T.C.
İSTANBUL ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

DOKTORA TEZİ

FONKSİYON UZAYLARINDA BAZI OPERATÖRLERİN ÖZELLİKLERİ

Beyaz Başak KOCA

Matematik Anabilim Dalı

Matematik Programı

Danışman
Prof. Dr. Kamuran SAYGILI

Haziran, 2016

İSTANBUL

T.C.

İSTANBUL ÜNİVERSİTESİ

FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

DOKTORA TEZİ

FONKSİYON UZAYLARINDA BAZI OPERATÖRLERİN ÖZELLİKLERİ

Beyaz Başak KOCA

Matematik Anabilim Dalı

Matematik Programı

Danışman

Prof. Dr. Kamuran SAYGILI

Haziran, 2016

İSTANBUL

Bu çalışma 21/06/2016 tarihinde aşağıdaki jüri tarafından Matematik Anabilim Dalı Matematik programında Doktora Tezi olarak kabul edilmiştir.

Tez Jürisi:

İmza
Prof.Dr. Kamuran SAYGILI (Danışman)
İstanbul Üniversitesi
Fen Fakültesi

İmza
Prof.Dr. Erhan ÇALIŞKAN
İstanbul Üniversitesi
Fen Fakültesi

İmza
Prof.Dr. Mert ÇAĞLAR
İstanbul Kültür Üniversitesi
Fen Edebiyat Fakültesi

İmza
Prof.Dr. Tahir AZEROĞLU
Gebze Teknik Üniversitesi
Temel Bilimler Fakültesi

İmza
Prof.Dr. İ. Müfit GİRESUNLU
İstanbul Üniversitesi
Fen Fakültesi

ÖNSÖZ

Bu tez çalışmasında ilk olarak, ağırlıklı tek taraflı öteleme operatörlerinin bir sistemi tarafından üretilen C^*-cebirlerin yapısı incelenmiştir. Elde edilen sonuçlar kullanılarak, bu C^*-cebirlerde yer alan sürekli sembollü Toeplitz operatörlerinin Fredholmluluğu için gerek ve yeter koşullar verilmiş ve bu sonuçların bir uygulaması olarak, bir sınıf integral denklemin çözülebilirliği elde edilmiştir. İkinci olarak, polidisk üzerindeki Hardy uzayında tek bir fonksiyon tarafından üretilen invaryant alt uzayların tam bir karakterizasyonu verilerek, W. Rudin'in, "Function theory in polydiscs" kitabında verdiği ve bugün hala açık olan "Polidisk üzerindeki Hardy uzayının tüm invaryant alt uzaylarının sınıflandırılması yada açık bir tanımının verilmesi" problemi kısmi olarak cevaplanmış ve bu tür invaryant alt uzayların kapsama, eşitlik ve birimsel denklik gibi özellikleri incelenmiştir.

Yüksek lisans ve doktora eğitimim boyunca danışmanlığımı yürüten, emekli olduktan sonra da bilgi ve tecrübelerini benden esirgemeyen hocam Prof. Dr. Nazım SADIK'a teşekkür ederim. Ayrıca gerçek bir matematikçi olmaya gönül vermiş genç matematikçilere desteğini esirgemeyen, sorduğum her soruya ilgiyle yaklaşan Prof. Dr. Aydın AYTUNA'ya da teşekkürlerimi sunmayı bir borç bilirim.

Son olarak, beni yetiştiren, bir ailede koşulsuz sevginin ne anlama geldiğini yaşatarak öğreten, çalışmanın önemini, araştırmadan ve emek vermeden bir sonuca ulaşılamayacağı bilincini bana kazandıran aileme de teşekkür ederim. Bu tezi başta annem Gülten KOCA olmak üzere tüm aileme ithaf ediyorum.

Haziran, 2016 Beyaz Başak KOCA

İÇİNDEKİLER

Sayfa No

ÖNSÖZ .... **i**

İÇİNDEKİLER .... **ii**

SİMGE VE KISALTMA LİSTESİ .... **iii**

ÖZET .... **iv**

SUMMARY .... **v**

1. GİRİŞ **1**

2. GENEL KISIMLAR **13**

2.1. FONKSİYONEL HİLBERT UZAYLARI 13

2.2. C^*-CEBİRLERİ HAKKINDA GEREKLİ KAVRAM VE BİLGİLER 16

2.2.1 C^*-cebirlerin tensör çarpımları 23

2.2.2 Nükleer C^*-cebirler ve Kısa Tam Diziler 24

2.3. BAZI OPERATÖR SINIFLARI TARAFINDAN ÜRETİLEN C^*-CEBİRLER . 25

2.3.1 Bir İzometri Tarafından Üretilen C^*-cebir 25

2.3.2 Bir Ağırlıklı Tek Taraflı Öteleme Operatörü Tarafından Üretilen C^*-cebir . 26

2.3.3 Sürekli Sembollü Toeplitz Operatörleri Tarafından Üretilen C^*-cebirler ... 28

2.4. BİRİM DİSK VE POLİDİSKTEKİ İNVARYANT ALT UZAYLAR 33

2.4.1 Birim disk ve polidisk üzerindeki Hardy uzayları ile ilgili gerekli bilgiler.. 33

2.4.2 İnvaryant alt uzaylar 36

3. MALZEME VE YÖNTEM **41**

4. BULGULAR **42**

4.1. AĞIRLIKLI TEK TARAFLI ÖTELEME OPERATÖRLERİNİN BİR SİSTEMİ TARAFINDAN ÜRETİLEN C^*-CEBİRLER 42

4.2. BİR UYGULAMA: BİR SINIF İNTEGRAL DENKLEMİN ÇÖZÜLEBİLİRLİĞİ 58

4.3. POLİDİSK ÜZERİNDE TEK BİR FONKSİYON TARAFINDAN ÜRETİLEN İNVARYANT ALTUZAYLAR 60

5. TARTIŞMA VE SONUÇ **66**

KAYNAKLAR **69**

ÖZGEÇMİŞ **73**

SİMGE VE KISALTMA LİSTESİ

Simgeler	**Açıklama**
$\mathbb{D}$	: Birim disk
$\mathbb{T}$	: Birim çember
$\mathbf{B^{2n}}$	: Birim top
$\mathbf{S^{2n-1}}$	: Birim küre
$\mathbb{D}^{\mathbf{n}}$	: Polidisk
$\mathbb{T}^{\mathbf{n}}$	: Torus
$\mathcal{B}(\mathbf{H})$	: H Hilbert uzayı üzerindeki sınırlı lineer operatörlerin cebiri
$\mathcal{K}(\mathbf{H})$	: H Hilbert uzayı üzerindeki kompakt operatörlerin ideali
$\mathcal{B}(\mathbf{H})/\mathcal{K}(\mathbf{H})$	: Calkin cebiri
π	: $\mathcal{B}(H)$'den $\mathcal{B}(H)/\mathcal{K}(H)$'ye giden doğal bölüm dönüşümü
$\mathbf{Ker}(\mathbf{T})$	: T operatörünün çekirdeği
$\mathbf{Ran}(\mathbf{T})$	: T operatörünün görüntüsü
$\mathbf{supp}\mu$	: μ ölçüsünün desteği
$\mathbf{f}^*$	: f fonksiyonunun ışınsal sınır değeri
$\mathbf{P}[\mathbf{f}]$	: f fonksiyonun Poisson integrali

ÖZET

DOKTORA TEZİ

FONKSİYON UZAYLARINDA BAZI OPERATÖRLERİN ÖZELLİKLERİ

Beyaz Başak KOCA

İstanbul Üniversitesi

Fen Bilimleri Enstitüsü

Matematik Anabilim Dalı

Danışman: Prof. Dr. Kamuran SAYGILI

Bu tez çalışmasında ilk olarak, ağırlıklı tek taraflı öteleme operatörlerinin bir sistemi tarafından üretilen C^*-cebirlerin yapısı incelenmiştir. Elde edilen sonuçlar kullanılarak, bu C^*-cebirlerde yer alan sürekli sembollü Toeplitz operatörlerinin Fredholmluluğu için gerek ve yeter koşullar verilmiş ve bu sonuçların bir uygulaması olarak, bir sınıf integral denklemin çözülebilirliği elde edilmiştir. İkinci olarak, polidisk üzerindeki Hardy uzayında tek bir fonksiyon tarafından üretilen invaryant alt uzayların tam bir karakterizasyonu verilerek, W. Rudin'in, "Function theory in polydiscs" kitabında verdiği ve bugün hala açık olan "Polidisk üzerindeki Hardy uzayının tüm invaryant alt uzaylarının sınıflandırılması yada açık bir tanımının verilmesi" problemi kısmi olarak cevaplanmış ve bu tür invaryant alt uzayların kapsama, eşitlik ve birimsel denklik gibi özellikleri incelenmiştir.

Haziran 2016, 79 sayfa.

Anahtar kelimeler: Ağırlıklı tek taraflı öteleme operatörü, C^*-cebir, polidisk, Hardy uzayı, invaryant alt uzay.

SUMMARY

Ph.D. THESIS

PROPERTIES OF SOME OPERATORS ON FUNCTION SPACES

Beyaz Başak KOCA

İstanbul University

Institute of Graduate Studies in Science and Engineering

Department of Mathematics

Supervisor: Prof. Dr. Kamuran SAYGILI

In this thesis firstly, the structure of the C^*-algebras generated by a system of weighted unilateral shifts is determined. Using the obtained results, some necessary and sufficient conditions for Fredholmness of Toeplitz operators with continuous symbol in these C^*-algebras are given and, as an application of the results, solvability of a class of integral equations is obtained. Secondly, giving a complete characterization of invariant subspaces generated by a single function in the Hardy space on the polydisc, a problem given by W. Rudin in his book "Function theory in polydiscs", stated as "A classification or an explicit description of the structure of invariant subspaces in the polydisc", which is still open, is partially answered. It is also examined some properties of this kind of invariant subspaces such as, inclusion, equality, unitarily equivalence.

June 2016, 79 pages.

Keywords: Weighted unilateral shift operator, C^*-algebra, polydisc, Hardy space, invariant subspace.

1. GİRİŞ

Bu tez çalışmasında ilk olarak, ağırlıklı tek taraflı öteleme operatörlerinin bir sistemi tarafından üretilen C^*-cebirlerin yapısı incelenmiştir. Elde edilen sonuçlar kullanılarak, bu C^*-cebirlerde yer alan sürekli sembollü Toeplitz operatörlerinin Fredholmluluğu için gerek ve yeter koşullar verilmiş ve bu sonuçların bir uygulaması olarak, bir sınıf integral denklemin çözülebilirliği elde edilmiştir. İkinci olarak, polidisk üzerindeki Hardy uzayında tek bir fonksiyon tarafından üretilen invaryant alt uzayların tam bir karakterizasyonu verilerek, W. Rudin'in, "Function theory in polydiscs" kitabında verdiği ve bugün hala açık olan "Polidisk üzerindeki Hardy uzayının tüm invaryant alt uzaylarının sınıflandırılması yada açık bir tanımının verilmesi" problemi kısmi olarak cevaplanmış ve bu tür invaryant alt uzayların kapsama, eşitlik ve birimsel denklik gibi özellikleri incelenmiştir.

İlk kez A. Plessner [35] tarafından 1939'da ortaya konulan öteleme operatörleri, operatörler teorisinde temel bir araç olarak kullanılır. Oldukça ilginç cebirsel ve spektral özellikleri olan öteleme operatörleri aracılığıyla pekçok iddiaya örnek ve karşıt örnek oluşturmak, bu operatörleri araştırma süreci içerisinde birçok teoremin daha kısa ve net ispatını vermek mümkündür. Bu nedenle operatör teorideki bazı problemleri bu operatörler için çözmek, teorinin geliştirilmesini ve daha genel bir çözümün araştırılmasını kolaylaştırır. Ayrıca bu operatörlerin fizikte, yaklaşım teorisinde, stokastik süreçlerin incelenmesinde ve fonksiyonlar teorisinde geniş uygulama alanları da vardır.

Bir Hilbert uzayında sınırlı lineer bir operatörü incelemek için farklı yollar vardır. Bu çalışmada bu yollardan iki tanesi kullanılacaktır. Birinci yol, verilen sınırlı lineer bir operatörün (yada operatör sisteminin) fonksiyonel modelinin bulunmasıdır. Bir operatörün (operatör sisteminin) fonksiyonel modeli, operatörün (operatör sisteminin) bir fonksiyonel Hilbert uzayı üzerinde tanımlı bir çarpım operatörüne (çarpım operatörleri sistemine) birimsel denk olması anlamındadır. Örneğin, normal bir operatörün fonksiyonel modeli, spektral teoremden dolayı L^2 uzayında bir fonksiyonla çarpım operatörüdür [37, s.13]. Diğer bir örnek ise, tek taraflı öteleme operatörünün fonksiyonel modeli, birim disk üzerindeki Hardy uzayında bağımsız değişkenle çarpım operatörüdür. İkinci yol ise, verilen sınırlı lineer bir operatör tarafından üretilen C^*-cebirin yapısının incelenmesidir.

Bu çalışmada, ağırlıklı tek taraflı ötelemelerin sistemi birçok operatör sınıfına model teşkil ettiği için bu sistem tarafından üretilen C^*- cebirlerin yapısı incelenecektir. Bu sistem için verilen bir fonksiyonel model kullanılarak elde edilen fonksiyon uzayında tanımlı sürekli sembollü Toeplitz operatörlerinin bazı özellikleri elde edilecektir.

Bir operatör sınıfı tarafından üretilen C^*-cebirin yapısının incelenmesi yöntemi ilk olarak L.A. Coburn ’un [7] çalışmasında görülmektedir. S, bir H Hilbert uzayı üzerinde tanımlı tek taraflı öteleme operatörü olmak üzere S tarafından üretilen C^*-cebir, $C^*(S)$ ile gösterilsin. Coburn, bu çalışmasında T birim çemberi üzerinde tanımlı sürekli fonksiyonların uzayı $C(T)$’nin, H üzerindeki kompakt operatörlerin ideali $\mathcal{K}(H)$ tarafından

$$0 \to \mathcal{K}(H) \to C^*(S) \to C(T) \to 0$$

şeklinde bir genişlemesinin varolduğunu göstermiştir (C^*-cebir genişlemeleri tanımı Bölüm 2.2.2’de verilmiştir.). C^*-cebir genişlemeleri çalışmaları, esasen normal operatörleri sınıflandırmayı amaçlayan çalışmalarda da görülmektedir. Örneğin, L. Brown-R. Douglas ve P. Fillmore [6]; $C^*(T)$, bir H Hilbert uzayı üzerinde tanımlı esasen normal bir T operatörü ($TT^* - T^*T$= kompakt) ve I birim operatörü tarafından üretilen C^*-cebiri ve X, T’nin esasen spektrumu olmak üzere, $C(X)$’in $\mathcal{K}(H)$ tarafından

$$0 \to \mathcal{K}(H) \to C^*(T) \to C(X) \to 0$$

şeklinde bir genişlemesinin varolduğunu göstermişlerdir. Aynı teori kapsamında bugün herhangi bir kompakt metrik uzay X için $C(X)$’in $\mathcal{K}$ tarafından tüm genişlemeleri de düşünülmektedir. Analizin pekçok kısmında hatta değişmeli olmayan C^*-cebirlerin durumunda bile bu tür genişleme incelemeleri yapılmıştır. Örnek olarak, bazıları Genel Kısımlar Bölüm 2.3'te verilecek olan çeşitli fonksiyon uzayları üzerinde tanımlı Toeplitz operatörleri tarafından üretilen C^*-cebirler, ağırlıklı tek taraflı öteleme operatörleri tarafından üretilen C^*-cebirler için benzer genişlemeler elde edilmiştir. Bu tez çalışmasında ise söz konusu incelemeler ağırlıklı tek taraflı öteleme operatörlerinin bir sistemi için yapılmıştır. Ayrıca bu sistem tarafından üretilen C^*-cebirlerin yapısının anlaşılmasıyla birlikte buradan yararlanarak bu cebirde yer alan sürekli sembollü Toeplitz operatörlerinin Fredholmluk özelliği incelenmiştir.

Bu tez çalışmasının ikinci kısmında ise, tek taraflı ötelemeler sisteminin (ağırlığı 1) fonksiyonel modelinin polidisk üzerindeki Hardy uzayında tanımlı bağımsız değişkenlerle çarpım operatörleri sistemi olduğu göz önüne alınarak bu sistemin tek bir fonksiyonla üretilen tüm invaryant alt uzayları karakterize edilmiştir.

İnvaryant alt uzay problemi, basit bir şekilde ifade edilmesine rağmen operatör teorinin hala açık olan en önemli problemlerinden biridir: "H bir kompleks Hilbert uzayı olmak üzere H üzerindeki sınırlı lineer her operatörün aşikar olmayan invaryant alt uzayı var mıdır?" Burada aşikar olmayan alt uzay, H'nin $\{0\}$ ve kendisinden farklı alt uzayı anlamında, invaryant alt uzay ise, H'nin operatörün kendi içine tasvir ettiği kapalı alt uzayı anlamındadır. Bu problemin tam olarak ilk kim tarafından ortaya atıldığı bilinmemektedir. J. von Neumann'nın 1930'larda yaptığı fakat 1950'li yıllarda ortaya çıkan, bir Hilbert uzayı üzerindeki her kompakt operatörün aşikar olmayan invaryant alt uzaya sahip olduğunu gösterdiği yayınlamamış makalesinden sonra bu problemin ortaya atıldığı düşünülmektedir.

H'nin sonlu boyutlu olduğu durumda, her T lineer operatörü bir özdeğere (λ denilsin) sahip olduğundan $Ker(T - \lambda I)$ öz uzayı, T'nin invaryant alt uzayıdır. Dolayısıyla İnvaryant alt uzay problemi, sonlu boyutlu Hilbert uzayları için aşikardır. H'nin sonsuz boyutlu fakat ayrılabilir olmadığı durumda ise, sıfırdan farklı herhangi bir $x \in H$ elemanı için $\{x, Tx, T^2x, \ldots\}$ tarafından üretilen kapalı alt uzay, T'nin aşikar olmayan invaryant alt uzayıdır. Sonuç olarak, invaryant alt uzay problemi şu hale dönüşür: "Sonsuz boyutlu, ayrılabilir bir Hilbert uzayı üzerindeki sınırlı lineer her operatörün aşikar olmayan invaryant alt uzayı var mıdır?" Bu soru, Hilbert uzayı yerine Banach uzayı için düşünüldüğünde negatif bir cevaba sahiptir. İlk ters örnek İsveçli matematikçi P. Enflo [17] tarafından 1975-1976'da verilmiş fakat çalışması 1987 yılında yayınlanmıştır. Daha sonra C.J. Read [36], l^1 Banach uzayı üzerinde aşikar olmayan invaryant alt uzaya sahip olmayan sınırlı lineer bir operatör kurmuştur. Bu çalışmaların detaylarına [3, s. 317-344] kaynağından ulaşılabilir.

İnvaryant alt uzay problemiyle uğraşan Matematikçiler, birbirinden farklı ve önemli tekniklerle bu probleme önemli katkılarda bulunmuşlardır. Bununla birlikte problemin çözümü henüz tam olarak ortaya konulamamıştır.

Hangi operatörlerin aşikar olmayan invaryant alt uzaylara sahip olduğu çalışmaları devam ederken bir yandan da eğer bir operatör invaryant alt uzaya sahipse, bu operatörün tüm invaryant alt uzaylarının tanımlanması veya yapılarının incelenmesiyle ilgili çalışmalar da yapılmıştır. Bu yöndeki ilk çalışma, A.Beurling'in 1949 yılında yaptığı [4] çalışmasıdır. Beurling'in bu çalışması, kompleks analiz ile fonksiyonel analiz arasında sıkı bir bağ kurulması bakımından çok önemlidir. Çünkü, bu çalışmayla birlikte her iki analiz dalından birinin yöntemlerini diğer dalda kullanarak yeni sonuçlar elde etmek yada bilinen sonuçların daha kısa ve net ispatlarını vermek mümkün olmuştur. Bu makalesinden sonra analitik fonksiyon uzayları ve bu uzaylardaki bazı operatörlerin (bileşke operatörleri, Toeplitz operatörleri gibi) özellikleri incelenmeye başlanmıştır. Beurling, bu makalesinde tek taraflı öteleme operatörlerinin tüm invaryant alt uzaylarının yapısını vermiştir. Bunun için öteleme operatörünün fonksiyonel modelini kullanmış yani, öteleme operatörünü birim disk üzerindeki Hardy uzayında bağımsız değişkenle çarpım operatörü olarak ele almış ve bu operatörün tüm invaryant alt uzaylarının tek bir iç fonksiyon tarafından üretildiğini göstermiştir. Tek taraflı öteleme operatörü dışında farklı operatörlerin de invaryant alt uzaylarının yapısı incelenmiştir. Örneğin, ağırlıklı tek taraflı öteleme operatörlerinin bir sınıfının tüm invaryant alt uzayları, W.Donoghue [14] ve N.Nikolskii [33] tarafından incelenmiştir. Katlı öteleme operatörlerinin tüm invaryant alt uzayları ise, P.D. Lax'ın [28], P.K. Halmos'un [20] ve H. Helson ile D. Lowdensleger'in [30] makalelerinde incelenmiştir.

Tek taraflı öteleme operatörüne, birim disk üzerindeki Hardy uzayında bağımsız değişken ile çarpım operatörü gözüyle bakıldığında, Beurling'in verdiği önemli invaryant alt uzay karakterizasyonundan sonra tek taraflı öteleme operatörleri sisteminin fonksiyonel modeli olan polidisk üzerindeki Hardy uzayında bağımsız değişkenlerle çarpım operatörleri sisteminin invaryant alt uzaylarının yapısının ne olduğu sorusunu sormak doğaldır. Bu çalışmanın ikinci kısmında bu soruyla ilgilenilmiştir. Polidisk üzerindeki Hardy uzayında tek bir iç fonksiyonla üretilen alt uzayların invaryant olduğu açıktır. Fakat her invaryant alt uzayın bu formda olmadığını gösteren çalışmalar da vardır. Örneğin C.A. Jacewicz, [23] çalışmasında iki fonksiyon tarafından üretilen fakat tek bir fonksiyon tarafından üretilemeyen invaryant alt uzay örneği verirken, W. Rudin [39, Corollary, s.72], sonlu eleman tarafından üretilemeyen bir invaryant alt uzay kurmuştur. Dolayısıyla, polidisk durumunda invaryant alt uzayların yapısının, birim disk durumuna göre daha karışık olduğu görülmektedir. Nitekim Rudin, "Function Theory in Polydiscs" kitabında hala açık olan " Polidisk üzerindeki Hardy uzayının tüm invaryant alt uzaylarının sınıflandırılması yada açık bir tanımının verilmesi" [39, s.78] sorusunu sormuş ve bu sorunun cevaplanmasının zor gözüktüğünü belirtmiştir. Bu konuyla uğraşan bazı matematikçiler invaryant alt uzayları sınıflandırma yoluna gitmiştir. Yapılan sınıflandırma çalışmalarından biri, bir değişkenlideki duruma uygun olarak, sadece bir iç fonksiyon tarafından üretilen invaryant alt uzayları karakterize etmeye yöneliktir. Bu doğrultuda yapılan çalışmalarda bu tip invaryant alt uzaylar için sadece bir karakterizasyon verilmekle kalınmamış, kullanılan yöntemler sayesinde operatör teorideki bazı problemler için de yeni yaklaşımlar bulunmuştur. Bölüm 2.4.2'de bu çalışmalardan, bu tez çalışmasına uygunlukları açısından, J.Radlow [38], N. Sadıkov [43], O.P. Agrawal, D.N. Clark ve R. Douglas [1] ve V. Mandrekar'ın [31] karakterizasyonları verilmiştir. Bu tez çalışmasında ise, Bulgular kısmında da görülebileceği gibi tek bir fonksiyon tarafından üretilen invaryant alt uzayların sınıfı tamamen karakterize edilerek, Rudin'in problemine kısmi bir cevap verilmiştir. Ayrıca bu tip invaryant alt uzayların kapsama, eşitlik ve birimsel denklik gibi özellikleri de incelenmiş, bunlardan yararlanılarak bazı sonuçlar elde edilmiştir.

Bu çalışma 79 sayfa, beş bölüm ve Kaynaklar kısmından oluşmaktadır. Kaynaklar kısmında, çalışmada referans gösterilen 52 adet kitap ve makalelerin künyeleri belirtilmiştir.

Birinci bölüm olan Giriş bölümünde, bu çalışmada ele alınan konuların tarihsel önemi ve çalışmanın temel motivasyonu ifade edilmiştir.

İkinci bölüm olan Genel Kısımlar bölümünde, çalışmanın genelinde ihtiyaç duyulacak tanım ve kavramlar hatırlatılmış, çalışmanın konusunun ele alınışı açısından literatürde bulunan çalışmalardan bahsedilmiştir.

Üçüncü bölüm olan Malzeme ve Yöntem bölümünde, çalışmada elde edilen sonuçlara ulaşmamıza yardımcı olan kitap ve makaleler hakkında kısa bir bilgi verilmiş, kullanılan yöntemler anlatılmıştır.

Çalışmanın dördüncü bölümü olan Bulgular bölümü üç kısımdan oluşmaktadır. İlk olarak, ağırlıklı tek taraflı öteleme operatörlerinin bir sistemi tarafından üretilen C^*-cebirlerin yapısı incelenmiş, elde edilen sonuçlar yardımıyla sürekli sembollü Toeplitz operatörlerinin Fredholmluluğu için gerek ve yeter koşullar verilmiş ve elde edilen sonuçların bir uygulaması olarak bir sınıf integral denklemin çözülebilirliği için bir yeter şart verilmiştir. İlk kısım için elde edilen bu sonuçların kısa bir özeti aşağıdaki gibidir:

n sabit pozitif bir tamsayı olmak üzere I, $(i_1, \ldots, i_n)$ tamsayıların çoklu-indeksini göstersin. $I \geq 0$, her $j = 1, \ldots, n$ için $i_j \geq 0$ ve

$$|I| = |i_1 + \ldots + i_n|,$$

anlamındadır. $z = (z_1, \ldots, z_n) \in \mathbb{C}^n$ ve $I \geq 0$ olmak üzere

$$z^I = z_1^{i_1} \ldots z_n^{i_n}$$

ve $T = \{T_1, \ldots, T_n\}$, n tane birbirleriyle değişmeli olan operatörlerin bir ailesi olmak üzere

$$T^I = T_1^{i_1} \ldots T_n^{i_n}$$

dir. δ_{ij}-Kronocker sembolü olmak üzere, başka bir $\varepsilon_k = (\delta_{1k}, \ldots, \delta_{nk})$ çoklu-indeksi için $I \mp \varepsilon_k = (i_1, \ldots, i_k \mp 1, \ldots, i_n)$'dir.

H kompleks bir Hilbert uzayı, $\{e_I\}$ bu uzayın ortonormal bazı ve $\{w_{I,j} : j = 1, \ldots, n\}$ kompleks sayıların her I ve $1 \leq k, l \leq n$ için

$$w_{I,k} w_{I+\varepsilon_k,l} = w_{I,l} w_{I+\varepsilon_l,k} \qquad (*)$$

koşulunu sağlayan sınırlı bir kümesi olsun.

Tanım 1.1. (Jewell, Lubin [25]) $A_j : H \to H$, $A_j e_I = w_{I,j} e_{I+\varepsilon_j}$, $j = 1, \ldots, n$ olmak üzere H üzerindeki bu n operatörün ailesi $A = \{A_1, \ldots, A_n\}$'ya **n-tane ağırlıklı ötelemelerin bir sistemi** denir.

$I \geq 0$ olması durumunda A sistemine ağırlıklı tek taraflı ötelemelerin sistemi denir. Bu çalışma boyunca A sistemi ağırlıklı tek taraflı ötelemelerin bir sistemi olarak düşünülecektir. A sisteminin $\{w_{I,j}\}$ ağırlığı yardımıyla

$$\beta_{I+\varepsilon_j} = w_{I,j} \beta_I; \quad \beta_0 = 1$$

olacak şekilde bir $\{\beta_I\}_{I \geq 0}$ kümesi tanımlansın ve

$$H^2(\beta) = \left\{ f(z) = \sum_{I \geq 0} f_I z^I : \sum_{I \geq 0} |f_I|^2 \beta_I^2 < \infty \right\}$$

uzayı oluşturulsun. $H^2(\beta)$ uzayı,

$$\langle f, g\rangle = \sum_{I\geq 0} f_I \overline{g_I}\beta_I^2$$

iç çarpımına göre bir Hilbert uzayıdır ve $\{\frac{z^I}{\beta_I}\}_{I\geq 0}$ kümesi, $H^2(\beta)$ için bir ortonormal bazdır (Jewell ve Lubin [25]).

Ağırlıklı tek taraflı öteleme operatörler sistemlerinin bir Ω sınıfını düşünelim öyle ki bu sınıfa ait sistemlerin ağırlıkları yardımıyla oluşturulan $\{\beta_I\}_{I\geq 0}$ kümesine karşı gelen çok değişkenli moment probleminin bir çözümü mevcut olsun, yani $[0,1]^n$ üzerinde

$$\beta_I^2 = \int_{[0,1]^n} r_1^{2i_1} r_2^{2i_2} \ldots r_n^{2i_n} d\nu(r_1, r_2, \ldots, r_n)$$

eşitliğini sağlayan bir ν Borel ölçüsü varolsun. Bu sınıftaki bir A sistemine karşı gelen ölçü ν_A ile gösterilsin.

$L^2(\bar{\mathbb{D}}^n, \mu) \quad (= L^2(\mu))$: $\bar{\mathbb{D}}^n$ üzerinde tanımlı, μ ölçüsüne göre karesi integrallenebilir kompleks değerli ölçülebilir fonksiyonların Lebesgue uzayı olsun. Burada μ, $\bar{\mathbb{D}}^n$ üzerinde

$$d\mu = \frac{1}{(2\pi)^n} d\nu(r_1, r_2, \ldots, r_n) d\theta_1 d\theta_2 \ldots d\theta_n \quad (0 < \theta_i \leq 2\pi) \tag{1.1}$$

şeklinde tanımlıdır. Eğer $A \in \Omega$ ise $\left\{\frac{1}{\sqrt{(2\pi)^n}} \frac{z^I}{\beta_I}\right\}_{I\geq 0}$, $L^2(\mu)$'de ortonormal bir sistemdir. Bu ortonormal sistem yardımıyla üretilen alt uzay da $H^2(\bar{\mathbb{D}}^n, \mu) \quad (= H^2(\mu))$ ile gösterilsin. Basitlik için $n = 2$ olsun.

$$S_1 = \{(r_1, r_2) \in [0,1] \times [0,1] : r_1^2 + r_2^2 \leq 1\}$$

$$\widetilde{S_1} = \{(r_1, r_2) \in [0,1] \times [0,1] : r_1^2 + r_2^2 = 1\}$$

kümeleri yardımıyla Ω'nın

$\Omega_1 = \{A \in \Omega : supp\nu_A \subset S_1,$ her $a \in \widetilde{S_1}$ noktasının herhangi bir $U(a)$ komşuluğu için

$$\nu_A(U(a)) > 0\}$$

alt sınıfı göz önüne alınsın.

Teorem 1.1. (Ergezen ve Sadık, [18]) $A \in \Omega$ olsun. A sistemi tarafından üretilen operatör cebirinin top cebirine izometrik izomorf olması için gerek ve yeter koşul $A \in \Omega_1$ olmasıdır.

Bu teorem yardımıyla A sistemi tarafında üretilen C^*-cebirin yapısı aşağıdaki teoremle verilmiştir.

Tanım 1.2. (Toeplitz Operatörü) $P : L^2(\mu) \to H^2(\mu)$ ortogonal izdüşüm ve $\psi \in C(supp\mu)$ olmak üzere her $f \in H^2(\mu)$ için

$$T_\psi f = P(\psi f)$$

şeklinde tanımlanan $T_\psi : H^2(\mu) \to H^2(\mu)$ operatörüne $H^2(\mu)$ üzerinde ψ sürekli sembollü **Toeplitz operatörü** denir.

$H^2(\mu)$ üzerinde tanımlı kompakt operatörlerin ideali $\mathcal{K}$ ile gösterilsin.

Teorem 1.2. (Koca, Sadık [27]) $A \in \Omega$ olsun. A sistemi tarafından üretilen operatör cebiri top cebirine izometrik izomorf ise A sistemi tarafından üretilen C^*-cebir $C^*(A)$'nın komutatör ideali $\mathcal{K}$'dır ve

$$C^*(A) = \{T_\psi + K : \psi \in C(supp\mu),\ K \in \mathcal{K}\}$$

formundadır. Ayrıca $C^*(A)/\mathcal{K}$ bölüm cebiri $C(S^3)$'e $*$-izomorftur.

Bu teoremin bir sonucu olarak, $A \in \Omega_1$ olmak üzere $C^*(A)$'da yer alan sürekli sembollü Toeplitz operatörlerinin Fredholmluk özelliği elde edilmiştir:

Sonuç 1.1. $\psi \in C(supp\mu)$ olmak üzere $T_\psi \in C^*(A)$ Toeplitz operatörünün Fredholm operatörü olması için gerek ve yeter koşul $\psi(z)$ 'nin her $z \in S^3$ için sıfırdan farklı olmasıdır.

Ω'nın

$$\Omega_2 = \{A \in \Omega : (1,1) \in [0,1]^2 \text{ noktasının herhangi bir } U(1,1) \text{ komşuluğu için}$$

$$\nu_A(U(1,1)) > 0\}$$

alt sınıfı göz önüne alınsın.

Teorem 1.3. (Ergezen, [19]) $A \in \Omega$ olsun. A sistemi tarafından üretilen operatör cebirinin polidisk cebirine izometrik izomorf olması için gerek ve yeter koşul $A \in \Omega_2$ olmasıdır.

Bir $A \in \Omega_2$ için ν_A ölçüsünün $[0,1]$ üzerinde tanımlı, her $0 < a < 1$ için $\nu_i((a,1]) > 0$, $i = 1,2$ koşulunu sağlayan ν_1, ν_2 pozitif Borel ölçülerinin çarpımı şeklinde yazıldığını kabul edelim. Yukarıdaki teorem yardımıyla Ω_2 sınıfına ait bir A sistemi tarafından üretilen C^*-cebiri $C^*(A)$'nın yapısı aşağıdaki teoremde verilmiştir:

Teorem 1.4. (Koca, Sadık [27]) $A \in \Omega$ olsun. A sistemi tarafından üretilen operatör cebiri polidisk cebirine izometrik izomorf ise A sistemi tarafından üretilen C^*-cebiri $C^*(A)$'nın komutatör ideali $\mathcal{I}$, kompakt operatörlerin $\mathcal{K}$ idealini öz alt olarak içerir. Ayrıca $\mathcal{A}/\mathcal{I}$ bölüm cebiri, $C(\mathbb{T}^2)$'ye $*$-izomorftur.

Bu teoremin bir sonucu olarak $A \in \Omega_1$ olmak üzere $C^*(A)$'da yer alan sürekli sembollü Toeplitz operatörlerinin Fredholmluk özelliği elde edilmiştir:

Teorem 1.5. (Koca, Sadık [27]) $\psi \in C(supp\mu)$ olmak üzere $T_\psi \in C^*(A)$ Toeplitz operatörünün Fredholm operatörü olması için gerek ve yeter koşul $\psi(z,w)$ 'nin her $(z,w) \in \mathbb{T}^2$ için sıfırdan farklı olması ve $\psi|_{\mathbb{T}^2}$'nin sabite homotopik olmasıdır.

Çalışmanın Bulgular bölümünün ikinci kısmında, bu kısımda elde edilen sonuçların uygulaması niteliğinde olan, bir sınıf integral denklemin çözülebilirliği verilmiştir (Bölüm 4.2).

Çalışmanın Bulgular bölümünün üçüncü kısmında ise, polidisk üzerindeki Hardy uzayında tek bir fonksiyon tarafından üretilen invaryant alt uzayların yapısı incelenmiştir. Temel olarak şu iki soru üzerinde durulmuş ve aşağıdaki sonuçlar elde edilmiştir:

1) Polidisk üzerindeki Hardy uzayında (iç olması gerekmeyen) tek bir fonksiyon tarafından üretilen invaryant alt uzayların tam karakterizasyonu nedir?

2) Tek bir fonksiyon tarafından üretilen invaryant alt uzayların tümü bir iç fonksiyon tarafından üretilir mi?

Bu iki soru ispatları Bulgular kısmında verilen aşağıdaki teoremler yardımıyla cevaplanmıştır.

Tanım 1.3. Bir $f \in H^\infty(\mathbb{D}^n)$ fonksiyonu için $1/f^* \in L^\infty(\mathbb{T}^n)$ ise bu fonksiyona **genelleştirilmiş iç fonksiyon** denir.

Burada f^*, f'nin ışınsal sınır değeridir.

Teorem 1.6. $f \in H^\infty(\mathbb{D}^n)$ olmak üzere $H^2(\mathbb{D}^n)$'nin $fH^2(\mathbb{D}^n)$ alt uzayının invaryant olması için gerek ve yeter koşul f'nin genelleştirilmiş iç fonksiyon olmasıdır.

Teorem 1.7. $n > 1$ olmak üzere öyle bir f genelleştirilmiş iç fonksiyonu vardır ki herhangi bir I iç fonsiyonu için $fH^2(\mathbb{D}^n) \neq IH^2(\mathbb{D}^n)$'dir.

Bu teoremlerle polidisk üzerindeki Hardy uzayında tek bir fonksiyon tarafından üretilen invaryant alt uzayların kesin bir tanımı yapılarak, Rudin'in yukarıda bahsettiğimiz probleminin bir kısmı cevaplanmıştır. Ayrıca elde edilen bu sonuçlar yardımıyla bu tür invaryant alt uzayların kapsama, eşitlik ve birimsel denklik gibi özellikleri de incelenmiştir:

Özellik 1.1. f_1 ve f_2, $\mathbb{D}^n$'de sıfırları olmayan iki genelleştirilmiş iç fonksiyon olsun. Bu durumda $f_1H^2(\mathbb{D}^n)$ ve $f_2H^2(\mathbb{D}^n)$ invaryant alt uzayları aşağıdaki koşulları sağlarlar:

(a) $f_1H^2(\mathbb{D}^n) \subset f_2H^2(\mathbb{D}^n)$ olması için gerek ve yeter koşul f_1/f_2 fonksiyonunun genelleştirilmiş bir iç fonksiyon olmasıdır, yani $f_1/f_2 \in H^\infty(\mathbb{D}^n)$ ve $(f_2/f_1)^* \in L^\infty(\mathbb{T}^n)$ olmasıdır.

(b) $f_1H^2(\mathbb{D}^n) = f_2H^2(\mathbb{D}^n)$ olması için gerek ve yeter koşul $f_1/f_2, f_2/f_1 \in H^\infty(\mathbb{D}^n)$ olmasıdır.

Teorem 1.8. (a) $f_1,\ f_2 \in H^\infty(\mathbb{D}^n)$ genelleştirilmiş iç fonksiyonlar olmak üzere $\mathbb{T}^n$ üzerinde hemen her yerde $|f_1^*| = |f_2^*|$ ise $f_1H^2(\mathbb{D}^n)$ ve $f_2H^2(\mathbb{D}^n)$ invaryant alt uzayları birimsel denktir.

(b) $H^2(\mathbb{D}^n)$'nin tek bir fonksiyon tarafından üretilmiş invaryant alt uzaylarına birimsel denk tüm invaryant alt uzayları da aynı formdadır, yani tek bir fonksiyon tarafından üretilmişlerdir.

Çalışmanın devamında, elde ettiğimiz sonuçlardan yararlanılarak dış fonksiyonlar için tek değişkenli durumda geçerli olan fakat çok değişkenli durumda geçerli olmayan bir karakterizasyonun çok değişkenli durumda genelleştirilmiş iç fonksiyonların sınıfında sağlandığı elde edilmiştir.

Sonuç 1.2. f genelleştirilmiş bir iç fonksiyon olmak üzere f'nin dış fonksiyon olması için gerek ve yeter koşul $fH^2(\mathbb{D}^n) = H^2(\mathbb{D}^n)$ olmasıdır.

Çalışmanın beşinci ve son bölümü olan Tartışma ve Sonuç bölümünde, Bulgular bölümünde elde edilen sonuçların değerlendirilmesi yapılmış, kazanımları verilmiş ve ileride ele alınabilecek problemlerden bahsedilmiştir.

2. GENEL KISIMLAR

Bu bölümde, bu çalışmada kullanılacak olan temel tanım ve kavramlar ile bazı önemli sonuçlar verilecektir.

2.1. FONKSİYONEL HİLBERT UZAYLARI

X, $\mathbb{C}$'nin boştan farklı bir alt kümesi olmak üzere X üzerinde tanımlı kompleks değerli fonksiyonların Hilbert uzayı $\mathcal{H}$'ye aşağıdaki koşulları sağladığı takdirde X üzerinde bir **fonksiyonel Hilbert uzayı** denir [47]:

i) $f, g \in \mathcal{H}$ ve $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ ise her $w \in X$ için $(\alpha f + \beta g)(w) = \alpha f(w) + \beta g(w)$'dir.

ii) Her $w \in X$ için öyle bir $C_w > 0$ vardır ki her $f \in \mathcal{H}$ için $|f(w)| \leq C_w ||f||$ sağlanır.

$\mathcal{H}$, X kümesi üzerinde fonksiyonel Hilbert uzayı ise Riesz Temsil Teoremi'nden her $w \in X$ için öyle bir $K_w \in \mathcal{H}$ elemanı vardır ki her $f \in \mathcal{H}$ için $f(w) = \langle f, K_w \rangle$ eşitliği sağlanır. Bu K_w fonksiyonuna w'da **üretici çekirdek** denir.
Aşağıdaki uzaylar bu çalışmadan kullanılacak olan ve operatör teoride önemli yerlere sahip olan fonksiyonel Hilbert uzayları örnekleridir.
$\mathbb{C}$ kompleks düzleminde **birim disk**

$$\mathbb{D} = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\},$$

birim diskin sınırı **birim çember**

$$\mathbb{T} = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$$

ile gösterilir. $n > 1$ sabit bir tamsayı olmak üzere $\mathbb{D}$ birim diskinin $\mathbb{C}^n$'deki benzerleri **polidisk**

$$\mathbb{D}^n = \{z = (z_1, z_2, \ldots, z_n) \in \mathbb{C}^n : |z_i| < 1,\ i = 1, \ldots, n\}$$

yada **birim top**

$$B^{2n} = \{z = (z_1, z_2, \ldots, z_n) \in \mathbb{C}^n : (|z_1|^2 + |z_2|^2 + \cdots + |z_n|^2)^{1/2} < 1\}$$

ile gösterilir.

$\mathbb{D}^n$ polidiskinin sınırının bir kısmı olan **torus**

$$\mathbb{T}^n = \{z = (z_1, z_2, \ldots, z_n) \in \mathbb{C}^n : |z_i| = 1,\ i = 1, \ldots, n\},$$

B^{2n} birim topun sınırı **birim küre** ise,

$$S^{2n-1} = \{z = (z_1, z_2, \ldots, z_n) \in \mathbb{C}^n : (|z_1|^2 + |z_2|^2 + \ldots + |z_n|^2)^{1/2} = 1\}$$

ile gösterilir.

Örnekler:

Birim çember üzerindeki Hardy uzayı

$\mathbb{T}$ birim çemberi üzerinde tanımlı, kompleks değerli ve dm yay uzunluğu ölçüsüne göre karesi integrallenebilir fonksiyonların Lebesgue uzayı $L^2(\mathbb{T})$'nin $\mathbb{D}$'ye analitik genişlemesi olan fonksiyonlarının oluşturduğu alt uzayına $\mathbb{T}$ üzerindeki Hardy uzayı denir ve $H^2(\mathbb{T})$ ile gösterilir. $\{z^n : n \geq 0\}$ kümesi bu uzayın ortonormal bazıdır. $H^2(\mathbb{T})$, $\mathbb{T}$ üzerinde fonksiyonel Hilbert uzayıdır ve üretici çekirdeği de $z \in \mathbb{D}, w \in \mathbb{T}$ olmak üzere

$$K(z, w) = \sum_{n=0}^{\infty} \bar{w^n} z^n = \frac{1}{1 - \bar{w}z} \tag{2.1}$$

dir. $H^2(\mathbb{T})$ uzayı ile ayrıntılı bilgilere [13, 22] kaynaklarından ulaşılabilir. Ayrıca, Bölüm 2.4'te bu uzay ile ilgili detaylı bilgiler verilecektir.

Birim disk üzerindeki Bergman uzayı

$\mathbb{D}$ üzerinde tanımlı, kompleks değerli ve dA alan ölçüsüne göre karesi integrallenebilir fonksiyonların Lebesgue uzayı $L^2(\mathbb{D})$'nin analitik fonksiyonlarından oluşan alt uzayına $\mathbb{D}$ üzerindeki Bergman uzayı denir ve $L^2_a(\mathbb{D})$ ile gösterilir. $\{\sqrt{\frac{n+1}{\pi}} z^n : n \geq 0\}$ kümesi

$L_a^2(\mathbb{D})$'nin bir ortonormal bazıdır. $L_a^2(\mathbb{D})$ Bergman uzayı, $\mathbb{D}$ üzerinde fonksiyonel Hilbert uzayıdır ve üretici çekirdeği de $z, w \in \mathbb{D}$ olmak üzere

$$K(z,w) = \frac{1}{\pi(1-\bar{w}z)^2}$$

dir. Bu çekirdek **Bergman üretici çekirdeği** olarak da bilinir. $L_a^2(\mathbb{D})$ ile ilgili detaylı bilgilere [22, 51] kaynaklarından ulaşılabilir.

Birim top üzerindeki Bergman uzayı

B^{2n} birim topu üzerinde tanımlı, kompleks değerli ve dV hacim ölçüsüne göre karesi integrallenebilir fonksiyonların Lebesgue uzayı $L^2(B^{2n})$'nin analitik fonksiyonlarından oluşan alt uzayına B^{2n} üzerindeki Bergman uzayı denir ve $L_a^2(B^{2n})$ ile gösterilir. Bu uzayın ortonormal bazı,

$$e_I = \frac{1}{\sqrt{\pi^n}} \left(\frac{(n+|I|)!}{I!} \right)^{1/2} z^I$$

ile verilir. Burada, $I = (i_1, \ldots, i_n)$ pozitif tamsayıların çoklu-indeksi,

$$|I| = |i_1 + \ldots + i_n|, \quad I! = i_1! \ldots i_n!$$

dir ve $z = (z_1, \ldots, z_n) \in \mathbb{C}^n$ olmak üzere

$$z^I = z_1^{i_1} \ldots z_n^{i_n}$$

anlamındadır.

$L_a^2(B^{2n})$, B^{2n} üzerinde fonksiyonel Hilbert uzayıdır ve üretici çekirdeği de $z, w \in B^{2n}$ olmak üzere

$$K(z,w) = \frac{n!}{\pi^n} \frac{1}{(1-\bar{w}z)^{n+1}}$$

dir [9]. Bu uzay ile ilgili detaylı bilgilere [40, 52] kaynaklarından ulaşılabilir.

Birim küre üzerindeki Hardy uzayı

S^{2n-1} birim küresi üzerinde tanımlı, kompleks değerli ve dS yüzey ölçüsüne göre karesi integrallenebilir fonksiyonların Lebesgue uzayı $L^2(S^{2n-1})$'nin, B^{2n}'e analitik genişlemesi olan fonksiyonlarının oluşturduğu alt uzayına S^{2n-1} üzerindeki Hardy uzayı denir ve

$H^2(S^{2n-1})$ ile gösterilir. Bu uzayın ortonormal bazı,

$$e_I = \frac{1}{\sqrt{2\pi^n}} \left(\frac{(n+|I|-1)!}{I!} \right)^{1/2} z^I$$

ile verilir. (Notasyonlar bir önceki örnekteki gibidir.) $H^2(S^{2n-1})$, S^{2n-1} üzerinde fonksiyonel Hilbert uzayıdır ve üretici çekirdeği $z \in B^{2n}, w \in S^{2n-1}$ olmak üzere

$$K(z,w) = \frac{(n-1)!}{2\pi^n} \frac{1}{(1-\bar{w}z)^n}$$

dir. [9]. Bu uzay ile ilgili detaylı bilgilere [40, 52] kaynaklarından ulaşılabilir.

Torus üzerindeki Hardy uzayı

$\mathbb{T}^n$ torusu üzerinde tanımlı, kompleks değerli ve dm_n çarpım ölçüsüne göre karesi integrallenebilir fonksiyonların Lebesgue uzayı $L^2(\mathbb{T}^n)$'nin $\mathbb{D}^n$'e analitik genişlemesi olan fonksiyonlarının oluşturduğu alt uzayına $\mathbb{T}^n$ üzerindeki Hardy uzayı denir ve $H^2(\mathbb{T}^n)$ ile gösterilir. $\{z^I\}$ kümesi bu uzayın ortonormal bazıdır. $H^2(\mathbb{T}^n)$, $\mathbb{T}^n$ üzerinde fonksiyonel Hilbert uzayıdır ve üretici çekirdeği de $z = (z_1, z_2, \ldots, z_n) \in \mathbb{D}^n, , w = (w_1, w_2, \ldots, w_n) \in \mathbb{T}^n$ olmak üzere

$$K(z,w) = \prod_{i=1}^{n} \frac{1}{(1-z_i\bar{w}_i)}$$

dir. Bu uzay ile ilgili detaylı bilgilere [39] kaynağından ulaşılabilir. Ayrıca, Bölüm 2.4'te bu uzay ile ilgili detaylı bilgiler verilecektir.

2.2. C^*-CEBİRLERİ HAKKINDA GEREKLİ KAVRAM VE BİLGİLER

Bu bölümde C^*-cebirler ile ilgili bu çalışma için gerekli olan temel tanım ve özellikler verilecektir. Bu kısımdaki bilgiler [32, 48] kaynaklarından alınmıştır.

Kompleks bir vektör uzayı $\mathcal{A}$ üzerinde her $a, b, c \in \mathcal{A}$ için $a(bc) = (ab)c$ koşulunu sağlayan bir $\mathcal{A} \times \mathcal{A} \to \mathcal{A}$, $(a,b) \to ab$ bilineer dönüşümü varsa $\mathcal{A}$'ya bir **cebir** denir. $\mathcal{A}$'nın bir $\mathcal{B}$ alt vektör uzayında her $b, b' \in \mathcal{B}$ için $bb' \in \mathcal{B}$ koşulu sağlanıyorsa $\mathcal{B}$'ye $\mathcal{A}$'nın bir **alt cebiri** denir. $\mathcal{A}$'nın çarpım işleminin $\mathcal{B}$'ye kısıtlanmasıyla $\mathcal{B}$'nin kendisi de bir cebirdir.

Tanım 2.1. Bir $\mathcal{A}$ cebiri üzerinde her $a, b \in \mathcal{A}$ için

$$||ab|| \leq ||a||||b||$$

koşulunu sağlayan bir $||\cdot||$ normu varsa $\mathcal{A}$'ya normlu cebir denir. Bu norma göre $\mathcal{A}$ tam ise $\mathcal{A}$ normlu cebirine **Banach cebiri** denir.

Eğer $\mathcal{A}$ Banach cebiri birimli, yani her $a \in \mathcal{A}$ için $a1 = 1a = a$ koşulunu sağlayan $1 \in \mathcal{A}$ var ve $||1|| = 1$ ise $\mathcal{A}$'ya **birimli Banach cebiri** denir. Her $a, b \in \mathcal{A}$ için $ab = ba$ ise $\mathcal{A}$'ya **değişmeli Banach cebiri** denir. $\mathcal{A}$ Banach cebirinin kapalı her alt cebiri de kısıtlanmış norm ile birlikte bir Banach cebiridir.

Aşağıdaki örnekler bu çalışmada kullanılacak olan ve C^*-cebirlerin teorisinde önemli rollere sahip Banach cebiri örnekleridir.

Örnek 1: Ω lokal kompakt Hausdorff uzayı ve $f : \Omega \to \mathbb{C}$ sürekli bir fonksiyon olmak üzere her $\varepsilon > 0$ için $\{w \in \Omega : |f(w)| \geq \varepsilon\}$ kümesi kompakt ise f fonksiyonuna sonsuzda sıfırdır denir. Ω üzerindeki sonsuzda sıfır fonksiyonlarının kümesi $C_0(\Omega)$ ile gösterilir. Bu uzay aşağıda verilen (noktasal) işlemlere ve supremum normuna göre bir Banach cebiridir [32, s.2]:

- $(f+g)(w) = f(w) + g(w)$
- $(fg)(w) = f(w)g(w)$
- $(\lambda f)(w) = \lambda f(w)$
- $||f||_\infty = \sup_{w\in\Omega} |f(w)|$.

$C_0(\Omega)$' nın birimli olması için gerek ve yeter koşul Ω' nın kompakt olmasıdır. Bu durumda $C_0(\Omega) = C(\Omega)$, yani Ω üzerinde tanımlı kompleks değerli sürekli fonksiyonların uzayıdır.

Örnek 2: Kapalı birim disk $\bar{\mathbb{D}}$ üzerinde sürekli ve açık birim disk $\mathbb{D}$ üzerinde analitik olan fonksiyonların kümesi A, $C(\bar{\mathbb{D}})$'nin kapalı bir alt cebiridir. Dolayısıyla A, birimli bir Banach cebiridir ve **disk cebiri** olarak bilinir. Bu cebir, analitik fonksiyonlar teorisinin pek çok yaklaşımını, Banach cebirlerinin kuruluşuna genişletilmesi açısından fonksiyon cebirleri teorisinde önemli bir yere sahiptir [32, s.3].

Benzer şekilde $\mathbb{D}$ yerine $\mathbb{D}^n$ polidiski yada B^{2n} birim topu alındığında söz konusu cebire, sırasıyla **polidisk cebiri** yada **top cebiri** denir.

Örnek 3: X Banach uzayı ve $B(X)$, X üzerinde tanımlı sınırlı lineer operatörlerin kümesi olmak üzere operatörlerin standart noktasal toplam, skalerle çarpım, $(S,T) \rightarrow ST$ $((ST)(x) = S(Tx),\ x \in X)$ şeklinde verilen çarpım işlemlerine ve

$$||S|| = \sup_{x \neq 0} \frac{||S(x)||}{||x||} = \sup_{||x|| \leq 1} ||S(x)||$$

operatör normuna göre Banach cebiridir [32, s.3].

Bir $\mathcal{A}$ cebirinin $\mathcal{I}$ alt uzayında her $a \in \mathcal{A}$ ve her $b \in \mathcal{I}$ için $ab \in \mathcal{I}$ (sırasıyla $ba \in \mathcal{I}$) koşulu sağlanıyorsa $\mathcal{I}$'ya, $\mathcal{A}$'nın sol (sırasıyla sağ) ideali denir. Aynı anda hem sağ hem sol idealse $\mathcal{I}$'ya $\mathcal{A}$'nın **iki yanlı ideali** yada **ideali** denir. $\mathcal{A}$'nın kendisinden başka hiçbir öz ideali (yani $\mathcal{A}$ olmayan) tarafından içerilmeyen öz idealine $\mathcal{A}$'nın **maksimal ideali** denir. $\mathcal{A}$ cebirinin bir C alt kümesini içeren en küçük idealine C tarafından üretilen ideal denir.

$\mathcal{I}$, bir $\mathcal{A}$ cebirinin ideali olmak üzere $\mathcal{A}/\mathcal{I}$ bölüm uzayı

$$(a + \mathcal{I})(b + \mathcal{I}) = ab + \mathcal{I}$$

şeklinde verilen çarpım işlemiyle birlikte bir cebir oluşturur. $\mathcal{A}$ normlu cebir ise bir idealin kapanışı da idealdir. $\mathcal{I}$, $\mathcal{A}$ normlu cebirinin kapalı bir ideali olmak üzere $\mathcal{A}/\mathcal{I}$ cebiri de

$$||a + \mathcal{I}|| = \inf_{b \in \mathcal{I}} ||a + b||$$

bölüm normuna göre bir normlu cebirdir [32, Teorem 1.1.1, s.5].

$\mathcal{A}$ ve $\mathcal{B}$ iki cebir olmak üzere her $a, b \in \mathcal{A}$ için $\tau(ab) = \tau(a)\tau(b)$ koşulunu sağlayan $\tau : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$ lineer dönüşümüne $\mathcal{A}$'dan $\mathcal{B}$'ye bir **homomorfizma** denir. Değişmeli bir $\mathcal{A}$ cebiri üzerindeki sıfırdan farklı $\tau : \mathcal{A} \rightarrow \mathbb{C}$ homomorfizmasına $\mathcal{A}$ üzerinde bir **karakter** denir. $\mathcal{A}$ üzerindeki tüm karakterlerin kümesi $\Omega(A)$ ile gösterilir. $\mathcal{A}$ birimli, değişmeli bir Banach cebiri ise $\Omega(\mathcal{A})$ boştan farklıdır ve $\tau \rightarrow Ker\tau$ dönüşümü, $\Omega(\mathcal{A})$'dan, $\mathcal{A}$'nın tüm maksimal ideallerinin kümesi üzerine bire-bir ve örten bir dönüşümdür [32, Teorem 1.3.3, s.14].

$\mathcal{A}$ birimli bir Banach cebiri ise $\Omega(\mathcal{A})$, $\mathcal{A}$'nın dual uzayının kapalı birim topunda içerilir [32, Teorem 1.3.4, s.14]. Dolayısıyla $\Omega(\mathcal{A})$ üzerinde bir zayıf $*$-topolojisi vardır ve bu topolojiyle verilmiş $\Omega(\mathcal{A})$ topolojik uzayına $\mathcal{A}$'nın **karakter uzayı** yada **spektrumu** denir.

Teorem 2.1. [32, Theorem 1.3.5.,s.15] Eğer $\mathcal{A}$ değişmeli bir Banach cebiri ise $\Omega(\mathcal{A})$ lokal kompakt Hausdorff uzayıdır. $\mathcal{A}$ birimli ise $\Omega(\mathcal{A})$ kompakttır.

$\mathcal{A}$ değişmeli bir Banach cebiri olmak üzere bir $a \in \mathcal{A}$ için

$$\hat{a} : \Omega(\mathcal{A}) \to \mathbb{C},\ \tau \to \tau(a)$$

şeklinde bir fonksiyon tanımlansın. $\Omega(\mathcal{A})$ üzerindeki topoloji, tüm $\hat{a}$ fonksiyonlarını sürekli yapan en küçük topolojidir. Her $\varepsilon > 0$ için $\{\tau \in \Omega(\mathcal{A}) : |\tau(a)| \geq \varepsilon\}$ kümesi, $\mathcal{A}$'nın dual uzayının kapalı birim topunda zayıf $*$-kapalıdır ve Banach-Alaoglu teoreminden dolayı da zayıf $*$-kompaktır. Bu yüzden $\hat{a} \in C_0(\Omega(\mathcal{A}))$'dir [32, s. 15]). $\hat{a}$'ya, a'nın **Gelfand dönüşümü** denir.

Teorem 2.2. (Gelfand'ın Temsili, [32, Theorem 1.3.6., s. 15]) $\mathcal{A}$ değişmeli bir Banach cebiri ve $\Omega(A)$ boştan farklı olmak üzere

$$\mathcal{A} \to C_0(\Omega(A)),\ \ a \to \hat{a}$$

dönüşümü bir homomorfizmadır.

Eğer $\mathcal{A}$ birimli ise $C_0(\Omega(A)) = C(\Omega(A))$ olacağına dikkat edilmelidir.

Tanım 2.2. Bir $\mathcal{A}$ cebiri üzerinde aşağıdaki koşulları sağlayan $S \to S^*$ *-involüsyon işlemi varsa $\mathcal{A}$ cebirine ***-cebiri** denir: Her $S, T \in \mathcal{A}$ ve her $\lambda \in \mathbb{C}$ için

(i) $(\lambda S + T)^* = \bar{\lambda} S^* + T^*$,

(ii) $(ST)^* = T^* S^*$,

(iii) $(S^*)^* = S$.

$\mathcal{A}$'nın bir alt kümesi $\mathcal{B}$ için $\mathcal{B}^* = \{S^* : S \in \mathcal{B}\}$ olmak üzere eğer $\mathcal{B}^* = \mathcal{B}$ ise $\mathcal{B}$ kümesine **kendisine eşlenik** denir. $\mathcal{A}$'nın kendisine eşlenik $\mathcal{B}$ alt cebirine $\mathcal{A}$'nın *-alt cebiri denir ve involüsyonun $\mathcal{B}$'ye kısıtlanışı ile birlikte $\mathcal{B}$ de bir $*$-cebiridir. $\mathcal{A}$'nın her C alt kümesi için C'yi içeren en küçük *-alt cebiri vardır ve buna C tarafından üretilen $*$-cebiri denir.
Bir $S \in \mathcal{A}$ elemanına

- $S^* = S$ koşulunu sağlıyorsa **kendisine eşlenik**,
- $S^*S = SS^*$ koşulunu sağlıyorsa **normal**,
- $S = S^* = S^2$ koşulunu sağlıyorsa **izdüşüm** denir.

Eğer ek olarak, $\mathcal{A}$ birimli (1) ise

- $S^*S = SS^* = 1$ koşulunu sağlıyorsa S'ye **birimsel** (unitar),
- $S^*S = 1$ koşulunu sağlıyorsa S'ye **izometri** denir.

$S, T \in \mathcal{A}$ için $T = USU^*$ olacak şekilde bir $U \in \mathcal{A}$ birimsel elemanı var ise S ve T elemanlarına **birimsel denktirler** denir.
$\mathcal{I}$, $\mathcal{A}$ nın kendisine eşlenik bir ideali olmak üzere $\mathcal{A}/\mathcal{I}$ bölüm cebiri,

$$(S + \mathcal{I})^* = S^* + \mathcal{I}, \quad S \in \mathcal{A}$$

ile verilen involüsyon işlemine göre bir $*$-cebiridir.
$\mathcal{A}$ ve $\mathcal{B}$ iki $*$-cebiri olmak üzere bir $\varphi : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ homomorfizması $*$ işlemini koruyorsa, yani her $S \in \mathcal{A}$ için $\varphi(S^*) = (\varphi(S))^*$ ise φ ye $*$**-homomorfizması** denir. Bu durumda, $Ker\varphi$, $\mathcal{A}$'nın kendisine eşlenik bir ideali, $\varphi(\mathcal{A})$ ise $\mathcal{B}$'nin $*$-alt cebiridir. Ek olarak, φ $*$-homomorfizması bire-bir ve örten ise φ'ye $*$**-izomorfizması** denir.

Tanım 2.3. Bir $\mathcal{A}$ $*$-cebiri üzerinde her $S \in \mathcal{A}$ için

$$||S|| = ||S^*||$$

koşulunu sağlayan bir $||\cdot||$ normu var ve bu norma göre $\mathcal{A}$ tam ise $\mathcal{A}$ $*$-cebirine **Banach** $*$**-cebiri** denir. Ek olarak, her $S \in \mathcal{A}$ için

$$||S^*S|| = ||S||^2$$

koşulu sağlanıyorsa $\mathcal{A}$ Banach $*$-cebirine C^***-cebir**, $||\cdot||$ normuna ise $\mathcal{A}$ üzerinde bir C^***-norm** denir.

Bir C^*-cebirin kapalı *-cebiri de bir C^*-cebirdir. Bu yüzden bir C^*-cebirin kapalı bir $*$-cebirine C^***-alt cebiri** denir. C, bir C^*-cebirinin alt kümesi olmak üzere bu C^*-cebirin C'yi içeren en küçük C^*-alt cebirine C **ile üretilen** C^***-alt cebiri** denir.
$\mathcal{I}$, bir C^*-cebiri $\mathcal{A}$'nın kapalı bir ideali ise $\mathcal{I}$ kendisine eşleniktir ve bu yüzden $\mathcal{A}$' nın bir C^*-alt cebiridir [32, Theorem 3.1.3, s.79]. Ayrıca $\mathcal{A}/\mathcal{I}$ bölüm cebiri de yukarıda verilen doğal bölüm işlemleri ve doğal bölüm normuna göre bir C^*-cebiridir.
Bir $\mathcal{A}$ C^*-cebirinin $\{AB - BA : A, B \in \mathcal{A}\}$ kümesini içeren en küçük, kapalı, iki yanlı $\mathcal{I}$ idealine $\mathcal{A}$'nın **komutatör ideali** denir. Eğer $\mathcal{A}$ C^*-cebiri değişmeli değilse, $\mathcal{I}$ komutatör idealinin, $\mathcal{A}/\mathcal{I}$ bölüm uzayını değişmeli yapan en küçük kapalı ideal olduğu kolaylıkla görülür.
Örnek 4: Örnek 1 de verilen $C_0(\Omega)$ Banach cebiri, $f \to \bar{f}$ involüsyon işlemine göre bir C^*-cebiridir.
Örnek 5: H bir Hilbert uzayı olmak üzere H üzerinde sınırlı lineer operatörlerin cebiri $B(H)$, operatörlerin eşlenik işlemine göre bir C^*-cebiridir. Aşağıdaki teorem, tüm C^*-cebirlerin aslında $B(H)$'ın C^*-alt cebiri olduğunu gösterir.

Teorem 2.3. (Gelfand-Naimark Teoremi, [32, Theorem 3.4.1., s.94]) Her C^*-cebir, $B(H)$ cebirinin bir C^*-alt cebirine izometrik *-izomorftur.

Örnek 6: H bir Hilbert uzayı olmak üzere bir $K : H \to H$ lineer operatörü altında H' nin kapalı birim topunun görüntüsünün kapanışı kompakt oluyorsa bu K operatörüne **kompakt operatör** denir. H'den H'ye giden kompakt operatörlerin kümesi $\mathcal{K}(H)$ ile gösterilir. $\mathcal{K}(H)$, $B(H)$'ın kapalı, kendisine eşlenik bir idealidir [32, s.54]. Dolayısıyla $\mathcal{K}(H)$ bir C^*-cebirdir. $\mathcal{B}(H)/\mathcal{K}(H)$ bölüm cebirine, H üzerindeki **Calkin cebiri** denir.
Bu noktada ilerleyen bölümlerde kompakt operatörler ile ilişkili bir şekilde kullanılacak olan Fredholm operatörünün tanımını vermek yerinde olacaktır [32, s.23]:

Tanım 2.4. H bir Hilbert uzayı olmak üzere bir $T \in \mathcal{B}(H)$ operatörünün görüntü kümesi Ran(T) kapalı ve Ker$T$ ile KerT^* çekirdekleri sonlu boyutlu ise T operatörüne **Fredholm operatörü** denir.

Bir T Fredholm operatörünün indeksi $ind(T)$ ise $ind(T) = KerT - KerT^*$ şeklinde tanımlanır. Bu çalışmada Fredholm operatörü için V. Atkinson tarafından verilen aşağıdaki karakterizasyon kullanılacaktır:

Teorem 2.4. (Atkinson, [32, s.28]) Bir $T \in \mathcal{B}(H)$ operatörünün Fredholm operatörü olması için gerek ve yeter koşul $\pi(T)$'nin $\mathcal{B}(H)/\mathcal{K}(H)$ bölüm cebirinin terslenebilir bir elemanı olmasıdır. Burada $\pi : \mathcal{B}(H) \to \mathcal{B}(H)/\mathcal{K}(H)$, $\pi(T) = T + \mathcal{K}(H)$ doğal bölüm homomorfizmasıdır.

Aşağıdaki teorem, değişmeli C^*-cebirlerin tam karakterizasyonunu verir.

Teorem 2.5. (Gelfand'ın Teoremi, [32, Theorem 2.1.10, s.41])) $\mathcal{A}$ sıfırdan farklı, değişmeli bir C^*-cebir ise

$$\tau : \mathcal{A} \to C_0(\Omega(\mathcal{A})), \quad a \to \hat{a}$$

dönüşümü izometrik $*$-izomorfizmasıdır.

Eğer $\mathcal{A}$ birimli ise $C_0(\Omega(A)) = C(\Omega(A))$ olacağına dikkat edilmelidir.

L, bir H Hilbert uzayının kapalı bir alt vektör uzayı ve $\mathcal{A}$, $B(H)$'ın bir alt kümesi olsun. $\mathcal{A}$'nın her operatörü için L invaryant kalıyorsa, yani her $T \in \mathcal{A}$ için $TL \subseteq L$ ise L'ye $\mathcal{A}$ kümesi için invaryant alt uzay denir. Özel olarak, $\mathcal{A}$, $B(H)$'ın bir C^*-alt cebiri olsun. H'nın $\mathcal{A}$ için invaryant alt uzayları sadece aşikar alt uzayları, yani H ve $\{0\}$ ise $\mathcal{A}$'ya H üzerinde **indirgenemez C^*-cebir** denir [32, s.58]. C^*-cebirlerin indirgenemezliği, bu çalışmada büyük önem taşımaktadır. İndirgenemezlik ile kompakt operatörlerin idealleri arasındaki ilişkiyi veren aşağıdaki teorem bu çalışmanın temel araçlarındandır:

Teorem 2.6. ([8, Proposition 1]) $\mathcal{A}$ bir H Hilbert uzayı üzerinde indirgenemez C^*-cebir olmak üzere eğer $\mathcal{A}$, H üzerinde tanımlı bir kompakt operatör içeriyorsa $\mathcal{A}$ ve $\mathcal{A}$'nın aşikar olmayan tüm idealleri, H üzerinde tanımlı tüm kompakt operatörleri içerir.

Bu çalışmada kullanılacak olan C^*-cebirlerin genel teorisinden bir diğer teorem de aşağıdadır:

Teorem 2.7. ([16, Proposition 1.3, s.4]) $\mathcal{B}$, bir $\mathcal{A}$ C^*-cebirinin C^*-alt cebiri ve $T \in \mathcal{B}$ olsun. T'nin, $\mathcal{B}$'de terslenebilir olması için gerek ve yeter koşul $\mathcal{A}$'da terslenebilir olmasıdır.

2.2.1. C^*-cebirlerin tensör çarpımları

Bu kısımda C^*-cebirlerin çarpımları ile ilgili bu çalışma için gerekli bilgiler verilecektir. Kaynak olarak [48, Section 4]'den yararlanılmıştır.

$\mathcal{A}$ ve $\mathcal{B}$ iki C^*-cebir olmak üzere $\mathcal{A} \otimes \mathcal{B}$, bu iki C^*-cebirin cebirsel tensör çarpımını göstersin. $\mathcal{A} \otimes \mathcal{B}$, her $a, a' \in \mathcal{A}, b, b' \in \mathcal{B}$ için $(a \otimes b)(a' \otimes b') = aa' \otimes bb'$ şeklindeki çarpım ve $(a \otimes b)^* = a^* \otimes b^*$ şeklindeki involüsyon işlemleriyle birlikte bir $*$-cebiridir ve bu cebire, $*$-cebiri tensör çarpımı denir.

Bir $*$-cebiri tensör çarpımı $\mathcal{A} \otimes \mathcal{B}$'nin C^*-cebir olmasını sağlayan çok sayıda C^*-normu vardır: H bir Hilbert uzayı olmak üzere $\rho : \mathcal{A} \otimes \mathcal{B} \to B(H)$, $\mathcal{A} \otimes \mathcal{B}$ üzerinde bir $*$-homomorfizması olsun. $\mathcal{A} \otimes \mathcal{B}$ üzerinde

$$||x||_{\max} = \sup_{\rho} ||\rho(x)||, \ x \in \mathcal{A} \otimes \mathcal{B}$$

şeklinde tanımlanan $||\cdot||_{\max}$ normu bir C^*-normdur. Bu norma $\mathcal{A} \otimes \mathcal{B}$ üzerindeki maksimal C^*-normu denir. $\mathcal{A} \otimes \mathcal{B}$'nin bu norma göre tamlanışına ise $\mathcal{A}$ ve $\mathcal{B}$'nin **maksimal tensör çarpımı** denir ve $\mathcal{A} \otimes_{\max} \mathcal{B}$ ile gösterilir [48, s.206].

Başka bir C^*-norm örneği de minimal C^*-normdur: H_1 ve H_2 iki Hilbert uzayı, $\mathcal{A}$ ve $\mathcal{B}$ iki C^*-cebir, $\rho_{\mathcal{A}} : \mathcal{A} \to B(H_1)$ ve $\rho_{\mathcal{B}} : \mathcal{B} \to B(H_2)$ sırasıyla, $\mathcal{A}$ ve $\mathcal{B}$ üzerinde $*$-homomorfizmaları olsun. $\mathcal{A} \otimes \mathcal{B}$ üzerinde

$$||x||_{\min} = \sup_{\rho_{\mathcal{A}}, \rho_{\mathcal{B}}} ||(\rho_{\mathcal{A}} \otimes \rho_{\mathcal{B}})(x)||, x \in \mathcal{A} \otimes \mathcal{B}$$

şeklinde tanımlanan $||\cdot||_{\min}$ normu bir C^*-normdur. Bu norma $\mathcal{A} \otimes \mathcal{B}$ üzerindeki minimal C^*-normu denir. $\mathcal{A} \otimes \mathcal{B}$'nin bu norma göre tamlanışına ise $\mathcal{A}$ ve $\mathcal{B}$'nin **minimal tensör çarpımı** denir ve $\mathcal{A} \otimes_* \mathcal{B}$ yada $\mathcal{A} \otimes_{\min} \mathcal{B}$ ile gösterilir [48, s.207].

Genel olarak, minimal C^*-norm ile maksimal C^*-norm birbirlerinden farklıdır ve $||\cdot||_\circ$, $\mathcal{A} \otimes \mathcal{B}$ üzerinde herhangi bir C^*-norm olmak üzere $||\cdot||_{\min} \leq ||\cdot||_\circ \leq ||\cdot||_{\max}$'dır.

Tanım 2.5. $\mathcal{A}$ bir C^*-cebir olmak üzere her C^*-cebir $\mathcal{B}$ için $\mathcal{A} \otimes \mathcal{B}$ üzerinde tek bir C^*-norm varsa $\mathcal{A}$'ya **nükleer C^*-cebir** denir.

Bu durumda $\mathcal{A} \otimes_{\max} \mathcal{B} = \mathcal{A} \otimes_{\min} \mathcal{B}$'dır.

Örnek 7: H bir Hilbert uzayı olmak üzere Örnek 6 da tanımladığımız, H üzerindeki kompakt operatörlerin C^*-cebiri $\mathcal{K}(H)$ nükleer bir C^*-cebirdir [32, Example 6.3.2, s.195].

Örnek 8: Her değişmeli C^*-cebir nükleerdir [32, Theorem 6.4.15, s.205]. Dolayısıyla bir Ω kompakt uzayı için $C(\Omega)$ nükleerdir.

Örnek 9: $\mathcal{I}$, nükleer C^*-cebir $\mathcal{A}$ nın kapalı bir ideali ise $\mathcal{I}$ ve $\mathcal{A}/\mathcal{I}$ da nükleerdir [32, s.216].

2.2.2. Nükleer C^*-cebirler ve Kısa Tam Diziler

Bu bölümde nükleer C^*-cebirlerle ilgili incelemelere devam edilecektir. Bu kısım için kaynak olarak [32, Section 6.5]'ten yararlanılmıştır.

Tanım 2.6. $\mathcal{J}$, $\mathcal{A}$ ve $\mathcal{B}$ birer C^*-cebir, $j : \mathcal{J} \to \mathcal{A}$ bir bire-bir $*$-homomorfizması, π : $\mathcal{A} \to \mathcal{B}$ bir örten $*$-homomorfizması ve $Im(j) = Ker(\pi)$ olsun. Bu durumda

$$0 \longrightarrow \mathcal{J} \xrightarrow{j} \mathcal{A} \xrightarrow{\pi} \mathcal{B} \longrightarrow 0$$

dizisine C^***-cebirlerin kısa tam dizisi** ve $\mathcal{A}$'ya, $\mathcal{B}$'nin J tarafından **genişlemesi** denir.

Aşağıdaki teoremler bu çalışmanın Bulgular bölümünde kullanacağımız temel araçlardır:

Teorem 2.8. ([32, Theorem 6.5.1,s.210]) $\mathcal{A}, \mathcal{A}', \mathcal{B}, \mathcal{B}'$ birer C^*-cebir, $\varphi : \mathcal{A} \to \mathcal{A}'$ ve $\psi : \mathcal{B} \to \mathcal{B}'$ birer $*$-homomorfizması olmak üzere her $S \in \mathcal{A}$ ve her $T \in \mathcal{B}$ için

$$\rho(S \otimes T) = \varphi(S) \otimes \psi(T)$$

olacak şekilde tek bir $\rho : \mathcal{A} \otimes_* \mathcal{B} \to \mathcal{A}' \otimes_* \mathcal{B}'$ $*$-homomorfizması vardır. Ayrıca φ ve ψ bire-bir ise ρ da bire-birdir. ρ, $\varphi \otimes_* \psi$ ile gösterilir.

Teorem 2.9. ([32, Theorem 6.5.2, s.211]) $\mathcal{J}$, $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$ ve $\mathcal{D}$ birer C^*-cebir ve

$$0 \longrightarrow \mathcal{J} \xrightarrow{j} \mathcal{A} \xrightarrow{\pi} \mathcal{B} \longrightarrow 0$$

C^*-cebirlerinin kısa tam dizisi ve $\mathcal{B} \otimes \mathcal{D}$ tek bir C^*-norma sahip olmak üzere (yani $\mathcal{B}$ veya $\mathcal{D}$ nükleer)

$$0 \longrightarrow \mathcal{J} \otimes_* \mathcal{D} \xrightarrow{j \otimes_* 1} \mathcal{A} \otimes_* \mathcal{D} \xrightarrow{\pi \otimes_* 1} \mathcal{B} \otimes_* \mathcal{D} \longrightarrow 0$$

dizisi de C^*-cebirlerin kısa tam dizisidir.

Teorem 2.10. ([32, Theorem 6.5.3, s.212]) Nükleer bir C^*-cebirin, nükleer bir C^*-cebir tarafından genişlemesi de nükleerdir.

Başka bir deyişle,

$$0 \longrightarrow \mathcal{J} \xrightarrow{j} \mathcal{A} \xrightarrow{\pi} \mathcal{B} \longrightarrow 0,$$

$\mathcal{J}$, $\mathcal{A}$ ve $\mathcal{B}$ C^*-cebirlerinin kısa tam dizisi olmak üzere $\mathcal{J}$ ve $\mathcal{B}$ nükleer ise $\mathcal{A}$ da nükleerdir.

2.3. BAZI OPERATÖR SINIFLARI TARAFINDAN ÜRETİLEN C^*-CEBİRLER

Bu bölümde, çalışmaya uygunlukları açısından bir izometri tarafından üretilen C^*-cebirin yapısı, ağırlıklı tek taraflı bir öteleme operatörü tarafından üretilen C^*-cebirin yapısı ve farklı fonksiyon uzayları üzerinde tanımlı sürekli sembollü Toeplitz operatörleri tarafından üretilen C^*-cebirlerin yapıları ile ilgili çalışmaların kısa bir özeti verilecektir.

2.3.1. Bir İzometri Tarafından Üretilen C^*-cebir

Bir izometri tarafından üretilen C^*-cebirin yapısı, L.A. Coburn [7] tarafından incelenmiştir. Bir H Hilbert uzayı üzerinde tanımlı her A izometrisinin Wold- von Neumann ayrışımına (bkz.[32, Theorem 3.5.17, s.105]) göre ya (i) birimsel bir operatör, ya (ii) α-katlı S_α tek taraflı öteleme operatörü yada (iii) W birimsel bir operatör olmak üzere $W \oplus S_\alpha$ direkt toplamı olduğu iyi bilinmektedir. Dolayısıyla bir izometri tarafından üretilen C^*-cebirin yapısı problemi, (i), (ii), (iii) de verilen operatörler tarafından üretilen C^*-cebirlerin yapısı problemine indirgenir. (i) durumunda, söz konusu C^*-cebirin değişmeli ve birimli olmasından dolayı $C(\Omega(A))$'ya izometrik $*$-izomorf olduğu Teorem (2.5)'in açık bir sonucudur. Diğer durumlar için öncelikle bazı hatırlatmalar verelim.

Tanım 2.7. H bir Hilbert uzayı ve $\{e_i : i = 0, 1, 2, \ldots\}$, H Hilbert uzayının ortonormal bazı olmak üzere, her $i = 0, 1 \ldots$ için $Se_i = e_{i+1}$ şeklinde tanımlanan $S : H \to H$ operatörüne **tek taraflı öteleme operatörü** denir.

$H \oplus H \oplus \ldots \oplus H$ üzerinde tanımlı $S \oplus S \oplus \ldots \oplus S$, α kez direkt toplamına da **α-katlı tek taraflı öteleme operatörü** denir ve S_α ile gösterilir.

(ii) durumunda, yani $A = S_\alpha$ ise, S_α ile üretilen C^*-cebirin yapısı, $S \leftrightarrow S_\alpha$ dönüşümüyle birlikte S tarafından üretilen C^*-cebiri $\mathcal{A}(S)$'nin yapısı problemine indirgenir ve bu yapı Coburn tarafından aşağıdaki gibi verilmiştir:

Teorem 2.11. ([7, Theorem 1 ve Theorem 2]) $\mathcal{A}(S)$ C^*-cebiri ve $\mathcal{A}(S)$'nin aşikar olmayan her $\mathcal{I}$ ideali, H üzerindeki tüm kompakt operatörlerin ideali $\mathcal{K}$'yı içerir. Ayrıca $\mathcal{A}(S)/\mathcal{K}$ bölüm cebiri, $C(\mathbb{T})$'ye izometrik $*$-izomorftur.

(iii) durumunda, yani W birimsel bir operatör olmak üzere $A = W \oplus S_\alpha$ ise, $W \oplus S_\alpha$ ile üretilen C^*-cebirin yapısı, $S \leftrightarrow S_\alpha$ dönüşümüyle birlikte $W \oplus S$ tarafından üretilen C^*-cebiri $\mathcal{A}(W \oplus S)$ nin yapısı problemine indirgenir ve bu yapı Coburn tarafından aşağıdaki gibi verilmiştir:

Teorem 2.12. ([7, Theorem 3, Corollary 3.1, Theorem 4]) $\mathcal{A}(W \oplus S)$ C^*-cebiri, $W \oplus S \leftrightarrow S$ dönüşümüyle $\mathcal{A}(S)$'e izometrik $*$-izomorftur. Ayrıca $\mathcal{A}(W \oplus S)$ cebiri, tek bir aşikar olmayan, minimal $\mathcal{I}$ idealine sahiptir. Bu idealin yapısı $\mathcal{I} = \mathcal{K} \cap \mathcal{A}(W \oplus S)$ formundadır ve $\mathcal{A}(W \oplus S)/\mathcal{I}$ bölüm cebiri, $C(\mathbb{T})$'ye izometrik $*$-izomorftur.

Sonuç olarak, herhangi bir A izometrisi tarafından üretilen C^*-cebirinin yapısı bu teoremlerle tamamen bilinmektedir.

Bu sonuçlardan sonra daha geniş operatör sınıfları tarafından üretilen C^*-cebirlerin yapısını sormak çok doğaldır ve bu konuyla ilgili yapılmış pek çok çalışma vardır. Biz bu çalışmada bize gerekli olacak olan operatör sınıflarını vereceğiz.

2.3.2. Bir Ağırlıklı Tek Taraflı Öteleme Operatörü Tarafından Üretilen C^*-cebir

Ağırlıklı tek taraflı öteleme operatörleri tarafından üretilen C^*-cebirlerin yapıları ile ilgili çok sayıda çalışma yapılmıştır [24, 10]. Bu bölümde bu çalışmalar arasından, bu çalışmanın temel araçlarından biri olması sebebiyle, N. Sadıkov'un [42] makalesinde yaptığı incelemeler verilecektir.

Tanım 2.8. Bir H Hilbert uzayında $\{e_i : i = 0, 1, \ldots\}$ ortonormal baz, $\{\alpha_i : i = 0, 1, \ldots\}$ kompleks sayıların sınırlı bir kümesi olmak üzere H üzerinde her i için

$$Ae_i = \alpha_i e_{i+1}$$

şeklinde tanımlanan A operatörüne **ağırlıklı tek taraflı öteleme operatörü** denir.

N.Sadıkov, ağırlıklı tek taraflı öteleme operatörleriyle üretilen C^*-cebirinin yapısını, bu operatörün bir fonksiyonel modelini kurarak, yani bu operatörün, $\mathbb{D}$ birim diski üzerinde bir $H^2(\mu)$ Hardy tipi uzayda bağımsız değişkenle çarpım operatörüne birimsel denk olduğunu göstererek vermiştir. Bu model şöyle kurulmuştur:
A operatörünün $\{\alpha_i\}$ ağırlığı yardımıyla

$$\delta_n = \Pi_{i=0}^{n-1}\alpha_i$$

olacak şekilde bir $\{\delta_n : n = 0, 1, \ldots\}$ dizisi tanımlansın.
Ağırlıklı tek taraflı öteleme operatörlerin bir Ω sınıfını düşünelim öyle ki bu sınıfa ait sistemlerin ağırlıkları yardımıyla oluşturulan $\{\delta_n : n = 0, 1, \ldots\}$ dizisi karşı gelen Hausdorff moment probleminin (bkz. [2, Theorem 2.6.4, s.74]) bir çözümü olsun, yani $[0, 1]$ üzerinde

$$\delta_n^2 = \int_{[0,1]} r^{2n} d\nu(r)$$

eşitliğini sağlayan bir ν Borel ölçüsü varolsun. Bu sınıftaki bir A operatörüne karşı gelen ölçü de ν_A ile gösterilsin.
$A \in \Omega$ olmak üzere bu operatöre karşı gelen ν_A ölçüsü yardımıyla $\bar{\mathbb{D}}$ üzerinde

$$d\mu(z) = d\nu(r)d\theta,\ z = re^{i\theta}$$

ölçüsü tanımlanır. Bu ölçüye göre karesi integrallenebilir analitik fonksiyonların uzayı $H^2(\mu)$ ile gösterilsin. H üzerinde tanımlı ağırlıklı tek taraflı öteleme operatörü A ile $H^2(\mu)$ üzerinde tanımlı bağımsız değişkenle çarpım operatörü M_z'nin birimsel denk olduğu Sadıkov [42] tarafından gösterilmiştir. Bu fonksiyonel model kullanılarak aşağıdaki teorem ispatlanmıştır:

Teorem 2.13. (Sadıkov, [42]) Bir $A \in \Omega$ operatörü ile üretilen cebirin, $\mathcal{A}(\mathbb{D})$ disk cebirine izometrik izomorf olması için gerek ve yeter koşul herhangi bir $\delta \in (0, 1]$ için

$$\nu(1) - \nu((1-\delta)^2) > 0$$

olmasıdır.

Bu teoremden yararlanılarak, bu sınıfa ait bir A operatörü tarafından üretilen C^*-cebirin yapısı verilmiştir.:

Teorem 2.14. (Sadıkov, [42]) $A \in \Omega$ olsun. A operatörü tarafından üretilen cebir disk cebiri ise A operatörü tarafından üretilen C^*-cebir $C^*(A)$'nın komutatör ideali kompakt operatörlerin $\mathcal{K}$ idealidir ve

$$C^*(A) = \{T_\psi + K : \psi \in C(supp\mu), \quad K \in \mathcal{K}\}$$

formundadır. $C^*(A)/\mathcal{K}$ bölüm cebiri ise $\sigma(T_\psi + K) = \psi|_{\mathbb{T}}$ dönüşümü ile $C(\mathbb{T})$'ye $*$-izomorftur.

2.3.3. Sürekli Sembollü Toeplitz Operatörleri Tarafından Üretilen C^*-cebirler

Literatürde farklı fonksiyonel Hilbert uzayları üzerinde tanımlı sürekli sembollü Toeplitz operatörleri tarafından üretilen C^*-cebirlerin yapısını veren pek çok önemli çalışma vardır. Bu çalışmalar için [46, 49] kaynaklarına bakılabilir. Bu bölümde çalışmamıza uygunlukları açısından Bölüm 2.1 de verdiğimiz temel fonksiyonel Hilbert uzayları üzerinde tanımlı sürekli sembollü Toeplitz operatörleri tarafından üretilen C^*-cebirlerin yapısını veren çalışmalar hatırlatılacaktır.

Birim çember üzerindeki Hardy uzayı durumu

Tanım 2.9. $P : L^2(\mathbb{T}) \to H^2(\mathbb{T})$ ortogonal izdüşüm operatörü ve $\varphi \in C(\mathbb{T})$ olmak üzere $f \in H^2(\mathbb{T})$ için $T_\varphi(f) = P(\varphi f)$ şeklinde tanımlanan $T_\varphi : H^2(\mathbb{T}) \to H^2(\mathbb{T})$ operatörüne $H^2(\mathbb{T})$ **üzerinde φ sürekli sembollü Toeplitz operatörü** denir.

Burada P ortogonal izdüşümü, $H^2(\mathbb{T})$'nin üretici çekirdeği $K(z, w)$ yardımıyla bir integral operatörü şeklinde tanımlanır [52, Proposition 4.28, s.141]:

$$(Pf)(z) = \int_{\mathbb{T}} f(w)K(z, w)dm(w) = \int_{\mathbb{T}} \frac{f(w)}{1 - z\bar{w}}\, dm(w), \quad z \in \mathbb{D}.$$

Dolayısıyla $H^2(\mathbb{T})$ üzerinde sürekli sembollü Toeplitz operatörünün integral temsili şu şekilde olacaktır:

$$(T_\varphi f)(z) = \int_{\mathbb{T}} \frac{f(w)\varphi(w)}{1 - z\bar{w}}\, dm(w), \quad z \in \mathbb{D}$$

Sürekli sembollü Toeplitz operatörleri tarafından üretilen C^*-cebir, $\mathcal{A}(C(\mathbb{T}))$ ile gösterilsin. Coburn, aşağıdaki teorem ile bu cebirin tam karakterizasyonunu vermiştir.

Teorem 2.15. (Coburn, [8]) $\mathcal{A}(C(\mathbb{T}))$ C^*-cebirinin komutatör ideali $\mathcal{K}(H^2)$'dir ve bu C^*-cebir

$$\mathcal{A}(C(\mathbb{T})) = \{T_\varphi + K : \varphi \in C(\mathbb{T}) \text{ ve } K \in \mathcal{K}(H^2)\}$$

formundadır. $\mathcal{A}(C(\mathbb{T}))/\mathcal{K}(H^2)$ bölüm cebiri, $C(\mathbb{T})$' ye

$$\tau : \mathcal{A}(C(\mathbb{T}))/\mathcal{K}(H^2) \to C(\mathbb{T}),\ T_\varphi + \mathcal{K}(H^2) \to \varphi$$

dönüşümüyle $*$-izomorftur.

Atkinson'un Teorem (2.4) karakterizasyonu kullanılarak üstteki teorem yardımıyla sürekli sembollü Toeplitz operatörlerinin Fredholmluluğu da aşağıdaki gibi elde edilir:

Sonuç 2.1. $\varphi \in C(\mathbb{T})$ olmak üzere, T_φ Toeplitz operatörünün Fredholm operatörü olması için gerek ve yeter koşul her $z \in \mathbb{T}$ için $\varphi(z) \neq 0$ olmasıdır.

Birim disk üzerindeki Bergman uzayı durumu

Coburn [9], $\mathbb{D}$ birim disk üzerindeki $L^2_a(\mathbb{D})$ Bergman uzayında tanımlı sürekli sembollü Toeplitz operatörleri tarafından üretilen C^*-cebirlerin yapısı için de benzer sonuçları elde etmiştir.

Tanım 2.10. $P : L^2(\mathbb{D}) \to L^2_a(\mathbb{D})$ ortogonal izdüşüm operatörü ve $\varphi \in C(\overline{\mathbb{D}})$ olmak üzere her $f \in L^2_a(\mathbb{D})$ için $T_\varphi(f) = P(\varphi f)$ şeklinde tanımlanan $T_\varphi : L^2_a(\mathbb{D}) \to L^2_a(\mathbb{D})$ operatörüne $L^2_a(\mathbb{D})$ **üzerinde** φ **sürekli sembollü Toeplitz operatörü** denir.

Burada P ortogonal izdüşümü, $L^2_a(\mathbb{D})$'nin üretici çekirdeği (Bergman çekirdeği) $K(z, w)$ yardımıyla bir integral operatörü şeklinde tanımlanır [52, s.44]:

$$(Pf)(z) = \int_{\mathbb{D}} f(w)K(z, w)dA(w) = \int_{\mathbb{D}} \frac{f(w)}{(1 - z\bar{w})^2}\, dA(w), \quad z \in \mathbb{D}.$$

Dolayısıyla $L^2_a(\mathbb{D})$ üzerinde sürekli sembollü Toeplitz operatörünün integral temsili şu şekilde olacaktır:

$$(T_\varphi f)(z) = \int_{\mathbb{D}} \frac{f(w)\varphi(w)}{(1 - z\bar{w})^2}\, dA(w), \quad z \in \mathbb{D}.$$

Sürekli sembollü Toeplitz operatörleri tarafından üretilen C^*-cebiri $\mathcal{A}(C(\mathbb{D}))$ ile gösterilsin. Bu cebirin tam karakterizasyonu aşağıdaki gibidir:

Teorem 2.16. (Coburn, [9]) $\mathcal{A}(C(\mathbb{D}))$ C^*-cebirinin komutatör ideali $\mathcal{K}(L_a^2)$'dir ve bu C^*-cebir

$$\mathcal{A}(C(\mathbb{D})) = \{T_\varphi + K : \varphi \in C(\overline{\mathbb{D}}) \text{ ve } K \in \mathcal{K}(L_a^2)\}$$

formundadır. $\mathcal{A}(C(\mathbb{D}))/\mathcal{K}(L_a^2)$ bölüm cebiri, $C(\mathbb{T})$' ye

$$\tau : \mathcal{A}(C(\mathbb{D}))/\mathcal{K}(L_a^2) \to C(\mathbb{T}),\ T_\varphi + \mathcal{K}(L_a^2) \to \varphi|_{\mathbb{T}}$$

dönüşümüyle *-izomorftur.

Atkinson'un Teorem (2.4) karakterizasyonu kullanılarak üstteki teorem yardımıyla sürekli sembollü Toeplitz operatörlerinin Fredholmluluğu da aşağıdaki gibi elde edilir:

Sonuç 2.2. $\varphi \in C(\bar{\mathbb{D}})$ olmak üzere T_φ Toeplitz operatörünün Fredholm operatörü olması için gerek ve yeter koşul her $z \in \mathbb{T}$ için $\varphi(z) \neq 0$ olmasıdır.

Bir değişkenli durumdan sonra çok değişkenli durumda ne olacağı sorusunu sormak çok doğaldır. Bu çalışmada birim diskin doğal genişlemeleri olan birim top ve polidisk durumlarıyla ilgilenilecektir. Bu kısımda çalışmamıza temel referans oluşturmaları sebebiyle birim top durumu için L.A.Coburn'un [9] ve polidisk durumu için R.G. Douglas ve R. Howe'un [15] çalışmaları verilecektir.

Birim top üzerindeki Bergman uzayı ve birim küre üzerindeki Hardy uzayı durumu

Tanım 2.11. $P_n : L^2(S^{2n-1}) \to H^2(S^{2n-1})$, $\tilde{P}_n : L^2(B^{2n}) \to L_a^2(B^{2n})$ iki ortogonal izdüşüm operatörü ve $\phi \in C(S^{2n-1})$, $\psi \in C(\bar{B}^{2n})$ olmak üzere $H^2(S^{2n-1})$ **üzerinde** ϕ **sembollü** T_ϕ **Toeplitz operatörü ve** $L_a^2(B^{2n})$ **üzerinde** ψ **sembollü** $\tilde{T}_\psi$ **Toeplitz operatörü**, sırasıyla, her $f \in H^2(S^{2n-1})$ ve her $g \in L_a^2(B^{2n})$ için

$$T_\phi f = P_n(\phi f), \quad \tilde{T}_\psi g = \tilde{P}_n(\psi g)$$

şeklinde tanımlanır.

$H^2(S^{2n-1})$ ve $L_a^2(B^{2n})$ uzaylarının üretici çekirdeklerinden yararlanarak P_n ve $\tilde{P}_n$ izdüşüm operatörleri sırasıyla şu şekilde temsil edilirler [52, Proposition 4.28, s.141 ve Lemma 2.8, s.44]:

$$(P_n f)(z) = \frac{(n-1)!}{2\pi^n} \int_{S^{2n-1}} \frac{f(w)}{(1-z\bar{w})^n}\, dS(w), \quad z \in B^{2n}$$

ve

$$(\tilde{P}_n f)(z) = \frac{n!}{\pi^n} \int_{B^{2n}} \frac{f(w)}{(1-z\bar{w})^{n+1}}\, dV(w), \quad z \in B^{2n}.$$

Dolayısıyla yukarıda tanımlanan $H^2(S^{2n-1})$ ve $L_a^2(B^{2n})$ uzayları üzerinde tanımlı sürekli sembollü Toeplitz operatörleri de sırasıyla

$$(T_\phi f)(z) = \frac{(n-1)!}{2\pi^n} \int_{S^{2n-1}} \frac{f(w)\phi(w)}{(1-z\bar{w})^n}\, dS(w), \quad z \in B^{2n}$$

ve

$$(\tilde{T}_\psi f)(z) = \frac{n!}{\pi^n} \int_{B^{2n}} \frac{f(w)\psi(w)}{(1-z\bar{w})^{n+1}}\, dV(w), \quad z \in B^{2n}$$

olur. $\mathcal{A}(S^{2n-1})$ ve $\mathcal{A}(B^{2n})$, sırasıyla $H^2(S^{2n-1})$ ve $L_a^2(B^{2n})$ üzerinde sürekli sembollü Toeplitz operatörleri tarafından üretilen C^*-cebirleri göstersin.

Teorem 2.17. (Coburn, [9]) $\mathcal{A}(S^{2n-1})$ ve $\mathcal{A}(B^{2n})$ C^*-cebirleri, sırasıyla karşılık gelen uzaylar üzerindeki $\mathcal{K}$ ve $\tilde{\mathcal{K}}$ kompakt operatörlerin ideallerini içerir. Ayrıca

$$\mathcal{A}(S^{2n-1}) = \{T_\phi + K : \phi \in C(S^{2n-1}) \text{ ve } K \in \mathcal{K}\}$$

ve

$$\mathcal{A}(B^{2n}) = \{\tilde{T}_\psi + \tilde{K} : \psi \in C(\bar{B}^{2n}) \text{ ve } \tilde{K} \in \tilde{\mathcal{K}}\}$$

dır. $\mathcal{A}(S^{2n-1})/\mathcal{K}$ bölüm cebiri, $\tau(T_\phi + K) = \phi$ dönüşümü ile $C(S^{2n-1})$'e *-izomorf iken, $\mathcal{A}(B^{2n})/\tilde{\mathcal{K}}$ bölüm cebiri, $\tilde{\tau}(\tilde{T}_\psi + \tilde{K}) = \psi|_{S^{2n-1}}$ dönüşümü ile $C(S^{2n-1})$'e *-izomorftur.

Atkinson'nun Teorem (2.4) karakterizasyonu kullanılarak üstteki teorem yardımıyla sürekli sembollü Toeplitz operatörlerinin Fredholmluluğu da aşağıdaki gibi elde edilir:

Sonuç 2.3. ϕ, ψ sırasıyla S^{2n-1} ve $\bar{B}^{2n}$ üzerinde kompleks değerli sürekli fonksiyonlar olsun. $H^2(S^{2n-1})$ üzerindeki T_ϕ Toeplitz operatörü ve $L_a^2(B^{2n})$ üzerindeki $\tilde{T}_\psi$ Toeplitz operatörünün Fredholm operatörleri olması için gerek ve yeter koşul sırasıyla, ϕ ve $\psi|_{S^{2n-1}}$

fonksiyonlarının her noktada sıfırdan farklı olmasıdır.

Polidisk üzerindeki Hardy uzayı durumu

Referans çalışma [15]'e uygunluk açısından genelliği bozmaksızın $n = 2$ alınacaktır.

Tanım 2.12. $P_2 : L^2(\mathbb{T}^2) \to H^2(\mathbb{T}^2)$ ortogonal izdüşüm operatörü ve her $\psi \in C(\mathbb{T}^2)$ olmak üzere $T_\psi f = P_2(\psi f)$ şeklinde tanımlanan $T_\psi : H^2(\mathbb{T}^2) \to H^2(\mathbb{T}^2)$ operatörüne $H^2(\mathbb{T}^2)$ **üzerindeki** ψ **sürekli sembollü** T_ψ **Toeplitz operatörü** denir.

Burada P_2 ortogonal izdüşümü, $H^2(\mathbb{T}^2)$'nin üretici çekirdeği $K(z,w)$ yardımıyla bir integral operatörü şeklinde tanımlanır:

$$
\begin{aligned}
(P_2 f)(z) &= \int_{\mathbb{T}^2} f(w_1,w_2)K(z_1,w_1)K(z_2,w_2)\,dm(w_1)\,dm(w_2) \\
&= \int_{\mathbb{T}^2} \frac{f(w_1,w_2)}{(1-z_1\bar{w}_1)(1-z_2\bar{w}_2)}\,dm(w_1)\,dm(w_2), \quad z=(z_1,z_2)\in\mathbb{D}^2.
\end{aligned}
$$

Dolayısıyla $H^2(\mathbb{T}^2)$ üzerinde sürekli sembollü Toeplitz operatörünün integral temsili şu şekildedir:

$$
(T_\varphi f)(z) = \int_{\mathbb{T}^2} \frac{f(w_1,w_2)\varphi(w_1,w_2)}{(1-z_1\bar{w}_1)(1-z_2\bar{w}_2)}\,dm(w_1)\,dm(w_2), \quad z=(z_1,z_2)\in\mathbb{D}^2.
$$

$\mathcal{A}(C(\mathbb{T}^2))$, $H^2(\mathbb{T}^2)$ üzerindeki sürekli sembollü Toeplitz operatörleri tarafından üretilen C^*-cebiri ve $\mathcal{K}$, $H^2(\mathbb{T}^2)$ üzerindeki kompakt operatörlerin idealini göstersin.

Teorem 2.18. (Douglas ve Howe, [15]) $\mathcal{A}(C(\mathbb{T}^2))$'nin komutatör ideali $\mathcal{I}$, $\mathcal{K}$ idealini özalt olarak içerir. Ayrıca $\mathcal{A}(C(\mathbb{T}^2))/\mathcal{K}$ bölüm cebiri, $C(\mathbb{T},\mathcal{A}(C(\mathbb{T}))) \oplus C(\mathbb{T},\mathcal{A}(C(\mathbb{T})))$'ye *-izomorf iken, $\mathcal{A}(C(\mathbb{T}^2))/\mathcal{I}$ bölüm cebiri ise $C(\mathbb{T}^2)$'ye $*$-izomorftur.

R.G. Douglas ve R. Howe, makalelerinde homolojik cebir yöntemleri kullanarak, C^*-cebirlerin cebirsel tensör çarpımlarıyla oluşturduğu değişmeli bir diagram yardımıyla bu sonuçları elde etmiştir. Ayrıca bu diagramdan, komutatör ideal $\mathcal{I}$'nın $\mathcal{A}(C(\mathbb{T})) \otimes \mathcal{K}(\mathbb{T})$ ile $\mathcal{K}(\mathbb{T}) \otimes \mathcal{A}(C(\mathbb{T}))$ alt uzayları tarafından üretildiği de elde edilmiştir. $\mathcal{K}$ ideali, $\mathcal{A}(C(\mathbb{T}^2))$'nin komutatör ideali tarafından özalt olarak içerildiği için söz konusu sürekli sembollü Toeplitz operatörünün Fredholmluluğu için tek bir şart yeterli olmamaktadır:

Sonuç 2.4. (Douglas ve Howe, [15]) $\psi \in C(\mathbb{T}^2)$ olmak üzere, $H^2(\mathbb{T}^2)$ üzerindeki T_ψ Toeplitz operatörünün Fredholm olması için gerek ve yeter koşul her $(z_1, z_2) \in \mathbb{T}^2$ için $\psi(z_1, z_2) \neq 0$ ve ψ'nin sabite homotopik olmasıdır.

Burada ψ'nin a gibi bir sabite homotopik olması, her $z = (z_1, z_2) \in \mathbb{T}^2$ için $H(z, 0) = \psi(z)$ ve $H(z, 1) = a$ koşullarını sağlayan $H : \mathbb{T}^2 \times [0, 1] \to \mathbb{C}$ sürekli fonksiyonunun varolması anlamındadır.

Not 2.1. Coburn'un [9] ile Douglas ve Howe'un [15] çalışmaları karşılaştırıldığında birim top ve polidisk üzerindeki Hardy uzaylarında sürekli sembollü Toeplitz operatörleri ile üretilen C^*-cebirlerin yapılarının farklı olduğu görülür. Bu farklılık komutatör ideallerinin farklı olmasından kaynaklanır. Birim top durumunda komutatör ideal, kompakt operatörlerin idealleri iken polidisk durumunda komutatör ideal daha geniştir.

2.4. BİRİM DİSK VE POLİDİSKTEKİ İNVARYANT ALT UZAYLAR

Bu çalışmanın ikinci amacı, sürekli sembollü Toeplitz operatörlerinin önemli bir sınıfı olan ve aynı zamanda tek taraflı öteleme operatörleri sisteminin bir fonksiyonel modeli olan, polidisk üzerindeki Hardy uzayında bağımsız değişkenlerle çarpım operatörleri sisteminin invaryant alt uzaylarının yapısının incelenmesidir. Dolayısıyla bu kısımda, birim disk ve polidiskteki invaryant alt uzaylarla ilgili yapılan çalışmalar arasından bizi ilgilendirenler verilecektir.

2.4.1. Birim disk ve polidisk üzerindeki Hardy uzayları ile ilgili gerekli bilgiler

Birim disk ve polidisk üzerindeki Hardy uzaylarında bulunan invaryant alt uzayların yapısı ile ilgili incelemelere başlamadan önce Bölüm 2.1 de verilen bilgilere ek olarak söz konusu Hardy uzayları ilgili bazı özellikler verilecek ve bu uzaylar arasındaki bu çalışma için gerekli olan farklılıklardan bahsedilecektir. Bu farklılıklar sebebiyle, birim disk ve polidisk üzerindeki invaryant alt uzaylarının yapılarının neden farklı olduğu daha iyi anlaşılacaktır. Bu kısımdaki bilgiler, bir değişkenli durum için [13], çok değişkenli durum için [39] kaynaklarından alınmıştır.

Bölüm 2.1'deki tanımıyla ilişkili olarak birim disk üzerindeki Hardy uzayı aşağıdaki gibi de tanımlanır [13]:

$$H^2(\mathbb{D}) = \{f : \mathbb{D} \to \mathbb{C} | f- \text{ analitik}, \sup_{0<r<1} \left(\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(re^{i\theta})|^2 d\theta \right)^{1/2} < \infty\}$$

ve

$$H^\infty(\mathbb{D}) = \{f : \mathbb{D} \to \mathbb{C} | f- \text{ analitik}, \sup_{z\in\mathbb{D}} |f(z)| < \infty\}.$$

Bu uzaylar için normlar, sırasıyla

$$||f||_2 = \sup_{0<r<1} \left(\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(re^{i\theta})|^2 d\theta \right)^{1/2}$$

ve

$$||f||_\infty = \sup_{z\in\mathbb{D}} |f(z)|$$

şeklindedir.

Benzer şekilde Bölüm 2.1 deki tanımıyla ilişkili olarak polidisk üzerindeki Hardy uzayı aşağıdaki gibi de tanımlanır [39]:

$$H^2(\mathbb{D}^n) = \{f : \mathbb{D}^n \to \mathbb{C} | f- \text{ analitik}, \sup_{0<r<1} \left(\frac{1}{(2\pi)^n} \int_{\mathbb{T}^n} |f(rz)|^2 dm_n \right)^{1/2} < \infty\}$$

$$H^\infty(\mathbb{D}^n) = \{f : \mathbb{D}^n \to \mathbb{C} | f- \text{ analitik}, \sup_{z\in\mathbb{D}^n} |f(z)| < \infty\}.$$

Bu uzaylar için normlar, sırasıyla

$$||f||_2 = \sup_{0<r<1} \left(\frac{1}{(2\pi)^n} \int_{\mathbb{T}^n} |f(rz)|^2 dm_n \right)^{1/2}$$

ve

$$||f||_\infty = \sup_{z\in\mathbb{D}^n} |f(z)|$$

şeklindedir.

Işınsal (radial) limit: Hardy uzaylarının bu çalışmada kullanılacak olan özelliklerinden biri, verilen bu uzayların sınır davranışlarını açıklayan ışınsal limitlerin varlığıdır:

Teorem 2.19. [13, Theorem 1.3, s.6] Her $f \in H^2(\mathbb{D})$ fonksiyonu için hemen her $w \in \mathbb{T}$

noktasında, $0 \leq r < 1$ olmak üzere,

$$f^*(w) = \lim_{r \to 1} f(rw)$$

ışınsal limiti vardır.

Teorem 2.20. [39, Theorem 3.3.3, s.45] Her $f \in H^2(\mathbb{D}^n)$ için hemen her $w \in \mathbb{T}^n$ noktasında $f^*(w)$ vardır.

$n \geq 1$ için $H^2(\mathbb{D}^n)$ ve $H^\infty(\mathbb{D}^n)$ uzayları, normları sınır fonksiyonlarının, sırasıyla, $L^2(\mathbb{T}^n)$ ve $L^\infty(\mathbb{T}^n)$ normları olarak tanımlanan normlu uzaylar olarak düşünülebilir, yani her $f \in H^2(\mathbb{D}^n)$ (sırasıyla $H^\infty(\mathbb{D}^n)$) için $||f||_{H^2} = ||f^*||_{L^2}$ (sırasıyla $||f||_{H^\infty} = ||f^*||_{L^\infty}$)'dir [13, s.23] ve [39, s.51].

$n \geq 1$ olmak üzere bir $f \in H^2(\mathbb{D}^n)$ fonksiyonun f^* sınır değerinin Poisson integrali

$$P[f^*] = \int_{T^n} P(z, w) f^*(w) dm_n(w), \quad z \in \mathbb{D}^n,$$

şeklinde tanımlanır. Burada $P(z, w)$, $\mathbb{D}^n$'nin Poisson çekirdeğidir [39, s.17].

İç ve dış fonksiyon: $n \geq 1$ olmak üzere hemen her $w \in \mathbb{T}^n$ için $|f^*(w)| = 1$ koşulunu sağlayan $f \in H^\infty(\mathbb{D}^n)$ fonksiyonuna **iç fonksiyon** denir ve

$$\log |f(0)| = \int_{\mathbb{T}^n} \log |f^*| dm_n$$

koşulunu sağlayan $f \in H^2(\mathbb{D}^n)$ fonksiyonuna ise **dış fonksiyon** denir. Eğer f bir dış fonksiyon ise

$$\log |f| = P[\log |f^*|] \tag{2.2}$$

dir. Dolayısıyla bu durumda f'nin $\mathbb{D}^n$'de sıfırının olmadığı, $\log |f|$ ve $P[\log |f^*|]$'nin $\mathbb{D}^n$'de analitik bir fonksiyonun reel kısımları olduğu özellikleri elde edilir [39, s.73].

$n = 1$ durumunda, bir $f \in H^2(\mathbb{D})$ fonksiyonunun dış fonksiyon olması için gerek ve yeter koşul $fH^2(\mathbb{D})$ uzayının $H^2(\mathbb{D})$'de yoğun olmasıdır (Beurling'in bir sonucu olan Teorem (2.26)'dan elde edilir). $n > 1$ durumunda ise bu karakterizasyonun sadece bir tarafı geçerlidir:

Teorem 2.21. (Rudin, [39, Theorem 4.4.6, s.74] Bir $f \in H^2(\mathbb{D}^n)$ fonksiyonu için $fH^2(\mathbb{D}^n)$ alt uzayı, $H^2(\mathbb{D}^n)$'de yoğun ise f dış fonksiyondur.

Bu teoremin tersinin doğru olmadığı Rudin tarafından gösterilmiştir:

Teorem 2.22. (Rudin, [39, Theorem 4.4.8 b), s.76] $fH^2(\mathbb{D}^2)$ alt uzayının $H^2(\mathbb{D}^2)$'de yoğun olmadığı bir $f \in H^2(\mathbb{D}^2)$ dış fonksiyonu vardır.

Burada söz konusu f fonksiyonu, $f(z_1, z_2) = \exp\left(\frac{\frac{1}{2}(z_1+z_2)+1}{\frac{1}{2}(z_1+z_2)-1}\right)$'dir.

İç-dış faktörizasyon: $n = 1$ durumunda, sıfırdan farklı her $f \in H^2(\mathbb{D})$ fonksiyonu bir iç-dış faktörizasyona sahiptir, yani $f = f_i f_o$ olacak şekilde f_i iç fonksiyonu ve bir f_o dış fonksiyonu vardır ve bu faktörizasyon modülü 1 olan sabite göre tektir [13, Theorem 2.8, s.24]. f_i'ye, f'nin **iç kısmı**, f_o'ya ise f'nin **dış kısmı** denir. Fakat bu özelliğin $n > 1$ durumunda geçerli olmadığı aşağıdaki teoremle anlaşılır:

Teorem 2.23. [39, Theorem 4.1.1, s.61] $H^2(\mathbb{D}^2)$ Hardy uzayında aşağıdaki özelliği sağlayan sıfırdan farklı bir f fonksiyonu vardır: f'nin sıfırlarında sıfır olan bir $h \in H^\infty(\mathbb{D}^2)$ fonksiyonu varsa $h \equiv 0$'dır.

Ayrıca yakın geçmişte R.Yang [50], $f(z_1, z_2) = z_1 - \frac{1}{2}z_2$ fonksiyonunun iç-dış faktörizasyona sahip olmadığını göstermiştir. Öte yandan Bulgular kısmında, Yang'ınkinden farklı bir yolla bu fonksiyonun iç-dış faktörizasyona sahip olmadığı gösterilmiştir. Rudin, iç-dış faktörizasyon için aşağıdaki gerek ve yeter koşulu vermiştir:

Teorem 2.24. [39, 5.5.7, s.130] Bir $f \in H^2(\mathbb{D}^n)$ fonksiyonunun iç-dış faktörizasyona sahip olması için gerek ve yeter koşul $P[\log|f^*|]$'ın $\mathbb{D}^n$'de analitik bir fonksiyonun reel kısmı olmasıdır.

2.4.2. İnvaryant alt uzaylar

Bu bölümde, birim disk ve polidisk üzerindeki invaryant alt uzayların yapısı ile ilgili literatürde var olan ve bu çalışmaya uygun olan bazı sonuçlar verilecektir.

Tanım 2.13. [39, Definition 4.4.1, s.70] $n \geq 1$ olmak üzere $H^2(\mathbb{D}^n)$'nin bir M alt uzayı, aşağıdaki koşulları sağlarsa M'ye $H^2(\mathbb{D}^n)$'nin **invaryant alt uzayı** denir :

(a) M, $H^2(\mathbb{D}^n)$'nin kapalı alt uzayıdır.

(b) $f \in M$ olmak üzere her $i = 1, \ldots, n$ için $z_i f \in M$'dir, yani $z_1, \ldots, z_n$ bağımsız değişkenleriyle çarpım operatörleri M uzayını kendisine götürür.

$n = 1$, tek değişkenli durumunda A. Beurling [4], 1949 yılında yayınladığı çalışmasında $H^2(\mathbb{D})$ uzayının tüm invaryant alt uzaylarını aşağıdaki teoremlerle karakterize etmiştir:

Teorem 2.25. ([41, Beurling, Theorem 17.21, s.376])

(a) Her f iç fonksiyonu için

$$fH^2(\mathbb{D}) = \{fg : g \in H^2(\mathbb{D})\}$$

uzayı, $H^2(\mathbb{D})$'nin invaryant alt uzayıdır.

(b) f_1 ve f_2 iç fonksiyonlar ve $f_1 H^2(\mathbb{D}) = f_2 H^2(\mathbb{D})$ ise f_1/f_2 sabittir.

(c) $H^2(\mathbb{D})$'nin $\{0\}$ uzayından farklı her invaryant M alt uzayı, $M = fH^2(\mathbb{D})$ olacak şekilde bir f iç fonksiyonu içerir.

Teorem 2.26. ([41, Beurling, Theorem 17.23 s.378]) f_i, bir $f \in H^2(\mathbb{D})$ fonksiyonunun iç kısmı ve M ise $H^2(\mathbb{D})$'nin f'i içeren en küçük invaryant alt uzayı olsun. O halde $M = f_i H^2(\mathbb{D})$ formundadır. Ek olarak, $M = H^2(\mathbb{D})$ olması için gerek ve yeter koşul f'nin dış fonksiyon olmasıdır.

Tek değişkenli durum $(n = 1)$ için, invaryant alt uzayların bu tam karakterizasyonundan sonra çok değişkenli durumda $(n > 1)$, invaryant alt uzayların yapısını sorgulamak doğaldır. Bu çalışmada polidisk üzerindeki invaryant alt uzayların yapısı ile ilgilenilecektir. f bir iç fonksiyon ise $fH^2(\mathbb{D}^n)$'nin, $H^2(\mathbb{D}^n)$ uzayının invaryant alt uzayı olduğu açıktır. Fakat her invaryant alt uzayın bu formda olmadığını gösteren çalışmalar yapılmıştır. Kronolojik sıra takip edilecek olursa, C. A. Jacewicz [23]; $q \in H^2(\mathbb{D})$ sabitten farklı ve $\mathbb{D}$'de sıfırları olmayan bir iç fonksiyon olmak üzere, $H^2(\mathbb{D}^2)$'nin $f(z, w) = q(z)$ ve $g(z, w) = w$ fonksiyonları tarafından üretilen M invaryant alt uzayının tek bir fonksiyon tarafından üretilemediğini göstermiştir, yani $H^2(\mathbb{D}^2)$'de iki fonksiyonla üretilen fakat tek fonksiyonla üretilemeyen invaryant alt uzay vardır. Bununla birlikte, W. Rudin [39, Theorem 4.4.2, s.71] ise; S uzayı, $(1 - n^{-3}, 0)$, $n = 1, 2, 3, \ldots$ noktalarında

derecesi $\geq n$ olan sıfıra sahip $f \in A(\mathbb{D}^2)$ fonksiyonlarının idealinin $H^2(\mathbb{D}^2)$-kapanışı olmak üzere, S'nin $H^2(\mathbb{D}^2)$'nin sonlu eleman tarafından üretilemeyen invaryant alt uzay olduğunu göstermiştir, yani $H^2(\mathbb{D}^2)$'de sonlu eleman tarafından üretilemeyen invaryant alt uzaylar da vardır.
Bu çalışmalarla birlikte $H^2(\mathbb{D}^n)$ uzayında invaryant alt uzayların yapısının karışık olduğu görülmektedir. Rudin, "Function Theory in Polydiscs" kitabında bugün hala açık olan "$H^2(\mathbb{D}^n)$ üzerindeki invaryant alt uzayların kesin bir tanımı yada sınıflandırılması" sorusunu sormuştur ve bu sorunun cevaplanmasının zor olduğunu belirtmiştir [39, s.78].

Bu soru ile ilgili yapılan çalışmalar daha çok invaryant alt uzayları sınıflandırmaya yöneliktir. Bunlardan biri, bir değişkenlideki duruma uygun olarak, sadece bir iç fonksiyon tarafından üretilen invaryant alt uzayları karakterize etmeye yöneliktir. Bu çalışmalardan bazılarını kronolojik sıraya göre verelim:

J. Radlow [38], bir iç fonksiyon tarafından üretilen invaryant alt uzayların karakterizasyonuna geometrik bir bakış açısıyla yaklaşarak, bu tip invaryant alt uzayları aşağıdaki şekilde ifade etmiştir.

Teorem 2.27. ([38, Radlow, s.294]) M, $H^2(\mathbb{D}^2)$'nin bir invaryant alt uzayı, $P_1 : M \to z_1 M$ ve $P_2 : M \to z_2 M$ iki izdüşüm operatörü olsun. M'nin bir iç fonksiyon tarafından üretilmesi için gerek ve yeter koşul M üzerinde $P_1 T_{z_2} = T_{z_2} P_1$ ve $P_2 T_{z_1} = T_{z_1} P_2$ değişmelilik şartlarının sağlanmasıdır. Burada T_{z_i}, $i = 1, 2$, z_i bağımsız değişkenleriyle çarpım operatörleridir.

N. Sadıkov [43], $n > 1$ için $H^2(\mathbb{D}^n)$ uzayının $H^2(H^2(\mathbb{D}^{n-1}))$ uzayına izometrik izomorf olduğu gerçeğini gözönüne alarak, yani $H^2(\mathbb{D}^n)$ uzayına, birim diskte tanımlı vektör değerli analitik fonksiyonların uzayı gözüyle bakarak $H^2(\mathbb{D}^n)$'de bir invaryant alt uzayın bir iç fonksiyon tarafından doğrulması için gerek ve yeter koşul vermiştir: $\hat{\Theta}$ ile $(\hat{\Theta} f)(z) = \Theta(z) f(z)$, $z \in \mathbb{D}$, $f \in H^2(H^2(\mathbb{D}^{n-1}))$ operatörü gösterilsin.

Teorem 2.28. (Sadıkov, [43]) $H^2(\mathbb{D}^n)$ uzayının bir M invaryant alt uzayının bir iç fonksiyon tarafından üretilmesi için gerek ve yeter koşul M'nin $M = \hat{\Theta} H^2(H^2(\mathbb{D}^{n-1}))$ formunda olmasıdır. Burada Θ öyle bir $H^2(\mathbb{D}^{n-1})$-değerli sınırlı analitik fonksiyondur ki hemen her $z_1 \in \mathbb{T}$ için $\Theta(z_1)$ operatörü kısmi izometri ve herhangi sabit bir $z_1^0 \in \mathbb{D}$

için $H^2(\mathbb{D}^{n-1})$ üzerindeki $\Theta(z_1^0)$ operatörü, $H^2(\mathbb{D}^{n-1})$ üzerindeki $z_2, \ldots, z_n$ bağımsız değişkenlerine göre çarpım operatörleriyle değişmelidir.

O.P. Agrawal, D.N. Clark ve R. Douglas [1], $H^2(\mathbb{D}^n)$ uzayındaki invaryant alt uzayların birimsel denkliğini inceleyerek invaryant alt uzayların yapısına katkıda bulunmuşlardır.

Tanım 2.14. M_1 ve M_2, $H^2(\mathbb{D}^n)$'nin invaryant alt uzayları olmak üzere eğer her $\varphi \in H^\infty(\mathbb{D}^n)$ ve her $f \in M_1$ için $U(\varphi f) = \varphi(Uf)$ koşulunu sağlayan $U : M_1 \to M_2$ birimsel operatörü varsa bu invaryant alt uzaylara **birimsel denktir** denir.

Aşağıdaki lemma invaryant alt uzayların birimsel denkliği için bir kriter niteliğinde olup Bulgular bölümünde kullanacağımız araçlardandır.

Lemma 2.1. ([1, Lemma 1, s.3]) M_1 ve M_2, $H^2(\mathbb{D}^n)$'nin invaryant alt uzayları ve $U : M_1 \to M_2$, her $\varphi \in H^\infty(\mathbb{D}^n)$ ve her $f \in M_1$ için $U(\varphi f) = \varphi(Uf)$ koşulunu sağlayan birimsel operatör ise

$$Uf = \varphi f, \ f \in M_1$$

olacak şekilde bir $\varphi \in L^\infty(\mathbb{T}^n)$ unimoduler fonksiyonu vardır.

Sonuç 2.5. (Agrawal, Clark ve Douglas, [1, Corollary 1, s. 5]) Bir M invaryant alt uzayının $H^2(\mathbb{D}^n)$'ye birimsel denk olması için gerek ve yeter koşul bir φ iç fonksiyonu için $M = \varphi H^2(\mathbb{D}^n)$ formunda olmasıdır.

Bu sonuçtan $n = 1$ durumunda tüm invaryant alt uzayların birimsel denk olduğu sonucu çıkarılabilir. Bununla birlikte, $n > 1$ durumunda Agrawal, Clark ve Douglas'ın bir iç fonksiyon tarafından üretilen invaryant alt uzayların birimsel denkliği ile ilgili bir sonucu yoktur. Bir iç fonksiyon tarafından üretilen invaryant alt uzayların birimsel denkliği, Mandrekar [31] tarafından verilmiştir.

V. Mandrekar [31], birbirleriyle değişmeli olan izometri çiftleri için Wold- von Neumann ayrışımını kullanarak, bir invaryant alt uzayın bir iç fonksiyon tarafından üretilmesi için gerek ve yeter koşul vermiştir.

Tanım 2.15. $T_1, T_2 \in B(H)$ olmak üzere eğer T_1; T_2 ve T_2^* ile değişmeli ise bu operatörlere **çift değişmeli (doubly-commuting) operatörler** denir.

Teorem 2.29. (Mandrekar, [31, Theorem 2, s.146]) $H^2(\mathbb{D}^2)$'nin sıfırdan farklı bir M invaryant alt uzayının, q bir iç fonksiyon olmak üzere $M = qH^2(\mathbb{D}^2)$ formunda olması için gerek ve yeter koşul T_{z_1} ve T_{z_2} operatörlerinin M üzerinde çift değişmeli olmasıdır.

Mandrekar, bir iç fonksiyon tarafından üretilen invaryant alt uzayların birimsel denkliğini de şu teoremle vermiştir:

Teorem 2.30. (Mandrekar, [31, Theorem 3, s.147]) q iç bir fonksiyon olmak üzere $qH^2(\mathbb{D}^2)$ formundaki tüm invaryant alt uzaylar birimsel denktir. Ayrıca $qH^2(\mathbb{D}^2)$ formundaki invaryant alt uzaya birimsel denk bir invaryant alt uzay da aynı formdadır.

Literatürde varolan, tek bir fonksiyon tarafından üretilen invaryant alt uzayların sınıfı ile ilgili yapılan çalışmalar sadece bir iç fonksiyon tarafından üretilen invaryant alt uzayların karakterizasyonlarıyla ilgilidir. Bununla birlikte, iç olması gerekmeyen tek bir fonksiyon tarafından üretilen invaryant alt uzayların tam karakterizasyonunu sormak doğaldır. Bulgular kısmında tek bir fonksiyon tarafından üretilen invaryant alt uzayların tam bir karakterizasyonu verilmiş ve bir iç fonksiyon tarafından üretilmeyen tek bir fonksiyon tarafından üretilen invaryant alt uzay kurulmuştur. Dolayısıyla, Rudin'in söz konusu problemine kısmi bir cevap verilmiştir.

3. MALZEME VE YÖNTEM

Bu tez çalışmasında ilk olarak, ağırlıklı tek taraflı öteleme operatörlerinin bir sistemi tarafından üretilen C^*-cebirlerin yapısı incelenmiştir. Elde edilen sonuçlar kullanılarak, bu C^*-cebirlerde yer alan sürekli sembollü Toeplitz operatörlerinin Fredholmluluğu için gerek ve yeter koşullar verilmiş ve bu sonuçların bir uygulaması olarak, bir sınıf integral denklemin çözülebilirliği elde edilmiştir. Çalışmanın bu kısmı için operatör teori, fonksiyonel analiz, tek ve çok değişkenli kompleks analiz yöntemlerinin yanısıra C^*-cebir yöntemleri kullanılmıştır.

İkinci olarak, polidisk üzerindeki Hardy uzayında tek bir fonksiyon tarafından üretilen invaryant alt uzayların tam bir karakterizasyonu verilerek, W. Rudin'in, "Function theory in polydiscs" kitabında verdiği ve bugün hala açık olan "Polidisk üzerindeki Hardy uzayının tüm invaryant alt uzaylarının sınıflandırılması yada açık bir tanımının verilmesi" problemi kısmi olarak cevaplanmış ve bu tür invaryant alt uzayların kapsama, eşitlik ve birimsel denklik gibi özellikleri incelenmiştir. Çalışmanın bu kısmı için ise operatör teori, fonksiyonel analiz, tek ve çok değişkenli kompleks analizin yöntemlerinden yararlanılmıştır.

Kullanılan yöntem ve sonuçlar ile ilgili kitap ve makalelerin künyeleri Kaynaklar bölümünde belirtilmiştir.

4. BULGULAR

4.1. AĞIRLIKLI TEK TARAFLI ÖTELEME OPERATÖRLERİNİN BİR SİSTEMİ TARAFINDAN ÜRETİLEN C^*-CEBİRLER

Bu bölümde, ağırlıklı tek taraflı öteleme operatörlerinin bir sistemi tarafından üretilen C^*-cebirlerin yapısı incelenmiştir. İlk olarak, ağırlıklı tek taraflı öteleme operatörlerinin bir sistemi tarafından üretilen operatör cebirinin top cebirine izometrik izomorf olması durumunda bu sistem tarafından üretilen C^*-cebirinin yapısı incelenmiş ve bu cebirde yer alan Toeplitz operatörünün Fredholm operatörü olması için bir gerek ve yeter koşul verilmiştir (Teorem (4.3) ve Sonuç (4.1)). İkinci olarak, tek taraflı ağırlıklı öteleme operatörlerinin bir sistemi tarafından üretilen operatör cebirinin polidisk cebirine izometrik izomorf olması durumunda söz konusu C^*-cebirinin yapısı incelenmiş ve bu cebirde yer alan Toeplitz operatörünün Fredholm operatörü olması için bir gerek ve yeter koşul verilmiştir (Teorem (4.8) ve Teorem (4.9)).

n, sabit bir pozitif tamsayı olmak üzere I, $(i_1, \ldots, i_n)$ tamsayıların çoklu-indeksini göstersin. $I \geq 0$, her $j = 1, \ldots, n$ için $i_j \geq 0$ anlamındadır. Aynı zamanda

$$|I| = |i_1 + \ldots + i_n|,$$

$z = (z_1, \ldots, z_n) \in \mathbb{C}^n$ olmak üzere $I \geq 0$ için

$$z^I = z_1^{i_1} \ldots z_n^{i_n}$$

ve $T = \{T_1, \ldots, T_n\}$, n tane birbirleriyle değişmeli olan operatörlerin bir ailesi olmak üzere

$$T^I = T_1^{i_1} \ldots T_n^{i_n}$$

dir. δ_{ij}-Kronocker sembolü olmak üzere, başka bir $\varepsilon_k = (\delta_{1k}, \ldots, \delta_{nk})$ çoklu-indeksi için $I \mp \varepsilon_k = (i_1, \ldots, i_k \mp 1, \ldots, i_n)$'dir.

H bir kompleks Hilbert uzayı, $\{e_I\}$ bu uzayın ortonormal bazı ve $\{w_{I,j} : j = 1, \ldots, n\}$

kompleks sayıların her I ve $1 \leq k, l \leq n$ için

$$w_{I,k}w_{I+\varepsilon_k,l} = w_{I,l}w_{I+\varepsilon_l,k} \qquad (*)$$

koşulunu sağlayan sınırlı bir kümesi olsun.

Tanım 4.1. (Jewell ve Lubin, [25]) $A_j : H \to H$, $A_j e_I = w_{I,j} e_{I+\varepsilon_j}$, $j = 1, \ldots, n$ olmak üzere H üzerindeki bu n operatörün ailesi $A = \{A_1, \ldots, A_n\}$'ya **n-tane ağırlıklı ötelemelerin bir sistemi** denir.

Açıktır ki $\{w_{I,j}\}$ üzerindeki $(*)$ koşulu, A sistemini oluşturan A_j, $j = 1 \ldots, n$ operatörlerinin birbirleriyle değişmeli olduğunu gösterir. I çoklu-indeksinin, $\{I : I \geq 0\}$ olması yada tüm tamsayı değerlerinin çoklu-indeksi olması durumuna göre A sistemine sırasıyla ağırlıklı tek taraflı yada ağırlıklı çift taraflı öteleme operatörlerinin sistemi denir. Bu çalışmada sadece tek taraflı ötelemelerin sistemiyle ilgilenilecektir ve çalışma boyunca A sistemi, ağırlıklı tek taraflı ötelemeler sistemi olarak düşünülecektir. Bu sistemlerin bu çalışmada kullanılacak bazı özelliklerini verelim. Detaylı bilgi için [25] çalışmasına bakılabilir.

H Hilbert uzayında $A = \{A_1, \ldots, A_n\}$ ve K Hilbert uzayında $B = \{B_1, \ldots, B_n\}$ sistemleri verilsin. Eğer her $i = 1, \ldots, n$ için $U^* A_i U = B_i$ koşulunu sağlayan bir $U : H \to K$ birimsel operatörü varsa A ve B sistemlerine birimsel denktir denir. Burada U^*, U operatörünün eşlenik operatörünü göstermektedir.

Özellik 4.1. ([25, Corollary 2]) A sisteminin tüm $w_{I,j}$ ağırlıkları sıfırdan farklı olsun. O halde A sistemi,

$$\mu_{I,j} = |w_{I,j}|$$

ağırlıkları ile verilen ağırlıklı tek taraflı ötelemelerin sistemine birimsel denktir.

Bu özellik sayesinde, genelliği bozmaksızın, tüm ağırlıklar pozitif reel sayılar olarak kabul edilebilir.

Özellik 4.2. ([25, Proposition 5]) $A_j^* e_I = \begin{cases} w_{I-\varepsilon_j,j} e_{I-\varepsilon_j} & ; \quad i_j \geq 1,\ j = 1, \ldots, n \\ 0 & ; \quad i_j = 0 \end{cases}$

Özellik 4.3. ([25, Proposition 6]) A_j operatörünün kompakt olması için gerek ve yeter koşul $|I| \to \infty$ için $|w_{I,j}| \to 0$ olmasıdır.

Bu çalışmada amaç ağırlıklı tek taraflı ötelemelerin A sistemi tarafından üretilen C^*-cebirlerin yapısını incelemektir. Bunun için Ergezen ve Sadık'ın [18] ve [19] çalışmalarında A sistemi için verdiği fonksiyonel model kullanılacaktır. Bu fonksiyonel model şöyle verilmiştir:

A sisteminin $\{w_{I,j}\}$ ağırlıkları yardımıyla

$$\beta_{I+\varepsilon_j} = w_{I,j}\beta_I; \quad \beta_0 = 1$$

olacak şekilde bir $\{\beta_I\}_{I\geq 0}$ kümesi tanımlansın ve

$$H^2(\beta) = \left\{ f(z) = \sum_{I\geq 0} f_I z^I : ||f||_\beta^2 = \sum_{I\geq 0} |f_I|^2 \beta_I^2 < \infty \right\}$$

uzayı oluşturulsun. $H^2(\beta)$ uzayı,

$$\langle f, g\rangle = \sum_{I\geq 0} f_I \overline{g_I} \beta_I^2$$

iç çarpımına göre bir Hilbert uzayıdır ve $\{\frac{z^I}{\beta_I}\}_{I\geq 0}$ kümesi, $H^2(\beta)$ için bir ortonormal bazdır (Jewell ve Lubin [25]). $H^2(\beta)$ üzerinde

$$A_{z_j}\frac{z^I}{\beta_I} = z_j\frac{z^I}{\beta_I} \ (j = 1, \ldots, n)$$

ile verilen z_j bağımsız değişkenleriyle çarpım operatörlerinin bir $A_z = \{A_{z_1}, A_{z_2}, \ldots, A_{z_n}\}$ ailesi tanımlansın. Her $j = 1, \ldots, n$ için A_{z_j} operatörlerinin sınırlı olması için gerek ve yeter koşul her $j = 1, \ldots, n$ için $\{\beta_{I+\varepsilon_j}/\beta_I\}_{I\geq 0}$ 'ın sınırlı olmasıdır [25, Corollary 9]. Öte yandan, $\{w_{I,j}\}$ ağırlıkları sınırlı bir küme olduğundan $H^2(\beta)$ üzerindeki tüm A_{z_j} operatörleri sınırlıdır.

Özellik 4.4. ([25, Proposition 8]) H üzerinde $\{w_{I,j}\}$ ağırlıklı tek taraflı ötelemelerin A sistemi ile $\{w_{I,j}\}$ ağırlıkları yardımıyla oluşturulan $\{\beta_I\}_{I\geq 0}$ kümesine karşılık gelen $H^2(\beta)$ uzayı üzerindeki bağımsız değişkenler ile çarpım operatörlerinin A_z sistemi birimsel denktir.

Örnek olarak, $n > 1$ olmak üzere her I için $\beta_I = 1$ alınırsa $H^2(\beta) = H^2(\mathbb{T}^n)$, $\mathbb{T}^n$ torus üzerindeki Hardy uzayıdır veya $\beta_I = [I!/(|I| + n - 1)!]^{1/2}$ alınırsa $H^2(\beta) = H^2(S^{2n-1})$'dır, yani S^{2n-1} birim küresi üzerindeki Hardy uzayıdır [25, s.214].

Ağırlıklı tek taraflı öteleme operatörler sistemlerinin bir Ω sınıfını düşünelim öyle ki bu sınıfa ait sistemlerin ağırlıkları yardımıyla oluşturulan $\{\beta_I\}_{I\geq 0}$ kümesine karşı gelen çok değişkenli moment probleminin çözümü mevcut olsun, yani $[0,1]^n$ üzerinde

$$\beta_I^2 = \int_{[0,1]^n} r_1^{2i_1} r_2^{2i_2} \dots r_n^{2i_n} d\nu(r_1, r_2, \dots, r_n)$$

eşitliğini sağlayan bir ν Borel ölçüsü varolsun. Bu sınıftaki bir A sistemine karşı gelen ölçü de ν_A ile gösterilsin. (Burada sözü edilen çok değişkenli moment problemi, çok değişkenli Hausdorff moment problemidir ve bu problemin çözülebilirliği ile ilgili detaylı bilgilere [2, s.228] kaynağından ulaşılabilir.)

Bir $A \in \Omega$ sistemine karşı gelen $\nu_A(=\nu)$ ölçüsü yardımıyla $\bar{\mathbb{D}}^n$ üzerinde

$$d\mu = \frac{1}{(2\pi)^n} d\nu(r_1, r_2, \dots, r_n) d\theta_1 d\theta_2 \dots d\theta_n \ \ (0 \leq \theta_i \leq 2\pi) \tag{4.1}$$

ölçüsü tanımlansın. $L^2(\bar{\mathbb{D}}^n, \mu) \ \ (= L^2(\mu))$, $\bar{\mathbb{D}}^n$ üzerinde μ ölçüsüne göre karesi integrallenebilir kompleks değerli ölçülebilir fonksiyonların Lebesgue uzayı olsun. Eğer $A \in \Omega$ ise $\left\{ \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^n}} \frac{z^I}{\beta_I} \right\}_{I\geq 0}$, $L^2(\mu)$'nün ortonormal bir sistemidir. Gerçekten de bir $A \in \Omega$ için

$$\beta_I^2 = \int_{[0,1]^n} r_1^{2i_1} r_2^{2i_2} \dots r_n^{2i_n} d\nu_A(r_1, r_2, \dots, r_n)$$

dir. Buradan

$$\frac{1}{(2\pi)^n} \frac{1}{\beta_I^2} \int_{\bar{\mathbb{D}}^n} r_1^{2i_1} r_2^{2i_2} \dots r_n^{2i_n} d\nu_A(r_1, r_2, \dots, r_n) d\theta_1 d\theta_2 \dots d\theta_n = 1$$

ve

$$\frac{1}{(2\pi)^n} \int_{\bar{\mathbb{D}}^n} \frac{z^I}{\beta_I} \frac{\bar{z}^I}{\beta_I} d\nu_A(r_1, r_2, \dots, r_n) d\theta_1 d\theta_2 \dots d\theta_n = 1, \ (z_i = r_i e^{i\theta_i}, \ i = 1, \dots, n)$$

elde edilir. $L^2(\mu)$'nün bu ortonormal sistem tarafından üretilen alt uzayı $H^2(\mu)$ ile gösterilsin.

Özellik (4.4)'den $A \in \Omega$ ise A sistemi ile $H^2(\mu)$ üzerindeki z_j bağımsız değişkenleriyle çarpım operatörleri sisteminin birimsel denk olduğu elde edilir [18, 19].

Ergezen ve Sadık [18],

$$S_1 = \{(r_1, r_2) \in [0,1] \times [0,1] : r_1^2 + r_2^2 \leq 1\}$$

$$\widetilde{S_1} = \{(r_1, r_2) \in [0,1] \times [0,1] : r_1^2 + r_2^2 = 1\}$$

olmak üzere Ω'nın

$\Omega_1 = \{A \in \Omega : supp\nu_A \subset S_1,$ her $a \in \widetilde{S_1}$ noktasının herhangi bir $U(a)$ komşuluğu için

$$\nu_A(U(a)) > 0\}$$

alt sınıfını düşünerek bu sınıftaki ağırlıklı tek taraflı ötelemelerin bir sistemi tarafından üretilen operatör cebirinin yapısını incelemişlerdir:

Teorem 4.1. (Ergezen ve Sadık, [18]) $A \in \Omega_1$ ise $H^2(\mu)$ fonksiyonel Hilbert uzayıdır. Bu uzayın ortonormal bazının $\left\{\frac{1}{\sqrt{(2\pi)^n}}\frac{z^I}{\beta_I}\right\}_{I\geq 0}$ olduğu gözönüne alınarak bu uzayın üretici çekirdeğinin, $z, w \in \mathbb{D}^n$ olmak üzere

$$K(z,w) = \sum_{I\geq 0} \overline{e_I(w)} e_I(z) = \sum_{I\geq 0} \frac{\bar{w}^I z^I}{\beta_I^2}$$

olduğu elde edilir.

Yukarıda teorem ile birlikte bir $A \in \Omega_1$ sistemine karşılık gelen $H^2(\mu)$ uzayının, B^{2n}'de tanımlı ve katsayıları $\sum_{I\geq 0} |f_I|^2 \beta_I^2 < \infty$ şartını sağlayan $f(z) = \sum_{I\geq 0} f_I z^I$ analitik fonksiyonlarından oluştuğu elde edilmiştir, yani

$$H^2(\mu) = \left\{ f(z) = \sum_{I\geq 0} f_I z^I : z \in B^{2n}, \sum_{I\geq 0} |f_I|^2 \beta_I^2 < \infty \right\}$$

şeklindedir. Bu uzayda iç çarpım $f(z) = \sum_{I\geq 0} f_I z^I$ ve $g(z) = \sum_{I\geq 0} g_I z^I$ olmak üzere $\langle f, g\rangle = \sum_{I\geq 0} f_I \bar{g}_I \beta_I^2$ dir [18].

Teorem 4.2. (Ergezen ve Sadık, [18]) $A \in \Omega$ olsun. A sistemi tarafından üretilen operatör cebirinin top cebirine izometrik izomorf olması için gerek ve yeter koşul $A \in \Omega_1$ olmasıdır.

Bu teoremle, bir $A \in \Omega_1$ sistemi tarafından üretilen operatör cebirinin yapısı görüldükten sonra bu sistem tarafından üretilen C^*-cebirinin yapısı sorusu doğal olarak ortaya çıkmaktadır. Bu yapının elde edilmesi çalışmanın esas sonuçlarındandır (Teorem (4.3)). Bunun için önce bazı tanım ve notasyonlara ihtiyaç duyulmaktadır:

Tanım 4.2. (Toeplitz Operatörü) $P : L^2(\mu) \to H^2(\mu)$ ortogonal izdüşüm ve $\psi \in C(supp\mu)$ olmak üzere her $f \in H^2(\mu)$ için

$$T_\psi f = P(\psi f)$$

şeklinde tanımlanan $T_\psi : H^2(\mu) \to H^2(\mu)$ operatörüne $H^2(\mu)$ üzerinde ψ sürekli sembollü **Toeplitz operatörü** denir.

$H^2(\mu)$ üzerinde tanımlı kompakt operatörlerin ideali $\mathcal{K}$ ile gösterilsin. Basitlik için $n = 2$ alalım.

Teorem 4.3. (Koca, Sadık [27]) $A \in \Omega$ olsun. A sistemi tarafından üretilen operatör cebiri top cebirine izometrik izomorf ise A sistemi tarafından üretilen C^*-cebir $C^*(A)$'nın komutatör ideali $\mathcal{K}$'dır ve

$$C^*(A) = \{T_\psi + K : \psi \in C(supp\mu),\ K \in \mathcal{K}\}$$

formundadır. Ayrıca $C^*(A)/\mathcal{K}$ bölüm cebiri $C(S^3)$'e $*$-izomorftur.

Teoremin ispatı için aşağıdaki lemmaya ihtiyaç duyulmaktadır:

Lemma 4.1. (Koca, Sadık [27]) $\nu_A(= \nu)$, bir $A \in \Omega_1$ sistemine karşılık gelen ölçü ve $I = (m, n)$ olmak üzere

$$\frac{\int_{S_1} r_1^{2m} r_2^{2n+2} d\nu(r_1, r_2)}{\int_{S_1} r_1^{2m} r_2^{2n} d\nu(r_1, r_2)} - \frac{\int_{S_1} r_1^{2m} r_2^{2n} d\nu(r_1, r_2)}{\int_{S_1} r_1^{2m} r_2^{2n-2} d\nu(r_1, r_2)} \quad (*)$$

ifadesi $|I| \to \infty$ iken sıfıra yakınsar.

İspat: Genelliği bozmaksızın $n = 1$ alalım. O halde $(*)$ ifadesinin ikinci terimi

$$\frac{I_1}{I_2} := \frac{\int_{S_1} r_1^{2m} r_2^2 d\nu(r_1, r_2)}{\int_{S_1} r_1^{2m} d\nu(r_1, r_2)}$$

olur. $m \to \infty$ için $\frac{I_1}{I_2}$ nin sıfıra yakınsadığını göstermek ispat için yeterlidir. Bir $\varepsilon > 0$ için $r_{20} = \sqrt{\varepsilon/2}$ ve $r_{10} = \sqrt{1 - r_{20}^2} = \sqrt{1 - (\varepsilon/2)}$ olsun. $S_{10} := \{(r_1, r_2) : r_{10} <$

$r_1 \leq 1\} \cap S_1$ ve $S_{11} := S_1/S_{10}$ kümelerini düşünelim. $I_{10} = \int_{S_{10}} r_1^{2m} r_2^2 d\nu(r_1, r_2)$ olmak üzere $I_1 = I_{10} + I_{11}$'dir. Her m için $I_{10} \leq (\varepsilon/2)I_2$ ve $I_{11} \leq r_{10}^{2m}\nu_A(S_1)$ eşitsizliklerinin sağlandığı standart hesaplamalarla gösterilir. Ayrıca $r_{11} = (1 + r_{10})/2$ alınırsa $S_{101} = \{(r_1, r_2) : r_{11} < r_1 \leq 1\} \cap S_1$ olmak üzere her m için $I_2 \geq r_{11}^{2m}\nu_A(S_{101})$ sağlanır. Dolayısıyla her $m > M$ için $I_1/I_2 < \varepsilon$ olacak şekilde bir $M \in \mathbb{N}$ vardır. $\square$

Teorem (4.3) **in ispatı:** İlk olarak, her $i = 1, 2$ için $A_iA_i^* - A_i^*A_i$ operatörlerinin kompakt olduğunu gösterelim. Bunun için $A_2A_2^* - A_2^*A_2$ operatörünün kompaktlığını göstermek yeterlidir. $i = 1$ durumu da benzer şekilde yapılır. $A_2e_{(m,n)} = w_{(m,n),2}e_{(m,n+1)}$ ve $A_2^*e_{(m,n)} = w_{(m,n-1),2}e_{(m,n-1)}$ olduğundan

$$\begin{aligned}(A_2A_2^* - A_2^*A_2)e_{(m,n)} &= A_2(w_{(m,n-1),2}e_{(m,n-1)}) - A_2^*(w_{(m,n),2}e_{(m,n+1)}) \\ &= w_{(m,n),2}w_{(m,n),2}e_{(m,n)} - w_{(m,n-1),2}w_{(m,n-1),2}e_{(m,n)} \\ &= (w_{(m,n),2}^2 - w_{(m,n-1),2}^2)e_{(m,n)}\end{aligned}$$

elde edilir.

$$w_{(m,n),2}^2 = \frac{\beta_{(m,n+1)}^2}{\beta_{(m,n)}^2} = \frac{\int_{S_1} r_1^{2m} r_2^{2n+2} d\nu(r_1, r_2)}{\int_{S_1} r_1^{2m} r_2^{2n} d\nu(r_1, r_2)}$$

olduğu gözönüne alınarak $A_2A_2^* - A_2^*A_2$ operatörünün ağırlığı

$$w_{(m,n),2}^2 - w_{(m,n-1),2}^2 = \frac{\int_{S_1} r_1^{2m} r_2^{2n+2} d\nu(r_1, r_2)}{\int_{S_1} r_1^{2m} r_2^{2n} d\nu(r_1, r_2)} - \frac{\int_{S_1} r_1^{2m} r_2^{2n} d\nu(r_1, r_2)}{\int_{S_1} r_1^{2m} r_2^{2n-2} d\nu(r_1, r_2)}$$

şeklindedir. Bu ifadenin $|(m, n)| \to \infty$ için sıfıra yakınsadığı Lemma (4.1)'de gösterilmiştir. Dolayısıyla Özellik (4.3)'ten, $A_2A_2^* - A_2^*A_2$ operatörü kompakttır. Öte yandan, [25, Corollary 13]'den $C^*(A)$ cebirinin indirgenemez olduğu bilinmektedir. Sonuç olarak, Teorem (2.6)'dan bu cebirin ve aşikar olmayan tüm ideallerinin kompakt operatörleri içerdiği elde edilir. Dolayısıyla $C^*(A)$ C^*-cebirinin komutatör ideali, kompakt operatörlerin ideali $\mathcal{K}$'dır. A sistemi ile $H^2(\mu)$ uzayı üzerindeki bağımsız değişkenlerle çarpım operatörleri sisteminin birimsel denk olduğu göz önüne alınarak Stone-Weierstrass Teoremi'nden bir $\psi \in C(supp\mu)$ için $T_\psi \in C^*(A)$ elde edilir ve bu yüzden $\rho : C(supp\mu) \to C^*(A)/\mathcal{K},\ \psi \to T_\psi + \mathcal{K}$ dönüşümü iyi tanımlıdır. Bu dönüşüm örten bir $*$-homomorfizmasıdır. Gerçekten de, her $\psi, \psi_1, \psi_2 \in C(supp\mu)$ ve $\lambda \in \mathbb{C}$ için $\rho(\psi_1 + \psi_2) = \rho(\psi_1) + \rho(\psi_2)$, $\rho(\lambda\psi) = \lambda\rho(\psi)$ ve $\rho(\psi^*) = (\rho(\psi))^*$ olduğu Toeplitz operatörünün tanımından kolaylıkla görülür. $\rho(\psi_1\psi_2) = \rho(\psi_1)\rho(\psi_2)$ olduğunu gösterelim. Bunun için $T_{\psi_1}T_{\psi_2} -$

$T_{\psi_1\psi_2}$ operatörünün kompakt olduğunu göstermek yeterlidir. [26, Lemma 2.13, s.16]'dan $T_{\psi_1}T_{\psi_2} - T_{\psi_1\psi_2}$ operatörünün kompakt olması için gerek ve yeter koşulun her $i = 1, 2$ için $M_{z_i}M_{z_i}^* - M_{z_i}^*M_{z_i}$ operatörlerinin kompakt olması olduğu bilinmektedir. Öte yandan $M_z = \{M_{z_1}, M_{z_2}\}$ sistemi ile $A = \{A_1, A_2\}$ sistemi birimsel denk olduğundan bu koşul her $i = 1, 2$ için $A_iA_i^* - A_i^*A_i$ operatörlerinin kompakt olmasına denktir. Bu operatörlerin kompakt olduğu yukarıda gösterilmiştir. Sonuç olarak, $\rho(\psi_1\psi_2) = T_{\psi_1\psi_2} + \mathcal{K} = T_{\psi_1}T_{\psi_2} + \mathcal{K} = \rho(\psi_1)\rho(\psi_2)$'dir ve ρ bir $*$-homomorfizmasıdır. Dolayısıyla, [12, Corollary 1.8.3, s.21]'den $\rho(C(supp\mu))$, $C^*(A)/\mathcal{K}$'nın kapalı bir $*$-alt cebiridir. Öte yandan her $\psi \in C(supp\mu)$ için $T_\psi + \mathcal{K} \in \rho(C(supp\mu))$ olduğundan $C^*(A)/\mathcal{K} = \rho(C(supp\mu))$ elde edilir, yani $C^*(A) = \{T_\psi + K : \psi \in C(supp\mu),\ K \in \mathcal{K}\}$ formundadır. Son olarak, $C^*(A)/\mathcal{K}$ bölüm cebirinin $C(S^3)$'e $*$-izomorf olduğunu gösterelim. $\tau : C(S^3) \to C(supp\mu),\ \psi \to \tilde{\psi}$,

$$\tilde{\psi}(z) = \begin{cases} |z|\psi(\frac{z}{|z|}) & ; \quad z \neq 0 \\ 0 & ; \quad z = 0 \end{cases}$$

dönüşümü örten bir $*$-homomorfizmasıdır: Bunun için τ'nun örten olduğunu göstermek yeterlidir. Gerçekten de bir $\tilde{g} \in C(supp\mu)$ için $\tilde{g}|_{S^3} = g \in C(S^3)$'tür. τ ve ρ dönüşümleri örten $*$-homomorfizmaları olduğundan $\sigma = \rho\tau$ şeklinde tanımlanan $\sigma : C(S^3) \to C^*(A)/\mathcal{K}$ dönüşümü de örten bir $*$-homomorfizmasıdır. Burada her $\psi \in C(S^3)$ için $\sigma(\psi) = (\rho\tau)(\psi) = \rho(\tilde{\psi}) = T_{\tilde{\psi}} + \mathcal{K}$'dir. Öte yandan $\psi \in Ker\sigma$ ise $T_{\tilde{\psi}}$ kompakttır ve $supp\mu \subset \overline{B}^{2n}$ olduğundan [29, Theorem 1.1]'den $\tilde{\psi}|_{S^3} = \psi \equiv 0$'dır. Bu ise $Ker\sigma = \{0\}$ olduğunu yani σ'nın bire-bir olduğunu gösterir. Sonuç olarak σ dönüşümü bir $*$-izomorfizmasıdır. $\square$

Bu teorem yardımıyla Toeplitz operatörünün Fredholmluluğu için bir aşağıdaki gibi bir karakterizasyon verilebilir:

Sonuç 4.1. $\psi \in C(supp\mu)$ olmak üzere $T_\psi \in C^*(A)$ Toeplitz operatörünün Fredholm operatörü olması için gerek ve yeter koşul $\psi(z)$'nin her $z \in S^3$ için sıfırdan farklı olmasıdır.

İspat: Atkinson'un (2.4) karakterizasyonundan $T_\psi \in C^*(A)$ Toeplitz operatörünün Fredholm operatörü olması için gerek ve yeter koşul $T_\psi + \mathcal{K}$'nın, $B(H^2(\mu))/\mathcal{K}$'da terslenebilir olmasıdır. Teorem (2.7)'den $T_\psi + \mathcal{K}$'nın $B(H^2(\mu))/\mathcal{K}$'da terslenebilir olması için gerek ve yeter koşul $T_\psi + \mathcal{K}$'nın $C^*(A)/\mathcal{K}$'da terslenebilir olmasıdır. Üstteki teoremden de bu koşulun ψ'nin $C(S^3)$'te terslenebilir olmasına yani, her $z \in S^3$ için $\psi(z)$'nin sıfırdan farklı olmasına denk olduğu elde edilir. $\square$

Ergezen [19] çalışmasında Ω'nın

$$\Omega_2 = \{A \in \Omega : (1,1) \in [0,1]^2 \text{ noktasının herhangi bir } U(1,1) \text{ komşuluğu için}$$

$$\nu_A(U(1,1)) > 0\}$$

alt sınıfını inceleyerek bir A sistemi tarafından üretilen operatör cebirinin yapısı çalışmalarına devam etmiştir. $\Omega_1 \cap \Omega_2 = \emptyset$ olduğuna dikkat edilmelidir.

Teorem 4.4. (Ergezen, [19]) $A \in \Omega_2$ ise $H^2(\mu)$ fonksiyonel Hilbert uzayıdır.

Bu uzayın ortonormal bazının $\left\{ \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^n}} \frac{z^I}{\beta_I} \right\}_{I \geq 0}$ olduğu gözönüne alınarak bu uzayın üretici çekirdeğinin, $z, w \in \mathbb{D}^n$ olmak üzere

$$K(z,w) = \sum_{I \geq 0} \overline{e_I(w)} e_I(z) = \sum_{I \geq 0} \frac{\bar{w}^I z^I}{\beta_I^2}$$

olduğu elde edilir.

Yukarıdaki teoremle birlikte $H^2(\mu)$'nün, $A \in \Omega_2$ olduğu takdirde, $H^2(\mu)$ uzayının, $\bar{\mathbb{D}}^n$'de tanımlı ve katsayıları $\sum_{I \geq 0} |f_I|^2 \beta_I^2 < \infty$ şartını sağlayan $f(z) = \sum_{I \geq 0} f_I z^I$ analitik fonksiyonlarından oluştuğu elde edilmiştir, yani

$$H^2(\mu) = \left\{ f(z) = \sum_{I \geq 0} f_I z^I : z \in \bar{\mathbb{D}}^n, \sum_{I \geq 0} |f_I|^2 \beta_I^2 < \infty \right\}$$

şeklindedir. Bu uzayda iç çarpım $f(z) = \sum_{I \geq 0} f_I z^I$ ve $g(z) = \sum_{I \geq 0} g_I z^I$ olmak üzere $\langle f, g \rangle = \sum_{I \geq 0} f_I \bar{g}_I \beta_I^2$ şeklindedir [19].

Teorem 4.5. (Ergezen, [19]) $A \in \Omega$ olsun. A sistemi tarafından üretilen operatör cebirinin polidisk cebirine izometrik izomorf olması için gerek ve yeter koşul $A \in \Omega_2$ olmasıdır.

Bu teoremle, bir $A \in \Omega_2$ sistemi tarafından üretilen operatör cebirinin yapısı görüldükten sonra bu sistem tarafından üretilen C^*-cebirinin yapısı sorusu doğal olarak ortaya çıkmaktadır. Bu yapının elde edilmesi çalışmanın esas sonuçlarındandır (Teorem (4.8)).

Bir $A \in \Omega_2$ sistemi alalım. Bu sisteme karşılık gelen ν_A ölçüsünün $[0,1]$ üzerinde tanımlı, her $0 < a < 1$ için $\nu_i((a,1]) > 0$, $i = 1,2$ koşulunu sağlayan ν_1, ν_2 pozitif Borel ölçülerinin çarpımı şeklinde yazıldığını kabul edelim, yani $\nu_A(r_1, r_2) = \nu_1(r_1)\nu_2(r_2)$ formunda olsun. Dolayısıyla, $d\mu = d\nu_1 d\nu_2 d\theta_1 d\theta_2$ olacaktır. Bu ifadeyi $\mu_i := \nu_i d\theta_i$, $i = 1, 2$ olmak üzere $\mu = \mu_1\mu_2$ ile gösterelim.

ν_1 ölçüsüne karşılık gelen $\gamma_n^2 = \int_{[0,1]} r_1^{2n} d\nu_1(r_1)$ dizisi (ν_2 ölçüsüne karşılık gelen dizi ξ_m ile gösterilsin) için Sadıkov [44] çalışmasında

$$H^2(\mu_1) = \left\{ f(z) = \sum_{n\geq 0} f_n z^n : z \in \bar{\mathbb{D}}, \sum_{n\geq 0} |f_n|^2 \gamma_n^2 < \infty \right\}$$

uzayını tanımlamıştır. Bu uzayın iç çarpımı $f(z) = \sum_{n\geq 0} f_n z^n$ ve $g(z) = \sum_{n\geq 0} g_n z^n$ olmak üzere $\langle f, g\rangle = \sum_{n\geq 0} f_n \bar{g}_n \gamma_n^2$, ortonormal bazı $(1/2\pi)\{z^n/\gamma_n\}$ şeklindedir. Ayrıca bu uzayın, $K_1(z, w) = \sum_n \frac{(z\bar{w})^n}{\gamma_n^2}$ üretici çekirdekli fonksiyonel Hilbert uzayı olduğu da bu çalışmadan bilinmektedir.

$\nu_A = \nu_1\nu_2$ olduğundan ν_A ölçüsüne karşılık gelen $\{\beta_I\}$ kümesi, $I = (n, m)$ olmak üzere $\{\gamma_n\xi_m\}$'dir. Gerçekten de, her $I = (n, m) \geq 0$ için

$$\beta_I^2 = \int_{[0,1]^2} r_1^{2n} r_2^{2m} d\nu_A(r_1, r_2) = \int_{[0,1]} r_1^{2n} d\nu_1(r_1) \int_{[0,1]} r_2^{2m} d\nu_2(r_2) = \gamma_n^2 \xi_m^2$$

dir. Dolayısıyla $H^2(\mu)$ uzayının ortonormal bazı $\frac{1}{(2\pi)^2}\{\frac{z^n w^m}{\gamma_n \xi_m}\}$ formundadır, yani $H^2(\mu_1)$ ve $H^2(\mu_2)$ uzaylarının ortonormal bazlarının çarpımı şeklindedir. $H^2(\mathbb{D}, \mu_1) \otimes H^2(\mathbb{D}, \mu_2)$ nin ortonormal bazını, $H^2(\mathbb{D} \times \mathbb{D}, \mu_1\mu_2)$'nin ortonormal bazına götüren bir U dönüşümü tanımlansın:

$$U\left(\frac{z^n}{\gamma_n} \otimes \frac{w^m}{\xi_m}\right) = \frac{z^n}{\gamma_n}\frac{w^m}{\xi_m}$$

$f = \sum_n c_n z^n \in H^2(\mathbb{D}, \mu_1)$ ve $g = \sum_m d_m w^m \in H^2(\mathbb{D}, \mu_2)$ olmak üzere

$$\begin{aligned}
U(f \otimes g) &= U\left(\left(\sum_n c_n z^n\right) \otimes \left(\sum_m d_m w^m\right)\right) \\
&= U\left(\left(\sum_n c_n z^n \gamma_n/\gamma_n\right) \otimes \left(\sum_m d_m w^m \xi_m/\xi_m\right)\right) \\
&= U\left(\sum_{m,n} c_n d_m \gamma_n \xi_m (\frac{z^n}{\gamma_n} \otimes \frac{w^m}{\xi_m})\right) \\
&= \sum_{m,n} c_n d_m \gamma_n \xi_m \frac{z^n w^m}{\gamma_n \xi_m} = \left(\sum_n c_n z^n\right)\left(\sum_m d_m w^m\right) = fg
\end{aligned}$$

olarak birimsel bir şekilde genişletilir. Dolayısıyla $H^2(\mu)$ ve $H^2(\mu_1) \otimes H^2(\mu_2)$ uzayları izometrik izomorftur.

Ayrıca $H^2(\mu)$ uzayının üretici çekirdeği K'nın, $H^2(\mu_1)$ ve $H^2(\mu_2)$ uzaylarının üretici çekirdekleri K_1 ve K_2'nin çarpımı şeklinde olduğu da gösterilebilir: $z = (z_1, z_2), w = (w_1, w_2) \in \mathbb{D}^2$ ve $I = (n, m) \geq 0$ olmak üzere

$$\begin{aligned} K(z, w) &= \sum_{I \geq 0} \overline{e_I(w)} e_I(z) = \sum_{I \geq 0} \frac{\bar{w}^I z^I}{\beta_I^2} \\ &= \sum_m \sum_n \frac{(z_1 \bar{w}_1)^n (z_2 \bar{w}_2)^m}{\gamma_n^2 \xi_m^2} \\ &= K_1(z_1, w_1) K_2(z_2, w_2). \end{aligned}$$

$L^2(\mu_1)$, $\bar{\mathbb{D}}$ üzerinde μ_1 ölçüsüne göre karesi integrallenebilir kompleks değerli ölçülebilir fonksiyonların Lebesgue uzayı ve $P_1 : L^2(\mu_1) \to H^2(\mu_1)$ ortogonal izdüşüm olmak üzere $\varphi \in C(supp\mu_1)$ sembollü $T_\varphi : H^2(\mu_1) \to H^2(\mu_1)$ Toeplitz operatörü de Tanım (4.2)'ye benzer şekilde tanımlanır [44].

Lemma 4.2. $\varphi \in C(supp\mu_1), \eta, \zeta \in C(supp\mu_2)$ olmak üzere

(i) $M_\varphi \otimes M_\eta = M_{\varphi \otimes \eta}$'dir. Burada M_φ, $L^2(\mu_1)$ üzerinde φ ile çarpım operatörüdür.

(ii) $T_\varphi \otimes T_\eta = T_{\varphi \otimes \eta}$ dir.

(iii) $T_\varphi \otimes (T_\eta T_\zeta) = T_{\varphi \otimes \eta} T_{1 \otimes \zeta}$ dır.

İspat:

(i) $h = f \otimes g \in L^2(\mu_1) \otimes L^2(\mu_2)$ alalım.

$$(M_\varphi \otimes M_\eta)h = M_\varphi f \otimes M_\eta g = \varphi f \otimes \eta g = (\varphi \otimes \eta)(f \otimes g) = M_{\varphi \otimes \eta} h$$

dir.

(ii) Öncelikle $P_1 : L^2(\mu_1) \to H^2(\mu_1)$ ve $P_2 : L^2(\mu_2) \to H^2(\mu_2)$ ortogonal izdüşümleri için $P = P_1 \otimes P_2$ olduğunu gösterelim. Gerçekten de $z = (z_1, z_2), w = (w_1, w_2) \in$

$\mathbb{D}^2$ olmak üzere $h = f \otimes g \in L^2(\mu) = L^2(\mu_1) \otimes L^2(\mu_2)$ için

$$\begin{aligned}
(Ph)(z) &= \int_{\mathbb{D}^2} K(z,w)h(w)d\mu(w) \\
&= \int_{\mathbb{D}} \int_{\mathbb{D}} K_1(z_1,w_1)K_2(z_2,w_2)(f \otimes g)(w_1,w_2)d\mu_1(w_1)d\mu_2(w_2) \\
&= \int_{\mathbb{D}} \int_{\mathbb{D}} K_1(z_1,w_1)K_2(z_2,w_2)f(w_1)g(w_2)d\mu_1(w_1)d\mu_2(w_2) \\
&= \int_{\mathbb{D}} K_1(z_1,w_1)f(w_1)d\mu_1(w_1) \int_{\mathbb{D}} K_2(z_2,w_2)g(w_2)d\mu_2(w_2) \\
&= (P_1 f)(z_1)(P_2 g)(z_2) = [(P_1 \otimes P_2)h](z)
\end{aligned}$$

dir. Dolayısıyla (i) şıkkı kullanılarak

$$\begin{aligned}
(T_\varphi \otimes T_\eta)h = T_\varphi f \otimes T_\eta g \\
&= P_1(M_\varphi f) \otimes P_2(M_\eta g) = (P_1 \otimes P_2)(M_\varphi f \otimes M_\eta g) \\
&= P(M_{\varphi\otimes\eta} h) = T_{\varphi\otimes\eta} h
\end{aligned}$$

elde edilir.

(iii) (ii) şıkkı kullanılarak $(T_\varphi \otimes T_\eta T_\zeta)h = (T_\varphi f \otimes T_\eta T_\zeta g) = T_\varphi f \otimes T_\eta(T_\zeta g) = (T_\varphi \otimes T_\eta)(f \otimes T_\zeta g) = T_{\varphi\otimes\eta} T_{1\otimes\zeta} h$ elde edilir. $\square$

$H^2(\mu)$ uzayı, daha basit iki uzayın tensör çarpımı şeklinde ifade edilebildiği için, bu uzay üzerinde tanımlı sürekli sembollü Toeplitz operatörleri yardımıyla üretilen C^*-cebirinin yapısı, Douglas ve Howe 'un [15] çalışmalarında kullandıkları tensör çarpım ve homolojik cebir yöntemleri kullanılarak incelenecektir. Bunun için T_φ operatörleriyle üretilen C^*-cebirinin tam karakterizasyonuna ihtiyaç duyulmaktadır:

Teorem 4.6. ([44, Theorem 6]) $\varphi \in C(supp\mu_1)$ olmak üzere T_φ Toeplitz operatörleriyle üretilen $\mathcal{A}(\mu_1)$ C^*-cebirinin komutatör ideali, $H^2(\mu_1)$ üzerinde tanımlı tüm kompakt operatörlerin $\mathcal{K}(\mu_1)$ idealidir. $\mathcal{A}(\mu_1)/\mathcal{K}(\mu_1)$ bölüm uzayı da $C(\mathbb{T})$'ye $T_\varphi + \mathcal{K} \to \varphi|_{\mathbb{T}}$ dönüşümü yardımıyla $*$-izomorftur.

Çalışmanın bundan sonraki kısmında kullanılacak yöntemlere ([15]'deki yöntemler) uygunluğu açısından bu teorem şu şekilde de ifade edilebilir:

$j_1 : \mathcal{K}(\mu_1) \to \mathcal{A}(\mu_1)$ bir bire-bir $*$-homomorfizmasını göstermek üzere öyle bir $\pi_1 : \mathcal{A}(\mu_1) \to C(\mathbb{T})$ örten $*$-homomorfizması vardır ki

$$0 \longrightarrow \mathcal{K}(\mu_1) \xrightarrow{j_1} \mathcal{A}(\mu_1) \xrightarrow{\pi_1} C(\mathbb{T}) \longrightarrow 0,$$

bir kısa tam dizidir.

Özellik 4.5. $\psi(z,w) \in C(supp\mu)$ olmak üzere T_ψ Toeplitz operatörleriyle üretilen C^*-cebir $\mathcal{A}(\mu)$, $\psi_z := \psi(\cdot,w) \in C(supp\mu_1)$ ve $\psi_w := \psi(z,\cdot) \in C(supp\mu_2)$ olmak üzere T_{ψ_z} ve T_{ψ_w} Toeplitz operatörleriyle üretilen C^*-cebirleri, $\mathcal{A}(\mu_1)$ ve $\mathcal{A}(\mu_2)$'nin tensör çarpımı olarak yazılabilir, yani $\mathcal{A}(\mu) = \mathcal{A}(\mu_1) \otimes \mathcal{A}(\mu_2)$'dir.

İspat: $\psi = \psi_z \otimes \psi_w$ olduğu gözönüne alınarak, Lemma (4.2)'nin (ii) ve (iii) şıklarından $\mathcal{A}(\mu_1) \otimes \mathcal{A}(\mu_2) \subset \mathcal{A}(\mu)$ olduğu kolaylıkla elde edilir. Diğer taraftan yine Lemma (4.2)'nin (ii) şıkkından $T_\psi = T_{\psi_z \otimes \psi_w} = T_{\psi_z} \otimes T_{\psi_w}$ olduğundan $\mathcal{A}(\mu) \subset \mathcal{A}(\mu_1) \otimes \mathcal{A}(\mu_2)$ elde edilir. $\square$

Burada $\mathcal{K}(\mu_1), \mathcal{K}(\mu_2)$ ve $C(\mathbb{T})$ C^*-cebirleri nükleer olduğundan (Örnek 7 ve Örnek 8), $C(\mathbb{T})$'nin, sırasıyla $\mathcal{K}(\mu_1)$ ve $\mathcal{K}(\mu_2)$ tarafından genişlemeleri olan $\mathcal{A}(\mu_1)$ ve $\mathcal{A}(\mu_2)$ C^*-cebirleri de Teorem (2.10)'dan dolayı nükleerdir. Bu yüzden $\mathcal{A}(\mu_1)$ ve $\mathcal{A}(\mu_2)$'nin cebirsel tensör çarpımı tek bir C^*-norma sahiptir ve $\mathcal{A}(\mu_1) \otimes \mathcal{A}(\mu_2)$ C^*-cebiri, cebirsel tensör çarpımın bu norma göre tamlanışıdır.

Douglas ve Howe'un [15]'de oluşturdukları değişmeli diagrama benzer şekilde, Teorem (2.9) yardımıyla, Teorem (4.6)'da verilen kısa tam dizisi aracılığıyla aşağıdaki değişmeli diagramı oluşturalım.

$$\begin{array}{ccccccccc}
 & & 0 & & 0 & & 0 & & \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\
0 & \longrightarrow & \mathcal{K}(\mu_1)\otimes\mathcal{K}(\mu_2) & \overset{j_1\otimes 1}{\longrightarrow} & \mathcal{A}(\mu_1)\otimes\mathcal{K}(\mu_2) & \overset{\pi_1\otimes 1}{\longrightarrow} & C(\mathbb{T})\otimes\mathcal{K}(\mu_2) & \longrightarrow & 0 \\
 & & \downarrow {\scriptstyle 1\otimes j_2} & & \downarrow {\scriptstyle 1\otimes j_2} & & \downarrow {\scriptstyle 1\otimes j_2} & & \\
0 & \longrightarrow & \mathcal{K}(\mu_1)\otimes\mathcal{A}(\mu_2) & \overset{j_1\otimes 1}{\longrightarrow} & \mathcal{A}(\mu_1)\otimes\mathcal{A}(\mu_2) & \overset{\pi_1\otimes 1}{\longrightarrow} & C(\mathbb{T})\otimes\mathcal{A}(\mu_2) & \longrightarrow & 0 \\
 & & \downarrow {\scriptstyle 1\otimes \pi_2} & & \downarrow {\scriptstyle 1\otimes \pi_2} & & \downarrow {\scriptstyle 1\otimes \pi_2} & & \\
0 & \longrightarrow & \mathcal{K}(\mu_1)\otimes C(\mathbb{T}) & \overset{j_1\otimes 1}{\longrightarrow} & \mathcal{A}(\mu_1)\otimes C(\mathbb{T}) & \overset{\pi_1\otimes 1}{\longrightarrow} & C(\mathbb{T})\otimes C(\mathbb{T}) & \longrightarrow & 0 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\
 & & 0 & & 0 & & 0 & &
\end{array}$$

Bu diagramdan aşağıdaki sonuçlar elde edilir:

Lemma 4.3.

$$0 \longrightarrow \mathcal{K}(\mu_1)\otimes\mathcal{K}(\mu_2) \overset{\alpha}{\longrightarrow} \mathcal{A}(\mu_1)\otimes\mathcal{A}(\mu_2)$$
$$\xrightarrow{\pi_1\otimes 1 \oplus 1\otimes\pi_2} C(\mathbb{T})\otimes\mathcal{A}(\mu_2) \oplus \mathcal{A}(\mu_1)\otimes C(\mathbb{T}) \longrightarrow 0$$

dizisi kesin tam bir dizidir. Burada $\alpha = (j_1 \otimes 1)(1 \otimes j_2) = (1 \otimes j_2)(j_1 \otimes 1)$'dir.

İspat: Bir $T \in Ker((\pi_1 \otimes 1) \oplus (1 \otimes \pi_2))$ alalım. O halde $T \in Ker(\pi_1 \otimes 1)$ ve $T \in Ker(1 \otimes \pi_2)$ dir. $T \in Ker(\pi_1 \otimes 1)$ ise yukarıdaki değişmeli diagramdan $(j_1 \otimes 1)(S) = T$ olacak şekilde bir $S \in \mathcal{K}(\mu_1) \otimes \mathcal{A}(\mu_2)$ vardır. Ayrıca $(j_1 \otimes 1)(1 \otimes \pi_2)(S) = (1 \otimes \pi_2)(j_1 \otimes 1)(S) = (1 \otimes \pi_2)(T) = 0$ olduğundan $(1 \otimes j_2)(R) = S$ olacak şekilde bir $R \in \mathcal{K}(\mu_1) \otimes \mathcal{K}(\mu_2)$ vardır ve bu yüzden $T = \alpha(R)$, yani $T \in Im(\alpha)$'dır. Tersine, bir $S \in Im(\alpha)$ alalım. O halde $\alpha(T) = S$ olacak şekilde bir $T \in \mathcal{K}(\mu_1) \otimes \mathcal{K}(\mu_2)$ vardır. $(1 \otimes j_2)T \in Im(1 \otimes j_2) = Ker(1 \otimes \pi_2)$ olduğundan $(1 \otimes \pi_2)(1 \otimes j_2)T = 0$'dır. Benzer şekilde $(j_1 \otimes 1)T \in Im(j_1 \otimes 1) = Ker(\pi_1 \otimes 1)$ olduğundan $(\pi_1 \otimes 1)(j_1 \otimes 1)T = 0$'dır. Dolayısıyla $(\pi_1 \otimes 1)S = (\pi_1 \otimes 1)(j_1 \otimes 1)(1 \otimes j_2)T = (1 \otimes j_2)(\pi_1 \otimes 1)(j_1 \otimes 1)T = 0$ ve $(1 \otimes \pi_2)S = (1 \otimes \pi_2)(j_1 \otimes 1)(1 \otimes j_2)T = (j_1 \otimes 1)(1 \otimes \pi_2)(1 \otimes j_2)T = 0$ olur, yani $S \in Ker((\pi_1 \otimes 1) \oplus (1 \otimes \pi_2))$'dir. $\square$

Özel bir hali [15, Lemma, s.208]'de bulunan fakat ispatı aynı olan aşağıdaki lemma, $(\pi_1 \otimes 1) \oplus (1 \otimes \pi_2)$ dönüşümü ile ilgili daha fazla bilgi vermektedir:

Lemma 4.4. $\mathcal{A}(\mu)$'den, $C(\mathbb{T}, \mathcal{A}(\mu_2))$ ve $C(\mathbb{T}, \mathcal{A}(\mu_1))$'e, $\psi(z,w) \in C(supp\mu)$, $F(z) = T_{\psi|_{\mathbb{T}}(z,\cdot)}$ ve $G(w) = T_{\psi|_{\mathbb{T}}(\cdot,w)}$ olmak üzere sırasıyla, $\gamma_z(T_\psi) = F$ ve $\gamma_w(T_\psi) = G$ olacak şekilde γ_z ve γ_w $*$-homomorfizmaları vardır. Ayrıca, $\mathcal{A}(\mu_1) \otimes \mathcal{A}(\mu_2) = \mathcal{A}(\mu)$, $C(\mathbb{T}) \otimes \mathcal{A}(\mu_2) = C(\mathbb{T}, \mathcal{A}(\mu_2))$ ve $\mathcal{A}(\mu_1) \otimes C(\mathbb{T}) = C(\mathbb{T}, \mathcal{A}(\mu_1))$ [15, Proposition 3] olduğundan $\pi_1 \otimes 1 = \gamma_z$ ve $1 \otimes \pi_2 = \gamma_w$'dur.

Burada, $C(\mathbb{T}, \mathcal{A}(\mu_1))$ ve $C(\mathbb{T}, \mathcal{A}(\mu_2))$, birim çember üzerinde tanımlı, sırasıyla $\mathcal{A}(\mu_1)$ ve $\mathcal{A}(\mu_2)$ değerli sürekli fonksiyonların uzayıdır. Üstteki lemma gözönüne alınarak Lemma (4.3) aşağıdaki gibi düzenlenir:

Lemma 4.5. $\mathcal{K}(\mu)$'den $\mathcal{A}(\mu)$'ye öyle bir α' izometrik $*$-izomorfizması vardır ki

$$0 \longrightarrow \mathcal{K}(\mu) \xrightarrow{\alpha'} \mathcal{A}(\mu) \xrightarrow{\gamma_z \oplus \gamma_w} C(\mathbb{T}, \mathcal{A}(\mu_2)) \oplus C(\mathbb{T}, \mathcal{A}(\mu_1)) \longrightarrow 0$$

dizisi kısa tam dizidir.

Bu lemmadan kompakt operatörlerin ideali $\mathcal{K}(\mu)$'nün, $\mathcal{A}(\mu)$ C^*-cebirinin komutatör ideali olmadığı görülür. Bununla birlikte, $\mathcal{A}(\mu)$ C^*-cebirinin komutatör ideali $\mathcal{I}$, $\mathcal{A}(\mu_1) \otimes \mathcal{K}(\mu_2) \oplus \mathcal{K}(\mu_1) \otimes \mathcal{A}(\mu_2)$'dir: Kolaylık için $I_1 := \mathcal{A}(\mu_1) \otimes \mathcal{K}(\mu_2) \oplus \mathcal{K}(\mu_1) \otimes \mathcal{A}(\mu_2)$ olsun. Bir $\psi_1, \psi_2 \in C(supp\mu)$ için $T_{\psi_1}T_{\psi_2} - T_{\psi_2}T_{\psi_1}$ elemanının I_1 de olduğunu gösterelim.

Bunun için

$$T_{\psi_1}T_{\psi_2} - T_{\psi_2}T_{\psi_1} = T_{\psi_1}T_{\psi_2} - T_{\psi_1\psi_2} + T_{\psi_1\psi_2} - T_{\psi_2}T_{\psi_1}$$

olduğundan $T_{\psi_1\psi_2} - T_{\psi_1}T_{\psi_2} \in I_1$ olduğunu göstermek yeterlidir.

$$T_{\psi_1\psi_2} - T_{\psi_1}T_{\psi_2} = PM_{\psi_1}(I-P)M_{\psi_2} = PM_{\psi_1}[(I-P_1)\otimes I + P_1 \otimes (I-P_2)]M_{\psi_2}$$

dir. $\psi_1 = \varphi \otimes \eta$, $\psi_2 = \xi \otimes \zeta$ olsun. O halde Lemma (4.2)'den

$$\begin{aligned} T_{\psi_1\psi_2} - T_{\psi_1}T_{\psi_2} &= PM_{\varphi\otimes\eta}[(I-P_1)\otimes I + P_1 \otimes (I-P_2)]M_{\xi\otimes\zeta} \\ &= P_1M_\varphi(I-P_1)M_\xi \otimes P_2M_\eta M_\zeta + P_1M_\varphi P_1 M_\xi \otimes P_2M_\eta(I-P_2)M_\zeta \\ &= (T_{\varphi\xi} - T_\varphi T_\xi)\otimes T_{\eta\zeta} + T_{\varphi\xi}\otimes(T_{\eta\zeta} - T_\eta T_\zeta) \in I_1, \end{aligned}$$

yani $\mathcal{I} \subset I_1$'dir. Tersine, bir $T_\varphi(T_\eta T_\xi - T_\xi T_\eta) \in I_1$ üreteci alalım. Lemma (4.2)'den $T_\varphi(T_\eta T_\xi - T_\xi T_\eta) = (T_\varphi \otimes T_1)(T_1 \otimes (T_\eta T_\xi - T_\xi T_\eta)) = (T_{\varphi\otimes 1})(T_{1\otimes\eta}T_{1\otimes\xi} - T_{1\otimes\xi}T_{1\otimes\eta}) \in \mathcal{I}$'dır. Dolayısıyla, $I_1 \subset \mathcal{I}$'dır.
Öte yandan değişmeli diagram göz önüne alındığında

$$0 \longrightarrow \mathcal{A}(\mu_1)\otimes\mathcal{K}(\mu_2) \oplus \mathcal{K}(\mu_1)\otimes\mathcal{A}(\mu_2) \xrightarrow{1\otimes j_2 - j_1\otimes 1} \mathcal{A}(\mu_1)\otimes\mathcal{A}(\mu_2)$$

$$\xrightarrow{\rho} C(\mathbb{T})\otimes C(\mathbb{T}) \longrightarrow 0$$

dizisinin kesin tam bir dizi olduğu görülür. Burada $\rho = (1\otimes\pi_2)(\pi_1\otimes 1) = (\pi_1\otimes 1)(1\otimes \pi_2)$'dir. Gerçekten de bir $T \in Im(1\otimes j_2 - j_1 \otimes 1)$ alınsın. $(1\otimes j_2)S_1 - (j_1\otimes 1)S_2 = T$ olacak şekilde $S_1 \in \mathcal{A}(\mu_1)\otimes\mathcal{K}(\mu_2)$ ve $S_2 \in \mathcal{K}(\mu_1)\otimes\mathcal{A}(\mu_2)$ vardır. Değişmeli diagramdan $(1\otimes j_2)S_1 \in Ker(1\otimes\pi_2)$ ve $(j_1\otimes 1)S_2 \in Ker(\pi_1\otimes 1)$ olduğundan dolayı

$$\begin{aligned} \rho(T) &= (\pi_1\otimes 1)(1\otimes\pi_2)T \\ &= (\pi_1\otimes 1)(1\otimes\pi_2)((1\otimes j_2)S_1 - (j_1\otimes 1)S_2) \\ &= (\pi_1\otimes 1)(1\otimes\pi_2)(1\otimes j_2)S_1 - (\pi_1\otimes 1)(1\otimes\pi_2)(j_1\otimes 1)S_2 = 0 \end{aligned}$$

elde edilir, yani $T \in Ker\rho$ dur. Dolayısıyla, $\mathcal{A}(\mu)/\mathcal{I}$ bölüm cebiri, $C(\mathbb{T}^2) = C(\mathbb{T})\otimes C(\mathbb{T})$'ye $*$-izomorftur.
Yukarıda elde edilen sonuçlar ışığında şu teorem verilir:

Teorem 4.7. $\mathcal{A}(\mu)$ C^*-cebirinin komutatör ideali $\mathcal{I}$, kompakt operatörlerin $\mathcal{K}(\mu)$ idealini öz alt olarak içerir. Ayrıca $\mathcal{A}(\mu)/\mathcal{I}$ bölüm cebiri, $C(\mathbb{T}^2)$'ye $*$-izomorftur.

A sistemi ile $H^2(\mu)$ uzayı üzerindeki bağımsız değişkenlerle çarpım operatörlerinin sistemi birimsel denk oldukları için $C^*(A)$ cebirinin yapısı Teorem (4.7) gözönüne alınarak şu şekilde verilir:

Teorem 4.8. (Koca, Sadık [27]) $A \in \Omega$ olsun. A sistemi tarafından üretilen operatör cebiri polidisk cebirine izometrik izomorf ise A sistemi tarafından üretilen C^*-cebiri $C^*(A)$'nın komutatör ideali $\mathcal{I}$, kompakt operatörlerin $\mathcal{K}$ idealini öz alt olarak içerir. Ayrıca $\mathcal{A}/\mathcal{I}$ bölüm cebiri, $C(\mathbb{T}^2)$'ye $*$-izomorftur.

$C^*(A)$ C^*-cebirinin bu karakterizasyonu elde edildikten sonra bu cebirde yer alan sürekli sembollü Toeplitz operatörünün Fredholmluluğu incelenebilir. Başlamadan önce bir değişkenli durum için bazı incelemelere gerek duyulmaktadır. Teorem (4.6)'nın bir sonucu olarak, $H^2(\mu_1)$ üzerinde tanımlı sürekli sembollü T_φ Toeplitz operatörünün Fredholm olması için bir gerek ve yeter koşulun φ fonksiyonunun her $z \in \mathbb{T}$ için sıfırdan farklı olduğu elde edilir.

Lemma 4.6. ([44, Lemma 5]) $\varphi_1, \varphi_2 \in C(supp\mu_1)$ fonksiyonları için $\varphi_1|_{\mathbb{T}} \not\equiv 0$, $\varphi_2|_{\mathbb{T}} \not\equiv 0$ ve $\varphi_1|_{\mathbb{T}}$ fonksiyonu $\varphi_2|_{\mathbb{T}}$ fonksiyonuna homotopik ise T_{φ_1} ve T_{φ_2} Toeplitz operatörleri aynı indekse sahiptir, yani $ind(T_{\varphi_1}) = ind(T_{\varphi_2})$'dir.

n, $\varphi|_{\mathbb{T}}$ fonksiyonunun orijine göre dolanım sayısını ($wind(\varphi|_{\mathbb{T}})$ ile gösterilir) göstermek üzere, $\varphi|_{\mathbb{T}}$, z^n'e homotopik olduğundan üstteki lemmadan $ind(T_\varphi) = ind(T_{z^n}) = -n = -wind(\varphi|_{\mathbb{T}})$ elde edilir. Ayrıca $\varphi \in C(supp\mu_1)$ olmak üzere T_φ Fredholm Toeplitz operatörünün terslenebilir olması için gerek ve yeter koşul $indT_\varphi = 0$ olması, yani $wind\varphi|_{\mathbb{T}} = 0$ olmasıdır [44].
Bu bilgiler ışığında $C^*(A)$ C^*-cebirinde yer alan sürekli sembollü Toeplitz operatörünün Fredholmluluğu aşağıdaki gibi verilebilir:

Teorem 4.9. (Koca, Sadık [27]) $\psi \in C(supp\mu)$ olmak üzere $T_\psi \in C^*(A)$ Toeplitz operatörünün Fredholm operatörü olması için gerek ve yeter koşul $\psi(z,w)$ 'nin her $(z,w) \in \mathbb{T}^2$ için sıfırdan farklı olması ve $\psi|_{\mathbb{T}^2}$'nin sabite homotopik olmasıdır.

İspat: Atkinson'un karakterizasyonundan $T_\psi \in C^*(A)$ Toeplitz operatörünün Fredholm operatörü olması için gerek ve yeter koşul $T_\psi + \mathcal{K}$'nın $B(H^2(\mu))/\mathcal{K}$ da terslenebilir olmasıdır. $T_\psi \in C^*(A)$ olduğundan, Teorem (2.7)'den $T_\psi + \mathcal{K}$'nın $B(H^2(\mu))/\mathcal{K}$'da terslenebilir olması için gerek ve yeter koşul $T_\psi + \mathcal{K}$'nın $C^*(A)/\mathcal{K}$'da terslenebilir olmasıdır. Teorem (4.5)'e göre bu koşulun sağlanması için gerek ve yeter koşul $\gamma_z(T_\psi)$ ve

$\gamma_w(T_\psi)$'nin sırasıyla $C(\mathbb{T}, \mathcal{A}(\mu_2))$ ve $C(\mathbb{T}, \mathcal{A}(\mu_1))$'de terslenebilir olmasıdır, yani $\psi(z, \cdot)$ ve $\psi(\cdot, w)$'nin $\mathbb{T}$'de sıfırdan farklı ve orijine göre dolanım sayılarının sıfır olmasıdır, yani $\psi(z, w)$'nin her $(z, w) \in \mathbb{T}^2$ için sıfırdan farklı ve $\psi|_{\mathbb{T}^2}$'nin sabite homotopik olmasıdır.

4.2. BİR UYGULAMA: BİR SINIF İNTEGRAL DENKLEMİN ÇÖZÜLEBİLİRLİĞİ

Bu bölümde, ağırlıklı tek taraflı öteleme operatörlerinin bir sistemi tarafından üretilen C^*-cebirlerin yapısıyla ilgili önceki bölümde elde edilen sonuçların bir uygulaması olarak bir sınıf integral denklemin çözülebilirliği verilmiştir (Teorem (4.11)).
Sadıkov'un, [45] çalışmasında aşağıdaki gibi verdiği operatör gözönüne alınarak bir sınıf integral denklem oluşturulmuş ve Bulgular bölümünde elde edilen sonuçlar ışığında bu denklemin çözülebilirliği için bir yeter şart verilmiştir.
π, $B(H)/\mathcal{K}(H)$'ın doğal homomorfizması olmak üzere L, $B(H)$'ın $\pi(L)$ görüntüsü, $B(H)/\mathcal{K}(H)$'ın değişmeli alt cebiri olacak şekilde bir alt cebiri olsun. S, $\pi(L)$ cebirinde $B, B' \in L$ olmak üzere $S\pi(B) = \pi(B')S$ koşulunu sağlayan bir otomorfizma olsun, yani $B \in L$ ise $SBS^{-1} = B' + K$, $B' \in L$ ve $K \in \mathcal{K}$'dır.

Sadıkov, [45] çalışmasında $B_1, B_2 \in L$ ve $K \in \mathcal{K}$ olmak üzere

$$T = B_1 + B_2 S + K$$

şeklindeki operatörleri tanımlamış ve bu operatörlerin Fredholmluluğunu incelemiştir:

Teorem 4.10. (Sadıkov, [45]) $\pi(B_1)\pi(B_1') - \pi(B_2)\pi(B_2')$ operatörü $\pi(L)$'de terslenebilir olsun. O halde $T = B_1 + B_2 S + K$ operatörü bir Fredholm operatörüdür.

T operatörünü özel olarak şu şekilde kuralım: Genelliği bozmayacağı için $n = 2$ alalım. Bir $A \in \Omega_1$ sistemi için $L = C^*(A)$ olsun. $\psi_1, \psi_2 \in C(supp\mu)$ için T_{ψ_1} ve T_{ψ_2}, $C^*(A)$'da sürekli sembollü Toeplitz operatörleri olmak üzere $T = T_{\psi_1} + T_{\psi_2} S + K$ operatörünü düşünelim. Burada $K(z, w)$, $H^2(\mu)$'nün Bergman üretici çekirdeği ve $z = (z_1, z_2)$, $w = (w_1, w_2)$ olmak üzere

$$(Pf)(z_1, z_2) = \int_{B^4} K(z, w) f(w_1, w_2) d\mu(w_1, w_2)$$

ortogonal izdüşüm ve $(Sf)(w_1, w_2) = f(w_2, w_1)$ dir.

T operatörünün oluşturduğu $Tf = \varphi$,

$$\int_{B^4} K(z,w)\psi_1(w_1,w_2)f(w_1,w_2)d\mu(w_1,w_2) + \int_{B^4} K(z,w)\psi_2(w_1,w_2)f(w_2,w_1)d\mu(w_1,w_2)$$

$$+(Kf)(z_1,z_2) = \varphi(z_1,z_2)$$

denklemini göz önüne alalım.

Teorem 4.11. (Koca, Sadık [27]) Eğer $\psi_1(z_1,z_2)\psi_1(z_2,z_1) - \psi_2(z_1,z_2)\psi_2(z_2,z_1)$ ifadesi S^3'te sıfırdan farklı ise, üstteki $Tf = \varphi$ denklemi için tüm Noether teoremleri doğrudur, yani

i) $Tf = 0$ homogen denklemin lineer bağımsız çözümlerinin sayısı sonludur.

ii) $Tf = \varphi$ denklemi normal çözülebilirdir, yani $Tf = \varphi$ denklemindeki φ elemanı her $\psi \in \mathrm{Ker}T^*$ için $\psi(\varphi) = 0$ şartını sağlar.

iii) $Tf = 0$ denkleminin lineer bağımsız çözümlerinin sayısı ile $T^*\bar{f} = 0$ eşlenik denkleminin lineer bağımsız çözümlerinin sayısı arasındaki fark, denklemin

$$\int_{B^4} K(z,w)\psi_1(w_1,w_2)f(w_1,w_2)d\mu(w_1,w_2)$$

$$+\int_{B^4} K(z,w)\psi_2(w_1,w_2)f(w_2,w_1)d\mu(w_1,w_2)$$

karasteristik kısmına bağlıdır.

Ek olarak, $A \in \Omega_1$ sisteminin ağırlıkları $w_{I,1} = \sqrt{\frac{m+1}{2+m+n}}$, $w_{I,2} = \sqrt{\frac{n+1}{2+m+n}}$ olarak alınırsa üstteki denklem

$$\int_{S^3} \frac{\psi_1(w_1,w_2)f(w_1,w_2)}{(1-z_1\bar{w}_1 - z_2\bar{w}_2)^2}dS + \int_{S^3} \frac{\psi_2(w_1,w_2)f(w_2,w_1)}{(1-z_1\bar{w}_1 - z_2\bar{w}_2)^2}dS +$$

$$+(Kf)(z_1,z_2) = \varphi(z_1,z_2),$$

formundadır. Burada dS, S^3'teki yüzey ölçüsüdür.

İspat: $ST_{\psi_1}S^{-1} = T'_{\psi_1} + K$, $K \in \mathcal{K}$ eşitliğinden $\psi'_1(z_1,z_2) = \psi_1(z_2,z_1)$ olmak üzere $T'_{\psi_1} = T_{\psi'_1}$ olduğu elde edilir. $\psi_1(z_1,z_2)\psi_1(z_2,z_1) - \psi_2(z_1,z_2)\psi_2(z_2,z_1)$ ifadesi S^3'te sıfırdan farklı ise Sonuç (4.1)'den $T_{\psi_1\psi'_1 - \psi_2\psi'_2}$ operatörü Fredholm operatörüdür, yani Atkinson'un (2.4) karakterizasyonundan $\pi(T_{\psi_1\psi'_1 - \psi_2\psi'_2})$, $C^*(A)/\mathcal{K}$'da terslenebilirdir. Öte yandan $i = 1, 2$ için $T_{\psi_i \psi_i'} - T_{\psi_i} T_{\psi_i'}$ kompakt olduğundan $\pi(T_{\psi_1} T_{\psi_1'} - T_{\psi_2} T_{\psi_2'})$ operatörü de $C^*(A)/\mathcal{K}$'da terslenebilirdir. Dolayısıyla $\pi(T_{\psi_1})\pi(T'_{\psi_1}) - \pi(T_{\psi_2})\pi(T'_{\psi_2})$ ifadesi $C^*(A)/\mathcal{K}$'da terslenebilirdir ve Teorem (4.10)'dan T bir Fredholm operatörüdür, yani $Tf = \varphi$ denklemi Noether teoremlerini sağlar.

$w_{I,1} = \sqrt{\frac{m+1}{2+m+n}}$, $w_{I,2} = \sqrt{\frac{n+1}{2+m+n}}$ alındığında $H^2(\mu) = H^2(S^3)$'tür [25]. Bu yüzden $Tf = \varphi$ denklemi

$$\int_{S^3} \frac{\psi_1(w_1, w_2) f(w_1, w_2)}{(1 - z_1 \bar{w}_1 - z_2 \bar{w}_2)^2} dS + \int_{S^3} \frac{\psi_2(w_1, w_2) f(w_2, w_1)}{(1 - z_1 \bar{w}_1 - z_2 \bar{w}_2)^2} dS +$$

$$+(Kf)(z_1, z_2) = \varphi(z_1, z_2),$$

formuna dönüşür.

4.3. POLİDİSK ÜZERİNDE TEK BİR FONKSİYON TARAFINDAN ÜRETİLEN İNVARYANT ALTUZAYLAR

Bölüm 2.4.2'de bahsedildiği gibi, birim disk üzerindeki Hardy uzayında tüm invaryant alt uzaylar bir iç fonksiyon tarafından üretilmiştir (Teorem (2.25) ve Teorem (2.26)). $n > 1$ durumunda ise invaryant alt uzayların yapısı daha karmaşıktır ve Rudin'in, "Function theory in polydiscs" kitabında verdiği "Polidisk üzerindeki Hardy uzayının tüm invaryant alt uzaylarının sınıflandırılması yada açık bir tanımının verilmesi" problemi hala açıktır. Bu bölümde, polidisk üzerindeki Hardy uzayında tek bir fonksiyon tarafından üretilen invaryant alt uzayların tam bir karakterizasyonu verilmiş, bir iç fonksiyon tarafından üretilmeyen, tek bir fonksiyon tarafından üretilen bir invaryant alt uzay kurulmuştur (Teorem (4.12) ve Teorem (4.15)). Ayrıca bu tür invaryant alt uzayların kapsama, eşitlik ve birimsel denklik gibi özellikleri de incelenmiştir (Özellik (4.6) ve Teorem (4.16)). Son olarak, elde edilen sonuçlar kullanılarak, bir değişkenli durumda geçerli olan fakat çok değişkenli durumda geçerli olmayan bir dış fonksiyon karakterizasyonunun, çok değişkenli durumda bir fonksiyon sınıfı üzerinde geçerli olduğu gösterilmiştir (Sonuç (2.21)).

İç fonksiyon yerine daha genel olarak $1/f^* \in L^\infty(\mathbb{T}^n)$ koşulunu sağlayan $f \in H^\infty(\mathbb{D}^n)$ fonksiyonlarının sınıfı ele alınsın. İç fonksiyonların bu sınıfa ait olduğu açıktır. Aynı zamanda $f(z_1, z_2) = z_1 - \frac{1}{2} z_2$ fonksiyonu söz konusu fonksiyon sınıfına ait olan fakat iç olmayan bir fonksiyondur. Dolayısıyla sadece iç fonksiyonlardan oluşmayan bu sınıfı incelemek uygundur.

Tanım 4.3. $1/f^* \in L^\infty(\mathbb{T}^n)$ koşulunu sağlayan bir $f \in H^\infty(\mathbb{D}^n)$ fonksiyonuna **genelleştirilmiş iç fonksiyon** denir.

Aşağıdaki teorem bir genelleştirilmiş iç fonksiyon tarafından üretilen alt uzayların invaryant olduğunu ve polidiskteki tek bir fonksiyon tarafından üretilen tüm invaryant alt uzayların bir genelleştirilmiş iç fonksiyon tarafından üretildiğini göstermektedir.

Teorem 4.12. $f \in H^\infty(\mathbb{D}^n)$ olmak üzere $H^2(\mathbb{D}^n)$'nin $fH^2(\mathbb{D}^n)$ alt uzayının invaryant olması için gerek ve yeter koşul f'nin genelleştirilmiş iç fonksiyon olmasıdır.

Bu teoremin ispatı için şu iki teoreme ihtiyaç duyulmaktadır:

Teorem 4.13. [11, s.93] X, Y Banach uzayları, $T : X \to Y$ sınırlı lineer bir operatör olmak üzere T nin alttan sınırlı olması için, yani her $x \in X$ için $||Tx|| \geq c||x||$ olacak şekilde $c > 0$ sayısının varolması için gerek ve yeter koşul Ker$T = \{0\}$ ve ran$T$'nin kapalı olmasıdır.

Teorem 4.14. ([39, Theorem 3.5.3, s.55)] $\mathbb{T}^n$ üzerinde tanımlı pozitif, sınırlı ve alttan yarı sürekli her ψ fonksiyonuna karşılık $\mathbb{T}^n$ üzerinde hemen her yerde $|f^*| = \psi$ koşulunu sağlayan bir $f \in H^\infty(\mathbb{D}^n)$ fonksiyonu vardır.

Teorem (4.12) **nin ispatı:** M_f, $H^2(\mathbb{D}^n)$ üzerinde f ile çarpım operatörünü göstersin, yani $g \in H^2(\mathbb{D}^n)$ için $M_f(g) = fg$ olsun. $fH^2(\mathbb{D}^n)$ alt uzayının invaryant olduğunu kabul edelim. Ker$M_f = \{0\}$ ve M_f operatörünün görüntüsü $fH^2(\mathbb{D}^n)$ kapalı olduğundan Teorem (4.13) gereğince, M_f alttan sınırlıdır, yani her $g \in H^2(\mathbb{D}^n)$ için $||M_f g||_2 \geq \delta||g||_2$ olacak şekilde $\delta > 0$ vardır. Buradan $\mathbb{T}^n$ üzerinde hemen her yerde $|f^*| \geq \delta$ elde edilir. Gerçekten de, $m_n\{\xi \in \mathbb{T}^n : |f^*| < \delta\} > 0$ olduğunu kabul edelim. O halde bir $\delta_0 \in (0, \delta)$ için $m_n\{\xi \in \mathbb{T}^n : |f(\xi)| < \delta_0\} > 0$'dır. Böyle bir δ_0 için $E = \{\xi \in \mathbb{T}^n : |f^*(\xi)| < \delta_0\}$ olsun. Buradan χ_E, E nin karakteristik fonksiyonunu göstermek üzere, $\mathbb{T}^n$ üzerinde tanımlı, $0 < \varphi_j \leq 1$ ve $\mathbb{T}^n$ üzerinde hemen her yerde $\lim_{j\to\infty} \varphi_j = \chi_E$ koşullarını sağlayan bir $\{\varphi_j\}_{j\geq 1}$ sürekli fonksiyonların dizisi kurulabilir. Teorem (4.14)'den her j için $\mathbb{T}^n$ üzerinde hemen her yerde $|g_j^*| = \varphi_j$ koşulunu sağlayan bir $g_j \in H^\infty(\mathbb{D}^n) \subset H^2(\mathbb{D}^n)$ fonksiyonu vardır. Her j için

$$\delta^2 \int_{\mathbb{T}^n} |g_j^*|^2 dm_n \leq \int_{\mathbb{T}^n} |f^*|^2 |g_j^*|^2 dm_n$$

dir. Lebesgue'in baskın yakınsaklık teoreminden

$$\delta^2 m_n(E) \leq \int_E |f|^2 dm_n \leq \delta_0^2 m_n(E) < \delta^2 m_n(E)$$

çelişkisi elde edilir. Dolayısıyla $\mathbb{T}^n$ üzerinde hemen her yerde $|f^*| \geq \delta$ dir, yani $1/f^* \in L^\infty(\mathbb{T}^n)$'dir.

Tersine, f genelleştirilmiş bir iç fonksiyon olsun. $fH^2(\mathbb{D}^n)$ invaryantlığı için $fH^2(\mathbb{D}^n)$'nin kapalı olduğunu göstermek yeterlidir. Bunun için $fH^2(\mathbb{D}^n)$'nin M_f'nin görüntüsü olduğu gözönüne alındığında, Teorem (4.13) gereğince, M_f nin alttan sınırlı, yani her $g \in H^2(\mathbb{D}^n)$ için $||M_f g||_2 \geq c||g||_2$ koşulunu sağlayan bir $c > 0$ sayısının varolduğunu göstermek yeterlidir. Gerçekten de, her $g \in H^2(\mathbb{D}^n)$ için

$$||g||_2 = ||f^{-1}fg||_2 \leq ||f^{-1}||_\infty \cdot ||fg||_2 = ||f^{-1}||_\infty \cdot ||M_f g||_2$$

sağlandığından M_f alttan sınırlıdır. $\square$

Sonuç 4.2. $n = 1$ durumunu düşünelim. f bir genelleştirilmiş iç fonksiyon olmak üzere, $fH^2(\mathbb{D})$ invaryant alt uzayı bir iç fonksiyon tarafından üretilir. Gerçekten de, f fonksiyonu $f = f_i f_o$ gibi bir iç-dış faktörizasyona sahip ve $|f^*| = |f_o^*|$ olduğundan f_o da bir genelleştirilmiş iç fonksiyondur. Dolayısıyla yukarıdaki teoremden $f_o H^2(\mathbb{D})$, $H^2(\mathbb{D})$'nin invaryant alt uzayıdır. Öte yandan, f_o dış fonksiyon olduğundan Beurling'in teoreminden $f_o H^2(\mathbb{D}) = H^2(\mathbb{D})$'dir. Sonuç olarak, $fH^2(\mathbb{D}) = f_i f_o H^2(\mathbb{D}) = f_i H^2(\mathbb{D})$'dir, yani $fH^2(\mathbb{D})$ invaryant alt uzayı bir iç fonksiyon tarafından üretilir. Böylece yukarıda teorem sayesinde Beurling'in sonucunu farklı bir yoldan da göstermiş oluruz.

İç fonksiyonlar, genelleştirilmiş iç fonksiyon olduğu için $n > 1$ durumunda tek bir fonksiyon tarafından üretilen her invaryant alt uzayın bir iç fonksiyon tarafından üretilip üretilmediği sorusunu sormak doğaldır. Teorem (4.15) ile bir iç fonksiyon tarafından üretilemeyen, tek bir fonksiyon tarafından üretilen invaryant alt uzay kurulmuştur.

Teorem 4.15. $n > 1$ olmak üzere öyle bir f genelleştirilmiş iç fonksiyonu vardır ki herhangi bir I iç fonsiyonu için $fH^2(\mathbb{D}^n) \neq IH^2(\mathbb{D}^n)$'dir.

İspat: $\log h$'nin Poisson integrali $P[\log h]$'ın çokluharmonik olmadığı pozitif bir $h \in C(\mathbb{T}^n)$ fonksiyonu alalım. Teorem (4.14)'ten bu fonksiyona karşılık $\mathbb{T}^n$ üzerinde hemen her yerde $|f^*| = h$ koşulunu sağlayan $f \in H^\infty(\mathbb{D}^n)$ fonksiyonu vardır. Bu f fonksiyonu tarafından üretilen $fH^2(\mathbb{D}^n)$ invaryant alt uzayının bir I iç fonksiyonu tarafından üretildiğini kabul edelim, yani $fH^2(\mathbb{D}^n) = IH^2(\mathbb{D}^n)$ olsun. Buradan $fI^{-1}H^2(\mathbb{D}^n) = H^2(\mathbb{D}^n)$'dir. $fI^{-1}H^2(\mathbb{D}^n)$'nin kapalı alt uzay olduğu gözönünde bulundurularak, Teorem (2.21)'den fI^{-1}'nin dış fonksiyon olduğu elde edilir. fI^{-1} dış fonksiyon ise

$$\operatorname{Re}\log(fI^{-1}) = \log|fI^{-1}| = P[\log|(fI^{-1})^*|] = P[\log|f^*|] = P[\log h],$$

eşitliği sağlanır. Bu eşitlik $P[\log h]$'nin çokluharmonik olduğu çelişkisini verir. □

Not 4.1. Teorem (4.15)'den anlaşılacağı gibi, bir iç fonksiyon tarafından üretilemeyen, tek bir fonksiyon tarafından üretilen invaryant alt uzay, $\mathbb{T}^n$ üzerinde sürekli bir h fonksiyonuna karşılık gelen, hemen her yerde $f \not\equiv 0$ ve $|f^*| = h$ koşullarını sağlayan bir $f \in H^\infty(\mathbb{D}^n)$ genelleştirilmiş iç fonksiyon yardımıyla kurulmuştur. [39, Theorem 5.4.5, s. 121]'den böyle bir f fonksiyonunun bir u iç fonksiyonuyla aynı sıfırlara sahip olduğu bilinmektedir, yani $\mathbb{D}^n$ üzerinde $f = f_1 u$ olacak şekilde sıfırı olmayan bir f_1 analitik fonksiyonu vardır. Bununla birlikte, $P[\log|f^*|](= P[\log h])$, $\mathbb{D}^n$ üzerinde herhangi bir analitik fonksiyonunun reel kısmı olmadığından Teorem (2.24)'ten f fonksiyonu bir iç ve bir dış fonksiyonun çarpımı şeklinde yazılamaz, yani f böyle bir faktörizasyona sahip değildir.

Teoremdeki f fonksiyonuna örnek olarak $f(z_1, z_2) = z_1 - \frac{1}{2}z_2$ genelleştirilmiş iç fonksiyonu verilebilir. Bu fonksiyonun iç-dış faktörizasyona sahip olmadığı [50]'den bilinmektedir. Bununla birlikte, $z_1 = x_1 + iy_1,\ z_2 = x_2 + iy_2 \in \mathbb{T}^2$ olmak üzere $h(z_1, z_2) = (\frac{5}{4} - x_1x_2 - y_1y_2)^{1/2} \in C(\mathbb{T}^2)$ pozitif fonksiyonu için $\mathbb{T}^2$ üzerinde hemen her yerde $|f^*| = h$ dir:

$$\begin{aligned}|f^*|^2 &= (x_1 - \frac{1}{2}x_2)^2 + (y_1 - \frac{1}{2}y_2)^2 \\ &= \frac{5}{4} - x_1x_2 - y_1y_2\end{aligned}$$

dir. Ayrıca $P[\log h]$'ın çokluharmonik olmadığı da basit hesaplamalarla elde edilir. Dolayısıyla Teorem (4.15) ve Not (4.1) göz önüne alınarak f fonksiyonunun iç-dış faktörizasyona sahip olmadığı [50]'den farklı bir yolla elde edilmiş olur.

Aşağıda tek bir fonksiyon tarafından üretilen invaryant alt uzayların kapsama ve eşitlik gibi özellikleri verilmiştir.

Özellik 4.6. f_1 ve f_2, $\mathbb{D}^n$'de sıfırları olmayan iki genelleştirilmiş iç fonksiyon olsun. Bu durumda $f_1H^2(\mathbb{D}^n)$ ve $f_2H^2(\mathbb{D}^n)$ invaryant alt uzayları aşağıdaki koşulları sağlarlar:

(a) $f_1H^2(\mathbb{D}^n) \subset f_2H^2(\mathbb{D}^n)$ olması için gerek ve yeter koşul f_1/f_2 fonksiyonu genelleştirilmiş bir iç fonksiyon olmasıdır, yani $f_1/f_2 \in H^\infty(\mathbb{D}^n)$ ve $(f_2/f_1)^* \in L^\infty(\mathbb{T}^n)$ olmasıdır.

(b) $f_1H^2(\mathbb{D}^n) = f_2H^2(\mathbb{D}^n)$ olması için gerek ve yeter koşul $f_1/f_2, f_2/f_1 \in H^\infty(\mathbb{D}^n)$ olmasıdır.

İspat:

(a) $f_1H^2(\mathbb{D}^n) \subset f_2H^2(\mathbb{D}^n)$ olsun. Buradan, $f_1 \in f_2H^2(\mathbb{D}^n)$, yani $f_1 = f_2g$ olacak şekilde $g \in H^2(\mathbb{D}^n)$ vardır. Öte yandan $f_1, f_2 \in H^\infty(\mathbb{D}^n)$ ve $1/f_2^* \in L^\infty(\mathbb{T}^n)$ olduğundan $g = f_1/f_2 \in H^\infty(\mathbb{D}^n)$ olduğu elde edilir. Ayrıca $1/f_1^* \in L^\infty(\mathbb{T}^n)$ ise $(1/g)^* = (f_2/f_1)^* \in L^\infty(\mathbb{T}^n)$ dir.

Tersine, bir h genelleştirilmiş iç fonksiyonu için $f_1 = f_2h$ olsun. Dolayısıyla her $f \in H^2(\mathbb{D}^n)$ için $f_1f = f_2(hf)$ ve buradan $f_1H^2(\mathbb{D}^n) \subset f_2H^2(\mathbb{D}^n)$ elde edilir.

(b) (a)'dan kolaylıkla elde edilir. $\square$

Bölüm 2.4.1 de bahsettiğimiz gibi $n = 1$ durumunda Beurling'in (2.26) teoreminden bir f fonksiyonunun dış fonksiyon olması için gerek yeter koşulun $fH^2(\mathbb{D})$ alt uzayının $H^2(\mathbb{D})$'de yoğun olması elde edilir. Fakat $n > 1$ durumunda bu karakterizasyon doğru değildir: Teorem (2.21) de $fH^2(\mathbb{D}^n)$ alt uzayı $H^2(\mathbb{D}^n)$'de yoğun ise f'nin dış fonksiyon olduğu gösterilirken, Teorem (2.22)'de $fH^2(\mathbb{D}^2)$'nin $H^2(\mathbb{D}^2)$'de yoğun olmadığı bir $f \in H^2(\mathbb{D}^2)$ dış fonksiyon örneği verilmiştir. Aşağıdaki sonuç, Beurling'in dış fonksiyonlar için verdiği gerek ve yeter koşulun $n > 1$ durumunda genelleştirilmiş iç fonksiyonların sınıfında sağlandığını gösterir:

Sonuç 4.3. f genelleştirilmiş iç fonksiyon olsun. f nin dış fonksiyon olması için gerek ve yeter koşul $fH^2(\mathbb{D}^n) = H^2(\mathbb{D}^n)$ olmasıdır.

İspat: $fH^2(\mathbb{D}^n) = H^2(\mathbb{D}^n)$ ise, f nin dış fonksiyon olduğu Teorem (2.21)'den bilinmektedir.
Tersine, f dış bir fonksiyon olsun. Dolayısıyla Bölüm 2.4.1'de verildiği gibi (2.2)

$$\log|f| = P[\log|f^*|] \tag{4.2}$$

eşitliği sağlanır ve f, $\mathbb{D}^n$'de sıfıra sahip değildir, yani $1/f(= f^{-1})$, $\mathbb{D}^n$'de analitiktir. Öte yandan (4.2) eşitliği (-1) ile çarpıldığında, aynı eşitliğin f^{-1} için de sağlandığı, yani

$\log|f^{-1}| = P[\log|(f^{-1})^*|]$ olduğu görülür. $(f^{-1})^* \in L^\infty(\mathbb{T}^n)$ olduğundan, $\log|(f^{-1})^*| \in L^\infty(\mathbb{T}^n)$ dir ve dolayısıyla [39, Theorem 2.1.3, s.18]'den, $P[\log|(f^{-1})^*|]$ Poisson integrali, $\mathbb{D}^n$'de sınırlıdır Bu yüzden f^{-1}, $\mathbb{D}^n$'de sınırlıdır ve $f^{-1} \in H^\infty(\mathbb{D}^n)$'dir. Özellik (4.6) (b)'yi, $f_1 = f$ ve $f_2 = 1$ e uygulayarak, $fH^2(\mathbb{D}^n) = H^2(\mathbb{D}^n)$ elde edilir. □

Aşağıdaki teorem, tek bir fonksiyon tarafından üretilen invaryant alt uzayların birimsel denklik özelliğini verir. Bu teoremin Mandrekar'ın (2.30) teoremini kapsadığı açıktır.

Teorem 4.16. (a) $f_1,\ f_2$ genelleştirilmiş iç fonksiyonlar olmak üzere $\mathbb{T}^n$ üzerinde hemen her yerde $|f_1^*| = |f_2^*|$ ise $f_1H^2(\mathbb{D}^n)$ ve $f_2H^2(\mathbb{D}^n)$ invaryant alt uzayları birimsel denktir.

(b) $H^2(\mathbb{D}^n)$'nin tek bir fonksiyon tarafından üretilmiş invaryant alt uzaylarına birimsel denk tüm invaryant alt uzayları da aynı formdadır, yani tek bir fonksiyon tarafından üretilmişlerdir.

İspat:

(a) $\mathbb{T}^n$ üzerinde hemen heryerde $|f_1^*| = |f_2^*|$ olsun. $\psi := f_2/f_1$ unimoduler bir fonksiyon olmak üzere $M_\psi : f_1H^2(\mathbb{D}^n) \to f_2H^2(\mathbb{D}^n)$ çarpım operatörü istenen birimsel operatör olarak alındığında her $\theta \in H^\infty(\mathbb{D}^n)$ ve her $f \in f_1H^2(\mathbb{D}^n)$ için $M_\psi(\theta f) = \theta(M_\psi f)$ olur, yani $f_1H^2(\mathbb{D}^n)$ ve $f_2H^2(\mathbb{D}^n)$ uzayları birimsel denktir.

(b) M, $H^2(\mathbb{D}^n)$'nin $fH^2(\mathbb{D}^n)$'e birimsel denk bir invaryant alt uzayı olsun. Lemma (2.1)'den $M = \psi f H^2(\mathbb{D}^n)$ olacak şekilde bir ψ unimoduler fonksiyonu vardır. Bu ise M'nin, $g := \psi f \in H^\infty(\mathbb{D}^n)$ genelleştirilmiş iç fonksiyonu tarafından üretildiği elde edildiğini gösterir.

□

Bu çalışmanın esas kısmını oluşturan bu bölümde elde edilen sonuçların değerlendirilmesi Tartışma ve Sonuç bölümünde yapılmıştır.

5. TARTIŞMA VE SONUÇ

Bu tez çalışmasında özetle aşağıdaki sonuçlar ve gözlemler elde edilmiştir. Elde edilen sonuçlar yenidir ve günümüzde popülerliğini koruyan konuların açığa kavuşmasına katkı sağlayacak niteliktedir.

1. Ağırlıklı tek taraflı öteleme operatörlerinin bir A sistemi tarafından üretilen C^*-cebirlerin yapısı verilmiştir.

   (i) A sistemi tarafından üretilen operatör cebirinin yapısının top cebirine izometrik izomorf olması durumunda bu sistem tarafından üretilen C^*-cebirinin yapısı ile A sistemi tarafından üretilen cebirin polidisk cebirine izometrik izomorf olması durumunda bu sistem tarafından üretilen C^*-cebirinin yapısının farklı olduğu görülmüştür. Bu farklılık komutatör ideallerin farklı olmasından kaynaklanmaktadır. Top cebiri durumunda komutatör ideal, kompakt operatörlerin ideali iken polidisk cebiri durumunda komutatör ideal, kompakt operatörlerin idealinden daha geniştir (Teorem (4.3) ve Teorem (4.7)).

   (ii) Söz konusu C^*- cebirlerin yapısına bağlı olarak bu cebirlerde bulunan sürekli sembollü Toeplitz operatörlerinin Fredholmluluğu için gerek ve yeter şartlar verilmiştir.

   Top cebiri durumunda söz konusu C^*-cebirde bulunan sürekli sembollü Toeplitz operatörünün Fredholmluluğu için sembolün birim kürede her noktada sıfırdan farklı olması yeterli iken polidisk cebiri durumunda sembolün torusun her noktasında sıfırdan farklı olması koşuluna ek olarak sembolün torusta sabite homotopik olması şartı da aranmaktadır (Sonuç (4.1) ve Teorem (4.9)).

   (iii) Elde edilen sonuçların bir uygulaması olarak, A sistemi tarafından üretilen operatör cebirin top cebirine izometrik izomorf olması durumunda T_{ψ_1} ve T_{ψ_2}, $C^*(A)$ da sürekli sembollü Toeplitz operatörleri olmak üzere $T = T_{\psi_1} + T_{\psi_2}S + K$ şeklinde bir operatör oluşturulmuştur. Burada $K(z,w)$, $H^2(\mu)$'nün üretici çekirdeği ve $z = (z_1, z_2)$, $w = (w_1, w_2)$ olmak üzere

$$(Pf)(z_1, z_2) = \int_{B^4} K(z,w) f(w_1, w_2) d\mu(w_1, w_2)$$

ortogonal izdüşüm ve $Sf(w_1, w_2) = f(w_2, w_1)$ dir. Bu operatör yardımıyla $Tf = \varphi$ denklemi

$$\int_{B^4} K(z,w)\psi_1(w_1,w_2)f(w_1,w_2)d\mu(w_1,w_2)+$$

$$\int_{B^4} K(z,w)\psi_2(w_1,w_2)f(w_2,w_1)d\mu(w_1,w_2) + (Kf)(z_1,z_2) = \varphi(z_1,z_2)$$

oluşturulmuş ve bu denklemin çözülebilirliği için bir yeter şart verilmiştir. Buradan yararlanarak bu denklemin özel bir hali olan

$$\int_{S^3} \frac{\psi_1(w_1,w_2)f(w_1,w_2)}{(1-z_1\bar{w}_1-z_2\bar{w}_2)^2}ds + \int_{S^3} \frac{\psi_2(w_1,w_2)f(w_2,w_1)}{(1-z_1\bar{w}_1-z_2\bar{w}_2)^2}ds+$$

$$+(Kf)(z_1,z_2) = \varphi(z_1,z_2)$$

integral denkleminin de çözülebilirliği incelenmiştir (Teorem (4.11)).

2. Tez çalışmasının ikinci konusu olarak, polidisk üzerindeki Hardy uzayında tek bir fonksiyon tarafından üretilen invaryant alt uzayların tam bir karakterizasyonu verilmiştir (Teorem (4.12)). Bu karakterizasyonla birlikte aşağıdaki gözlemler yapılmıştır:

   (i) W. Rudin'in "Function Theory in Polydiscs" kitabında verdiği ve hala açık olan "$H^2(\mathbb{D}^n)$ üzerindeki invaryant alt uzayların kesin bir tanımı yada sınıflandırılması" problemine kısmi bir cevap verilmiştir.

   (ii) Verilen karakterizasyon bir değişkenli durum için düşünüldüğünde, birim disk üzerindeki Hardy uzayının invaryant alt uzaylarının tek bir iç fonksiyon tarafından üretildiği sonucu elde edilmiştir. Sonuç olarak, Beurling'in teoremi çok değişkenli duruma genelleştirilmiş ve bir değişkenli durum için invaryant alt uzayların bir iç fonksiyon tarafından üretildiği sonucu Beurling'in ispatından farklı bir şekilde ispatlanmıştır (Teorem (4.12)).

   (iii) Polidiskte bir iç fonksiyon tarafından üretilemeyen tek bir fonksiyon tarafından üretilen invaryant alt uzay kurulmuştur (Teorem (4.15)).

   (iv) Polidiskte tek bir fonksiyon tarafından üretilen invaryant alt uzayların kapsama, eşitlik ve birimsel denklik gibi özellikleri incelenmiş ve gerek ve yeter koşullar verilmiştir (Özellik (4.6) ve Teorem (4.16)).

(v) Beurling'in bir değişkenli durum için verdiği fakat çok değişkenli durumda geçerli olmayan "Bir f fonksiyonunun dış fonksiyon olması için gerek ve yeter koşul $fH^2(\mathbb{D}) = H^2(\mathbb{D})$ olmasıdır." dış fonksiyon karakterizasyonunun çok değişkenli durumda genelleştirilmiş iç fonksiyonlar için geçerli olduğu gösterilmiştir (Sonuç (4.3)).

$H^2(\mathbb{D})$'deki sıfırdan farklı her fonksiyonun bir iç ve bir dış fonksiyonun çarpımı şeklinde yazıldığı fakat aynı durumun $H^2(\mathbb{D}^n)$ durumunda geçerli olmadığı Bölüm 2.4.1'de hatırlatılmıştı. Genelleştirilmiş iç fonksiyonlarla ilgili elde edilen sonuçlardan sonra sıfırdan farklı her fonksiyonun genelleştirilmiş iç ve dış fonksiyonunun çarpımı şeklinde yazılıp yazılmayacağı sorusunu sormak çok doğaldır:

"Sıfırdan farklı her $f \in H^2(\mathbb{D}^n)$ fonksiyonu g genelleştirilmiş bir iç fonksiyon, h bir dış fonksiyon olmak üzere $f = gh$ formunda yazılabilir mi?"

$n = 1$ durumu için, iç fonksiyonlar genelleştirilmiş iç fonksiyon olduğu için soru doğrudur. Fakat $n > 1$ durumunda Rudin, (2.23) teoreminde öyle bir $f \in H^2(\mathbb{D}^n)$ fonksiyonu kurmuştur ki bu fonksiyonun sıfırlarında sıfır olan her sınırlı analitik fonksiyon aslında sıfır fonksiyondur. Dolayısıyla söz konusu genelleştirilmiş faktörizasyon sınırlı olmayan H^2 fonksiyonları için geçerli değildir. Fakat söz konusu sorunun sıfırdan farklı sınırlı f fonksiyonları için doğru olup olmadığı bilinmemektedir:

Problem: Sıfırdan farklı her $f \in H^\infty(\mathbb{D}^n)$ fonksiyonu g genelleştirilmiş bir iç fonksiyon, h bir dış fonksiyon olmak üzere $f = gh$ formunda yazılabilir mi?

KAYNAKLAR

[1]. Agrawal, O. P., Clark, D. N. and Douglas, R. G., 1986, Invariant subspaces in the polydisk. *Pacific J. Math.*, 121, no. 1, 1-11.

[2]. Akhiezer, N.I., 1965, *The classical moment problem and some related questions in analysis*, Hafner Publishing Co., New York.

[3]. Beauzamy, B., 1988, *Introduction to operator theory and invariant subspaces*, North-Holland Mathematical Library, 42. North-Holland Publishing Co., Amsterdam, ISBN: 0-444-70521-X.

[4]. Beurling, A., 1948, On two problems concerning linear transformations in Hilbert space, *Acta Math.*, 81, 17 pp.

[5]. Bonsall, F. F. and Duncan, J., 1973, *Complete normed algebras*, Springer-Verlag, New York-Heidelberg, ISBN: 978-3-642-65671-2

[6]. Brown, L., Douglas, R. and Fillmore, P., Unitary equivalence modulo the compact operators and extensions of C*-algebras, *Lect. Notes Math.*, Vol. 345, Springer Verlag, Berlin.

[7]. Coburn, L. A., 1967, The C^*-algebra generated by an isometry, *Bull. Amer. Math. Soc.*, 73, 722-726.

[8]. Coburn, L. A., 1969, The C^*-algebra generated by an isometry II, *Trans. Amer. Math. Soc.*, 137, 211-217.

[9]. Coburn, L. A., 1973/74, Singular integral operators and Toeplitz operators on odd spheres, *Indiana Univ. Math. J.*, 23, 433-439.

[10]. Conway, J. B., 2000, *A course in operator theory*, Graduate Studies in Mathematics, 21, American Mathematical Society, Providence, RI, ISBN: 0-8218-2065-6.

[11]. Conway, J. B., 1990, *A course in functional analysis*, Second edition, Graduate Texts in Mathematics, 96, Springer-Verlag, New York, ISBN: 0-387-97245-5.

[12]. Dixmier, J., 1977, *C^*-algebras*, North-Holland Publishing Co., Amsterdam-New York-Oxford, ISBN: 0-7204-0762-1.

[13]. Duren, P.L., 1970, *Theory of H^p Spaces*, Academic Press, New York.

[14]. Donoghue, W. F., 1957, The lattice of invariant subspaces of a completely continuous quasi-nilpotent transformation, *Pacific J. Math.*, 7, 1031–1035.

[15]. Douglas, R. G. and Howe, R., 1971, On the C^*-algebra of Toeplitz operators on the quarter plane, *Trans. Amer. Math. Soc.*, 158, 203-217.

[16]. Douglas, R.G., 1973, *Banach Algebra Techniques in the theory of Toeplitz operators*, Conference Board of the Mathematical Sciences Regional Conference Series in Mathematics, No. 15, American Mathematical Society, Providence, R.I., ISBN: 978-0-8218-1665-3.

[17]. Enflo, P., 1987, On the invariant subspace problem for Banach spaces, *Acta Math.*, 158, 213–313.

[18]. Ergezen, F. and Sadik, N., 2010, On some operator algebras generated by unilateral weighted shifts, *Publ. Math. Debrecen* 76, no. 1-2, 21–30.

[19]. Ergezen, F., 2008, On unilateral weighted shifts in noncommutative operator theory, *Topology Appl.*, 155, no. 17-18, 1929–1934.

[20]. Halmos, P. R., 1961, Shifts on Hilbert spaces, *J. Reine Angew. Math.*, 208, 102–112.

[21]. Helson, H., 1964, *Lectures on invariant subspaces*, Academic Press, New York-London.

[22]. Hoffman, K., 1988, *Banach spaces of analytic functions*, Dover Publications, Inc., New York, ISBN: 0-486-65785-X.

[23]. Jacewicz, C. A., 1972, A nonprincipal invariant subspace of the Hardy space on the torus, *Proc. Amer. Math. Soc.*, 31, 127–129.

[24]. Jewell, N. P., 1977, Multiplication by the coordinate functions on the Hardy space of the unit sphere in C^n, *Duke Math. J.*, 44, no. 4, 839–851.

[25]. Jewell, N. P. and Lubin, A. R., 1979, Commuting weighted shifts and analytic function theory in several variables, *J. Operator Theory*, 1, no.2, 207–223.

[26]. Kreutzer, E., 2014, *Toeplitz extensions and Berezin transforms*, Master Thesis, Universitat des Saarlandes.

[27]. Koca, B.B. and Sadik, 2012, N., C^*-Algebras Generated by a System of Unilateral Weighted Shifts and Their Application, *Journal of Function Spaces and Applications*, vol. 2012, 5 pages.

[28]. Lax, P.D., 1959, Translation invariant spaces, *Acta Math.*, 101, 163–178.

[29]. Le, T., 2009, Compact Toeplitz operators with continuous symbols, *Glasg. Math. J.*, 51, no. 2, 257–261.

[30]. Helson, L., 1960, *Invariant subspaces*, Proc.Intern. Symp. Linear spaces, Jarusalem.

[31]. Mandrekar, V., 1988, The validity of Beurling theorems in polydiscs, *Proc. Amer. Math. Soc.*, 103, 145–148.

[32]. Murphy, G.J., 1990, *C^*-algebras and Operator Theory*, Academic Press, Inc., Boston, MA, ISBN: 0-12-511360-9.

[33]. Nikol'skii, N. K., 1965, The invariant subspaces of certain completely continuous operators, *Vestnik Leningrad. Univ.*, 20, no.7, 68–77 (Rusça).

[34]. Nikol'skii, N. K., 1986, *Treatise on the shift operator, Spectral function theory*, Springer-Verlag, Berlin, ISBN: 3-540-15021-8.

[35]. Plessner, A., 1939, Über halbunitre Operatoren, *C. R. (Doklady) Acad. Sci. URSS (N. S.)*, 25, 710–712 (Almanca).

[36]. Read, C.J., 1985, A solution to the invariant subspace problem on the space l_1, *Bull. Lond. Math. Soc.*, 17, 305–317.

[37]. Radjavi, H. and Rosenthal, P., 1973, *Invariant subspaces*, Springer-Verlag, New York-Heidelberg.

[38]. Radlow, J., 1973, Ideals of square summable power series in several variables, *Proc. Amer. Math. Soc.*, 38, 293–297.

[39]. Rudin W., 1969, *Function Theory in Polydiscs*, New York/Amsterdam W. A. Benjamin Inc.

[40]. Rudin, W., 1980, *Function theory in the unit ball of $\mathbb{C}^n$*, Springer-Verlag, New York-Berlin.

[41]. Rudin, W., 1987, *Real and complex analysis*, Third edition, McGraw-Hill Book Co., New York.

[42]. Sadikov, N. M., 1975, Certain properties of the one-sided weighted shift operator., *Izv. Akad. Nauk Azerbaidzan. SSR Ser. Fiz.-Tehn. Mat. Nauk*, no.5, 8–12 (Rusça).

[43]. Sadikov, N. M., 1983, Invariant subspaces in the Hardy space on a polydisk that are generated by inner functions, *Akad. Nauk Azerbaidzhan. SSR Dokl.*, 39, no. 3, 8–11 (Rusça).

[44]. Sadikov, N. M., 1984, Toeplitz operators on the disc, *Izv. Akad. Nauk Azerbaidzhan. SSR Ser. Fiz.-Tekhn. Mat. Nauk*, 5, no. 4, 8–12 (Rusça).

[45]. Sadikov, N. M., 1987, On a method of Z. I. Halilov, *Akad. Nauk Azerbaidzhan. SSR Dokl*, 37, no. 1, 13–15 (Rusça).

[46]. Böttcher, A. and Silbermann, B., 2006, *Analysis of Toeplitz operators*, Second edition, Springer-Verlag, Berlin, ISBN: 978-3-540-32434-8.

[47]. Stroethoff K., 1997, The Berezin transform and operators on spaces of analytic functions, *Banach Center Publ.*, 38, 361–380.

[48]. M. Takesaki, 1979, *Theory of operator algebras I*, Springer, New York.

[49]. Upmeier, H., 1996, *Toeplitz operators and index theory in several complex variables*, Operator Theory: Advances and Applications, 81. Birkhuser Verlag, Basel, ISBN: 3-7643-5282-5.

[50]. Yang, R., 1999, The Berger-Shaw theorem in the Hardy module over the bidisk. *J. Operator Theory*, 42, no. 2, 379–404.

[51]. Zhu, K., 1990, *Operator Theory on Function Spaces*, Marcel Dekker Inc., New York.

[52]. Zhu, K., 2005, *Spaces of holomorphic functions in the unit ball*, Graduate Texts in Mathematics, 226, Springer-Verlag, New York, ISBN: 0-387-22036-4.

ÖZGEÇMİŞ

Kişisel Bilgiler

Adı Soyadı:	Beyaz Başak KOCA
Uyruğu	T.C.
Doğum Yılı, Yeri	1987, İstanbul.
E-mail	basakoca@istanbul.edu.tr

Eğitim

Derece	Kurum/Anabilim Dalı	Yılı
Doktora	İ.Ü. Fen Bilimleri Enstitüsü/Matematik Anabilim Dalı	2016
Yüksek Lisans	İ.Ü. Fen Bilimleri Enstitüsü/Matematik Anabilim Dalı	2011
Lisans	İ.Ü. Fen Fakültesi/Matematik Bölümü	2008
Lise	Cibali Lisesi	2004

Makaleler/Bildiriler

Koca, B.B. and Sadık, N., 2012, C^*-Algebras Generated by a System of Unilateral Weighted Shifts and Their Application, *Journal of Function Spaces and Applications*, vol.2012.

Koca, B.B., 2013, C^*-Algebras Generated by A System of Unilateral Weighted Shifts and Their Application, *"International Conference "22nd St.Petersburg Summer Meeting in Mathematical Analysis", St. Petersburg*, 25-30 Haziran 2013, s.24.

Koca, B.B., 2014, Fredholmness of Toeplitz operators, *İstanbul Analysis Seminars*.

Koca B.B., 2016, Polidiskte tek bir fonksiyon tarafından üretilen invaryant alt uzaylar, *İstanbul Üniversitesi Matematik Bölümü Genel Seminerleri*.