T.C.
İSTANBUL ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

YÜKSEK LİSANS TEZİ

BAZI REEL KUADRATİK SAYI CİSİMLERİNİN SINIF SAYILARI ve CEBİRSEL YAPILARI

Dilek GÜN

Matematik Anabilim Dalı

Matematik Programı

DANIŞMAN
Doç. Dr. Ayten PEKİN

Aralık, 2016

İSTANBUL

Bu çalışma 27.12.2016 tarihinde aşağıdaki jüri tarafından Matematik Anabilim Dalı Matematik Programında Yüksek Lisans Tezi olarak kabul edilmiştir.

Tez Jürisi:

Prof. Dr. Kamuran SAYGILI
İstanbul Üniversitesi
Fen Fakültesi

Prof. Dr. Erhan ÇALIŞKAN
İstanbul Üniversitesi
Fen Fakültesi

Doç. Dr. Muttalip ÖZAVŞAR
Yıldız Teknik Üniversitesi
Fen Fakültesi

Doç. Dr. Şükrü YALÇINKAYA
İstanbul Üniversitesi
Fen Fakültesi

Yrd. Doç. Dr. Temha
ERKOÇ YILMAZTÜRK
İstanbul Üniversitesi
Fen Fakültesi

20.04.2016 tarihli resmi gazetede yayımlanan Lisansüstü Eğitim ve Öğretim Yönetmeliğinin 9/2 ve 22/2 maddeleri gereğince; Bu Lisansüstü teze, İstanbul Üniversitesi'nin abonesi olduğu intihal yazılım programı kullanılarak Fen Bilimleri Enstitüsü'nün belirlemiş olduğu ölçütlere uygun rapor alınmıştır.

ÖNSÖZ

Sadece tezimin oluşturulma aşamasında değil, tüm yüksek lisans öğrenimim boyunca bulgularımı ve elde ettiğim sonuçları sabırla dinleyip, yapıcı eleştiri ve bilgilerini benden esirgemeyen kıymetli danışmanım Doç. Dr. Ayten PEKİN'e, gerek maddi gerekse manevi açıdan benden hiçbir desteğini esirgemeyen her daim yanımda olduklarını hissettiğim kıymetli aileme en içten teşekkürlerimi sunarım.

Aralık, 2016 Dilek GÜN

İÇİNDEKİLER

Sayfa No

TABLO LİSTESİ

SİMGE VE KISALTMA LİSTESİ

Simgeler	**Açıklama**
$\mathbb{N}$	: Doğal sayılar kümesi
$\mathbb{Z}$	: Tam sayılar kümesi
$\mathbb{Z}^+$	: Pozitif tam sayılar kümesi
$\mathbb{Q}$	: Rasyonel sayılar kümesi
$\mathbb{R}$	: Reel sayılar kümesi
$\mathbb{C}$	: Kompleks sayılar kümesi
$\mathbb{Q}(\sqrt{d})$	: Kuadratik sayı cismi
O_K	: $K = \mathbb{Q}(\sqrt{d})$ cisminin tamlık halkası
ω_d	: $\mathbb{Q}(\sqrt{d})$ cisminin O_k tamlık halkasının taban elemanı olan kuadratik irrasyonel sayı
ω_R	: ω_d kuadratik irrasyonel sayısının indirgenmiş hali
k_d	: ω_d kuadratik irrasyonel sayısının sürekli kesre açılımındaki periyod
$\triangle_d$	: $\mathbb{Q}(\sqrt{d})$ cisminin diskriminantı
$R(d)$	: Diskriminantı $\triangle_d$ olan indirgenmiş kuadratik irrasyonel sayıların kümesi
$\mathcal{U}_d$	: $\mathbb{Q}(\sqrt{d})$ Cisminin birimler grubu
ε_d	: $\mathbb{Q}(\sqrt{d})$ Cisminin temel birimi
T_d	: ε_d temel biriminin katsayısı
U_d	: ε_d temel biriminin katsayısı
$N(\alpha)$	: α elemanının normu
$\dot{I}z(\alpha)$	: α elemanının izi
α'	: α elemanının eşleniği
$a\|b$	: a böler b
$\|x\|$	: x in mutlak değeri
$\lfloor x \rfloor$	: x değerinin tam değeri
sgn x	: x in işaret fonksiyonu
$A \sim B$	: A ile B idealleri geniş anlamda denktir
$A \approx B$	: A ile B idealleri dar anlamda denktir
h_k	: Geniş anlamda sınıf sayısı
${h_k}^+$	: Dar anlamda sınıf sayısı
χ_d	: Kronecker karakteri
$L(s, \chi_d)$	: L-fonksiyonu
M_k	: Minkowski sınırı
n_d, m_d	: Yokoi nin invaryant değerleri
$\left(\frac{*}{*}\right)$	: Legendre veya Jacobi sembolü

K/L	: Cisim genişlemesi
$[K : L]$	: K cisminin L cismi üzerindeki genişlemesinin derecesi
$\alpha ceb/L$	: α, L cismi üzerinde cebirsel elemandır
$\alpha trans/L$	: α, L cismi üzerinde transandart elemandır
$[q_0, q_1, ..., q_n]$	: Basit sonlu sürekli kesir
$[q_0, ..., \overline{q_k, ..., q_{k+m-1}}]$	: Periyodik sürekli kesir
$[\overline{q_0, q_1, ..., q_k}]$	: Pür-periyodik sürekli kesir

ÖZET

YÜKSEK LİSANS TEZİ

BAZI REEL KUADRATİK SAYI CİSİMLERİNİN SINIF SAYILARI ve CEBİRSEL YAPILARI

Dilek GÜN

İstanbul Üniversitesi

Fen Bilimleri Enstitüsü

Matematik Anabilim Dalı

Danışman: Doç. Dr. Ayten PEKİN

Bu tez çalışmasında, belirli tipteki reel kuadratik sayı cisimlerinin sınıf sayılarının, invaryant değerlere göre irdelenmesine bağlı olarak cebirsel yapıları anlatılmaktadır.

Bu tez çalışması derleme niteliğinde olup, beş ana bölümden oluşmaktadır. Birinci bölümde, tezin içerdiği konulara bir giriş yapılmaktadır.

İkinci bölüm, on bir alt bölümden oluşmaktadır. Birinci alt bölümde; cebirsel sayı cisimleri ile ilgili temel tanım ve kavramlar verilmektedir. İkinci alt bölümde; kuadratik sayı cismi ve bu cisimlerin tamlık halkası kavramları üzerinde durulmaktadır. Üçüncü alt bölümde; kuadratik sayı cisimlerinin temel birimlerinin genel ifadesi ve Richaut-Degert(R-D) tipinde olan reel kuadratik sayı cisimlerinin temel birimlerinin biçimi ifade edilmektedir. Bu bölümde imajiner kuadratik sayı cisimlerinin birimlerinin ve reel kuadratik sayı cisimlerinin temel birimlerinin nasıl belirlendiği de açıklanmaktadır. Dördüncü alt bölümde kuadratik sayı cisimlerinin diskriminantı tanımlanmaktadır. Beşinci alt bölümde; kuadratik sayı cisimlerindeki "ideal" kavramı ifade edilmekte ve bir idealin diskriminantının nasıl bulunacağı gösterilmektedir. Altıncı alt bölümde; "Legendre Sembolü", "Jacobi Sembolü", "Kronecker Sembol" ile "Kronecker Karakter" kavramları açıklanmakta ve bir p tek asalının ayrışımı üzerinde durulmaktadır. Yedinci alt bölümde; kuadratik sayı cisimlerinin sınıf sayıları ele alınmakta ve "dar anlamda sınıf sayısı" ile "geniş anlamda sınıf sayısı" kavramları tanımlanmaktadır. Sekizinci alt bölümde; sürekli kesirler incelenmekte, basit sürekli kesirler detaylı olarak ele alınıp konu ile ilgili gerekli tanım ve teoremlere yer verilmektedir. Ayrıca bu bölümde sonlu sürekli kesirler ve rasyonel sayılar arasında birebir bir eşleme olduğu sonucu da verilmektedir. Dokuzuncu alt bölümde "sonsuz sürekli kesir" tanımı yapılmakta ve sonsuz sürekli kesirler ile irrasyonel sayılar arasında birebir bir eşleme olduğu sonucu verilmektedir. Onuncu alt bölümde "periyodik sürekli kesir" kavramı tanıtılmakta ve kuadratik irrasyonel sayılar ile periyodik sürekli kesir arasındaki ilişki teorem olarak verilmekle birlikte pür-periyodik sürekli kesirler de tanımlanıp bir kuadratik irrasyonel sayısının pür-periyodik olması için gerek ve yeter koşul verilmektedir. On birinci alt başlıkta Yokoi invaryant değerleri n_d ve m_d ile ilgili teoremler verilmektedir. Ayrıca yine bu bölümde çeşitli periyot uzunlukları için sürekli kesir açılımları, temel birimin şekli, sınıf sayısının $h_d = 1$ olması için gerek ve yeter koşullar ile sınıf sayısı $h_d = 1$ veya $h_d = 2$ olan reel kuadratik sayı cisimleri verilmektedir.

Üçüncü bölüm, tez çalışması süresince faydalanılan kaynaklardan ve uygulanan yöntemlerden oluşmaktadır.

Dördüncü bölümde, genellikle (R-D) tipinde olmayan belirli tipteki reel kuadratik sayı cisimleri ele alınarak, ω_d kuadratik irrasyonel sayısının sürekli kesre açılımında periyodun 7 olması halinde, temel birimin T_d ve U_d katsayılarına bağlı olarak tanımlanmış olan Yokoi invaryant değer n_d yardımıyla $n_d = 0$ için çıkarılabilecek sonuçlara yer verilmiştir. Bu sonuçları sağlayan sınıf sayısı 1 veya 2 olan kuadratik sayı cisimleri sürekli kesir açılımları ile birlikte tablolar halinde verilmiştir.

Beşinci bölümde ise çalışmanın genel değerlendirmesi yapılmaktadır.

Aralık 2016, 84 sayfa.

Anahtar kelimeler: Sürekli kesir, temel birim, sınıf sayısı, invaryant değer

SUMMARY

M. Sc. THESIS

THE CLASS NUMBERS AND ALGEBRAIC STRUCTURES OF CERTAIN REAL QUADRATIC NUMBER FIELDS

Dilek GÜN

İstanbul University

Institute of Graduate Studies in Science and Engineering

Department of Mathematics

Supervisor: Assoc. Prof. Dr. Ayten PEKİN

In this thesis, certain types of real quadratic number fields of class numbers, depending on the evaluation according to the invariant value algebraic structures are explained.

This thesis is a compilation work and consists of five main chapters. In the first chapter, an introduction to the subject in thesis has been given.

The second chapter consists of eleven subsections. In the first subsection, basic definitions and concepts related to algebraic number fields are given. In the second subsection, it is focused on the quadratic number fields and concepts of the integral rings of these fields. In the third subsection, the real quadratic number fields of Richaut-Degert(R-D) type are defined and the general statement of the fundamental units of such fields are given. It also explains how the fundamental units of imaginer and real quadratic number fields are determined. In the fourth subsection, the discriminant of the quadratic number fields is defined. In the fifth subsection, the concept of "ideal" in quadratic number fields is expressed and it is shown how to find the discriminant of a ideal. In the sixth subsection, the concepts of “Legendre Symbol”, “Jacobi Symbol”, “Kronecker Symbol” and “Kronecker Character” are explained and it focuses on the decomposition of the odd prime number p. In the seventh subsection, the class numbers of the quadratic number fields are discussed and "narrow sense of class number" and "extended sense of class number" concepts are defined. In the eighth subsection, continued fractions are examined and also simple continued fractions are handled in detail and fundamental definitions and theorems related to the subject are

given. Furthermore, the result that there is an one-to-one mapping between "finite continued fractions" and rational numbers is given. In the nineth subsection, "infinite continued fraction" is defined and the result that there is an one-to-one mapping between infinite continued fractions and irrational numbers is given. In the tenth subsection, the concepts of “periodic continued fraction” and “pure-periodic continued fraction” are defined. Moreover, the relationship between quadratic irrational numbers and periodic continued fraction is given and also a necessary and sufficient condition is stated so that a quadratic irrational number can be pure-periodic. In the eleventh subsection, the theorems related to the Yokoi invariant values n_d and m_d are given. Furthermore, for various period lengths the continued fraction expansions, the form of fundamental unit, the necessary and sufficient conditions for the class number $h_d = 1$ and also real quadratic number fields with class numbers $h_d = 1$ or $h_d = 2$ are given.

The third chapter consist of utilized sources and the methods applied during the thesis.

In the fourth chapter, certain real quadratic number fields which are not the type of R-D are handled. There are some results that can be extracted for $n_d = 0$ by using of Yokoi invariant values n_d, which is defined by the T_d and U_d depending on coefficients of the fundamental unit, in the case that the period of the continuous fraction expansion of w_d quadratic irrational number is equal to 7. Certain real quadratic number fields providing these results, class number 1 or 2, are given in the form of tables.

In the fifth section, a general assessment of the study is presented.

December 2016, 84 pages.

Keywords: Continued fraction, fundamental unit, class number, invariant value

1. GİRİŞ

$\mathbb{Q}$ rasyonel sayılar cisminin ikinci dereceden bir genişlemesi olan kuadratik sayı cisimleri üzerine yapılan çalışmalar arasında cismin sınıf sayısının hesaplanması önemli bir yer tutmaktadır.

Sayı cisimlerinin "ideal sınıfları grubunun mertebesi" olarak tanımlanan sınıf sayıları Dirichlet Sınıf Sayısı Formülü gibi bir takım formüller yardımıyla doğrudan hesaplanabilmektedir. Ancak, ideal sınıfları grubu yardımı ile sınıf sayısının belirlenmesi kolay olmadığından bu formüller dışında çok çeşitli yöntemler geliştirilerek bir çok kriterler elde edilmiştir.

d kare çarpansız bir tam sayı olmak üzere, $\mathbb{Q}$ rasyonel sayılar cisminin cebirsel genişlemesi olan $\mathbb{Q}(\sqrt{d})$ kuadratik sayı cismi; $d > 0$ ise *reel kuadratik sayı cismi*, $d < 0$ ise *imajiner kuadratik sayı cismi* olarak adlandırılır.

İmajiner kuadratik sayı cisimleri için sınıf sayısı 1 problemi 1966 yılında H. M. Stark ve A. Baker tarafından bağımsız olarak çözülmüştür. Bu cisimlerin sonlu sayıda olduğu ve bunların $d = -1, -2, -3, -7, -11, -19, -43, -67, -163$ değerlerine karşılık gelen imajiner kuadratik sayı cisimlerinden ibaret olduğu belirlenmiştir.

Sınıf sayısı 1 olan reel kuadratik sayı cisimlerinin sayısının sonlu olup olmadığı henüz kesinlik kazanmamıştır (Gauss Konjektürü). Bu nedenle sınıf sayısı 1 problemi reel kuadratik sayı cisimleri için tamamen çözülememiş olduğundan bu sayı cisimleri ile çalışmak daha bir önem kazanmıştır.

Bu cisimlerin sınıf sayısının 1 olması için gerek ve yeter koşulları veren bir takım genel kriterler elde edilmesine rağmen bu kriterlerin Richaut-Degert(R-D) tipinde olmayan cisimlere uygulanmasının ve bu yolla sınıf sayısı 1 olan sayı cisimlerinin tespit edilmesi son derece zor olmaktadır. Aynı zamanda reel kuadratik sayı cisimlerinin sınıf sayısının belirlenmesinde cismin temel birimi de önemli rol oynamaktadır.

Richaut-Degert (R-D) tipinden sayı cismi olarak ifade edilen $d = n^2 + r$, ($-n < r \leq n$) kare çarpansız pozitif bir tamsayı olmak üzere $r|4n$ koşulunu sağlayan $\mathbb{Q}(\sqrt{d})$ reel kuadratik sayı cisimlerinin temel birimleri:

$$\varepsilon_d = \begin{cases} n + \sqrt{d} & , \ |r| = 1 \text{ ise } (N(\varepsilon_d) = -sgn\, r) \\ \\ \dfrac{n + \sqrt{d}}{2} & , \ |r| = 4 \text{ ise } (N(\varepsilon_d) = -sgn\, r) \\ \\ \dfrac{(2n^2 + r) + 2n\sqrt{d}}{|r|} & , \ |r| \neq 1, 4 \text{ ise } (N(\varepsilon_d) = 1) \end{cases}$$

biçiminde belirlenmiştir. (Burada, $sgn\, r$, r nin işaret fonksiyonudur.)

Ancak Richaut-Degert (R-D) tipinde olmayan sayı cisimleri için, temel birimin biçimi belli olmadığından, belli kriterlerin bu cisimlere uygulanabilmesi zor olmaktadır. Bu sebeple son zamanlarda sınıf sayılarının belirlenmesine yönelik çalışmalar Richaut-Degert (R-D) tipinde olmayan reel kuadratik sayı cisimleri üzerinde yoğunlaşmıştır.

Genel olarak Richaut-Degert (R-D) tipinde olmayan reel kuadratik sayı cisimleri için yapıyı belirleyen ve sınıf sayısının hesaplanmasında, sınıf sayısı için gerekli olan, Pell denklemlerinin çözümleri, çözümlerin sağladıkları rekürans bağıntıları, tamlık taban elemanı olan ω_d kuadratik irrasyonel sayısının sürekli kesre açılımı ve periyod uzunluğu, temel birim olan ε_d, diskriminant, Yokoi invaryant değerlerinin hesabı gibi cebirsel özellikleri belirleyen, bir takım yapıların belirlenmesi de oldukça önemlidir.

Azuhata [22], çalışmasında sürekli kesir açılımına bağlı rekürans bağıntıları tanımlayarak temel birimler; Mollin ve Williams ([25] - [38]), ise ideal-sürekli kesir ve Rabinowitch polinomu yardımıyla sınıf sayıları ile ilgili bazı kriterler elde etmişlerdir.

Yokoi [20], yapmış olduğu çalışmasında $p \neq 5$, $p \equiv 1 \pmod 4$ bir asal sayı olmak üzere $x^2 - py^2 = -4$ diophant denklemini aşikar olmayan bir $(x, y) = (T_p, U_p)$ tam sayı çözümündeki bağıntılardan faydalanarak $\mathbb{Q}(\sqrt{p})$ asal diskriminantlı reel kuadratik sayı cisminin temel biriminin $\varepsilon_p = \dfrac{T_p + U_p\sqrt{p}}{2}(> 1)$ olduğunu kanıtlamıştır.

d kare çarpansız pozitif tam sayısı için $K = \mathbb{Q}(\sqrt{d})$ reel kuadratik sayı cisminin tamlık tabanı $\{1, \omega_d\}$ olmak üzere,

$$\omega_d = \begin{cases} \dfrac{1+\sqrt{d}}{2}, & d \equiv 1 \pmod 4 \text{ ise;} \\ \\ \sqrt{d}, & d \equiv 2, 3 \pmod 4 \text{ ise.} \end{cases}$$

biçiminde belirli olan kuadratik irrasyonel sayısının sürekli kesir açılımının genel biçimi, temel birimin katsayıları, Yokoi invaryant değerleri ve sınıf sayısı üzerine bir takım çalışmalar; periyodun $k_d = 3$ olması halinde Tomita [23], periyodun $k_d = 4$ olması halinde Mollin ve Williams ([24] - [37]), Tomita [18] ile Özer ve İşcan [39], periyodun $k_d = 6$ olması halinde ise Pekin [27] ile Özer ve Telci [40], periyodun $k_d = 7$ olması halinde Karadeniz Gözeri ve Pekin [30, 28] ile Özer ve Pekin [29] tarafından yapılmıştır.

Periyodun $k_d = 5$ olması halinde Tomita [18], tarafından Richaut-Degert (R-D) tipinde olmayan $a, b \in \mathbb{Z}^+$ olmak üzere $d = a^2 + b \equiv 1 \pmod 4$ sağlayan $K = \mathbb{Q}(\sqrt{d})$ reel kuadratik sayı cisimlerinde ω_d kuadratik irrasyonel sayısının sürekli kesre açılımlarının genel formları ve temel biriminin katsayıları olan T_d ve U_d belirlenerek Yokoi invaryant değerleri olan n_d ve m_d üzerine bir takım kriterler verilmiş ve yine aynı koşullar altında Mollin [25], tarafından özel olarak tanımlanan Rabinowitch polinomu yardımıyla $K = \mathbb{Q}(\sqrt{d})$ reel kuadratik sayı cisimlerinin sınıf sayısı ve yapısı ile ilgili bazı sonuçlar verilmiştir.

Bu tez çalışmasında, genellikle (R-D) tipinde olmayan bazı reel kuadratik sayı cisimleri ele alınarak, bu cisimlerin temel birimlerinin şekli ve Yokoi tarafından tanımlanmış invaryant değer n_d yardımıyla çıkarılabilecek bazı sonuçlara yer verilmiştir. ω_d kuadratik irrasyonel sayısının sürekli kesre açılımında periyodun $k_d = 7$ olması halinde, Karadeniz Gözeri ve Pekin [30, 28] ile Özer ve Pekin [29] tarafından yapılan çalışmalarda elde edilmiş olan temel birimin T_d ve U_d katsayılarına bağlı olarak Yokoi ([34] - [20] - [33]), tarafından tanımlanmış olan invaryant değer n_d tanımı yardımıyla, $n_d = 0$ için çıkarılabilecek bazı sonuçlar verilmiştir. Bu sonuçlar; Sonuç 4.1, Sonuç 4.2 ve Sonuç 4.3 olup bu sonuçların ispatında bahsi geçen çalışmalardan faydalanılmıştır ve sonuçları sağlayan sınıf sayısı 1 veya 2 olan kuadratik sayı cisimleri sürekli kesir açılımları ile birlikte tablolar halinde verilmiştir.

2. GENEL KISIMLAR

2.1. Temel Kavramlar

Bu bölümde cisim genişlemeleri ile ilgili temel tanım ve kavramlara yer verilmiştir.

Tanım 2.1. [1] L cismini kapsayan K cismine L cisminin bir *genişlemesi* denir ve $L \leq K$ olmak üzere bir cisim genişlemesi K/L biçiminde gösterilir.

Tanım 2.2. [2] K/L bir cisim genişlemesi ise K' nın L cismi üzerinde vektör uzayı olarak boyutuna *K' nın L üzerindeki genişlemesinin derecesi* denir ve $[K : L]$ ile gösterilir. Eğer $[K : L] < \infty$ ise K/L ifadesine *sonlu bir genişleme* denir.

Tanım 2.3. [2] K/L bir cisim genişlemesi ve $\alpha \in K$ olmak üzere $p(\alpha) = 0$ olacak şekilde sıfır polinomundan farklı bir $p(x) \in L[x]$ polinomu mevcutsa α elemanına L üzerinde *cebirsel eleman* denir ve $\alpha ceb/L$ ile gösterilir. Aksi durumda, α' ya L üzerinde *transandart eleman* denir ve $\alpha trans/L$ ile gösterilir.

Tanım 2.4. [2] K, L cisminin bir genişlemesi ve K' nın her α elemanı L üzerinde cebirsel ise K cismine L cisminin bir *cebirsel genişlemesi* denir.

Önerme 1. [3] Her sonlu genişleme bir cebirsel genişlemedir.

Tanım 2.5. [4] K/L bir cisim genişlemesi ve $\alpha ceb/L$ olmak üzere $K = L(\alpha)$ şeklinde yazılabiliyor ise K cismine L cisminin bir *basit genişlemesidir* denir.

Tanım 2.6. [5] $\alpha \in \mathbb{C}$ ve $a_1, a_2, ..., a_n \in \mathbb{Q}$ olmak üzere,

$$\alpha^n + a_1\alpha^{n-1} + a_2\alpha^{n-2} + ... + a_n = 0$$

denklemini sağlıyorsa α' ya *cebirsel sayı* denir. Eğer her $i = 1, 2, 3, ..., n$ için, $a_i \in \mathbb{Z}$ ise α' ya *cebirsel tam sayı* denir.

Not 2.1. [5] $\forall\alpha \in \mathbb{Q}(\sqrt{d})$ için, α elemanı katsayıları $\mathbb{Q}$' da olan ikinci dereceden bir polinomun bir köküdür. O halde $\mathbb{Q}$' nun cebirsel bir genişlemesidir. Özel olarak α,

$x^2 + bx + c \in \mathbb{Z}[x]$ polinomunun bir kökü ise α' ya $\mathbb{Q}(\sqrt{d})$' nin bir cebirsel tam sayısı denir.

Tanım 2.7. [6] $\mathbb{Q}$ rasyonel sayılar cisminin sonlu bir genişlemesine *cebirsel sayı cismi* denir.

Önerme 2. [1] Bir rasyonel sayının, cebirsel tam sayı olması için gerek ve yeter koşul tam sayı olmasıdır.

İspat: $\Rightarrow$: $\alpha \in \mathbb{Q}$ ve α cebirsel tam sayı olsun. Bu durumda Tanım 2.6 gereği

$$\alpha^n + a_1\alpha^{n-1} + a_2\alpha^{n-2} + ... + a_n = 0 \tag{2.1}$$

olacak şekilde $a_i \in \mathbb{Z}$, $i = 1, 2, ..., n$ bulunabilir. α bir rasyonel sayı olduğundan $(r, s) = 1$ olmak üzere $\alpha = \dfrac{r}{s}$ şeklinde yazılabilir. Denklem (2.1)' de $\alpha = \dfrac{r}{s}$ yazılıp, her iki taraf s^n ile çarpılırsa;

$$r^n + a_1 s r^{n-1} + a_2 s^2 r^{n-2} + ... + a_n s^n = 0 \tag{2.2}$$

olarak bulunur. Bu (2.2) eşitliğinden

$$s(a_1 r^{n-1} + a_2 s r^{n-2} + ... + a_n s^{n-1}) = -r^n$$

olup $s|r^n$ elde edilir. O halde $s = \pm 1$ olmalıdır. Aksi halde $(r, s) = 1$ oluşu ile çelişir. Bu durumda $\alpha \in \mathbb{Z}$ olduğu görülür.

$\Leftarrow$: $\alpha \in \mathbb{Z}$ olsun. Bu durumda α, $x - \alpha = 0$ denkleminin bir köküdür. Böylece α cebirsel tam sayıdır. $\square$

Tanım 2.8. [1] K/L sonlu bir cisim genişlemesi ve $[K : L] = n$ olsun. $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n$; K/L genişlemesinin tabanı ve $\alpha \in K$ olsun. Bu durumda,

$$\alpha\alpha_i = \sum_j a_{ij}\alpha_j$$

olacak biçimde $a_{ij} \in L$ elemanları vardır. O halde α' nın *normu* ve α' nın *izi* sırasıyla

$$N(\alpha) = det(a_{ij}) \qquad \text{ve} \qquad \dot{I}z(\alpha) = a_{11} + a_{22} + ... + a_{nn}$$

şeklinde tanımlanır.

Özel olarak $\mathbb{Q}(\sqrt{d})/\mathbb{Q}$ genişlemesini ele alırsak; $\mathbb{Q} \leq \mathbb{Q}(\sqrt{d}) = \{a + b\sqrt{d} \mid a, b \in \mathbb{Q}\}$ olup bu cisim genişlemesinin tabanı $\{1, \sqrt{d}\}$ dir.

Eğer bir $\alpha \in \mathbb{Q}(\sqrt{d})$ elemanının normunu ve izini belirlemek istersek;

Her $\alpha \in \mathbb{Q}(\sqrt{d})$ elemanı $a, b \in \mathbb{Q}$ olmak üzere $\alpha = a + b\sqrt{d}$ şeklinde yazılabilir.

i) $b = 0$ olması halinde $\alpha = a \in \mathbb{Q}$ olur. Tanım 2.8' den dolayı;

$a.1 = a.1 + 0.\sqrt{d}$

$a.\sqrt{d} = 0.1 + a.\sqrt{d}$ olup;

$$N(a) = \begin{vmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{vmatrix} = a^2 \qquad \text{ve} \qquad \dot{I}z(\alpha) = 2a$$

olarak bulunur.

ii) $b \neq 0$ olması durumunda $\alpha = a + b\sqrt{d} \in \mathbb{Q}(\sqrt{d})$ olur. Bu durumda Tanım 2.8' den dolayı;

$(a + b\sqrt{d}).1 = a + b\sqrt{d} = a.1 + b.\sqrt{d}$

$(a + b\sqrt{d}).\sqrt{d} = a\sqrt{d} + b.d = (b.d).1 + a.\sqrt{d}$ olup;

$$N(a) = \begin{vmatrix} a & b \\ b.d & a \end{vmatrix} = a^2 - b^2 d \qquad \text{ve} \qquad \dot{I}z(\alpha) = 2a$$

olarak bulunur.

Dikkat edilecek olursa; $\alpha^{'}$, $\alpha = a + b\sqrt{d} \in \mathbb{Q}(\sqrt{d})$ elemanının eşleniğini ifade etmek üzere, $\alpha \in \mathbb{Q}(\sqrt{d})$ için

$$\begin{aligned} N(\alpha) = a^2 - b^2 d &= (a + b\sqrt{d}).(a - b\sqrt{d}) \\ &= \alpha.\alpha^{'} \end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned} \dot{I}z(\alpha) = 2a &= (a + b\sqrt{d}) + (a - b\sqrt{d}) \\ &= \alpha + \alpha^{'} \end{aligned}$$

olur.

Sonuç 2.1. [1] $\alpha, \beta \in K$ ve $a \in L$ olmak üzere,

i) $N(\alpha.\beta) = N(\alpha).N(\beta)$

ii) $\dot{I}z(\alpha + \beta) = \dot{I}z(\alpha) + \dot{I}z(\beta)$

iii) $N(a.\beta) = a^n N(\beta)$

iv) $\dot{I}z(a\alpha) = a\dot{I}z(\alpha)$

v) Eğer $\alpha \neq 0$ ise $N(\alpha).N(\alpha^{-1}) = N(\alpha.\alpha^{-1}) = N(1) = 1$ dir. Böylece eğer $\alpha \neq 0$ ise $N(\alpha) \neq 0$ ve $N(\alpha^{-1}) = N(\alpha)^{-1}$ olur.

2.2. Kuadratik Sayı Cisimleri

Bu bölümde $\mathbb{Q}$ rasyonel sayılar cisminin ikinci dereceden bir genişlemesi olan kuadratik sayı cisimleri incelenerek temel özellikleri üzerinde durulmuştur.

Tanım 2.9. [1] $K/\mathbb{Q}$ cebirsel bir genişleme ve $[K : \mathbb{Q}] = 2$ ise K cebirsel sayı cismine *kuadratik sayı cismi* denir.

Tanım 2.10. [6] $K = \mathbb{Q}(\sqrt{d})$ bir kuadratik sayı cismi olsun. $d > 0$ ise K cismine *reel kuadratik sayı cismi*, $d < 0$ ise K cismine *imajiner kuadratik sayı cismi* denir.

Önerme 3. [1] Eğer K bir kuadratik sayı cismi ise en az bir d kare çarpansız tam sayısı için $K = \mathbb{Q}(\sqrt{d})$ dir.

İspat: K kuadratik sayı cismi (yani $[K : \mathbb{Q}] = 2$) ve $\{1, \alpha\}$, K' nın $\mathbb{Q}$ üzerindeki bir bazı olsun. Bu durumda $K = \mathbb{Q}(\alpha)$ biçiminde basit bir genişlemedir. Yani α, katsayıları $\mathbb{Q}$ cisminde olan $x^2 + px + q$ biçimindeki asal bir polinomun kökü olduğundan katsayıları $\mathbb{Z}$' de olan $ax^2 + bx + c$ polinomunun da bir köküdür. O halde;

$$\alpha = \frac{-b \mp \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

ifadesinde $b^2 - 4ac = D$ alınırsa, $K = \mathbb{Q}(\alpha) = \mathbb{Q}(\sqrt{D})$ olur. Polinom $\mathbb{Q}[x]$' te asal olduğundan D tam sayısının tam kare olmayan en az bir asal çarpanı vardır. Bu çarpana d denilirse, $K = \mathbb{Q}(\sqrt{d})$ olur. □

Sonuç 2.2. [6] d kare çarpansız bir tam sayı olmak üzere,

$$K = \mathbb{Q}(\sqrt{d}) = \{\alpha \mid \exists\, x, y \in \mathbb{Q};\ \alpha = x + y\sqrt{d}\}$$

şeklinde ifade edilir.

Tanım 2.11. [7] $K = \mathbb{Q}(\sqrt{d})$ kuadratik sayı cisminin cebirsel tam elemanlarının oluşturduğu $O_K = \{\alpha \in K| \ \alpha tam/\mathbb{Z}\}$ kümesi; toplama ve çarpma işlemlerine göre bir halkadır. O_K halkasına K cisminin *tamlık halkası* denir.

Önerme 4. [7] $K = \mathbb{Q}(\sqrt{d})$ kuadratik sayı cismi ise,

$$\alpha \in O_K \Leftrightarrow N(\alpha), \ \dot{I}z(\alpha) \in \mathbb{Z}$$

olmasıdır.

İspat: $\Rightarrow$: $\alpha \in O_K$ ise α cebirsel tam sayı olup Tanım 2.6' dan dolayı katsayıları tam sayı olan $x^2 + px + q$ polinomunu gerçekler.

$$-p = \dot{I}z(\alpha) \in \mathbb{Z} \ \ ve \ \ q = N(\alpha) \in \mathbb{Z}$$

olur.

$\Leftarrow$: $\alpha \in K$ için $N(\alpha)$, $\dot{I}z(\alpha) \in \mathbb{Z}$ olsun. $\alpha^{'}$, α elemanının eşleniğini ifade etmek üzere α ve $\alpha^{'}$ ' nün gerçeklediği polinom;

$$(x-\alpha)(x-\alpha^{'}) = x^2 - (\alpha+\alpha^{'})x + \alpha\alpha^{'} = x^2 - \dot{I}z(\alpha)x + N(\alpha)$$

olur. Böylece α, katsayıları tam sayı olan monik bir polinomu gerçeklediğinden cebirsel tamdır. O halde $\alpha \in O_K$ olur. □

Teorem 2.1. [5] d kare çarpansız bir tam sayı ve $K = \mathbb{Q}(\sqrt{d})$' nin cebirsel tam sayılar kümesi O_K olsun.

$$\omega_d = \begin{cases} \sqrt{d}, & \text{eğer } d \equiv 2, 3 \text{ (mod 4) ise;} \\ \dfrac{1+\sqrt{d}}{2}, & \text{eğer } d \equiv 1 \text{ (mod 4) ise.} \end{cases}$$

olmak üzere O_K' nın her elemanı, $x, y \in \mathbb{Z}$ için $x + y\omega_d$ biçiminde yazılabilir.

İspat: $\alpha \in \mathbb{Q}(\sqrt{d})$ ise $x, y \in \mathbb{Q}$ olmak üzere $\alpha = x + y\sqrt{d}$ şeklindedir. Önerme 4' den $\alpha \in O_K$, cebirsel tam sayıdır $\Leftrightarrow$ $N(\alpha)$, $\dot{I}z(\alpha) \in \mathbb{Z}$ olduğunu biliyoruz. Ayrıca α' nın eşleniği $\alpha' = x - y\sqrt{d}$ olmak üzere $N(\alpha) = x^2 - dy^2$ ve $\dot{I}z(\alpha) = 2x$ olduğunu da biliyoruz. $2x = m$ ve $2y = n$ diyelim. O halde,

$$\alpha \in O_K \Leftrightarrow \dot{I}z(\alpha) = 2x = m \in \mathbb{Z}, 4x^2 - 4dy^2 = m^2 - dn^2 \in 4\mathbb{Z} \Leftrightarrow m \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{Z}$$

olarak bulunur. Çünkü $dn^2 \in \mathbb{Z}$ ise d kare çarpansız bir tam sayı olduğundan $n^2 \in \mathbb{Z}$ olmalıdır. Dolayısıyla $n \in \mathbb{Z}$ olur. Ayrıca $m^2 - dn^2 = 4x^2 - 4dy^2 \in \mathbb{Z}$ olduğundan $m^2 - dn^2 \equiv 0$ (mod 4) olur.

d' yi kare çarpansız bir tam sayı olarak kabul ettiğimiz için $d \not\equiv 0$ (mod 4) olduğundan, aşağıdaki iki hali incelemek yeterlidir.

i) $d \equiv 2, 3$ (mod 4) olsun. $d \equiv 2$ (mod 4) durumunda $m^2 - dn^2 \equiv m^2 + 2n^2$ (mod 4) ve $d \equiv 3$ (mod 4) durumunda $m^2 - dn^2 \equiv m^2 + n^2$ (mod 4) olacaktır. Bu iki durumda da $m, n \in \mathbb{Z}$ için $m^2 - dn^2 \equiv 0$ (mod 4) $\Leftrightarrow$ m ve n' nin ikisinin birden çift tam sayı olmasıdır. Buradan $m = 2x$ ve $n = 2y$ çift tam sayı olduğundan $x, y \in \mathbb{Z}$ olarak elde edilir. O halde $\alpha \in O_K$, $x, y \in \mathbb{Z}$ iken $\alpha = x + y\sqrt{d}$ şeklinde yazılabilir.

ii) $d \equiv 1$ (mod 4) olsun. Bu durumda; $m, n \in \mathbb{Z}$ için $m^2 - dn^2 \equiv m^2 - n^2 \equiv 0$ (mod 4) $\Leftrightarrow$ m ve n' nin ikisinin birden çift, ya da ikisinin birden tek tam sayı olmasıdır. Aksi halde (birinin tek diğerinin ise çift olduğu durumda) $m^2 - n^2 \equiv 0$ (mod 4) olmaz. Bu durumda, $\alpha = x + y\sqrt{d} \in O_K$, $2x = m$ ve $2y = n$ olduğu da hesaba katılırsa, $O_K = \{\frac{m + n\sqrt{d}}{2} \mid m \equiv n(\text{ mod } 2)\}$ şeklindedir. Diğer taraftan

$$\alpha = x + y\sqrt{d} = \frac{m - n}{2} + n.\Big(\frac{1 + \sqrt{d}}{2}\Big)$$

olarak yazılabileceğinden ve $\frac{m - n}{2}$, n tam sayı olduğundan istenilen yazılış elde edilmiş olur. □

O_K' yı aşağıdaki gibi yazmak mümkündür.

Teorem 2.2. [1] $K = \mathbb{Q}(\sqrt{d})$ kuadratik sayı cismi olsun.

i) $d \equiv 2, 3$ (mod 4) ise $O_K = \mathbb{Z} + \mathbb{Z}(\sqrt{d})$

ii) $d \equiv 1$ (mod 4) ise $O_K = \mathbb{Z} + \mathbb{Z}(\frac{1 + \sqrt{d}}{2})$

olur.

Sonuç 2.3. [7] $K = \mathbb{Q}(\sqrt{d})$ kuadratik sayı cisminin O_K tamlık halkası sonlu üretilmiş bir $\mathbb{Z}$-modüldür ve üreteçleri,

i) $d \equiv 2, 3$ (mod 4) ise $\{1, \sqrt{d}\}$

ii) $d \equiv 1$ (mod 4) ise $\{1, \dfrac{1+\sqrt{d}}{2}\}$

biçimindedir.

Tanım 2.12. [7] $K = \mathbb{Q}(\sqrt{d})$ kuadratik sayı cisminin O_K tamlık halkası sonlu üretilmiş bir $\mathbb{Z}$-modüldür ve üreteçleri,

i) $d \equiv 2, 3$ (mod 4) ise $\omega_d = \sqrt{d}$

ii) $d \equiv 1$ (mod 4) ise $\omega_d = \dfrac{1+\sqrt{d}}{2}$

olmak üzere $\{1, \omega_d\}$ ikilisine O_K halkasının *tamlık tabanı* denir.

2.3. Kuadratik Sayı Cisimlerinin Temel Birimleri

Bu kısımda kuadratik sayı cisimlerinin birimleri üzerinde durularak bu cisimlerin birimlerinin nasıl belirleneceği ifade edilmiştir.

$K = \mathbb{Q}(\sqrt{d})$ kuadratik sayı cisminin tamlık halkası O_K' da da, $\mathbb{Z}$ tam sayılar halkasında olduğu gibi aritmetik yapılabilir [5].

Tanım 2.13. [5] $\alpha, \beta \in O_K$, $\alpha \neq 0$ olsun. $\beta = \alpha.\lambda$ olacak şekilde bir $\lambda \in O_K$ varsa α, β' yı böler denir ve $\alpha \mid \beta$ ile gösterilir.

Tanım 2.14. [8] $K = \mathbb{Q}(\sqrt{d})$ kuadratik sayı cisminin tamlık halkası O_K olsun. $\varepsilon \in O_K$ için $\dfrac{1}{\varepsilon} \in O_K$ oluyorsa ε değerine *birim eleman* denir. Bu şekilde tanımlanan bütün ε_i değerleri bir grup oluştururlar. Bu gruba $K = \mathbb{Q}(\sqrt{d})$ kuadratik sayı cisminin *birimler grubu* denir ve "$\mathcal{U}_d$" ile gösterilir.

Teorem 2.3. [5] $K = \mathbb{Q}(\sqrt{d})$ bir kuadratik sayı cisminin tamlık halkası O_K olsun.

$$\alpha \in \mathcal{U}_d \Leftrightarrow \forall \beta \in O_K \text{ için } \alpha \mid \beta$$

olmasıdır.

İspat: $\Rightarrow$: $\alpha \in \mathcal{U}_d$ olsun. Bu durumda, $\alpha.\lambda = 1$ olacak şekilde $\exists \lambda \in O_K$ vardır. Yani; α, O_K tamlık halkasında terslenebilir bir elemandır. O halde $\forall \beta \in O_K$ için,

$$\beta = 1.\beta = (\alpha.\lambda)\beta = \alpha.(\lambda.\beta)$$

olup $\alpha \mid \beta$ olarak bulunur.

$\Leftarrow$: $\forall\beta \in O_K$ için $\alpha \mid \beta$ ise $\beta = 1$ olarak alınırsa, $\alpha \mid 1$ yani α birim bulunur. O halde $\alpha \in \mathcal{U}_d$ olur. □

Önerme 5. [8] Bir ε cebirsel tam sayısının birim olması için gerek ve yeter şart $N(\varepsilon) = \pm 1$ olmasıdır

İspat: $\Rightarrow$: ε birim eleman ise $\varepsilon \mid 1$ sağlanır. Bu durumda $\varepsilon.\lambda = 1$ olacak şekilde $\lambda \in O_K$ vardır. Ayrıca $\varepsilon, \lambda \in O_K$ olduğundan Önerme 4' den ötürü $N(\varepsilon), N(\lambda) \in \mathbb{Z}$ olduğunu biliyoruz. Bu durumda ,

$$N(\varepsilon.\lambda) = N(1) \Rightarrow N(\varepsilon).N(\lambda) = N(1) = 1$$

olur. Buradan da $N(\varepsilon)$, $\mathbb{Z}$' de birim olur. $\mathbb{Z}$' de terslenebilir tam sayılar ise ± 1 olduğundan $N(\varepsilon) = \pm 1$ olarak bulunur.

$\Leftarrow$: $\varepsilon^{'}$ ile ε'un eşleniğini gösterelim. Bu durumda; $N(\varepsilon) = \pm 1$ ise norm tanımından $\varepsilon.\varepsilon^{'} = \pm 1$ dir. Buradan $\varepsilon \mid 1$ sonucu çıkar. O halde ε birimdir. □

Bu önermeden faydalanarak $K = \mathbb{Q}(\sqrt{d})$ kuadratik sayı cisminin birimleri aşağıdaki şekilde belirlenenir [4].

$d < 0$ olsun. $d \equiv 2, 3 \pmod 4$ ise $\{1, \sqrt{d}\}$, K cisminin tamlık tabanı olmak üzere, $\alpha \in O_K$ elemanı $x, y \in \mathbb{Z}$ için $\alpha = x + y\sqrt{d}$ şeklinde ifade edileceğinden, $\alpha^{'} = x - y\sqrt{d}$ için $N(\alpha) = (x + y\sqrt{d})(x - y\sqrt{d}) = x^2 - dy^2$ olup Önerme 5' den ötürü $\alpha = x + y\sqrt{d}$ birim olduğundan $x^2 - dy^2 = \mp 1$ denkleminin sonlu sayıdaki çözümleri K imajiner kuadratik sayı cisminin birimlerini verecektir.

$d \equiv 1(\text{mod } 4)$ ise $\{1, \dfrac{1+\sqrt{d}}{2}\}$ K cisminin tamlık tabanı olmak üzere, $\alpha \in O_K$ elemanı $x, y \in \mathbb{Z}$ için $\alpha = \dfrac{x + y\sqrt{d}}{2}$ şeklinde ifade edileceğinden, $N(\alpha) = (\dfrac{x + y\sqrt{d}}{2})(\dfrac{x - y\sqrt{d}}{2})$ bulunur. $N(\alpha) = \dfrac{x^2 - dy^2}{4}$ olup Önerme 5' den yararlanarak α birim olduğundan

$\dfrac{x^2 - dy^2}{4} = \mp 1$ elde edilir. Bu durumda $x^2 - dy^2 = \mp 4$ denkleminin sonlu sayıdaki çözümü $K = \mathbb{Q}(\sqrt{d})$ kuadratik sayı cisminin birimlerini verecektir.

Bu ifadelere göre $d < 0$ ise $K = \mathbb{Q}(\sqrt{d})$ imajiner kuadratik sayı cisimlerinin birimleri için aşağıdaki önerme verilebilir.

Önerme 6. [1] $K = \mathbb{Q}(\sqrt{d})$ imajiner kuadratik sayı cismi olsun. $i^2 = -1$ ve $\rho = \dfrac{-1 + \sqrt{3}i}{2}$ olmak üzere,
i) $\mathcal{U}_{-1} = \{\mp 1, \mp i\}$
ii) $\mathcal{U}_{-3} = \{\mp 1, \mp \rho, \mp \rho^2\}$
iii) $d \neq -1, -3$ ise $\mathcal{U}_d = \{+1, -1\}$ olur.

İspat: Önerme 5' den dolayı; $x, y \in \mathbb{Z}$ olmak üzere $\alpha = x + y\sqrt{d} \in O_K$' nın birim olması için $N(\alpha) = \pm 1$ olmalıdır. α' nın eşleniği $\alpha' = x - y\sqrt{d}$ olsun. Bu durumda $N(\alpha) = x^2 - dy^2$ ve $d < 0$ olduğundan $N(\alpha) \geq 0$ olarak bulunur. O halde $\alpha \in O_K$' nın birim olması için $N(\alpha) = 1$ olmalıdır.

i) $d = -1 \equiv 3$ (mod 4) ise $\alpha \in O_K$ elemanı $x, y \in \mathbb{Z}$ için $\alpha = x + y\sqrt{d}$ şeklinde ifade edileceğinden, $\alpha' = x - y\sqrt{d}$ için $N(\alpha) = (x + y\sqrt{d}).(x - y\sqrt{d}) = x^2 - dy^2$ olup Önerme 5' den ötürü $\alpha = x + y\sqrt{d}$ birim olduğundan $N(\alpha) = x^2 - dy^2 = 1$ olmalıdır. $d = -1$ olduğunu hesaba katarsak,

$$N(\alpha) = x^2 + y^2 = 1 \tag{2.3}$$

denkleminin sonlu sayıdaki çözümleri K imajiner kuadratik sayı cisminin birimlerini verecektir. (2.3) ile belirtilen denklemin tam sayı çözümleri $(x, y) = (\pm 1, 0), (0, \pm 1)$ olmak üzere dört tanedir. Ayrıca $i^2 = -1$ olmak üzere

$$\alpha = x + y\sqrt{d} = x + y\sqrt{-1} = x + yi$$

olup, çözümlere karşılık gelen $\alpha \in O_K$' lar ± 1 ve $\pm i$ olarak bulunur. O halde $K = \mathbb{Q}(\sqrt{-1})$ imajiner kuadratik sayı cismi için $\mathcal{U}_{-1} = \{\mp 1, \mp i\}$ olur.

ii) $d = -3 \equiv 1$(mod 4) ise $\alpha \in O_K$ elemanı $x, y \in \mathbb{Z}$ için $\alpha = \dfrac{x + y\sqrt{d}}{2}$ şeklinde ifade edileceğinden, $N(\alpha) = (\dfrac{x+y\sqrt{d}}{2}).(\dfrac{x-y\sqrt{d}}{2})$ bulunur. $N(\alpha) = \dfrac{x^2-dy^2}{4}$ olup Önerme 5' den yararlanarak α birim olduğundan $N(\alpha) = \dfrac{x^2-dy^2}{4} = 1$ olmalıdır. Bu durumda $d=-3$ olarak alınırsa,

$$N(\alpha) = x^2+3y^2 = 4 \tag{2.4}$$

denkleminin sonlu sayıdaki çözümleri K imajiner kuadratik sayı cisminin birimlerini verecektir. (2.4) ile belirtilen denklemin tam sayı çözümleri altı tane olup bunlar $(x,y) = (\pm 2, 0), (1, \pm 1), (-1, \pm 1)$ dir.

$$\alpha = \frac{x+y\sqrt{d}}{2} = \frac{x+y\sqrt{-3}}{2} = \frac{x+yi\sqrt{3}}{2}$$

olup çözümlere karşılık gelen α' lar ∓ 1, $\dfrac{-1+\sqrt{3}i}{2}$, $\dfrac{1-\sqrt{3}i}{2}$ $\dfrac{-1-\sqrt{3}i}{2}$ ve $\dfrac{1+\sqrt{3}i}{2}$ olarak bulunur. Eğer $\rho = \dfrac{-1+\sqrt{3}i}{2}$ olarak alınırsa $K = \mathbb{Q}(\sqrt{-3})$ imajiner kuadratik sayı cismi için $\mathcal{U}_{-3} = \{\mp 1, \mp\rho, \mp\rho^2\}$ olur.

iii) $d \neq -1, -3$ ise $d < 0$ olduğundan $d \leq -2$ ve $d \not\equiv 1$ (mod 4) olarak kabul edebiliriz. O halde $d \equiv 2, 3$ (mod 4) olup $\alpha \in O_K$ elemanı $x, y \in \mathbb{Z}$ için $\alpha = x + y\sqrt{d}$ şeklinde ifade edileceğinden, $\alpha' = x - y\sqrt{d}$ için $N(\alpha) = (x+y\sqrt{d}).(x-y\sqrt{d}) = x^2 - dy^2$ olup Önerme 5' den ötürü $\alpha = x + y\sqrt{d}$ birim olduğundan

$$N(\alpha) = x^2 - dy^2 = 1 \tag{2.5}$$

denkleminin sonlu sayıdaki çözümleri K imajiner kuadratik sayı cisminin birimlerini verecektir. (2.5) ile belirtilen denklemin tam sayı çözümleri, $d \leq -2$ olduğundan, $(x,y) = (\pm 1, 0)$ olmak üzere iki tanedir. Bu durumda $d \leq -2$ ve $d \not\equiv 1$ (mod 4) ise birim elemanlar yalnız ± 1 olup $K = \mathbb{Q}(\sqrt{d})$ imajiner kuadratik sayı cismi için $\mathcal{U}_d = \{+1, -1\}$ olur. □

Tanım 2.15. [9] $K = \mathbb{Q}(\sqrt{d})$ bir reel kuadratik sayı cismi olsun. K cisminin 1' den büyük birimlerinin en küçüğü ε_d ise, ε_d elemanına *temel birim* denir.

Önerme 7. [9] $K = \mathbb{Q}(\sqrt{d})$ bir reel kuadratik sayı cismi, $x, y \in \mathbb{Z}$ için $\eta = \dfrac{x+y\sqrt{d}}{2} \in K$ ise aşağıdaki ifadeler gerçeklenir.

i) η bir birimdir $\Leftrightarrow x^2 - dy^2 = \mp 4$ olmasıdır.

Ayrıca η bir birim ise,

$$\eta > 1 \Leftrightarrow x > 0 \text{ ve } y > 0$$

olur.

ii) $\eta_i = \dfrac{x_i + y_i\sqrt{d}}{2}$ $(i = 1, 2$ ve $x_i, y_i \in \mathbb{Z}$ için) 1' den büyük birimler ise,

$$\eta_1 < \eta_2 \Leftrightarrow x_1 < x_2 \text{ ve } y_1 \leq y_2$$

olur.

Önerme 8. [1] $K = \mathbb{Q}(\sqrt{d})$ reel kuadratik sayı cismi olsun. K cisminin $\mathcal{U}_d$ birimler grubu,

$$\mathcal{U}_d = \{\pm {\varepsilon_d}^s : s \in \mathbb{Z}\}$$

olacak şekilde bir $\varepsilon_d > 1$ birimi bulunabilir.

İspat: $\varepsilon_d > 1$ olduğundan

$$\lim_{s\to\infty} {\varepsilon_d}^s = \infty$$

olup, $u \geq 1$, O_K' nın bir birim elemanı ise

$$
{\varepsilon_d}^s \leq u < {\varepsilon_d}^{s+1} \tag{2.6}
$$

olacak şekilde bir $s \geq 0$ tam sayısı bulunabilir. O halde (2.6) ile verilen eşitsizlik ${\varepsilon_d}^{-s}$ ile çarpılırsa,

$$1 \leq u{\varepsilon_d}^{-s} < \varepsilon_d$$

eşitsizliği elde edilir. Fakat ε_d' nin tanımından ε_d' nin 1' den büyük en küçük birim olduğunu biliyoruz. O halde $u{\varepsilon_d}^{-s} = 1$ olmalıdır. Bu durumda $u = {\varepsilon_d}^s$ olur. Fakat $u \geq 1$ olduğunu varsaymıştık. Genel olarak $u \in \mathcal{U}_d$ ise $\pm u$, $\pm u^{-1}$' den biri ≥ 1 olacağından tüm birimler $\pm {\varepsilon_d}^s$, $s \in \mathbb{Z}$ şeklindedir. O halde, tüm birimler temel birimin tam sayı kuvvetlerinden oluşmaktadır. □

Sonuç 2.4. [10] d kare çarpansız pozitif bir tam sayı ise $K = \mathbb{Q}(\sqrt{d})$ reel kuadratik sayı cisminin $\mathcal{U}_d$ birimler grubu C sonsuz devirli çarpımsal bir grup olmak üzere, $\mathcal{U}_d \cong \{-1, +1\} \times C$ dir.

$K = \mathbb{Q}(\sqrt{d})$ reel kuadratik sayı cisimlerinin birimleri aşağıdaki şekilde belirlenir [11].

Reel kuadratik sayı cisimlerinin belirlenmesini detaylı olarak ele alırsak $K = \mathbb{Q}(\sqrt{d})$ cisminin sonsuz tane birim eleman içerdiğine dikkat etmek gerekir. Çünkü, $\mathcal{U}_d$ birimler grubu ise, $\varepsilon_d \in \mathcal{U}_d$ birim elemandır $\Leftrightarrow$ $N(\varepsilon) = \pm 1$ ifadesi sağlanır.
$d \equiv 2, 3 \pmod 4$ olması durumunda, $\alpha \in O_k$ elemanı $x, y \in \mathbb{Z}$ olmak üzere $\alpha = x + y\sqrt{d}$ şeklinde ifade edilir. Bu durumda reel kuadratik sayı cisimlerinde temel birim $N(\alpha) = x^2 - dy^2 = \pm 1$ şeklinde ifade edilen diophant denkleminin 1' den büyük en küçük (x_0, y_0) pozitif tamsayı çözümü yardımıyla belirlenebilir.

Benzer şekilde, $d \equiv 1 \pmod 4$ olması durumunda, $\alpha \in O_k$ elemanı $x, y \in \mathbb{Z}$ olmak üzere $\alpha = \dfrac{x + y\sqrt{d}}{2}$ şeklinde ifade edilir. Bu durumda reel kuadratik sayı cisimlerinde temel birim $N(\alpha) = x^2 - dy^2 = \pm 4$ şeklinde ifade edilen diophant denkleminin 1' den büyük en küçük (x_0, y_0) pozitif tamsayı çözümü yardımıyla belirlenebilir.

Tanım 2.16. [12] $d = n^2 + r$ kare çarpansız pozitif bir tam sayı $r|4n$ ve $-n < r \leq n$ ise, $\mathbb{Q}(\sqrt{d})$ cismine "Richaut-Degert (R-D) tipinden sayı cismi" denir.

$r = \mp 1, \mp 4$ ise $\mathbb{Q}(\sqrt{d})$ cismine "dar anlamda", aksi halde ise "geniş anlamda Richaut-Degert (R-D) tipinden reel kuadratik sayı cismi" denir.

Bu cisimlerin temel birimleri;

$$\varepsilon_d = \begin{cases} n + \sqrt{d} & , \ |r| = 1 \text{ ise } (N(\varepsilon_d) = -sgn\ r) \\[2ex] \dfrac{n + \sqrt{d}}{2} & , \ |r| = 4 \text{ ise } (N(\varepsilon_d) = -sgn\ r) \\[2ex] \dfrac{(2n^2 + r) + 2n\sqrt{d}}{|r|} & , \ |r| \neq 1, 4 \text{ ise } (N(\varepsilon_d) = 1) \end{cases}$$

biçiminde belirlenmiştir. Burada, $sgn\ r$, r nin işaret fonksiyonudur [12].

2.4. Kuadratik Sayı Cisimlerinin Diskriminantı

Tanım 2.17. [1] $K = \mathbb{Q}(\sqrt{d})$ kuadratik sayı cisminin O_K tamlık halkasının tamlık tabanı $\{\omega_1, \omega_2\} = \{1, \omega_d\}$ olsun.

$$\Delta = det(\dot{I}z(\omega_i.\omega_j))_{i,j=1,2}$$

değerine O_K tamlık halkasının veya $K = \mathbb{Q}(\sqrt{d})$ kuadratik sayı cisminin *diskriminantı* denir.

Önerme 9. [1] $K = \mathbb{Q}(\sqrt{d})$ kuadratik sayı cisminin tamlık tabanı $\{\omega_1, \omega_2\} = \{1, \omega_d\}$ olsun.

i) $d \equiv 2, 3$ (mod 4) ise $\Delta = 4d$ olur.

ii) $d \equiv 1$ (mod 4) ise $\Delta = d$ olur.

İspat: i) $d \equiv 2, 3$ (mod 4) ise $K = \mathbb{Q}(\sqrt{d})$ kuadratik sayı cisminin tamlık tabanı $\{1, \sqrt{d}\}$ olduğundan Tanım 2.17' den

$$\Delta = \begin{vmatrix} \dot{I}z(1) & \dot{I}z(\sqrt{d}) \\ \dot{I}z(\sqrt{d}) & \dot{I}z((\sqrt{d})^2) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2d \end{vmatrix} = 4d$$

olur.

ii) $d \equiv 1$ (mod 4) ise $K = \mathbb{Q}(\sqrt{d})$ kuadratik sayı cisminin tamlık tabanı $\{1, \dfrac{1+\sqrt{d}}{2}\}$ olduğundan Tanım 2.17' den

$$\Delta = \begin{vmatrix} \dot{I}z(1) & \dot{I}z\Big(\dfrac{1+\sqrt{d}}{2}\Big) \\ \dot{I}z\Big(\dfrac{1+\sqrt{d}}{2}\Big) & \dot{I}z\Big(\Big(\dfrac{1+\sqrt{d}}{2}\Big)^2\Big) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & \dfrac{1+d}{2} \end{vmatrix} = d$$

olur. □

2.5. Kuadratik Sayı Cisimlerinin İdealleri

Bu kısımda, öncelikle O_K tamlık halkasının ideali tanımı verilmiştir. Ardından kesirsel ideal tanımı verilerek, O_K tamlık halkasının idealleri üzerinde durulmuş ve çeşitli özelliklerinden söz edilmiştir.

Tanım 2.18. [8] $\emptyset \neq A \subseteq O_K$ kümesi,

i) $\forall\, \alpha, \beta \in A$ için $\alpha \pm \beta \in A$

ii) $\forall\, \alpha \in A$ ve $\forall\, \gamma \in O_K$ için $\alpha.\gamma \in A$

koşullarını sağlıyorsa A' ya O_K' nın ideali denir.

Tanım 2.19. [13] $0 \neq A$, O_K' nın bir ideali ve $\alpha_1, ..., \alpha_n \in A$ olsun. A idealinin her bir α elemanı için

$$\alpha = x_1\alpha_1 + ... + x_n\alpha_n$$

olacak biçimde tek türlü belirli $x_1, x_2, ..., x_n$ cebirsel tam sayıları varsa $\{\alpha_1, ..., \alpha_n\}$' ye A idealinin tabanı denir ve

$$A = (\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n) = \{x_1\alpha_1 + x_2\alpha_2 + ... + x_n\alpha_n \mid x_i \in O_K, i = 1, 2, ..., n\}$$

biçiminde yazılır.

K bir sayı cismi ve $[K : \mathbb{Q}] = n$ olmak üzere O_K' nın her $0 \neq A$ idealinin $\{\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n\}$ olacak şekilde bir $\mathbb{Z}-$tabanı vardır. Burada α_i' lere A *idealinin üreteçleri* denir. Eğer değişmeli ve birimli bir halkada A idealinin sonlu sayıda üreteci varsa bu A idealine *sonlu üretilmiş ideal* denir [14]. O halde eğer $K = \mathbb{Q}(\sqrt{d})$ kuadratik sayı cismi ise $[K : \mathbb{Q}] = 2$ olacağı için O_K' nın idealleri en fazla iki eleman tarafından üretilir. Öyleyse bir A tam ideali α_1, α_2 gibi iki cebirsel tam eleman ile üretilebilmektedir. Böyle $\{\alpha_1, \alpha_2\}$, *A idealinin tabanı* olup A ideali bu tabana bağlı olarak

$$A = (\alpha_1, \alpha_2) = \{a\alpha_1 + b\alpha_2 : a, b \in \mathbb{Z}\}$$

şeklinde ifade edilir [6].

O_K, tamlık halkası $\{1, \omega\}$ ile üretilmiş bir $\mathbb{Z}-$modül olduğundan O_K tamlık halkasının her tam ideali de sonlu üretilmiş bir $\mathbb{Z}-$modüldür [6].

Tanım 2.20. [13] Eğer O_K' nın herhangi bir ideali bir tek eleman tarafından üretiliyorsa bu ideale esas ideal denir.

$\alpha \in O_K$ olmak üzere O_K' daki esas idealler,

$$(\alpha) = \{\alpha.\lambda \mid \lambda \in O_K\}$$

şeklinde tanımlanır.[13]

Tanım 2.21. [1] Her ideali esas ideal olan bölgeye esas ideal bölgesi(PID) denir.

Tanım 2.22. [8] O_K tamlık halkası ve η, O_K' nın herhangi bir birimi ise $O_K = (\eta) = (1)$ şeklinde bir idealdir ve O_K' ya *birim ideal* denir.

Tanım 2.23. [8] A ve B iki ideal olsun. Bu durumda bu iki idealin toplamı;

$$A + B = \{\alpha + \beta \mid \alpha \in A, \beta \in B\}$$

şeklinde tanımlanır.

Tanım 2.24. [8] A ve B iki ideal olsun. Bu durumda bu iki idealin çarpımı;

$$A.B = \{\sum_{i=1}^{n} \alpha_i.\beta_i \mid \alpha_i \in A, \beta_i \in B, n \geq 1\}$$

şeklinde tanımlanır.

İki idealin toplamının ve çarpımının da yine bir ideal olduğunu not etmek gerekir [8]. Ayrıca iki idealin toplamı aslında bu ideallerin elemanlarının toplamıdır. Yani, $A = (\alpha_1, ..., \alpha_s)$ ve $B = (\beta_1, ..., \beta_n)$ iki ideal olsun. Bu iki idealin toplamı, $A + B = (\alpha_1, ..., \alpha_n, \beta_1, ...\beta_s)$ şeklinde bir ideal olur. Özel olarak $A = (\alpha)$ ve $B = (\beta)$ iki esas ideal ise $A + B = (\alpha) + (\beta) = (\alpha, \beta)$ olur. $A = (\alpha_1, ..., \alpha_s)$ ve $B = (\beta_1, ..., \beta_n)$ iki ideal ise $1 \leq i \leq s$ ve $1 \leq j \leq n$ olmak üzere $A.B$ ideali, $\alpha_i\beta_j$ çarpımları tarafından üretilen $A.B = (\alpha_1\beta_1, ..., \alpha_i.\beta_j, ..., \alpha_s\beta_n)$ şeklinde bir idealdir. Özel olarak $A = (\alpha)$ ve $B = (\beta)$ iki esas ideal ise $A.B = (\alpha).(\beta) = (\alpha.\beta)$ olur. Yani iki esas idealin çarpımı da esas idealdir [8].

Teorem 2.4. [8] A ve B iki ideal olsun. $(A) = (B)$ geçerlidir $\Leftrightarrow A/B$ bir birimdir veya $A = B = 0$ dır.

Tanım 2.25. [4] A, $K = \mathbb{Q}(\sqrt{d})$ cisminin bir alt kümesi olsun. Eğer $A \neq \emptyset$ kümesi,

i) $\forall\, a, b \in A$ için $a - b \in A$

ii) $\forall\, a \in A$ ve $c \in O_K$ için $a.c \in A$

iii) $\exists\, 0 \neq \alpha \in O_K$ için $\alpha A \subseteq O_K$

koşullarını sağlıyorsa, A' ya K cisminin bir *kesirsel ideali* denir.

Özel olarak, O_K tamlık halkasının bütün idealleri birer kesirsel ideal olup bu ideallere *tam idealler* denir [6].

Tanım 2.26. [14] A bir kesirsel ideal olmak üzere;

$$A^{-1} = \{\alpha \in K \mid \alpha A \subseteq O_K\}$$

idealine *ters kesirsel ideal* denir.

Her A kesirsel idealinin $A.A^{-1} = O_K$ olacak şekilde bir A^{-1} tersi vardır [14].

Teorem 2.5. [1] A bir tam ideal ise $A \cap \mathbb{Z} \neq 0$ olur.

İspat: $\alpha \in A$ ve $\alpha \neq 0$ olsun. $A \subset O_K$ olduğundan $\alpha \in O_K$ olur. Bu durumda Tanım 2.6' dan dolayı $\alpha^n + a_1\alpha^{n-1} + a_2\alpha^{n-2} + ... + a_n = 0$ olacak şekilde $a_i \in \mathbb{Z}$ vardır ve en az bir $1 \leq j \leq n$ için $a_j \neq 0$ dır. $a_n \neq 0$ olduğunu varsayabiliriz. Çünkü aksi takdirde, $a_n = 0$ olursa, 1.adımda;

$$\alpha^n + a_1\alpha^{n-1} + ... + a_{n-1}.\alpha = \alpha.(\alpha^{n-1} + a_1\alpha^{n-2} + ... + a_{n-1}) = 0$$

olur ve $\alpha \neq 0$ olduğundan $\alpha^{n-1} + a_1\alpha^{n-2} + ... + a_{n-1} = 0$ olmalıdır. $a_{n-1} = 0$ ise 2.adımda;

$$\alpha^{n-1} + a_1\alpha^{n-2} + ... + a_{n-2}.\alpha = \alpha.(\alpha^{n-2} + a_1\alpha^{n-3} + ... + a_{n-2}) = 0$$

olur ve $\alpha \neq 0$ olduğundan $\alpha^{n-2} + a_1\alpha^{n-3} + ... + a_{n-2} = 0$ olmalıdır. $a_{n-2} = 0$ ise aynı işleme devam edilirse $(n-2)$. adımda $\alpha^2 + a_1\alpha + a_2 = 0$ olarak bulunur. Bu adımda da eğer $a_2 = 0$ olursa,

$$\alpha^2 + a_1\alpha = \alpha.(\alpha + a_1) = 0$$

olur ve $\alpha \neq 0$ olduğundan $(n-1)$. adımda, $\alpha + a_1 = 0$ olmalıdır. Eğer bu adımda da $a_1 = 0$ olursa $\alpha = 0$ çelişkisi meydana gelir. O halde $a_n \neq 0$ olduğunu varsayabiliriz. Bu durumda, $0 \neq a_n \in A \cap \mathbb{Z}$ olur. □

Tanım 2.27. [8] A ve B, O_K' nın iki ideali olsun. Eğer $B = A.C$ olacak şekilde $C \in O_K$ ideali varsa A ideal B' yi böler denir ve $A \mid B$ şeklinde gösterilir.

Teorem 2.6. [14] A ve B, O_K' nın iki ideali olsun. $A \mid B \Leftrightarrow A \supseteq B$ olur.

Önerme 10. [1] Eğer A, B ve C üç ideal ve $A.B = A.C$ ise $B = C$ olur.

Önerme 11. [1] Eğer A ve B iki ideal ve $A \subset B$ ise $A = B.C$ olacak şekilde C ideali vardır.

Yardımcı Teorem 2.1. [1] A ve B, O_K' nın iki ideali ve $A = A.B$ ise $B = O_K$ olur.

Tanım 2.28. [13] P, kuadratik cismin $(1) = O_K$' dan farklı bir tam ideali olsun. P' nin $(1) = O_K$ ve P' den başka böleni yoksa P' ye *asal ideal* denir.

Tanım 2.29. [14] P, kuadratik cismin bir tam ideali olsun. Eğer P ile O_K arasında başka bir ideal yoksa P' ye *maksimal ideal* denir.

Her maksimal ideal asaldır [14].

Teorem 2.7. [10] $K = \mathbb{Q}(\sqrt{d})$ kuadratik sayı cismi olsun. Bu durumda;

i) O_K halkasının (0) dan farklı her asal ideali maksimaldir.

ii) (0) dan farklı her tam ideal, asal ideallerin çarpımı biçiminde tek türlü yazılabilir.

iii) (0) dan farklı kesirsel idealler, ideallerin çarpma işlemi altında bir çarpımsal grup oluşturur.

Eğer P bir maksimal ideal ise $P.P^{-1} = O_K$ olur [14].

Tanım 2.30. [4] $A = (\alpha_1, \alpha_2)$, $K = \mathbb{Q}(\sqrt{d})$ cisminin bir tam ideali olsun. ${\alpha_1}'$ ve ${\alpha_2}'$ sırasıyla α_1 ve α_2' nin eşleniklerini göstermek üzere $A' = ({\alpha_1}', {\alpha_2}')$ idealine *A idealinin eşleniği* denir.

Tanım 2.31. [6] $K = \mathbb{Q}(\sqrt{d})$ cisminin bir tam ideali $A = (\alpha_1, \alpha_2)$ olsun.

$$\delta_A = (\alpha_1{\alpha_2}' - {\alpha_1}'\alpha_2)^2$$

değerine *A idealinin diskriminantı* denir.

Tanım 2.32. [14] A, $K = \mathbb{Q}(\sqrt{d})$ cisminin bir tam ideali olsun. O_K/A bölüm halkasının eleman sayısına *A idealinin normu* denir ve $N(A) = |O_K/A|$ şeklinde gösterilir.

Önerme 12. [1] $N(A)$ daima sonludur.

Teorem 2.8. [14] K kuadratik sayı cismi ise $[K : \mathbb{Q}] = 2$ olduğundan $0 \neq A$ idealinin $\mathbb{Z}-$tabanı $\{\alpha_1, \alpha_2\}$ olup

$$N(A) = \left|\frac{\delta_A}{\triangle}\right|^{1/2}$$

olur. Burada $\triangle$, K kuadratik sayı cisminin diskriminantıdır.

Önerme 13. [10] Eğer A ve B, O_K' nın iki ideali ise $N(A.B) = N(A).N(B)$ dir.

2.6. Kuadratik Sayı Cisimlerinde İdeallerin Ayrışımı

Tanım 2.33. [15] p bir tek asal sayı ve $a \neq 0$ bir tam sayı olsun.

$$\left(\frac{a}{p}\right) = \begin{cases} 1, & x^2 \equiv a(mod\, p) \text{ çözümlü ve } (a,p) = 1 \text{ ise} \\ -1, & x^2 \equiv a(mod\, p) \text{ çözümsüz ise} \\ 0, & p|a \text{ ise} \end{cases}$$

şeklinde tanımlanan $\left(\frac{*}{*}\right)$ sembolüne *Legendre Sembolü* denir.

Teorem 2.9. [15] p bir tek asal sayı ve $a, b \neq 0$ birer tam sayı olsun. Bu durumda

i) $\left(\frac{a}{p}\right) = a^{\frac{p-1}{2}}$ (mod p)

ii) $\left(\frac{a}{p}\right)\left(\frac{b}{p}\right) = \left(\frac{ab}{p}\right)$

iii) $a \equiv b$ (mod p) $\Rightarrow \left(\frac{a}{p}\right) = \left(\frac{b}{p}\right)$

iv) $(a,p) = 1 \Rightarrow \left(\frac{a^2}{p}\right) = 1, \left(\frac{a^2 b}{p}\right) = \left(\frac{b}{p}\right)$

v) $\left(\frac{1}{p}\right) = 1, \left(\frac{-1}{p}\right) = (-1)^{\frac{p-1}{2}}$

vi) $\left(\frac{2}{p}\right) = (-1)^{\frac{p^2-1}{8}}$

Teorem 2.10. [15] Eğer p ve q birbirinden farklı tek asal sayılar ise,

$$\left(\frac{p}{q}\right)\left(\frac{q}{p}\right) = (-1)^{\frac{p-1}{2}\frac{q-1}{2}}$$

sağlanır.

Tanım 2.34. [15] $\left(\frac{*}{*}\right)$ Legendre sembolü olsun. a pozitif bir tam sayı , b pozitif bir tek tam sayı ve $b = p_1 p_2 p_3 ... p_n$ (p_i ler asal) biçiminde olmak üzere;

$$\left(\frac{a}{b}\right) = \left(\frac{a}{p_1}\right)\left(\frac{a}{p_2}\right)\left(\frac{a}{p_3}\right)\cdots\left(\frac{a}{p_n}\right)$$

ise $\left(\frac{*}{*}\right)$ sembolüne *Jacobi Sembolü* denir.

Tanım 2.35. [15] $\left(\frac{*}{*}\right)$ Jacobi sembolü olsun. Eğer

$$\left(\frac{a}{2}\right) = \begin{cases} 1, & a \equiv 1(mod\, 8) \text{ ise} \\ -1, & a \equiv 5(mod\, 8) \text{ ise} \\ 0, & a \equiv 0(mod\, 8) \text{ ise} \\ \text{tanımsız}, & \text{diğer hallerde} \end{cases}$$

özelliği ile genişletilmiş biçimde tanımlanıyor ise $\left(\frac{*}{*}\right)$ sembolüne *Kronecker Sembolü* denir.

Tanım 2.36. [15] Δ, $K = \mathbb{Q}(\sqrt{d})$ cisminin diskriminantı ve p bir asal sayı olmak üzere,

$$\chi_K(p) = \begin{cases} \left(\dfrac{\Delta}{p}\right), & p \neq 2, (\Delta, p) = 1 \text{ ise} \\ (-1)^{\frac{\Delta^2-1}{8}}, & p = 2, (\Delta, 2) = 1 \text{ ise} \\ 0, & p|\Delta \text{ ise} \end{cases}$$

biçiminde tanımlanan χ_K fonksiyonuna K cisminin *Kronecker karakteri* denir.

Sonuç 2.5. [16] $K = \mathbb{Q}(\sqrt{d})$ cisminin tamlık halkası O_K olmak üzere O_K halkasında, p tek asal değerinin ayrışımı;
i) $\left(\frac{\Delta}{p}\right) = 1 \Leftrightarrow p$ ayrışır (decomposed)
ii) $\left(\frac{\Delta}{p}\right) = -1 \Leftrightarrow p$ asal kalır (inert)
iii) $\left(\frac{\Delta}{p}\right) = 0 \Leftrightarrow p$ dallanır (ramifed)
biçiminde ifade edilir.

Sonuç 2.6. [16] $K = \mathbb{Q}(\sqrt{d})$ cisminin tamlık halkası O_K olmak üzere $p = 2$ asalının O_K halkasındaki ayrışımı aşağıdaki biçimde ifade edilir.

i) $\left(\frac{\Delta}{2}\right) = 1 \Leftrightarrow 2$ ayrışır (decomposed)

ii) $\left(\frac{\Delta}{2}\right) = -1 \Leftrightarrow 2$ asal kalır (inert)

iii) $\left(\frac{\Delta}{2}\right) = 0 \Leftrightarrow 2$ dallanır (ramifed)

Teorem 2.11. [17] p bir asal sayı, $P \subset O_K$, p' yi kapsayan bir asal ideal ve $P' = \{\rho' : \rho \in P\} \neq P$ olsun. Diskriminantı Δ olan bir $K = \mathbb{Q}(\sqrt{d})$ kuadratik sayı cisminde bir p asalının ayrışımı;

i) $p|\Delta \Leftrightarrow (p) = \rho^2$ ve $N(\rho) = p$

ii) $p > 2$ olsun.

$$\left(\frac{p}{\Delta}\right) = \begin{cases} (p) = \rho.\rho' \ (\rho \neq \rho') \text{ ve } N(p) = N(\rho') = p, & \left(\dfrac{\Delta}{p}\right) = 1 \text{ ise} \\ (p) = \rho \text{ ve } N(\rho) = p^2, & \left(\dfrac{\Delta}{p}\right) = -1 \text{ ise} \end{cases}$$

iii) $p = 2$

$$\left(\frac{p}{\Delta}\right) = \begin{cases} (2) = \rho.\rho' \ (\rho \neq \rho') \ ve \ N(p) = N(\rho') = 2, & d \equiv 1 \text{ (mod 8) ise} \\ (2) = \rho \ ve \ N(\rho) = 4, & d \equiv 1 \text{ (mod 8) ise} \end{cases}$$

biçimindedir.

2.7. Kuadratik Sayı Cisimlerinin Sınıf Sayıları

Tanım 2.37. [7] $K = \mathbb{Q}(\sqrt{d})$ kuadratik sayı cisminin bütün kesirsel idealleri ideallerin çarpma işlemine göre çarpımsal bir grup oluştururlar. Bu grubu G ile, G nin esas ideallerinin oluşturduğu grubu da E ile gösterelim. G/E bölüm grubu sonlu bir gruptur. G/E bölüm grubuna K cisminin *sınıf grubu*, bu grubun eleman sayısına K cisminin *sınıf sayısı* denir ve h_K ile gösterilir.

Bu nedenle cismin kesirsel idealleri grubu sınıflara ayrılmış olur. Bir sınıfın herhangi iki idealine *denk idealler* denir. A ve B denk iki ideal ideal ise $A \sim B$ şeklinde gösterilir [6].

İki kesirsel idealin denkliği aşağıda şekilde ifade edilebilir.

Tanım 2.38. [4] A ve B iki kesirsel ideal olmak üzere $A = (\alpha)B$ olacak şekilde bir $\alpha \in \mathbb{Q}(\sqrt{d})$ elemanı varsa, A ile B *denk kesirsel ideallerdir* denir ve bu denklik $A \sim B$ şeklinde gösterilir.

Kesirsel ideallerin bir sınıfında tam idealler de vardır. Bu durumda bir A kesirsel ideali verildiğinde $\exists 0 \neq \alpha \in O_K$ için $\alpha A \subset O_K$ olduğundan; ideal sınıflarının özellikleri ve sınıf sayısı ile ilgili sonuçları elde etmek için sadece tam idealleri göz önüne almak yeterli olacaktır [6].

Dolayısı ile tam idealler ele alınarak denklik tanımı ve sınıf sayısı aşağıdaki şekilde verilebilir.

Tanım 2.39. [1]Eğer $(\alpha)A = (\beta)B$ olacak şekilde sıfırdan farklı $\alpha, \beta \in O_K$ varsa $A, B \subset O_K$ ideallerine denktir denir ve $A \sim B$ şeklinde gösterilir. Bu bir denklik bağıntısıdır. Denklik sınıflarına ideal sınıfları denir. İdeal sınıflarının sayısına K' nın sınıf sayısı denir ve h_K ile gösterilir.

Ayrıca bu yazılışta;

i) Eğer $N(\alpha.\beta) > 0$ ise elde edilen sınıflara dar anlamda sınıf denir ve bu sınıftaki idellerin denkliği $A \approx B$ ile gösterilir. Dar anlamda sınıf sayısı da ${h_K}^+$ ile gösterilir.

ii) Eğer $N(\alpha.\beta) > 0$ koşulu gerekli değilse elde edilen sınıflara geniş anlamda sınıf denir ve bu sınıftaki ideallerin denkliği $A \sim B$ ile gösterilir. Geniş anlamda sınıf sayısı da h_K ile gösterilir. [6]

Teorem 2.12. [13] $K = \mathbb{Q}(\sqrt{d})$ kuadratik sayı cisminin diskriminantı Δ ve temel birimi ε_d olsun. Bu durumda,

i) $\Delta < 0 \Rightarrow {h_K}^+ = h_K$

ii) $\Delta > 0 \Rightarrow \begin{cases} {h_K}^+ = h_K, & N(\varepsilon_d) = -1 \text{ için} \\ {h_K}^+ = 2h_K, & N(\varepsilon_d) = 1 \text{ için} \end{cases}$

koşulları gerçeklenir.

İspat: i) $\Delta < 0$ durumunda $\forall\, x = \dfrac{a + b\sqrt{d}}{2} \in O_K$ için $N(x) = \dfrac{a^2 - b^2 d}{4} > 0$ olduğundan, $\forall\, \alpha, \beta \in O_K$ için $N(\alpha.\beta) > 0$ sağlanır. Bu durumda dar anlamda sınıflar ile geniş anlamda sınıflar aynıdır. Öyleyse ${h_K}^+ = h_K$ olur.

ii) $\Delta > 0$ olsun. $N(\varepsilon_d) = -1$ durumunda, $(\alpha)A = (\beta)B = (\varepsilon_d.\beta)B$ biçiminde yazıldığında $N(\alpha.\beta)$, $N(\alpha.\beta.\varepsilon_d)$ den biri pozitif olacaktır. Bu durumda dar anlamda sınıflar ile geniş anlamda sınıflar aynı olacaktır. Bu nedenle ${h_K}^+ = h_K$ olur.

$N(\varepsilon_d) = 1$ durumunda, $\forall\, \alpha, \beta \in O_K$ için $N(\alpha.\beta) > 0$ koşulu her zaman gerçeklenemez. Bu durumda $A \approx B$ veya $A \approx B\sqrt{d}$ den biri gerçeklenir [8]. Bu durumda ${h_K}^+ = 2h_K$ dır. Yani, dar anlamda her denklik sınıfı geniş anlamda iki denklik sınıfın birleşimidir. $\square$

Teorem 2.13. [8] $K = \mathbb{Q}(\sqrt{d})$ bir kuadratik sayı cismi, M_K Minkowski sınırı ve Δ, K cisminin diskriminantı olmak üzere, K cisminin her ideal sınıfı,

$$N(P) \leq M_K = \begin{cases} \dfrac{\sqrt{\Delta}}{2}, & d > 0 \text{ ise} \\ \\ \dfrac{2\sqrt{\Delta}}{\pi}, & d < 0 \text{ ise} \end{cases}$$

olacak biçimde bir P tam ideali vardır.

Teorem 2.14. [10] Bir cebirsel sayı cisminin ideal sınıfları sayısı sonludur.

Teorem 2.13 den faydalanarak Minkowski sınırı yardımıyla bazı sayı cisimlerinin sınıf sayıları belirlenmiştir. Ancak M_K sınırı büyüdükçe bu yöntemle sınıf sayısını hesaplamak da zorlaşmaktadır [4].

Teorem 2.15. [8] Bir sayı cisminin diskriminantı tek bir asal çarpan içeriyorsa, sınıf sayısı tektir.

Önerme 14. [1] A, O_K tamlık halkasının bir ideali ve h_K, K cisminin sınıf sayısı ise $1 \leq k \leq h_K$ olacak şekilde k tam sayısı vardır öyle ki A^k esas idealdir.

Önerme 15. [14] Eğer A, O_K tamlık halkasının bir ideali ve h_K, K cisminin sınıf sayısı ise

i) A^{h_K} esas idealdir.

ii) Eğer q ve h_K aralarında asal ve A^q esas ideal ise A esas idealdir.

Teorem 2.16. [14] $K = \mathbb{Q}(\sqrt{d})$ kuadratik sayı cisminin sınıf sayısının 1 olması için gerekli ve yeterli koşul K cisminin O_K tamlık halkasının bir esas ideal bölgesi olmasıdır.

İspat: $\Rightarrow$: $h_K = 1$ ise $\forall\ A \subset O_K$ ideali için $A \sim O_K$ dır. Bu durumda $\exists\ 0 \neq \alpha, \beta \in O_K$ için $(\alpha)A = (\beta)O_K = (\beta)$ olur. Bu ise $\exists\ x \in A$ için $\alpha x = \beta$ olduğunu yani; $x = \dfrac{\beta}{\alpha} \in A$ olduğunu belirtir ki $A = \left(\dfrac{\beta}{\alpha}\right)$ esas idealdir.

$\Leftarrow$: O_K tamlık halkası bir esas ideal bölgesi ise $0 \neq \alpha, \beta \in O_K$ olmak üzere $\forall\ A = (\alpha)$, $B = (\beta)$ idealleri için $(\beta)A = (\alpha)B$ yazılabileceğinden $A \sim B$ olduğu elde edilir ve böylece $h_K = 1$ dir. $\square$

Tanım 2.40. [18] $K = \mathbb{Q}(\sqrt{d})$ kuadratik sayı cismi , Δ_d diskriminant, χ_d Kronecker karakter ve ε_d temel birim olmak üzere

$$h_K = \frac{\sqrt{\Delta_d}.L(1,\chi_d)}{2log\varepsilon_d}$$

şeklinde tanımlanan sınıf sayısı formülüne *Dirichlet Sınıf Sayısı Formülü* denir. (Burada $L(1,\chi_d)$; $s = 1$ için $L-$fonksiyondur ve $L(s,\chi_d) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\chi_d(n)}{n^s}$ dir.)

2.8. Basit Sürekli Kesirler

Tanım 2.41. [19] $q_0, q_1, ..., q_n$ reel sayılar $1 \leq i \leq n$ için $q_i > 0$ olsun. Bu sayılar ile elde edilen

$$[q_0, q_1, ..., q_n] = q_0 + \cfrac{1}{q_1 + \cfrac{1}{q_2 + \cfrac{1}{\ddots + \cfrac{1}{q_{n-1} + \cfrac{1}{q_n}}}}}$$

kesrine *pozitif sonlu sürekli kesir* denir.

$[q_0, q_1, ..., q_n]$ pozitif sonlu sürekli bir kesir olmak üzere, $q_0 \in \mathbb{Z}$ ve $1 \leq i \leq n$ için $q_i \in \mathbb{Z}^+$ ise bu kesre *basit sonlu sürekli kesir* denir [19].

Bu bölümde sadece basit sürekli kesirlere yer verileceğinden, sürekli kesir denildiğinde sadece pozitif ve basit olan sürekli kesirler kastedilecektir.

Sonlu bir sürekli kesir aşağıdaki şekillerde gösterilebilir [19].
$[q_0, q_1, ..., q_n],\ [q_0, [q_1, ..., q_n]], [q_0, q_1, ..., q_{n-1} + \frac{1}{q_n}],\ q_0 + \frac{1}{[q_1, ..., q_n]}$

Teorem 2.17. [15] $(a, b) = 1,\ a, b \in \mathbb{Z}$ ve $b > 0$ olmak üzere $\frac{a}{b}$ şeklinde bir rasyonel sayı sonlu bir sürekli kesre eşittir. Tersine her sonlu sürekli kesir bir rasyonel sayı gösterir.

İspat: $(a, b) = 1,\ a, b \in \mathbb{Z}$ ve $b > 0$ olmak üzere $r = \frac{a}{b}$ olsun. a ile b' ye Euclid

Algoritması uygulandığında,

$$\begin{aligned}
a &= q_0 b + r_0, & 0 < r_0 < b \\
b &= q_1 r_0 + r_1, & 0 < r_1 < r_0 \\
r_0 &= q_2 r_1 + r_2, & 0 < r_2 < r_1 \\
&\vdots \\
r_{n-3} &= q_{n-1} r_{n-2} + r_{n-1}, & 0 < r_{n-2} < r_{n-1} \\
r_{n-2} &= q_n r_{n-1}
\end{aligned}$$

eşitlikleri elde edilir. Bu denklemlerde $q_0, q_1, ..., q_n$ pozitif tam sayılar olup buradan,

$$\frac{a}{b} = q_0 + \frac{r_0}{b} = q_0 + \frac{1}{\frac{b}{r_0}}$$

$$\frac{b}{r_0} = q_1 + \frac{r_1}{r_0} = q_1 + \frac{1}{\frac{r_0}{r_1}}$$

$$\vdots$$

$$\frac{r_{n-3}}{r_{n-2}} = q_{n-1} + \frac{r_{n-1}}{r_{n-2}} = q_{n-1} + \frac{1}{\frac{r_{n-2}}{r_{n-1}}}$$

$$\frac{r_{n-2}}{r_{n-1}} = q_n$$

bulunur. Birinci denklemde $\dfrac{b}{r_0}$ yerine ikinci denklemden değeri yazılır ve bu şekilde devam edilirse r rasyonel sayısının

$$r = [q_0, q_1, ..., q_n]$$

sürekli kesirlere açılımı elde edilmiş olur. Buradaki q_i' lere *kısmi bölümler* de denir. Böylece, bir rasyonel sayının sonlu bir sürekli kesre eşit olduğunun ispatı tamamlanmış olur.

Tersine $q_0, q_1, ..., q_n \in \mathbb{Z}$ ve $1 \leq i \leq n$ için $q_i > 0$ olmak üzere $[q_0, q_1, ..., q_n]$ sonlu sürekli kesri alındığında, her sonlu sürekli kesrin bir rasyonel sayı gösterdiğinin ispatı n' ye göre indüksiyonla yapılır.

$[q_0, q_1] = q_0 + \dfrac{1}{q_1} = \dfrac{q_0 q_1 + 1}{q_1}$ rasyonel sayı olduğundan $n = 1$ için iddia doğrudur.
$n = k$ için iddia doğru olsun. Yani, q_0 hariç hepsi pozitif olan $q_0, q_1, ..., q_k$ tam sayıları ve k pozitif tam sayısı için, $[q_0, q_1, ..., q_k]$ sonlu sürekli kesrinin bir rasyonel sayı olduğu kabul edilsin. $q_0, q_1, ..., q_k$ tam sayıları $q_1, ..., q_{k+1}$ olarak yeniden adlandırıldığında, varsayım gereği $[q_1, ..., q_{k+1}]$ basit sürekli kesri bir rasyonel sayıdır. O halde, $s > 0$ olmak üzere, $[q_1, ..., q_{k+1}] = \dfrac{r}{s}$ olacak şekilde r ve s tam sayıları vardır. Buradan, q_0 herhangi bir tam sayı olmak üzere,

$$[q_0, q_1, ..., q_{k+1}] = q_0 + \frac{1}{[q_1, ..., q_{k+1}]} = \frac{q_0 r + s}{r} \in \mathbb{Q}$$

elde edilir. O halde, iddia $n = k + 1$ için de doğrudur. Böylece, her sonlu sürekli kesrin bir rasyonel sayı gösterdiğinin ispatı tamamlanmış olur.

Sonuç 2.7. [5] $r = \dfrac{a}{b}$ rasyonel sayısı,

$$r = \begin{cases} [r] = [r-1, 1], & r \in \mathbb{Z}; \\ [q_0, q_1, ..., q_n]{=}[q_0, q_1, ..., q_n - 1, 1], & r \notin \mathbb{Z}. \end{cases}$$

biçimindedir.

Bir rasyonel sayının sonlu sürekli kesir biçiminde gösterilmesine sayının sürekli bir kesre açılımı denir [5].

Örnek 2.1. [5] $\dfrac{37}{7}$ nin sürekli kesirlere açılımını, Euclid algoritması yardımı ile bulalım.

$$\begin{aligned} 37 &= \;\; 5.7 + 2 \\ 7 &= \;\; 3.2 + 1 \\ 2 &= \;\; 2.1 \end{aligned}$$

olduğundan, kısmi bölümler 5, 3, 2 dir. Şu halde $\dfrac{37}{7} = [5, 3, 2] = [5, 3, 1, 1]$ olarak bulunur.

Sonuç 2.8. [6] Sonlu sürekli kesirler ve rasyonel sayılar arasında birebir eşleme vardır.

$\forall\, r \in \mathbb{Q}$ için $r = [q_0, q_1, ..., q_n]$ ve $r > 1$ ise $\dfrac{1}{r} = [0, q_0, ..., q_n]$ dir [6].

Verilen sonlu bir sürekli kesrin rasyonel sayı değerini bulmak basamak sayısı arttıkça zorlaşır. Bu nedenle ilk birkaç basamak değeri için doğrudan hesaplama yapılarak aşağıdaki rekürans değerleri elde edilir.

$$[q_0] = q_0,$$
$$[q_0, q_1] = q_0 + \frac{1}{q_1} = \frac{q_0q_1 + 1}{q_1},$$
$$[q_0, q_1, q_2] = q_0 + \frac{1}{q_1 + \frac{1}{q_2}} = \frac{q_0q_1q_2 + q_0 + q_2}{q_1q_2 + 1},$$

olduğu göz önüne alınır ve $P_{-2} = 0, P_{-1} = 1, Q_{-2} = 1, Q_{-1} = 0$ özel değerleri seçilirse,

$$P_0 = q_0 = q_0P_{-1} + P_{-2}, \quad P_1 = q_1q_0 + 1 = q_1P_0 + P_{-1}$$
$$Q_0 = 1 = q_0Q_{-1} + Q_{-2}, \quad Q_1 = q_1 = q_1Q_0 + Q_{-1}$$

eşitlikleri elde edilir ve $k \geq 0$ için,

$$\begin{aligned} P_k &= q_kP_{k-1} + P_{k-2} \\ Q_k &= q_kQ_{k-1} + Q_{k-2} \end{aligned} \tag{2.7}$$

şeklinde $\{P_k\}$ ve $\{Q_k\}$ tam sayı dizileri elde edilir [6].

Sonuç 2.9. [19] $\{Q_k\}$ tam sayı dizisi aşağıda verilen ifadeleri sağlamaktadır.
i) $\forall\, k \geq 0$ için $Q_k > 0$ dır.
ii) $k > 0$ için $Q_k > 0$ ise $0 < 1 = Q_0 < Q_1 < ...$
iii) $Q_k \geq k$ dır.

Teorem 2.18. [19] $q_0, q_1, ..., q_k \in \mathbb{Z}$ ve $1 \leq i \leq k$ için $q_i > 0$ olmak üzere, $\{P_k\}$ ve $\{Q_k\}$ tam sayı dizileri (2.7) rekürans bağıntıları ile tanımlanan diziler olsun. Bu takdirde, her x pozitif reel sayısı ve her $k \geq 0$ için,

$$[q_0, q_1, ..., q_{k-1}, x] = \frac{xP_{k-1} + P_{k-2}}{xQ_{k-1} + Q_{k-2}}$$

olur.

İspat: İspatı indüksiyonla yapalım. $k = 0$ ve $k = 1$ için eşitliğin doğruluğu kolaylıkla görülür. İlk k terim için eşitlik doğru olsun.

$$\begin{aligned}[q_0, q_1, ..., q_k, x] &= [q_0, q_1, ..., q_{k-1}, q_k + \frac{1}{x}] \\ &= \frac{(q_k + \frac{1}{x})P_{k-1} + P_{k-2}}{(q_k + \frac{1}{x})Q_{k-1} + Q_{k-2}} \\ &= \frac{xP_k + P_{k-1}}{xQ_k + Q_{k-1}}\end{aligned}$$

elde edildiğine göre eşitliğin $k + 1$ için de doğru olduğu görülür.

Teorem 2.19. [15] Her $k \geq 0$ tam sayısı için $r_k = [q_0, q_1, ..., q_k]$ olarak alınırsa,

$$r_k = \frac{P_k}{Q_k}$$

olur.

İspat: Teorem 2.18' de x pozitif reel sayısı yerine $q_k(> 1)$ tam sayısı alınırsa,

$$[q_0, q_1, ..., q_k] = \frac{q_k P_{k-1} + P_{k-2}}{q_k Q_{k-1} + Q_{k-2}}$$

elde edilir ve burdan da (2.7) bağıntıları kullanılarak, $r_k = \dfrac{P_k}{Q_k}$ elde edilir.

Teorem 2.20. [19] $\forall k \geq -1$ için

$$P_k Q_{k-1} - P_{k-1} Q_k = (-1)^{k-1} \tag{2.8}$$

İspat: İspatı indüksiyonla yapalım. $k = -1$, $k = 0$ ve $k = 1$ için eşitliğin doğruluğu kolaylıkla görülür.

Eşitlik k için doğru olsun. Bu kabul ve (2.7) bağıntıları kullanılarak

$$\begin{aligned}P_{k+1}Q_k - P_k Q_{k+1} &= (q_{k+1}P_k + P_{k-1})Q_k - P_k(q_{k+1}Q_k + Q_{k-1}) \\ &= -(P_k Q_{k-1} - P_{k-1}Q_k) \\ &= -(-1)^{k-1} \\ &= (-1)^k\end{aligned}$$

bulunur. Bu ise (2.8)' in $k + 1$ için de doğru olduğunu gösterir.

Sonuç 2.10. [15] $\forall k \geq 0$ için $(P_k, Q_k) = 1$ dir.

İspat: $(P_k, Q_k) = d > 1$ olsun. Önerme 2.20 kullanılarak, $P_kQ_{k-1} - P_{k-1}Q_k = (-1)^{k-1}$ yazılabilir. $(P_k, Q_k) = d$ olduğundan, $d|P_k$ ve $d|Q_k$ dır. Dolayısıyla $d|P_kQ_{k-1}$ ve $d|Q_kP_{k-1}$ olup $d|P_kQ_{k-1} - P_{k-1}Q_k$ ve böylece $d|1$ elde edilir ki bu $d > 1$ kabulü ile çelişir. Böylece $(P_k, Q_k) = 1$ oluşunun ispatı tamamlanmış olur.

Teorem 2.21. [19] $\forall k \geq 0$ için

$$P_kQ_{k-2} - P_{k-2}Q_k = (-1)^k q_k \tag{2.9}$$

olur.

İspat: Teorem 2.20' den $P_kQ_{k-1} - P_{k-1}Q_k = (-1)^{k-1}$ oluşu ve (2.7) bağıntıları kullanılarak ispat şöyle yapılır;

$$\begin{aligned} P_kQ_{k-2} - P_{k-2}Q_k &= (q_kP_{k-1} + P_{k-2})Q_{k-2} - P_{k-2}(q_kQ_{k-1} + Q_{k-2}) \\ &= (P_{k-1}Q_{k-2} - P_{k-2}Q_{k-1})q_k \\ &= (-1)^{k-2}q_k \\ &= (-1)^k q_k \end{aligned}$$

olur.

2.9. Sonsuz Sürekli Kesirler

Tanım 2.42. [6] Basit sonlu sürekli kesir tanımındaki n değeri sonsuz ise elde edilen sürekli kesre *sonsuz sürekli kesir* denir ve $[q_0, q_1, ...]$ şeklinde ifade edilir.

Tanım 2.43. [6] Sonsuz sürekli bir kesrin ilk k teriminden oluşan sonlu sürekli kesir,

$$c_k = [q_0, q_1, ..., q_k]$$

şeklinde olup buna *sonsuz sürekli kesrin k-ıncı yaklaşımı* denir.

Eğer k çift ise c_k *"çift yaklaşım"*, k tek ise c_k *"tek yaklaşım"* olarak adlandırılır. $c_k = \dfrac{P_k}{Q_k}$ dır.

Teorem 2.22. [6] **i)** Çift yaklaşımlar dizisi düzgün artar.

ii) Tek yaklaşımlar dizisi düzgün azalır.

iii) Tek yaklaşımlar, Çift yaklaşımlardan büyüktür.

İspat: i) (2.9) eşitliği ve Sonuç 2.9 sırasıyla göz önüne alınır ise; $\forall k \geq 2$ çift tam sayısı için $P_kQ_{k-2} - P_{k-2}Q_k = (-1)^k q_k = q_k$ bulunacağından

$$c_k = \frac{P_k}{Q_k} = \frac{P_{k-2}}{Q_{k-2}} + \frac{q_k}{Q_kQ_{k-2}} = c_{k-2} + \frac{q_k}{Q_kQ_{k-2}} > c_{k-2}$$

olur.

ii) Benzer şekilde (2.9) eşitliği ve Sonuç 2.9 sırasıyla göz önüne alınır ise; $\forall k \geq 3$ tek tam sayısı için $P_kQ_{k-2} - P_{k-2}Q_k = (-1)^k q_k = -q_k$ bulunacağından

$$c_k = \frac{P_k}{Q_k} = \frac{P_{k-2}}{Q_{k-2}} - \frac{q_k}{Q_kQ_{k-2}} = c_{k-2} - \frac{q_k}{Q_kQ_{k-2}} < c_{k-2}$$

olur.

iii) $k = 2t+1$ $(t \geq 0)$ tek tamsayısı için (2.8) eşitliği kullanılarak $P_{2t+1}Q_{2t} - P_{2t}Q_{2t+1} = 1$ bulunur ve böylece $c_{2t} < c_{2t+1}$ olduğu görülür. r ve s keyfi pozitif tam sayılar olmak üzere $c_{2s} < c_{2r+1}$ şeklinde genelleştirilebilir.

Not 2.2. [6] Teorem 2.22 $c_2 < c_4 < ... < c_3 < c_1$ şeklinde özetlenebilir.

Teorem 2.23. [6] $[q_0, q_1, q_2, ...]$ sonsuz sürekli kesri için,

i) $\lim\limits_{k\to\infty} c_k$ mevcuttur ve r, s herhangi iki pozitif tam sayı olmak üzere $c_{2r} < \lim\limits_{k\to\infty} c_k < c_{2s+1}$ sağlanır.

ii) $\lim\limits_{k\to\infty} c_k = [q_0, q_1, q_2, ...]$ olur.

iii) $\alpha = [q_0, q_1, q_2, ...]$ ise $\lfloor \alpha \rfloor = q_0$ ve $\alpha = q_0 + \dfrac{1}{[q_1, q_2, ...]}$ dir.

(Burada, $\lfloor x \rfloor$: x elemanının tam değerini ifade etmektedir.)

İspat: i) Teorem 2.22' den $\{c_{2k}\}$ artan ve herhangi bir tek yaklaşımla üstten sınırlı olduğundan, $\lim\limits_{k\to\infty} c_{2k}$ mevcuttur. Benzer şekilde $\{c_{2k+1}\}$ azalan ve herhangi bir çift yaklaşımla alttan sınırlı olduğundan, $\lim\limits_{k\to\infty} c_{2k+1}$ de mevcuttur. Teorem 2.22' den

$$\lim_{k\to\infty} c_{2k+1} = \lim_{k\to\infty} c_{2k} + \lim_{k\to\infty} \frac{1}{Q_kQ_{2k+1}}$$

bulunur. Q_k artan bir dizi ve $Q_k \geq 0$ olduğundan son limit sıfır olur buradan $\lim\limits_{k\to\infty} c_{2k+1} = \lim\limits_{k\to\infty} c_{2k}$ elde edilir. Bu da tek yaklaşımlar ve çift yaklaşımlar dizilerinin limitlerinin aynı olduğunu gösterir. Buradan $\lim\limits_{k\to\infty} c_k = \lim\limits_{k\to\infty} c_{2k+1} = \lim\limits_{k\to\infty} c_{2k}$ sağlanır ve

$c_{2r} < \lim\limits_{k\to\infty} c_k < c_{2s+1}$ olacağı açıktır.

ii), iii) $c_{2r} < \lim\limits_{k\to\infty} c_k < c_{2s+1}$ eşitsizliğinden $r = s = 0$ alınır ise $q_0 < \alpha < q_0 + \dfrac{1}{q_1}$ elde edilir. $q_1 \geq 1$ olduğundan $q_0 < \alpha < q_0 + 1$ ve buradan da $\lfloor \alpha \rfloor = q_0$ bulunur.

Ayrıca $c_k = [q_0, q_1, q_2, ..., q_k]$ olduğundan,

$$\alpha = \lim_{k\to\infty} c_k = q_0 + \lim_{k\to\infty} \frac{1}{[q_1, q_2, ..., q_k]} = q_0 + \frac{1}{[q_1, q_2, ...]}$$

olarak elde edilir. □

Sonuç 2.11. [5] $\alpha = [q_0, q_1, q_2, ...]$ sonsuz sürekli kesri bir tam sayı olamaz.

İspat: Teorem 2.23 iii) göz önüne alınırsa $\lfloor \alpha \rfloor = q_0$ olur. $q_0 < \alpha < q_0 + 1$ olduğundan, $\alpha \notin \mathbb{Z}$ olur. □

Yardımcı Teorem 2.2. [5] $\alpha = [q_0, q_1, q_2, ...] = [p_0, p_1, p_2, ...]$ ise $\forall k > 0$ için, $q_k = p_k$ olur.

Teorem 2.24. [15] Her sonsuz sürekli kesir, bir irrasyonel sayı belirler.

İspat: $\alpha = [q_0, q_1, q_2, ...]$ sonsuz sürekli kesrinin bir rasyonel sayı belirlediğini varsayalım. O halde Teorem 2.17' e göre, bu rasyonel sayının sonlu bir sürekli kesre açılımı mevcuttur. Bu açılımı n sonlu bir sayı olmak üzere; $\alpha = [p_0, p_1, p_2, ..., p_n]$ ile gösterelim. Bu durumda

$$\alpha = [q_0, q_1, q_2, ...] = [p_0, p_1, p_2, ..., p_n]$$

ve $\lfloor \alpha \rfloor = q_0 = p_0$ olur. Bu ise Yardımcı Teorem 2.2' den dolayı ancak ilk n terimin eşit olması ile mümkündür. Bu durumda; $[q_n, q_{n+1}, q_{n+2}, ...] = [p_n] = p_n \in \mathbb{Z}^+$ bulunur. Fakat sonsuz sürekli kesir bir tam sayı olamayacağından bu bir çelişkidir. O halde varsayımımız hatalı olup α sonsuz sürekli kesri bir irrasyonel sayı belirler. □

Teorem 2.25. [15] Her α irrasyonel sayısı bir tek sürekli kesre eşittir.

İspat: $\alpha = \alpha_0$ ile gösterelim. $\lfloor \alpha_0 \rfloor = q_0 \in \mathbb{Z}$ olsun. Bu durumda $0 < \alpha_0 - q_0 < 1$ olacaktır.

$$\begin{aligned}\lfloor \alpha_0 \rfloor = q_0 &\Rightarrow q_0 < \alpha_0 < q_0 + 1 \\ &\Rightarrow 0 < \alpha_0 - q_0 < 1 \\ &\Rightarrow 0 < 1 < \frac{1}{\alpha_0 - q_0} = \alpha_1 \quad \text{dersek,}\end{aligned}$$

O zaman $\alpha_0 = q_0 + \dfrac{1}{\alpha_1}$ dir.

Benzer şekilde devam edilirse, $\lfloor \alpha_k \rfloor = q_k$ olmak üzere

$$\begin{aligned}
&\alpha_0 = q_0 + \frac{1}{\alpha_1}, \quad \lfloor \alpha_0 \rfloor = q_0 \\
&\alpha_1 = q_1 + \frac{1}{\alpha_2}, \quad \lfloor \alpha_1 \rfloor = q_1 \\
&\vdots \\
&\alpha_{k-1} = q_{k-1} + \frac{1}{\alpha_k}, \quad \lfloor \alpha_{k-1} \rfloor = q_{k-1}
\end{aligned}$$

elde edilir.

Burada α_{k-1} bir irrasyonel sayı olduğundan α_k da irrasyoneldir. Ayrıca, $q_0 \in \mathbb{Z}$ dışında q_k' lar pozitif tam sayılardır. Böylece, $k+1$ adım sonra

$$\alpha = [q_0, q_1, ..., q_{k-1}, \alpha_k] \tag{2.10}$$

sürekli kesri elde edilir. Teorem 2.18' den

$$\alpha = \alpha_0 = \frac{\alpha_k P_{k-1} + P_{k-2}}{\alpha_k Q_{k-1} + Q_{k-2}}$$

bulunur. $c_k = \dfrac{P_k}{Q_k}$ olduğundan $\alpha - c_{k-1} = \dfrac{(-1)^{k-1}}{Q_{k-1}(\alpha_k Q_{k-1} + Q_{k-2})}$ ve $|\alpha - c_{k-1}| < \dfrac{1}{{Q_{k-1}}^2}$

elde edilir. Burada limit alınırsa $\alpha = \lim\limits_{k\to\infty} c_k = \lim\limits_{k\to\infty} [q_0, q_1, ..., q_k] = [q_0, q_1, ...]$ bulunur.

Son olarak elde edilen bu sürekli kesrin tekliğini gösterelim. $[q_0, q_1, ...]$ ve $[p_0, p_1, ...]$ sonsuz sürekli kesirleri aynı irrasyonel sayıyı temsil etsin. $\alpha = [q_0, q_1, ...] = [p_0, p_1, ...]$ ise $\forall k > 0$ için $q_k = p_k$ olduğu Teorem 2.23 iii) göz önüne alınırsa,

$$q_0 + \frac{1}{[q_1, q_2, ..., q_k]} = p_0 + \frac{1}{[p_1, p_2, ..., p_k]}$$

olduğundan, istenilen k üzerinden tümevarımla kolayca elde edilir.

Sonuç 2.12. [6] İrrasyonel sayılar ile sonsuz sürekli kesirler arasında birebir bir eşleme vardır.

Örnek 2.2. [5] $\sqrt{3}$ irrasyonel sayısının sürekli kesre açılımını bulalım.

$$\begin{aligned}
q_0 =& \lfloor \sqrt{3} \rfloor = 1 \\
\alpha_0 =& \lfloor \sqrt{3} \rfloor = 1 + \frac{1}{\alpha_1} \ \Rightarrow \alpha_1 = \frac{1}{\sqrt{3}-1} = \frac{\sqrt{3}+1}{2} \\
q_1 =& \lfloor \frac{\sqrt{3}+1}{2} \rfloor = 1 \\
\alpha_1 =& 1 + \frac{1}{\alpha_2} \ \Rightarrow \alpha_2 = \frac{2}{\sqrt{3}-1} = \sqrt{3}+1, \\
q_2 =& \lfloor \sqrt{3}+1 \rfloor = 2 \\
\alpha_2 =& 2 + \frac{1}{\alpha_3} \ \Rightarrow \alpha_3 = \frac{1}{\sqrt{3}-1} = \alpha_1,
\end{aligned}$$

olduğundan bundan sonraki kısmi bölümler tekrar eder. Böylece

$$\sqrt{3} = [1, 1, 2, 1, 2, 1, 2, \ldots] = [1, \overline{1, 2}]$$

olarak bulunur. O halde $\sqrt{3}$ irrasyonel sayısının sürekli kesre açılımının sonsuz olduğu görülür.

Örnek 2.3. [5] $\alpha = [1, 1, 1, \ldots]$ sonsuz sürekli kesrine karşılık gelen irrasyonel sayıyı bulalım.
Teorem 2.23 iii) göz önüne alınırsa,

$$\alpha = 1 + \frac{1}{\alpha} \Rightarrow \alpha^2 - \alpha - 1 = 0,$$

$\lfloor \alpha \rfloor = 1$ olduğundan, α bu polinomun pozitif kökü olup $\alpha = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$ olarak bulunur.

Örnek 2.4. [5] $\alpha = [3, 2, 1, 1, \ldots]$ sonsuz sürekli kesrine karşılık gelen irrasyonel sayıyı bulalım;
Teorem 2.23 iii) göz önüne alınırsa, $\alpha = 3 + \dfrac{1}{\alpha_1}$, $\alpha_1 = 2 + \dfrac{1}{\alpha_2}$ ve Örnek 2.3' den $\alpha_2 = [1, 1, 1, \ldots] = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$ olduğundan, yerine konarak

$$\alpha_1 = 2 + \frac{1}{\frac{1+\sqrt{5}}{2}} = \frac{4+2\sqrt{5}}{1+\sqrt{5}}$$

$$\alpha = 3 + \frac{1+\sqrt{5}}{4+2\sqrt{5}} = \frac{13+7\sqrt{5}}{4+2\sqrt{5}} = \frac{9-\sqrt{5}}{2}$$

olarak elde edilir.

Tanım 2.44. [6] $\alpha = [q_0, q_1, ...]$ bir sonsuz sürekli kesir olsun. $\alpha_k = [q_k, q_{k+1}, ...]$ şeklindeki sonsuz sürekli kesre α kesrinin *k-ıncı tamlayanı* denir.

$q_0 \in \mathbb{Z}$, $q_1, q_2, , ..., q_{k-1} \in \mathbb{Z}^+$ ve $\beta = [p_0, p_1, ...] > 1$ bir irrasyonel sayı ise,

$$[q_0, q_1, ..., q_{k-1}, \beta] = [q_0, q_1, ..., q_{k-1}, p_0, p_1, ...]$$

sağlanır [6].

2.10. Kuadratik İrrasyonel Sayıların Sürekli Kesre Açılımı

Tanım 2.45. [5] $x, y \in \mathbb{Q}$, $y \neq 0$ ve d kare çarpansız pozitif bir tam sayı olmak üzere

$$\alpha = x + y\sqrt{d}$$

formundaki sayılara *kuadratik irrasyonel sayı* denir.

Not 2.3. [6] $\mathbb{Q}(\sqrt{d})$ kuadratik sayı cisminin bütün irrasyonel elemanlarının kuadratik irrasyonel sayı olduğu görülmektedir.

Önerme 16. [6] Her α kuadratik irrasyonel sayısı $d > 0$ kare çarpansız bir tam sayı ve $s \mid (d - r^2)$ ($s \neq 0$, $r, s \in \mathbb{Z}$) olmak üzere $\dfrac{r+\sqrt{d}}{s}$ formunda yazılabilir.

İspat: $\alpha = x + y\sqrt{d_0}$ şeklinde olsun. $0 \neq b, c \in \mathbb{Z}$ olmak üzere $\alpha = \dfrac{a+b\sqrt{d_0}}{c}$ şeklinde yazılabilir. Karekökün işareti pozitif olacak şekilde

$$\alpha = \frac{a \pm \sqrt{b^2 d_0}}{c} = \frac{a' + \sqrt{d_1}}{c} = \frac{a'|c| + \sqrt{c^2 d_1}}{c|c|} = \frac{a_1 + \sqrt{d_2}}{c_1}$$

yazılır. Burada d_1 ve d_2 tam kare değillerdir.
Ayrıca $d_2 - {a_1}^2 = c^2 d_1 - {a'}^2 c^2 = (d_1 - {a'}^2)c^2$ olduğundan $\pm c_1 = c^2 \mid (d_2 - {a_1}^2)$ elde edilir. Bu durumda, $r = a_1$, $s = c_1$ alınırsa $\alpha = \dfrac{r+\sqrt{d}}{s}$ istenilen yazılıştır.

Tanım 2.46. [15] $\alpha = [q_0, q_1, ...]$ bir irrasyonel sayı olsun. Sonlu bir adımdan sonra q_k' lar periyodik olarak eşit değerler alıyor ise bu kesre *periyodik sürekli kesir* denir. Bir periyodik sürekli kesir,

$$[q_0, q_1, ..., q_{k-1}, \overline{q_k, ..., q_{k+m-1}}]$$

şeklinde gösterilir ve buradaki m sayısına bu kesrin *periyod uzunluğu* denir.

Teorem 2.26. [15] Her periyodik sürekli kesir bir kuadratik irrasyonel sayıya karşılık gelir, tersine her kuadratik irrasyonel sayının sürekli kesre açılımı periyodiktir.

Örnek 2.5. [5] $\alpha = [5, \overline{1, 10}]$ periyodik sürekli kesrine karşılık gelen kuadratik irrasyonel sayıyı bulalım;
$\beta = [\overline{1, 10}]$ olsun. O halde $\alpha = [5, \beta]$ olur. $\beta = [1, 10, \beta]$ olduğundan,

$$\beta = 1 + \frac{1}{10 + \frac{1}{\beta}} \Rightarrow \beta = \frac{11\beta + 1}{10\beta + 1}$$
$$\Rightarrow 10\beta^2 - 10\beta - 1 = 0$$

ve $\beta > 0$ olduğundan, $\beta = \dfrac{5 + \sqrt{35}}{10}$ olarak bulunur. O halde

$$\alpha = [5, \beta] = 5 + \frac{1}{\frac{5+\sqrt{35}}{10}} = \sqrt{35}$$

kuadratik irrasyonel sayısı bulunur.

Teorem 2.27. [15] $\alpha = [q_0, q_1, ...]$ bir kuadratik irrasyonel sayı, $d > 0$ kare çarpansız bir tam sayı ve $s_0 \mid (d - {r_0}^2)$ $(r_0, s_0 \in \mathbb{Z};\ s_0 \neq 0)$ olmak üzere $\alpha = \alpha_0 = \dfrac{r_0 + \sqrt{d}}{s_0}$ ise,

$$\begin{aligned} r_{k+1} &= q_k s_k - r_k \\ s_{k+1} &= \frac{d - r_{k+1}^2}{s_k} \end{aligned} \tag{2.11}$$

rekürans değerleri ve $k \geq 0$ tam sayısı için,
i) r_k ve $s_k \neq 0$ birer tam sayıdır.
ii) $s_k \mid (d - {r_k}^2)$ dir.

iii) $\alpha_k = \dfrac{r_k + \sqrt{d}}{s_k}$
özellikleri gerçeklenir.

İspat: İspatı indüksiyon ile yapalım. $k = 0$ için her üç halin de doğru olduğu açıktır. her üç durumun k için doğru olduğunu kabul edip $k + 1$ için doğru olduklarını gösterelim.

i) r_{k+1}' in tam sayı olduğu açıktır. $s_{k+1} \neq 0$ olacaktır. (Aksi halde $d = r_{k+1}^2$ olur ki bu da bir çelişkidir.)

$$s_{k+1} = \frac{d - (q_k s_k - r_k)^2}{s_k} = \frac{d - {r_k}^2}{s_k} - {q_k}^2 s_k + 2q_k r_k$$

olduğundan s_{k+1}' in de bir tam sayı olduğu görülür.

ii) $s_k.s_{k+1} = d - {r_{k+1}}^2$ olduğundan $s_{k+1} \mid d - r_{k+1}^2$ olur.

iii) Teorem 2.25' deki gösterim kullanılır ise;

$$\alpha_{k+1} = \frac{1}{\alpha_k - q_k} = \frac{s_k}{\sqrt{d} + r_k - q_k s_k} = \frac{s_k}{\sqrt{d} - r_{k+1}} = \frac{s_k}{\sqrt{d} - r_{k+1}} . \frac{\sqrt{d} + r_{k+1}}{\sqrt{d} + r_{k+1}}$$

$$= \frac{\sqrt{d} + r_{k+1}}{(d - r_{k+1}^2)/s_k}$$

$$= \frac{\sqrt{d} + r_{k+1}}{s_{k+1}}$$

elde edilir.

Sonuç 2.13. [6] (2.11) rekürans değerleri ile $\alpha = \alpha_0 = \dfrac{r_0 + \sqrt{d}}{s_0}$ şeklinde verilen bir kuadratik irrasyonel sayının sonsuz sürekli kesre açılımını bulmak mümkündür.

Örnek 2.6. [5] $\dfrac{\sqrt{2} + 1}{3}$ kuadratik irrasyonel sayısının sürekli kesre açılımını bulalım ; $d = 2$, $r_0 = 1$ ve $s_0 = 3$' den başlayamayız. Çünkü $s_0 \nmid (d - r_0^2)$ dir. Bu nedenle

$$\frac{\sqrt{2} + 1}{3} = \frac{3\sqrt{2} + 3}{9} = \frac{\sqrt{18} + 3}{9}$$

şekline getirmemiz gerekir. Bu durumda $d = 18$, $r_0 = 3$ ve $s_0 = 9$ olup $s_0 \mid (d - r_0^2)$ dir. Aşağıdaki Tablo 2.1' i yapalım.

Tablo 2.1: $\dfrac{\sqrt{2}+1}{3}$ kuadratik irrasyonel sayısının sürekli kesre açılımında kullanılan rekürans değerlerinin tablosu

k	0	1	2	3	4	5
r_k	3	-3	4	4	4	4
s_k	9	1	2	1	2	1
q_k	0	1	4	8	4	8

ve $\dfrac{\sqrt{2}+1}{3} = [0, 1, \overline{4, 8}]$ olarak elde edilir.

Yardımcı Teorem 2.3. [15] Bir $\alpha = \alpha_0 = \dfrac{r_0 + \sqrt{d}}{s_0}$ kuadratik irrasyonel sayısı verilsin. $\alpha^{'}$, α elemanının eşleniği olsun. Eğer $n > 1$ tam sayısı ${\alpha_{n-1}}^{'} < 0$ ise,

i) $-1 < {\alpha_n}^{'} < 0$

ii) $0 < r_n < \sqrt{d}$

iii) $0 < s_n < 2\sqrt{d}$

koşulları gerçeklenir.

Tanım 2.47. [6] Bir sürekli kesrin periyod dışında kalan elemanı yoksa bu kesre *pür-periyodik (tamamen periyodik) sürekli kesir* denir.

Tanım 2.48. [5] α, bir kuadratik irrasyonel sayı ve $\alpha^{'}$, α'nın eşleniği olsun. Eğer $\alpha > 1$ ve $-1 < \alpha^{'} < 0$ ise α' ya *indirgenmiş kuadratik irrasyonel sayı* denir.

Teorem 2.28. [15] Bir α kuadratik irrasyonel sayısının sonsuz sürekli kesrinin pür-periyodik olması için gerek ve yeter koşul α' nın indirgenmiş olmasıdır.

Teorem 2.29. [16] d kare çarpansız pozitif bir tam sayı olsun. $\sqrt{d}$ ' nin sürekli kesre açılımında yalnızca q_0 periyod dışında kalır. $\sqrt{d} = [q_0, \overline{q_1, ..., q_m}]$ biçiminde ise $q_m = 2q_0$ olur.

Sonuç 2.14. [16] $d \geq 7$ için $\dfrac{1+\sqrt{d}}{2}$ nin sürekli kesre açılımı $\dfrac{1+\sqrt{d}}{2} = [q_0, \overline{q_1, ..., q_m}]$ biçimindedir ve $q_m = 2q_0 - 1$ olur.

2.11. Periyodu 7 Olan Sürekli Kesirler ve Çeşitli Tipteki Reel Kuadratik Sayı Cisimlerinin Temel Birimleri ile Sınıf Sayıları

Teorem 2.30. [20] $p \neq 5$, $p \equiv 1 \pmod 4$ bir asal sayı olsun. Eğer, $x^2 - py^2 = -4$ diophantine denkleminin aşikar olmayan $(x, y) = (T_p, U_p)$ $(T_p > 0, U_p > 0)$ şeklindeki tam sayı çözümü;

i) $T_p/U_p^2 > \dfrac{1}{2}$

ii) $T_p < 2p$

iii) $U_p^2 < 4p$

koşullarından herhangi birini sağlıyorsa, $\mathbb{Q}(\sqrt{p})$ reel kuadratik sayı cisminin temel birimi $\varepsilon_p = \dfrac{T_p + U_p\sqrt{p}}{2}$ olur.

Teorem 2.31. [20] $K = \mathbb{Q}(\sqrt{p})$ olsun. $p \equiv 1 \pmod 4$ ve $p > 4.1 \times 10^6$ asalı için p' nin uygun bir değeri hariç $n_p = \left\lfloor \dfrac{T_p}{{U_p}^2} \right\rfloor \neq 0$ ise $h_p > 1$ olur.

Teorem 2.32. [21] $d > 13$ kare çarpansız pozitif bir tam sayı olsun. $K = \mathbb{Q}(\sqrt{d})$ reel kuadratik sayı cisimlerinin m_d invaryant değeri ve ε_d temel birimi

i) $m_d = \left\lfloor \dfrac{{U_d}^2}{T_d} \right\rfloor = \left\lfloor \dfrac{T_d}{d} \right\rfloor = \left\lfloor \dfrac{\varepsilon_d}{d} \right\rfloor = \left\lfloor \dfrac{U_d}{\sqrt{d}} \right\rfloor$

ii) $\varepsilon_d < d.(m_d + 1)$

biçimindedir.

Teorem 2.33. [21] Richaut-Degert(R-D) tipinden olan $K = \mathbb{Q}(\sqrt{d})$ reel kuadratik sayı cisimleri için $d > 5$ olması durumunda aşağıdaki ifadeler sağlanır.

$$m_d = \begin{cases} 2, & r = -2; \\ 1, & r = 2, \pm 3; \\ 0, & |r| \neq 2, 3. \end{cases}$$

Tablo 2.2: Geniş anlamda R-D tipinden sayı cisimleri için temel birimin katsayıları ve Yokoi invaryant değerleri

$d = n^2 + r$	r	T_d	U_d	m_d
$d \geq 6$	2	$2n^2 + 2$	$2n$	1
$d \geq 7$	-2	$2n^2 - 2$	$2n$	1
$d \geq 39$	3	$2(2n^2 + 3)/3$	$4n/3$	1
$d \geq 33$	-3	$2(2n^2 - 3)/3$	$4n/3$	1

Tablo 2.3: Dar anlamda R-D tipinden sayı cisimleri için temel birimin katsayıları ve Yokoi invaryant değerleri

$d = n^2 + r$	r	T_d	U_d	n_d
$d \geq 17$	1	$2n$	2	$k/2$
$d \geq 10$	1	$2n$	2	$(k-1)/2$
$d \geq 15$	-1	$2n$	2	$k/2$
$d \geq 29$	4	n	1	k
$d \geq 21$	- 4	n	1	k

Önerme 17. [21] Richaut-Degert(R-D) tipinden olan $K = \mathbb{Q}(\sqrt{d})$ reel kuadratik sayı cisimleri için aşağıdakiler geçerlidir.

i) $\mid r \mid = 1 \Leftrightarrow U_d = 2$

ii) $\mid r \mid = 4 \Leftrightarrow U_d = 1$

Teorem 2.34. [22] d kare çarpansız pozitif tam sayısı için $K = \mathbb{Q}(\sqrt{d})$ reel kuadratik sayı cisminin diskriminantı Δ_d ile verilmiş olsun. R(d), Δ_d diskriminantlı tüm indirgenmiş kuadratik irrasyonel sayıların kümesi olmak üzere, periyodu k_d ile ifade edilen herhangi bir $\alpha \in R(d)$ elemanı için,

$$\alpha = a_1 + \frac{1}{a_2}{}_{+\ldots+}\frac{1}{a_{k_d}}{}_{+}\frac{1}{\alpha} = \frac{r\alpha + s}{t\alpha + u}, \ (a_i, r, s, t, u \in \mathbb{Z}, a_i \geq 1)$$

açılımında $t\alpha + u$, $K = \mathbb{Q}(\sqrt{d})$ cisminin temel birimi olarak elde edilir ve bu temel birimin normu $(-1)^{k_d}$ ile belirlenir.

Teorem 2.35. [22] d kare çarpansız pozitif tam sayısı, $0 < b \leq 2a$ eşitsizliğini sağlayan $a, b \in \mathbb{Z}$ için $d = a^2 + b$ biçiminde tanımlansın. $K = \mathbb{Q}(\sqrt{d})$ reel kuadratik sayı cisminin temel birimi ε_d olsun. Bu durumda;

I)
$$\left.\begin{array}{l} a = 4k^2 r + k + r \\ b = 4k + 1; \ k, r > 0, k \not\equiv r (mod\, 2) \\ N(\varepsilon_d) = -1 \ \text{ ve } \ \omega_d = a + \sqrt{d} \end{array}\right\} \Rightarrow \varepsilon_d = (4k^2 + 1)\omega_d + 2k$$

II) $$\left.\begin{array}{l} a=\frac{1}{2}(kr+1)(ek-r)+r \\ b=(ek-r)r+e;\ e,k,r,ek-r>0 \\ a^2+b\not\equiv 1(mod\,4) \\ N(\varepsilon_d\ )=1\ \text{ ve }\ \omega_d=a+\sqrt{d} \end{array}\right\}\Rightarrow \varepsilon_d=(k^2(ek-r)+2k)\omega_d+k(ek-r)+1$$

III) $$\left.\begin{array}{l} a=k^2r+k+r,\ a\equiv 1(mod\,2) \\ b=4(kr+1);\ k>1,r>0 \\ N(\varepsilon_d\ )=-1\ \text{ ve }\ \omega_d=\dfrac{1}{2}(a+\sqrt{d}) \end{array}\right\}\Rightarrow \varepsilon_d=(k^2+1)\omega_d+k$$

IV) $$\left.\begin{array}{l} a=kd+r, \\ b=4d,\ d=(ek-r)r+e \\ (k>1,\ e,\ r,\ ek-r>0) \\ N(\varepsilon_d\ )=1\ \text{ ve }\ \omega_d=\dfrac{1}{2}(a+\sqrt{d}) \end{array}\right\}\Rightarrow \varepsilon_d=(k^2(ek-r)+2k)\omega_d+k(ek-r)+1$$

V) $$\left.\begin{array}{l} a=ek+2e-1 \\ b=2ek-1;\ e>1,k>0,e\equiv k\equiv 1(mod\,2) \\ N(\varepsilon_d\ )=1\ \text{ ve }\ \omega_d=\dfrac{1}{2}(\sqrt{d}+a-1) \end{array}\right\}\Rightarrow \varepsilon_d=(k+2)\omega_d+k+1$$

VI) $$\left.\begin{array}{l} a=k(ek-1)+2e(k+1)-2 \\ b=2k(ek-1)+1);\ e,k>0\ k\equiv 0 \\ \text{veya } e\equiv k\equiv 1(mod\,2),e(k+1)\geq 3 \\ N(\varepsilon_d\ )=-1\ \text{ ve }\ \omega_d=\dfrac{1}{2}(\sqrt{d}+a-1) \end{array}\right\}\Rightarrow \varepsilon_d=(k^2+2k+2)\omega_d+k^2+k+1$$

ifadeleri gerçeklenir.

Teorem 2.36. [22] d pozitif kare çarpansız tam sayısı, $0<b\leq 2a$ eşitsizliğini sağlayan $a,b\in\mathbb{Z}$ için $d=a^2+b$ biçiminde tanımlı olsun. $\omega=\omega_0\in R(d)$' nin sürekli kesir açılımı $i\geq 0$ için $\lfloor\omega_i\rfloor=\ell_i$ olmak üzere, $\omega_i=\ell_i+\dfrac{1}{\omega_{i+1}}$ olsun. Bu durumda,

$\omega_i = \dfrac{a - r_i + \sqrt{d}}{c_i}$ $(c_i, r_i \in \mathbb{Z})$ olup, ℓ_i, c_i ve r_i tam sayıları aşağıdaki rekürans bağıntılarından elde edilir.

$$\omega_0 = \frac{a - r_0 + \sqrt{d}}{c_0}$$

$$2a - r_i = c_i \ell_i + r_{i+1}$$

$$c_{i+1} = c_{i-1} + (r_{i+1} - r_i)\ell_i, \ (i \geq 0)$$

Burada $0 \leq r_{i+1} < c_i$ ve $c_{-1} = \dfrac{b + 2ar_0 - r_0^2}{c_0}$ dır. Ayrıca ω_0 irrasyonel sayısının periyodu $k_d \geq 1$ olmak üzere

$$\ell_i = \ell_{k_d - i}, \ (1 \leq i \leq k_d - 1)$$
$$r_i = r_{k_d - i + 1}, \ (1 \leq i \leq k_d)$$
$$c_i = c_{k_d - i}, \ (1 \leq i \leq k_d)$$

eşitlikleri gerçeklenir.

Teorem 2.37. [23] $d \equiv 1 \pmod 4$, $(d > 5)$ pozitif kare çarpansız bir tam sayısı, $\omega_d = \dfrac{1 + \sqrt{d}}{2}$, $q_0 = \lfloor \omega_d \rfloor$ ve $\omega_R = q_0 - 1 + \omega_d$ olsun. Bu durumda, $\omega_d \notin R(d)$ ve $\omega_R \in R(d)$ dir. k_d, ω_R' nin periyodu olmak üzere,

$$\omega_R = [\overline{2q_0 - 1, q_1, ..., q_{k_d - 1}}], \quad \omega_d = [q_0, \overline{q_1, ..., q_{k_d - 1}, 2q_0 - 1}]$$

biçimindedir. Ayrıca

$$\omega_R = \frac{P_{k_d - 1}\omega_R + P_{k_d - 2}}{Q_{k_d - 1}\omega_R + Q_{k_d - 2}} = [2q_0 - 1, q_1, ..., q_{k_d - 1}, \omega_R]$$

ise bu durumda $\mathbb{Q}(\sqrt{d})$' nin $\varepsilon_d = \dfrac{T_d + U_d\sqrt{d}}{2} > 1$ temel birimi $Q_{-1} = 0$, $Q_0 = 1$ ve $i \geq 1$ için $Q_{i+1} = q_{i+1}Q_i + Q_{i-1}$ olmak üzere,

$$T_d = (2q_0 - 1)Q_{k_d - 1} + 2Q_{k_d - 2}, \quad U_d = Q_{k_d - 1}$$

ile belirlenir.

Teorem 2.38. [23] $d \equiv 1 \pmod 4$, $(d > 5)$ pozitif kare çarpansız bir tam sayı, $0 < b \leq 2a$ eşitsizliğini sağlayan $a, b \in \mathbb{Z}$ için $d = a^2 + b$ biçiminde tanımlı olsun. $d = a^2 + b$ şeklinde tanımlansın. $\omega_d = \dfrac{1 + \sqrt{d}}{2}$, $q_0 = \lfloor \omega_d \rfloor$ ve $\omega_R = q_0 - 1 + \omega_d$ olsun. Bu durumda Teorem 2.36' da $\omega = \omega_R$ olarak alınırsa,

$$r_0 = r_1 = a - \ell_0 = a - 2q_0 + 1$$

$$c_0 = 2, \;\; c_1 = c_{-1} = \frac{b + 2ar_0 - r_0^2}{c_0}$$

$$\ell_0 = 2q_0 - 1, \;\; \ell_i = q_i \;\; (1 \leq i \leq k_d - 1)$$

eşitlikleri elde edilir.

Teorem 2.39. [23] $d \equiv 2, 3 \pmod 4$, $(d > 5)$ pozitif kare çarpansız bir tam sayı, $\omega_d = \sqrt{d}$, $q_0 = \lfloor \omega_d \rfloor$ ve $\omega_R = q_0 + \omega_d$ olsun. Bu durumda, $\omega_d \notin R(d)$ ve $\omega_R \in R(d)$ dir.

$$\omega_R = [\overline{2q_0, q_1, ..., q_{k_d-1}}], \quad \omega_d = [q_0, \overline{q_1, ..., q_{k_d-1}, 2q_0}]$$

biçimindedir. Ayrıca k_d, ω_R' nin periyodu olmak üzere,

$$\omega_R = \frac{P_{k_d-1}\omega_R + P_{k_d-2}}{Q_{k_d-1}\omega_R + Q_{k_d-2}} = [2q_0, q_1, ..., q_{k_d-1}, \omega_R]$$

ise bu durumda $\mathbb{Q}(\sqrt{d})$' nin $\varepsilon_d = \dfrac{T_d + U_d\sqrt{d}}{2} > 1$ temel birimi $Q_{-1} = 0$, $Q_0 = 1$ ve $i \geq 1$ için $Q_{i+1} = q_{i+1}Q_i + Q_{i-1}$ olmak üzere,

$$T_d = 2q_0 Q_{k_d-1} + 2Q_{k_d-2}, \quad U_d = 2Q_{k_d-1}$$

ile belirlenir.

Teorem 2.40. [22] $d \equiv 2, 3$ (mod 4), $(d > 5)$ pozitif kare çarpansız bir tam sayısı, $0 < b \leq 2a$ eşitsizliğini sağlayan $a, b \in \mathbb{Z}$ için $d = a^2 + b$ biçiminde tanımlı olsun. $d = a^2 + b$ şeklinde tanımlansın. $\omega_d = \sqrt{d}$, $q_0 = \lfloor \omega_d \rfloor$ ve $\omega_R = q_0 + \omega_d$ olsun. Bu durumda Teorem 2.36' da $\omega = \omega_R$ olarak alınırsa,

$$r_0 = r_1 = 0$$
$$c_0 = 1, \;\; c_1 = b$$
$$\ell_0 = 2q_0, \;\; \ell_i = q_i \;\; (1 \leq i \leq k_d - 1)$$

eşitlikleri elde edilir.

Teorem 2.41. [23] $d \equiv 1$ (mod 4) pozitif kare çarpansız tam sayısı, $0 < b \leq 2a$ eşitsizliğini sağlayan $a, b \in \mathbb{Z}$ için $d = a^2 + b$ biçiminde tanımlansın. $\omega_d = \dfrac{1 + \sqrt{d}}{2}$ kuadratik irrasyonel sayısının sürekli kesre açılımında periyod $k_d = 3$ olsun. Burada;
a tek sayı ise,

$$\omega_d = \left[\frac{a+1}{2}, \overline{\ell, \ell, a}\right]$$

biçimindedir. Ayrıca $\varepsilon_d = \dfrac{T_d + U_d\sqrt{d}}{2}$ olmak üzere, $a = (\ell^2+1)r + \ell$' yi sağlayan ℓ, r pozitif tam sayısı için,

$$(T_d, U_d) = \Big((\ell^2+1)^2 r + \ell(\ell^2+3), (\ell^2+1)\Big)$$

ve

$$d = (\ell^2+1)^2 r^2 + 2\ell(\ell^2+3)r + \ell^2 + 4$$

dir. a çift sayı ise,

$$\omega_d = \left[\frac{a}{2}, \overline{1, 1, a-1}\right], (T_d, U_d) = (2a, 2)$$

ve $d = a^2 + 1$ sağlanır.

Sonuç 2.15. [23] $d \equiv 1 \pmod 4$ kare çarpansız bir tam sayı ve $k_d = 3$ ise,

$$n_d = \left\lfloor \frac{T_d}{U_d^2} \right\rfloor \neq 0$$

daima gerçeklenir ve bu durumda sınıf sayısı $h_d = 1$ olan

$$d = 17, 37, 61, 101, 197, 317, 461, 557, 667, 773, 1877$$

değerlerine karşılık gelen 11 tane $\mathbb{Q}(\sqrt{d})$ reel kuadratik sayı cismi vardır.

Teorem 2.42. [24] $d \equiv 1 \pmod 4$ sağlayan kare çarpansız bir tam sayı ve ω_d kuadratik irrasyonel sayısı $\omega_d = [a, \overline{b, c, b, 2a-1}]$ biçiminde sürekli kesir açılımına sahip olsun. (ω_d kuadratik irrasyonel sayısının sürekli kesre açılımında periyod $k_d = 4$) $d = (2a-1)^2 + 4(c(fb-c)+f)$ ve $2a - 1 = b^2cf - bc^2 + c - 2bf$ $(\exists a, b, c, f \in \mathbb{Z}^+)$ için,

$$f_d(x) = -x^2 - x + \frac{d-1}{4}$$

polinomu verilsin. Bu durumda, $h_d = 1$ olması için gerekli ve yeterli koşul aşağıdaki koşulların tümünün sağlanmasıdır.

1) $b(fb - c) + 1$ asaldır.

2) $c(fb-c)+f$ asaldır.

3) $\dfrac{f_d(x)}{b(fb-c)+1}$ polinomu $0 \leq x \leq a-1$ ve $x \equiv -2^{-1}(\text{mod } b(fb-c)+1)$' i sağlayan tüm x tam sayıları için asal ya da 1 olur.

4) $\dfrac{f_d(x)}{c(fb-c)+f}$ polinomu $0 \leq x \leq a-1$ ve $x \equiv -2^{-1}(fb-c+1)$ (mod $c(fb-c)+f$)' i sağlayan tüm x tam sayıları için bir asal sayıdır.

5) $\dfrac{f_d(x)}{c(fb-c)+f}$ polinomu $0 \leq x \leq a-1$ ve $x \equiv 2^{-1}(fb-c-1)$ (mod$(fb-c)+f$)' i sağlayan tüm x tam sayıları için asal ya da 1 olur.

6) $f_d(x)$ polinomu, $0 \leq x \leq a-1$ ve $x \not\equiv -2^{-1}(fb-c+1)$ mod($c\ (fb-c)+f$) $x \not\equiv 2^{-1}(fb-c-1)$ (mod $c\ (fb-c)+f$), $x \not\equiv -2^{-1}$(mod $b(fb-c)+1$)' i sağlayan tüm x tam sayıları için bir asaldır.

Sonuç 2.16. [24] Eğer $d \equiv 1$ (mod 8) ve ω_d kuadratik irrasyonel sayısının sürekli kesre açılımında periyod $k_d = 4$ ise h_d' nin 1 olması için gerekli ve yeterli koşul $d = 33$ olmasıdır.

Teorem 2.43. [24] $d \not\equiv 1$ (mod 4) kare çarpansız tam sayısı için periyod $k_d = 4$ ve a, b, c, f pozitif tam sayılar olmak üzere $\omega_d = [a, \overline{b, c, b, 2a}]$ ve $d = a^2 - c^2 + f(bc+1)$, $2a = b^2cf + 2fb - bc^2 - c$ ise $K = \mathbb{Q}(\sqrt{d})$ cisminin sınıf sayısı h_d' nin 1 olması için gerekli ve yeterli koşul $d = (c+2)^2 - 2$ olmasıdır.

Sonuç 2.17. [24] $d \not\equiv 1$ (mod 4) ve ω_d kuadratik irrasyonel sayısının sürekli kesre açılımında periyod $k_d = 4$ olsun. Sınıf sayısı 1 olan cisimler, d' nin uygun bir değeri hariç

$$d = 7, 14, 23, 47, 62, 167, 398$$

değerlerine karşılık gelen $\mathbb{Q}(\sqrt{d})$ reel kuadratik sayı cisimleridir.

Teorem 2.44. [18] $d = a^2 + b \equiv 1$ (mod 4) kare çarpansız tam sayısı için $\mathbb{Q}(\sqrt{d})$ cisminin ω_d kuadratik irrasyonel sayısının sürekli kesre açılımında periyod $k_d = 4$ olsun.

i) a çift sayı ise, $\ell \geq 1$ tek tam sayısı için,

$$\omega_d = \left[\frac{a}{2}, \overline{1, \ell, 1, a-1}\right]$$

$$(T_d, U_d) = (A^2r + B, A)$$

ve

$$d = A^2r^2 + 2Br + C$$

ifadeleri gerçeklenir. Burada, $A = \ell + 2$, $B = A^2 - 2$, $C = (A+2)(A-2)$ olup r, $a = Ar + A - 1$ eşitliği ile tek türlü belirli olan çift bir pozitif sayıdır.

ii) a tek sayı ise, $\ell, v \geq 1$ olacak şekilde ℓ, v tam sayıları için,

$$\omega_d = \left[\frac{a+1}{2}, \overline{\ell, v, \ell, a}\right]$$

$$(T_d, U_d) = (\ell(A+1)(Ar + s\ell + 2A), \ell(A+1))$$

ve

$$d = (A+2)(A-2)r^2 + 2s\ell(A+2)r + s(s\ell^2 + 4)$$

ifadeleri gerçeklenir. Burada, $A = v\ell + 1$ olup r ve s tam sayıları, $v = -r + \ell s$ ve $a = Ar + \ell s$ eşitlikleri ile tek türlü belirlidir.

Sonuç 2.18. [18] $d = a^2 + b \equiv 1$ (mod 4) kare çarpansız tam sayısı için $\mathbb{Q}(\sqrt{d})$ cisminin ω_d kuadratik irrasyonel sayısının sürekli kesre]açılımında periyod $k_d = 4$ ve a çift sayı olsun. Sınıf sayısı 1 olan cisimler,

$$d = 213, 717, 69, 413, 1077$$

değerlerine karşılık gelen $\mathbb{Q}(\sqrt{d})$ reel kuadratik sayı cisimleridir.

Not 2.4. [18] $d = a^2 + b \equiv 1$ (mod 4) kare çarpansız tam sayısı için $\mathbb{Q}(\sqrt{d})$ cisminin ω_d kuadratik irrasyonel sayısının sürekli kesre açılımında periyod $k_d = 4$ ve a tek sayı ise, d nin uygun bir değeri hariç hariç $d < 50.000$ sağlayan sınıf sayısı 1 olan yedi tane cisim vardır. Bunlar,

$$d = 133, 141, 573, 1293, 1397, 1757, 3053$$

değerlerine karşılık gelen $\mathbb{Q}(\sqrt{d})$ reel kuadratik sayı cisimleridir.

Teorem 2.45. [25] $d \equiv 1 \pmod 4$ olmak üzere $\mathbb{Q}(\sqrt{d})$ için $k_d = 5$ olsun. b, c uygun pozitif tam sayılar ve f sıfır olmayan bir tam sayı olmak üzere;
$r = (c^2+1)^2 - (bc^2+c+b)f$ iken
$2a-1 = b(c^2+1)^2 + c(c^2+1) - f((bc+1)^2+b^2)$ ve
$d = (2a-1)^2 + 4r$ olmak üzere

$$w_d = [a, \overline{b, c, c, b, 2a-1}]$$

biçimindedir. $s = c(c^2+1) - f(bc+1)$ olsun. Bu durumda
i) ($d \equiv 1$ (mod 8) $\Rightarrow h_d = 1) \Leftrightarrow d = 41$
ii) ($d \equiv 5$ (mod 8) $\Rightarrow h_d = 1) \Leftrightarrow$ Aşağıdaki (1)- (6) koşullarının tümünün sağlanmasıdır.

1. r asal veya $r = (bs+1)^2$ olur.

2. $bs+1$ asaldır.

3. Eğer $r = (bs+1)^2$ ise $0 \leq x \leq a-1$, $x \equiv 2^{-1}(\pm s - 1) \pmod{bs+1}$ ve $x \not\equiv 2^{-1}(\pm s - 1) \pmod{(bs+1)^2}$ için $f_d(x)/(bs+1)$ asaldır. Ayrıca $0 \leq x \leq a-1$ ve $x \equiv 2^{-1}(\pm s - 1) \pmod{(bs+1)^2}$ iken $f_d(x)/(bs+1)^2$ asal veya 1 olur.

4. Eğer $r \neq (bs+1)^2$ ise $0 \leq x \leq a-1$ ve $x \equiv 2^{-1}(\pm(br-s)-1)^{-1} \pmod{bs+1}$ için $f_d(x)/(bs+1)$ asal veya r^2 veya $(bs+1)^2$ olur.

5. Eğer $r \neq (bs+1)^2$ ise $0 \leq x \leq a-1$ ve $x \equiv 2^{-1}(\pm s - 1) \pmod{r}$ iken $f_d(x)/r$ değeri 1 veya asal veya r^2 veya $r(bs+1)$ olur.

6. $0 \leq x \leq a-1$ ve x değeri (3)-(5) deki denkliklerin hiçbirini sağlamıyorsa $f_d(x)$ asaldır.

Teorem 2.46. [18] $d = a^2 + b \equiv 1 \pmod 4$ kare çarpansız pozitif bir tam sayı ve $\mathbb{Q}(\sqrt{d})$ reel kuadratik sayı cisminin ω_d kuadratik irrasyonel sayısının sürekli kesre açılımında periyod $k_d = 5$ olsun. Bu durumda,

$$\omega_d = \begin{cases} \left[\frac{a}{2}, \overline{1, \ell, \ell, 1, a-1}\right], & \ell \geq 0 \text{ tam sayısı için, } a \text{ çift ise} \\ \\ \left[\frac{a+1}{2}, \overline{\ell, v, v, \ell, a}\right], & \ell \geq 2, v > 0 \text{ tam sayısı için, } a \text{ tek ise.} \end{cases}$$

olup $\mathbb{Q}(\sqrt{d})$ cisminin temel biriminin katsayıları olan T_d, U_d ve d için,

$$(T_d, U_d) = \begin{cases} (A^2r + B, A), & a \text{ çift ise} \\ \\ (a(A^2 + \ell^2) + 2(vA + \ell), A^2 + \ell^2), & a \text{ tek ise.} \end{cases}$$

ve

$d = A^2r^2 + 2Br + C$ eşitlikleri gerçeklenir. Burada A, B, C ve r aşağıdaki biçimde tek şekilde belirlidir.

i) a çift sayı ise,

$A = \ell^2 + 2\ell + 2, \quad B = (\ell^2 + \ell)A + \ell^2$ ve $C = (\ell^2 + 3)\ell^2 + 2(\ell^2 - 1)\ell + 1$ olur.

r, $a = Ar + \ell^2 + \ell$ eşitliği ile tek şekilde belirlenmiş negatif olmayan bir tam sayıdır.

ii) a tek sayı ise,

$A = v\ell + 1$ dir. r ve s aşağıdaki eşitlikler ile tek şekilde belirli olan pozitif tam sayılardır.

$Ar + \ell s = a, \quad \ell r - As = -v^2 - 1$ ve $B = s\ell A + 2v$, $C = s(s\ell^2 + 4)$ olur.

Sonuç 2.19. [18] $d = a^2 + b \equiv 1 \pmod 4$ kare çarpansız bir tam sayı ve $\mathbb{Q}(\sqrt{d})$ reel kuadratik sayı cisminin ω_d kuadratik irrasyonel sayısının sürekli kesre açılımında periyod $k_d = 5$ ve a çift sayı ise, sınıf sayısı 1 olan cisimler, d' nin uygun bir değeri hariç,

$$d = 41, 941, 149, 157, 269$$

değerlerine karşılık gelen $\mathbb{Q}(\sqrt{d})$ cisimleridir.

Not 2.5. [18] $d = a^2 + b \equiv 1 \pmod 4$ kare çarpansız bir tam sayı ve $\mathbb{Q}(\sqrt{d})$ reel kuadratik sayı cisminin ω_d kuadratik irrasyonel sayısının sürekli kesre açılımında periyod $k_d = 5$ ve a tek sayı ise, sınıf sayısı 1 ve $d < 50,000$ sağlayan cisimler , d' nin uygun bir değeri hariç,

$$d = 181, 397, 1013, 2477, 2693, 3533, 4253$$

değerlerine karşılık gelen $\mathbb{Q}(\sqrt{d})$ cisimleridir.

Teorem 2.47. [26] $d = a^2 + b \equiv 2 \pmod 4$,($a, b \in \mathbb{Z}$, $0 < b \leq 2a$) kare çarpansız pozitif tam sayı ve $\mathbb{Q}(\sqrt{d})$ reel kuadratik sayı cisminin ω_d kuadratik irrasyonel sayısı için

$k_d = \ell(\omega_d) = 5$ olsun. Bu durumda $\omega_d = [a, \overline{\ell_1, \ell_2, \ell_2, \ell_1, 2a}]$,

$$\omega_d = \begin{cases} [a, \overline{\ell, 2k+1, 2k+1, \ell, 2a}], & \ell_2 \geq 1 \text{ tek tam sayı, } a \text{ çift ise;} \\ \\ [a, \overline{2\ell, 2v, 2v, 2\ell, 2a}], & \ell_1, \ell_2 \geq 2 \text{ çift tam sayı, } a \text{ tek ise.} \end{cases}$$

$$(T_d, U_d) = \begin{cases} \Big((Ar + t\ell_1)(A^2 + \ell_1^2) + (A\ell_2 + \ell_1), A^2 + \ell_1\Big), & a \text{ çift ise;} \\ \\ \Big((Ar + s\frac{\ell_1}{2}(A^2 + \ell_1^2) + (A\ell_2 + \ell_1), A^2 + \ell_1\Big), & a \text{ tek ise.} \end{cases}$$

ve

$d = A^2r^2 + 2rB + C$ ifadeleri sağlanır. Burada A, B, C ve r ifadeleri tek şekilde belirlidir.

i) a çift sayı ise;

$A = \ell_1\ell_2 + 1$, $B = At\ell_1 + \ell_2$, $C = t(2 + t\ell_1^2)$,

r, $a = Ar + t\ell_1$ ile tek şekilde belirlenmiş negatif olmayan bir tam sayıdır.

i) a tek sayı ise;

$A = \ell_1\ell_2 + 1$, $B = As\ell + \ell_2$, $C = s(1 + s\ell)$,

r, $a = Ar + s\ell$ ile tek şekilde belirlenmiş negatif olmayan bir tam sayıdır.

Teorem 2.48. [7] $d = a^2 + b$, $(a, b \in \mathbb{Z}^+$, $0 < b \leq 2a)$ kare çarpansız pozitif bir tam sayı olmak üzere, $d \equiv 1 \pmod 4$, $d < 4,75.10^9$ ya da $d \equiv 2,3 \pmod 4$ $d < 1,5.10^9$ sağlansın. Sınf sayısı $h_d = 2$ ve ω_d kuadratiksayı cisminin sürekli kesre açılımında periyod uzunluğu $k_d = \ell(\omega_d) = 5$ olan tüm $\mathbb{Q}(\sqrt{d})$ reel kuadratik sayı cisimleri için

$$d \in \left\{ \begin{array}{l} 74, 218, 493, 565, 1037, 1565, 1781, 2138, 2165, 2173, \\ 3869, 5165, 5213, 5837, 6485, 8021, 10397, 14213 \end{array} \right\}$$

dır.

Teorem 2.49. [26] $d \equiv 2 \pmod 4$ kare çarpansız pozitif tam sayı ve $a, b \in \mathbb{Z}^+$, $0 < b \leq 2a$ olmak üzere $d = a^2 + b$ değerine karşılık gelen $\mathbb{Q}(\sqrt{d})$ reel kuadratik sayı cisminin ω_d

kuadratik irrasyonel sayısı için $k_d = 5$ ve $\varepsilon_d = (T_d + U_d\sqrt{d} > 1)$ olsun. Bu durumda, Teorem 2.47' de elde edilen T_d, U_d değerleri aşağıdaki koşulları sağlar.

i) $a < U_d \Leftrightarrow n_d = 0$

ii) $\omega_d = \sqrt{d} = [a, \overline{1, 1, 1, 1, 2a}] \Leftrightarrow U_d = 5$ ve $n_d = \dfrac{a-3}{5}$ (yani $m_d = 0$)

iii) $\omega_d = \sqrt{d} = [a, \overline{2, 1, 1, 2, 2a}] \Leftrightarrow U_d = 13$ ve $n_d = \dfrac{a-5}{13}$ (yani $m_d = 0$)

Sonuç 2.20. [26] $d = a^2 + b \equiv 2$ (mod 4), $(a, b \in \mathbb{Z}^+, 0 < b \leq 2a)$ kare çarpansız bir tam sayı ve $k_d = 5$ olsun. Bu durumda a bir çift tam sayı ise sınıf sayısı $h_d = 2$ olan $\mathbb{Q}(\sqrt{d})$ cisimleri Tablo 2.4 ile verilen d değerleri ile belirlenen reel kuadratik sayı cisimleridir.

a bir tek tam sayı ise sınıf sayısı $h_d = 2$ olan herhangi bir $\mathbb{Q}(\sqrt{d})$ reel kuadratik sayı cismi bulunmamaktadır.

Tablo 2.4: Periyodu $k_d = 5$ iken sınıf sayısı $h_d = 2$ olan cisimler ve yapısal değerleri

d	a	m	n_d	h_d	$\omega_d = [q_0, \overline{q_1, ...2q_0}]$
74	8	1	1	2	$[8, \overline{1, 1, 1, 1, 16}]$
218	14	2	0	2	$[14, \overline{1, 1, 3, 3, 1, 28}]$
2138	46	2	0	2	$[44, \overline{46, 4, 5, 5, 4, 92}]$

Teorem 2.50. [27] $d \equiv 1$ (mod 4) kare çarpansız, a tek ve b; $0 < b \leq 2a$ sağlayan tam sayılar olmak üzere, $d = a^2 + b$ değerine karşılık gelen $\mathbb{Q}(\sqrt{d})$ cismine ait ω_d kuadratik irrasyonel sayısı için $k_d = 6$ ise r ve s pozitif tam sayılar $\ell_1 > \ell_2$ ve $A = \ell_1\ell_2 + 1$, $a = Ar + t\ell_1$ olmak üzere,

$$\omega_d = \left[\frac{a+1}{2}, \overline{\ell_1, \ell_2, \frac{2Ar - \ell_1 s + 4\ell_2}{As - 2\ell_2{}^2}, \ell_2, \ell_1, a}\right]$$

$$T_d = a(A^2\ell_3 + 2A\ell_1) + 2\ell_2(A\ell_3 + \ell_1) + 2A,$$

$$U_d = A^2\ell_3 + 2A\ell_1,$$

$$d = (Ar + t\ell_1)^2 + 4r\ell_2 + 2s$$

biçiminde ifade edilir.

Teorem 2.51. [27] $d = a^2 + b \equiv 1 \pmod 4$ kare çarpansız bir tam sayı, a bir tek sayı ve $k_d = 6$ ise

i) $n_d = \left\lfloor \dfrac{T_d}{{U_d}^2} \right\rfloor = 0 \Rightarrow t \leq 2A$

ii) $t \leq A \Rightarrow n_d = \left\lfloor \dfrac{T_d}{{U_d}^2} \right\rfloor = 0$

koşulları sağlanır.

Sonuç 2.21. [27] $d = a^2 + b \equiv 1 \pmod 4$($a$; tek, $0 < b \leq 2a$) kare çarpansız bir tam sayı ve $k_d = 6$ olsun. Bu durumda, $n_d = 0$ sağlayan ve $h_d = 1$ veya $h_d = 2$ olan $\mathbb{Q}(\sqrt{d})$ cisimleri aşağıdaki Tablo 2.5 ile verilen d değerleri ile belirlenen reel kuadratik sayı cisimleridir.

Tablo 2.5: Periyodu $k_d = 6$ ve a tek tam sayı iken $n_d = 0$ eşitliğini sağlayan ve sınıf sayısı $h_d = 1$ veya $h_d = 2$ olan cisimler ve yapısal değerleri

d	a	m	h_d	$\omega_d = [q_0, \overline{q_1, ...2q_0 - 1}]$
57	7	2	1	$[4, \overline{3, 1, 1, 1, 3, 7}]$
309	17	5	1	$[9, \overline{3, 2, 5, 2, 3, 17}]$
381	19	5	1	$[10, \overline{3, 1, 5, 1, 3, 19}]$
545	23	4	2	$[12, \overline{5, 1, 3, 1, 5, 23}]$
749	27	1	2	$[14, \overline{5, 2, 3, 2, 5, 27}]$
1005	31	11	2	$[16, \overline{2, 1, 5, 1, 2, 31}]$
1893	43	11	1	$[22, \overline{3, 1, 13, 1, 3, 43}]$
2245	47	9	2	$[24, \overline{5, 4, 9, 4, 5, 47}]$
2453	49	13	1	$[25, \overline{3, 1, 3, 1, 3, 49}]$
2845	53	9	2	$[27, \overline{5, 1, 9, 1, 5, 53}]$
3737	61	4	2	$[31, \overline{15, 3, 1, 3, 15, 61}]$
4301	65	19	2	$[33, \overline{3, 2, 3, 2, 3, 65}]$
4605	67	29	2	$[34, \overline{2, 3, 13, 3, 2, 67}]$
10237	101	9	2	$[51, \overline{11, 4, 3, 4, 11, 101}]$
10317	101	29	2	$[51, \overline{3, 2, 33, 2, 3, 101}]$
10653	103	11	2	$[52, \overline{9, 2, 1, 2, 9, 103}]$
12845	113	19	2	$[57, \overline{5, 1, 21, 1, 5, 113}]$
13253	115	7	2	$[58, \overline{16, 2, 3, 2, 16, 115}]$
13277	115	13	2	$[58, \overline{8, 1, 5, 1, 8, 115}]$
15197	123	17	2	$[62, \overline{7, 4, 9, 4, 7, 123}]$
19445	139	31	2	$[70, \overline{4, 2, 27, 2, 4, 139}]$
21677	147	17	2	$[74, \overline{8, 1, 1, 1, 8, 147}]$

Teorem 2.52. [27] $d \equiv 1 \pmod 4$ kare çarpansız, a çift ve b; $0 < b \leq 2a$ sağlayan tam sayılar olmak üzere, $d = a^2 + b$ değerine karşılık gelen $\mathbb{Q}(\sqrt{d})$ cismine ait ω_d kuadratik irrasyonel sayısı için $k_d = 6$ ise, $A = \ell_2 + 1$, $B = 2s - r$ ($r > 1, \ell_1, \ell_2, s \in \mathbb{Z}^+$) olmak üzere,

$$\omega_d = \left[\frac{a}{2}, \overline{1, \ell_2, \frac{A(r+1) - B}{AB - 1}, \ell_2, 1, a - 1}\right]$$

$$T_d = (A(r+1) + 2B)(A^2\ell_3 + 2A) + 2(A - 1)(A\ell_3 + 1) + 2A,$$

$$U_d = A^2\ell_3 + 2A,$$

$$d = (A(r+1) + B - 1)^2 + ((A - 3)(r + 1) + 4s) + 1$$

biçiminde ifade edilir.

Teorem 2.53. [27] $d = a^2 + b \equiv 1 \pmod 4$ kare çarpansız bir tam sayı, a bir çift tam sayı ve $k_d = 6$ ise

i) $n_d = \left\lfloor \frac{T_d}{U_d{}^2} \right\rfloor = 0 \Rightarrow A + r \geq 2s - 2$

ii) $A + r \geq 2s \Rightarrow n_d = \left\lfloor \frac{T_d}{U_d{}^2} \right\rfloor = 0$

koşulları sağlanır.

Sonuç 2.22. [27] $d = a^2 + b \equiv 1 \pmod 4$($a$; çift, $0 < b \leq 2a$) kare çarpansız bir tam sayı ve $k_d = 6$ olsun. Bu durumda, $n_d = 0$ eşitliğini sağlayan ve $h_d = 1$ veya $h_d = 2$ olan $\mathbb{Q}(\sqrt{d})$ cisimleri aşağıdaki Tablo 2.6 ile verilen d değerleri ile belirlenen reel kuadratik sayı cisimleridir.

Tablo 2.6: Periyodu $k_d = 6$ ve a çift tam sayı iken $n_d = 0$ eşitliğini sağlayan ve sınıf sayısı $h_d = 1$ veya $h_d = 2$ olan cisimler ve yapısal değerleri

d	a	m	h_d	$\omega_d = [q_0, \overline{q_1, ...2q_0 - 1}]$
805	28	5	2	$[14, \overline{1, 2, 5, 2, 1, 27}]$
3405	58	10	2	$[29, \overline{1, 2, 11, 2, 1, 57}]$
7805	88	15	2	$[44, \overline{1, 2, 17, 2, 1, 87}]$
14573	120	43	2	$[60, \overline{1, 6, 9, 6, 1, 119}]$

Not 2.6. Aşağıdaki tablo ile verilen değerler Teorem 2.52' yi gerçekleyen $n_d \neq 0$ olan $h_d = 1$ veya $h_d = 2$ sağlayan reel kuadratik sayı cisimlerine karşılık gelen değerlerdir.

Tablo 2.7: Periyodu $k_d = 6$ ve a çift tam sayı iken $n_d \neq 0$ eşitsizliğini sağlayan ve sınıf sayısı $h_d = 1$ veya $h_d = 2$ olan cisimler ve yapısal değerleri

d	a	m	h_d	$\omega_d = [q_0, \overline{q_1, ...2q_0 - 1}]$
341	18	4	1	$[9, \overline{1, 2, 1, 2, 1, 17}]$
1653	40	13	2	$[20, \overline{1, 4, 1, 4, 1, 39}]$
3893	62	12	2	$[31, \overline{1, 2, 3, 2, 1, 61}]$
11837	108	43	2	$[54, \overline{1, 8, 1, 8, 1, 107}]$

Teorem 2.54. [27] $d = a^2 + b = a^2 + 4m + 2$, $d \equiv 2, 3 \pmod 4$ kare çarpansız bir tam sayı ve $k_d = 6$ ise $A = \ell_1\ell_2 + 1$, $(\ell_2, \ell_1, m, r, t \neq 0\ (\ell_1 > r, r \neq 1) \in \mathbb{Z}^+)$, olmak üzere;

$$\omega_d = \left[a, \overline{\ell_1, \ell_2, \frac{2Ar - 2t\ell_1 + 2\ell_2}{2At - \ell_2^2}, \ell_2, 1, 2a}\right]$$

$$T_d = (Ar + t\ell_1)(A^2\ell_3 + 2A\ell_1) + (A\ell_3\ell_2 + 2A - 1),$$

$$U_d = A^2\ell_3 + 2A\ell_1,$$

$$d = (Ar + t\ell_1)^2 + 2r\ell_2 + 2t$$

biçimindedir.

Teorem 2.55. [27] $d = a^2+b \equiv 2, 3 \pmod 4$ kare çarpansız bir tam sayı iken $b \equiv 2 \pmod 4$ ve $k_d = 6$ ise;

i) $n_d = 0 \Rightarrow t \leq A$

ii) $2t \leq A \Rightarrow n_d = 0$

koşulları sağlanır.

Sonuç 2.23. [27] $d = a^2 + b = a^2 + 4m + 2$, $d \equiv 2, 3$ (mod 4) olsun. $k_d = 6$ ise, $n_d = 0$ olan ve $h_d = 1$ veya $h_d = 2$ sağlayan cisimler Tablo 2.8 ile verilen d değerlerine karşılık gelen reel kuadratik sayı cisimleridir.

Tablo 2.8: Periyodu $k_d = 6$ iken $n_d = 0$ eşitliğini sağlayan ve sınıf sayısı $h_d = 1$ veya $h_d = 2$ olan cisimler ve yapısal değerleri

d	a	m	h_d	$\omega_d = [q_0, \overline{q_1, ...2q_0}]$
22	4	1	1	$[4, \overline{1, 2, 4, 2, 1, 8}]$
59	7	2	1	$[7, \overline{1, 2, 7, 2, 1, 14}]$
70	8	1	2	$[8, \overline{2, 1, 2, 1, 2, 16}]$
114	10	3	2	$[10, \overline{1, 2, 10, 2, 1, 20}]$
183	13	3	2	$[13, \overline{1, 1, 8, 1, 1, 26}]$
187	13	4	2	$[13, \overline{1, 2, 13, 1, 1, 26}]$
278	16	5	1	$[16, \overline{1, 2, 16, 2, 1, 32}]$
303	17	3	2	$[34, \overline{2, 2, 5, 2, 2, 34}]$
371	19	2	2	$[19, \overline{3, 1, 4, 1, 3, 38}]$
418	20	4	2	$[20, \overline{2, 4, 2, 4, 2, 40}]$
518	22	8	2	$[22, \overline{1, 3, 6, 3, 1, 44}]$
590	24	3	2	$[24, \overline{3, 2, 4, 2, 3, 48}]$
602	24	6	2	$[24, \overline{1, 1, 6, 1, 1, 48}]$
618	24	10	2	$[24, \overline{1, 6, 8, 6, 1, 48}]$
822	28	9	2	$[28, \overline{1, 2, 28, 2, 1, 56}]$
1007	31	11	2	$[31, \overline{1, 2, 1, 2, 1, 62}]$
1034	32	2	2	$[32, \overline{6, 2, 2, 2, 6, 62}]$
1202	34	11	2	$[34, \overline{1, 2, 34, 2, 1, 68}]$
1707	41	6	2	$[41, \overline{3, 6, 41, 6, 3, 82}]$
1790	42	6	2	$[42, \overline{3, 4, 8, 4, 3, 84}]$
2103	45	19	2	$[45, \overline{1, 6, 15, 6, 1, 90}]$
3638	60	9	2	$[60, \overline{3, 6, 60, 6, 3, 120}]$

Burada Karadeniz Gözeri [28]' den faydalanılarak Bulgular bölümünde yer verilen sonuçlarda sıkça kullanılan teorem ve bilgilere yer verilmiştir.
Herhangi bir pozitif kare çarpansız d tam sayısını a ve b, $0 < b \leq 2a$ eşitsizliğini gerçekleyen tam sayılar olmak üzere, $d = a^2 + b$ şeklinde yazabiliriz. Burada $\sqrt{d} - 1 < a < \sqrt{d}$ eşitsizliğini gerçeklediğinden bu yazılıştaki a ve b tek türlüdür. d' nin bu formdaki yazılışı $\mathbb{Q}(\sqrt{d})$ kuadratik sayı cisminin O_K tamlık tabanındaki ω_d kuadratik irrasyonel sayısının sürekli kesir açılımının belirlenmesinde kolaylık sağlamaktadır.

D ile tüm pozitif kare çarpansız tam sayıların kümesini, D_t^k ile de $b \equiv t \pmod 8$ ve $d \equiv k \pmod 8$ olan tüm pozitif kare çarpansız tam sayıların kümesini ifade edelim. Bu durumda,

$$D_t^k = \{d \in D \mid d \equiv k \ (\text{mod } 8), b \equiv t \ (\text{mod } 8)\}$$

şeklinde yazarız.

Not 2.7. $d \equiv 1 \pmod 4$ ise $d \equiv 1 \pmod 8$ ya da $d \equiv 5 \pmod 8$ olduğu açıktır.
$d \equiv 1 \pmod 8$ durumunda, $b \equiv 0 \pmod 8$, $b \equiv 1 \pmod 8$ ya da $b \equiv 5 \pmod 8$ durumları söz konusudur. $d \equiv 1 \pmod 8$ olacak şekildeki tüm pozitif kare çarpansız tam sayıların kümesi $D_0^1 \cup D_1^1 \cup D_5^1$ olur.
$d \equiv 5 \pmod 8$ durumunda, $b \equiv 1 \pmod 8$, $b \equiv 4 \pmod 8$ ya da $b \equiv 5 \pmod 8$ durumları söz konusudur. $d \equiv 5 \pmod 8$ olacak şekildeki tüm pozitif kare çarpansız tam sayıların kümesi $D_1^5 \cup D_4^5 \cup D_5^5$ olur.

$d = a^2 + b$ durumunda a tam sayısının çift ve tek olması durumunda d' nin ait olduğu kümeleri belirleyebiliriz.

Not 2.8. d kare çarpansız bir tam sayı olsun.
Eğer a çift bir tam sayı ise $b \equiv 1 \pmod 4$ olduğundan, $b \equiv 1 \pmod 8$ ya da $b \equiv 5 \pmod 8$ olur. Bu nedenle a' nın çift bir tam sayı olması durumunda, d' nin ait olduğu küme $D_1^1 \cup D_1^5 \cup D_5^1 \cup D_5^5$ olur.
Eğer a tek bir tam sayı ise $b \equiv 0 \pmod 4$ olduğundan, $b \equiv 0 \pmod 8$ ya da $b \equiv 4 \pmod 8$ olur. Bu nedenle a' nın tek bir tam sayı olması durumunda, d' nin ait olduğu küme $D_0^1 \cup D_4^5$ olur.

Not 2.9. $d \equiv 1 \pmod 4$ durumunda d' nin ait olduğu kümeler $D_0^1, D_1^1, D_5^1, D_1^5, D_4^5, D_5^5$ olup bu kümeler aşağıdaki şekilde ifade edilir.

$D_0^1 = \{d \in D \mid d = a^2 + 8m, a \equiv 1 \pmod 2), 0 < 4m < a\}$

$D_1^1 = \{d \in D \mid d = a^2 + 8m + 1, a \equiv 0 \pmod 4), 0 \leq 4m < a\}$

$D_5^1 = \{d \in D \mid d = a^2 + 8m + 5, a \equiv 2 \pmod 4), 0 \leq 4m < a - 2\}$

$D_1^5 = \{d \in D \mid d = a^2 + 8m + 1, a \equiv 2 \pmod 4), 0 < 4m < a\}$

$D_4^5 = \{d \in D \mid d = a^2 + 8m + 4, a \equiv 1 \pmod 4), 0 < 4m < a - 2\}$

$D_5^5 = \{d \in D \mid d = a^2 + 8m, a \equiv 0 \pmod 4), 0 < 4m < a\}$

Teorem 2.56. [28, 29] $d = a^2 + b \equiv 1 \pmod 4$ $(a, b \in \mathbb{Z}; 0 < b \leq 2a)$, kare çarpansız bir tam sayı ve d' nin belirlediği $\mathbb{Q}(\sqrt{d})$ kuadratik sayı cisminin tamlık taban elemanı olan $\omega_d = \dfrac{1+\sqrt{d}}{2}$ kuadratik irrasyonel sayısının periyodu $k_d = 7$ olsun. Eğer a çift ise;

$$\omega_d = \left[\frac{a}{2}, \overline{1, \ell_2, \ell_3, \ell_3, \ell_2, 1, a-1}\right], 1 \leq \ell_i \leq a, (i = 2, 3)$$

olup temel birimin katsayıları olan T_d, U_d değerleri ve d tam sayısı,

$$(T_d, U_d) = \Big(A(AC + D) + B^2(C + E), A^2 + B^2\Big),$$

$$d = C^2 + 2rF + G$$

olarak ifade edilir. Burada A, B, C, D, E, F ve G değerleri de aşağıdaki şekilde tek türlü belirlidir:

$A = \ell_2\ell_3 + \ell_3 + 1, \quad B = \ell_2 + 1, \quad C = Ar + s, \quad D = (A+2)\ell_2\ell_3 + \ell_2^2 + 1, \quad E = \ell_3 + 1,$

$F = D - AE, \qquad G = 2CE + (A - \ell_3)^2 + (B-2)^2 + (B-1)^2.$

Ayrıca, r ve s pozitif tam sayıları aşağıdaki eşitliklerle tek türlü belirlidir:

$a = A(r+1) + s - \ell_3, \quad \ell_2(\ell_3 - B) + 1 = rB^2 - sA.$

Teorem 2.57. [28] $d = a^2 + b \equiv 1 \pmod 4$ $(a, b \in \mathbb{Z}; 0 < b \leq 2a)$, kare çarpansız bir tam sayı ve d' nin belirlediği $\mathbb{Q}(\sqrt{d})$ kuadratik sayı cisminin tamlık taban elemanı olan $\omega_d = \dfrac{1+\sqrt{d}}{2}$ kuadratik irrasyonel sayısının periyodu $k_d = 7$ olsun. Eğer a tek ise;

$$\omega_d = \left[\frac{a+1}{2}, \overline{\ell_1, \ell_2, \ell_3, \ell_3, \ell_2, \ell_1, a}\right], 1 \leq \ell_i \leq a, (i = 1, 2, 3)$$

olup temel birimin katsayıları olan T_d, U_d değerleri ve d tam sayısı,

$$(T_d, U_d) = \Big(a(A^2 + B^2) + 2(A\ell_2 + BC), A^2 + B^2\Big),$$

$$d = A^2 r^2 + 2rD + E$$

olarak ifade edilir. Burada A, B, C, D ve E değerleri de aşağıdaki şekilde tek türlü belirlidir:

$A = \ell_1\ell_2 + 1, \quad B = \ell_1 + A\ell_3, \quad C = \ell_2\ell_3 + 1, \quad D = A\ell_1 s + 2\ell_2, \quad E = \ell_1^2 s^2 + 4s.$

Ayrıca, r ve s pozitif tam sayıları aşağıdaki eşitliklerle tek türlü belirlidir:

$a = Ar + \ell_1 s, \quad -\ell_2^2 - C^2 = Br - (B\ell_3 + A)s.$

Teorem 2.58. [29, 30] $d = a^2 + b \equiv 2$ (mod 4) $(a, b \in \mathbb{Z}; 0 < b \leq 2a)$, kare çarpansız bir tam sayı ve d' nin belirlediği $\mathbb{Q}(\sqrt{d})$ kuadratik sayı cisminin tamlık taban elemanı olan $\omega_d = \sqrt{d}$ kuadratik irrasyonel sayısının periyodu $k_d = 7$ olsun. Eğer $b \equiv 1$ (mod 4)ise;

$$\omega_d = \Big[a, \overline{\ell_1, \ell_2, \ell_3, \ell_3, \ell_2, \ell_1, 2a}\Big], 1 \leq \ell_i \leq a, (i = 1, 2, 3)$$

olup $\mathbb{Q}(\sqrt{d})$ kuadratik sayı cisminin ε_d temel biriminin katsayıları olan T_d, U_d değerleri ve d tam sayısı,

$$(T_d, U_d) = \Big(2[a(A^2 + B^2) + BC + A\ell_2], 2(A^2 + B^2)\Big),$$

$$d = A^2 r^2 + 2rD + E$$

olarak ifade edilir. Burada A, B, C, D ve E değerleri de aşağıdaki şekilde tek türlü belirlidir:

$A = \ell_1\ell_2 + 1, \quad B = \ell_1 + A\ell_3, \quad C = \ell_2\ell_3 + 1, \quad D = A\ell_1 s + \ell_2, \quad E = \ell_1^2 s^2 + 2s + 1.$

Ayrıca, r ve s pozitif tam sayıları aşağıdaki eşitliklerle tek türlü belirlidir:

$a = Ar + \ell_1 s, \quad A^2 + B^2 - C^2 - \ell_2^2 = 2rB - 2s(A + B\ell_3).$

Teorem 2.59. [30] $d = a^2 + b \equiv 2, 3$ (mod 4), kare çarpansız bir tam sayı ve d' nin belirlediği $\mathbb{Q}(\sqrt{d})$ kuadratik sayı cisminin tamlık taban elemanı olan $\omega_d = \sqrt{d}$ kuadratik irrasyonel sayısının periyodu $k_d = 7$ olsun. Eğer $b \equiv 2 \pmod 4$ ise;

$$\omega_d = \left[a, \overline{\ell_1, \ell_2, \ell_3, \ell_3, \ell_2, \ell_1, 2a}\right], 1 \leq \ell_i \leq a, (i = 1, 2, 3)$$

olup $\mathbb{Q}(\sqrt{d})$ kuadratik sayı cisminin ε_d temel biriminin katsayıları olan T_d, U_d değerleri ve d tam sayısı,

$$(T_d, U_d) = \Big(2[a(A^2 + B^2) + BC + A\ell_2], 2(A^2 + B^2)\Big),$$

$$d = A^2 r^2 + 2rD + E$$

olarak ifade edilir. Burada A, B, C, D ve E değerleri de aşağıdaki şekilde tek türlü belirlidir:

$A = \ell_1\ell_2 + 1, \quad B = \ell_1 + A\ell_3, \quad C = \ell_2\ell_3 + 1, \quad D = A\ell_1 s + 2\ell_2, \quad E = \ell_1^2 s^2 + 2s.$

Ayrıca, r ve s pozitif tam sayıları aşağıdaki eşitliklerle tek türlü belirlidir:

$a = Ar + \ell_1 s, \quad -\ell_2[\ell_2 + \ell_3(C + 1)] - 1 = 2r(\ell_2 + A\ell_3) - 2s(A + B\ell_3).$

Teorem 2.60. [30] $d = a^2 + b \equiv 3 \pmod 4$, kare çarpansız bir tam sayı ve d' nin belirlediği $\mathbb{Q}(\sqrt{d})$ kuadratik sayı cisminin tamlık taban elemanı olan $\omega_d = \sqrt{d}$ kuadratik irrasyonel sayısının periyodu $k_d = 7$ olsun. Eğer $b \equiv 3 \pmod 4$ ise;

$$\omega_d = \left[a, \overline{\ell_1, \ell_2, \ell_3, \ell_3, \ell_2, \ell_1, 2a}\right], 1 \leq \ell_i \leq a, (i = 1, 2, 3)$$

olup $\mathbb{Q}(\sqrt{d})$ kuadratik sayı cisminin ε_d temel biriminin katsayıları olan T_d, U_d değerleri ve d tam sayısı,

$$(T_d, U_d) = \Big(2[a(A^2 + B^2) + BC + A\ell_2], 2(A^2 + B^2)\Big),$$

$$d = A^2 r^2 + 2rD + E$$

olarak ifade edilir. Burada A, B, C, D ve E değerleri de aşağıdaki şekilde tek türlü belirlidir:

$A = \ell_1\ell_2 + 1, \quad B = \ell_1 + A\ell_3, \quad C = \ell_2\ell_3 + 1, \quad D = A\ell_1 s + 2\ell_2, \quad E = \ell_1^2 s^2 + 2s + 3.$

Ayrıca, r ve s pozitif tam sayıları aşağıdaki eşitliklerle tek türlü belirlidir:

$a = Ar + \ell_1 s, \quad -\ell_2[\ell_2 + \ell_3(C + 1)] - 1 = 2r(\ell_2 + A\ell_3) - 2s(A + B\ell_3).$

3. MALZEME VE YÖNTEM

Bu tez çalışması hazırlanırken öncelikle cebir ve sayılar teorisindeki cisim genişlemeleri ile ilgili bilinen temel kavramlar verilmiştir. Çalışmanın temel inceleme konusunuve amacını oluşturan reel kuadratik sayı cisimlerinin temel birimleri, sınıf sayıları ve Yokoi tarafından tanımlanmış olan invaryant değerler çeşitli kaynaklardan derlenmiştir. Bu amaç doğrultusunda ele alınan bu konularla ilgili daha önce yapılmış olan çalışmalar, kronolojik olarak verilmiştir. Kullanılan kaynaklar ise kitaplar, araştırma makaleleri ve bu konu ile ilgili yapılmış olan doktora tezleridir.

Bu tez çalışmasının oluşturulma sürecinde kullanılmış olan tüm bu bilimsel çalışmalar kaynaklar bölümünde verilmiş olup faydalanılan bu kaynaklar üniversitemizin kütüphanesi, diğer üniversitelerin kütüphaneleri ve "web of science" aracılığı ile elde edilmiştir.

Tezin döküman haline getirilmesinde Latex programı kullanılmıştır.

4. BULGULAR

Bu bölümde, ikinci bölümde detaylı olarak ele alınan sürekli kesirler, temel birimler ve Yokoi invaryant değerleri ile ilgili teoremlerden çıkarılabilecek bazı sonuçlara yer verilecektir. Sonuçlar tablolar ile desteklenmiştir.

Sonuç 4.1. $d = a^2 + b \equiv 1 \pmod 4 (a, b \in \mathbb{Z} : 0 < b \leq 2a)$ kare çarpansız bir tam sayı, a çift bir tam sayı ve $k_d = 7$ ise;

i) $n_d = 0 \Rightarrow U_d + \ell_2\ell_3 + 1 > a$

ii) $U_d > a + \ell_3 + 2$ ve $\ell_3 \geq \ell_2 \Rightarrow n_d = 0$

koşulları sağlanır.

İspat: $d = a^2 + b \equiv 1 \pmod 4$ kare çarpansız bir tam sayı, a çift bir tam sayı ve $k_d = 7$ ise Teorem 2.56' da elde edilmiş olan $\mathbb{Q}(\sqrt{d})$ reel kuadratik sayı cisminin temel birimi ε_d' nin T_d ve U_d katsayıları ile aşağıdaki (4.1) ifadesi kullanılarak ispat tamamlanır.

$$n_d = \left\lfloor \frac{T_d}{{U_d}^2} \right\rfloor = 0 \Leftrightarrow \frac{T_d}{{U_d}^2} < 1 \Leftrightarrow {U_d}^2 - T_d > 0 \tag{4.1}$$

i) $n_d = 0$ olsun. Eğer $n_d = 0$ ise ${U_d}^2 - T_d > 0$ dır. Teorem 2.56' daki T_d ve U_d değerleri kullanılırsa;

$$\begin{aligned} {U_d}^2 - T_d > 0 \quad &\Rightarrow \quad (A^2 + B^2)^2 - [A(AC + D) + B^2(C + E)] > 0 \\ &\Rightarrow \quad (A^2 + B^2)^2 > [(A^2 + B^2)C + AD + B^2E] \\ &\Rightarrow \quad (A^2 + B^2)^2 > (A^2 + B^2)C \\ &\Rightarrow \quad (A^2 + B^2) > C \\ &\Rightarrow \quad U_d > C. \end{aligned}$$

Böylece

$${U_d}^2 - T_d > 0 \quad \Rightarrow \quad U_d > C \tag{4.2}$$

elde edilir. Teorem 2.56' daki $C = Ar + s$ ve $a = A(r+1) + s - \ell_3$ ifadeleri kullanılırsa $C = a - \ell_2\ell_3 - 1$ eşitliği elde edilir. Eğer elde ettiğimiz bu eşitliği (4.2)' de yerine yazarsak

$$\begin{aligned} {U_d}^2 - T_d > 0 \quad &\Rightarrow \quad U_d > a - \ell_2\ell_3 - 1 \\ &\Rightarrow \quad U_d + \ell_2\ell_3 + 1 > a \end{aligned}$$

olarak elde ederiz.

ii) $U_d > a + \ell_3 + 2$ ve $\ell_3 \geq \ell_2$ olsun. Bu durumda $n_d = 0$ olduğunu gösterelim.

$$n_d = \left\lfloor \frac{T_d}{{U_d}^2} \right\rfloor = 0 \Leftrightarrow {U_d}^2 - T_d > 0 \quad \text{olmalıdır.} \tag{4.3}$$

Eğer Teorem 2.56' da daha önce elde edilmiş temel birimin katsayıları T_d ve U_d ifadeleri kullanılır ve Teorem 2.56' daki $C = Ar+s$ ve $a = A(r+1)+s-\ell_3$ eşitlikleri kullanılarak elde edilen $C = a - \ell_2\ell_3 - 1$ ifadesi (4.5)' de yerine yazılırsa;

$$\begin{aligned} {U_d}^2 - T_d &= (A^2 + B^2)^2 - [(A^2 + B^2)C + AD - B^2E] & (4.4) \\ &= U_d[U_d - C] - AD - B^2E & (4.5) \\ &= U_d[U_d - (a - \ell_2\ell_3 - 1)] - AD - B^2E & (4.6) \\ &= U_d[\underbrace{U_d - a + \ell_2\ell_3 + 1}_{K}] - AD - B^2E. & (4.7) \end{aligned}$$

$K = U_d - a + \ell_2\ell_3 + 1$ olsun. $U_d > a + \ell_3 + 2$ varsayımından $U_d > a$ elde edilir. Buradan $K = U_d - a + \ell_2\ell_3 + 1 > U_d - a > 0$ bulunur. O halde $K > 0$ olduğu gösterilmiş olur. Şimdi $U_dK - AD - B^2E > 0$ olduğunu göstermeliyiz. $U_d = A^2 + B^2$ olduğunu biliyoruz. ${U_d}^2 - T_d = (A^2 + B^2)K - AD - B^2E > 0$ olduğunu göstermeliyiz.

$$\begin{aligned} {U_d}^2 - T_d &= (A^2 + B^2)K - AD - B^2E \\ &= A\underbrace{(AK - D)}_{II} + B^2\underbrace{(K - E)}_{I}. \end{aligned} \tag{4.8}$$

I: $K - E > 0$ oluşu: Daha önce elde edilen $U_d - a > 0$ bilgisi ile birlikte Teorem 2.56' daki $E = \ell_3 + 1$ değeri ve $\ell_2 \geq 1$ oluşu kullanılırsa;

$$K - E = U_d + \ell_2\ell_3 + 1 - a - \ell_3 - 1 \geq U_d + \ell_3 - a - \ell_3 = U_d - a > 0.$$

Böylece

$$K - E > 0 \tag{4.9}$$

olarak bulunur.

II: $AK - D > 0$ oluşu: Teorem 2.56' daki $A = \ell_2\ell_3 + \ell_3 + 1$ ve $D = (A+2)\ell_2\ell_3 + {\ell_2}^2 + 1$ değerleri kullanılır ve (4.12) ifadesinde (4.9)' da elde edilen ifadeden ötürü $K > E = \ell_3 + 1$ alınırsa;

$$\begin{aligned} AK - D &= (\ell_2\ell_3 + \ell_3 + 1)K - (A+2)\ell_2\ell_3 - \ell_2^2 - 1 && (4.10)\\ &= \ell_2\ell_3K + (\ell_3+1)K - (A+2)\ell_2\ell_3 - \ell_2^2 - 1 \underbrace{-2\ell_2 + 2\ell_2} && (4.11)\\ &= \ell_2\ell_3[K - (A+2)] + (\ell_3+1)K - (\ell_2+1)^2 + 2\ell_2 && (4.12)\\ &> \ell_2\ell_3[K - (A+2)] + (\ell_3+1)^2 - (\ell_2+1)^2 && (4.13) \end{aligned}$$

olarak elde edilir. $K - (A+2) = U_d + \ell_2\ell_3 + 1 - a - \ell_2\ell_3 - \ell_3 - 1 - 2 = U_d - a - \ell_3 - 2$ olup $U_d > a + \ell_3 + 2$ varsayımı gereği $K - (A+2) > 0$ olarak bulunur. Ayrıca $\ell_3 \geq \ell_2$ varsayımı kullanılırsa $(\ell_3 + 1)^2 - (\ell_2 + 1)^2 \geq 0$ olarak elde edilir. Buradan da (4.13) ifadesinin pozitif olduğu görülür. Yani $AK - D > 0$ olarak bulunur. $K - E > 0$ ve $AK - D > 0$ oluşu kullanılırsa (4.8) ifadesi ${U_d}^2 - T_d > 0$ olarak bulunur. Ayrıca $n_d = \left\lfloor \frac{T_d}{{U_d}^2} \right\rfloor = 0 \Leftrightarrow {U_d}^2 - T_d > 0$ ifadesi dikkate alınırsa; ${U_d}^2 - T_d > 0$ olarak elde edildiğinden $n_d = 0$ olduğu görülür. O halde ispatımız tamamlanmış olur. $\square$

$d = a^2 + b \equiv 1 \pmod 4 (a, b \in \mathbb{Z} : 0 < b \leq 2a)$ kare çarpansız bir tam sayı, a çift bir tam sayı ve $k_d = 7$ olsun. Bu durumda $n_d = 0$ eşitliğini sağlayan ve $h_d = 1$ veya $h_d = 2$ olan $\mathbb{Q}(\sqrt{d})$ cisimleri Tablo 4.1 ile verilen d değerleri ile belirlenen reel kuadratik sayı cisimleridir.

Tablo 4.1' de; * ile Sonuç 4.1 deki yalnızca i) koşulunu sağlayan d değerleri,

** ile ise Sonuç 4.1 deki i) ve ii) koşullarını sağlayan d değerleri ifade edilir.

Tablo 4.1: Periyodu $k_d = 7$ ve a çift tam sayı iken $n_d = 0$ eşitliğini sağlayan ve sınıf sayısı $h_d = 1$ veya $h_d = 2$ olan cisimler ve yapısal değerleri

d	T_d	U_d	h_d	a	$\omega_d = \left[\frac{a}{2}, \overline{1, \ell_2, \ell_3, \ell_3, \ell_2, 1, a-1}\right]$
* 109	261	25	1	10	$[5, \overline{1, 2, 1, 1, 2, 1, 9}]$
* 113	1552	146	1	10	$[5, \overline{1, 4, 2, 2, 4, 1, 9}]$
* 509	925	39	1	22	$[11, \overline{1, 3, 1, 1, 3, 1, 21}]$
* 1493	2357	61	1	38	$[19, \overline{1, 4, 1, 1, 4, 1, 37}]$
* 1997	9161	205	1	44	$[22, \overline{1, 5, 2, 2, 5, 1, 43}]$
** 2309	17539	365	1	48	$[24, \overline{1, 1, 9, 9, 1, 1, 47}]$
** 4973	45203	641	1	70	$[35, \overline{1, 3, 6, 6, 3, 1, 69}]$
* 685	759	29	2	26	$[13, \overline{1, 1, 2, 2, 1, 1, 25}]$
* 949	32685	1061	2	30	$[15, \overline{1, 9, 3, 3, 9, 1, 29}]$
** 1165	1809	53	2	34	$[17, \overline{1, 1, 3, 3, 1, 1, 33}]$
**12557	32833	293	2	112	$[56, \overline{1, 1, 8, 8, 1, 1, 111}]$
* 17141	2335285	17837	2	130	$[65, \overline{1, 25, 5, 5, 25, 1, 129}]$

Sonuç 4.2. $d = a^2 + b \equiv 1 \pmod 4 (a, b \in \mathbb{Z} : 0 < b \leq 2a)$ kare çarpansız bir tam sayı, a tek bir tam sayı ve $k_d = 7$ ise;

i) $n_d = 0 \Rightarrow U_d > a$

ii) $U_d > a$ ve $\ell_1 \neq 1 \Rightarrow n_d = 0$

koşulları sağlanır.

İspat: $d = a^2 + b \equiv 1 \pmod 4$ kare çarpansız bir tam sayı, a tek bir tam sayı ve $k_d = 7$ ise Teorem 2.57' de elde edilmiş olan temel birim ε_d' nin T_d ve U_d katsayıları ile aşağıdaki (4.14) ifadesi kullanılarak ispat tamamlanır.

$$n_d = \left\lfloor \frac{T_d}{{U_d}^2} \right\rfloor = 0 \Leftrightarrow \frac{T_d}{{U_d}^2} < 1 \Leftrightarrow {U_d}^2 - T_d > 0 \tag{4.14}$$

i) $n_d = 0$ olsun. Eğer $n_d = 0$ ise ${U_d}^2 - T_d > 0$ dır. Teorem 2.57' deki T_d ve U_d değerleri kullanılırsa;

$$\begin{aligned} {U_d}^2 - T_d > 0 &\Rightarrow (A^2 + B^2)^2 - a(A^2 + B^2) - 2(A\ell_2 + BC) > 0 \\ &\Rightarrow (A^2 + B^2)^2 > a(A^2 + B^2) + 2(A\ell_2 + BC) \\ &\Rightarrow (A^2 + B^2)^2 > a(A^2 + B^2) \\ &\Rightarrow U_d > a \end{aligned}$$

olarak elde edilir. Yani $n_d = 0$ ise $U_d > a$ dır.

ii) $U_d > a$ ve $\ell_1 \neq 1$ olsun. $n_d = 0$ olduğunu göstermeliyiz.

$$n_d = \left\lfloor \frac{T_d}{{U_d}^2} \right\rfloor = 0 \Leftrightarrow {U_d}^2 - T_d > 0 \tag{4.15}$$

olmalıdır. Eğer Teorem 2.57' de daha önce elde edilmiş T_d ve U_d ifadeleri kullanılırsa;

$$\begin{aligned} {U_d}^2 - T_d &= (A^2+B^2)^2 - a(A^2+B^2) - 2A\ell_2 - 2BC \\ &= (A^2+B^2)(A^2+B^2-a) - 2A\ell_2 - BC \\ &= (A^2+B^2)(U_d - a) - 2A\ell_2 - 2BC. \end{aligned} \tag{4.16}$$

$U_d > a$ varsayımı gereği $U_d - a > 0$ olduğunu biliyoruz. Eğer (4.16)' da $U_d - a = 1$ olarak alır ve en küçük pozitif tam sayı için (4.16)' daki ifadenin pozitif olduğunu gösterirsek $U_d - a > 1$ olan her tam sayı için de ${U_d}^2 - T_d > 0$ olur ve ispat tamamlanmış olur. Bu durumda

$$\begin{aligned} {U_d}^2 - T_d &= (A^2+B^2)(U_d - a) - 2A\ell_2 - 2BC \\ &= (A^2+B^2).1 - 2A\ell_2 - 2BC \\ &= A(A-2\ell_2) + B(B-2C) \end{aligned} \tag{4.17}$$

olarak elde edilir. Teorem 2.57' deki A, B ve C değerleri ile birlikte $\ell_1 \neq 1$ varsayımı kullanılırsa;

$$\begin{aligned} A - 2\ell_2 &= \ell_1\ell_2 + 1 - 2\ell_2 \\ &= \ell_2(\ell_1 - 2) + 1 > 0 \end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned} B - 2C &= \ell_1 + (\ell_1\ell_2 + 1)\ell_3 - 2\ell_2\ell_3 - 2 \\ &= \ell_2\ell_3(\ell_1 - 2) + \ell_1 + \ell_3 - 2 > 0 \end{aligned}$$

olarak bulunur. (4.17)' de $A - 2\ell_2 > 0$ ve $B - 2C > 0$ oluşu kullanılırsa ${U_d}^2 - T_d > 0$ olur. (4.15)' de ${U_d}^2 - T_d > 0$ olduğundan $n_d = 0$ olarak bulunur. O halde ispatımız tamamlanmış olur. □

$d = a^2 + b \equiv 1 \pmod 4 (a, b \in \mathbb{Z} : 0 < b \leq 2a)$ kare çarpansız bir tam sayı, a tek bir tam sayı ve $k_d = 7$ olsun. Bu durumda $n_d = 0$ sağlayan ve $h_d = 1$ veya $h_d = 2$ olan $\mathbb{Q}(\sqrt{d})$ cisimleri Tablo 4.2 ile verilen d değerleri ile belirlenen reel kuadratik sayı cisimleridir.

Tablo 4.2: Periyodu $k_d = 7$ ve a tek tam sayı iken $n_d = 0$ eşitliğini sağlayan ve sınıf sayısı $h_d = 1$ veya $h_d = 2$ olan cisimler ve yapısal değerleri

d	T_d	U_d	h_d	a	$\omega_d = \left[\frac{a+1}{2}, \overline{\ell_1, \ell_2, \ell_3, \ell_3, \ell_2, \ell_1, a}\right]$
89	1000	106	1	9	$[5, \overline{4, 1, 1, 1, 4, 9}]$
137	3488	298	1	11	$[6, \overline{2, 1, 5, 5, 1, 2, 11}]$
373	2564	130	1	19	$[10, \overline{2, 1, 3, 3, 1, 2, 19}]$
653	1661	65	1	25	$[13, \overline{3, 1, 1, 1, 1, 3, 25}]$
853	13503	461	1	29	$[15, \overline{9, 1, 2, 2, 1, 9, 29}]$
997	169812	5378	1	31	$[16, \overline{3, 2, 10, 10, 2, 3, 31}]$
2621	219220	4282	1	251	$[26, \overline{10, 4, 1, 1, 4, 10, 51}]$
3797	62236	1010	1	61	$[31, \overline{3, 4, 2, 2, 4, 3, 61}]$
1261	79011	2225	2	35	$[18, \overline{3, 1, 11, 11, 1, 3, 35}]$
2885	11011	205	2	53	$[27, \overline{2, 1, 4, 4, 1, 2, 53}]$
3133	2885139	51545	2	55	$[28, \overline{2, 18, 6, 6, 18, 2, 55}]$
3277	2519757	44017	2	57	$[29, \overline{8, 6, 4, 4, 6, 8, 57}]$
5429	143311	1945	2	73	$[37, \overline{2, 1, 14, 14, 1, 2, 73}]$
5765	72359	953	2	75	$[38, \overline{2, 6, 2, 2, 6, 2, 75}]$
7373	81487	949	2	85	$[43, \overline{2, 3, 4, 4, 3, 2, 85}]$
9197	19372	202	2	95	$[48, \overline{2, 4, 1, 1, 4, 2, 95}]$
9509	121015	1241	2	97	$[49, \overline{3, 1, 8, 8, 1, 3, 97}]$
16757	321292	2482	2	129	$[65, \overline{4, 2, 5, 5, 2, 4, 129}]$
17261	39945380	304042	2	131	$[66, \overline{5, 4, 26, 26, 4, 5, 131}]$
18317	303839	2245	2	135	$[68, \overline{5, 1, 7, 7, 1, 5, 135}]$
22301	4790225	32077	2	149	$[75, \overline{5, 1, 29, 29, 1, 5, 149}]$

Sonuç 4.3. $d = a^2 + b \equiv 2, 3 \pmod 4 (a, b \in \mathbb{Z} : 0 < b \leq 2a)$ kare çarpansız bir tam sayı, $b \equiv 1, 2, 3 \pmod 4$ ve $k_d = 7$ ise; $n_d = 0 \Leftrightarrow U_d > a$ dır.

İspat: $d = a^2 + b \equiv 2, 3 \pmod 4$ kare çarpansız bir tam sayı olmak üzere $k_d = 7$ iken $b \equiv 1 \pmod 4$ durumunda Teorem 2.58, $b \equiv 2 \pmod 4$ durumunda Teorem 2.59 ve $b \equiv 3 \pmod 4$ durumunda Teorem 2.60' da T_d, U_d, A, B, ve a değerleri aynı olduğundan $b \equiv 1, 2, 3 \pmod 4$ için ispat aynı olacaktır.

$\Rightarrow$: $n_d = 0$ olsun.

$$n_d = \left\lfloor \frac{T_d}{{U_d}^2} \right\rfloor = 0 \Leftrightarrow \frac{T_d}{{U_d}^2} < 1 \Leftrightarrow {U_d}^2 - T_d > 0 \tag{4.18}$$

$n_d = 0$ olduğundan (4.18)' den dolayı ${U_d}^2 - T_d > 0$ dır.

$$\begin{aligned} {U_d}^2 - T_d > 0 &\Rightarrow 4(A^2+B^2)^2 - 2a(A^2+B^2) - 2BC - 2A\ell_2 > 0 \\ &\Rightarrow 4(A^2+B^2)^2 > 2a(A^2+B^2) + 2BC + 2A\ell_2 \\ &\Rightarrow 4(A^2+B^2)^2 > 2a(A^2+B^2) \\ &\Rightarrow 2(A^2+B^2)^2 > a \\ &\Rightarrow U_d > a. \end{aligned}$$

$\Leftarrow$: $U_d > a$ olsun. i) deki T_d ve U_d değerleri kullanılırsa;

$$\begin{aligned} {U_d}^2 - T_d &= 4(A^2+B^2)^2 - 2a(A^2+B^2) - 2BC - 2A\ell_2 \\ &= 2(A^2+B^2)[2(A^2+B^2) - a] - 2BC - 2A\ell_2 \\ &= 2(A^2+B^2)(U_d - a) - (2BC + 2A\ell_2). \end{aligned} \tag{4.19}$$

$U_d > a$ varsayımı gereği $U_d - a > 0$ dır. Eğer $U_d - a = 1$ olarak alır ve en küçük pozitif tam sayı için (4.19)' daki ifadenin pozitif oluşunu gösterirsek $U_d - a > 1$ olan her tam sayı için de $U_d^2 - T_d > 0$ olur.

$$\begin{aligned} {U_d}^2 - T_d &= 2(A^2+B^2)(U_d - a) - (2BC + 2A\ell_2) \\ &= 2(A^2+B^2).1 - (2BC + 2A\ell_2) \\ &= 2(A^2+B^2) - (2BC + 2A\ell_2) \\ &= 2A(A - \ell_2) + 2B(B - C). \end{aligned} \tag{4.20}$$

$A = \ell_1\ell_2 + 1$ olduğundan $A > \ell_2$ olduğu açıktır. $B = \ell_1 + A\ell_3 = \ell_1 + \ell_1\ell_2\ell_3 + \ell_3$ ve $C = \ell_2\ell_3 + 1$ olduğundan $B - C = \ell_2\ell_3(\ell_1 - 1) + \ell_1 + \ell_3 - 1 > 0$ olup (4.20) ifadesi pozitiftir. ${U_d}^2 - T_d > 0$ olduğunu gösterdik. O halde (4.18)' den ötürü $n_d = 0$ olarak bulunur. $\square$

$d = a^2 + b \equiv 2,3 \pmod 4 (a, b \in \mathbb{Z} : 0 < b \leq 2a)$ kare çarpansız bir tam sayı, $b \equiv 1,2,3 \pmod 4$ ve $k_d = 7$ ise $n_d = 0$ olan ve $h_d = 2$ olan $\mathbb{Q}(\sqrt{d})$ cisimleri Tablo 4.3 ile verilen d değerlerine karşılık gelen reel kuadratik sayı cisimleridir.

Tablo 4.3: Periyodu $k_d = 7$ iken $n_d = 0$ eşitliğini sağlayan ve sınıf sayısı $h_d = 2$ olan cisimler ve yapısal değerleri

d	T_d	U_d	h_d	a	$\omega_d = \left[a, \overline{\ell_1, \ell_2, \ell_3, \ell_3, \ell_2, \ell_1, 2a}\right]$
58	198	26	2	7	$[7, \overline{1, 1, 1, 1, 1, 1, 14}]$
202	6282	442	2	14	$[14, \overline{4, 1, 2, 2, 1, 4, 28}]$
314	886	50	2	17	$[17, \overline{1, 2, 1, 1, 2, 1, 34}]$
538	138102	5954	2	23	$[23, \overline{5, 7, 1, 1, 7, 5, 46}]$

5. TARTIŞMA VE SONUÇ

Bu tez çalışmasında genellikle Richaut-Degert(R-D) tipinde olmayan reel kuadratik sayı cisimlerinin temel birimlerinin genel biçimleri kullanılarak bunlar yardımıyla tanımlanan invaryant değer n_d' ye bağlı olarak çıkarılabilecek bazı sonuçlara yer verildi.

Genellikle Richaut-Degert(R-D) tipinde olmayan $K = \mathbb{Q}(\sqrt{d})$ reel kuadratik sayı cisimlerinde ω_d kuadratik irrasyonel sayısının sürekli kesir açılımında periyodun $k_d = 7$ olması durumunda, Karadeniz Gözeri ve Pekin [30, 28] çalışmaları ile Özer ve Pekin [29] çalışmalarından faydalanılarak $\varepsilon_d = \dfrac{T_d + U_d\sqrt{d}}{2}$ (> 1) biçiminde ifade edilen cismin temel biriminin T_d ve U_d katsayıları kullanılarak, bunlar yardımıyla Yokoi ([34] - [20] - [33]), tarafından tanımlanmış olan invaryant değer n_d tanımı yardımıyla, $n_d = 0$ için çıkarılabilecek bazı sonuçlara yer verildi. Bu sonuçlar; Sonuç 4.1, Sonuç 4.2 ve Sonuç 4.3 olup bu sonuçların ispatında bahsi geçen çalışmalardan faydalanıldı ve sonuçlar tablolar (Tablo 4.1, Tablo 4.2 ve Tablo 4.3) ile desteklendi.

KAYNAKLAR

[1]. Ireland, K. and Rosen, M. 1982, *A Classical Introduction to Modern Number Theory*, Springer-Verlag, Berlin-Heilderberg, New York.

[2]. McCarthy, P. J., 1966, *Algebraic Extensions of Fields*, Blaisdell Publishing Company ("A Division of Ginn and Company"), Waltham, Massachusetts, Toronto, London.

[3]. Çallıalp, F., 1986, *Soyut Cebir ve Sayıların Teorisi*, Ondokuz Mayıs Üniv. Yay., 12, Samsun.

[4]. Pekin, A., 2003, *Reel Kuadratik Sayı Cisimleri ve Sınıf Sayıları*, Thesis(PhD), Trakya Üniversitesi.

[5]. Çallıalp, F., 2009, *Sayıların Teorisi*, Birsen Yayınevi, İstanbul, ISBN: $978-975-511-518-4$.

[6]. Develi, M. H., 1990, R-D Tipinden Reel Kuadratik Sayı Cisimlerinde Sınıf Sayısının 1 Olması İçin Bazı Kriterler, Thesis(PhD), Ondokuz Mayıs Üniversitesi.

[7]. Molin, R.A., 1996, *Quadratics*, 416P, CRC Press, Boca Raton, New York.

[8]. Cohn, H., 1980, *Advanced Number Theory*, Dover Publications, New York.

[9]. Weiss, E., 1963, *Algebraic Number Theory*, McGraw-Hill Book Company, Inc., New York-San Francisco-Totonto-London.

[10]. Ribenboim, P., 1972, *Algebraic Numbers*, Wiley-Interscience, New York.

[11]. Özer, Ö., 2014, *Bazı Reel Kuadratik Sayı Cisimlerinin Yapılarının İncelenmesi*, Thesis(PhD), Süleyman Demirel Üniversitesi.

[12]. Degert, G., 1958, Über die Bestimmung der Grundeinheit gewisser reell quadratischer Zahlkörper, *Abh. Math. Sem. Univ. Hamburg*, 22, 92-97.

[13]. Hecke, E., 1981, Lectures on the Theory of Algebraic Numbers, Springer-Verlag New York Heidelberg Berlin.

[14]. Stewart, N.I and Tall, O.D, 1987, *Algebraic Number Theory*, Academic Press, New York-London.

[15]. Niven, I. and Zuckerman, H.S.-Montgomery, 1991, H.L, *An Introduction to the Theory of Numbers*, John Wiley Sons Inc., New York.

[16]. Hasse, H., 1980, *Number Theory*, Springer-Verlag, Berlin-Heilderberg, Nerw York.

[17]. Borevich, Z.I. and Safarevich, I.R., 1966, *Number Theory*, Academic Press, New York.

[18]. Tomita, K., 1997, Explicit Representation of Fundamental Units of Some Quadratic Fields, II, *Journal of Number Theory*, 63, 275-285.

[19]. Hardy, G.H and Wright, E.M, 1975, *An Introduction to the Theory of Numbers*, Oxford at the Clarendon Press, Oxford.

[20]. Yokoi, H., 1990, The Fundamental Unit and Class Number One Problem of Real Qudratic Fields with Prime Discriminant, *Nagoya Math. J*, 120, 51-59.

[21]. Yokoi, H., 1993, New Invariant and Class Number Problem in Quadratic Fields, *Nagoya Math. J Vol. 132*, 175-197.

[22]. Azuhata, T., 1984, On the Fundamental Unit and the Class Numbers of Real Quadratic Fields, *Nagoya Math. J.*, 95, 125-135.

[23]. Tomita, K., 1995, Explicit Representation of Fundamental Units of Some Quadratic Fields, I, *Proc. Japan Acad. Ser. A Math. Sci.*, 71, 41-43.

[24]. Molin, R.A. and Williams, H.C., 1989, Period Four and Real Quadratic Fields of Class Number One, *Proc. Japan Acad. 65 Ser.A*, 90-93.

[25]. Molin, R.A. and Williams, H.C., 1990, Continued Fractions of Period Five and Real Quadratic Fields of Class Number One, *Acta. Arithmetica*, 56-63.

[26]. Özer, Ö., 2012, On Continued Fractions of Period Five and Real Quadratic Fields of Class Number Even, *International Journal of Mathematical Archive*, 3(4), 1524-1532.

[27]. Pekin, A. and İşcan, H., 2005, Continued Fractions of Period Six and Explicit Representations of Fundamental Units of Some Real Quadratic Fields, *Journal of the Indian Mathematical Society*, 184-194.

[28]. Karadeniz Gözeri, G., 2011, *Bazı Kuvvet Serilerinin Aritmetik Özellikleri ve Belirli Reel Kuadratik Sayı Cisimlerinin Temel Birimleri*, Thesis(PhD), İstanbul Üniversitesi.

[29]. Özer, Ö. and Pekin, A., 2016, An Algorithm for Explicit Form of Fundamental Units of Certain Real Quadratic Fields, *Journal of Analysis & Number Theory*, 4(1), 23-27.

[30]. Karadeniz Gözeri, G. and Pekin, A.,2014, Explicit Form Of Fundamental Units Of Certain Real Quadratic Fields, *European Journal of Pure and Applied Mathematics*, 7(1), 55-64.

[31]. Jacobson, M.J., 1995, *Computational Techniques in Quadratic Fields*, Msc Thesis University Manitoba, Manitoba.

[32]. Kutsuna, M., 1980, On a criterion for the Class number of a quadratic number field to be one, *Nagoya Math. J.*, 79, 123-129.

[33]. Yokoi, H., 1991, The Fundamental Unit and Bounds for Class Numbers of Real Qudratic Fields, *Nagoya Math. J*, 124, 181-197.

[34]. Yokoi, H., 1970, On the Fundamental Unit of Real Quadratic Fields with Norm 1 , *Journal of Number Theory 2*, 106-115.

[35]. Molin, R.A. and Williams, H.C., 1990, Solution of the Class Number One Problem for Real Quadratic Fields of Extended Richaud Degert Type , *Number Theory*(Richard A. Mollin,ed), Walter de Gruyter-Berlin-New york, 417-425.

[36]. Molin, R.A. and Williams, H.C., 1990, Solution of a Problem of Yokoi, *Proc. Japan Acad. 66 Ser.A*, 141-145.

[37]. Molin, R.A. and Williams, H.C., 1991, On a Determination of Real Quadratic Fields of Class Number One and Related Continued Fraction Period Length Less than 25, *Proc. Japan Acad. 67 Ser.A*, 20-25.

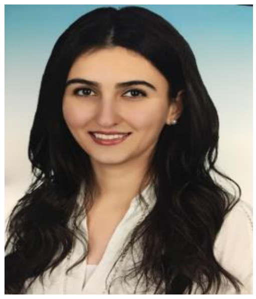
[38]. Molin, R.A., 1998, *Funtamental Number Theory with Applications*, CRC Press, Boca Raton, New York.

[39]. Özer, Ö. and İşcan, H., 2009, On Some Real Quadratic Fields with Period 4, *İnternational Journal of Contemporary Mathematical Sciences* , 1389-1396.

[40]. Özer, Ö. and Telci, F., 2011, On Continued Fractions of Real Quadratic Fields with Period Six ,*İnternational Journal of Contemporary Mathematical Sciences* , 833-840.

[41]. Yokoi, H., 1988, Class Number One Problem for Real Quadratic Fields (The conjecture of Gauss), *Proc. Japan Acad. 64 Ser. A*, 53-55.

ÖZGEÇMİŞ



Kişisel Bilgiler	
Adı Soyadı	Dilek GÜN
Doğum Yeri	Tarsus
Doğum Tarihi	11.09.1989
Uyruğu	☑ T.C. ❒ Diğer:
Telefon	0 537 742 61 84
E-Posta Adresi	d.dilekgun@gmail.com
Web Adresi	

Eğitim Bilgileri	
Lisans	
Üniversite	Çukurova Üniversitesi
Fakülte	Fen Edebiyat Fakültesi
Bölümü	Matematik Bölümü
Mezuniyet Yılı	31.05.2013

Yüksek Lisans	
Üniversite	İstanbul Üniversitesi
Enstitü Adı	Fen Bilimleri Enstitüsü
Anabilim Dalı	Matematik Anabilim Dalı
Programı	Matematik Programı
Mezuniyet Tarihi	27.12.2016