rightarrow \|m\| \leq 1$$

elde edilir. Dolayısıyla m fonksiyoneli $L_1(G)$ üzerinde bir ortalamadır.

$$\langle m, L_g f\rangle = \int_G L_g f m_G = \int_G f m_G = \langle m, f\rangle$$

gerçeklendiğinden m fonksiyoneli $L_1(G)$ üzerinde sol değişmez bir ortalamadır. Yine $L_\infty(G) \subset L_1(G)$ olduğundan $m\mid_{L_\infty(G)}$ kısıtlanışı da $L_\infty(G)$ üzerinde değişmez bir ortalamadır. Dolayısıyla kompakt olan her grup amenable gruptur.

Örnek 2.2. G yerel kompakt değişmeli grup olsun. K kümesi $L_\infty(G)$ üzerinde tanımlı tüm ortalamaların kümesi olmak üzere $\phi \in L_\infty, n \in (L_\infty(G))^\star$ için

$$T_g : (L_\infty(G))^\star \to (L_\infty(G))^\star, \quad \langle T_g n, \phi\rangle = \langle \delta_g * \phi, n\rangle$$

şeklinde bir dönüşüm tanımlansın. Öncelikle bu dönüşümün $z^\star$-sürekli olduğunu gösterelim. Şimdi $(L_\infty(G))^\star$ üzerinde tanımlı $m \in (L_\infty(G))^\star$ yakınsayan bir $(m_\alpha)_\alpha$ ağı alalım.

$$m_\alpha \xrightarrow{z^\star} m \quad \text{iken} \quad T_g m_\alpha \xrightarrow{z^\star} T_g m$$

olduğunu göstermeliyiz.

Her $\phi \in L_\infty(G)$ için

$$|\langle T_g m_\alpha - T_g m, \phi\rangle| = |\langle T_g(m_\alpha - m), \phi\rangle| = |\langle \delta_g * \phi, m_\alpha - m\rangle| \hookrightarrow 0$$

olduğundan $T_g, \quad z^\star$-süreklidir.

Şimdi K kümesinin dönüşüm altında değişmez kaldığını yani $m \in K$ için $T_g m \in K$ olduğunu gösterelim. Eğer $m \in (L_\infty(G))^\star$ ise $T_g m \in (L_\infty(G))^\star$ olur.

$$\langle T_g m, 1\rangle = \langle \delta_g * 1, m\rangle = \langle L_g 1, m\rangle = 1$$

$$\phi \geq 0 \text{ iken } \langle T_g m, \phi\rangle = \langle \delta_g * \phi, m\rangle = \langle L_g \phi, m\rangle \geq 0$$

olduğundan $T_g m \in K$ elde edilir. Dolayısıyla K invaryanttır. Son olarak her $g, h \in G$ için $T_{gh} = T_g.T_h$ olduğunu gösterelim.

$$\langle T_{gh} m, \phi\rangle = \langle \delta_{gh} * \phi, m\rangle = \langle L_{gh}\phi, m\rangle = \langle T_g m, \phi\rangle.\langle T_h m, \phi\rangle$$

$$L_{gh}\phi(x) = \phi(h^{-1}g^{-1}x) = L_h\phi(g^{-1}x) = L_h.L_g\phi(x)$$

elde edilir. Markov Kakutani Sabit Nokta Teoremi'nden $T_g(m) = m$ gerçekleyen $m \in K$ vardır. O halde $\langle T_g m, \phi\rangle = m(\phi)$ iken $m(L_g\phi) = m(\phi)$ olduğundan G amenable gruptur. Dolayısıyla değişmeli her yerel kompakt grup amenable gruptur.

Teorem 2.14. G yerel kompakt grubunun amenable olması için gerek yeter koşul $L_\infty(G)$ üzerinde sağ değişmez bir ortalamanın var olmasıdır.

İspat: G yerel kompakt grubu amenable olsun. Dolayısıyla $L_\infty(G)$ üzerinde sol değişmez bir ortalama vardır. O halde m fonksiyoneli $L_\infty(G)$ üzerinde sol değişmez bir ortalama olsun. Her $\phi \in L_\infty$ ve her $g \in G$ için $\tilde{\phi}(g) = \phi(g^{-1})$ şeklinde $\tilde{\phi} \in L_\infty(G)$ alalım.

$$\tilde{\phi} : L_\infty(G) \to \mathbb{C}, \quad \phi \mapsto \langle\tilde{\phi}, m\rangle$$

tanımlayalım .

$$\tilde{m}(\alpha\phi + \beta\psi) = \langle\alpha\tilde{\phi} + \beta\tilde{\psi}, m\rangle = \alpha\langle\tilde{\phi}, m\rangle + \beta\langle\tilde{\psi}, m\rangle = \alpha\tilde{m}(\phi) + \beta\tilde{m}(\psi)$$

olur.

$$\tilde{m}(1) = \langle\tilde{1}, m\rangle = \langle 1, m\rangle = 1$$

elde edilir.

$$\phi \geq 0 \quad \text{olmak üzere} \quad \tilde{\phi} \quad \langle\tilde{m}, \phi\rangle = \langle\tilde{\phi}, m\rangle \geq 0$$

olduğunda $\tilde{m},\quad L_\infty(G)$ üzerinde bir ortalamadır. Ayrıca

$$\langle \phi * \delta_g, \tilde{m}\rangle = \langle R_g\phi, \tilde{m}\rangle = \langle (\tilde{R_g\phi}), m\rangle = \langle L_g\tilde{\phi}, m\rangle = \langle \tilde{\phi}, m\rangle = \langle \phi, \tilde{m}\rangle$$

gerçeklendiğinde $\tilde{m},\quad L_\infty(G)$ üzerinde sağ değişmez bir ortalamadır. Tersine $L_\infty(G)$ üzerinde sağ değişmez bir ortalama var ise aynı şekilde sol değişmez bir ortalama tanımlanır. Grubun amenable olmasına ilişkin aşağıdaki temel teoremi de verelim.

Teorem 2.15. G yerel kompakt amenable grup , H de yerel kompakt grup olmak üzere eğer $\theta : G \to H$ sürekli homomorfizm ve $\theta(\bar{G}) = H$ gerçekleniyorsa H yerel kompakt grup da amenable gruptur.

İspat: Banach cebirleri arasında

$$\begin{array}{rcccc} \theta^\star & : & C_b(G) & \to & C_b(H) \\ & & \phi & \to & \phi\circ\theta \end{array}$$

şeklinde sürekli bir homomorfizm tanımlayalım. Her $\phi, \psi \in C_b(G)$ olmak üzere

$$\theta^\star(\phi.\psi) = (\phi.\psi)\circ\theta = \phi.\psi(\theta) = \phi(\theta).\phi(\psi) = \theta^\star(\phi).\theta^\star(\psi)$$

olduğundan $\theta^\star$ bir homomorfizmadır. Şimdi$\theta^\star\phi \in LUC(G)$ olduğunu gösterelim. O halde $\phi \in LUC(H)$ ve $g \in G$ yakınsayan bir $(g_\alpha)_\alpha$ ağı alalım. Dolayısıyla

$$\lim_\alpha \delta_{g_\alpha} * \theta^\star\phi = \lim_\alpha \theta^\star\delta_{\theta(g_\alpha)} * \phi = \theta^\star\delta_{\theta(g)} * \phi = \delta_g * \theta^\star\phi$$

olduğundan $\theta^\star\phi \in LUC(G)$ elde edilir. Ayrıca G amenable olduğundan $LUC(G)$ de sol değişmez bir m ortalama vardır. O halde $\phi \in LUC(H)$ için

$$\langle \phi, \tilde{m} \rangle = \langle \theta^{\star}\phi, m \rangle$$

koşulunu sağlayan $\tilde{m} \in (LUC(H))^{\star}$ tanımlayalım.

Her $\phi, \psi \in LUC(H)$ $\alpha, \beta \in K$ olmak üzere

$$\langle \alpha\phi + \beta\psi, m \rangle = \langle \theta^{\star}(\alpha\phi + \beta\psi), m \rangle = \langle (\alpha\phi + \beta\psi) \circ \theta, m \rangle = \alpha\langle \phi \circ \theta, m \rangle + \beta\langle \psi \circ \theta, m \rangle$$

olur.

$$\alpha\langle \theta^{\star}\phi, m \rangle + \beta\langle \theta^{\star}\psi, m \rangle = \alpha\langle \phi, \tilde{m} \rangle + \beta\langle \psi, \tilde{m} \rangle$$

elde edilir ve

$$\langle 1, \tilde{m} \rangle = \langle \theta^{\star}1, m \rangle = \langle 1 \circ \theta, m \rangle = 1$$

sağlanır. Ayrıca $\phi \in LUC(H)$ $\phi \geq 0$ olmak üzere

$$\langle \phi, \tilde{m} \rangle = \langle \theta^{\star}\phi, m \rangle = \langle \phi \circ \theta, m \rangle \geq 0$$

olduğundan $\tilde{m}$, $LUC(H)$ de bir ortalamadır. Yine $g \in G$ olmak üzere

$$\langle \delta_{\theta(g)} * \phi, \tilde{m} \rangle = \langle \theta^{\star}(\delta_{\theta(g)} * \phi), m \rangle = \langle \delta_g * \theta^{\star}\phi, m \rangle = \langle \theta^{\star}\phi, m \rangle$$

olduğundan $\tilde{m}$, $LUC(H)$ de sol değişmez bir ortalamadır.

Son olarak $h \in H$ olmak üzere $\overline{\theta(G)} = H$ olduğundan $\lim\limits_{\alpha} \theta(g_{\alpha}) = h$ gerçekleyen G

üzerinde tanımlı $(g_\alpha)_\alpha$ ağı vardır. Her $\phi \in LUC(H)$ için

$$\lim_\alpha \delta_{\theta(g_\alpha)} * \phi = \delta_h * \phi = \langle \delta_h * \tilde{m} \rangle = \lim_\alpha \langle \delta_{\theta(g_\alpha)} * \phi, \tilde{m} \rangle = \langle \phi, \tilde{m} \rangle$$

olduğundan H amenable gruptur.

2.3. AMENABLE BANACH CEBİRLERİ

Bu bölümde Banach cebirleri için amenable olma kavramı verildi. Bunun için öncelikle türev ve iç türev kavramları tanıtıldı. Daha sonra Hochchild eş homolojiden bahsedildi. Bir A Banach cebirinin amenable olması için gerek ve yeter koşul her $X^\star$-türev için $H^1(A, X^\star) = 0$ olması şeklinde ifade edildi.

2.3.1. Banach Bimodüller ve Hochschild Eş Homoloji (Cohomology)

Tanım 2.14. A, $\mathbb{C}$ üzerinde bir Banach cebiri X de bir vektör uzayı olsun. Eğer

$$A \times X \to X \quad (a, x) \to a.x$$

şeklinde tanımlanan ve

$$\forall a, b \in A, \ \ \forall x \in X \quad \text{için} \quad a(b.x) = (ab).x$$

koşulunu sağlayan bilineer dönüşüm var ise X' e sol A-modül denir. Benzer şekilde

$$X \times A \to X \quad (x, a) \to x.a$$

şeklinde tanımlanan ve

$$\forall a, b \in A, \ \ \forall x \in X \quad \text{için} \quad (x.a)b = x.(ab)$$

koşulunu sağlayan bilineer dönüşüm var ise X' e sağ A-modül denir. Tanımlanan dönüşümlerden ilki sol modül çarpımı ikincisi ise sağ modül çarpımı şeklinde ifade edilir. A Banach cebiri değişmeli olduğunda X sol A-modülü aynı zamanda sağ A-modülü olur ve X A-modül şeklinde adlandırılır. Ayrıca X vektör uzayı hem sol A-modül hem sağ A-modül olmak üzere

$$\forall a, b \in A, \ \ \forall x \in X \quad \text{için} \quad a(x.b) = (a.x)b$$

koşuluda sağlanırsa X vektör uzayı A-bimodül olarak adlandırılır.

Tanım 2.15. A Banach cebiri ve X Banach uzayı A-bimodülü olsun. Bir $\kappa \geq 0$, her $a \in A$ ve her $x \in X$ için

$$\|a.x\| \leq \kappa\|a\|.\|x\|, \qquad \|x.a\| \leq \kappa\|x\|.\|a\|$$

koşulunu sağlıyorsa X Banach A-bimodül olarak adlandırılır. ([1])

Örnek 2.3. A bir Banach cebiri olsun $X = A$ alalım. X Banach uzayıdır modül işlemlerini de sağ ve sol çarpım olarak alalım. O halde X Banach cebiri A-bimodül ve $\|a.x\| = \|a\|.\|x\|$ ve $\|x.a\| = \|x\|.\|a\|$ olacağından X Banach A-bimodüldür. A üzerinde kanonik Banach A-bimodülü kendisidir.

Örnek 2.4. X bir Banach uzayı A bir Banach cebiri olmak üzere , her $a \in A$ her $x \in X$

için sıfır sol işlemi $a.x = 0$ sıfır sağ işlemi $x.a = 0$ şeklinde tanımlanan işlemler olmak üzere X Banach uzayı A- bimodüldür. X Banach uzayı ve

$$0 = \|a.x\| \leq \|a\|\|x\| \quad \text{ve} \quad 0 = \|x.a\| \leq \|x\|\|a\|$$

sağlandığından X Banach A-bimodüldür.

Örnek 2.5. X Banach A-bimodül olmak üzere $X^\star$ dual uzayı üzerine Banach A-bimodül yapısı kurulur. Öyleki sağ ve sol modül işlemleri $\forall x \in X \;\; \forall a \in A \;\; \forall f \in X^\star$ için

$$\langle x, a.f\rangle = \langle x.a, f\rangle, \qquad \langle x, f.a\rangle = \langle a.x, f\rangle$$

tanımlanır. Buna göre

$$\langle x, a(b.f)\rangle = \langle x.a, b.f\rangle = \langle (x.a).b, f\rangle = \langle x.(ab), f\rangle = \langle x, (ab).f\rangle$$

$$\langle x, (f.a).b\rangle = \langle b.x, f.a\rangle = \langle a.(b.x), f\rangle = \langle (ab).x, f\rangle = \langle x, f.(ab)\rangle$$

$$\langle x, a(f.b)\rangle = \langle x.a, f.b\rangle = \langle b.(x.a), f\rangle = \langle (b.x).a, f\rangle = \langle b.x, a.f\rangle = \langle x, (a.f).b\rangle$$

gerçeklendiğinde $X^\star$ A-bimodül

$$\|a.f\| = \sup_{\|x\|\leq 1} |\langle x, a.f\rangle| = \sup_{\|x\|\leq 1} |\langle x.a, f\rangle| \leq \sup_{\|x\|\leq 1} |\kappa\|f\|.\|x.a\| = \sup_{\|x\|\leq 1} |\kappa\|f\|.\|x\|.\|a\| = \kappa\|f\|\|a\|$$

Benzer şekilde

$$\|f.a\| = \sup_{\|x\|\leq 1} |\langle x, f.a\rangle| = \sup_{\|x\|\leq 1} |\langle a.x, f\rangle| \leq \sup_{\|x\|\leq 1} |\kappa\|f\|.\|a.x\| = \sup_{\|x\|\leq 1} |\kappa\|f\|.\|x\|.\|a\| = \kappa\|f\|\|a\|$$

gerçeklendiğinden $X^\star$ Banach A-bimodüldür. Dual Banach A-bimodül olarak adlandırılır.

Örnek 2.6. G yerel kompakt grup olsun. Her $f \in L_1(G),\ \ \phi \in L_\infty(G)$ için

$$f.\phi = f * \phi, \qquad \phi.f = (\int_G f.dm_G).\phi$$

modül işlemleri $L_\infty(G)$ üzerinde bir Banach $L_1(G)$-bimodül kurar. Her $f_1, f_2 \in L_1(G)$ ve $\phi \in L_\infty(G)$ için

$$f_1(f_2.\phi) = f_1(f_2 * \phi) = f_1 * (f_2 * \phi) = (f_1 * f_2) * \phi = (f_1 f_2).\phi$$

Fubini Teoreminden ve m_G sol değişmezliğinden

$$\phi.(f_1 * f_2) = (\int_G (f_1 * f_2)(x) m_G(dx)).\phi = (\int_G \int_G f_1(y) f_2(y^{-1}x) m_G(dy) m_G(dx))\phi$$

$$= (\int_G \int_G f_1(y) f_2(y^{-1}x) m_G(dx) m_G(dy))\phi = (\int_G f_1(y)(\int_G f_2(x) m_G(dx)) m_G(dy)).\phi$$

$$(\int_G f_1(y) m_G(dy) \int_G f_2(x) m_G(dx)).\phi = (\phi.f_1) f_2$$

$$(f_1.\phi) f_2 = (\int_G f_2 dm_G)(f_1 * \phi) = f_1 * (\int_G f_2 dm_G)\phi = f_1(\phi.f_2)$$

olduğundan $L_\infty(G),\ \ L_1(G)$ -bimodüldür. Teorem 2.3 den

$$\|f.\phi\|_\infty \leq \|f\|_1.\|\phi\|_\infty$$

$$\|\phi.f\|_\infty = \sup_{x \in G} |(\int_G f(x) m_G(dx)).\phi| = \sup_{x \in G} |\int_G f(x) m_G(dx)|.|\phi|$$

$$\leq \|\phi\|_\infty \sup_{x\in G} \int_G |f(x)| m_G(dx) \leq \|\phi\|_\infty . \|f\|_1$$

olduğundan $L_\infty(G)$, Banach $L_1(G)$-bimodüldür.

Tanım 2.16. A Banach cebiri ve X Banach A-bimodül olsun. Her $x \in X$, $n \in \{-1, 0, 1, ...\}$ için

$$\delta^{-1} : \{0\} \to X \qquad 0 \to 0$$

$$\delta^0 : X \to L(A, X), \qquad (\delta^0 x)(a) = a.x - x.a$$

ve $n \geq 1$ için $L^n(A, X) \to L^{n+1}(A, X)$

$$(\delta^n T)(a_1, a_2, ..., a_{n+1}) = a_1 T(a_2, ..., a_{n+1}) + \Sigma_{j=1}^n (-1)^j T(a_1, ..., a_j a_{j+1}, ..., an + 1)$$

$$+(-1)^{n+1} T(a_1, a_2, ..., a_n).a_{n+1}$$

şeklinde δ^n dönüşümü tanımlansın. $Z^n(A, X) = Ker\delta^n$ ve $B^n(A, X) = Im\delta^{n-1}$ gösterilmek üzere

$$Z^n(A, X) = \{T \in L^n(A, X) \mid \delta^n T \equiv 0\}$$

$$B^n(A, X) = \{T \in L^n(A, X) \mid \exists K \in L^{n-1}(A, X); \ \ \delta^{n-1} K = T\}$$

şeklindedir. Her $n \in N_0$ için $\delta^{n+1}\delta^n \equiv 0$ iddiasının doğru olduğunu gösterelim.

$n = -1$ için doğruluğu açıktır açıktır.

$n = 0$ için doğru olduğunu gösterelim.$\delta^1\delta^0 \equiv 0$ için $\forall x \in X$ için $\delta^1\delta^0(x) = 0$ olmalıdır.

$$(\delta^1(a.x - x.a))(a_1, a_2) = a_1(a.a_2 - a_2.a) - aa_1.a_2 = a_1.a_2 a + (aa_1 - a_1 a).a_1 = 0$$

$n \geq 1$ için n=k için doğru olduğunu kabul edelim. $\delta^{k+1}\delta^k \equiv 0$ dır.

$n = k+1$ için doğru olduğunu gösterelim.

$$\delta^{k+1}\delta^k \equiv 0 \Rightarrow \delta^{k+2}(\delta^{k+1}\delta^k) \equiv 0 \Rightarrow (\delta^{k+2}(\delta^{k+1}\delta^k))(K) = 0 \Rightarrow \delta^{k+2}\delta^{k+1}(\delta^k(K)) = 0$$

$$\delta^k(K) = 1 \in L^{n+1}(A,X) \Rightarrow \delta^{k+2}\delta^{k+1} = 0$$

O halde $B^n(A,X) \subset Z^n(A,X), \quad n \in N_0$ olduğunu gösterelim $T \in B^n(A,X)$ alalım $\exists K \in L^{n-1}(A,X); \quad \delta^{n-1}K \equiv T$ ayrıca $\delta^n T = \delta^n\delta^{n-1}K = 0$ olduğundan $T \in Z^n(A,X)$ dir. Üstelik $(L^n(A,X), \delta^n)$ ikilisi eş zincir (cochain)yapısı (kompleks) olarak tanımlanır.

$$\overset{\delta^n}{\leftarrow} L^n(A,X) \overset{\delta^{n-1}}{\leftarrow} \dots \leftarrow^{\delta^1} L^n(A,X) \leftarrow^{\delta^0} X \leftarrow^{\delta^{-1}} \{0\}$$

de Hochschild eş zincir yapısı denir.

$$H^n(A,X) = Z^n(A,X) \backslash B^n(A,X)$$

şeklinde tanımlanan gruba da X katsayılı n.Hochschild eş homoloji grubu denir.

2.3.2. Amenable Banach Cebiri ve Özellikleri

Tanım 2.17. A Banach cebiri ve X Banach A-bimodül olmak üzere $D : A \to X$ şeklinde tanımlanan sınırlı doğrusal dönüşüm her $a, b \in A$ için $D(ab) = D(a).b + a.D(b)$ koşulunu sağlıyorsa bir türev olarak adlandırılır. A Banach cebirinin tüm X-türevlerinin kümesi $Z^1(A,X)$ ile gösterilir. Ayrıca her $x \in X$ için $ad_x : A \to X, \quad a \to a.x - x.a$ şeklinde tanımlanan doğrusal sınırlı dönüşüm de iç türev olarak ifade edilir. A Banach cebirinin bütün iç türevlerinin kümesi $B^1(A,X)$ ile gösterilir. Her $a,b \in A$ için

$$ad_x(ab) = (ab).x - x.(ab) = a(b.x) - a(x.b) + (a.x)b - (x.a)b = a.ad_x(b) + ad_x(a).b \Rightarrow$$

$ad_x \in Z^1(A,X)$olduğundan $B^1(A,X) \subset Z^1(A,X)$dir.

Tanım 2.18. A bir Banach cebiri X bir Banach A- bimodül olmak üzere $H^1(A,X) = Z^1(A,X)\backslash B^1(A,X)$ bölüm uzayına A Banach cebirinin X katsayılı 1. Hochschild eş homoloji grubu olarak ifade edilir. O halde X Banach A-bimodülü için $H^1(A,X) = \{0\}$ olması için gerek ve yeter koşul tüm X-türevlerinin iç türev olmasıdır.

Tanım 2.19. A Banach cebiri olsun. Her X Banach A-bimodül için $H^1(A,X^\star) = \{0\}$ oluyorsa A amenable Banach cebiridir.

Teorem 2.16. A ve B Banach cebirleri olsun. Eğer A Banach cebiri amenable ve üstelik $\varphi : A \to B$ şeklinde tanımlanan sürekli, homomorfizm $\overline{\varphi(A)} = B$ koşullarını sağlayan bir dönüşüm var ise B Banach cebiri de amenable Banach cebiridir.

İspat: X Banach B-bimodül ve $D : B \to X^\star$ sınırlı bir $X^\star$ türev olsun. D dönüşümünün $X^\star$-türevin bir iç türev olduğunu gösterelim. Her $x \in X, \quad a \in A$ için $a.x = \varphi(a).x, \quad x.a = x.\varphi(a)$ modül işlemlerine göre

$$b(a.x) = b(\varphi a.x) = (\varphi(b).\varphi(a)).x = \varphi(b.a).x = (b.a).x$$

$$(x.a)b = (x.\varphi(a))b = x(\varphi(a).\varphi(b)) = x.\varphi(a.b) = x.(ab)$$

$$(a.x).b = (\varphi(a).x).b = \varphi(a).x.\varphi(b) = \varphi(a)(x.\varphi(b)) = a(x.b)$$

$$\|a.x\| = \|\varphi(a).x\| \leq \|\varphi(a)\|\|x\| \leq \|\varphi\|\|a\|\|x\|$$

$$\|x.a\| = \|x.\varphi(a)\| \leq \|x\|\|\varphi(a)\| \leq \|\varphi\|\|a\|\|x\|$$

gerçeklendiğinden X Banach A-bimodüldür. Her $a, b \in A$ için

$$D(\varphi(a.b)) = D(\varphi(a).\varphi(b)) = D(\varphi(a))\varphi(b) + \varphi(a)D(\varphi(b)) = D(\varphi(a))b + a(\varphi(b))$$

ve

$$\|D(\varphi(a))\| \leq \|D\|.\|\varphi(a)\| = \|D\|\|\varphi\|\|a\|$$

olduğundan $D \circ \varphi : A \to X^\star$ bir $X^\star$-türevdir. A amenable Banach cebiri olduğundan her türev iç türevdir. Öyle bir $f \in X^\star$ vardır

$$D(\varphi(a))a.f - f.a = \varphi(a).f - f.\varphi(a)$$

ya da

$$D(y) = y.f - f.y \quad y \in \varphi(a)$$

$\overline{\varphi(A)} = B$ sağlar ve D dönüşümü sürekli olduğundan

$$D(b) = \lim D(b_n) = \lim(b_n f - f b_n) = \lim b_n f - \lim f.b_n = b.f - f.b$$

olduğundan D türevi aynı zamanda B Banach cebiri için bir iç türevdir. Dolayısıyla B Banach cebiri amenable Banach cebiridir.

Sonuç 2.1. A amenable Banach cebiri $I \subset A$ Banach cebirinin kapalı bir ideali olsun. O halde A/I amenable Banach cebiridir.

İspat: $A \to A \mid I$ tanımlanan kanonik dönüşümü örten bir homomorfizma olduğundan süreklidir. Dolayısıyla Teorem 2.16' dan A/I amenable Banach cebiridir.

Tanım 2.20. X Banach A-bimodül olmak üzere A Banach cebiri $(e_\alpha)_\alpha$ sınırlı sol yaklaşık birime sahip ve her $x \in X$ için $\lim_\alpha e_\alpha.x = x$ sağlıyorsa $(e_\alpha)_\alpha$ ağı X Banach A-bimodülü için sınırlı sol yaklaşık birimdir. Aynı şekilde X Banach A-bimodülü için sınırlı sağ yaklaşık birim de tanımlanabilir. Bir sınırlı ağ X Banach A-bimodülü için hem sağ yaklaşık birim hem sol yaklaşık birim ise X Banach A-bimodülü için sınırlı yaklaşık birimdir.

Teorem 2.17. A amenable Banach cebiri olsun. O halde A Banach cebiri sınırlı yaklaşık birime sahiptir.

İspat: Öncelikle A Banach cebirinin sınırlı sağ yaklaşık birime sahip olduğunu gösterelim. $X = A$ Banach uzayını alalım aşagıdaki işlemlere göre Banach bimodüldür.

$$a.x = ax \ \text{ ve } \ x.a = 0 \qquad (a \in A, x \in X)$$

$i : A \hookrightarrow X^{\star\star}$ kanonik dönüşümü bir türevdir. Her$f \in X^\star, a, b \in A$ için

$$\langle f, i(ab)\rangle = \langle ab, f\rangle = \langle a.b, f\rangle = \langle b, f.a\rangle = \langle f.a, i(b)\rangle = \langle f, a.i(b)\rangle = \langle f, a.i(b)\rangle + \langle f, i(a).b\rangle$$

A Banach cebiri amenable olduğundan $\exists \pi \in X^{\star\star}$

$$i(a) = a.\pi - \pi.a = a.\pi \qquad (a \in A)$$

olur. Goldstine Teoremi' nden X Banach cebiri için $z^\star - \lim i(e_\alpha) = \phi$ sağlayan (e_α) sınırlı ağı vardır. Dolayısıyla her $a \in A$ için $z^\star - \lim i(a.e_\alpha) = a.\phi = i(a)$ ifadesi her $a \in A$ için $w - \lim a.e_\alpha = a$ ifadesine denktir. Dolayısıyla $(e_\alpha)_\alpha$ ağı A Banach cebiri için sınırlı zayıf sağ yaklaşık birimdir. Teorem 2.10' dan A Banach cebiri için sınırlı sağ yaklaşık birime sahiptir. Benzer şekilde A Banach cebiri ve

$$a.x = 0 \ \text{ ve } \ x.a = xa \qquad (a \in A, x \in X)$$

modül işlemleriyle A Banach cebiri için yaklaşık birim elde edilir. Uyarı 2.1' den A Banach cebiri için sınırlı yaklaşık birim vardır. Öte yandan Banach cebirinin amenable olması başka türlü de karakterize edilebilir. Bunun için aşağıdaki tanımlara ihtiyacımız vardır.

Tanım 2.21. X ve Y aynı $\mathcal{F}$ cismi üzerinde normlu uzay $X^\star, Y^\star$ dual uzay

$$BL(X^\star, Y^\star, \mathcal{F}) = \{x \otimes y : X^\star \times Y^\star \to \mathcal{F}\text{sınırlı, bilineer dönüşüm}\}$$

olsun. Her $x \in X$ ve $y \in Y$ için $x \otimes y \in BL(X^\star, Y^\star, \mathcal{F})$ elemanı $f \in X^\star,\ g \in Y^\star$ olmak üzere

$$x \otimes y(f, g) = f(x)g(y)$$

şeklinde tanımlanır. Ayrıca X ile Y uzaylarının cebirsel tensör çarpımı $X \otimes Y$ ile gösterilir ve

$$\text{span}\{x \otimes y \mid x \in X, y \in Y\}$$

şeklinde tanımlanır. Bu uzay üzerindeki $\|.\|_\pi$ projektif norm

$$\|x\|_\pi = \inf\{\Sigma_{i=1}^n \|x_i\|\|y_i\|; \quad x = \Sigma_{i=1}^n x_i \otimes y_i, \ \ n \in \mathbb{N}\}$$

şeklindedir. Üstelik bu norm her $x \in X$ ve $y \in Y$ için $\|x \otimes y\|_\pi = \|x\|\|y\|$ koşulu sağladığından bir cross normdur. Yine $X \otimes Y$ tensör çarpımının projektif norma göre tamlanışı projektif tensör çarpım olarak adlandırılır ve $X\widehat{\otimes}Y$ ile gösterilir. Ayrıca A bir Banach cebiri olmak üzere $A\widehat{\otimes}A$ üzerindeki kanonik A-bimodül yapısı her $a, x, y \in A$ için

$$a.(x \otimes y) = ax \otimes y, \qquad (x \otimes y).a = x \otimes ya$$

modül işlemlerinden yararlanarak kurulur.

Tanım 2.22. A bir Banach cebiri olsun. A üzerindeki sınırlı lineer π diagonal (köşegensel) operatörü

$$\pi : A\widehat{\otimes}A \to A, \quad x \otimes y \to x.y$$

dönüşümünün sınırlı bir genişlemesi olarak tanımlanır. Eğer $m \in A\hat{\otimes}A$,

$$a.m - m.a = 0 \ \text{ ve } \ a\pi(m) = a$$

sağlıyorsa A için bir projektif diagonal (izdüşümsel köşegensel) olarak tanımlanır. Ayrıca $A\widehat{\otimes}A$ nın üzerindeki kanonik A-bimodül yapısına göre π bir sınırlı modül homomorfizmadır. π dönüşümünün sınırlılığı her $a \in A, u \in A\widehat{\otimes}A$ için

$$\pi(a.u) = a\pi(u), \quad \phi(u.a) = \pi(u).a$$

şeklindedir. O halde A projektif diagonal m ye sahip ise A Banach cebiri birimlidir ve birimi $\pi(m)$ olur. Her $a \in A$ için $a\pi(m) = a$ olduğundan

$$\pi(m).a = \pi(m.a) = \pi(a.m) = a.\pi(m) = a$$

$\pi(m)$ ifadesi A için birimdir.

Tanım 2.23. A bir Banach cebiri olmak üzere

i) Eğer $M \in (A\hat{\otimes}A)^{\star\star}$,

$$a.M = M.a \text{ ve } a.\pi^{\star\star} = a$$

sağlanırsa A Banach cebiri için virtual diagonal (zahiri köşegensel) olarak tanımlanır.

ii) Eğer $(m_\alpha)_\alpha \in A\hat{\otimes}A$ sınırlı ağı

$$a.m_\alpha - m_\alpha \to 0 \text{ ve } a\pi(m_\alpha) = a$$

sağlanırsa A Banach cebiri için yaklaşık diagonal olarak tanımlanır.

Banach cebirinin diğer bir karakterizasyonu şu şekildedir.

Teorem 2.18. A Banach cebiri olmak üzere aşağıdakiler denktir.

i) A amenable Banach cebiridir.

ii) A için yaklaşık diagonal vardır.

iii) A için virtual diagonal vardır.

İspat: Kabul edelim ki A amenable Banach cebiri olsun. O halde A Banach cebiri için virtual diagonalin varlığını gösterelim. A Banach cebiri amenable olduğundan $(e_\alpha)_\alpha$ sınırlı yaklaşık birime sahiptir. Yine $E \in (A\hat{\otimes}A)^{\star\star}$, $(e_\alpha \otimes e_\alpha)$ elemanının $z^\star$- yığılma noktası olsun. O halde $a \in A$ için

$$\pi^{\star\star}(a.E - E.a) = w^\star - \lim_\alpha \pi(a.e_\alpha \otimes e_\alpha - e_\alpha \otimes e_\alpha.a) = \lim_\alpha (a.e_\alpha^2 - e_\alpha^2.a) = 0$$

olduğundan $ad_E(A) \subset ker\pi^{\star\star}$ elde edilir. Üstelik π bimodül homomorfizması olduğundan $\pi^{\star\star}$ da bimodül homomorfizmasıdır. Dolayısıyla $ker\phi^{\star\star}$ Banach A-bimodüldür. Ayrıca A Banach cebiri yaklaşık birime sahip olduğundan Cohen Çarpım Teoremi'nden ϕ örten ve açıktır. Dolayısıyla $ker\pi^{\star\star} \cong (ker\pi)^{\star\star}$ olur. O halde $ker\pi^{\star\star}$ bir dual Banach A-bimodüldür. A amenable Banach cebiri olduğundan $ad_E = ad_N$ sağlayan $N \in ker\pi^{\star\star}$ vardır. $M = E - N$ alalım.

$$a.\pi^{\star\star}M = a.\pi^{\star\star}E = \lim_\alpha a.e_\alpha^2 = a$$

$$a.M - M.a = ad_M a = ad_{E-N} a = ad_E a - ad_N a = 0$$

O halde M virtual diagonaldır.

Kabul edelim ki A Banach cebiri için virtual diagonal var olsun. O halde A Banach cebirinin yaklaşık diagonale sahip olduğunu gösterelim.M elemanı A Banach cebiri için virtual diagonal ve $(m_\alpha)_\alpha \in (A\hat{\otimes}A)^{\star\star}$, $M = z^\star - \lim_\alpha m_\alpha$ gerçekleyen sınırlı bir ağ olsun.

$$z - \lim_\alpha (a.m_\alpha - m_\alpha.a) = 0 \text{ ve } z - \lim_\alpha a\pi(m_\alpha) = a$$

zayıf limit yerine norm limit alınarak yaklaşık diagonal elde edilir.

Kabul edelim ki A Banach cebiri için yaklaşık diagonal var olsun. A Banach cebirinin amenable olduğunu gösterelim. Bunun için $(m_\alpha)_\alpha$ elemanı A için yaklaşık diagonal olsun. O halde $(\pi(m_\alpha))_\alpha$ elemanı A için sınırlı yaklaşık birimdir. E Banach A-bimodül olmak üzere $H^1(A, E^\star) = \{0\}$ olduğunu göstermeliyiz.Bunun için $D \in Z^1(A, E^\star)$ ve m_α ağı tanımlayalım. $m_\alpha = \sum_{n=1}^\infty a_n^{(\alpha)} \otimes b_n^{(\alpha)}$ öyleki $\sum_{n=1}^\infty \|a_n^{(\alpha)}\|\|b_n^{(\alpha)}\| < 1$ alalım. O halde $(\sum_{n=1}^\infty a_n^{(\alpha)}.Db_n^{(\alpha)})$ $z^\star$-yığılma noktası $\phi \in E^\star$ olan $E^\star$ için bir sınırlı ağdır. Her $a \in A$ ve $x \in E$ için

$$
\begin{aligned}
\langle x.a, \phi\rangle &= \lim_\alpha \langle x, \sum_{n=1}^\infty a.a_n^{(\alpha)}.Db_n^{(\alpha)}\rangle \\
&= \lim_\alpha \langle x, \textstyle\sum_{n=1}^\infty a_n^{(\alpha)}.D(b_n^{(\alpha)}a)\rangle \\
&= \lim_\alpha \langle x, \textstyle\sum_{n=1}^\infty (a_n^{(\alpha)}b_n^{(\alpha)}.Da + a_n^{(\alpha)}.Db_n^{(\alpha)}.a)\rangle \\
&= \lim_\alpha \langle x. \textstyle\sum_{n=1}^\infty a_n^{(\alpha)}.b_n^{(\alpha)}, Da\rangle + \langle x, \phi.a\rangle \\
&= \langle x, Da\rangle + \langle x, \phi.a\rangle
\end{aligned}
$$

olur . O halde $D = ad_\phi$ olduğundan A amenable Banach cebiridir. Dolayısıyla $i \Rightarrow iii \Rightarrow ii \Rightarrow i$ şeklinde denklik ispat edilmiştir.

2.3.3. Süper-Amenable Banach Cebiri

Bu kısımda Banach cebirinin bir başka karakterizasyonu olan süper-amenable olması incelenecektir. Aslında her süper-amenable Banach cebirinin amenable Banach cebiri olduğu belirlenecektir.

Tanım 2.24. A Banach cebiri olmak üzere her Banach A-bimodülü için $H^1(A, X) = \{0\}$ oluyorsa A süper-amenable Banach cebiri olarak adlandırılır.

Teorem 2.19. A süper-amenable Banach cebiri ise birimlidir.

İspat: $X = A$ Banach uzayını düşünelim. Her $a \in A,\ x \in X$ için $a.x = ax, \quad x.a = 0$ kanonik sol modül işlemi ve sıfır sağ modül işlemine göre X bir Banach A-bimodül ve birim dönüşümü $I : A \to X$ bir türevdir.

$$I(ab) = ab = a.I(b) + 0 = a.I(b) + I(a).b$$

A süper-amenable olduğundan her X-türev bir iç türevdir. Her $a \in A,\ x \in X$ için $a = I(a) = a.x - x.a = a.x$ olduğundan x sağ birim benzer şekilde $a.x = 0$ ve$x.a = xa$ sıfır sol modül işlemi ve sağ kanonik modül işlemi alındığında da X Banach A-bimodüldür. A Banach uzayı süper-amenable olduğundan her$a \in A,\ y \in X$ için $a = a.y - y.a = y.a$ olduğundan y sol birim olmak üzere $1 := x + y - xy$ A Banach cebiri için bir birimdir.

$$a.(x + y - xy) = ax + ay - axy = a + ay - ay = a$$

$$(x + y - xy).a = xa + ya - xya = xa + a - xa = a$$

birimli olduğu gösterilmiş olur.

Teorem 2.20. A birimi 1 olan Banach cebiri ve π diagonal operatör olsun. Eğer $H^1(A, ker\pi) = \{0\}$ ise A projektif diagonale sahiptir.

İspat:$D : A \to ker\pi, \quad D(a) = a \otimes 1 - 1 \otimes a$ şeklinde tanımlayalım.

$$D(\alpha a) = \alpha a \otimes 1 - 1 \otimes \alpha a = \alpha(a \otimes 1 - 1 \otimes \alpha) = \alpha D(a)$$

olduğundan D dönüşümü lineerdir.

$$\|D(a)\| = \|a \otimes 1 - 1 \otimes a\| \leq \|a\|.\|1\| + \|1\|.\|a\| = 2.\|1\|.\|a\|$$

olduğundan D dönüşümü sınırlıdır. Her$a, b \in A$ için

$$D(a.b) = a.b \otimes 1 - 1 \otimes a.b = a.b \otimes 1 - a \otimes b + a \otimes b - 1 \otimes a.b = a(b \otimes 1 - 1 \otimes b) + (a \otimes 1 - 1 \otimes a).b$$

$$= a.D(b) + D(a).b$$

olduğundan $D \in Z^1(A, ker\pi)$ dir.$H^1(A, ker\pi) = \{0\}$ sağlandığından

$$a \otimes 1 - 1 \otimes a = a.x - x.a \qquad (a \in A)$$

koşulunu gerçekleyen $x \in ker\pi$ vardır.

$$a(1 \otimes 1 - x) - (1 \otimes 1 - x).a = 0 \qquad (x \in A)$$

$$\pi(1 \otimes 1 - x) = \pi(1 \otimes 1) - \pi(x) = 1 - 0 = 1$$

olduğundan $(1 \otimes 1 - x)$ projektif diagonaldir.

Teorem 2.21. A Banach cebiri olmak üzere aşağıdakiler denktir.

i) A süper-amenable Banach cebiridir.

ii) A birimli bir Banach cebiri ve bir projektif diagonale sahiptir.

İspat: Kabul edelim ki A süper-amenable olsun. O halde Teorem 2.19' dan birimli Teorem 2.20' dan projektif diagonale sahiptir. Kabul edelim ki A birimli ve projektif diagonale sahip olsun. A Banach cebirinin super-amenable olduğunu gösterelim. X bir Banach A-bimodül ,$u = \sum_{i=1}^{\infty} a_i \otimes b_i$ A Banach cebirinin projektif diagoneli ve $\pi(u)$ da A Banach cebirinin birimi olarak alalım. O halde $D \in Z^1(A, X)$ için

$$D(a) = D(1.a) = 1.D(a) + D(1).a \qquad (a \in A)$$

$a \to 1.D(a)$ ve $a \to D(1).a$ dönüşümlerinin iç türev olduğunu gösterelim. Bunun için $T(a \otimes b) = a.D(b)$ gerçekleyen $T \in \mathbb{L}(A\hat{\otimes}A)$ tanımlayalım. Yine $D \in \mathbb{L}(A, X)$ olduğundan T iyi tanımlıdır. Her $a \in A$ ve her $i \in \mathbb{N}$ için $b_i.D(a) = D(b_i.a) - D(b_i).a$ şeklinde yazılır.

$$\begin{aligned} 1.D(a) = \pi(u)D(a) &= \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} a_i.b_i.D(a) \\ &= \lim_{n\to\infty} \textstyle\sum_{i=1}^{n} a_i.(D(b_i) - D(b_i).a) \\ &= \lim_{n\to\infty} (T(\textstyle\sum_{i=1}^{n} a_i \otimes b_i.a) - T(\sum_{i=1}^{\infty} a_i \otimes b_i)) \\ &= T((\lim_{n\to\infty} \textstyle\sum_{i=1}^{n} a_i \otimes b_i).a) - T(\lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} a_i \otimes b_i).a \\ &= T(u.a) - T(u).a = T(a.u) - T(u).a = a.T(u) - T(u).a \end{aligned}$$

$$1.D(1).a = 1.(D(1.a) - 1.D(a)) = 1.D(a) - 1.D(a) = 0$$

Dolayısıyla $\forall a \in A$ için

$$D(1).a = a.D(1) - a.D(1) - 1.D(1).a + D(1).a = a.(1.D(1)) - (1.D(1) - D(1)).a$$

dır.$a \to 1.D(a)$ ve $a \to D(1).a$ iç türevler olduğundan $D \in B^1(A, X)$ olur. A süper-amenable Banach cebiridir.

Öte yandan, 5.kısım için kullanacağımız amenable Banach cebirlerine ilişkin genel teori aşağıdaki gibidir. A. Ya. Khelemskii ve M. V. Sheinberg çalışmalarında Banach cebirleri için genel bir homoloji teorisi geliştirmişlerdir. Buna göre A bir Banach cebiri olmak üzere

$$0 \to ker\pi \xrightarrow{i} A\hat{\otimes}A^{\text{op}} \xrightarrow{\pi} A \to 0 \tag{2.3}$$

dizisini tanımlamışlardır. Bu dizide

$\hat{\otimes}$	:	projektif tensör çarpım
A^{op}	:	A Banach cebirinin zıt cebiridir. Bu cebirin vektör uzayı A Banach cebiridir fakat çarpım işlemi A Banach cebirindeki çarpım işleminin terslenmiş halidir.
π	:	$a, b \in A$için$\pi(a \otimes b) = ab$ şeklinde tanımlanan bir dönüşümdür.

Ayrıca burada $ker\pi,\ \ A\hat{\otimes}A^{\text{op}}$ üzerindeki alışılagelmiş çarpım işlemi ile $A\hat{\otimes}A^{\text{op}}$ un kapalı bir sol idealidir ve diagonal ideal olarak adlandırılır.

5.kısımda Beurling cebirinin amenable olması ile G yerel kompakt grubun olması ilişkilendirilirken kullanılacak Banach cebirlerine ilişkin aşağıdaki teoremi verelim. Bu teorem homoloji metodları kullanarak P.C. Curtis Jr. ve R.J. Roy tarafından [2] de ispatlanmışır.

Teorem 2.22. (Khelemskii ve Sheinberg) A Banach cebirinin amenable olması için gerek ve yeter koşul A Banach cebiri sınırlı bir yaklaşık birime sahip ve diagonal idealinin sınırlı bir sağ yaklaşık birimi olmasıdır.

G yerel kompakt grubun amenable olması ile Banach cebirinin amenable olması arasında ilişkiyi ilk kez Johnson çalışmasında yapmıştır ve soyut harmonik analizde Johnson Teoremi olarak bilinen ünlü teorem aşağıdaki gibidir.

Teorem 2.23. Johnson Teoremi G yerel kompakt grup için aşağıdakiler denktir.

i) G amenable gruptur.

ii) Her $L_1(G)$ Banach E-bimodül için $H^1(L_1(G), E^\star) = \{0\}$

Bu tezde , biz Johnson Teoremi' ni [5] deki çalışmaya bağlı olarak ağırlıklı $L_1(G)$ uzayları için yorumladık. Bu nedenle öncelikle 4. kısımda tezin ana kısımlarından birini oluşturup ağırlıklı $L_1(G)$ cebirini ve bazı özelliklerini tanıtacağız.

2.4. BEURLING CEBİRLERİ VE ÖZELLİKLERİ

Bu kısımda G yerel kompakt grup, μ Haar ölçüsü ve w ağırlık fonksiyonu olmak üzere $L_1(G, w)$ ile gösterilen Beurling cebiri tanıtıldı.

2.4.1. Ağırlık Fonksiyonu ve Özellikleri

Tanım 2.25. G yerel kompakt grup olmak üzere w pozitif fonksiyonu aşağıdaki özellikleri sağlarsa G üzerinde bir ağırlık fonksiyonu olarak adlandırılır.

i) $w(xy) \leq w(x)w(y) \qquad (x, y \in G)$

ii) w, Borel ölçülebilirdir.

Genelliği bozmamak için ağırlık fonksyonu w sürekli olarak alınacaktır.

Örnek 2.7. 1) $\alpha > 0$ için $w_\alpha(n) = (1 + |n|)^\alpha$ şeklinde tanımlanan w_α fonksiyonu $\mathbb{Z}$ üzerinde bir ağırlıktır.

2) $t \to exp(|t|^z), \;\; z \in \mathbb{T}$ ve $t \to (1 + |t|)^\alpha, \;\; \alpha > 0$ fonksiyonları $\mathbb{R}$ de bir ağırlıktır.

Genel olarak , $\delta : \mathbb{R}^n \to [0, \infty)$,

$$\delta(x + y) \leq \delta(x) + \delta(y) \quad x, y \in \mathbb{R}^n$$

koşulunu sağlayan herhangi sürekli bir fonksiyon olsun. O halde $w(x) = (1 + \delta(x))^{\alpha}$ $\mathbb{R}^n$ de bir ağırlık tanımlar. ([10])

Şimdi ağırlık fonksiyonu w nin bazı temel özelliklerini verelim.

Teorem 2.24. G yerel kompakt grup, $C \subseteq G$ kompakt olsun. O halde her $x \in C$ için $a \leq w(x) \leq b$ koşulunu gerçekleyen $a, b \in \mathbb{R}_+$ vardır.

İspat: Öncelikle b nin varlığını saptayalım. Bunun için $n \in \mathbb{N}$ için

$$U_n = \{x \in G : w(x) < n\}$$

alalım. O halde $\bigcup_{n=1}^{\infty} U_n = G$ olur ve U_n kümeleri ölçülebilirdir. Üstelik $|U_n| > 0$ olan $n \in \mathbb{N}$ için U_n^2 boş olmayan bir içe sahiptir. Yine $z \in (U_n^2)^{\circ}$ ve $V = (z^{-1}U_n^2)^{\circ}$ alalım. O halde V birimin açık komşuluğudur. C kümesinin kompaktlığından

$y_1, y_2, ...y_m \in C \cup C^{-1}$ elemanları vardır.

$$C \cup C^{-1} \subseteq y_1V \cap y_2V \cap ...y_mV$$

sağlar.

$$b = n^2 w(z^{-1}). \max w(y_j) : 1 \leq j \leq m$$

şeklinde $b > 0$ tanımlayalım. Eğer $x \in C \cup C^{-1}$ ise $x = v.y_j$ olur. Üstelik $v \in V, \quad j \in \{1, ..., m\}$ için

$$1 \leq w(e) \leq w(v)w(y_j) \leq n^2 w(z^{-1})w(y_j) \leq b$$

istenildiği gibi sağlanır. Son olarak

$$a = \inf\{w(x) : x \in C\}$$

alalım ve kabul edelim ki $a = 0$ olsun. O halde C kümesinde $w(x_n) \to 0$ sağlayan $(x_n)_n$ vardır. Çünkü

$$1 \leq w(e) \leq w(x_n)w(x_n^{-1})$$

olduğundan $w(x_n^{-1}) \to \infty$ olmalı buda C^{-1} kompakt kümesi üzerinde w nin sınırlılığı ile çelişir.

Sonuç 2.2. w, G yerel kompakt grubu üzerinde bir ağırlık fonksiyonu olsun. O halde her $x \in G$ için $w(x) \leq 1$ dir.

İspat: Kabul edelim ki $w(x) < 1$ sağlayan $x \in G$ var olsun. Her$n \in \mathbb{N}$ için $w(x^n) \leq (w(x))^n$ olduğundan $w(x_n) \to 0, \quad n \to \infty$ elde edilir buda a, b pozitif reel sayılarının varlığıyla çelişir.

2.4.2. Beurling Cebiri

Tanım 2.26. $L_1(w, G) = \{f : G \to \mathbb{R} \mid fw \in L_1(G)\}$ vektör uzayı üzerinde $\|f\|_{1,w} = \int_G |f(x)|w(x)dx$ şeklinde norm tanımlanır. Bu norma göre , $L_1(w, G)$ uzayının bir Banach uzayı olduğu açıktır. Gerçekten de; $(f_n)_n, \quad L_1(w, G)$ de bir Cauchy dizisi olsun. O halde $g \in L_1(G)$ için $f_n w \to g$ olur ve $\frac{g}{w} \in L_1(G, w)$ için $f_n \to \frac{g}{w}$ elde edilir. Bu yüzden $L_1(G, w)$ Banach uzayıdır.

Teorem 2.25. $L_1(w, G)$ girişim (konvolüsyon) işlemine göre bir Banach cebiridir.

İspat: Girişim işlemine göre cebir olduğu açıktır. Her $f, g \in L_1(w, G)$ için

$$\int_G |(f * g)(x)|w(x)dx \leq \int_G w(x)(\int_G |f(xy)||g(y^{-1})|dy)dx$$

$$\leq \int_G \int_G w(xy)|f(xy)|w(y^{-1})|g(y^{-1})|dydx$$

$$= \int_G |g(y^{-1})|w(y^{-1})\Delta(y^{-1}). \int_G |f(x)|w(x)dx$$

$$= \|f\|_{1,w}.\|g\|_{1,w}$$

olmak üzere $f * g \in L_1(G, w)$ ve $\|f * g\|_{1,w} \leq \|f\|_{1,w}.\|g\|_{1,w}$ sağlanır.

$L_1(w, G)$ Banach cebiri Beurling cebiri olarak ya da ağırlıklı grup cebiri olarak ifade edilir.

Teorem 2.26. G bir yerel kompakt grup, w bir ağırlık fonksiyonu olmak üzere aşağıdakiler gerçeklenir.

i) $L_1(G)$ nin her kompakt destekli fonksiyonu $L_1(w, G)$ ye aittir.

ii) $\overline{C_c(G)} = L_1(w, G)$

İspat: i) $f \in L_1(G)$ fonksiyonu kompakt destekli olsun. Ayrıca $suppf \subseteq K$ için K kompakt olmak üzere w ağırlığı G yerel kompakt grubunun K kompakt alt kümesinde sınırlı olduğundan $fw \in L_1(G)$ sağlar. O halde $f \in L_1(w, G)$ olur.

ii) $C_c(G) \subseteq L_1(w, G)$ olduğu gösterildi. Şimdi $C_c(G)$ nin $L_1(w, G)$ de yoğun olduğunu gösterelim. Bunun için $f \in L^1(w, G)$ ve $\epsilon > 0$ alalım. O halde $fw \in L_1(G)$ olur ve $\overline{C_c(G)} = L_1(G)$ olduğundan $\|h - fw\|_1 \leq \epsilon$ gerçekleyen $h \in C_c(G)$ vardır.

S, $h \in C_c(G)$ nin kompakt desteği olsun. O halde $\delta > 0$ için $w(x) \geq \delta$ ve tüm $x \in S$ için

w ağırlığ S kompakt kümesinde sınırlı olduğundan $\frac{w}{s} \in L_1(S)$ elde edilir. Dolayısıyla

$\gamma : S \to \mathbb{R}$ şeklinde tanımlanan her$x \in S, \;\; \gamma(x) \geq \delta$ için

$$\int_S |\gamma(x) - w(x)|dx \leq \frac{\epsilon\delta}{\|h\|_\infty}$$

gerçekleyen sürekli bir fonksiyon vardır.

Şimdi G grubu üzerinde $x \in S$ için $\;g(x) = \frac{h(x)}{\gamma(x)}$ şeklinde tanımlı ve $x \notin S$ iken g(x)=0

gerçekleyen bir g fonksiyonu tanımlayalım. Her $x \in S$ için $\frac{1}{\gamma(x)} < \frac{1}{\delta}$ için g fonksiyonu G

üzerinde süreklidir. Dolayısıyla $g \in C_c(G)$ olur ve

$$\|g - f\|_{1,w} = \int_S w(x)|g(x) - f(x)|dx + \int_{\frac{G}{S}} w(s)|f(x)|dx$$

elde edilir. Sağ taraftaki ilk integrali hesaplayalım.

$$\begin{aligned}
\int\limits_S w(x)|g(x) - f(x)|dx &\leq \int\limits_S w(x)|\tfrac{h(x)}{\gamma(x)} - \tfrac{h(x)}{w(x)}|dx + \int\limits_S w(x)|\tfrac{h(x)}{w(x)} - f(x)|dx \\
&\leq \int\limits_S \tfrac{h(x)}{\gamma(x)}|w(x) - \gamma(x)|dx + \int\limits_S |h(x) - w(x)f(x)|dx \\
&\leq \tfrac{\|h\|_\infty}{\delta} \int\limits_S |w(x) - \gamma(x)|dx + \int\limits_S |h(x) - w(x)f(x)|dx \\
&\leq \epsilon \int\limits_S |h(x) - w(x)f(x)|dx
\end{aligned}$$

olur. Üstelik,

$$\|f - g\|_{1,w} \leq \epsilon + \int_S |h(x) - w(x)f(x)|dx + \int_{\frac{G}{S}} w(x)|f(x)|dx$$

$$= \epsilon + \int_G |h(x) - w(x)f(x)|dx \leq 2\epsilon$$

O halde $C_c(G), \;\; L_1(w, G)$ de yoğundur.

Teorem 2.27. G yerel kompakt grup, w fonksiyonu G üzerinde bir ağırlık ve $f \in L_1(w,G)$ olmak üzere aşağıdakiler gerçeklenir.

i) Her$x \in G$ için $L_x f \in L_1(G,w)$ ve $\|L_x f\|_{1,w} \leq w(x).\|f\|_{1,w}$

ii) $x \in G,\ \ L_x f \in L_1(G,w)$ için $x \to L_x f$ dönüşümü süreklidir.

İspat: i) Her $x \in G$ için $L_x f \in L_1(w,G)$ olması için $L_x f w \in L_1(G)$ olmalıdır.

$$\int_G |(L_x f w)(t)|dt = \int_G |f(x^{-1}t)|w(t)dt = \int_G |f(x^{-1}t)|w(x^{-1}t)\frac{w(t)}{w(x^{-1}t)}dt$$

$$\leq w(x)\int_G |f(x^{-1}t)|w(x^{-1}t)dt < \infty$$

olduğundan $L_x f w \in L_1(G)$ sağlar. O halde $L_x f \in L_1(w,G)$ olur. w ağırlığının alt çarpımsallığını kullanarak

$$\|L_x f\|_{1,w} = \int_G |f(x^{-1}t)|w(t)dt = \int_G |f(x^{-1}t)|w(x^1 t)\frac{w(t)}{w(x^{-1}t)}dt$$

$$\leq w(x)\int_G |f(x^{-1}t)|w(x^{-1}t)dt = w(x)\|f\|_{1,w}$$

eşitliği gerçeklenir.

ii) Farz edelim ki $f \in C_c(G)$ ve $suppf = S$ olsun. Yine $x \in G$ ve K kümesi x elemanının kompakt komşuluğu ve

$$C = \sup\{w(s) : \quad s \in KS\} < \infty$$

alalım. O halde $y \in K$ için $y \to x$ iken

$$\|L_y f - L_x f\|^{1,w} = \int_{KS} |f(y^{-1}t) - f(x^{-1}t)|w(t)dt \leq C\int_{KS} |f(y^{-1}t) - f(x^{-1}t)|dt$$

$$= C\|L_y f - L_x f\|_1 \to 0$$

olur. Son olarak f fonksiyonu $L_1(w, G)$ uzayının keyfi bir elemanı ve $\epsilon > 0$ olmak üzere Teorem 2.26 den $\|f - g\|_{1,w} \leq \epsilon$ saglayan $c \in C_c(G)$ vardır. O halde her $x, y \in G$ için

$$\|L_y f - L_x f\|_{1,w} \leq (\|L_y\| + \|L_x\|)\|f - g\|_{1,w} + L_y g - L_x g_{1,w}$$

$$\leq \epsilon(w(y) + w(x)) + L_y g - L_x g_{1,w}$$

w yerel sınırlı olduğundan istenilen ispatlanmış olur.

Teorem 2.28. G yerel kompakt grup, w fonksiyonu G üzerinde bir ağırlık olsun. O halde aşağıdaki özellikler gerçeklenir.

Her $a \in G$ için

i) $\|L_a f\|_{1,w} \leq w(a)\|f\|_{1,w}$

ii) $\|R_a f\|_{1,w} \leq w(a)\|f\|_{1,w}$

Yine $\epsilon > 0$ ve U, V birimin komşuluğu olmak üzere

iii) $\|L_y f - f\|_{1,w} < \epsilon \quad (y \in U)$

iv) $\|R_y f - f\|_{1,w} < \epsilon \quad (y \in V)$

İspat:i) $\|L_a f\|_{1,w} = \|L_a f.w\|_1 = \|f.L_{a^{-1}} w\|_1 \leq w(a).\|f.w\|_1 = w(a)\|f\|_{1,w}$

ii) $R_a f$ içinde benzer şekilde gerçeklenir.

iii) V birimin $e \in G$ kompakt komşuluğu olsun. Her$x \in V, \quad A > 0$ için $w(x) \leq A$ olur. Yine $f \in L_1(G, w)$ ve $\epsilon > 0$ için $\|f - g\|_{1,w} < \frac{\epsilon}{2(A+1)}$ sağlayan $g \in C_c(G)$ vardır. e elemanının öyle bir U_ϵ komşuluğu vardır $U_\epsilon \subset V$ ve $\|L_y g - g\|_{1,w} < \frac{\epsilon}{2}$ olur. Her $y \in U_\epsilon$

için

$$\begin{aligned}\|L_yf-f\|_{1,w} &\leq L_yf-L_yg_{1,w}+L_yg-g_{1,w}+\|g-f\|_{1,w}\\ &< \tfrac{\epsilon}{2}+(w(y)+1).\|f-g\|_{1,w}\\ &< \epsilon\end{aligned}$$

iv) R_af içinde benzer şekilde gerçeklenir.

Teorem 2.29. G yerel kompakt grup w fonksiyonu G üzerinde bir ağırlık olsun. O halde $L_1(w,G)$ yaklaşık sol birimi ve yaklaşık sağ birimi vardır.

İspat: Teorem 2.28 iii) ve iv) eşitliklerinde yararlanarak $L_1(G)$ de yapılanlara benzer şekilde yapılır.

Ayrıca $L_1(w,G)$ uzayının dual uzayı $L_\infty(w,G)$ olur. Bu uzay

$$L_\infty(w,G)=\{\phi:G\to\mathbb{R}:\ \ \frac{\phi}{w}\in L_\infty(G)\}$$

şeklinde ifade edilir.

$$\|\phi\|_{\infty,w}=ess\sup_{x\in G}\frac{|\phi(x)|}{w(x)}$$

üzerindeki norm şeklindedir. Yine $L_1(w,G)$ üzerindeki sürekli, doğrusal fonksiyonel

$$\langle f,\phi\rangle=\int_G f(x)\bar{\phi}(x)dx \qquad (f\in L_1(G,w),\ \ \phi\in L_\infty(w,G))$$

şeklindedir ve herhangi bir fonksiyonel üzerindeki norm $\|\phi\|_{\infty,w}$ normudur.

Üstelik $\phi\in L_\infty(w,G)$ sürekli ise her $x\in G$ için $|\phi(x)|\leq\|\phi\|_{\infty,w}w(x)$ olur.

2.5. BEURLING CEBİRİNİN AMENABLE OLMASI

Bu kısımda G yerel kompakt grup ve w ağırlık fonksiyonu olmak üzere $L_1(w, G)$ Beurling cebirinin amenable olması ile G yerel kompakt grubun amenable olması Johnson'ın ağırlıksız durumlar için yaptığı çalışmaya benzer şekilde ilişkilendirildi. Ayrıca $L_1(w, G)$ Beurling cebirinin amenable olması için gerek ve yeter koşul G yerel kompakt grubun amenable olması ve $\sup\{\Omega(g) : \ g \in G\} < \infty$ olması şeklinde ifade edildi. Johnson Teoremi' ne benzer bir yol izlemek için w ağırlık fonksiyonu üzerine koşul konulması gerektiği görüldü. Bu ilişkilendirme yapılırken Khlemski ve Sheinberg ' in çalışmasından da yararlanarak $L_1(w, G)$ Beurling cebirinin diagonal idealinin sınırlı sağ yaklaşık birimi ile G yerel kompakt grubunun amenable olması için gereken $L_\infty(G)$ üzerindeki sol değişmez bir ortalama arasında ilişki kuruldu. Teorem (2.36) ve Teorem (2.37) de ifade edildiği gibi diagonal idealinin sınırlı sağ yaklaşık biriminden değişmez bir ortalama , tersine değişmez bir ortalamadan diagonal ideal için sınırlı sağ yaklaşık birim elde edileceği görüldü. Böylelikle $L_1(G, w)$ Beurling cebirinin amenable olmasıyla ile $L_\infty(G)$ üzerinde sol değişmez bir ortalamanın varlığı arasında bağ kuruldu. Bu kısımda Johnson Teorimi Beurling cebirleri için yorumlanacağından bunun için bazı temel tanım ve teoremler verildi.

Tanım 2.27. $A^{\star\star} = (A^\star)^\star$ şeklinde tanımlanan ifade A Banach cebirinin ikinci duali olmak üzere $A^{\star\star}$ üzerinde Arens çarpımı olarak adlandırılan çarpım aşağıdaki gibi tanımlanır.

A Örnek (2.3) deki sol modül işlemine göre kanonik sol A-modül, $A^\star$ Örnek (2.5) deki dual sağ modül işlemine göre dual sağ A-modül olmak üzere $F \in A^{\star\star}$, $f \in A^{\star}$ için

$Ff \in A^{\star}$ dir ve

$$(Ff)(a) = F(fa)$$

şeklindedir. Ayrıca $F, G \in A^{\star\star}$ ve $f \in A^{\star}$ için

FG; F ve G elemanlarının Arens çarpımı olmak üzere

$$FG(f) = F(Gf)$$

şeklindedir.

Teorem 2.30. $A^{\star\star}$ Banach cebirinin bir sağ birimi olması için gerek ve yeter koşul A nın bir sınırlı sağ yaklaşık birime sahip olmasıdır.

Amenable Banach cebirleri kısmında verilen (2.3) dizisine benzer şekilde

$$0 \to \nabla \xrightarrow{i} L_1(w,G)\hat{\otimes}L_1(w,G)^{\text{op}} \xrightarrow{\pi} L_1(w,G) \to 0$$

dizisini tanımlayalım burada ∇ diagonal idealdir.

Teorem 2.31. $C_{luc}(w^{-1},G) = \{\phi \in L_\infty(w^{-1}) : t \to \delta_t.\phi$ e (birim) de norm süreklidir.$\}$ şeklinde tanımlanmak üzere $L_1(w,G).L_\infty(w^{-1},G) = C_{luc}(w^{-1},G)$ sağlanır.

İspat: $a \in L_1(w)$ ve $f \in L_\infty(w^{-1})$ alalım. O halde $\forall s,t \in G$ için

$$|\frac{1}{w(st)}a.f(st) - \frac{1}{w(s)}a.f(s)| = |\frac{1}{w(st)}\langle \delta_{st} * a, f\rangle - \frac{1}{w(s)}\langle \delta_s * a, f\rangle|$$

$$\leq |\tfrac{1}{w(st)} - \tfrac{1}{w(s)}||\langle \delta_{st} * a, f\rangle| + \tfrac{1}{w(s)}|\langle (\delta_{st} - \delta_s) * a, f\rangle|$$

$$\leq |1 - \tfrac{w(st)}{w(s)}||\langle a, f\rangle| + \|\delta_t * a - a\|\|f\|$$

$$\leq \max\{|1 - w(t)|, |1 - w(t^{-1})^{-1}|\}\|a\| + \|\delta_t * a - a\|\|f\|$$

düzgün sınırlıdır. O halde $t \to e$ iken ifade sıfıra yaklaşır. Kabul edelim ki $\phi \in C_{luc}(w^{-1}, G)$ olsun. O halde $(e_i)_{i\in I}$ ağı $L_1(w)$ için sınırlı yaklaşık birim olmak üzere $e_i.\phi \to \phi$ olduğunu gösterelim. Cohen Çarpım Teoremi önermedeki birinci eşitliği verir. Ağırlıksız durumda verildiği gibi

$$\frac{1}{w(s)}|(e_i.\phi)(s) - \phi(s)| \leq \sup\{|1 - w(t)|, |1 - w(t)^{-1}| : \ t \in suppe_i\}\|\phi\|$$

$$+ \sup\{|\tfrac{\phi(st)}{w(st)} - \tfrac{\phi(s)}{w(s)}| : \ t \in suppe_i\}$$

şeklindedir ve$\phi \in C_{luc}(w^{-1}, G)$ olduğundan bu ifade $suppe_i$ yeteri kadar küçük seçilerek keyfi küçültülebilen düzgün bir sınırdır. Şimdi kabul edelim ki $t \to \delta_t.\phi$ birimde norm sürekli olsun. O halde $s, t \in G$ için

$$|\frac{\phi(st)}{w(st)} - \frac{\phi(s)}{w(s)}| \leq |\frac{\phi(st)}{w(st)} - \frac{\phi(st)}{w(s)} + |\frac{\phi(st) - \phi(s)}{w(s)}|$$

$$\leq |\tfrac{\phi(st)}{w(st)}||1 - \tfrac{w(st)}{w(s)}| + \|\delta_t.\phi - \phi\|$$

$$\leq \|\phi\| \max\{|1 - w(t)|, |1 - w(t^{-1})^{-1}|\} + \|\delta_t.\phi - \phi\|$$

olduğunda $\phi \in C_{luc}(w^{-1})$ elde edilir. Geri kalan kapsam açıktır.

İlerdeki ispatlarda $M(w \times w)$ üzerinde

$$Y^{s,t} = \delta_{(s,t)} - \delta_{(e,st)} \quad (s, t \in G)$$

şeklinde tanımlanan ölçü kullanılacaktır.

Teorem 2.32. $\nabla_0 = span\{x * Y^{g,h} :\ g, h \in G, x \in L_1((w \times w), G)\} \subset L_1((w \times w), G)$ alt uzayı diagonal idealde yoğundur.

İspat:Öncelikle $\phi \in L_\infty((w \times w)^{-1}, G) = (L_1((w \times w), G))^\star$ alalım ve kabul edelimki $\phi \perp \nabla_0$ olsun. O halde $\phi \perp \nabla$ olduğunu göstermeliyiz. Bunun için $L^1((w \times w), G)$ sınırlı yaklaşık birime sahip olduğundan her $y \in L_1(w \times w)$ için $\phi.y \perp \nabla$ olduğunu göstermek yetecektir. Üstelik $\phi.y \perp \nabla_0$ olduğu açıktır. Teorem (2.31) kullanarak ϕ nin sürekli olduğunu varsayabiliriz. O halde her $x \in L_1((w \times w), G)$ ve her $g, h \in G$ için

$$0 = \int \int_{G \times G} (x * Y^{g,h})(s, t)\phi(s, t)dsdt$$

$$= \int \int_{G \times G} [x(sg^{-1}, h^{-1}t)\Delta(g^{-1}) - x(s, (gh)^{-1}t)]\phi(s, t)dsdt$$

$$= \int \int_{G \times G} x(s, t)[\phi(sg, ht) - \phi(s, ght)]dsdt$$

her$g, h, s, t \in G$ için $\phi(sg, ht) = \phi(s, ght)$ olur. Üstelik s=t=e için $\phi(g, h) = \phi(e, gh)$ elde edilir. Her$f \in L_\infty(w^{-1}, G)$ için $\pi^\star(f)(s, t) = f(st)$ olduğundan $\phi \in Im\pi^\star$ gerçeklenir ve $\phi \perp \nabla$ elde edilir. Son olarakta $\nabla_0 \subseteq \nabla$ olduğunu gösterelim. Her $f \in L_\infty(w^{-1}, G), x \in L_1((w \times w), G)$ ve $g, h \in G$ için

$$\langle \pi^\star f, x * Y^{g,h} \rangle = 0$$

olur. Fakat

$$Y^{g,h}.\pi^\star(f)(s, t) = (\pi^\star f)(sg, ht) - (\pi^\star f)(s, ght) = 0$$

elde edilir. Böylece istenilen gösterilmiş olur.

w fonksiyonu G üzerinde alt sürekli bir ağırlık olsun. Aşağıdaki yardımcı ağırlıkları tanımlayalım.

$$\tilde{w} = w(t^{-1}) \qquad (t \in G) \tag{2.4}$$

$$\Omega(t) = w(t).\tilde{w}(t) \qquad (t \in G) \tag{2.5}$$

Teorem 2.33. Kabul edelim $m \in C_{uc}(\tilde{w}, G)$ ve $\phi \in C_{UC}(\Omega^{-1}, G)$ olsun. O halde $s, t \in G$ için

$$\psi(s,t) = m(st)\phi(t^{-1})$$

şeklinde tanımlanan dönüşüm $\psi \in C_{ruc}((w \times w)^{-1}, G)$ sağlar.

İspat: Teorem 2.31 den $\lim_{(g,h)\to(e,e)} \|\psi.\delta_{(g,h)} - \psi\| = 0$ olduğunu göstermeliyiz. Bunun için $s, t, g, h \in G$ alalım. O halde

$$\frac{|\psi(gs,th) - \psi(s,t)|}{w(s)w(t)} = \frac{|m(gsth)\phi((th)^{-1}) - m(st)\phi(t^{-1})|}{w(s)w(t)}$$

$$= \frac{|(m(gsth) - m(st))\phi((th)^{-1}) + m(st)(\phi((th)^{-1}) - \phi(t^{-1})|}{w(s)w(t)}$$

$$\leq \frac{\Omega((th)^{-1})}{w(s)w(t)}|m(gsth) - m(st)|\|\phi\| + \frac{|m(st)|\tilde{w}(t)}{w(s)}\|\phi.\delta_{h^{-1}} - \phi\|$$

$$\leq \Omega(h)\|\delta_h.m.\delta_g - m\| + \|m\|\|\phi.\delta_{h^{-1}} - \phi\|$$

Teorem 2.31 benzer şekilde eğer $m \in C_{uc}(\tilde{w}, G)$ ise $(g,h) \to \delta_h.m.\delta_g$ dönüşümü (e,e) de norm süreklidir.

Tanım 2.28. $w : G \to \mathbb{R}_+$ şeklinde tanımlanan ve $\inf\{w(s) : \ s \in G\} > 0$ gerçekleyen sürekli bir ağırlık ve X uzayı, $X.\delta_t \subseteq X \ (t \in G)$ ve $\chi_G \in X$ gerçekleyen $L_\infty(w^{-1}, G)$

uzayının kapalı alt uzayı olsun. X üzerindeki sol değişmez bir ortalama $\langle \chi_G, M\rangle = 1$ ve $\delta_t.M = M$ $(t \in G)$ sağlayan $M \in X^\star$ olan pozitif bir fonksiyoneldir.

Teorem 2.34. Kabul edelim ki Ω, (2.5) eşitliğindeki gibi tanımlansın. O halde $C_{uc}(\Omega^{-1}, G)$ üzerinde sol değişmez bir ortalama olması için gerek ve yeter koşul $L_\infty(\Omega^{-1}, G)$ üzerinde sol değişmez bir ortalama olmasıdır.

İspat: [4] referansındaki Lemma 2.2.2 versiyonunu kullanarak bu referanstaki Teorem 2.2.1 in ilgili kısmı gibi ispatlanır.

$$\max\{|\Omega(st)^{-1} - \Omega(t)^{-1}|, |\Omega(ts)^{-1} - \Omega(t)^{-1}|\} \leq 1 - \Omega(s)^{-1}$$

olduğundan $\chi_G \in C_{uc}(\Omega^{-1})$ elde edilir. Yine M_0, $C_{uc}(\Omega^{-1}, G)$ üzerinde sol değişmez bir ortalama ve $p \geq 0,\ supp$p kompakt ve $\int_G pdt = 1$ gerçekleyen $p \in L_1(\Omega, G)$ alalım. O halde $p.M_0 = M_0$ olur. Vektör değerli integral zayıf yakınsak ve $phi \in C_{uc}(\Omega^{-1}, G)$ olmak üzere $\phi.p = \int_G \phi.\delta_x p(x)dx$ $(\phi \in C_{uc}(\Omega^{-1}, G)$ tanımlanmasını kullanarak $E = E^{-1}$ ve $p = \frac{1}{|E|}\chi_E$ gerçekleyen $e \in G$ nin kompakt komşuluğu E seçelim. Yine $\langle f, M\rangle = \langle p.f.p, M_0\rangle$ $(f \in L_\infty(\Omega^{-1}, G))$ tanımlayalım. O halde M dönüşümü $L_\infty(\Omega^{-1}, G)$ üzerinde sol değişmez bir ortalamadır.

Teorem 2.35. Kabul edelim ki $\rho : G \to [0, \infty]$ dönüşümü sürekli olsun ve $r \in G$ için

$$\sup\{\frac{\rho(g)}{\rho(rgr^{-1})} :\ g \in G\} < \infty$$

koşulu gerçeklesin. Yine

$$K=\{m\in C_0(\rho):\ suppm \text{ kompakt}, m\geq 0, m(e)=1, \|m\|\leq \rho(e)\}$$

alalım. Her $\epsilon>0$ ve her $\{r_1,...,r_n\}$ sonlu kümesi için

$$\max\{\|m(r_i.r_i^{-1})-m\|:\ i=1,...,n\}<\epsilon$$

gerçekleyen $m\in K$ vardır.

İspat: Varsayalım ki olmasın. O halde $\{r_1,...,r_n\}\subseteq G$ keyfi sonlu kümesini ve $\epsilon>0$ seçebiliriz. Bu yüzden her $m\in K$ için $\max\{\|m(r_i.r_i^{-1})-m\|:\ i=1,...,n\}\geq\epsilon$ olur. Yine $X=C_0(\rho)\times...\times C_0(\rho)$ tanımlayalım ve $\psi\in C_0(\rho),\ t\in G, i=1,...,n$ için

$$(T_i\psi)(t)=\psi(r_itr_i^{-1})-\psi(t)$$

alalım. O halde $\sigma=\{(T_1m,...,T_nm):\ m\in K\}$ kümesi X uzayının konveks alt kümesidir ve $\sigma>\Delta>0$ sağlayan $\Delta>0$ vardır. Hahn-Banach Teoremi' nden $|f(\sigma)|\geq 1$ sağlayan $f\in X^\star$ vardır. Şimdi $\mu_i\in M(\rho^{-1}),\ (i=1,...,n)$ gerçekleyen $X^\star$ da bir doğrusal fonksiyonel $(\mu_1,...,\mu_n)$ formundadır. O halde $m\in K$ için

$$|\sum_{i=1}^{n}\langle T_im,\mu_i\rangle|\geq 1$$

elde edilir . Yine $\mathcal{U}$, $e\in G$ nin komşuluğu olmak üzere $M(\rho^{-1})$ deki ölçülerin dış regülerliğinden

$$\max\{\int_{U/\{e\}} |\frac{1}{\rho(r_i t r_i^{-1})} + \frac{1}{\rho(t)}|d|\mu|(t) : \ i = 1, ..., n\} < \frac{1}{n\rho(e)}$$

gerçekleyen $U \in \mathcal{U}$ seçebiliriz ve $r_i^{-1} V r_i \subseteq U \ (i = 1, ..., n)$ gerçekleyen $V \in \mathcal{U}, V \subseteq U$ seçilir. Eğer $m \in K$ ve $supp(m) \subseteq V$ ise $(T_i m)(e) = 0 \ \ (i = 1, ..., n)$ kullanarak

$$|\langle T_i m, \mu_i\rangle| = |\int_G [m(r_i t r_i^{-1}) - m(t)]d\mu_i(t)| \leq \int_{U/\{e\}} |m(r_i t r_i^{-1}) - m(t)|d|\mu_i|(t)$$

$$\leq \|m\| \int_{U/\{e\}} |\frac{1}{\rho(r_i t r_i^{-1})} + \frac{1}{\rho(t)}|d|\mu_i|(t) < \|m\| \frac{1}{n\rho(e)} \leq \frac{1}{n}$$

gerçeklenir buda çelişkidir.

Şimdi istediğimiz sonuç için gerekli olan iki teorem ispatlanarak diagonal idealinin sınırlı yaklaşık birimiyle değişmez bir ortalama arasında ilişki kurulacaktır.

Teorem 2.36. Kabul edelim ki ∇ diagonal ideali sınırlı sağ yaklaşık birime sahip olsun . O halde $L_\infty(\Omega^{-1}, G)$ üzerinde sol değişmez bir ortalama vardır.

İspat: Teorem 2.34 den $C_{uc}(\Omega^{-1}, G)$ üzerinde sol değişmez bir ortalama olduğunu göstermek yeterlidir. Eşitlik (2.4) de olduğu şekilde $\tilde{w}$ tanımlayıp, $m \in L_\infty(\tilde{w})$ ve $k \in \nabla$ alalım. O halde $C_{uc}(\Omega^{-1}, G)$ üzerinde

$$\langle \phi, \bar{k}(m)\rangle = \int\int_{G\times G} m(t)\phi(s)k(ts, s^{-1})dsdt$$

şeklinde $\bar{k}(m)$ fonksiyoneli tanımlayalım.

$$\int\int_{G\times G} \frac{1}{w(t^{-1})}|\phi(s)|k(ts, s^{-1})dsdt$$

$$= \int\int_{G\times G} \frac{1}{w(t^{-1})} \frac{\Omega(s)}{w(ts)w(s^{-1})} \frac{|\phi(s)|}{\Omega(s)} w(ts)w(s^{-1})|k(ts,s^{-1})|dsdt \leq \|\phi\|\|k\|$$

olduğundan $\bar{k}(m)$ iyi tanımlı ve sınırlıdır. Üstelik $\|\bar{k}(m)\| \leq \|m\|\|k\|$ olur. Yine $k \in \nabla$ olduğundan $\int k(ts,s^{-1})ds = 0$ elde edilir. O halde ϕ sabit ise $m \in L_\infty(\tilde{w}, G)$ için

$$\langle \phi, \bar{k}(m)\rangle = 0 \tag{2.6}$$

olur. Eğer $r \in G$ ise

$$\begin{aligned}
\langle \phi.\delta_r - \phi, \bar{k}(m)\rangle &= \int\int_{G\times G} m(t)[\phi(rs) - \phi(s)]k(ts,s^1)dsdt \\
&= \int\int_{G\times G} m(t)\phi(s)[k(tr^{-1}s, s^{-1}r) - k(ts,s^{-1})]dsdt \\
&= \int\int_{G\times G} \phi(s)[m(r^{-1}tr)k(r^{-1}ts, s^{-1}r)\Delta(r) - m(t)k(ts,s^{-1})]dsdt \\
&= \int\int_{G\times G} \phi(s)[m(r^{-1}tr)(\delta_{r,r^{-1}} * k)(ts,s^{-1}) - m(t)k(ts,s^{-1})]dsdt \\
&= \langle \phi, \overline{(Y^{r,r^{-1}} * k)}(m)\rangle \\
&\quad + \int\int_{G\times G} \phi(s)[m(r^{-1}tr) - m(t)](\delta_{r,r^{-1}} * k)(ts,s^{-1})dsdt
\end{aligned}$$

Son integrali $I(\phi, m, r, k)$ şeklinde gösterelim. O halde

$$\langle \phi.\delta_r - \phi, \bar{k}(m)\rangle = \langle \phi, \overline{(Y^{r,r^{-1}} * k)}(m)\rangle + I(\phi, m, r, k) \tag{2.7}$$

elde edilir. Yine $\phi \in C_{uc}(\Omega^{-1})$ olduğunu kabul edelim. Eğer m dönüşümü kompakt destekli ve sürekli ise Lemma (2.33) ve Teorem (2.31) den $\Psi(s,t) = m(st)\phi(t^{-1})$ fonksiyonu $L_\infty((w\times w)^{-1}).L_1(w\times w)$ dadır. Eğer $(k_\gamma)_{\gamma\in\Gamma}$, ∇ diagonal ideali için sınırlı sağ yaklaşık birim ise

$$
\begin{aligned}
\langle \phi, \overline{(Y^{r,r^{-1}} * k_\gamma)}(m) \rangle &= \int \int m(t)\phi(s)(Y^{r,r^{-1}} * k_\gamma)(ts, s^{-1}) \\
&= \int \int m(st)\phi(t^{-1})(Y^{r,r^{-1}} * k_\gamma)(s,t)dsdt \\
&= \langle \Psi, Y^{r,r^{-1}} * k_\gamma \rangle
\end{aligned}
$$

sağlanır. Üstelik $\Psi \in L_\infty((w \times w), G).L_1((w \times w), G)$ ve $(k_\gamma)_{\gamma \in \Gamma}$, ∇ için sınırlı sağ yaklaşık birim olduğundan son ifade Γ boyunca $\langle \Psi, Y^{r,r^{-1}} \rangle$ yakınsar.

$$
\langle \phi, \overline{(Y^{r,r^{-1}} * k_\gamma)}(m) \rangle \to m(e)(\phi(r) - \phi(e)) \tag{2.8}
$$

Dolayısıyla eğer $m(e) = 1$ ise (2.7) ve (2.8) eşitliklerinden

$$
\begin{aligned}
&\limsup_\gamma |\langle \phi.\delta_r - \phi, \bar{k}_\gamma(m) \rangle - (\phi(r) - \phi(e))| \\
&\quad \leq \limsup_\gamma |I(\phi, m, r, k)| \\
&\quad \leq \limsup_\gamma \|\phi\| \|m(r^{-1}.r) - m\| \|\delta_{r,r^{-1}} * k_\gamma\| \\
&\quad \leq \Omega(r)d\|\phi\|\|m(r^{-1} - m)\|
\end{aligned}
$$

burada d ,$(k_\gamma)_{\gamma \in \Gamma}$ nin sınırıdır.

Yine $\mathcal{F} \subseteq G$ sonlu küme ve $\epsilon > 0$ alalım. Teorem (2.35) kullanarak $m_{\mathbb{F},\epsilon}(e) = 1$, $\|m_{\mathcal{F},\epsilon}\| \leq 1$ ve $r \in \mathcal{F}$ için

$$
\|m(r^{-1}.r) - m\| < \frac{\epsilon}{\Omega(r)d}
$$

koşullarını sağlayan $m_{\mathcal{F},\epsilon} \in C_{uc}(\tilde{w})$ seçilir. $\Phi_{\mathcal{F},\epsilon}$ ifadesi $(\bar{k}_\gamma(m_{\mathcal{F},\epsilon}))_{\gamma \in \Gamma}$ nın zayıf* yakınsak alt ağının limiti olarak alınsın. O halde

$$|\langle \phi.\delta_r - \phi, \Phi_{\mathcal{F},\epsilon}\rangle - (\phi(r) - \phi(e)) \leq \epsilon\|\phi\|| \qquad (r \in \mathcal{F})$$

$(\mathcal{F}, \epsilon)$ ikilisini kapsamanın verdiği sıra ve $\mathbb{R}_+$ nın alışılmış sıralamasının çarpımı ile sıralarsak ve eğer Φ ifadesi $(\Phi_{\mathcal{F},\epsilon})$ nın zayıf* yakınsak bir alt ağının limiti olsun. O halde

$$\langle \phi.\delta_r - \phi, \Phi = \phi(r) - \phi(e)\rangle \tag{2.9}$$

Bu yüzden eğer

$$\langle \phi, M\rangle = \phi(e) - \langle \phi, \Phi\rangle \qquad (\phi \in C_{uc}(\Omega^{-1}))$$

şeklinde tanımlı M fonksiyoneli tanımlarsak (2.6) ve (2.9) eşitliklerinden M invaryanttır ve $\langle \chi_G, M\rangle$ gerçekler. Üstelik [1] de olduğu gibi M fonksiyonelinin pozitifliği elde edilir.

Teorem 2.37. Eğer $L_\infty(\Omega^{-1}, G)$ üzerinde sol değişmez bir ortalama var ise ∇ diagonal idealinin sınırlı sağ yaklaşık birimi vardır.

İspat: M fonksiyoneli $L_\infty(\Omega^{-1})$ üzerinde değişmez bir ortalama olsun. Teorem 2.30 dan $\nabla^{\star\star}$ ikinci dualinin Arens çarpımı için sağ birime sahip olduğunu göstermek yeterlidir. Bunun için $T : C_{ruc}((w \times w)^{-1}, G) \to C_{ruc}(\Omega^{-1}, G)$ şeklinde

$$T(\phi(s)) = \phi(e, e) - \phi(s, s^{-1}) \qquad (\phi \in C_{ruc}((w \times w)^{-1}), s \in G)$$

sağlayan bir dönüşüm tanımlayalım. Ayrıca

$$\langle f, N\rangle = \lim_\gamma \langle, T(f.e_\gamma), M\rangle$$

şeklinde $N \in L_\infty((w \times w)^{-1}, G)^\star$ fonksiyoneli tanımlayalım. Buradaki $(e_\gamma)_{\gamma\in\Gamma}$, $L_1((w{\times}w), G)$ için sınırlı yaklaşık birimdir öyleki $L_\infty((w \times w)^{-1}, G)^\star$ daki $f \to \langle T(f.e_\gamma), M\rangle$ şeklinde verilen ağ zayıf yıldız limite sahiptir. Teorem (2.31) den iyi tanımlıdır. Eğer N fonksiyonelinin $i^{\star\star}(\nabla^{\star\star})$ için bir sağ birim olduğunu gösterirsek $i^{\star\star}$ bir cebir izomorfizmi olduğundan istenilene ulaşılır.

O halde $x \in L_1((w \times w), G)$, $s.t \in G$ ve $u \in L_\infty((w \times w)^{-1}, G)$ alalım. Dolayısıyla $\phi = u.x$ olmak üzere

$$\langle u, x * Y^{s,t}.N\rangle = \langle \phi.Y^{s,t}, N\rangle = \langle T(\phi.Y^{s,t}), M\rangle$$

her $g \in G$ için

$$T(\phi, Y^{s,t})(g) = \phi(s,t) - \phi(e, st) - (\phi(sg, g^{-1}t) - \phi(g, g^{-1}st))$$

olur. $\phi(s(s^{-1}g)^{-1}t) = \phi(g, g^{-1}st)$ olduğundan

$$\langle T(\phi.Y^{s,t}), M\rangle = \langle g \to \phi(s,t), M\rangle = \phi(s,t) - \phi(e, st)$$

elde edilir. İlk adımı M fonksiyonelinin sol değişmezliğinden diğer adımı M fonksiyonelinin bir ortalama olmasından elde edlir. O halde

$$\langle u.x * Y^{s,t}, N\rangle = \langle u, x * Y^{s,t}\rangle$$

Teorem (2.32) den $k.N = \hat{k} \quad (k \in \nabla)$ şeklindedir öyleki

$$\hat{}: L_1((w \times w), G) \to L_\infty((w \times w)^{-1}, G)^\star$$

ikinci duale kanonik gömmedir. İspatı tamamlamak için $N \in i^{\star\star}(\nabla^{\star\star})$ olduğunu göstermeliyiz.

$$0 \to \nabla^{\star\star} \to^{i^{\star\star}} L_1((w \times w), G)^{\star\star} \to^{\pi^{\star\star}} L_1(w, G)^{\star\star} \to 0$$

olduğundan $\pi^{\star\star}(N) = 0$ olduğunu göstermeliyiz.

$$\pi^\star(L_\infty(w^{-1}, G))L_1((w \times w), G) \subseteq \pi^\star(L_1(w, G)L_\infty(w^{-1}, G)L_1(w, G))$$

Her $f \in L_\infty(w^{-1}, G)$ ve $x \in L_1((w \times w), G)$ için

$$T(\pi^\star(f)x) \in T(\pi^\star(C_{uc}(w^{-1}, G))) = \{0\}$$

Dolayısıyla $f \in L_\infty(w^{-1}, G)$ için

$$\langle f, \pi^{\star\star}(N)\rangle = \lim_\gamma \langle T(\pi^\star(f)e_\gamma), M\rangle = 0$$

olur.

3. MALZEME VE YÖNTEM

Bu tez çalışmasında genel olarak soyut harmonik analizdeki temel teoremler ve metodlar kullanılmıştır. Birimli bir Banach cebirinde çalışılmadığından bu tez çalışması boyunca yaklaşık birim kavramı önemli olmuştur. Banach cebirinin amenable olması için yaklaşık birimin önemi A. Ya. Khelemskii ve M. V. Sheinberg tarafından [11] çalışmasında sunulmuştur. Banach cebirleri için genel homoloji geliştirdikleri bu makalede amenable kavramı yaklaşık birimin varlığıyla tanıtılmıştır. Öte yandan Banach cebirleri için projektif tensör çarpımı kavramı da bu çalışma için kullanılan önemli araçlardan biridir.

4. BULGULAR

Beurling cebiri için Johnson Teoremi aşağıdaki gibi verilir.

Teorem 4.1. G yerel kompakt grup olmak üzere aşağıdakiler denktir.

i) G amenable grup ve $\sup\{\Omega(g) : \ g \in G\} < \infty$

ii) $H^1(L_1(w, G), E^\star) = \{0\}$

İspat: Kabul edelimki G amenable grup olsun ve $\sup\{\Omega(g) : g \in G\} < \infty$ koşulu sağlansın. G amenable grup olduğundan $L_\infty(G)$ üzerinde sol değişmez bir ortalama vardır. Ayrıca (2.4) ve (2.5) eşitliklerinden $g \in G$ için

$$\Omega(g) = w(g).w(g^{-1})$$

şeklindedir. Üstelik

$$w(gg^{-1}) \leq w(g).w(g^{-1})$$

ve w pozitif bir ağırlık fonksiyonu olduğundan $g \in G$ için $c \leq \Omega(g)$ sağlayan $c \in]0, \infty[$ vardır.

Yine $\sup\{\Omega(g) : g \in G\} < \infty$ olduğundan $\Omega(g) \leq C$ sağlayan $C \in]0, \infty[$ vardır. Dolayısıyla $c, C \in]0, \infty[$ için $c \leq \Omega \leq C$ elde edilir. O halde $L_\infty(\Omega^{-1}, G)$ üzerinde sol değişmez bir ortalama vardır. Yine Teorem 2.37 den ∇ diagonal idealinin sınırlı sağ yaklaşık birimi vardır. Üstelik Beurling cebirinin sınırlı yaklaşık birimi olduğundan Teorem 2.22

den $L_1(w,G)$ amenable Banach cebiridir. Dolayısıyla her E Banach $L_1(w,G)$-bimodül için $H^1(L_1(w,G),E^\star)=\{0\}$ elde edilir.

Tersine $H^1(L_1(w,G),E^\star)=\{0\}$ olsun. O halde $L_1(w,G)$ amenable Banach cebiridir. Teorem 2.22 den ∇ diagonal idealinin sınırlı sağ yaklaşık birimi vardır. Yine 2.36 dan $L_\infty(\Omega^{-1},G)$ üzerinde sol değişmez bir ortalama vardır. Ayrıca Ω nın tanımından $g\in G$ için $\Omega(g)>\Delta>0$ sağlayan $\Delta>0$ vardır. O halde $L_\infty(G)$ üzerinde sol değişmez bir ortalama bulunur. Dolayısıyla G amenable gruptur. Şimdi $\sup\{\Omega(g):g\in G\}<\infty$ olduğunu gösterelim. Bunun için $\alpha\in\mathbb{R}_+$ için

$$E(\alpha)=\{g\mid\Omega(g)<\alpha\}\text{ ve }F(\alpha)=G\backslash E(\alpha)$$

şeklinde tanımlayalım. O halde $\alpha,\beta\in\mathbb{R}_+$ için $E(\alpha)F(\beta)\subseteq F(\frac{\beta}{\alpha})$ gerçeklenir. Sol değişmezlik ile eğer $F(\beta)\neq\emptyset$ ise

$$0\leq\langle\chi_{E(\alpha)}\rangle\leq\frac{\alpha}{\beta}\|M\|$$

sağlar. Üstelik $\chi_G=\chi_{E(\alpha)}+\chi_{F(\beta)}$ olduğundan $\langle\chi_G,m\rangle=1$ ve $\lim\limits_{\alpha\to+\infty}\|\chi_{F(\alpha)}\|=0$ elde edilir. Dolayısıyla $F(\beta)=\emptyset$ olur. Böylelikle $\{\Omega(g):g\in G\}$ kümesi üsten sınırlıdır ve $\sup\{\Omega(g):g\in G\}<\infty$ sağlanır.

Bu teorem Johnson Teoremi' ne benzer şekilde fakat w ağırlık fonksiyonuna koşul konarak elde edilmiştir. Grup cebiri için yapılan çalışmanın ağırlıklı grup cebiri için de yapılacağı ortaya konmuştur.

5. TARTIŞMA VE SONUÇ

Bu tezde yerel kompakt grubun ve Banach cebirinin amenable olması kavramları incelenmiştir. Özel olarak da ağırlıklı Banach cebirleri tanıtılarak bu cebirlerin amenable olması çalışılmıştır. Buna göre , ağırlıklı Banach cebirinin özel hali olan grup cebirleri için bilinen ünlü Johnson teoremi, ağırlıklı grup cebirleri için yorumlanmıştır.

Hem grubun hem de Banach cebirinin amenable olmasını incelemek soyut harmonik analiz için popüler bir konu olduğundan bununla ilgili çalışmalar yoğun bir şekilde devam etmektedir. Bu çalışmalar sadece Banach cebirleri için değil Banach modülü, Banach ideali için de incelenmektedir. Ayrıca zayıf, yaklaşık amenable kavramları da popüler araştırma konularındandır. [6] çalışması bu alandaki çalışmalara bir örnektir.

KAYNAKLAR

[1]. Bonsall, F.F. and Duncan , J.,1973 , *Complete Normed Algebras*, Springer Verlag, Berlin, Heidelberg, New York, ISBN: 3-540-06386-2.

[2]. Curtis, P.C., JR., and Loy, R.J., 1989, The Structure of Amenable Banach Algebras, *Journal of the London Mathematical Society*, 40, 89-104.

[3]. Dunford, N. and Schwartz, J.T., 1988, *Linear Operators, Part I: General Theory*, Interscience Publishers, Inc., New York, ISBN: 0-470-22605-6.

[4]. Greenleaf, F. P., 1969, *Invariant Means on Topological Groups*, Van Nostrand, New York, ISBN:978-0442028572.

[5]. Grønbæk, N., 1990, Amenability of Weighted Convolution Algebras on Locally Compact Groups, *American Mathematical Society*, 319(2), 765-775.

[6]. Ghahramani, F. and Loy, R.J., 2004, Generalized Notions of Amenability, *Journal of Functional Analysis*, 208, 229-260.

[7]. Folland, G.B., 1995, *A Course in Abstract Harmonic Analysis*, CRC Press, Boca Raton, Ann Arbor, London, Tokyo, ISBN: 0-8493-8490-7.

[8]. Hewitt, E. and Ross , K.A., 1963, *Abstract Harmonic Analysis : Volume 1: Structure of Topological Groups. Integration Theory. Group Representations*, Springer Verlag, Berlin, Göttingen, Heidelberg, ISBN: 978-3-662-39358-1.

[9]. Johnson, B.E., 1972, Cohomology in Banach Algebras, *Memories of American Mathematical Society*, 127.

[10]. Kaniuth, E., 2009, *A course in Commutative Banach Algebras*, Springer, New York, ISBN: 978-0-387-72475-1.

[11]. Khelemskii, A. Ya. and Sheinberg, M.V., 1979, Amenable Banach Algebras, *Functional Analysis Applications*, 13, 32-37.

[12]. Reiter, H. and Stegeman, Jon D., 2000, *Classical Harmonic Analysis and Locally Compact Groups*, Oxford University Press, New York.

[13]. Runde, W., 2002, *Lectures on Amenability*, Springer, Berlin, Heidelberg, New York, ISBN: 3-540-42852-6.

[14]. Rudin, W., 1990, *Fourier Analysis on Groups*, Wiley-Interscience, New York, Chichester, Toronto, ISBN: 0-471-52364-X.

[15]. Saeki, S., 1990, The L_p-conjecture and Youngs Inequality, *Illinois Journal of Mathematics*, 34, 614-627.

ÖZGEÇMİŞ

Kişisel Bilgiler

Adı Soyadı	Mutlu AVCI
Uyruğu	T.C.
Doğum yılı, Yeri	1990, Bursa.
Telefon	05376915559
E-mail	titizmutlu@gmail.com

Eğitim

Derece	Kurum/Anabilim Dalı/Programı	Yılı
Lisans	İ.Ü. Fen Fakültesi/Matematik Bölümü	2012
Lise	Gemlik Lisesi (Y.D.A)	2008