T. C.
ERCİYES ÜNİVERSİTESİ
SOSYAL BİLİMLER ENSTİTÜSÜ

TAMSAYILI PROGRAMLAMA PROBLEMLERİNİN ÇÖZÜMÜNE SEZGİSEL BİR YAKLAŞIM

Yüksek Lisans Tezi

Tülay MUĞALOĞLU

KAYSERİ — 1987

İ Ç İ N D E K İ L E R

TABLOLAR LİSTESİ

TABLO | Sayfa

ŞEKİLLER LİSTESİ

BÖLÜM I

TAMSAYILI OPTİMİZASYON

1.1. TAMSAYILI OPTİMİZASYON NEDİR?

Mal ve hizmet üretiminde bulunan işletmelerin faaliyetleri belirli amaçların gerçekleşmesi ilkesine dayanmaktadır. Gerçekte işletmenin kuruluş ve işleyiş nedeni, ulaşılmak istenilen amaçların en akılcı ve ekonomik bir biçimde gerçekleştirilmesidir.

İşletme yöneticileri emek, hammadde, makina v.s. gibi kıt kaynakları bazı kısıtlayıcı koşullara karşın en iyi şekilde kullanmak isterler. Başka bir deyişle, işletme yöneticileri istenilen sonuca şu iki seçenekten birini seçerek ulaşırlar:

a) Kârın maksimize edilmesi
b) Maliyetlerin minimize edilmesi.

İşletme yöneticileri optimal sonuca ya kârlarını maksimum bir düzeye çıkarmakla yada maliyetlerini minimum düzeye düşürmekle ulaşırlar. Birçok problemde kâr ve maliyetin en iyilenmesinin dışında başka amaçlar konmuşsa da, ayrıntılı bir inceleme sonucu bu amaçların da yukarıdaki seçeneklerden birine katılabileceği ortaya çıkar.

Amaç fonksiyonu ister maksimize ister minimize edilecek olsun karar değişkenlerinin tamsayılarla ifade edildiği optimizasyon problemlerine tamsayılı optimizasyon problemi denir(1).Sonuçların tamsayılı olması hem doğrusal hem de doğrusal olmayan matematiksel programlama problemlerinde istenebilir(2). Tamsayılı programlama problemi gerçekte doğrusal olmayan (non-linear) programlama problemidir. Fakat karar değişkeni üzerindeki tamsayılı olma koşulu dikkate alınmazsa tamsayılı programlama problemi doğrusal tamsayılı programlama halini alır. Aksi taktirde problem doğrusal değildir(3). Problemlerin bu şekilde sınıflandırılması tamsayılı programlama problemlerinin çözümü için geliştirilen tekniklerin kullanılması açısından gereklidir. Ancak bu alandaki çalışmaların çoğu algoritmaların kurulmasındaki kolaylık açısından doğrusal olan problemler üzerinde yoğunlaşmıştır(4).

1.2. TAMSAYILI OPTİMİZASYON PROBLEMİNİN GEREKLİLİĞİ

İşletmeler ellerinde bulunan kıt kaynakları üretim faktörleri arasında optimum bir şekilde dağıtmak isterler. Sınırlı kaynakların en uygun biçimde kullanılarak amaç fonksiyonunun maksimize veya minimize edilmesine olanak veren en önemli programlama modelinin doğrusal programlama olduğu söylenebilir(5). Doğrusal programlama problemi sınırlayıcı koşullar adı verilen doğrusal denklemler veya eşitsizlikler grubu ile birlikte amaç denklemi adı verilen değişkenlerin doğrusal bir fonksiyonunu optimize etmeyi(maksimize veya minimize) gerektirmektedir (6).

(1) Hamdy A.Taha,**Integer Programming:Theory,Applications and Computations**,New York: Academic Press Inc.,1975,s.1.
(2) Roger C.Pfaffenberger and David A.Walker, **Mathematical Programming for Economics and Business**,Iowa:The Iowa State University Press,1976,s.275.
(3) Hamdy A.Taha,**Operations Research:An Introduction**,2nd ed.,New York:Macmillan Publishing Co.,Inc.,1976,s.239.
(4) Taha,**Integer Programming:Theory,Applications and Computations**,s.1.
(5) Hüseyin Özgen,"Doğrusal Programlama:Kuram ve Uygulama Açısından Genel Bir Yaklaşım", **Adana İktisadi ve Ticari İlimler Akademisi Dergisi**,Sayı 3(Mart 1974),s.57.
(6) Osman Halaç,**Kantitatif Karar Verme Teknikleri(Yöneylem Araştırması)**,İstanbul:İstanbul Üniversitesi Yayını,1978,s.478.

Doğrusal programlama problemlerinde karar değişkenleri sürek-lidir. Bu ise çözüm sonucu karar değişkenlerinin örneğin 6.394 gibi kesirli değerler alabileceği anlamına gelir(7).Gerçekte doğrusal programlama yöntemi dünya ölçeğinde uygulama alanı bulmuş çok yararlı bir yöntem olmasına karşın,bu yönteme bazı eleştiriler yöneltilmektedir. Bunlar;modelin statik ve deterministik oluşu,ayrıntılı verilere gereksinim duyması, bilgisayar kullanımının zorunlu oluşu, doğrusallık ve bölünebilirlik varsayımının her zaman geçerli olmayışıdır(8).Bunun dışında karar değişkenlerinin bir kısmının veya tamamının tamsayılı olmasını gerektiren birçok problem doğrusal programlamanın uygulanabilirliğini tartışılır hale getirmiştir.Gerçekte DP çözüm sonuçlarının tamsayılı olmasını garanti etmez ve eğer çözüm sonucunda tamsayılı değerler elde edilmişse ancak bu bir tesadüftür.Günlük hayatta karşılaşılan birçok karar probleminde DP çözümüyle elde edilen kesirli sonuçlar anlamlı olmayacaktır. Örneğin 1.8 kişiyi istihdam etmek veya 3.4 birim kamyonla merkezden depolara mal göndermek kuramsal olarak mümkün olmasına karşın, anlamlı bir sonuç değildir. Bu nedenle örneğin buzdolabı, takım tezgahları üretimi, makina kullanımı, belirli bir iş için görevlendirilecek kişi sayısını veya dağıtım için gereksinim duyulan depo sayısını belirleme v.b. problemlerde sonuçların tamsayılı olması anlamlı olacaktır. O halde bu tip problemlerin çözümünde sonuçları tamsayılı veren tekniklerin kullanılması gerekecektir.

Bunların dışında DP bazı problemlerin çözümü için de yetersiz kalmaktadır. DP modeli, tüm maliyetlerin ya tamamen sabit ya da tamamen değişken olduğunu varsayar(9).Sabit maliyetler DP problemlerinin

(7) Gary D.Eppen and F.J.Gould,**Quantative Concepts for Management:Decision Making without Algorithms**,Englewood Cliffs,N.J.:Prentice-Hall,Inc.,1976,s.370.

(8) T.Dizdaroğlu ve C.Çakıl,"Tamsayılı Programlama Yönteminin Esasları",**Ege Üniversitesi Bilgisayar Araştırma ve Uygulama Dergisi**,Cilt 6,Sayı 2(Aralık 1983),s.127.

(9) Ronald V.Hartley,**Operations Research:A Managerial Emphasis**,California:Goodyear Publishing Company Inc.,1976,s.433.

formulasyonunda dikkate alınmamakta ve problem çözüldükten sonra sözkonusu maliyetler toplu olarak düşülmektedir. Ayrıca sabit maliyetlerin daima X eksenine paralel bir doğru ile gösterilmesi mümkün değildir. Sabit maliyetler örneğin belirli üretim kapasitesine veya belirli direkt işgücü saatine kadar bu özelliği taşır. Bazı durumlarda üretim miktarı veya direkt işgücü saati arttıkça sabit maliyetler belirli aralıklarla basamaklı bir biçimde artmaktadır(10). Sabit maliyetlerin bu şekilde basamaklı olması halinde DP çözüm için yetersiz kalmakta, yerine tamsayılı programlama problemlerinin çözümünden yararlanılmaktadır.

Aşağıdaki örnek problemler DP çözümünün yetersizliğini belirtmekte ve ancak problem yeni değişkenlerin ilavesi ile tamsayılı şekle getirildikten sonra çözülmektedir.

Herhangi bir X_j faaliyeti için kâr katsayısının P_j, hazırlık maliyetlerinin (set up costs) f_j, birim değişken maliyetinin de C_j olduğunu varsayalım. Eğer X_j sıfırdan büyük ise hazırlık maliyeti oluşacak, aksi taktirde ise oluşmayacaktır. Bu açıklamalara paralel olarak maliyetleri aşağıda gösterildiği gibi yazmak mümkündür.

$$C(X_j) = f_j + C_jX_j \quad \text{eğer } X_j > 0$$
$$C(X_j) = 0 + C_jX_j \quad \text{eğer } X_j \leqslant 0$$

Sayısal bir örnek problemin aşağıdaki sınırlara sahip olduğunu varsayalım. Ancak sabit maliyetlerin basamaklı olması nedeniyle bu maliyetlerin probleme yansıtılması için yeni değişkenlere ve ilave sınırlara gereksinim vardır(11).

$$8X_1 + 2X_2 + 3X_3 \leqslant 400$$
$$4X_1 + 5X_2 + 6X_3 \leqslant 300$$

---

(10) Cengiz Yılmaz, **Yönetim Ekonomisi**, Kayseri: Erciyes Üniversitesi Matbaası, 1985, s.132.
(11) Hartley, a.g.e., s.433.

Şimdi y_j=0 veya 1 değerleri alan ilave değişkenlerin probleme katılması gerekmektedir. Bunlarda y_1, y_2, y_3 olsun. X_j faaliyeti sıfırdan büyük ise y_j=1 olacak, aksi durumda y_j=0 olacaktır. Yukarıdaki sınırlardan X_1, X_2 ve X_3 değişkenlerinin maksimum değerlerini bulmak mümkündür. X_1 için maksimum değer 50 birim {min(400/8, 300/4)}, X_2 için maksimum değer 60 birim, X_3 için 50 birim olacaktır. Bu hesaplamalar sonucunda problem aşağıda gösterildiği gibi formüle edilir(12).

(1-1) maksimum: $P_1 X_1 - f_1 y_1 + P_2 X_2 - f_2 y_2 + P_3 X_3 - f_3 y_3$
sınırlar:

(1-2) $8X_1 + 2X_2 + 3X_3 \leqslant 400$

(1-3) $4X_1 + 2X_2 + 3X_3 \leqslant 300$

(1-4) $X_1 - 50y_1 \leqslant 0$

(1-5) $X_2 - 60y_2 \leqslant 0$

(1-6) $X_3 - 50y_3 \leqslant 0$

(1-7) $y_j \leqslant 1$ tüm j değerleri için

(1-8) $X_j, y_j \geqslant 0$ tüm j değerleri için

(1-9) y_j tam sayı

(1-4), (1-5), (1-6) nolu eşitsizlikler;

(1-10) $X_1 \leqslant 50y_1$

(1-11) $X_2 \leqslant 60y_2$

(1-12) $X_3 \leqslant 50y_3$

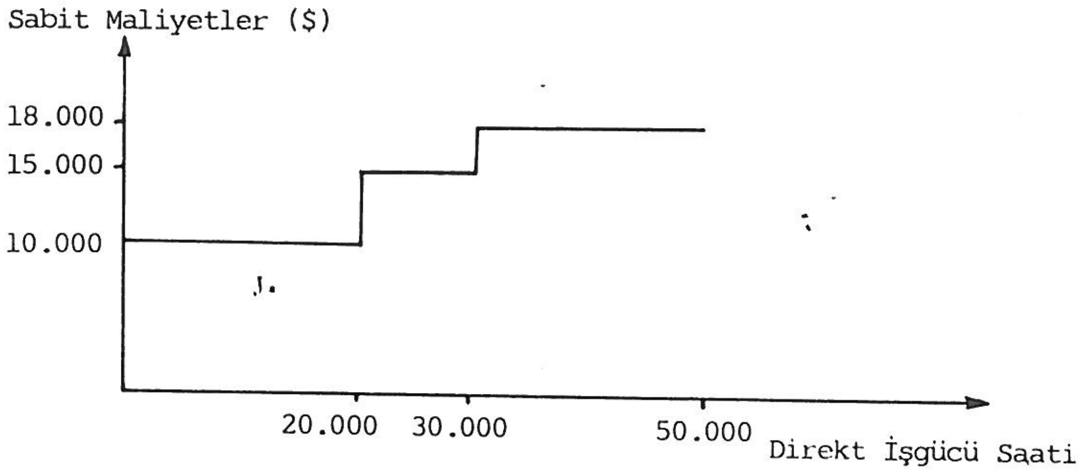
eşitsizliklerinden elde edilmiştir.

Eğer y_1 sıfır ise X_1 de sıfır olmalıdır ve bu durumda f_1 maliyeti oluşmayacaktır. Eğer X_1 sıfırdan büyük ise y_1=1 olmak zorundadır ve bu durumda ortaya çıkan f_1 maliyeti amaç fonksiyonundan düşülecektir. Ayrıca eğer X_1 sıfır ise y_1'in sıfır olmasını zorlayan herhangi birşey yoktur. Görüldüğü gibi problem karma tamsayılı problemdir(13).

Doğrusal programlamanın yetersiz kaldığı başka bir uygulamada aşağıdaki problemde gösterilmiştir(14). Kârları p_1 ve p_2 olan iki

(12) a.g.e.
(13) a.g.e.,s.433-434.
(14) a.g.e.,s.434.

ürün olsun. İlk ürün için 6 işgücü saatine, ikinci ürün için ise 4 işgücü saatine gereksinim vardır. Sabit maliyetlerin işgücü saatine bağlı olarak değişimini Şekil 1.1'de gösterildiği gibi varsayalım.



Şekil 1.1. Sabit Maliyetlerin İşgücü Saatine Bağlı Olarak Değişimi.
Kaynak: Ronald V.Hartley, **Operations Research:A Managerial Emphasis**, California:Goodyear Publishing Company Inc., 1976, s.434.

Problemde amaç fonksiyonunun yazılabilmesi için yine y_j değişkenlerinin tanımlanması gerekmektedir. y_j=0,1 değerlerini almalıdır. Ve problemin formüle edilmiş şekli aşağıda gösterildiği gibi olur(15).

(1-13) maksimum: $p_1 X_1 + P_2 X_2 - 10.000y_1 - 15.000y_2 - 18.000\ y_3$

(1-14) sınırlar: $6X_1 + 4X_2 \leqslant 20.000y_1 + 30.000y_2 + 50.000y_3$

(1-15) $y_1 + y_2 + y_3 = 1$

(1-16) $0 \leqslant y_j \leqslant 1$ tüm j değerleri için

(1-17) $X_j \geqslant 0$ tüm j değerleri için

(1-18) y_j tam sayı

(1-15) ve (1-18) nolu eşitsizlikler y'nin sadece herhangi birinin bire eşit olduğunu garantiler ve bunun sonucu olarak da sadece tek bir sabit maliyetin değeri amaç fonksiyonundan düşürülür.

(15) a.g.e.

Doğrusal programlama problemine yöneltilen eleştiriler daha çok kaynakların fiilen bölünememesi üzerinde yoğunlaşmıştır. Yöntemin bu sakıncasını gidermek için bazı düzenlemeler yapılmıştır. Tamsayılı programlama yöntemi bu düzenlemeler arasında sayılabilir(16).

1.3. TAMSAYILI PROGRAMLAMA PROBLEMLERİNİN MATEMATİKSEL TANIMI

Bir amaç fonksiyonu, n adet karar değişkeni, m adet sınırı ve n adet negatif olmama koşulu bulunan bir DP problemi aşağıdaki gibi formüle edilebilir(17):

(1-19) optimize edin $p = C_1X_1 + C_2X_2 + \dots + C_nX_n$

(1-20) sınırlar: $a_{11}X_1 + a_{12}X_2 + \dots + a_{1n}X_n \; (\leqslant, =, \geqslant) \; b_1$

(1-21) $a_{21}X_1 + a_{22}X_2 + \dots + a_{2n}X_n \; (\leqslant, =, \geqslant) \; b_2$

....

(1-22) $a_{m1}X_1 + a_{m2}X_2 + \dots + a_{mn}X_n \; (\leqslant, =, \geqslant) \; b_m$

(1-23) $X_1 X_2, \dots, X_n \geqslant 0$

Yukarıdaki formülasyonda amaç fonksiyonu katsayıları $C_j(j=1, 2,\dots,n)$ sabitleri, sınırlardaki karar değişkenlerinin katsayıları a_{ij} $(i=1,2,\dots,m;\ j=1,2,\dots,n)$ sabitleri, sınırların sağ taraf sabitleri $b_i(i=1,2,\dots,m)$ ile gösterilmiştir. Karar değişkenleri ise $X_j(j=1,2,\dots,n)$ ile belirtilmiştir. Sınırlardaki $\leqslant, =, \geqslant$ işaretlerinden sadece bir tanesi geçerli olmaktadır.

Tamsayılı programlama, DP problemlerindeki karar değişkenlerinin alacağı değerlerin tamsayılarla sınırlandırıldığı bir problemdir. O halde tamsayılı programlama problemlerinin formülasyonu, DP problemleri için yazılan formülasyona karar değişkenlerinin tamsayılı olma koşulunun eklenmesi ile elde edilir. Bu taktirde saf tamsayılı programlama problemi şu şekilde yazılabilir:

(16) Dizdaroğlu ve Çakıl,a.g.m.,s.127.
(17) Cemal Özgüven,**Doğrusal Programlama**,Kayseri:Erciyes Üniversitesi İktisadi ve İdari Bilimler Fakültesi Yayını,1986,s.11.

$$(1\text{-}24)\quad \text{optimize edin } p = C_1X_1 + C_2X_2 + \ldots + C_nX_n$$

$$(1\text{-}25)\quad \text{sınırlar} \quad a_{11}X_1 + a_{12}X_2 + \ldots + a_{1n}X_n (\leqslant,=,\geqslant)\ b_1$$

$$(1\text{-}26)\quad a_{21}X_1 + a_{22}X_2 + \ldots + a_{2n}X_n (\leqslant,=,\geqslant)\ b_2$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$(1\text{-}27)\quad a_{m1}X_1 + a_{m2}X_2 + \ldots + a_{mn}X_n (\leqslant,=,\geqslant)\ b_m$$

$$(1\text{-}28)\quad \text{negatif olmama koşulu } X_1, X_2, \ldots, X_n \geqslant 0$$

$$(1\text{-}29)\quad \text{tamsayı olma koşulu } X_1, X_2, \ldots, X_n \quad \text{tamsayı}$$

Burada C_j, a_{ij} ve b_i değerlerinin tamsayılı olduğu farzedilir. Bunlar kesirli değerler bile olsalar, amaç fonksiyonu ve sınırlar sıfır dışında pozitif bir sayı ile çarpıldığında kesirli olan değerler tamsayılı değerler alacaktır. Bu şekilde problemin sonucu hem kesirli hem de kesirli olan değerlerin sıfır dışında pozitif bir değerle çarpılması sonucunda elde edilen tamsayılı değerler için aynı olacaktır. Diğer bir deyişle problemin sonucu değişmeyecektir(18).

Tamsayılı programlama probleminin uygun çözümler seti S^*, doğrusal programlama probleminin uygun çözümler seti S^o olarak belirtilir ise,

$$S^o \supset S^*$$

yazılır. Diğer bir deyişle, DP problemi tamsayılı programlama probleminin genişletilmiş halidir. Yani tamsayılı programlama problemindeki tamsayılı olma koşulu dikkate alınmazsa DP elde edilir(19).

Doğrusal programlama problemi çözüldüğünde elde edilen amaç fonksiyonu değeri, tamsayılı çözüm sonucunda elde edilen amaç fonksiyonu değerinden daha yüksektir veya ona eşittir. Ve tamsayılı çözümün amaç fonksiyonu değeri hiçbir şekilde DP amaç fonksiyonu değerinden yüksek olamaz.

---

(18) Robert S.Garfinkel and George L.Nemhauser, **Integer Programming**, New York:Johnwiley and Sons Inc., 1972, s.5.

(19) Cemal Özgüven, "Saf Tamsayı Programlama Problemleri", (Teksir, Erciyes Üniversitesi İktisadi ve İdari Bilimler Fakültesi, 1982), s.10.

Doğrusal programlama probleminin optimum çözümü X^o ve tamsayılı problemin optimum çözümü X^* ise

$$f(X^o) \geqslant f(X^*)$$

yazılır. Çünkü DP uygun çözümler seti S^o, tamsayılı programlama probleminin uygun çözümler seti S^*'dan daha geniştir(20).

Ele alınan problem öncelikle tamsayılı olma koşulu dikkate alınmadan simpleks yöntemi ile çözülür. Elde edilen çözüm değerleri tamsayılı olarak elde edilmişse $X^o=X^*$ yazılır. Fakat her zaman böyle bir sonucun elde edilmesi mümkün değildir ve çözüm sonuçları kesirli değerler olabilir. Eğer çözüm değerleri kesirli ise sonuçların tamsayılı olmasını sağlayan ve tamsayılı problemler için geliştirilmiş olan yöntemlerden yararlanılır.

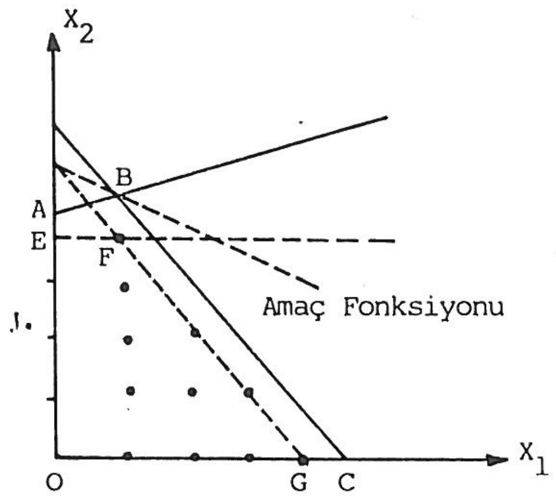
Tamsayılı problemlerin çözümü için geliştirilmiş, birkaç yöntem olmasına karşın, uygulamada en çok kullanılan yöntemler dal-sınır yöntemi ile kesen-düzlem yöntemidir. Bu yöntemlerin yaygın kullanılmasının nedeni optimum tamsayılı çözümü garantilemesidir.

Söz konusu yöntemler, problemin yeniden çözülmesini gerektirmeyip sonuçların kesirli olarak elde edildiği DP probleminin optimum simpleks tablosundan itibaren uygulanır. DP problemine ait optimum simpleks tablodan, tamsayılı değerler alacak olan karar değişkenlerine ait satır vektörü dikkate alınır. Çözüm yöntemlerinden hangisi uygulanacaksa o yöntemin kuralları tamsayılı çözüm elde edilinceye kadar adım adım uygulanır ve karar değişkenlerinin çözüm sonuçları tamsayılı olarak elde edilmişse problemin çözümü de tamamlanmıştır.

(20) a.g.teksir.

1.4. TAMSAYILI ÇÖZÜMÜN GEOMETRİK YORUMU

Herhangi bir doğrusal programlama probleminin grafik yöntemi ile çözümü Şekil 1.2'de gösterildiği gibi olsun(21).



Şekil 1.2. Herhangi Bir DP Probleminin Grafik Yöntemi İle Çözümü.

Doğrusal programlama probleminin uygun çözüm setini OCBA alanı göstermektedir. DP problemlerin çözümünde optimum çözüm noktası uygun çözüm setinin köşe noktalarının en azından birinde oluşacaktır. Optimum fakat tamsayılı olmayan çözüm noktasının Şekil 1.2'deki B noktasında olduğunu varsayalım. Doğrusal programlama probleminde elde edilen çözüm sonuçları çoğunlukla kesirli pozitif değerlerdir.

OCBA konveks seti içerisindeki noktalar muhtemel tamsayılı çözümleri göstermektedir. Tamsayılı çözümlerin oluşturduğu konveks seti de OGFE alanı göstersin. DP problemlerinde optimum nokta uygun çözüm alanının köşe noktalarından birinde oluşacağına göre, aynı durum tamsayılı programlama problemleri için de geçerlidir. Böylece F noktasının optimum tamsayılı nokta olduğunu varsayalım. Burada dikkat edilmesi gereken nokta, OGFE konveks setinin oluşturulmasıdır ki bunun için de ye-

(21) Yılmaz Tolunay, **Matematik Programlama ve İşletme Uygulamaları**, Vize: İstanbul Üniversitesi Yayını, 1980, s. 492.

ni sınırlayıcı koşulların bulunması ve probleme ilave edilmesi gerekmektedir.

1.5. TAMSAYILI PROGRAMLAMA PROBLEMLERİNDEN SEÇİLMİŞ ÖRNEKLER

1.5.1. Ulaştırma Problemi

Belirli bir malın belirli yerlerden belirli başka yerlere nasıl taşınacağı önemli bir üretim yönetimi sorunudur. Malların taşınmak için alındığı merkezlere arz kaynakları (sources), malların gideceği yere ise talep merkezleri (destinations) adı verilir. Malların arz merkezlerinden talep merkezlerine en az maliyetle nasıl götürüleceğini araştıran yöneylem araştırması modeline "Ulaştırma Modeli" denir. Modelin amacı belirli bir mal çok sayıdaki arz merkezlerinden çok sayıdaki talep merkezlerine taşınırken bu taşıma nedeniyle oluşan taşıma maliyetlerinin nasıl enazlanacağını araştırmaktır(22).

Ulaştırma modeli ilk olarak Amerika'dan Avrupa'ya gemi ile malzeme taşınmasında kullanılmıştır ve daha sonra personelin işe yerleştirilmesi, kuruluş yeri seçimi, makinalara işlerin dağıtılması konusu gibi problemlerin çözümünde de kullanılarak en çok uygulama alanı bulan tekniklerden biri olmuştur(23).

Belirli malların N adet arz kaynağından M adet talep merkezine taşınacağını varsayalım. i.kaynaktan j.talep merkezine taşınılan ünite miktarı X_{ij} ve ünite başına taşıma maliyeti C_{ij} ise toplam maliyet(=amaç fonksiyonu)

$$Z_{min} = \sum_{i=1}^{N} \sum_{j=1}^{M} X_{ij} C_{ij} \qquad (1-30)$$

---

(22) Mehmet Şahin,"İşletmelerde Taşıma Sorunu ve Çözüm Yöntemleri",**Eskişehir İktisadi ve İdari Bilimler Akademisi Dergisi**,Cilt 14,Sayı 2(Haziran 1978),s.92.

(23) Nuri Uman,**Ulaştırma Modeli ve Petrol Ofisinde Uygulama Denemesi**,Ankara:Ankara Üniversitesi Siyasal Bilgiler Fakültesi Yayını,1974,s.1.

olur(24). a_i, i. arz merkezinin üretim miktarı b_j ise j. talep merkezinin talebi olsun. Üretim miktarı ve talep ile ilgili sınırların yazılımı da aşağıda gösterildiği gibi olur(25).

$$(1-31) \quad \sum_{j=1}^{M} X_{ij}=a_i \qquad i = 1,2, \ldots, N; \; a_i > 0$$

$$(1-32) \quad \sum_{i=1}^{N} X_{ij}=b_j \qquad j = 1,2, \ldots, M; \; b_j > 0$$

$$(1-33) \qquad X_{ij}=0,1,2, \ldots \quad \text{tüm i ve j değerleri için}$$

Yukarıdaki (1-31) nolu sınır herhangi bir kaynaktan herbir talep merkezine gönderilen toplam mal miktarının, arz kaynağının mevcut mal miktarına eşit olması gerektiğini göstermektedir. Diğer bir deyişle, arz kaynağındaki mevcut mal miktarından daha fazla mal gönderilemiyeceği anlamına gelmektedir. (1-32) nolu sınır ise, herbir arz kaynağından herhangi bir talep merkezine gönderilen mal miktarının merkez tarafından talep edilen mal miktarına eşit olması gerektiğini belirtmektedir.

Yukarıdaki (1-31) ve (1-32) nolu eşitsizlikleri daha genel bir şekilde formüle etmekte mümkündür(26).

$$(1-34) \quad \sum_{j=1}^{M} X_{ij} \leqslant a_i \qquad i = 1,2, \ldots , N; \; a_i > 0$$

$$(1-35) \quad \sum_{i=1}^{N} X_{ij} \geqslant b_j \qquad j = 1,2, \ldots , M; \; b_j > 0$$

$$(1-36) \qquad X_{ij}= 0,1,2, \ldots , \quad \text{tüm i ve j değerleri için}$$

(1-30),(1-34),(1-35),(1-36) bağıntıları ile belirtilen probleme ulaştırma problemi denir.

---

(24) Halaç,a.g.e.,s.554.
(25) Pfaffenberger and Walker,a.g.e.,s.276.
(26) a.g.e.

1.5.2. Görevlendirme (Atama) Problemi

N görevin N kişi tarafından yapıldığını varsayalım. Bir kişi sadece bir işi yapmalıdır ve bu iş N işden herhangi biri olabilir.

C_{ij} = i.kişinin j.görevi yapması halindeki performans ölçüsüdür (C_{ij} beklenen kâr veya beklenen maliyet olabilir)

$$X_{ij} \begin{cases} 1 & \text{eğer i.kişi j.görevi yaparsa} \\ 0 & \text{eğer i.kişi j.görevi yapmaz ise} \end{cases}$$

Görevlendirme problemindeki amaç, toplam performansın maksimum kılınmasıdır. Problem için amaç fonksiyonu ve sınırlayıcı koşullar aşağıdaki gibi yazılabilir(27).

(1-37) maksimum $Z = \sum_{i=1}^{N} \sum_{j=1}^{N} C_{ij} X_{ij}$

(1-38) sınırlar $\sum_{j=1}^{N} X_{ij} = 1 \quad i=1,2,\ldots,N$

(1-39) $\sum_{i=1}^{N} X_{ij} = 1 \quad j=1,2,\ldots,N$

Görevlendirme problemi ulaştırma probleminin özel bir halidir ($a_i = b_i = 1$ tüm i ve j değerleri için ve $M = N$).

1.5.3. Sırt Çantası (Knapsack) Problemi

Bir satış elemanının iş seyahatı sırasında yanında taşıyacağı eşyaların (kalemlerin) ağırlıkları sınırlıdır. Ve eşyaların toplam ağırlıklarını geçmeyecek şekilde satış elemanı taşıyacağı N farklı eşyanın herhangi bir bileşimini seçebilir.

Taşınan eşyalardan i. eşya için faydanın C_i olduğunu varsayalım (C_i, i. eşyanın gerçek nakit değeri veya satış elemanının tahmin ettiği toplam satış ta olabilir). W taşınacak eşyaların toplam ağırlığı,

(27) a.g.e.,s.277.

$$X_i \begin{cases} 1 & \text{eğer i.proje seçilirse} \\ 0 & \text{aksi taktirde} \end{cases}$$

olacağı açıktır. Problem için amaç fonksiyonu ve sınırların yazılımı aşağıdaki gibi olur(30).

(1-43) maksimum $\sum_{i=1} p_i X_i$

(1-44) sınırlar $\sum_{i=1} C_{it} X_i \leqslant C_t \quad t = 1,2, \ldots , n$

(1-45) $X_i = 0$ veya 1 tüm i değerler için

1.5.5. Tedarik Problemi(31)

Tamsayılı programlama probleminin diğer bir uygulama örneği de tedarik problemleri içindir. Mevcut m tip araç-gereçten i.tipi araç -gereç için stok miktarının a_i, birim maliyetin p_i, ilave birimin alınması için mevcut bütçenin α, olduğunu varsayalım. Araç-gereçler sadece tamsayılı birimler halinde satın alınabilir ve tahsis edilebilir. Ayrıca bu araç ve gereçlerin kullanıldığı n adet merkezin bulunduğunu kabul edelim ve i.araç-gerecin j.merkeze verilmesi halinde ise kâr C_{ij} olsun. Tedarik problemleri için amaç, herbir araç-gereçten ne kadar alınacağı ve bunların merkezler arasında nasıl dağıtılacağının belirlenmesidir. Problemin amaç fonksiyonu ve sınırlarının yazılımına geçmeden önce aşağıdaki değişkenlerin tanımlanması gerekmektedir.

y_i = i.tip araç-gerecin satın alınması gereken miktar

X_{ij} = i.tip araç-gerecin j.merkeze tahsis edilecek miktarı

Problem için amaç fonksiyonu ve sınırların yazılımı aşağıdaki gibi olur.

---

(30) Katta,G.Murty,**Linear and Combinatorial Programming**,New York:John Wiley and Sons Inc.,1976,s.402.

(31) a.g.e.,s.401.

w_i i. eşyanın ağırlığı ise amaç, seçilen eşyaların toplam değerlerinin maksimum kılınmasıdır. Problem için amaç fonksiyonu ve sınırların yazılımı aşağıdaki gibi olur(28).

$$(1-40) \quad \text{maksimum} \quad Z = \sum_{i=1}^{N} C_i X_i$$

$$(1-41) \quad \text{sınırlar} \quad \sum_{i=1}^{N} w_i X_i \leqslant W$$

$$(1-42) \quad X_i = 0.1 \quad i = 1,2, \ldots, N$$

Problemdeki (1-42) nolu koşul taşınacak eşyalardan i.eşyanın sadece bir biriminin taşınmasına veya hiç taşınmamasına izin vermektedir. Bu problemde olduğu gibi karar değişkenlerinin alacağı değerlerin 0 ve 1 ile sınıflandırılmasına 0-1 tamsayılı programlama problemi denir.

Bu model taşınabilecek eşyaların herhangi bir tanesinin bir birimden fazla olmasına da izin verebilir. Bu durumda (1-42) nolu koşulun X_i=0,1,2,...(tüm i=1,2,...,N değerleri için) yazılması gerekir (29).

1.5.4. Proje Seçimi Problemi

Proje seçimi problemi, çeşitli projeler arasından herhangi birinin seçimi ile uğraşır.

Problem için planlanan dönem n, i.projenin seçilmesi halinde gereksinim duyulan bütçe C_{it} olsun (C_{it}, t.dönem için t=1,2,...,n). Ayrıca t.dönemdeki toplam mevcut fon C_t ve i.projenin seçilmesi halinde toplam kâr p_i olsun. Bu açıklamalardan sonra,

(28) a.g.e.,s.279.
(29) a.g.e.,s.280.

(1-46) maksimum $\sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} c_{ij}x_{ij}$

(1-47) sınırlar $\sum_{j=1}^{n} x_{ij} - y_i \leq a_i \quad i = 1,2, \ldots, m$

(1-48) $\sum_{i=1}^{m} x_{ij} \leq b_j \quad j = 1,2, \ldots, n$

(1-49) $\sum_{i=1}^{M} p_i y_i \leq \alpha$

(1-50) $x_{ij} \geq 0, \; y \geq 0$ tüm değişkenler tamsayılıdır

1.6. TAMSAYILI PROGRAMLAMA PROBLEMLERİNİN MODELLERİ

Tamsayılı programlama problemlerinde karar değişkenlerinin alacakları tamsayılı değerlere bağlı olarak sınıflandırılması mümkündür. Eğer problemdeki karar değişkenlerinin tamamının tamsayılı değerler alması isteniyorsa bu tip problemler saf tamsayılı problemler olarak adlandırılır. Tamsayılılarla ifade edilmesi gereken mal üreten işletmelerde örneğin optimum ürün bileşiminin bulunması için bu tip problemlerden yararlanılır (Örneğin buzdolabı, takım tezgahları v.s.üretimi).

Bazı problemlerde ise karar değişkenlerinin bir kısmının tamsayılı olması istenirken, bir kısmının kesirli değerler almasına izin verilebilir. Böyle karar problemlerinin çözümünde kullanılan tamsayılı programlama problemlerine de karma tamsayılı programlama problemi denir. Karma tamsayılı programlama işletmecilik biliminde optimum kuruluş yeri seçiminin yanısıra kapasite planlaması (işletme büyüklüğü ve kuruluş yeri), sermaye bütçelemesi, üretim planlaması, personel ataması, optimum sipariş hacmi ve pazarlama kanalının seçimi konularında da son yıllarda uygulanmaktadır(32).

Karar problemlerinin bir kısmında ise karar değişkenlerinin sadece 0 veya 1 değerlerini alması istenebilir. Böyle problemlerde 0-1 programlama problemi olarak bilinir. Bir yatırımı yapmak veya yapmamak, bir projeyi seçmek veya seçmemek gibi kararların "evet - hayır" olarak belirtildiği problemlerde kullanılır. 1 evet, 0 hayır anlamına gelmektedir. Eğer karar değişkenlerinin tamamının 0-1 değerleri alması isteniyorsa, problem saf 0-1 programlama problemi, buna karşın bazılarının 0-1, diğerlerinin bu değerler dışında değerler alması isteniyorsa, problem karma 0-1 programlama problemi adını alır.

Yukarıdaki açıklamalara paralel olarak tamsayılı programlama problemleri aşağıdaki gibi sınıflandırılabilir:

Tamsayılı Programlama Problemleri

- Saf Tamsayılı Programlama Problemleri (Pure Integer Programming)
- Karma Tamsayılı Programlama Problemleri (Mixed Integer Programming)
- 0-1 Programlama Problemleri (Binary Integer Programming)
  - Saf 0-1 Programlama Problemleri (Pure Binary Integer Programming)
  - Karma 0-1 Programlama Problemleri (Mixed Binary Integer Programming)

Şekil 1.3. Tamsayılı Programlama Problemlerinin Sınıflandırılması.

---

(32) Muammer Doğan, **İşletme Ekonomisi ve Yönetimi**, Genişletilmiş 2.Baskı, İzmir: İstiklâl Matbaası, 1984, s.79.

BÖLÜM II

TAMSAYILI OPTİMİZASYON PROBLEMLERİNİN ÇÖZÜMÜ

Doğrusal programlama problemlerinin çözüm sonuçları çoğunlukla kesirli değerlerdir ve bu sonuçların tamsayılı programlama problemleri için anlamlı olmayacağı konusuna daha önce değinilmişti.Çözüm sonuçlarının tamsayılı olarak elde edilmesinde tamsayılı programlama problemleri için geliştirilen çözüm tekniklerinden yararlanılır.

Cook ve Russell tamsayılı çözüm sonuçlarının elde edilmesinde uygulanan yöntemleri dört gruba ayırmışlardır(1):

1. Yuvarlama Yöntemi
2. Tam Tarama Yöntemi
3. Kesen-Düzlem Yöntemi
4. Dal-Sınır Yöntemi

(1) Thomas M.Cook and Robert A.Russel,**Introduction to Management Science**,2nd ed.,Englewood Cliffs,N.J.:Prentice-Hall Inc.,1981,s.274.

2.1. YUVARLAMA YÖNTEMİ

Tamsayılı çözüm sonuçlarının elde edilmesinde en çok ve yaygın olarak kullanılan bir yöntem, DP çözüm sonuçlarından elde edilen kesirli değerleri en yakın tamsayıya yuvarlamaktır.

Çözüm sonuçlarının en yakın tamsayıya yuvarlanması bazı durumlarda en iyi tamsayılı noktayı sağlamasına karşın, bu yöntemde iki güçlükten sözedilir(2):

a) Yuvarlama yöntemi ile elde edilen çözüm optimum çözümden uzak olabilir.

b) Yuvarlama yönteminden elde edilen çözüm değerleri, orijinal problemdeki sınırların tamamını veya bir kaçını sağlamayabilir.

Eğer sınır sayısı ve tamsayılı olması istenen karar değişkeni sayısı fazla ise, yuvarlama işlemi uygun çözümü sağlamayacaktır. veya optimal çözümden uzak olacaktır(3). Sözü edilen güçlükler sadece çok sınırlı ve çok değişkenli problemler için değil, aynı zamanda iki sınırlı ve iki karar değişkenli herhangi bir optimizasyon probleminde de geçerlidir.

2.1.1. Yuvarlama Yönteminin Optimum Çözümden Uzaklığı

Problem 2.1 yuvarlama yöntemi ile elde edilen sonucun optimum tamsayılı noktadan uzak olduğunu göstermektedir.

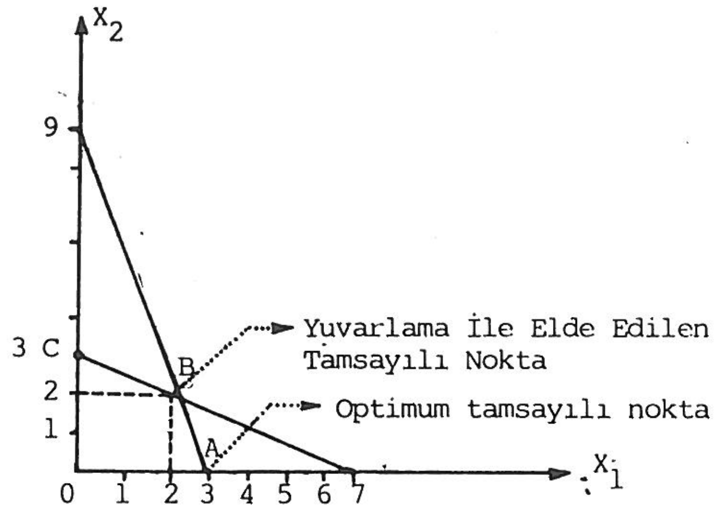
$$
\begin{aligned}
\text{Mak } Z &= 7X_1 + 3X_2 \\
\text{Sınırlar } & 3X_1 + 7X_2 \leq 21 \\
& 3X_1 + X_2 \leq 9 \qquad\qquad \text{Problem 2.1.} \\
& X_1\,,\ X_2 \geq 0 \text{ ve tamsayı}
\end{aligned}
$$

Problem 2.1'in grafiksel gösterimi Şekil 2.1'de olduğu gibidir:

---

(2) a.g.e.

(3) Herbert Moskowitz and Gordon P.Wright, Operations Research Techniques for Management, Englewood Cliffs, N.J.: Prentice-Hall Inc., 1979, s.475.



Şekil 2.1. Yuvarlama Yönteminin Optimum Tamsayılı Noktadan Uzak Oluşu.

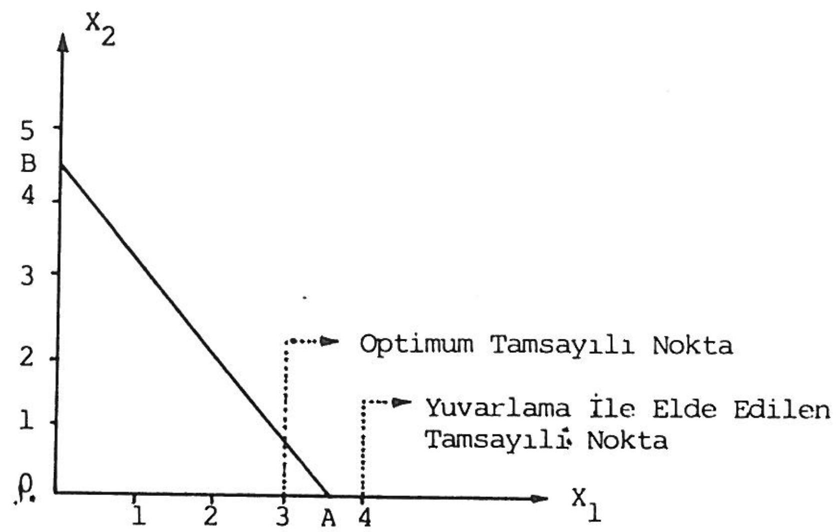
Şekil 2.1'de OABC verilen problem için uygun çözüm alanını göstermektedir. B köşe noktası DP için optimum noktadır ve bu noktada X_1=2.3, X_2=2 ve Z=22.3 değerindedir. Bu değerler en yakın tamsayıya yuvarlandığında X_1=2, X_2=2 ve Z=20 değerleri elde edilir. Yuvarlama yaklaşımı ile elde edilen karar değişkenlerinin değerleri mevcut sınırları korumakla birlikte, optimum tamsayılı noktadan uzaktır. Problem çözüldüğünde optimum tamsayılı nokta X_1=3 ve X_2=0'dır. Bu noktadaki amaç fonksiyonu değeri Z=21 olup, yuvarlama yöntemi ile elde edilen amaç fonksiyonu değerinden daha yüksektir.

2.1.2. Yuvarlama Yönteminin Uygun Çözüm Alanı İçerisinde Olmaması

Problem 2.2 ise yuvarlama yöntemi ile elde edilen sonucun mevcut sınır koşulunu sağlamadığını göstermektedir.

$$
\begin{aligned}
&\text{Mak } Z = 30X_1 + 12X_2 \\
&\text{Sınırlar } 12X_1 + 10X_2 \leqslant 44 \qquad \text{Problem 2.2.} \\
&X_1,\ X_2 \geqslant 0 \text{ ve tamsayı}
\end{aligned}
$$

Problemin grafiği Şekil 2.2'de gösterildiği gibidir.



Şekil 2.2. Yuvarlama Yönteminin Sınır Koşulunu Sağlamaması.

Problem 2.2 tamsayı olma koşulu dikkate alınmadan çözüldüğünde, $X_1=3.6$, $X_2=0$ ve $Z=108$ olarak bulunur. X_1 değeri en yakın tamsayıya yuvarlandığında $X_1=4$ ve $X_2=0$ elde edilir. Ancak X_1'in bu değeri problemin sınır koşulunu sağlamamaktadır. Problem için optimum tamsayılı nokta (3,0) noktası olup amaç fonksiyonu değeri Z=90'dır.

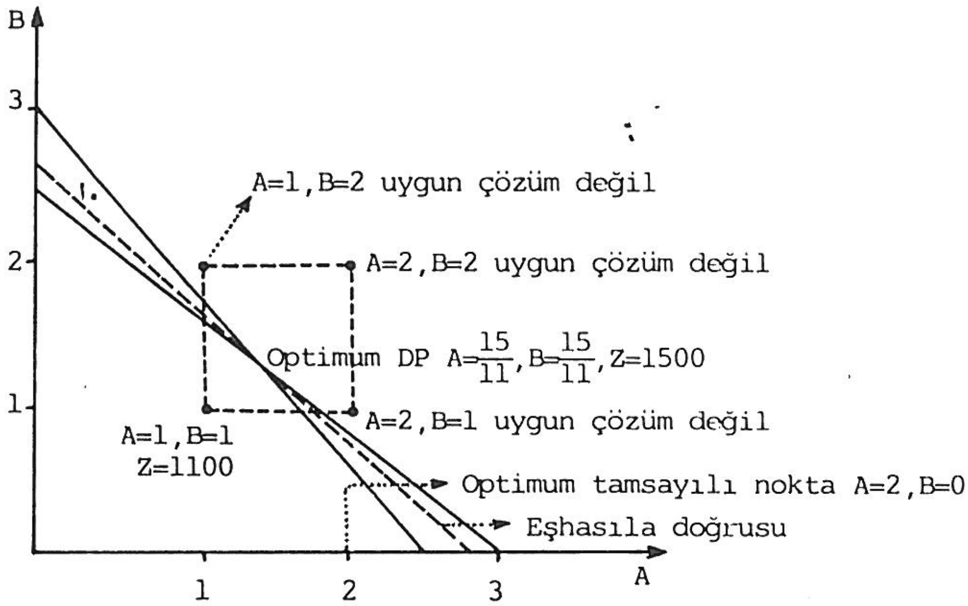
2.1.3. Yuvarlama Yönteminde Uygulanan Yaklaşımlar

Yuvarlama yönteminde kullanılan bir yaklaşım, kesirli elde edilen değerler en yakın tamsayıya yuvarlanır ve daha sonra bu değerler ya yukarıya ya da aşağıya yuvarlatılarak alternatif noktalar elde edilir. Problem 2.3 bu yaklaşımı göstermektedir(4).

$$\begin{aligned} &\text{Mak } Z = 560A + 540B \\ &\text{Sınırlar } \quad 10A + 12B \leqslant 30 \\ &\qquad\qquad\quad 6A + 5B \leqslant 15 \\ &\qquad\qquad\quad A \text{ ve } B = 0,1,2,\ \ldots \end{aligned} \qquad \text{Problem 2.3.}$$

(4) David G.Dannenbring and Martin K.Starr, Management Science: An Introduction, Auckland: Mc Graw Hill Inc., 1981, s.402.

Problem DP olarak çözüldüğünde $X_1 = X_2 = 1\frac{4}{11}$ değeri elde edilir. Yukarıdaki açıklamalar ışığında yuvarlama işlemleri yapılırsa 4 ayrı nokta elde edilir. Bunlar (A=1, B=1; A=2, B=1; A=1, B=2; A=2, B=2) noktalarıdır. Problemin grafiği ve yuvarlama sonucunda elde edilen noktalar Şekil 2. 3'de gösterilmiştir.



Şekil 2.3. Yuvarlama Yönteminde Kullanılan Bir Yaklaşım.

Kaynak: David G. Dannenbring and Martin K. Starr, **Management Science: An Introduction**, Auckland: Mc Graw-Hill Inc., 1981, s.403.

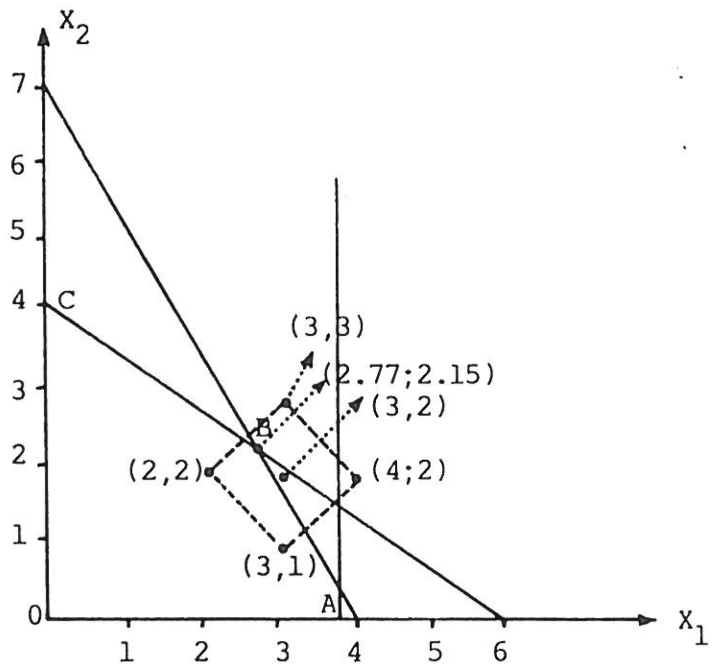
Şekil 2.3'den de görüldüğü gibi yuvarlanarak elde edilen dört ayrı noktadan sadece bir tanesi uygun çözüm alanı içerisindedir. Yani problemin sınır koşullarını sağlamaktadır. Diğer üç nokta problemin sınır koşullarını sağlamamakta ve bu nedenle de uygun çözüm alanının dışındadır. Fakat A=1, B=1 noktası uygun çözüm alanının içinde olmasına karşın en iyi tamsayılı nokta değildir.

Problemin çözümü yapıldığında A=2 ve B=0 noktasının en iyi tamsayılı nokta olduğu görülür ve bu noktada amaç fonksiyonunun değeri 1120'dir. Görüldüğü gibi yuvarlama yönteminde uygulanan bu yaklaşımda, en iyi tamsayılı noktayı vermediği görülür. Karar değişkeni sayısı arttıkça, yuvarlama yöntemi için uygulanan bu yaklaşım daha karmaşık hale gelecektir. Örneğin Problem 2.3'de iki karar değişkeni söz konusudur ve 4 muhtemel yuvarlama işlemi yapılmaktadır. Eğer n değişkenli bir problem söz konusu ise 2^n muhtemel kombinasyon söz konusudur. Örneğin 20 karar değişkenli bir problem için 2^{20} =1.048.576 alternatif yuvarlama işlemi vardır(5).

Yuvarlama yönteminde kullanılan bir diğer yaklaşım da kesirli olan değerleri en yakın tamsayıya yuvarladıktan sonra bu noktadan itibaren karar değişkeni değerleri birer birim arttırılıp azaltılır. Bu yaklaşımın uygulanışı ise Problem 2.4'de gösterilmiştir(6).

$$
\begin{aligned}
&\text{Mak } Z = 21X_1 + 16X_2 \\
&\text{Sınırlar} \quad 4X_1 + 6X_2 \leq 24 \\
&\qquad\qquad\; 7X_1 + 4X_2 \leq 28 \\
&\qquad\qquad\; 0 \leq X_1 \leq 3.75 \\
&\qquad\qquad\; X_1, X_2 = 0,1,2, \ldots
\end{aligned}
\qquad \text{Problem 2.4.}
$$

Problem 2.4 için çizilen grafik Şekil 2.4'de gösterilmiştir.



Şekil 2.4. Yuvarlama Yönteminde Kullanılan Diğer Bir Yaklaşım.

Şekil 2.4'den de görüldüğü gibi beş ayrı nokta elde edilir. Bunlar (3,2),(3,1),(3,3),(2,2),(4,2) noktalarıdır. Ancak bu beş noktadan sadece (2,2) ve (3,1) noktaları problemin sınır koşullarını sağlamaktadır ve bu noktalardan (3,1) noktası problem için optimum tamsayılı noktayı vermektedir.

Öne sürülen yaklaşım ele alınan problem için en iyi tamsayılı noktayı vermesine karşın, tüm problemler için aynı yaklaşımın en iyi sonucu garanti edeceği söylenemez. Aynı problem üzerinde sınır koşulları aynı kalmak üzere, sadece amaç fonksiyonu katsayıları değiştirildiğinde, yaklaşımın geçersiz olduğu görülecektir. Örneğin aynı problem üzerinde X_1'in amaç fonksiyonu katsayısı 21, X_2'nin ise 22 olsun[mak $Z = 21X_1 + 22X_2$]. Problem çözüldüğünde çözüm sonuçları yine $X_1 = 2.77$ ve $X_2 = 2.15$'dir. Yuvarlama yönteminde öne sürülen yaklaşım gereği yine yukarıda elde edilen beş nokta elde edilecektir. Fakat bu beş noktanın hiç biri de optimum tamsayılı noktayı vermemektedir.Çünkü problemin çözümü yapıldığında (0,4) noktasının optimum tamsayılı çözüm olduğu görülür. Bu noktada amaç fonksiyonu değeri 88 olup, diğer tamsayılı noktaların amaç fonksiyonu değerinden yüksektir.

Cook ve Russell ile Pfafenberger ve Walker'in en yakın tamsayıya yuvarlama yöntemi görüşüne karşı çıkılabilir. Doğrusal programlama problemlerinde sonuçların yuvarlanması gerekiyorsa aşağıya yuvarlamak daha iyi olur. Çünkü uygun çözüm alanı içerisinde kalma şansı daha yüksektir(7). DP probleminde sonuçların aşağıya doğru yuvarlanması sınırların hepsi ($\leq$) biçiminde ve tüm değişkenlerin katsayıları pozi-

(5) a.g.e.,s.403.

(6) Roger C.Pfaffenberger and David A.Walker,**Mathematical Programming for Economics and Business**,Iowa:The Iowa State University Press,1976,s.281.

(7) Cengiz Yılmaz,"İşletmelerde Karar Verme Süreci ve Sayısal Yöntemler",(Teksir,Erciyes Üniversitesi İktisadi ve İdari Bilimler Fakültesi,1983),s.26.

tif ise uygun çözüm alanı içerisinde kalmayı garantileyecektir. Ve bu tip optimizasyon problemlerinde aşağıya yuvarlama işlemi daima geçerli olacaktır. Sınır koşullarının herhangi birinde negatif katsayılı karar değişkeni bulunan bir optimizasyon probleminde çözüm sonuçlarının aşağıya doğru yuvarlanması bazı problemlerde geçerli olmasına karşın,bazı problemlerde geçerli olmayabilir. Aşağıya yuvarlama işleminin geçersiz olduğunu Problem 2.5 göstermektedir.

$$\begin{aligned} \text{Mak } Z &= 2X_1 + X_2 \\ \text{Sınırlar } & 2X_1 + 6X_2 \leqslant 23 \\ & 2X_1 - 3X_2 \leqslant 3 \\ & X_1 + X_2 \leqslant 6 \\ & X_1,\ X_2 \geqslant 0 \text{ ve tamsayı} \end{aligned} \qquad \text{Problem 2.5.}$$

Problem 2.5 DP ile çözüldüğünde $X_1=4.2$, $X_2=1.8$ elde edilir. Bu değerler aşağıya doğru yuvarlandığında (4,1) noktası elde edilir ki karar değişkeninin bu değerleri problemin ikinci sınır koşulunu sağlamamaktadır.

Bir projeyi kabul etmek veya etmemek söz konusu ise ve $X = 1$ projenin kabul edilmesini, X=0 ise projenin kabul edilmemesini gösteriyorsa, X'in kesirli değerleri ile uğraşmak anlamsızdır ve yuvarlama işleminin kullanılması mantıksal olarak kabul edilmez(8).

2.1.4. Yuvarlama İşleminin Sınırları

Yuvarlama işleminde dikkate alınması gereken iki önemli nokta söz konusudur(9).

a) Yuvarlama yöntemi ile elde edilen sonucun daima en iyi çözüm vereceği düşünülmemelidir. Yuvarlama yöntemi sezgisel bir yaklaşım

(8) Hamdy A.Taha,**Operations Research:An Introduction**,2nd ed.,New York:Macmillan Publishing Co.,Inc.,1976,s.240.
(9) Hamdy A.Taha,**Integer Programming:Theory,Applications and Computations**,New York: Academic Press Inc.,1975,s.6.

olarak kabul edilir ve bu yaklaşımdan daha iyi çözümler sağlayan diğer sezgisel yaklaşımlar da söz konusudur.

b) Eşitlik biçiminde (=) sınıra sahip herhangi bir problem de sadece temel değişkenlerin yuvarlatıldığı, temel olmayan değişkenlerin ise sıfır olarak çözümde yer aldığı varsayımına dayalı olarak yuvarlama yöntemi uygun çözümü sağlamaz. Uygun çözüm korunurken, temel olmayan değişkenlerin sıfırın üzerinde değerler almasını düşünmek zordur. Bu sonuç Glover ve Sommer tarafından (1972) bulunmuştur ve bu, Problem 2.6'daki sayısal bir örnekle gösterilmiştir.

$$\begin{aligned} \text{Mak } Z &= 20X_1 + 10X_2 + X_3 \\ \text{Sınırlar } & 3X_1 + 2X_2 + 10X_3 = 10 \\ & 2X_1 + 4X_2 + 20X_3 \leqslant 15 \\ & X_1,\ X_2,\ X_3 \geqslant 0 \text{ ve tamsayı} \end{aligned} \qquad \text{Problem 2.6.}$$

Problemin çözümünde $X_1=10/3$, $X_2=X_3=0$ değerindedir. X_1 değişken optimum simpleks tabloda çözüm değişkenleri (Ç.D.) sütununda yeralan temel değişken, X_2 ve X_3 ise çözüm değişkenleri (Ç.D.) sütununda yeralmayan diğer bir deyişle, temel olmayan değişkenlerdir. Temel olmayan değişkenler sıfır değerinde iken temel değişken değerini en yakın tamsayıya yuvarlamak, problemin eşitlik biçimindeki sınır koşulunu sağlamayacaktır.

Bu örnekten de görüldüğü gibi eşitlik biçiminde sınır koşulu olan bir problemde yuvarlama yöntemi ile elde edilen noktaların uygun çözüm alanı içerisinde kalması adeta olanaksızdır. Bazı problemlerde böyle bir durumla karşılaşılsa bile uygun çözüm alanı içerisinde kalma şansı oldukça küçüktür. Çünkü eşitlik koşulu uygun çözüm alanını bir doğru parçasına indirgemektedir.

2.2. TAM TARAMA YÖNTEMİ

Doğrusal programlama problemlerinin uygun çözüm alanı içinde sonsuz sayıda alternatif çözüm noktası vardır. Çünkü karar değişkenleri kesirli değerlerde olabilir. Fakat tamsayılı programlama problemlerinde değişkenler kesikli (tamsayılı) değerler olacağından uygun çözüm alanı içerisinde sonlu sayıda alternatif çözüm noktası söz konusudur.

Bu yöntemde uygun çözüm alanı içerisinde yer alan alternatif çözüm noktaları ayrı ayrı değerlendirilerek, amaç fonksiyonu değeri(Z) en yüksek olan nokta seçilir. Bu nokta optimum tamsayılı noktadır. Bu nedenle yönteme "Tam Tarama (Complete Enumeration) Yöntemi" denir. Yöntem, optimum tamsayılı çözümü garanti eden bir yöntemdir. Uygun çözüm alanı içerisindeki alternatif çözüm noktalarının ayrı ayrı incelenmesi nedeni ile karar değişkenlerinin alacağı değerler çoğaldıkça ve karar değişkenleri sayısı arttıkça, problemin çözümü daha da zorlaşmaktadır (10). Örneğin 100 karar değişkenli bir problemde karar değişkenlerinin alacağı değerler 0-1 olarak belirtilmişse 2^{100} muhtemel alternatif çözüm noktası vardır. Hızlı bilgisayarlarla bile işlem süresi oldukça uzun zaman alacaktır(11). Problem iki karar değişkenli bir optimizasyon problemi bile olsa alternatif çözüm noktalarının ayrı ayrı değerlendirilmesi zor olmaktadır. Çünkü uygun çözüm alanı içerisinde çok sayıda alternatif çözüm noktası bulunabilir. Yöntem $n \leqslant 20$ olduğu optimizasyon problemlerinin çözümünde daha kolay uygulanmaktadır. Burada n, muhtemel karar değişkenleri değerlerinin sayısıdır(12).

Uygun çözüm alanı içerisinde bulunan alternatif tamsayılı noktaların ayrı ayrı incelenmesini iki karar değişkenli bir optimizasyon problemi (2.7) üzerinde gösterelim.

---

(10) Cook and Russell, a.g.e., s.274.

(11) Harvey M.Wagner, **Principles of Management Science: With Applications to Executive**, 2nd Ed., Englewood Cliffs, N.J.: Prentice-Hall Inc., 1975, s.327.

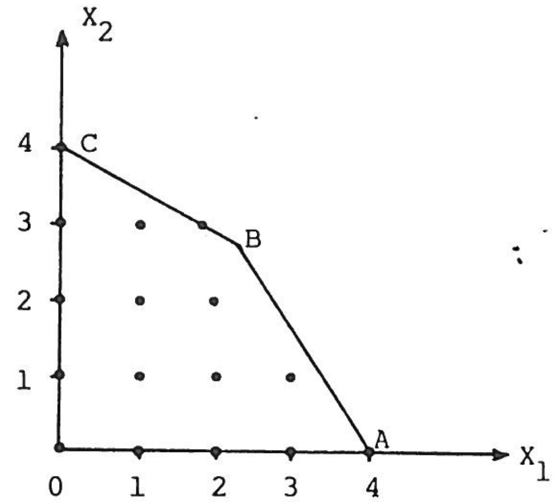
(12) Cook and Russell, a.g.e., s.274.

$$\text{Mak } Z = 4X_1 + 7X_2$$

Sınırlar $X_1 + X_2 \leq 8$

$7X_1 + 4X_2 \leq 28$ Problem 2.7.

$X_1,\ X_2 \geq 0$ ve tamsayı



Şekil 2.5. Tam Tarama Yöntemi.

Şekil 2.5'den de görüldüğü gibi problem için incelenecek alternatif çözüm noktası sayısı 16 tanedir. Fakat Cook ve Russel'in görüşüne karşı çıkılabilir. Uygun çözüm alanı içindeki noktaların tek tek incelenmesine gerek yoktur. Bazı noktaların daha iyi olduğu Z değeri hesaplanmaksızın bilinebilir(13). Örneğin (4,0) noktası (0,0),(1,0),(2,0),(3,0) noktalarından (3,1) noktası (0,0),(1,0),(2,0),(3,0),(0,1),(1,1),(2,1) noktalarından daha iyidir. Böylece incelenecek nokta sayısı azaltılarak dört nokta elde edilir. Bunlar(4,0),(3,1),(2,3) ve (0,4) noktalarıdır. Problemin çözümü yapıldığında bu dört noktadan (2,3)noktası en iyi tamsayılı noktayı vermektedir. Çünkü Z değeri diğer üç noktadan daha yüksektir.

(13) Yılmaz,a.g.teksir,s.26.

2.3. KESEN-DÜZLEM YÖNTEMİ

Kesen-düzlem yöntemi daima tamsayı koşulu aranmaksızın düzenlenen doğrusal programlama probleminin optimum çözümü ile başlamaktadır. Yöntemin amacı doğrusal programlama probleminde oluşan konveks seti değiştirmektir. Probleme ilave edilen ikincil koşullar sonucunda da çözüm alanı her aşamada yine konveks bir set oluşturmaktadır. İşlemlere uç noktaları tamsayılı olan konveks set elde edilinceye kadar devam edilir.

Kesen-düzlem yöntemi uygulanırken, yeni koşulların probleme ilave edilmesinde dikkat edilmesi gereken nokta, herhangi bir tamsayılı çözümün yeni uygun çözüm alanı dışında bırakılmamasıdır(14).

Kesen-düzlem yöntemi ilk kez R.E.Gomary tarafından 1963 yılında geliştirilmiştir ve bu nedenle yöntem "Gomary Kesme-Düzlemi Yöntemi" adı ile de bilinmektedir.

Kesen-düzlem yöntemi saf tamsayılı programlama problemleri ve karma tamsayılı programlama problemleri için farklı şekillerde uygulanmaktadır.

2.3.1. Saf Tamsayılı Programlama İşlemleri

Verilen bir doğrusal programlama probleminde çözümde yeralan değişkenlerin değerleri büyük bir rastlantı olmadığı taktirde kesirli değerlerdir.

Tanımlanan problem simpleks yöntemi ile çözülerek, optimum sonuca ulaşılır. Genel bir DP probleminin optimum çözüm tablosu Tablo 2.1'de verilmiştir.

---

(14) a.g.teksir,s.27.

Tablo 2.1. Genel Bir DP Problemi İçin Tamsayılı Olmayan Optimum Çözüm.

			Temeldeki Değişkenler	Temele Girmeyen Değişkenler
C_j			....	....
C_j	X_i	β_i	$X_1 \ldots\ldots X_m$	$W_1 \ldots\ldots W_n$
C_1	X_1	β_1	1 0 0 0 1 0	a_{11} . . a
C_m	X_m	β_m	0 0 1	a a_{mn}

Kaynak: T.Dizdaroğlu ve C.Çakır,"Tamsayılı Programlama Yönteminin Esasları",**E.Ü.Bilgi - sayar Araştırma ve Uygulama Dergisi**,Cilt 6,Sayı 2(Aralık 1983),s.130.

Tablo 2.1'den tamsayılı olmayan herhangi bir karar değişkenlerine ait satır ele alınarak, yeni bir koşul probleme ilave edilir.

Tablo 2.1'den birinci sıra ele alınırsa;

$$(2\text{-}1) \qquad \beta_i = X_i + \sum_{j=1}^{n} a_{ij} W_j$$

$$(2\text{-}2) \qquad X_i = \beta_i - \sum_{j=1}^{n} a_{ij} W_j \quad \text{yazılır.}$$

(2-1) nolu eşitlikte X_i temeldeki değişkeni, W_j temele girmeyen değişkenleri gösterir. β_i temeldeki değişkenin, a_{ij} ise temele girmeyen değişkenlerin katsayılarını göstermektedir.

Kesen-düzlem yönteminin uygulanması için temele giren ve girmeyen değişkenlerin katsayıları tam ve kesirli kısım olmak üzere iki kısma ayrılması gerekir. β_i'nin tamsayılı kısmını $[\beta_i]$,kesirli kısmını f_i; a_{ij}'nin tamsayılı kısmını $[a_{ij}]$,kesirli kısmını f_{ij} göstermektedir. Bu taktirde,

$$(2\text{-}3) \quad \beta_i = [\beta_i] + f_i$$

$$(2\text{-}4) \quad a_{ij} = [a_{ij}] + f_{ij}$$

yazılabilir. f_i veya f_{ij} ise β_i ve a_{ij}'lerin kesirli pozitif kısımlarını göstermektedir. Bunun hesaplanması aşağıda gösterildiği gibidir (15). S kesirli herhangi bir sayı, s=S'nin tamsayılı kısmı ve f=S'nin pozitif kesirli kısmı olduğuna göre;

S	s	f=S-s
$1\frac{1}{2}$	1	1/2
$-2\frac{1}{3}$	-3	2/3
-1	-1	0
-2/5	-1	3/5

şeklinde gösterilebilir.

(2-3) ve (2-4) nolu eşitlik (2-2) nolu denklemde yerine konursa;

$$(2\text{-}5) \quad X_i = [\beta_i] + f_i - \sum_{j=1}^{n} \{[a_{ij}] + f_{ij}\} W_j \qquad f_{ij} \leq 0$$

$$(2\text{-}6) \quad X_i = [\beta_i] + f_i - \sum_{j=1}^{n} [a_{ij}] W_j - \sum_{j=1}^{n} f_{ij} W_j \qquad W_{ij} \leq 0$$

$$(2\text{-}7) \quad X_i = \underbrace{f_i - \sum_{j=1}^{n} f_{ij} W_j}_{\text{Kesirli Kısım}} + \underbrace{[\beta_i] - \sum_{j=1}^{n} [a_{ij}] W_j}_{\text{Tamsayılı Kısım}}$$

$[\beta_i]$ ve $[a_{ij}]$ tamsayılı olduğuna göre $0 \leq f_{ij} < 1$ olması gerekir. Bu taktirde X_i'nin tamsayılı olabilmesi için (2-8)nolu koşulun gerçekleşmesi gerekmektedir(16).

(15) Taha,**Operations Research:An Introduction**,s.247.
(16) Dizdaroğlu ve Çakıl,a.g.m.,s.131.

$$(2\text{-}8) \quad f_i - \sum_{j=1}^{n} f_{ij} W_j \leqslant 0$$

Diğer bir deyişle β_i'nin tamsayılı olabilmesi için β_i'nin kesirli kısmı ile çözümde yer almayan değişkenlerin pozitif kesirli kısımlarının birbirini dengelemesi gerekmektedir. β_i'nin tamsayılı olması için gerekli olan bu eşitsizliğe "Gomary Kesme Düzlemi" adı verilir. Elde edilen bu ikincil koşul probleme ilave edilerek çözülür. Ancak bu koşulun simpleks tabloya ilave edilebilmesi için eşitlik haline getirilmesi gerekir. (2-8) nolu eşitsizliğe yapay bir değişken eklenerek eşitlik haline çevrilir ve

$$(2\text{-}9) \quad f_i - \sum_{j=1}^{n} f_{ij} W_j + S_i = 0 \text{ veya}$$

$$(2\text{-}10) \quad S_i = -f_i + \sum_{j=1}^{n} f_{ij} W_j$$

eşitliği elde edilir(17).

2.3.2. Çözüme İlk Girecek Değişkenin Belirlenmesi

DP probleminin optimum simpleks tablosunda yer alan karar değişkenlerinin değerleri kesirli değerler ise,bu değişkenlerden herhangi bir tanesi seçilerek, kesen-düzlem koşulu oluşturulur ve problemin çözümüne gidilir.Kesen-düzlem koşulunun ilavesi ile yine tamsayılı çözüme ulaşılmamışsa, o koşulun ilavesi ile hesaplanan optimum simpleks tabloda yer alan kesirli karar değişkenleri için yeniden kesen-düzlem koşulları oluşturulur. İşlemlere tamsayılı çözüm elde edilene kadar devam edilir. Burada çözüme öncelikle alınacak karar değişkenlerinin belirlenmesi önemli bir adımdır. Böylece çözüme ilk girecek değişken belirlendiği taktirde optimum tamsayılı çözüme ulaşmak için kesme-düzlem koşullarının oluşturulmasına geçilir. Bu seçim iyi yapıldığında,hesap-

(17) a.g.m.

lanan tablo sayısı, istenilen karar değişkenlerinin seçilmesi halindeki tablo sayısından daha az olmaktadır.

Çözüme ilk girecek değişkenin belirlenmesi konusunda bazı matematiksel yaklaşımlar söz konusu ise de, bu yaklaşımlar amprik kurallar niteliğindedir.

Öncelikle hangi karar değişkeninin ele alınacağı belirlenirken;

a) $\text{Maxi}\ \{ f_i \}$

b) $\text{Maxi}\ \left\{ \dfrac{f_i}{\sum_{j=1}^{n} f_{ij}} \right\}$

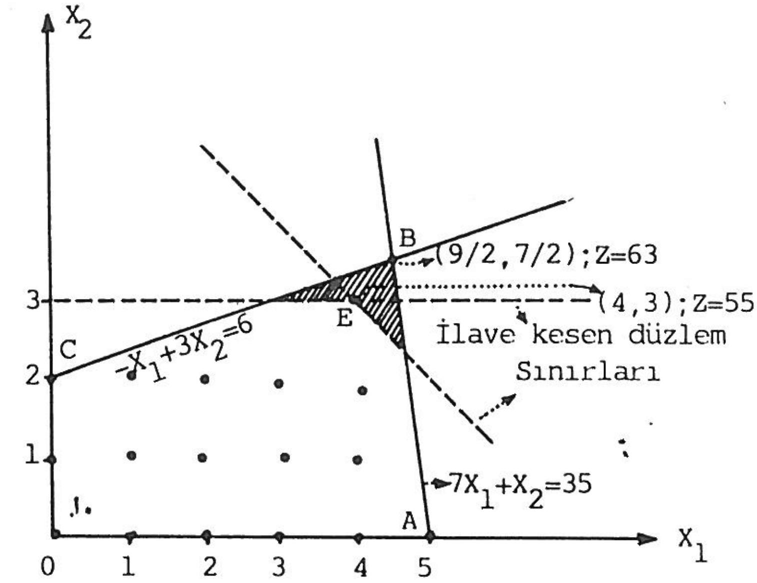
kurallarından biri tercih edilir. Taha yaklaşımlardan ikincisinin daha etkin olduğunu belirtmektedir(18). Burada f_i çözümde yer alan değişkenin pozitif kesirli kısmını, $\sum_{j=1}^{n} f_{ij}$ ise çözümde yer almayan değişkenlerin pozitif kesirli kısımlarının toplamını ifade etmektedir.

2.3.3. Kesen-Düzlem Yönteminin Saf Tamsayılı Örnek Üzerinde Gösterilmesi

Kesen-düzlem yönteminin işleyişi ve öncelikle hangi karar değişkeninin çözüme alınacağı konusundaki açıklamalardan sonra yöntemi, sayısal bir örnek üzerinde gösterelim ve tamsayılı maksimizasyon problemi aşağıda verildiği gibi olsun(19).

$$\begin{aligned} \text{Mak } Z &= 7X_1 + 9X_2 \\ &-X_1 + 3X_2 \leq 6 \\ &7X_1 + X_2 \leq 35 \\ &X_1,\ X_2 \geq 0 \text{ ve tamsayı} \end{aligned} \qquad \text{Problem 2.8.}$$

(18) Taha, **Operations Research: An Introduction**, s.252.
(19) a.g.e., s.245.



Şekil 2.6. Kesen-Düzlem Yöntemi.
Kaynak: Hamdy A.Taha,**Operations Research:An Introduction**, 2nd Ed.,New York:Mac Millan Publishing Co.,Inc., 1976,s.245.

Problem için grafik, Şekil 2.6'da gösterilmiştir. Şekildeki OABC alanı orijinal problemin uygun çözüm alanını göstermektedir.Problem tamsayı olma koşulu dikkate alınmadan çözüldüğünde, $X_1=9/2$, $X_2=7/2$ ve Z=63 olarak bulunur ve bu nokta Şekil 2.6'daki B noktasıdır.

Problemin tamsayılı olmayan optimum simpleks tablosu Tablo 2.2'de verilmiştir.

Tablo 2.2. Problem 2.8 İçin Tamsayılı Olmayan Optimum Çözüm.

C_j → ↓	Ç.D.	Ç.D.D.	0 y_1	0 y_2	7 X_1	9 X_2
9	X_2	7/2	7/22	1/22	0	1
7	X_1	9/2	-1/22	3/22	1	0
	Z_j	63	28/11	15/11	7	9
	C_j-Z_j		-28/11	-15/11	0	0

Kesen-düzlem yöntemi, tamsayılı olmayan karar değişkenlerine ait satır vektörü üzerinde uygulanır. Örnekte her iki karar değişkeni de tamsayılı olmadığı için öncelikle X_2'nin çözüme alınması gerekir. Niçin X_2'nin öncelikli olduğunu gösterelim $X_1 = \frac{9}{2}$ olarak elde edilmişti. Tam ve kesirli kısmını ayırırsak, $X_1 = \frac{8}{2} + \frac{1}{2}$ elde ederiz. X_2 için aynı işlemler yapılırsa, $X_2 = \frac{7}{2} = \frac{6}{2} + \frac{1}{2}$ elde edilir. İlk kural gereğince (a) her iki değişkenin de kesirli kısmı aynıdır. İkinci kural uygulanırsa (b);

$$X_1 : \frac{21}{22} y_1 + \frac{3}{22} y_2 \geq \frac{1}{2}$$

$$X_2 : \frac{7}{22} y_1 + \frac{1}{22} y_2 \geq \frac{1}{2}$$

$$\text{Maxi } \{ \sum_{j=1}^{n} f_{ij} \} \rightarrow \frac{\frac{1}{2}}{\frac{7}{22} + \frac{1}{22}} > \frac{\frac{1}{2}}{\frac{21}{22} + \frac{3}{22}}$$

olduğundan X_2 öncelikle çözüme alınacaktır. X_2 satır vektörü dikkate alınarak,

$$X_2 + \frac{7}{22} y_1 + \frac{1}{22} y_2 = \frac{6}{2} + \frac{1}{2} \quad \text{veya}$$

$$X_2 + \left(0 + \frac{7}{22}\right) y_1 + \left(0 + \frac{1}{22}\right) y_2 = \left(3 + \frac{1}{2}\right) \text{ elde edilir.}$$

Buradan ilk kesen-düzlem koşulu,

$$S_1 - \frac{7}{22} y_1 - \frac{1}{22} y_2 = -\frac{1}{2} \quad \text{elde edilir.}$$

Bu yeni koşulun Tablo 2.2'ye ilave edilmesiyle oluşan yeni Tablo 2.3'-de gösterildiği gibi olur.

Tablo 2.3. Problem 2.8 İçin İlk Kesen-Düzlem Koşulunun İlavesi.

$C_j \rightarrow$			0	0	7	9	0
$\downarrow$	Ç.D.	Ç.D.D.	y_1	y_2	X_1	X_2	S_1
9	X_2	7/2	7/22	1/22	0	1	0
7	X_1	9/2	-1/22	3/22	1	0	0
0	S_1	-1/2	-7/22	-1/22	0	0	1
	Z_j	63	28/11	15/11	7	9	0
	C_j-Z_j		-28/11	-15/11	0	0	0

Dual simpleks yöntemi uygulanarak Tablo 2.4 elde edilir.

Tablo 2.4. Problem 2.8 İçin İlk Kesen-Düzlem Koşulunun İlavesi İle Oluşan Optimum Çözüm.

$C_j \rightarrow$			0	0	7	9	0
$\downarrow$	Ç.D.	Ç.D.D.	y_1	y_2	X_1	X_2	S_1
9	X_2	3	0	0	0	1	1
7	X_1	32/7	0	1/7	1	0	-1/7
0	y_1	11/7	1	1/7	0	0	-22/7
	Z_j	59	0	1	7	9	8
	C_j-Z_j		0	-1	0	0	-8

Tablo 2.4'den de görüldüğü gibi X_2 tamsayılı olmasına karşın, X_2 tamsayılı değildir ve X_1 satır vektörü dikkate alınarak yeni bir kesen-düzlem sınırının oluşturulması gerekir.

X_1 satır vektörü dikkate alınarak,

$$X_1+ (0+ \frac{1}{7})y_2+ (-1+ \frac{6}{7})S_1= (4+ \frac{7}{4})$$ elde edilir.

İkinci kesen-düzlem koşulu,

$$S_2- \frac{1}{7} y_2- \frac{6}{7} S_1= - \frac{4}{7}$$

olarak yazılıp,Tablo 2.4'e ilave edilerek Tablo 2.5 elde edilir.

Tablo 2.5. Problem 2.8 İçin İkinci Kesen-Düzlem Koşulunun İlavesi.

C_j →			0	0	7	9	0	0
↓	Ç.D.	Ç.D.D.	y_1	y_2	X_1	X_2	S_1	S_2
9	X_2	3	0	0	0	1	1	0
7	X_1	32/7	0	1/7	1	0	-1/7	0
0	y_1	11/7	1	1/7	0	0	-22/7	0
0	S_2	-4/7	0	-1/7	0	0	-6/7	1
	Z_j	59	0	1	7	9	8	0
	C_j-Z_j		0	-1	0	0	-8	0

Dual simpleks yöntemi uygulanarak Tablo 2.6 elde edilir.

Tablo 2.6. Problem 2.8 İçin Optimum Tamsayılı Çözüm.

C_j →								
↓	Ç.D.	Ç.D.D.	y_1	y_2	X_1	X_2	S_1	S_2
9	X_2	3	0	0	0	1	1	0
7	X_1	4	0	0	1	0	-1	1
0	y_1	1	1	0	0	0	-4	1
0	y_2	4	0	1	0	0	6	-7
	Z_j	55	0	0	7	9	2	7
	C_j-Z_j		0	0	0	0	-2	-7

Tablo 2.6'dan da görüldüğü gibi optimum tamsayılı çözüme ulaşılmıştır. Optimum tamsayılı çözümde $X_1=4$, $X_2=3$ ve $Z=55$'dir.

Kesen-düzlem yönteminde elde edilen sınırların grafik üzerinde gösterilmesi mümkündür. Bu ilave edilen sınırlar elde edilen tamsayılı noktadan geçecektir.

Ele alınan problemdeki kesen-düzlem sınırlarının grafik üzerinde gösterilebilmesi için sınırlara ilave edilen y_1 ve y_2 boş değişkenlerinin X_1 ve X_2 cinsinden ifade edilmesi gerekir. Problemin sınırları;

$$-X_1 + 3X_2 \leqslant 6$$
$$7X_1 + X_2 \leqslant 35$$

şeklindedir. Bu sınırlar y_1 ve y_2 boş değişkenlerin eklenmesi ile eşitlik haline getirilir.

$$-X_1 + 3X_2 + y_1 = 6$$
$$7X_1 + X_2 + y_2 = 35$$

şeklindeki eşitliklerde y_1 ve y_2, X_1 ve X_2 cinsinden yazılacak olursa, ilk eşitlikten;

$$y_1 = 6 + X_1 - 3X_2 \text{ ve}$$

ikinci eşitlikten;

$$y_2 = 35 - 7X_1 - X_2$$

elde edilir. İlk kesen-düzlem sınırı X_1, X_2 cinsinden yazılırsa,

$$S_1 - \frac{7}{22} y_1 - \frac{1}{22} y_2 = -\frac{1}{2}$$

$$S_1 - \frac{7}{22}(6+X_1-3X_2) - \frac{1}{22}(35-7X_1-X_2) = -\frac{1}{2}$$

elde edilir. Gerekli işlemler yapıldıktan sonra

$$S_1 + X_2 = 3 \text{ veya}$$
$$X_2 \leqslant 3$$

sınırı elde edilir. Aynı işlemler ikinci kesen-düzlem sınırı içinde yapıldığında,

$$S_2 - \frac{1}{7} y_2 - \frac{6}{7} S_1 = -\frac{4}{7} \text{ ve}$$
$$X_1 + X_2 \leqslant 7$$

sınırı elde edilir ve bu iki sınır Şekil 2.7'de grafik üzerine çizildiğinde (4,3) noktasından geçer ki, bu nokta optimum tamsayılı noktadır. Optimum tamsayılı nokta Şekil 2.7'deki E noktasıdır.

2.3.4. Karma Tamsayılı Problemlerde Kesen-Düzlem Yöntemi

Saf tamsayılı doğrusal programlama problemlerinde tüm karar değişkeni çözüm sonuçlarının tamsayılı olması gerekir.Fakat karma tamsayılı doğrusal programlama problemlerinde karar değişkenlerinin birinin veya bir kısmının tamsayılı olması gerekirken, diğerlerinin kesirli değerler almasına izin verilir.

Karma tamsayılı programlama problemlerine kesen-düzlem yönteminin uygulanması, saf tamsayılı problemlere uygulanan kesen-düzlem yönteminden bazı farklılıklar gösterir. Eğer çözüm değerlerinden bir tanesinin tamsayılı olması isteniyorsa,o değişkene ait olan satır vektörü seçilir. Eğer çözüm değerlerinden bir kısmının tamsayılı olması isteniyorsa, pozitif kısmı en büyük olan karar değişkeni seçilir ve Gomary sınırlayıcı koşulu oluşturulur. Tamsayılı olması istenen değişken X_i, temelde olmayan değişken W_j ile gösterilirse,temeldeki kesirli çözüm değeri aşağıdaki gibi yazılabilir(20).

$$(2\text{-}11) \quad \beta_i = X_i \sum_{j=1}^{n} \alpha_{ij} W_j$$

$$X_i = [\beta_i] + f_i - \sum_{j=1}^{n} \alpha_{ij} W_j$$

Burada temele girmeyen değişkenlerin sadece bir kısmı tamsayılı olacağından,

$$(2\text{-}12) \quad X_i - [\beta_i] = f_i - \left(\sum_{jE} \alpha_{ij} + \sum_{jE^-} \alpha_{ij} W_j \right)$$

$j^+ \rightarrow \alpha_{ij} \geqslant 0$ olan j'lerin seti

$j^- \rightarrow a_{ij} \leqslant 0$ olan j'lerin seti

$X_i \leqslant [\beta_i]$ veya $X_i \geqslant [\beta_i] + 1$ olacaktır(21).

(20) Dizdaroğlu ve Çakıl,a.g.m.,s.134.
(21) a.g.m.

a) $X_i \leqslant [\beta_i]$ olması için (2-12) nolu eşitliğin sol tarafı negatif olmalıdır ve bu aşağıdaki koşul ile gerçekleşebilir(22).

$$(2\text{-}13) \quad j^{+}\text{seti} \rightarrow \sum_{j=1}^{n} \alpha_{ij} W_j \geqslant f_i \qquad 0 \leqslant f_i < 1$$

b) $X_i \geqslant [\beta_i]$ +1 olması için (2-12) nolu eşitliğin sol tarafı pozitif olmalıdır(23).

$$X_i - [\beta_i] + 1 = f_i - \sum_{j=1}^{n} \alpha_{ij} W_j$$

$$\therefore \quad X_i = [\beta_i] + f_i - 1 - \sum_{j=1}^{n} \alpha_{ij} W_j \text{ eşitliğinden,}$$

$$j^{-} \text{ seti} \rightarrow \sum_{j=1}^{n} \alpha_{ij} W_j \leqslant f_i - 1$$

elde edilir. Her iki taraf (f_i-1)'e bölünürse ve $f_i-1 < 0$ ise,

$\sum_{j=1}^{n} \left(\frac{1}{f_i-1}\right) \alpha_{ij} W_j \geqslant 1$ olur ve her iki taraf f_i ile çarpılırsa,

$$(2\text{-}14) \quad \sum_{j=1}^{n} \left(\frac{f_i}{f_i-1}\right) \alpha_{ij} W_j \geqslant f_i \text{ olur.}$$

(2-13) ve (2-14) nolu koşullar birleştirildiğinde,

$$\sum_{j \in J^{+}} \alpha_{ij} W_j + \sum_{j \in J^{-}} \left(\frac{f_i}{f_i-1}\right) \alpha_{ij} W_j \geqslant f_i \text{ olur(24).}$$

Bu eşitsizliği eşitlik haline getirmek için yapay değişken (S_{n+1}) ilave edilerek, Karma Kesen-Düzlem veya Gomary Kesen-Düzlemi elde edilir ve aşağıdaki gibi yazılır(25).

$$(2\text{-}14) \quad S_{n+1} - \left[\sum_{j \in J^{+}} \alpha_{ij} W_j + \left(\frac{f_i}{f_i-1}\right) \sum_{j \in J^{-}} \alpha_{ij} W_j \right] = -f_i$$

---

(22) a.g.m.,s.135
(23) a.g.m.
(24) a.g.m.
(25) a.g.m.

Eğer birden fazla değişkenin tamsayılı olması isteniyorsa bu durumda Gomary sınırlayıcı koşulu,

$$(2\text{-}15)\quad S_i = -f_i + \sum_{j=1}^{n} \lambda_j W_j$$

Eğer $\alpha_{ij} \geqslant 0$ ve W_j tamsayılı değilse ..... $\lambda_j = \alpha_{ij}$

Eğer $\alpha_{ij} < 0$ ve W_j tamsayılı değilse ..... $\lambda_j = \frac{f_i}{f_i - 1}\alpha_{ij}$

Eğer $f_{ij} \leqslant f_i$ ve W_j tamsayılı ise ..... $\lambda_j = f_{ij}$

Eğer $f_{ij} > f_i$ ve W_j tamsayılı ise ..... $\lambda_j = \frac{f_i}{1-f_i}(1-f_{ij})$

eşitlikleri elde edilir(26).

2.3.5. Kesen-Düzlem Yönteminin Karma Tamsayılı Örnek Üzerinde Gösterilmesi

Gerekli açıklamalar yapıldıktan sonra yöntemin işleyişini göstermek amacıyla saf tamsayılı programlama konusundaki örneğe tekrar dönelim. Problemde yalnızca X_1'in tamsayılı X_2'nin ise kesirli olmasının istendiğini varsayalım.

$$\text{Mak } Z = 7X_1 + 9X_2$$
$$-X_1 + 3X_2 \leqslant 6$$
$$7X_1 + X_2 \leqslant 35$$
$$X_1,\ X_2 \geqslant 0 \text{ ve } X_1 \text{ tamsayı}$$

Yöntemin uygulanmasına yine DP optimum çözüm tablosu ile başlanır(Tablo 2.2). Problemde sadece X_1'in tamsayılı olması istendiğine göre, bu değişkene ait satır vektörü Tablo 2.2'den seçilir ve (2-14) nolu koşulda yerine konursa,

$$S_1 - \left[\frac{3}{22}y_2 + \left(\frac{\frac{1}{2}}{\frac{1}{2}-1}\right)\left(-\frac{1}{22}\right)y_1\right] = -\frac{1}{2}$$

bulunur veya,

(26) a.g.m.,s.136.

$$S_1 - \frac{3}{22} y_2 - \frac{1}{22} y_1 = - \frac{1}{2}$$

elde edilir. Bu Gomary koşulunun Tablo 2.2'ye ilave edilmesi Tablo 2.7 de gösterilmiştir.

Tablo 2.7. Karma Tamsayılı Problem İçin Kesen-Düzlem Koşulunun İlavesi.

$C_j \rightarrow$			0	0	7	9	0
↓	Ç.D.	Ç.D.D.	y_1	y_2	X_1	X_2	S_1
9	X_2	7/2	7/22	1/22	0	1	0
7	X_1	9/2	-1/22	3/22	1	0	0
0	S_1	-1/2	-1/22	-3/22	0	0	1
	Z_j	63	28/11	15/11	7	9	0
	C_j-Z_j		-28/11	-15/11	0	0	0

Dual simpleks yöntemi uygulanarak Tablo 2.8 elde edilir.

Tablo 2.8. Karma Tamsayılı Problem İçin Optimum Çözüm.

$C_j \rightarrow$			0	0	7	9	0
↓	Ç.D.	Ç.D.D.	y_1	y_2	X_1	X_2	S_1
9	X_2	10/3	10/33	0	0	1	1/3
7	X_1	4	-1/11	0	1	0	1
0	y_2	11/3	1/3	1	0	0	-22/3
	Z_j	58	23/11	0	7	9	10
	C_j-Z_j		-23/11	0	0	0	-10

Kesen-düzlem yöntemi ile tamsayılı çözümün bulunması genel - likle zor ve belirsizdir. Özellikle 100'e 100 boyutundan daha büyük problemlerde çözüm pratik değildir. Fakat bu 100'e 100 boyutundan daha küçük problemlerde daha pratik olduğu anlamına gelmemelidir(27). Örne-

(27) Taha, **Integer Programming: Theory, Applications and Computations**, s.224.

ğin iki karar değişkenli ve üç sınırda oluşan bir maksimizasyon problеminde dahi işlem sayısının uzunluğunu ve yöntemin güçlüğünü görmek mümkündür. Problem aşağıdaki gibi olsun(28).

$$\begin{aligned} \text{Mak } Z &= 21X_1 + 16X_2 \\ \text{Sınırlar} \quad & 4X_1 + 6X_2 \leqslant 24 \\ & 7X_1 + 4X_2 \leqslant 28 \\ & X_1 \leqslant 3.75 \\ & X_1, X_2 \geqslant 0 \text{ ve tamsayı} \end{aligned} \qquad \text{Problem 2.9.}$$

Problemin kesen-düzlem yöntemiyle çözülüp optimum tamsayılı çözümün elde edilebilmesi için 15 ayrı tablonun oluşturulması gerekmektedir. Yöntem uygun çözüm alanını küçük küçük parçalara ayırmakta bu yüzden de işlem sayısı artmaktadır.

Kesen-düzlem yönteminin diğer bir dezavantajı da tamsayılı optimum çözüm bulununcaya kadar probleme ne kadar kesen-düzlem sınırının ilave edileceğinin bilinmemesidir. İki değişkenli bir probleme yukarıdaki örnekte olduğu gibi, 15 ayrı sınır ilave edilirken, bir başka iki değişkenli problem için belki de bir kesen-düzlem sınırının ilave edilmesi yeterli olabilir.

2.4. DAL-SINIR YÖNTEMİ

2.4.1. Alt ve Üst Sınırların Oluşturulması

Tamsayılı programlama problemlerinin çözümünde kullanılan diğer bir yöntem de dal-sınır yöntemidir. Dal-sınır algoritması 1960 yılında Land ve Doig tarafından geliştirilmiştir ve hem saf tamsayılı hem de karma tamsayılı problemler için aynı şekilde uygulanmaktadır(29).

Dal-sınır yönteminde de kesen-düzlem yönteminde olduğu gibi, işleme kesirli optimum çözüm ile başlanır. Yöntemin esası ele alınan problemi çeşitli alt setlere ayırmak ve bu alt setleri sistematik ola-

(28) Pfaffenberger and Walker,a.g.e.,s.281.
(29) Taha,**Integer Programming:Theory,Applications and Computations**,s.144.

rak incelemektir. Gerektiğinde de uygun tamsayı içermeyen alt setleri elimine etmektir. Problemi alt setlere ayırırken kesirli olan karar değişkenleri için alt ve üst sınırlar oluşturularak problem çözülür. Alt ve üst sınır oluşturulurken aşağıdaki yol izlenir:

X^o = Kesirli optimum değer

b = X^o'in tamsayılı kısmı

f = X^o'ın kesirli kısmı

Üst sınır,

Seçilen değişken $(X^o) \leqslant b$

ve alt sınır,

Seçilen değişken $(X^o) \geqslant b+1$

olarak yazılır(30). Örneğin kesirli optimum değer $X^o = \frac{15}{11}$ ise $b=1$, $f=\frac{4}{11}$ dir. Bu değerler için oluşturulacak sınırlarda,

$X^o \leqslant 1$

$X^o \geqslant 2$ olacaktır.

2.4.2. Dal-Sınır Yönteminin Kuralları

Optimizasyon problemlerinin dal-sınır yöntemi ile çözülebilmesi için bazı kurallara uyulması gerekmektedir. Bu kurallar hem saf tamsayılı hem de karma tamsayılı optimizasyon problemleri için geçerlidir. Yöntemin,problemlerin çözümü için uygulanış kuralları aşağıda anlatıldığı gibidir.

1. Problem öncelikle tamsayılı olma koşulu aranmaksızın çözülür. Eğer çözüm sonucunda karar değişkenlerinin değerleri tamsayılı ise istenilen sonuca ulaşılmıştır. Değilse ikinci adıma geçilir.

2. Tamsayılı olmayan karar değişkenlerinden herhangi bir tanesi seçilir. Eğer problem maksimizasyon problemi ise amaç fonksiyonu

---

(30) Donnenbring and Starr,a.g.e.,s.405.

değeri yüksek olan, minimizasyon ise amaç fonksiyonu değeri küçük olan karar değişkeni seçilir.

3. Adım ikide seçilen karar değişkeni ile ilgili olarak iki yeni sınır oluşturulur (Problem iki alt sete ayrılır). Seçilen karar değişkeninin tamsayılı kısmı b ise sınırlardan bir tanesi b'den küçük veya b'ye eşit, diğer sınır b+1'den büyük veya b+1'e eşit olmalıdır.

4. Yeni sınır koşullarının ilavesi ile oluşturulan yeni alt problemlerde tamsayılı olma koşulu aranmaksızın yeniden çözülür. Yeni problemler için elde edilen sonuçlar yine tamsayılı değilse aynı işlemlere devam edilerek uygun çözüm alanı daraltılır.

Problemde dallara ayırma işleminin nereye kadar devam edeceği en önemli sorundur. Eğer yeni sınırların ilavesi ile oluşan alt problemlerin çözümü tamsayılı ise veya uygun çözümü yoksa o alt prob - lemlerin yeniden dallara ayrılması gerekmemektedir. Problemi dallara ayırmaktan bizi vazgeçirecek diğer bir neden ise, aynı düzeyde iki ayrı problemden biri tamsayılı çözümle daha yüksek Z değeri vermişse, diğer problemin çözümü tamsayılı olmasa bile, yeni dallar geliştirilmez, çünkü daha sonraki dallarda tamsayılı çözüm bulunsa bile çözümün amaç fonksiyonu değeri daha düşük olacak ve dalların uçlarına gittikçe amaç fonksiyonunun değeri azalacaktır(31).

5. Geride hiç bir alt problem kalmamışsa problemin çözümü tamamalanmıştır ve durulur. Aksi taktirde 2.adıma geçilir.

2.4.3. Dal-Sınır Yönteminin Örnek Üzerinde Gösterilmesi

Kesen-düzlem yönteminin saf tamsayılı problemler üzerinde nasıl uygulandığını göstermek amacıyla ele alınan probleme tekrar dönelim ve aynı problem üzerinde dal-sınır yönteminin nasıl uygulandığını

(31) Yılmaz,a.g.teksir,s.29.

görelim. Problemin çözümünde $X_1=9/2$, $X_2=7/2$ ve $Z=63$ değerinde idi. X_2'nin amaç fonksiyonu değeri daha yüksek olduğu için öncelikle X_2'nin dallara ayrılması gerekmektedir. X_2 için alt ve üst sınırların oluşturulmasıyla problem iki ayrı sete ayrılır. Ve her bir alt set DP yöntemiyle çözülür. İlk alt set orijinal probleme $X_2 \leqslant 3$, ikinci alt set ise orijinal probleme $X_2 \geqslant 4$ sınırının ilavesiyle çözülür. $X_2 \leqslant 3$ sınırı orijinal probleme ilave edilerek problem ya yeni başta çözülür veya orijinal problemin optimum simpleks tablosuna ilave edilerek çözümü yapılır. İkinci yaklaşım daha çok kullanılan bir yaklaşım olup, problemin daha kısa sürede çözümünü sağlamaktadır.

Öncelikle çözüme alınması gereken karar değişkeni X_2 olduğu için, bu karar değişkenine ait satır vektörü Tablo 2.2'den yararlanılarak aşağıdaki gibi yazılır.

$$X_2 + 7/22\, y_1 + 1/22\, y_2 = 7/2$$

Yeni ilave sınır $X_2 \leqslant 3$ olduğu için, yukarıdaki eşitlik şu şekilde yazılabilir.

$$X_2 = 7/2 - 7/22\, y_1 - 1/22\, y_2 \leqslant 3$$
$$X_2 = - 7/22\, y_1 - 1/22\, y_2 \leqslant 3 - 7/2$$
$$X_2 = -7/22\, y_1 - 1/22\, y_2 \leqslant -1/2$$

koşulu elde edilir. Bu koşulun son simpleks tabloya ilave edilebilmesi için eşitlik haline getirilmesi gerekir. Bunun için de yeni bir boş değişkenin koşula eklenmesi gerekmektedir.

$$X_2 = -7/22\, y_1 - 1/22\, y_2 + y_3 = -1/2$$

koşulu elde edilir ve bu yeni koşul optimum simpleks tabloya (Tablo 2.2) ilave edilerek çözüm yapılır. Yeni koşulun Tablo 2.2'ye ilavesi Tablo 2.9'da gösterilmiştir.

Tablo 2.9. Problem 2.8 İçin $X_2 \leq 3$ Sınırının Optimum Simpleks Tabloya İlavesi.

$C_j \rightarrow$			0	0	7	9	0
$\downarrow$	Ç.D.	Ç.D.D.	y_1	y_2	X_1	X_2	y_3
9	X_2	7/2	7/22	1/22	0	1	0
7	X_1	9/2	-1/22	3/22	1	0	0
0	y_3	-1/2	-7/22	-1/22	0	0	1
	Z_j	63	28/11	15/11	7	9	0
	C_j-Z_j		-28/11	-15/11	0	0	0

Dual simpleks yöntemi uygulanarak Tablo 2.10 elde edilir.

Tablo 2.10. Problem 2.8 İçin $X_2 \leq 3$ Sınırının İlavesiyle Oluşan Optimum Çözüm.

$C_j \rightarrow$			0	0	7	9	0
$\downarrow$	Ç.D.	Ç.D.D.	y_1	y_2	X_1	X_2	y_3
9	X_2	3	0	0	0	1	1
7	X_1	32/7	0	1/7	1	0	-1/7
0	y_1	11/7	1	1/7	0	0	-22/7
	Z_j	59	0	1	7	9	8
	C_j-Z_j		0	-1	0	0	-8

Tablo 2.10'da da görüldüğü gibi $X_2 \leq 3$ koşulunun ilavesi ile de tamsayılı çözüm bulunamamıştır. Yeniden X_1'in dallara ayrılması gerekmektedir. Ancak daha önce $X_2 \geq 4$ koşulunun Tablo 2.2'ye ilave edilip çözümünün yapılması gerekmektedir. Daha önce $X_2 \leq 3$ koşulunda olduğu gibi Tablo 2.2'den X_2'ye ait satır vektörü dikkate alınarak ilave edilecek koşulun oluşturulması gerekmektedir.

$$X_2 = 7/2 - 7/22\ y_1 - 1/22\ y_2 \geq 4$$

$$X_2 = -7/22\ y_1 - 1/22\ y_2 \geq 4 - 7/2$$

$$X_2 = -7/22\ y_1 - 1/22\ y_2 \geq 1/2$$

Son eşitsizlik ya olduğu gibi ya da eşitsizlik (-1) ile çarpılıp ($\leq$)

haline getirilip boş değişken eklendikten sonra tabloya ilave edilir. Problemin çözümünde ikinci yöntem benimsenmiştir. O halde yeni koşul;

$$7/22\ y_1 + 1/22\ y_2 \leqslant -1/2$$

$$7/22\ y_1 + 1/22\ y_2 + y_4 = -1/2$$

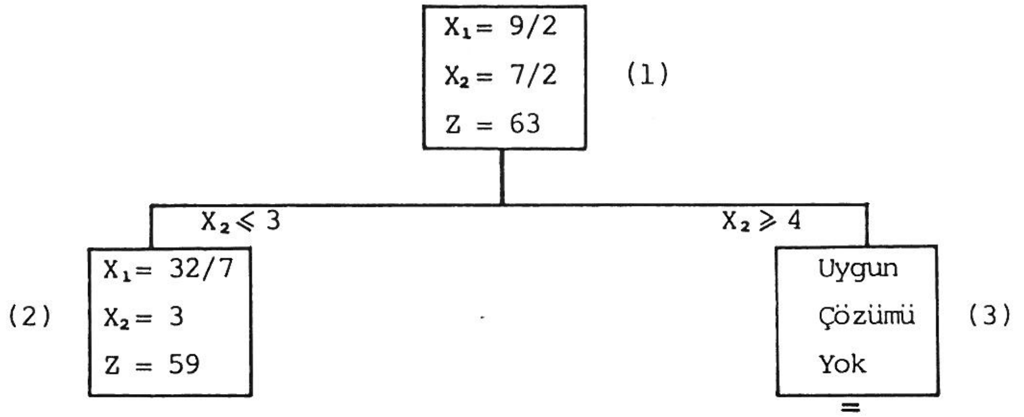
şeklindedir ve tabloya ilavesi Tablo 2.11'de gösterilmiştir.

Tablo 2.11. Problem 2.8 İçin $X_2 \geqslant 4$ Sınırının Optimum Simpleks Tabloya İlavesi.

$C_j \rightarrow$			0	0	7	9	0
$\downarrow$	Ç.D.	Ç.D.D.	y_1	y_2	X_1	X_2	y_4
9	X_2	7/2	7/22	1/22	0	1	0
7	X_1	9/2	-1/22	3/22	1	0	0
0	y_4	-1/2	7/22	1/22	0	0	1
	Z_j	63	28/11	15/11	7	9	0
	C_j-Z_j		-28/11	-15/11	0	0	0

Tablo 2.11 için dual simpleks yöntemi uygulanamamaktadır. Çünkü anahtar satır (y_4) seçilirken anahtar sütun seçilememektedir. Anahtar sütunun seçilebilmesi için C_j-Z_j satırındaki değerlerin anahtar satırdaki (-) değerli sayılara oranlanması ve bu oranlardan da küçük oranın seçilmesi gerekmektedir. Ancak tablodan da görüldüğü gibi, anahtar satırda negatif sayı olmadığı için $X_2 \geqslant 4$ koşulu için problemin uygun çözümü yoktur.

$X_2 \leqslant 3$ ve $X_2 \geqslant 4$ koşullarının ilavesi ile çözüm değişkenlerinin değerleri Şekil 2.7'de gösterilmiştir.



Şekil 2.7. $X_2 \leqslant 3$, $X_2 \geqslant 4$ Koşullarının İlavesi İle Elde Edilen Problemin Dal-Sınır Yön - temiyle Çözümü.

Şekil 2.7'den de görüldüğü gibi (3) nolu alt problemin çözümü olmadığı için bu alt problem kapatılır. (2) nolu alt problemde X_1 karar değişkeni tamsayılı olmadığı için yeniden alt setlere ayrılması gerekmektedir. (2) nolu alt problem için ilave edilecek koşullar $X_1 \leqslant 4$ ve $X_1 \geqslant 5$'dir.

$X_1 \leqslant 4$ koşulu için Tablo 2.10'dan X_1 karar değişkenine ait satır vektörü dikkate alınarak tabloya ilave edilecek yeni koşul elde edilir.

$$X_1 + 1/7\ y_2 - 1/7\ y_3 = 32/7$$
$$X_1 = 32/7 - 1/7\ y_2 + 1/7\ y_3 \leqslant 4$$
$$X_1 = -1/7\ y_2 + 1/7\ y_3 \leqslant 4 - 32/7$$
$$X_1 = -1/7\ y_2 + 1/7\ y_3 \leqslant -4/7$$
$$X_1 = -1/7\ y_2 + 1/7\ y_3 + y_5 = -4/7$$

Bu yeni koşulun Tablo 2.10'a ilavesi Tablo 2.12'de gösterilmiştir.

Tablo 2.12. $X_1 \leqslant 4$ Koşulunun Tablo 2.10'a İlave Edilmesi.

$C_j \rightarrow$			0	0	7	9	0	0
$\downarrow$	Ç.D.	Ç.D.D.	y_1	y_2	X_1	X_2	y_3	y_5
9	X_2	3	0	0	0	1	1	0
7	X_1	32/7	0	1/7	1	0	-1/7	0
0	y_1	11/7	1	1/7	0	0	-22/7	0
0	y_5	-4/7	0	-1/7	0	0	1/7	1
	Z_j	59	0	1	7	9	8	0
	C_j-Z_j		0	-1	0	0	-8	0

Dual simpleks yöntemi uygulanarak Tablo 2.13 elde edilir.

Tablo 2.13. $X_1 \leqslant 4$ Koşulunun İlavesiyle Oluşan Optimum Tamsayılı Çözüm.

$C_j \rightarrow$			0	0	7	9	0	0
$\downarrow$	Ç.D.	Ç.D.D.	y_1	y_2	X_1	X_2	y_3	y_5
9	X_2	3	0	0	0	1	1	0
7	X_1	4	0	0	1	0	-1/7	1
0	y_1	1	1	0	0	0	-3	1
0	y_2	4	0	1	0	0	-1	-7
	Z_j	55	0	0	7	9	8	7
	C_j-Z_j		0	0	0	0	-8	-7

Tablo 2.13'den de görüldüğü gibi tamsayılı çözüm bulunmuştur. Fakat problemin çözümü tamamlanmamıştır. Çünkü $X_1 \geqslant 5$ koşulu için problem çözülmemiştir. Bu koşul için de Tablo 2.10'dan yararlanılır.

$$X_1 + 1/7\ y_2 - 1/7\ y_3 = 32/7$$

$$X_1 = 32/7 - 1/7\ y_2 + 1/7\ y_3 \geqslant 5$$

$$X_1 = -1/7\ y_2 + 1/7\ y_3 \geqslant 5 - 32/7$$

$$X_1 = -1/7\ y_2 + 1/7\ y_3 \geqslant 3/7$$

$$X_1 = 1/7\ y_2 - 1/7\ y_3 \leqslant -3/7$$

$$X_1 = 1/7\ y_2 - 1/7\ y_3 + y_6 = -3/7$$

Bu yeni koşulun Tablo 2.10'a ilavesi Tablo 2.14'de gösterilmiştir.

Tablo 2.14. $X_1 \geq 5$ Koşulunun Tablo 2.10'a İlave Edilmesi.

$C_j \rightarrow$			0	0	7	9	0	0
↓	Ç.D.	Ç.D.D.	y_1	y_2	X_1	X_2	y_3	y_6
9	X_2	3	0	0	0	1	1	0
7	X_1	32/7	0	1/7	1	0	-1/7	0
0	y_1	11/7	1	1/7	0	0	-22/7	0
0	y_6	-3/7	0	1/7	0	0	-1/7	1
	Z_j	59	0	1	7	9	8	0
	C_j-Z_j		0	-1	0	0	-8	0

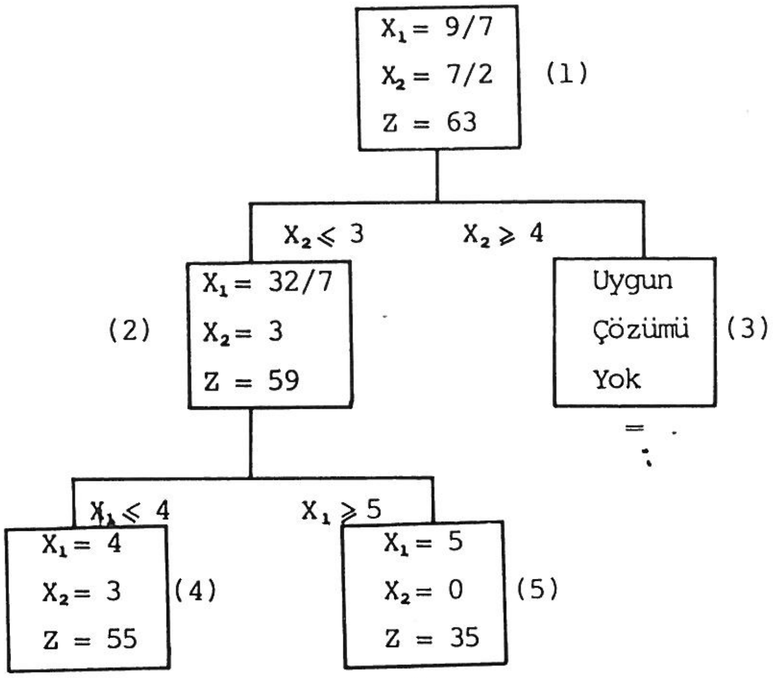
Dual simpleks yöntemi uygulanarak Tablo 2.15 elde edilir.

Tablo 2.15. $X_1 \geq 5$ Koşulunun İlavesiyle Oluşan Optimum Tamsayılı Çözüm.

$C_j \rightarrow$			0	0	7	9	0	0
↓	Ç.D.	Ç.D.D.	y_1	y_2	X_1	X_2	y_3	y_6
9	X_2	0	0	1	0	1	0	7
7	X_1	5	0	0	1	0	0	-1
0	y_1	11	1	-3	0	0	0	-22
0	y_3	3	0	-1	0	0	1	-7
	Z_j	35	0	9	7	9	0	56
	C_j-Z_j		0	-9	0	0	0	-56

Tablo 2.13 ve 2.15'den de görüldüğü gibi her iki çözümde tamsayılı çözümdür. Ancak problem maksimizasyon problemi olduğu için amaç fonksiyonu değeri daha yüksek olan $X_1=4$, $X_2=3$ noktası problem için optimum tamsayılı çözümü vermektedir.

Ele alınan problemin tüm çözümü Şekil 2.8'de gösterildiği gibidir.



Şekil 2.8. Problem 2.8'in Dal-Sınır Yöntemiyle Çözümü.

Şekil 2.8'den de görüldüğü gibi (3) nolu alt problemin uygun çözümü olmadığı için, (4) ve (5) nolu alt problemlerde de tamsayılı çözüm bulunduğu için tüm alt problemler kapatılmıştır ve geride yeniden alt setlere ayrılacak hiç bir problem kalmadığı için problemin çözümü tamamlanmıştır.

İlave edilen sınırlar, karar değişkeni değerleri ve amaç fonksiyonu değerleri Tablo 2.16'da gösterilmiştir.

Tablo 2.16. Problem 2.8 İçin İlave Edilen Sınırlar, Karar Değişkenleri, Amaç Fonksiyonu Değeri ve Çözüm Tipi.

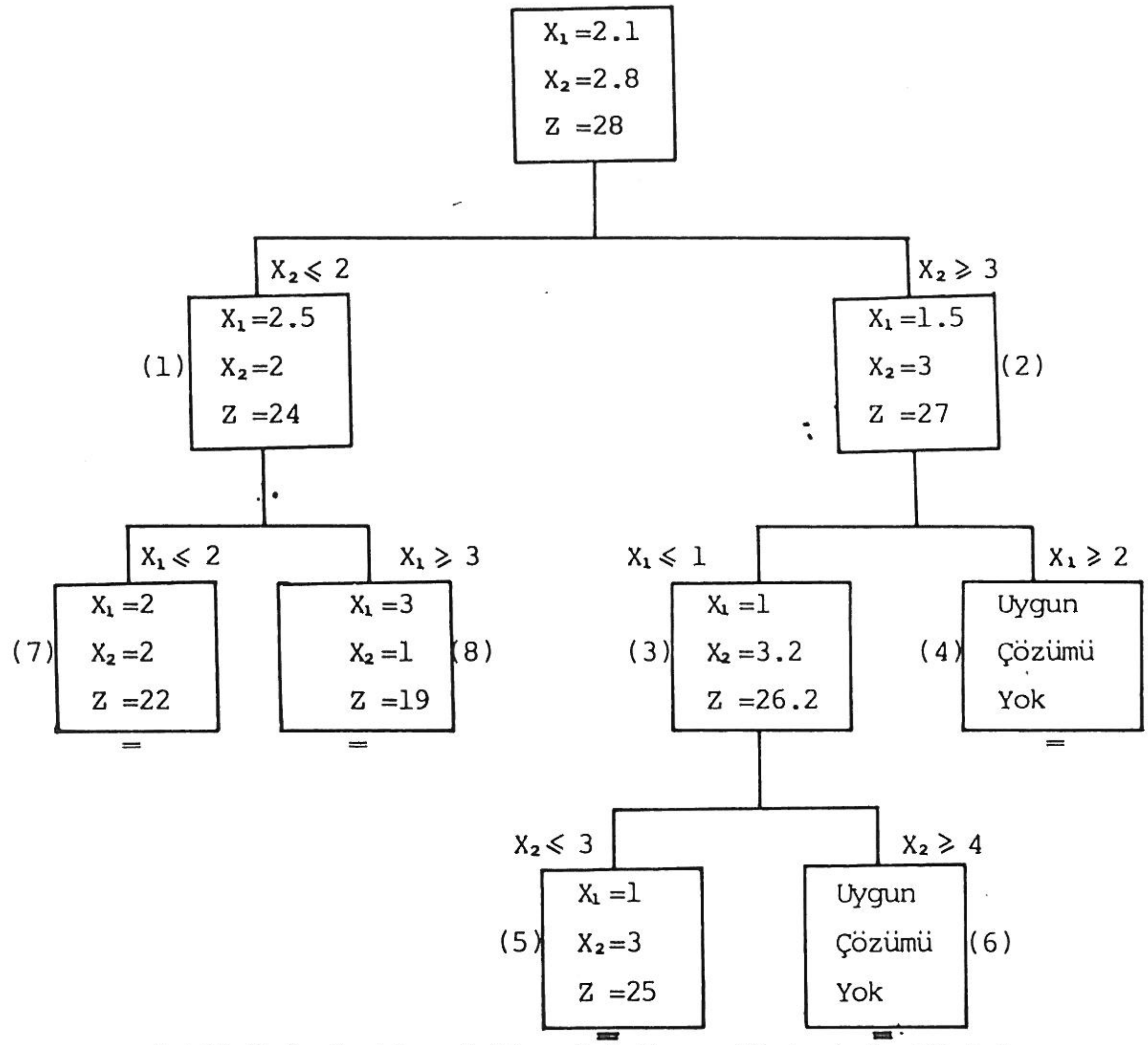
Alt Problemler (Alt Setler)	Z	X_1	X_2	Ç Ö Z Ü M İlave Edilen Sınırlar	Çözüm Tipi
1	63	7/2	9/2	-	Orijinal problem
2	59	32/7	3	$X_2 \leqslant 3$	Tam sayılı olmayan çözüm
3	-	-	-	$X_2 \geqslant 4$	Uygun çözüm yok
4	55	4	3	$\{X_2 \leqslant 3,\ X_1 \leqslant 4$	Tamsayılı çözüm(optimum)
5	35	5	0	$\{X_2 \leqslant 3,\ X_1 \geqslant 5$	Tamsayılı çözüm

2.4.4. Dal-Sınır Yönteminde İlk Olarak Çözülmesi Gereken Alt Problemin Belirlenmesi.

Ele alınan problem tamsayı olma koşulu dikkate alınmadan simpleks yöntemi ile çözülüp optimum sonuca ulaşıldıktan sonra, optimum çözüm tablosunda tamsayılı olmayan karar değişkenleri söz konusu ise, bu durumda amaç fonksiyonu katsayısı yüksek olan karar değişkeni öncelikle seçilerek ilave iki sınır oluşturulur ve böylece iki alt problem kurularak bunların çözümüne gidilir. Eğer her iki alt problemin çözümünden elde edilen sonuçlarda karar değişkenleri tamsayılı değilse alt problemlerden hangisinin amaç fonksiyonu değeri yüksek ise ilk olarak o alt problemin çözümü yapılır. Çünkü o alt problem ilk olarak çözüldüğünde öyle bir tamsayılı nokta elde edilir ki, bu noktanın amaç fonksiyonu değeri tamsayılı olmayan diğer alt problemin amaç fonksiyonu değerinden daha yüksek olur ve böylece tamsayılı olmayan o alt problemin kapatılması olasılığı ortaya çıkar. Böylece daha az iterasyonla optimum tamsayılı çözüm bulunmuş olur. Bu durum sayısal bir örnek ile aşağıda gösterilmiştir.

$$\begin{aligned} \text{Mak } Z &= 4X_1 + 7X_2 \\ \text{Sınırlar } \quad 2X_1 + X_2 &\leqslant 7 \\ X_1 + 3X_2 &\leqslant 10.5 \\ X_1,\ X_2 &\geqslant 0 \text{ ve tamsayı} \end{aligned} \qquad \text{Problem 2.9.}$$

Yukarıdaki problemin dal-sınır yöntemi ile çözümü Şekil 2.9'da gösterildiği gibidir.



Şekil 2.9. Problem 2.9'un Dal-Sınır Yöntemiyle Çözümü.

Şekil 2.9 'dan da görülebileceği gibi (1) ve (2) nolu alt problemlerden öncelikle (2) nolu alt problem çözülmelidir. Çünkü amaç fonksiyonu değeri (1) nolu alt problemin amaç fonksiyonu değerinden daha yüksektir. (2) nolu alt problemden oluşturulan (3) ve (4) nolu alt problemlerden ise (3) nolu alt problemin çözümü tamsayılı değildir. (4) nolu alt problemin ise uygun çözümü yoktur ve bu alt problem kapatılır. Şimdi (3) ve (1) nolu alt problemlerin amaç fonksiyonu değerleri karşılaştırılır. (3) nolu alt problemin amaç fonksiyonu daha yüksek olduğu için bu alt problemler yeniden alt problemlere ayrılır. Yeni sınırların ilavesiyle oluşan (5) nolu problem tamsayılı olduğu için, (6) nolu alt problem de uygun çözümlü olmadığı için kapatılır. Geride (1) nolu alt problem kalmıştır. Bu alt problemin amaç fonksiyonu değeri en son bulunan tamsayılı çözümün (5 nolu alt problemin) amaç fonksiyonu değerinden daha düşük değerli olduğu için bu problemi yeniden alt setlere ayırmanın anlamı yoktur. Çünkü (1) nolu alt problem yeniden alt problemlere ayrıldığında bulunacak tamsayılı çözümlerin amaç fonksiyonu değeri hiç bir zaman (1) nolu alt problemin amaç fonksiyonu değerinden yüksek olamayacak ve bu değerde (5) nolu alt problemin amaç fonksiyonu değerinden az olacağı için (1) nolu alt problem yeniden alt setlere ayrılmadan kapatılır.

Şimdi aynı problem üzerinde, oluşturulan alt problemlerin amaç fonksiyonu değerlerine bakmaksızın ve öncelikle de (1) nolu alt problemi çözdüğümüzü düşünelim. (1) nolu alt problemlerden oluşturulan (7) ve (8) nolu alt problemlerin her ikisi de tamsayılı olduğu için söz konusu problemler kapatılır. Ancak problemin çözümü tamamlanmadığı için (2) nolu alt problemin de çözülmesi gerekmektedir. (2) nolu alt problemden oluşturulan (3) ve (4) nolu alt problemler; (3) nolu alt problemlerden oluşturulan (5) ve (6) nolu problemler çözülerek problemin çözümü tamamlanır. Ancak orijinal problemin çözümünden oluşturulan alt problemlerin Z değerleri dikkate alınmadan çözüldüğünde (7) ve (8) nolu alt problemler gereksiz olarak çözülmekte ve bu alt problemler için oluşturulan tablolarda gereksiz olarak oluşturulmakta ve problemin çözüm süresi uzamaktadır. Fakat Z değerleri dikkate alındığında (7) ve (8) nolu problemin çözülmesine gerek olmayıp, optimum tamsayılı çözüme ulaşma daha kısa sürede olmaktadır.

BÖLÜM III

TAMSAYILI PROGRAMLAMA PROBLEMLERİNİN ÇÖZÜMÜ İÇİN SEZGİSEL YÖNTEMLER VE YENİ BİR YAKLAŞIM

3.1. SEZGİSEL YÖNTEM

Modern işletmelerin yönetimi kuramsal düzeyde oldukça karmaşıktır. Geçen 30-40 yılda modern işletmelerde ortaya çıkan çok sayıdaki problemlerin çözümünde kantitatif modellerin kullanımı ise gittikçe artmaktadır. Özellikle bilgisayarların işletmelere girmesi, kantitatif modellerin kullanımını daha da hızlandırmıştır. Bilindiği gibi çok sayıda işlem gerektiren problemler bilgisayarlar ile çok kısa sürede çözülebilmektedir. Fakat öyle problemler vardır ki, çok hızlı bilgisayarlarla bile çözümü çok uzun zaman almaktadır. Hem problemlerdeki bu güçlükleri gidermek amacıyla hem de problemlerin çözümünde zamandan tasarruf etmek, işlem sayısını en azlamak ve kolay anlaşılabilirliğini sağlamak için sezgisel yöntemler geliştirilmiştir.

3.1.1. Problemlerin Çözümünde Sezgisel Yöntem

Doğrusal, tamsayılı ve dinamik programlama problemlerinde uygulanan çözüm teknikleri oldukça karmaşık ve zaman alıcıdır ve problemlerin boyutunun büyümesi halinde ise hesaplama işlemi daha da güçleşir(1). Simpleks yöntemi problemin değişkenleri sayıca az olduğu durumda herhangi bir hesap makinesi yardımıyla elle çözülebilir. Fakat birçok pratik alandaki uygulamalarda bu şekilde problemi çözmek zor olmaktadır. Bunun sebebi problemin güçlüğü değil,kapsadığı matematiksel işlemlerin çok fazla olmasıdır(2). Örneğin dal-sınır yöntemi küçük ve orta büyüklükteki problemlerin çözümünde etkin sonuçlar verir, fakat çok büyük boyuttaki problemler için bu yöntem başarısızdır(3).

Örneğin 50 kalemden oluşan bir sipariş problemi için en iyi şiparişi belirleyecek bu problemde 50! olası çözüm vardır. 50! =3.04 x 10^{64} demektir. Bu problem için dal-sınır yöntemi uygulanacak olursa tüm çözümün çok az kısmı çözülmüş olacaktır ve problemin tamamının çözümü olanaksızdır. Saniyede 1.000.000 çözüm yapan hızlı bir bilgisayarla dahi bu işlemin çözümü $1.9x10^{49}$ yıl olacaktır(4).

Problemlerin çözümündeki bu güçlükleri gidermek amacıyla "Sezgisel Yöntem" adı verilen teknikler geliştirilmiştir.

Sezgisel yöntem gerçek durumu basite indirgeyerek sorunların çözümüne yararlı olmaktadır. Sezgisel yöntem optimizasyonu garanti etmemekle birlikte optimum sonuca ne kadar yakın olduğunu da belirtmez. Ancak optimum sonucun sağlanmasını araştıran bir yöntemdir(5).Sezgisel yöntemi optimal sonucu garanti etmeyen fakat problemin çözümü için oldukça kısa ve tatmin edici sonuç veren bir yöntem olarak düşünmek faydalıdır. Sezgisel yöntem problemlere iyi bir çözüm bulmak için bir denemedir(6). Optimum sonucu garanti etmemekle birlikte,sezgisel yöntem-

---

(1) David G.Dannenbring and Martin K.Starr,**Management Science:An Introduction**,Auckland: Mc Graw-Hill Inc.,1981,s.455.

(2) Alexander Henderson and Robert Schlaifer,"Matematiksel Programlama Tutarlı Karar Vermede İleri Bilgiler",Ahmet S.Talu,**Eskişehir İktisadi ve Ticari İlimler Akademisi**,Cilt 7,Sayı 1(Ocak 1971),ss.263-264.

(3) Dannenbring and Starr,a.g.e.,s.455.

(4) a.g.e.,s.456.

(5) Hüseyin Özgen,"Üretim Planlama ve Kontrol Sürecine İlişkin Analitik Yöntemler Üzerine Kuramsal Bir İnceleme",**Adana İktisadi ve Ticari İlimler Akademisi**,Sayı 5 (Mart 1976),ss.170-193.

(6) Dannenbring and Starr,a.g.e.,s.456.

ler yine de problemlerin çözümü için bir model olarak kullanılmaktadır. Sezgisel yöntemlerin uygulanması genellikle kolay ve hızlıdır.

3.1.2. Optimizasyon Problemlerinde Sezgisel Yöntemin Kullanılması

Bir çok matematiksel modellerin çözümü için sezgisel yöntemler geliştirilmiştir ve sezgisel yöntem, optimizasyon yöntemlerine alternatif bir yöntem olarak dikkate alınır. Örneğin doğrusal programlama problemlerinin simpleks yöntemiyle çözümünde bir sonraki tabloda hangi karar değişkeninin yer alacağı sezgisel olarak belirlenebilir(7). Maksimizasyon problemlerinde ilk simpleks tablodan sonra diğer simpleks tabloya geçecek olan değişken, amaç fonksiyonu katsayısı yüksek olan değişkendir.

Birim katkısı yüksek olan değişkenin seçilmesi yerine, toplam kâra katkısı daha yüksek olan değişken seçilirse, optimum sonuç bulununcaya kadar hesaplanan tablo sayısı daha az olabilir(8). Bunu aşağıdaki örnekte görmek mümkündür.

$$\begin{aligned} &\text{Mak } Z = 6X_1 + 4X_2 \\ &\text{Sınırlar } \quad 7X_1 + 3X_2 \leq 11 \qquad\qquad \text{Problem 3.1.} \\ &\qquad X_1, X_2 \geq 0 \end{aligned}$$

Problemde X_1 değişkeninin amaç fonksiyonu katsayısı daha yüksek olduğu için, öncelikle bu değişkenin çözüme girmesi gerekir. Ancak X_2 değişkeni X_1 değişkenine tercih edilmelidir. Çünkü X_1 değişkeninin birim katkısı yüksek iken, X_2'nin toplam kâra katkısı daha yüksektir. Böyle tek sınırlı problemlerde toplam kâra katkısı yüksek olan karar değişkeni seçilirse, hesaplanması gereken simpleks tablo sayısı azalır.

Problemde X_1'in birim katkısı 6, X_2'nin birim katkısı 4'dür. Birim katkısı yüksek olan X_1 öncelikle çözüme alınırsa, optimum çözüme

(7) a.g.e.,s.457.
(8) a.g.e.,ss.457-458.

üç tabloda ulaşır.

Birim katkı değil de, toplam kâra katkı dikkate alınırsa, X_2 değişkeni öncelikle çözüme girecektir.

X_1'in toplam kâra katkısı (11/7)x6=9.42

X_2'nin toplam kâra katkısı (11/3)x4=14.6

Böylece optimum sonuca, daha az iterasyonla ve buna paralel olarak da daha az işlem yapılarak ulaşılır. Toplam kâra katkısı yüksek olan X_2 öncelikle çözüme alınırsa, optimum çözüme iki tabloda ulaşılır.

Problemdeki sınır sayısı arttıkça bu kuralın uygulanması daima daha az iterasyonla optimum sonuca ulaşılacağını garanti etmeyebilir. Bunun üç sınıra sahip aşağıdaki maksimizasyon probleminde görmek olasıdır(9).

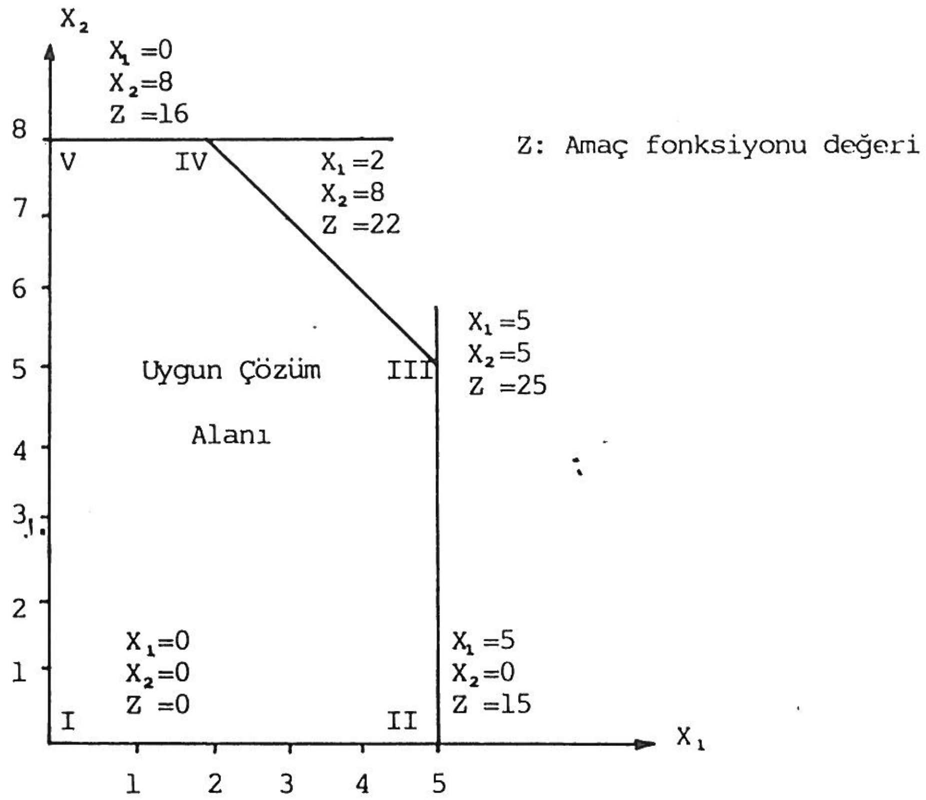
$$\begin{aligned} \text{Mak } Z &= 3X_1 + 2X_2 \\ \text{Sınırlar} \quad X_1 + X_2 &\leq 10 \\ X_1 &\leq 5 \\ X_2 &\leq 8 \\ X_1, X_2 &\geq 0 \end{aligned} \qquad \text{Problem 3.2.}$$

Problemin uygun çözüm alanı Şekil 3.1'de gösterilmiştir.

Standart karar değişkeni kuralı uygulandığında(birim katkısı yüksek olan) simpleks tablo I nolu köşe noktasından II nolu çözüm noktasına, daha sonra da III nolu çözüm noktasına hareket edecektir. Böylece üç simpleks tablo ile optimum sonuca ulaşılır.

Alternatif olarak (birim başına kâr) x (maksimum birim sayısı) değerinin en yüksek olduğu değişken seçimi kuralı uygulanırsa, bu durumda simpleks tablo I nolu çözüm noktasından V nolu çözüm noktasına sonra IV nolu çözüm noktasına, en sonunda da III nolu çözüm noktasına hareket edecektir. Bu kuralın seçilmesi ile optimum sonuca dört simpleks tablo ile ulaşılır ve bir simpleks tablo fazladan hesaplanmış olur.

(9) a.g.e.,s.458.



Şekil 3.1. DP Problemlerinde Seçilen Karar Değiş-kenlerine Bağlı Olarak Çözümün İzlediği Rota.

Kaynak: David G.Donnenbring and Martin K.Starr,**Management Science:An Introduction**,Auckland:Mc Graw-Hill Inc., 1981,s.459.

Problem 3.1 ve 3.2 karışlaştırıldığında, her iki kuralın da sezgisel olduğu söylenebilir.

3.2. TAMSAYILI PROBLEMLERİN ÇÖZÜMÜ İÇİN SEZGİSEL YÖNTEMLER

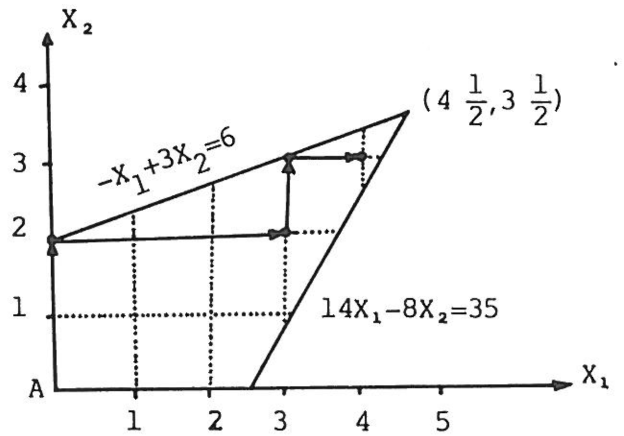
Optimum tamsayılı noktanın elde edilmesi için sezgisel yöntemler geliştirilmiştir. Taha'nın kitabında bu sezgisel yöntemlerden iki tanesi açıklanmıştır. Yöntemlerden birincisi uygun çözüm alanı içerisindeki alternatif tamsayılı noktalardan bazılarının incelenmesini gerektirmektedir. Hangi noktaların nasıl inceleneceği Yöntem I'de ayrıntılı olarak anlatılmıştır. Geliştirilen ikinci sezgisel yöntemde ise, orijinal problemin sağ taraf sabitlerinin değeri değiştirilip,yeni değerlerle problemin çözümü yapılmakta ve çözüm sonuçları en yakın tamsayıya yuvarlanmaktadır. Sağ taraf sabitleri için yeni değerlerin nasıl bulunduğu ve çözümün nasıl yapıldığı Yöntem II'de belirtilmiştir.

3.2.1. Yöntem I

Echoles ve Cooper tarafından 1968 yılında ortaya konmuştur (10). Yöntem çözüme orijin noktasından başlamaktadır. Bu noktadan itibaren amaç fonksiyonu katsayısı yüksek olan değişken uygun çözüm alanı içinde alacağı en yüksek tamsayılı değere kadar yükseltilir. Daha sonra diğer değişken seçilerek bu değişken değeri de uygun çözüm alanı içerisindeki en yüksek tamsayılı değere kadar yükseltilir. İşlemlere en iyi amaç fonksiyonu değeri bulununcaya kadar devam edilir. Yöntemin uygulanışı aşağıdaki sayısal örnek ile gösterilmiştir(11).

$$\begin{aligned} \text{Mak } Z &= 7X_1 + 9X_2 \\ \text{Sınırlar } & -X_1 + 3X_2 \leqslant 6 \\ & 14X_1 - 8X_2 \leqslant 35 \\ & X_1, X_2 \geqslant 0 \text{ ve tamsayı} \end{aligned} \qquad \text{Problem 3.3.}$$

Problemin grafiği Şekil 3.2'de gösterilmiştir.



Şekil 3.2. Yöntem I'in Uygulanışı.

Kaynak: Hamdy A.Taha, **Integer Programming: Theory Applications and Computations**, New York: Academic Press Inc., 1975, s.348.

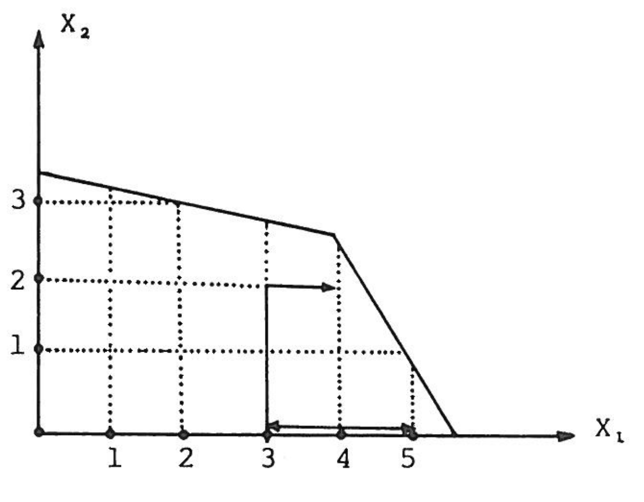
---

(10) Hamdy A.Taha, **Integer Programming: Theory Applications and Computations**, New York: Academic Press Inc., 1975, s.348.

(11) a.g.e.

Çözüme A noktasından başlanır ($X_1=0$, $X_2=0$). Daha sonra amaç fonksiyonu katsayısı yüksek olan X_2 değişkeni 6/3=2 değerine yükseltilir. Böylece (0,2) noktası elde edilir. Sonra $X_2=2$ değerinde sabit iken X_1(35+2x8)/14=3.64, 3 değerine kadar arttırılır. Bu işlemlerden sonra (3,2) noktası elde edilir. Daha sonra $X_1=3$ iken $X_2=3$ ve en sonunda da $X_1=3$ ve $X_2=3$ iken $X_2=3$ değerinde sabit tutulup $X_1=4$ değerine yükseltilir. Böylece (4,3) noktası elde edilir. En son elde edilen bu nokta problem için optimum tamsayılı noktadır.

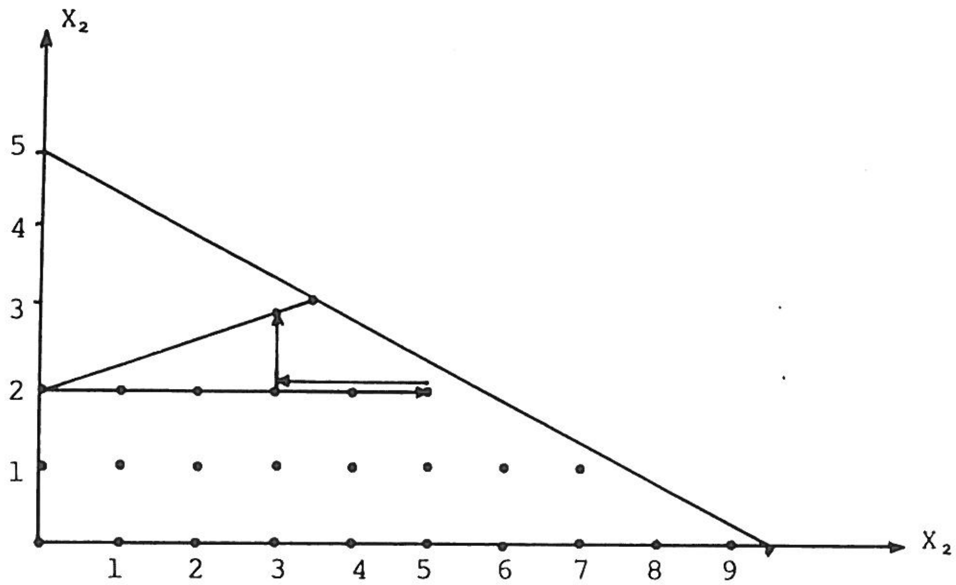
Yöntem$_1$bazı problemlerde yukarıda olduğu gibi iyi sonuç vermez. Şekil 3.3 yöntemin muhtemel zorluğunu göstermektedir.



Şekil 3.3. Yöntem I'in Muhtemel Zorluğu.
Kaynak: Hamdy A.Taha,a.g.e.

Şekil 3.3'de X_1 karar değişkeninin amaç fonksiyonu değeri yüksek olduğu kabul edilmiştir.Yine (0,0) noktasında çözüme başlanmaktadır. X_1'in uygun çözüm alanı içerisinde alacağı maksimum değer beş'-tir. $X_1=5$ iken X_2 değişkeninin değerini artırmak mümkün değildir.Böyle durumlarda sözkonusu noktadan geriye gidilmesi gerekmektedir. Burada önemli olan, ne kadar geriye gidileceğidir. Geriye gidilmedeki kural, karar değişkeninin uygun çözüm alanı içinde alacağı maksimum değerinin ikiye bölünmesidir. Eğer bölüm sonucu kesirli değer ise, bu değerin yukarıya yuvarlanmasıdır(12). Örneğin X_1'in maksimum değeri altı ise geriye gidilmesi halinde durulacak nokta $X_1=3$ noktasıdır (6/3=2). X_1' in alacağı maksimum değer beş ise geriye gidilmesi halinde durulacak nokta yine $X_1=3$ noktasıdır. Çünkü 5/2=2.5 değeri elde edilir ve yukarı yuvarlandığında $X_1=3$ noktasına ulaşılır.

Yöntem I algaritması tam olarak açıklanmamıştır. Bu yöntemin en büyük tehlikesi en iyi tamsayılı noktanın inceleme dışında bırakılma olasılığının bulunmasıdır. Örneğin aynı problemin (Problem 3.3) sadece ikinci sınırının değiştirilmesiyle en iyi tamsayılı noktanın incelenmediği görülür. Şekil 3.4 bu durumu göstermektedir.



Şekil 3.4. Yöntem I'in Çalışmadığı Bir Problem.

Şekil 3.4'e Yöntem I uygulandığında (0,0) noktasından sonra (0,2) noktasına gelinir. Bu noktada $X_2=2$de sabit iken $X_1=5$ değerine çıkarılır. $X_1=5$, $X_2=2$ noktasında X_2 değerini arttırma olanağı olmadığı

(12). a.g.e.,s.350.

için geriye gidilir ve (3,2) noktasına gelinir. Daha sonra X_2 değeri arttırılarak (3,3) noktası elde edilir. Bu noktadan sonra incelenecek nokta olmadığı için açıklamalar gereğince bu noktalardan herhangi bir tanesinin en iyi tamsayılı nokta olması gerekir. Ancak problem çözüldüğünde, en iyi tamsayılı noktanın (9,0) noktası olduğu görülür. Çünkü (9,0) noktası için amaç fonksiyonu değerleri Z=63 olup, incelenen (0,0), (0,2), (5,2),(3,3) noktalarının amaç fonksiyonu değeri (9,0) noktasının amaç fonksiyonu değerinden daha düşüktür.

Bu örnekten de görüldüğü gibi yöntem en iyi tamsayılı noktayı araştırma alanı dışında bırakabilmektedir.

3.2.2. Yöntem II

Yöntem Hillier tarafından 1969 yılında ortaya çıkarılmıştır ve yöntem doğrudan araştırma tekniğine dayalıdır(13). Temel farklılık, bu metod sürekli optimuma yakın olan başlangıç uygun çözümü araştırmasıdır. R,boş değişkenleri hariç tutan sürekli optimum nokta X^* deki temel değişkenlerin kümesi (seti) olsun. X^* ın kendisiyle ilişkili p eşitliklere sahip olduğunu varsayalım. Bu eşitlikler boş değişkenlerin sıfıra eşit olduğu sınırlar yardımıyla tanımlanır. Bu eşitlikleri aşağıdaki gibi tanımlayalım(14).

$$b_i' = b_i - \frac{1}{2} \, |R|^{1/2}, \quad i=1,2,\ldots,p$$

Burada b_i orijinal problemdeki i.satırın sağ taraf sabiti, $|R|$ ise R - deki eleman sayısıdır.

X', b_i yerine b_i' yerleştirilmesiyle oluşan doğrusal programlama probleminin çözümü olsun. Eşitliğin yeni sağ tarafı çözüm noktası X' ın yuvarlandığı zaman daima X^* noktasından geçen sınırları sağlaya-

(13) a.g.e.
(14) a.g.e.

cak bir özelliğe sahiptir. Fakat yine de yuvarlanmış olan değerler sınırları sağlamayabilir. Ancak yuvarlanmış değer sınırları sağlıyorsa, başlangıç uygun çözümü mümkündür. Yuvarlanmış çözüm uygun değilse, o zaman X' ve X^* birleştiren doğru parçasındaki noktaların tek tek incelenmesi tavsiye edilir. Yine de optimum sonucu garanti etmeyebilir.

Yöntemin uygulanışını Yöntem I'deki örnek üzerinde gösterelim. Problemde $R=\{X_1, X_2\}$ 'dir. Problemin sınırları

$$-X_1 + 3X_2 \leq 6$$
$$14X_1 - 8X_2 \leq 35$$

şeklinde idi. Problemin çözümünde $X^*=(9/2,\ 7/2)$ değerindedir.

$$\begin{pmatrix} b_1' \\ b_2' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 35 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \sqrt{2} \\ \frac{1}{2} & \sqrt{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5.29 \\ 34.29 \end{pmatrix}$$

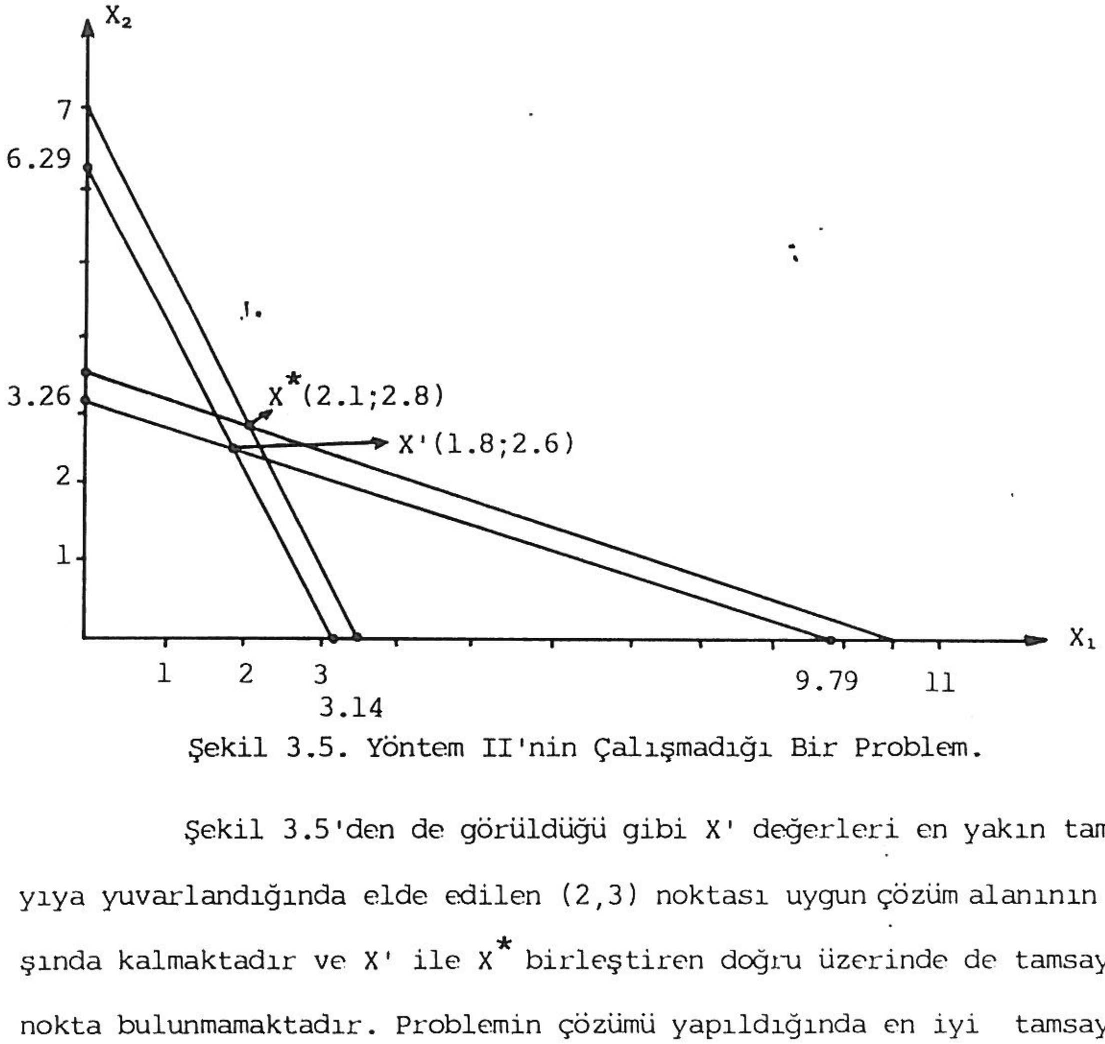
elde edilir. Eşitliğin yeni sağ taraf sabitleri olan 5.29 ve 34.29 değerleri probleme yerleştirilip çözülürse $X'=(4.26,\ 3.18)$ elde edilir ve yuvarlandığında (4,3) noktası en iyi tamsayılı noktayı verir.

Yeni sağ taraf sabitleri ile problem çözüldüğünde elde edilen X' değerleri en yakın tamsayıya yuvarlandığında elde edilen noktalar uygun çözüm alanının dışında olabilir. Bu durumda önerilen yaklaşım X' ve X^* birleştiren doğru üzerindeki noktaların tek tek incelenmesidir. Ancak her zaman en iyi sonucu garanti etmemektedir. Bunu aşağıdaki problemde görmek mümkündür.

$$\begin{aligned} &\text{Mak } Z \quad 4X_1 + 7X_2 \\ &\text{Sınırlar } 2X_1 + X_2 \leq 7 \\ &\qquad X_1 + 3X_2 \leq 10.5 \\ &\qquad X_1,\ X_2 \geq 0 \text{ ve tamsayı} \end{aligned} \qquad \text{Problem 3.4.}$$

$X^*=(2.1;2.8)$ ve $X'=(1.8;2.6)$ değerindedir. X' değerleri en yakın tamsayıya yuvarlandığında (2,3) noktası elde edilir ki bu değerler sınırları sağlamamakta ve dolayısıyla uygun çözüm alanının dışında kalmaktadır. X^* ve X' birleştirilmesiyle oluşan doğru parçası üzerinde de problem için uygun tamsayılı nokta elde edilememektedir.

Problemin grafiği aşağıda gösterilmiştir.



Şekil 3.5. Yöntem II'nin Çalışmadığı Bir Problem.

Şekil 3.5'den de görüldüğü gibi X' değerleri en yakın tamsayıya yuvarlandığında elde edilen (2,3) noktası uygun çözüm alanının dışında kalmaktadır ve X' ile X^* birleştiren doğru üzerinde de tamsayılı nokta bulunmamaktadır. Problemin çözümü yapıldığında en iyi tamsayılı noktanın (1,3) noktası olduğu görülür.

3.3. TAMSAYILI PROGRAMLAMA PROBLEMLERİNİN ÇÖZÜMÜ İÇİN YENİ BİR SEZGİSEL YÖNTEM OLUŞTURULABİLİR Mİ?

3.3.1. Tamsayılı Problemlerin Çözümünde Kullanılan Yöntemlerin Fayda ve Sakıncaları

Tamsayılı programlama problemlerinin çözümünde ikinci bölümde de belirtildiği gibi,dört yöntem kullanılmaktadır. Bunlar; a)Yuvarlama Yöntemi, b) Tam Tarama Yöntemi, c) Kesen-Düzlem Yöntemi ve d)Dal-

Sınır Yöntemleridir. Ancak tamsayılı problemlerin çözümü için geliştirilen sezgisel yöntemleri de ayrı bir grup olarak kabul edersek, çözüm yöntemlerinin beş sınıfta toplanabileceğini görürüz.

Yöntemlerden ilki olan yuvarlama yönteminde,doğrusal programlama problemlerinin çözüm sonuçları en yakın tamsayıya yuvarlanır. Bu yöntem optimum tamsayılı noktayı garantilemediği gibi, birçok problemde de hem problemin mevcut sınır koşullarından en az birini sağlamamakta hem de optimum sonuçtan uzak olmaktadır.

Yuvarlama yönteminde optimum tamsayılı noktanın bulunabilmesi için bazı yaklaşımlar öne sürülmüştür. Bu yaklaşımlardan bir tanesinde yuvarlama ile elde edilen noktadan itibaren karar değişkeni değerlerinin değerleri birer birim azaltılıp-arttırılmaktadır. Böylece, yuvarlanarak elde edilen noktadan başka dört ayrı tamsayılı nokta daha elde edilmektedir. Bu noktaların bazıları uygun çözüm alanı içerisinde olmasına karşın, yine de optimum tamsayılı noktayı sağlamamaktadır.Optimum tamsayılı noktanın bu elde edilen noktaların dışında da olabileceği dikkate alınırsa, bu yaklaşımın tüm problemler için genellenemeyeceği ortaya çıkar.

Yuvarlama yönteminde kullanılan bir diğer yaklaşımda yuvarlanarak elde edilen noktadan itibaren önce herhangi bir karar değişkeninin değeri, sonra diğerinin değeri bir birim arttırılmakta,daha sonra da her iki karar değişkeninin değeri birer birim artırılmaktadır. Böylece yuvarlanan nokta da dahil olmak üzere dört nokta elde edilmektedir. Yuvarlanarak elde edilen noktanın mevcut sınır koşullarından en az birini sağlamadığı herhangi bir problemde değişkenin değeri arttırılarak elde edilen noktaların da mevcut sınır koşulunu sağlamayacağı açıktır. Elde edilen noktalar sınır koşullarını sağlasa bile, birinci yaklaşımda da açıklandığı gibi optimum tamsayılı noktanın elde edilen bu noktalar dışında olma olasalığının bulunması nedeniyle yaklaşımın tüm problemler için geçerli olduğu söylenemez.

Tamsayılı problemlerin çözümünde kullanılan ikinci bir yöntem, uygun çözüm alanı içerisindeki tüm alternatif tamsayılı noktaların ayrı ayrı amaç fonksiyonu değerlerinin bulunması ve bunlar arasında değeri en yüksek olan tamsayılı noktanın seçilmesidir ki bu nedenle de yönteme Tam Tarama Yöntemi denilmektedir. İki karar değişkenli ve iki sınırlı bir optimizasyon probleminde bile uygun çözüm alanı içerisinde çok sayıda incelenecek alternatif çözüm noktalarının bulunma olasılığı dikkate alınırsa, yöntemin problem çözmedeki güçlüğü ortaya çıkar. Tam tarama yöntemi etkin bir yöntem olmamasına karşın optimum sonucu garantilemektedir.

Tam tarama yönteminin önerdiği gibi uygun çözüm alanı içerisindeki tüm alternatif noktaların tek tek incelenmesine gerek yoktur. Bazı noktaların diğerlerine göre daha iyi olduğu ve daha yüksek amaç fonksiyonu değeri sağlayacağı açıktır. Böylece incelenmesi gereken alternatif çözüm sayısında bir azalma olmakta ve çözüm süresi de azalmaktadır.

Tamsayılı problemlerin çözümünde kullanılan üçüncü yöntem Kesen-Düzlem yöntemidir. Bu yöntemde probleme "Gomary Kesen-Düzlem Koşulu" adı verilen sınırlar ilave edilerek, uygun çözüm alanı daraltılarak optimum tamsayılı nokta bulunmaya çalışılır.Optimum çözüm bulunana kadar da her seferinde probleme yeni sınırlar ilave edilir.Yeni sınırların ilavesi yeni tabloların oluşmasını gerekli kılmakta ve yeni oluşan tablolara dual simpleks yönteminin uygulanması nedeniyle de hesaplanması gereken tablo sayısında artış söz konusu olmaktadır. Hem tablo sayısında hem de yeni sınırlara ilave edilen boş değişkenler sonucunda tablolardaki satır ve sütun sayısının artması problemin çözüm süresinin uzamasına neden olmaktadır. Ayrıca yöntem uygun çözüm alanını küçük parçalara ayırdığı için optimum tamsayılı nokta elde edilene kadar ilave edilen sınır sayısı da buna paralel olarak çok sayıda olmaktadır. Bundan başka optimum çözüm bulunana kadar ne kadar sınırın ilave edileceğinin bilinememesi yöntemin bir diğer sakıncasını oluşturmaktadır. Kesen-düzlem yöntemi saf ve karma tamsayılı problemler üzerinde ayrı ayrı uygulanması, çözüme girecek karar değişkeninin belirlenmesi, değişken seçimi belirlendikten sonra o değişkene ait satır vektörü üzerinde tamsayılı ve kesirli kısımların ayrılması çok uzun işlemler gerektirmektedir. Bundan dolayı işlem süresi açısından yöntemin etkin bir yöntem olduğu söylenemez. Fakat yöntem optimum tamsayılı noktayı garanti etmektedir.

Tamsayılı problemlerin çözümünde kullanılan dördüncü yöntem dal-sınır yöntemi olup, kesen-düzlem yöntemi ile birlikte uygulamada en çok kullanılan yöntemleri oluşturmaktadır. Yöntem hem saf hem de karma tamsayılı problemler için aynı şekilde uygulanmaktadır.Problemin çözümü için yine ilave sınırlar oluşturulmaktadır.Sınırlar,kesirli karar değişkenleri için bir alt bir de üst sınır oluşturularak probleme ilave edilerek, problemin çözümü yapılmaktadır. Dal - sınır yönteminde ilave sınırlar ile oluşturulan alt problemlerden amaç fonksiyonu değeri yüksek olan alt problem öncelikle çözülerek gereksiz sınırlardan ve bu sınırlar için hesaplanması gereken tablo ve işlemlerinden tasarruf sağlanmaktadır. Kesen-düzlem yönteminde olduğu gibi ilave sınırlar,ilave simpleks tabloların oluşmasına neden olmaktadır. Her bir ilave sınırda tablodaki satır ve sütun sayısı artması ve dual simpleks yönteminin uygulanması sonucunda problemin çözüm süresi uzamaktadır. Böyle olmasına karşın bu yöntemde optimum tamsayılı sonucu garantilemektedir.

Sezgisel yöntemlerden ilki olan,Echoles ve Cooper tarafından bulunan ve Yöntem I olarak bilinen yöntemde tam tarama yönteminde olduğu gibi problemin simpleks yöntemi ile çözümü yapılmamaktadır.Tam tarama yönteminden farkı ise,uygun çözüm alanı içerisindeki alternatif tamsayılı noktaların tamamı incelenmeyip, belirli noktaların değerlendirilmesi ile optimum çözüm bulunmaya çalışılır.Problemin hem DP problemi olarak çözülmemesi hem de tam tarama yönteminde olduğu gibi tüm noktaların ayrı ayrı değerlendirilmemesi nedeniyle çözüm süresi kısa olmaktadır. Ancak bu yöntemde incelenen belirli noktalar daima tüm problemler için en iyi nokta olmayıp optimum çözüm bu noktaların dışındaki herhangi bir tamsayılı noktada olabilmektedir. Yöntemin problemin çözümüne orijin noktasından başlaması bir diğer sakıncasını oluşturmaktadır. Eğer problemin çözümüne optimum sonucu garanti eden dal-sınır ve kesen-düzlem yöntemlerinde olduğu gibi DP probleminin optimum sonucundan başlarsa, daha az nokta inceleyerek optimum tamsayılı noktaya ulaşılabilir.

Sezgisel yöntemlerden ikincisi olan,Hillier tarafından bulunan ve Yöntem II olarak bilinen bu yöntemde orijinal problemdeki sınırların sağ taraf sabitleri değiştirilerek, problem tamsayılı olma koşulu dikkate alınmadan DP problemi olarak çözülmekte ve elde edilen kesirli değerler en yakın tamsayılı değere yuvarlanarak, optimum çözüm bulunmaktadır. Fakat problemin çözümünden elde edilen kesirli değerler en yakın tamsayıya yuvarlandığında uygun çözüm alanının dışında olabilir. Bu durumda orijinal problemin çözüm noktası ile sağ taraf sabitlerinin değiştirilmesiyle çözülen problemin çözüm noktasını birleştiren doğru üzerindeki noktaların ayrı ayrı incelenmesi gerekmektedir. Böylece iki ayrı problemin oluşturulması ve bunların ayrı ayrı çözülmesi gerekmektedir. İşlem süresi dal-sınır ve kesen-düzlem yöntemlerinde olduğu gibi uzun olmamakla beraber,yöntemin daima optimum tamsayılı çözümü sağlayacağı söylenemez.

Dal-sınır ve kesen-düzlem yöntemlerinde olduğu gibi çok sayıda işlemi gerektirmeyen, tam tarama yönteminde olduğu gibi uygun çözüm alanı içerisindeki tüm alternatif tamsayılı noktaların incelenmesini gerekli kılmayacak ve yuvarlama yöntemindeki güçlükleri ortadan kaldırabilecek yeni bir sezgisel yöntem geliştirilebilir mi? Bu soruya cevap aranırken problemin doğrusal programlama problemi olarak çözülüp çözüm sonuçlarının aşağıya doğru yuvarlanması ile bu noktadan orijin noktasına çizilen doğruyu köşegen kabul eden dikdörtgen dışındaki alanlarda yer alan tamsayılı noktaların, tamsayılı programlama problemleri için optimum sonuç vereceği düşünülmüştür. Daha sonra bu alanın en az adımda tamsayılı çözümü bulacak şekilde taranmasını sağlayacak bir yöntem arayışına gidilmiştir.

3.3.2. Önerilen Sezgisel Yöntem

Önerilen sezgisel yöntem, tamsayılı programlama problemlerinin çözümü için kullanılan diğer yöntemlerin bazı özelliklerinden yararlanılarak ortaya çıkarılmıştır. Yöntem problemin çözümüne tamsayılı olma koşulu aranmaksızın çözülen DP probleminin optimum çözümü ile başlamaktadır. Bu yönü ile hem dal-sınır hem de kesen-düzlem yöntemlerine benzemektedir.Ancak bu iki yöntemde olduğu gibi çözüm sonuçları kesirli olan karar değişkenleri için ilave sınırlar oluşturulmamakta ve bu nedenle de ilave simpleks tablolara ve bu tablolardaki işlemlere gerek kalmamaktadır.

Yöntem, yuvarlama yöntemi temeline de dayanmaktadır. Bu yöntemde olduğu gibi önerilen yöntemde de problem DP problemi olarak çözülmekte ve kesirli karar değişkeni sonuçları tamsayıya yuvarlanmaktadır. Ancak kesirli sonuçlar en yakın tamsayıya yuvarlanmayıp aşağıya doğru yuvarlanmaktadır. Aşağıya doğru yuvarlanan noktanın uygun çözüm alanı içerisinde olması için, problemdeki sınırların tamamının($\leqslant$) biçiminde ve tüm katsayılarında pozitif değerli olması gerekmektedir. Aşağıya doğru yuvarlanan nokta tüm problemlerde optimum sonucu sağlamayıp bu noktaların dışında diğer alternatif noktalarında tek tek değerlendirilmesini gerekli kılmaktadır. Yöntem bu yönü ile de tam tarama yöntemine benzemektedir. Fakat tam tarama yönteminde olduğu gibi uygun çözüm alanı içerişindeki tüm alternatif noktaların değerlendirilmesi gerekmemektedir. Aşağıya doğru yuvarlanarak elde edilen nokta, bu noktadan karar değişkenlerine eksenlerine çizilen dikmelerin oluşturduğu alanın köşe noktasında yer aldığı için aşağıya doğru yuvarlanarak elde edilen nokta alanda yer alan tüm noktalardan daha iyidir.Diğer bir deyişle, bu nokta alandaki diğer tüm noktalardan daha yüksek amaç fonksiyonu değerine (Z) sahiptir. Önerilen sezgisel yöntemde incelenecek diğer noktalar ise, eksenlere çizilen dikmelerin oluşturduğu alan dışında bulunan ve diğerlerine göre daha iyi Z değeri sağlayan noktalardır.

Yatay eksende X_1 ,dikey eksende X_2 karar değişkeni gösterildiğinde aşağıya doğru yuvarlanarak elde edilen noktanın üst kısmında kalan alan (X_2 ekseni yönünde oluşan alan) üst bölge, altında kalan alan (X_1 ekseni yönünde oluşan alan) alt bölge olarak belirtilmektedir. Aşağıya doğru yuvarlanarak elde edilen noktada dahil olmak üzere alt ve üst bölgede yer alan ve diğerlerine göre daha iyi Z değerini veren noktalar incelendiğinde, incelenen noktalar içinde en yüksek Z değerine sahip olan nokta optimum tamsayılı noktadır. Alt ve üst bölgede yer alan ve daha iyi Z değerine sahip noktalar tarandığında problem için optimum tamsayılı noktanın bulunması daima garanti edilmiş olur. İnceleme yapılan problemlerin çoğunda optimum tamsayılı nokta amaç fonksiyonu katsayısı yüksek olan karar değişkeni yönündeki alanda oluştuğu için önerilen sezgisel yöntem, Echoles ve Cooper tarafından bulunan Yöntem I de mantığına da dayalıdır. Yöntem I'de problemin çözümüne amaç fonksiyonu katsayısı yüksek olan karar değişkenlerine ait eksen üzerinde başlanmaktadır. Önerilen sezgisel yöntemde de amaç fonksiyonu katsayısı yüksek olan karar değişkeni yönünde optimum tamsayılı nokta aranmaktadır. Yöntem I'den farkı ise, önerilen sezgisel yöntemde problemin DP problemi olarak çözülmesi gerekmektedir. Ayrıca problemin çözümüne Yöntem I'de olduğu gibi orijin noktasından başlamayıp, optimum tamsayılı sonucu garanti eden dal - sınır ve kesen-düzlem yöntemlerinde olduğu gibi kesirli sonuçlardan başlanmaktadır.

3.3.3. Önerilen Sezgisel Yöntemin Varsayımları

Önerilen sezgisel yöntemin uygulanabilmesi için bazı varsayımlar ortaya konmuştur. Bu varsayımlar yöntemin kullanımını kolaylaştırmak için konulmuş olup, konu üzerinde yapılan çalışmalar arttıkça yumuşatılabileceği ve hatta varsayımlardan bazılarının kaldırılabileceği kanısındayız.

Önerilen sezgisel yöntemin uygulanabilmesi için problemdeki sınırların tamamının küçük-eşit biçimde olması ($\leqslant$) gerekmektedir. Ayrıca problemdeki karar değişkenlerinin katsayıları da pozitif olmalıdır. Çünkü, aşağıya yuvarlanarak elde edilen nokta ancak bu özellikteki problemlerde uygun çözüm alanının içerisinde olmaktadır. Sınırların hepsinin ($\leqslant$) biçiminde olmasına karşın, sınırların herhangi birinde negatif katsayılı değişken bulunduğu zamanda da yuvarlama işlemi sonucu elde edilen nokta bazı problemlerde uygun çözüm alanı içinde olmasına karşın, tüm problemler için böyle olacağı garanti edilemez. Problemdeki sınırlar büyük eşit (⩾) veya eşitlik (=) biçiminde de olabilir ve önerilen sezgisel yöntem bu tip sınırlara sahip problemlerde de çalışabilir.Fakat problemde inceleme yapılacak başlangıç tamsayılı noktanın tesbiti güç olabilir. Eşitlik biçiminde sınıra sahip bir problem diğer sezgisel yöntemlerde de sorunlar yarattığı için önerilen yöntemde (⩾) ve (=) biçimindeki sınırlar çalışma alanı dışında tutulup çalışma alanına, tüm sınırları (⩽) biçiminde olan ve katsayıları pozitif olan iki karar değişkenli maksimizasyon problemleri alınmıştır. Karar değişkeni sayısı iki ile sınırlanmasına karşın, problemdeki sınır sayısında herhangi bir tahdit yoktur.

Tamsayı olma koşulu dikkate alınmadan çözülen herhangi bir DP problemi çoklu çözüme sahip bir problem de olabilir. Bilindiği gibi çoklu çözüm amaç fonksiyonu ile sınırlardan herhangi birinin eğimlerinin eşit olması halinde ortaya çıkmaktadır ve problemin tek çözümü olmayıp uygun çözüm alanının iki ayrı köşe noktası aynı amaç fonksiyonu değerini vermektedir. Bu özellikteki bir problem içinde önerilen sezgisel yöntem uygulanabilir. Uygun çözüm alanının iki ayrı köşe noktasındaki kesirli karar değişkeni sonuçları aşağıya doğru yuvarlanarak ya tek bir tamsayılı nokta ya da iki ayrı tamsayılı nokta elde edilir. Eğer tek bir nokta elde edilmişse incelenmesi gereken alan,bu noktadan eksenlere çizilen dikmelerin oluşturduğu alan dışında kalan ve amaç fonksiyonu katsayısı yüksek olan karar değişkeni yönünde oluşan alandır. Bu alandaki incelenmesi gereken noktalar ise diğerlerine göre daha yüksek amaç fonksiyonu değeri sağlayan noktalardır. Eğer çözüm sonuçlarının aşağıya doğru yuvarlanmasıyla iki ayrı nokta elde edilmişse bu noktaların hangisinden karar değişkeni eksenlerine dikmeler çizilerek alt ve üst bölge oluşturulacaktır sorunu ile karşılaşılır.Problemde X_1 değişkeninin amaç fonksiyonu katsayısı yüksek ise aşağıya doğru yuvarlanarak elde edilen noktalardan X_1 değişkeni değerinin küçük olduğu nokta dikkaalınır ve eksenlere dikmeler çizilerek alt ve üst bölgeler oluşturulur. Eğer problemdeki X_2değişkeninin amaç fonksiyonu katsayısı yüksek ise, bu durumda da aşağıya doğru yuvarlanarak elde edilen noklardan X_2 değişkeni değerinin küçük olduğu nokta dikkate alınır ve eksenlere çizilen dikmeler sonucunda alt ve süt bölgeler oluşturulur. Bölgeler oluşturulduktan sonra incelenmesi gereken alan ve noktaların belirlenmesi tek bir nokta elde edilmesi halinde olduğu gibidir.

Ele alınan problemde karar değişkenlerinin amaç fonksiyonu katsayıları eşit olabilir.Bu özellikteki problemlerde de önerilen sezgisel yöntem uygulanabilir.Fakat alt ve üst bölgelerin belirlenmesinde farklı yöntem uygulanır. Tamsayılı problemler için uygun çözüm alanını belirleyen karar değişkenlerinin eksenler üzerindeki amaç fonksiyonu değeri,alt ve üst bölgelerin belirlenmesinde bize yardımcı olur. Eğer X_1ekseni üzerindeki uygun çözüm alanını belirleyen köşe noktasının amaç fonksiyonu değeri,X_2ekseni üzerindeki uygun çözüm alanını belirleyen köşe noktasının amaç fonksiyonu değerinden daha yüksek ise aranması gereken bölge alt bölgedir.Buna karşın,eğer X_2 ekseni üzerindeki uygun çözüm alanının köşe noktasının amaç fonksiyonu değeri,X_1 ekseni üzerindeki uygun çözüm alanının köşe noktasının amaç fonksiyonu değerinden daha yüksek ise üst bölgenin aranması gerekir.Amaç fonksiyonu katsayılarının eşit olduğu problemlerde eğer uygun çözüm alanının köşe noktalarının amaç fonksiyonu değerleri birbirine eşit ise istenilen bir yön seçilebilir.Böylece bölge belirlendikten sonra aranması gereken noktalar ise diğerlerine göre daha iyi amaç fonksiyonu değeri sağlayan noktalardır.Bu özellikteki problemlerde aynı amaç fonksiyonu değerini sağlayan birden fazla alternatif tamsayılı noktaların bulunabilme olasılığı dikkate alınırsa, bu noktalardan herhangi bir tanesi problemin optimum tamsayılı çözümü olacaktır.

Amaç fonksiyonu katsayıları arasındaki farkın büyük olması önerilen yöntemin uygulanmasını o kadar başarılı kılmaktadır. Fark ne kadar büyük olursa amaç fonksiyonu katsayısı yüksek olan karar değişkeni yönündeki alanda optimum tamsayılı çözüme ulaşma olasılığı da o kadar artmaktadır.

Problemdeki değişkenlerin amaç fonksiyonu katsayıları eşit olmadığı durumlarda bile en yüksek amaç fonksiyonu değerini sağlayan birden fazla altqernatif tamsayılı nokta söz konusu olabilir. Diğer bir deyişle, amaç fonksiyonu katsayıları eşit olmadığı durumda bile tamsayılı programlama problemi çoklu çözüme sahip olabilir. Aynı Z değerini sağlayan birden fazla alternatif nokta önerilen sezgisel yöntem gereğince incelenmesi gereken alanda yer alabileceği gibi incelenmeyen diğer alanda da bulunabilir. Önerilen sezgisel yöntemde en yüksek Z değerine sahip alternatif tamsayılı noktaları ortaya çıkarmak söz konusu olmadığından, inceleme yapılan alanda birden fazla nokta aynı Z değerini sağlamışsa, bunlar arasından seçilen herhangi bir nokta problemin optimum tamsayılı çözümü olacaktır.

Önerilen sezgisel yöntem gereğince alt ve üst bölgede yer alan alternatif tamsayılı noktalardan sadece diğerlerine göre daha iyi amaç fonksiyonu değeri sağlayan tamsayılı noktalar incelenmektedir. Diğer bir deyişle, bazı noktalar atlanıp sınır koşullarına en yakın alternatif tamsayılı noktalar dikkate alınmaktadır. Bu nedenle önerilen sezgisel yönteme **"Yürüyen Nokta Yöntemi"** denilmiştir.

Yürüyen nokta yöntemi DP probleminin optimum sonucu ile çözüme başlamaktadır. DP probleminin optimum çözümünden elde edilen kesirli çözüm sonuçları aşağıya doğru yuvarlandıktan sonra eksenlere dikmeler çizildiğinde bu dikmelerin oluşturduğu alan dışında yeni bölgeler oluşur. Aşağıya doğru yuvarlanarak elde edilen noktanın üst ve alt kısmında oluşan bu alanlarda yer alan ve diğerlerine göre daha iyi amaç fonksiyonu değeri sağlayan noktaların incelenmesi ile optimum çözüme ulaşılır.

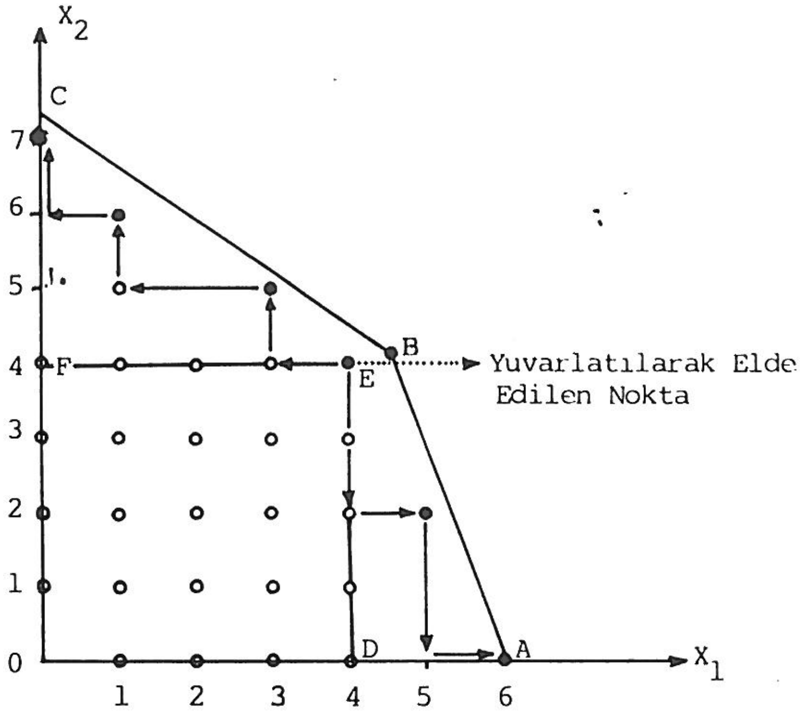
Yürüyen nokta yönteminde hem alt hem de üst bölgede bulunan ve daha iyi Z değeri sağlayan noktalar değerlendirildiğinde problem için optimum tamsayılı noktanın elde edilmesi kesinlikle garantidir ve her durumda optimum tamsayılı çözüme ulaşmak mümkündür.

Yapılan çalışmalarda ele alınan problemlerin çoğunda optimum tamsayılı çözüm, amaç fonksiyonu katsayısı yüksek olan karar değişkeni yönünde çıkmıştır. Bu nedenle de hem alt hem de üst bölgelerin birlikte değerlendirilmesi yerine daha az alternatif tamsayılı noktanın değerlendirilip daha kısa sürede çözümün yapılabilmesi için tek bölgenin test edilmesi önerilmiştir. Amaç fonksiyonu katsayısı yüksek olan karar değişkeni yönündeki tek bölgenin incelenmesi ile birçok problemde optimum tamsayılı çözüme ulaşılmıştır. Eğer problemin optimum tamsayılı çözümü inceleme yapılan bölgede yer alıyorsa, yürüyen nokta yöntemi bu noktayı kesinlikle yakalayabilmektedir ve optimum çözüme ulaşılmaktadır. Ancak bazı problemlerde optimum çözümün, inceleme yapılan bölgenin dışındaki bölgede de yer alabilme olasılığı bulunmaktadır. Bu tip problemlerde yöntem, optimum çözüm yerine optimuma yakın sonuç vermektedir. Fakat bu tip problemlerle karşılaşma olasılığı da oldukça düşüktür.

3.4. YÜRÜYEN NOKTA YÖNTEMİ

3.4.1. Yürüyen Nokta Yönteminin Grafik Üzerinde Gösterilmesi

Yürüyen nokta yönteminin nasıl uygulandığını göstermek için aşağıdaki şekli dikkate alalım.



Şekil 3.6.Yürüyen Nokta Yönteminin Uygulanışı.

Problemin uygun çözüm alanının OABC olduğunu ve tamsayı koşulu dikkate alınmadan çözümünün B noktasında oluştuğunu varsayalım. B noktasındaki çözüm sonuçları aşağıya doğru yuvarlandığında E noktası elde edilir. Daha sonra değişkenlerin amaç fonksiyonu katsayılarına bağlı olarak ya alt bölge adı verilen EDA alanındaki noktalar veya üst bölge adı verilen EFC alanı içerisindeki noktalar incelenir.

Ele alınan problemde X_1 değişkeninin amaç fonksiyonu katsayısının yüksek olduğunu varsayalım. Bu durumda incelenecek olan bölge EDA alanıdır. E noktasında $X_1=X_2=4$ değerindedir. X_1 yönünde arama yapılacağı için başlangıç noktası olarak E noktası kabul edilmektedir. Bu noktadan sonra ilk olarak aranacak nokta, X_2 yi bir birim azaltıp X_1 i uygun çözüm alanı içinde alacağı en yüksek tamsayılı değere yükselterek elde edilen noktadır. Bu problem için böyle bir nokta olmadığı için X_2 iki birim azaltılır ve $X_1=4$, $X_2=2$ noktasına ulaşılır. X_1 değişkeni bu noktadan sonra bir birim artırılma olanağına sahip olduğu için $X_1=5$ $X_2=2$ noktası elde edilir. Daha sonra bu noktada da aynı işlemler uygulanarak $X_1=6$, $X_2=0$ noktası elde edilir. Bu üç noktanın amaç fonksiyonu değerleri ayrı ayrı değerlendirilerek en yüksek değerli olanı problem için optimum tamsayılı noktayı verir.

Aranacak bölgede eğer değişkenlerden birinin değeri azaltıldığı halde diğerinin değerini artırma olanağı yoksa azaltılarak elde edilen noktanın incelenmesine gerek yoktur. Çünkü bir önceki nokta daha iyidir. Örnek problemde E noktasından sonra $X_1=4$, $X_2=3$ noktasına ulaşılmaktadır. Bu noktadan sonra $X_1=5$, $X_2=3$ noktası uygun çözüm alanı içerisinde olmadığı için $X_1=4$, $X_2=3$ noktasının amaç fonksiyonu değerinin hesaplanmasına gerek yoktur. Çünkü $X_1=4$, $X_2=4$ noktasının amaç fonksiyonu değerinin $X_1=4$, $X_2=3$ noktasının amaç fonksiyonu değerinden daha yüksek olduğu açıktır. Aynı şekilde $X_1=4$, $X_2=2$ noktasının da değerlendirilmesine gerek yoktur. Aynı mantık $X_1=5$, $X_2=1$ ve $X_1=5$, $X_2=0$ noktaları için de geçerli olup $X_1=5$, $X_2=2$ noktası bu iki noktadan daha yüksek Z değeri sağlamaktadır. Böylece $X_1=4$, $X_2=4$; $X_1=5$, $X_2=2$ ve $X_1=6$, $X_2=0$ noktalarının amaç fonksiyonu değerleri hesaplanarak en yüksek Z değeri sağlayan nokta problemin optimum tamsayılı çözümünü verir.

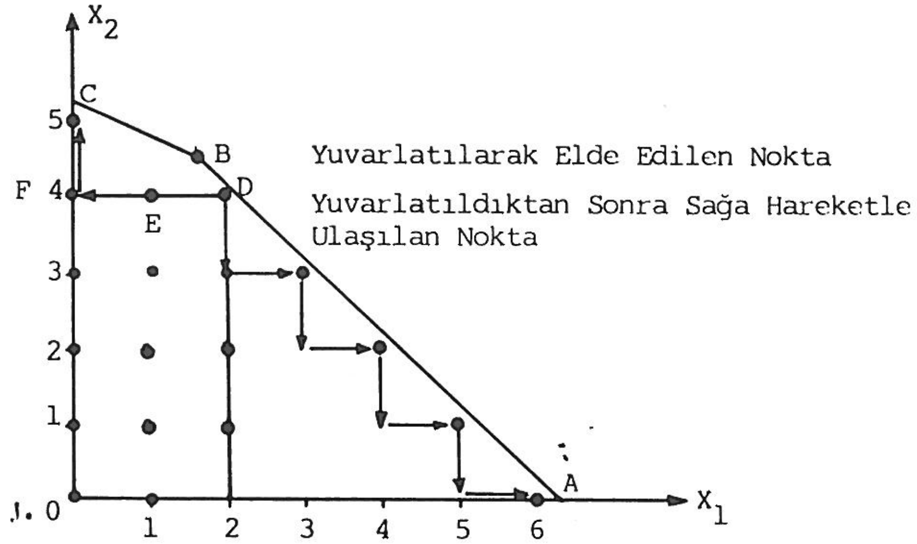
Şimdi de problemde X_2 değişkeninin amaç fonksiyonu katsayısının yüksek olduğunu varsayalım. Bu durumda üst bölge olarak belirtilen EFC alanındaki alternatif tamsayılı noktalar incelenecektir. Yine E noktasındaki değer başlangıç noktası olarak dikkate alınır ve X_1 yönündeki uygulama X_2 yönünde de aynı şekilde uygulanır. Böylece $X_1=4$, $X_2=4$ noktası da dahil olmak üzere $X_1=3$, $X_2=5$; $X_1=1$, $X_2=6$; $X_1=0$, $X_2=7$ noktaları elde edilir. Bu dört noktanın amaç fonksiyonu değerleri ayrı ayrı hesaplanarak en yüksek Z değeri sağlayan nokta problemin optimum tamsayılı çözümünü verir.

Her iki yöndeki arama için başlangıç noktası aşağıya doğru yuvarlanılarak elde edilen nokta olmaktadır. Yukardaki problemde olduğu gibi E noktasında herhangi bir karar değişkeninin değeri sabit iken diğer bir değişkenin değerini artırma olanağı olmadığı için, diğer bir deyişle, E noktasından sağa veya yukarı doğru hareket edilemediğinden, başlangıç noktası yuvarlanarak bulunan ilk değer olmaktadır. Ancak öyle problemler vardır ki E noktasından ya sağa doğru hareket ya da yukarı doğru hareket mümkün olmakta veya aynı problemde her iki yöne doğru hareket etme imkânı da bulunmaktadır. Böyle problemlerde başlangıç noktasının belirlenmesi değişmektedir. Şimdi bu durumları ayrı ayrı görelim.

3.4.2. Yürüyen Nokta Yönteminde Yön Tesbiti İçin Başlangıç Noktasının Belirlenmesi

a) Bazı problemlerde yuvarlatılarak elde edilen değerden sağa doğru hareket mümkün olmaktadır. Yani X_2 değeri sabit iken X_1 değerini arttırmak olasıdır. Böyle problemlerde artık başlangıç noktası yuvarlatılarak elde edilen nokta olmayıp sağa doğru hareketle elde edilen nokta olmaktadır. Sağa doğru hareketle elde edilen noktadan, karar değişkenleri eksenlerine dikmeler çizilerek incelenmesi gereken alt ve üst bölgeler belirlenir.

Aşağıdaki şekil bu durumu göstermektedir.



Şekil 3.7. Yürüyen Nokta Yönteminin Uygulanışında Sağa Hareket.

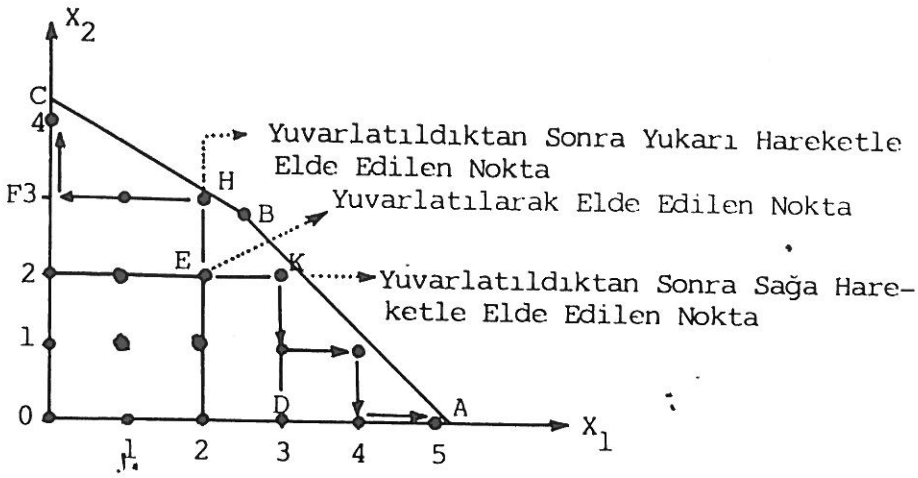
Şekildeki OABC problemin uygun çözüm alanını, DFC üst bölgeyi, DHA alt bölgeyi göstermektedir. Bölge aramada başlangıç noktası E noktası olmayıp D noktasından yönteme başlanmalıdır.

Üst Bölgede Aranacak Noktalar	Alt Bölgede Aranacak Noktalar
(2,4)	(2,4)
(0,5)	(3,3)
	(4,2)
	(5,1)
	(6,0)

b) Ele alınan problemlerin bazılarında yuvarlatılan noktadan itibaren sağa hareket mümkün olmayıp, yukarı doğru hareket söz konusu olmaktadır. Diğer bir deyişle, X_1 değeri sabit iken X_2 değerini arttırmak olasıdır. Bu durumda başlangıç noktası yukarı doğru hareketle elde edilen bu yeni noktadır. Bu yeni noktadan karar değişkenleri eksenlerine çizilen dikmeler ile alt ve üst bölgeler belirlenir.

Şekil 3.8 bu durumu yansıtmaktadır.

lamayı gösterelim.

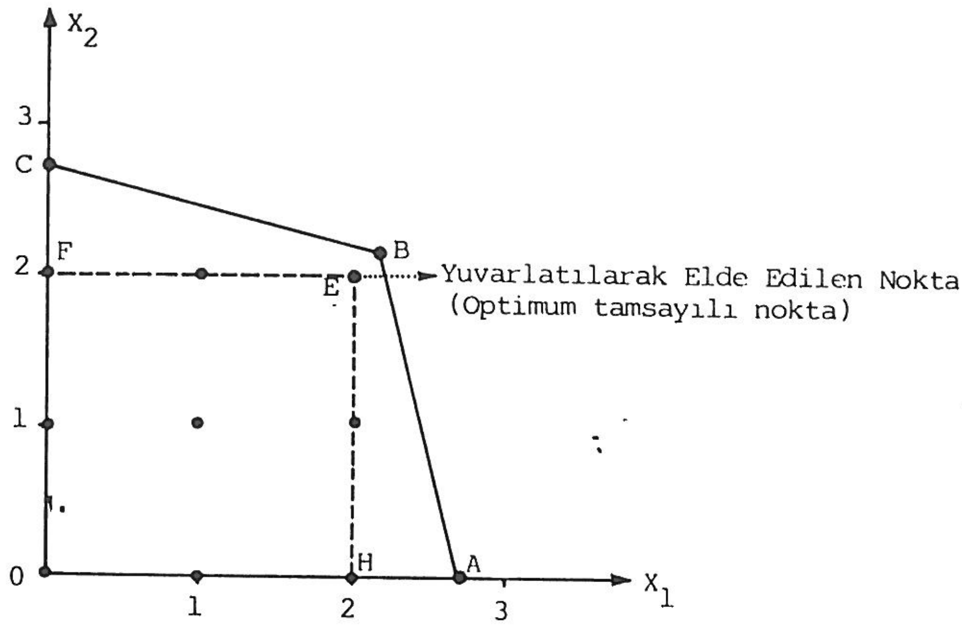


Şekil 3.9. Yürüyen Nokta Yönteminin Uygulanışında Her İki Yöne Hareket.

Şekil 3.9'dan da görüldüğü gibi, sağa doğru hareketle K, yukarı doğru hareketle de H noktası elde edilmiştir. Böylece K noktası X_1 yönünde arama için, H noktası da X_2 yönünde arama için başlangıç noktası olacaktır.

Üst Bölgede Aranacak Noktalar	**Alt Bölgede Aranacak Noktalar**
(2,3)	(3,2)
(0,4)	(4,1)
	(5,0)

d) Öyle problemler olabilir ki, yuvarlatılan değerden sonra, ne sağa ne de yukarı doğru hareket mümkün değildir. Ayrıca bu noktadan itibaren karar değişkenlerinden herhangi birinin değerini azaltıp diğerini arttırma olanağı da söz konusu değildir. Diğer bir deyişle, alt ve üst bölgede arama yapmak olanaksızdır. Böyle problemlerde değişkenlerin amaç fonksiyonları katsayıları ne olursa olsun en iyi tamsayılı nokta daima yuvarlatılarak elde edilen noktadır.



Şekil 3.10.Yuvarlanan Noktanın Optimum Tamsayılı Nokta Olması.

Şekil 3.10'dan da görüldüğü gibi E noktasından başka EFC ve EHA alanlarında başka tamsayılı nokta olmadığı için söz konusu nokta problem için optimum tamsayılı noktadır.

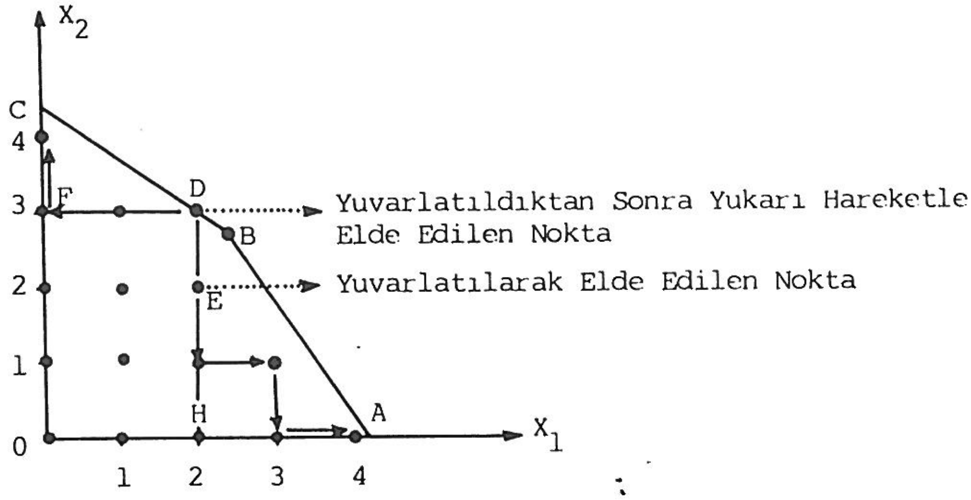
3.4.3.Yürüyen Nokta Yönteminin Örnekler Üzerinde Gösterilmesi

Yöntemin nasıl uygulandığını açıklamak için Pfaffenberger ve Walker'in aşağıdaki örnek problemini ele alalım(15).

$$\begin{aligned} \text{Mak } Z &= 5X_1 + 6X_2 \\ \text{Sınırlar} \quad & X_1 + 2X_2 \leqslant 10 \\ & 2X_1 + X_2 \leqslant 12 \\ & X_1\ ,\ X_2 \geqslant 0 \text{ ve tamsayı} \end{aligned} \qquad \text{Problem 3.5.}$$

Problemin uygun çözüm alanı Şekil 3.11'de gösterilmiştir.

(15) Roger C.Pfaffenberger and David A.Walker,**Mathematical Programming for Economics and Business**,Iowa:The Iowa State University Press,1976,s.309.

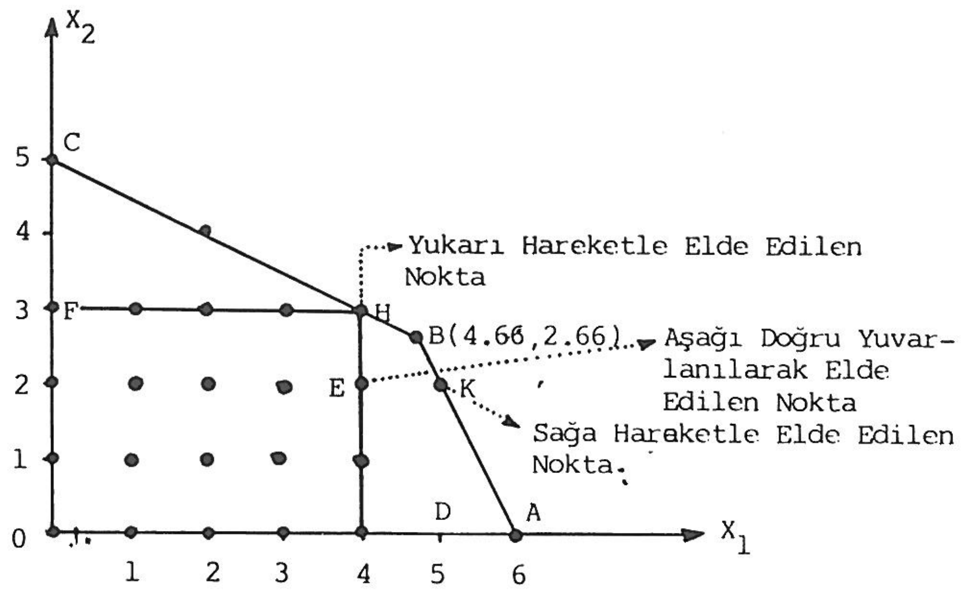


Şekil 3.8. Yürüyen Nokta Yönteminin Uygulanışında Yukarı Hareket.

Problemde B noktası DP probleminin optimum çözüm noktasıdır. Değerler yuvarlatıldığında E noktası elde edilir. Ancak bu nokta yön aramada başlangıç noktası değildir. Çünkü yukarı doğru hareket edilerek D noktası elde edilmiştir ve bu nokta başlangıç noktasıdır. DFC üst bölgeyi, DHA alt bölgeyi göstermektedir.

Üst Bölgede Aranacak Noktalar	**Alt Bölgede Aranacak** Noktalar
(2,3)	(2,3)
(0,4)	(3,1)
	(4,0)

c) Bazı problemlerde ise yuvarlatılan değerden sonra hem sağa hem de yukarı doğru hareket olanağı olmaktadır. Böyle problemlerde yukarı doğru hareketle ulaşılan nokta X_2 yönünde (üst bölge) arama yapılması halinde başlangıç noktası olacaktır. Sağa doğru hareketle ulaşılan nokta ise X_1 yönünde (alt bölge) arama yapılması halinde başlangıç noktası olmalıdır. Ulaşılan her iki noktadan eksenlere çizilen dikmeler ise alt ve üst bölgeleri belirlemektedir. Şekil 3.9'da bu uygu-



Şekil 3.11.Yürüyen Nokta Yönteminin Örnek Üzerinde Gösterilmesi.

Problemin uygun çözüm alanını OABC alanı göstermektedir.Problem tamsayı koşulu dikkate alınmadan çözüldüğünde $X_1=4.66, X_2=2.66$ noktası elde edilir. Bu noktanın amaç fonksiyonu değeri (Z) 39.33 olup, grafikte B noktası ile gösterilmiştir.Sonra elde edilen kesirli değerler aşağıya doğru yuvarlanarak E noktası ile gösterilen $X_1=4, X_2=2$ noktası elde edilir. Bu noktadan sonra başlangıç noktasının belirlenmesi gerekmektedir. Onun için de uygun çözüm alanı içerisinde sağa ve yukarı doğru hareketin olup olmadığı test edilerek başlangıç noktası belirlenmeye çalışılır. Problemde her iki yöne doğru hareket etme olanağı olduğuna göre üst bölgede arama yapılması için H(4,3) ve alt bölgede arama yapılması için K(5,2) noktaları elde edilmiştir. Böylece HFC alanı, X_2 değişkeninin amaç fonksiyonu katsayısının yüksek olması halinde aranacak üst bölgeyi; KDA alanı da X_1 değişkeninin amaç fonksiyonu katsayısının yüksek olması halinde aranacak alt bölgeyi belirtmektedir.

Problemde X_2 karar değişkeninin amaç fonksiyonu katsayısı yüksek olduğu için aranacak bölge üst bölgedir ve incelenecek noktalar da şunlardır:

(Üst Bölgede)

Alternatif Noktalar	**Amaç Fonksiyonu Değeri**
(4,3)	38^*
(2,4)	34
(0,5)	30

Alt bölgede inceleme yapmaya gerek yoktur. Bunun nedeni üst bölgedeki herhangi bir alternatif tamsayılı noktanın amaç fonksiyonu değerinden daha yüksek amaç fonksiyonu değeri sağlayan bir alternatif noktanın alt bölgede bulunamamasındandır. Bunu test etmek için alt bölgedeki alternatif tamsayılı noktaların amaç fonksiyonu değerlerini hesaplayalım:

(Alt Bölgede)

Alternatif Noktalar	**Amaç Fonksiyonu Değeri**
(5,2)	37
(6,0)	30

Hesaplamalarda da görüldüğü gibi optimum tamsayılı nokta amaç fonksiyonu değeri 38 olan $X_1=4$, $X_2=3$ noktası olup,bu nokta üst bölgede yer alan tamsayılı noktadır.

Şimdi aynı problemde sınırlar aynı kalmak koşulu ile sadece problemin amaç fonksiyonu katsayılarını değiştirelim ve X_1 in amaç fonksiyonu katsayısının 6, X_2 nin amaç fonksiyonu katsayısının 5 olduğunu varsayalım. Bu değişiklikle problem yine tamsayı koşulu dikkate alınmadan DP problemi olarak çözüldüğünde çözüm sonuçları yine $X_1=4.66$ $X_2=2.66$ dir. Bu noktadaki amaç fonksiyonu değeri ise 41.33 değerindedir. Önceki problemdeki tüm aşamalar uygulanarak yine aynı noktalar elde edilir. Fakat önceki problem ile farkı aranacak bölgenin değişmesidir. Çünkü bu problemde X_1 in amaç fonksiyonu katsayısı daha yüksektir ve incelenmesi gereken bölgede alt bölgedir. Alt bölgede incelenmesi gereken alternatif noktalar şunlardır:

(Alt Bölgede) **Alternatif Noktalar**	**Amaç Fonksiyonu Değeri**
(5,2)	40*
(6,0)	36

Üst bölgedeki alternatif tamsayılı noktaları incelemeye gerek yoktur. Çünkü daha yüksek amaç fonksiyonu değeri sağlayacak bir nokta bulunmamaktadır. Bunu test etmek için üst bölgedeki noktaların da amaç fonksiyonu değerlerini hesaplayalım:

(Üst Bölgede) **Alternatif Noktalar**	**Amaç Fonksiyonu Değeri**
(4,3)	39
(2,4)	32
(0,5)	25

Hesaplamalardan da görüldüğü gibi optimum tamsayılı nokta alt bölgedeki $X_1=5$, $X_2=2$ noktasıdır ve bu noktanın amaç fonksiyonu değeri 40 dır.

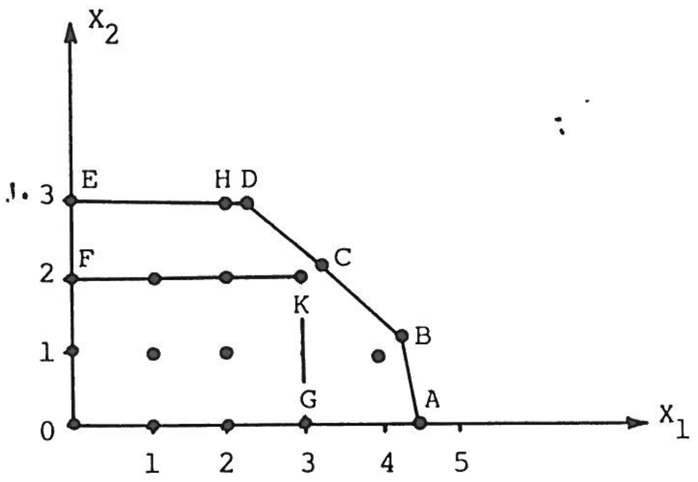
3.4.3.1 Çoklu Çözümlü DP Problemlerinde Yürüyen Nokta Yöntemi

Doğrusal programlama problemlerinde eğer amaç fonksiyonu ile sınırlardan herhangi bir tanesinin eğimi eşit ise,problem çoklu çözüme sahip DP problemidir. Bu özellikteki problemlerde uygun çözüm alanının iki ayrı köşe noktası aynı Z değerini verir. DP probleminin çözümünden elde edilen iki noktanın kesirli değerleri aşağıya doğru yuvarlandığında uygun çözüm alanı içinde ya bir tamsayılı nokta ya da iki ayrı tamsayılı nokta elde edilebilir. Eğer yuvarlanarak elde edilen nokta tek bir nokta ise, daha önceki açıklamalar ışığında belirlenen başlangıç noktasından eksenlere çizilen dikmelerin oluşturduğu alan dışında oluşan ve amaç fonksiyonu katsayısı yüksek olan karar değişkeni yönündeki alan incelenir. Bu alandaki incelenmesi gereken noktalar ise diğerlerine göre daha yüksek Z değeri sağlayan noktalardır. Eğer çoklu çözümlü DP problemlerindeki kesirli değerler aşağıya doğru yuvarlandığında iki ayrı nokta elde edilmişse, bu noktalardan hangisi dikkate alınarak alt ve üst bölge oluşturulacaktır sorunu ile karşı karşıya kalınır. Yine diğer problemlerde uygulandığı gibi her iki noktadan da yukarı veya sağa doğru hareketin olup olmadığı test edilerek başlangıç noktaları belirlenmeye çalışılır. Elde edilen başlangıç noktası yine tek bir nokta ise sorun yoktur. Eğer iki ayrı nokta elde edilmişse alt ve üst bölgenin nasıl belirlenebileceği sorunu ortaya çıkar. Problemde X_1 değişkeninin amaç fonksiyonu katsayısı yüksek ise, X_1 değişkeninin en düşük değerli olduğu nokta başlangıç noktası olarak belirlenip eksenlere çizilen dikmeler ile alt ve üst bölge ayrımı yapılır. Fakat problemde X_2 değişkeninin amaç fonksiyonu katsayısı yüksek ise, X_2 değişkeninin en düşük değerli olduğu nokta başlangıç noktası olarak dikkate alınıp eksenlere çizilen dikmeler ile alt ve üst bölge oluşturulur. Bu şekilde bölgeler belirlendikten sonra incelenmesi gereken alan yine amaç fonksiyonu katsayısı yüksek olan alandır ve incelenmesi gereken noktalarda daha iyi Z değeri sağlayan noktalardır.

Yürüyen nokta yönteminin bu özellikteki problemlerde nasıl uygulandığını göstermek için aşağıdaki problemi ele alalım:

$$\text{Mak } Z = 30X_1 + 50X_2$$

$$\begin{aligned} \text{Sınırlar} \quad 60X_1 + 100X_2 &\leqslant 430 \\ 55X_1 + 50X_2 &\leqslant 300 \\ 10X_1 &\leqslant 45 \\ 30X_2 &\leqslant 90 \\ X_1,\ X_2 \geqslant 0 \text{ ve tamsayı} \end{aligned} \qquad \text{Problem 3.6.}$$



Şekil 3.12. Çoklu Çözümlü DP Problemlerinde Yürüyen Nokta Yöntemi.

Problemin uygun çözüm alanını OABCDE alanı temsil etmektedir. Problem tamsayı koşulu dikkate alınmadan çözüldüğünde $X_1=2.2$, $X_2=3$ ve $X_1=3.4$, $X_2=2.3$ değerlerine sahip iki ayrı nokta elde edilir. Her iki noktada aynı amaç fonksiyonu değerine sahip olup, Z=215 dir. Bu noktalar grafikte sırası ile D ve C köşe noktaları ile gösterilmiştir. D köşe noktasındaki değerler aşağıya doğru yuvarlandığında H ile gösterilen $X_1=2$, $X_2=3$ noktası, C köşe noktasındaki değerler aşağıya doğru yuvarlandığında K ile gösterilen $X_1=3$, $X_2=2$ noktası elde edilir . H ve K noktalarının herbirinden ne sağa doğru hareket ne de yukarı doğru hareket etme olanağı vardır. Elde edilen bu K ve H noktalarından K noktası başlangıç noktası olarak belirlenir. Çünkü Problemde X_2 değişkeninin amaç fonksiyonu katsayısı daha yüksektir ve bu noktadaki X_2 değişkeninin değeri olan 2 değeri H noktasındaki X_2 değişkeninin değeri olan 3 değerinden daha düşüktür. Böylece K noktasından eksenlere dikmeler çizilerek KFE ile gösterilen üst bölge, KGA ile gösterilen alt bölgeler oluşturulur. Problemde X_2 değişkeninin amaç fonksiyonu katsayısı daha yüksek olduğu için incelenmesi gereken alan KFE ile gösterilen üst bölgedir.

(Üst Bölgede) **Alternatif Noktalar**	**Amaç Fonksiyonu Değeri**
(3,2)	190
(2,3)	210*

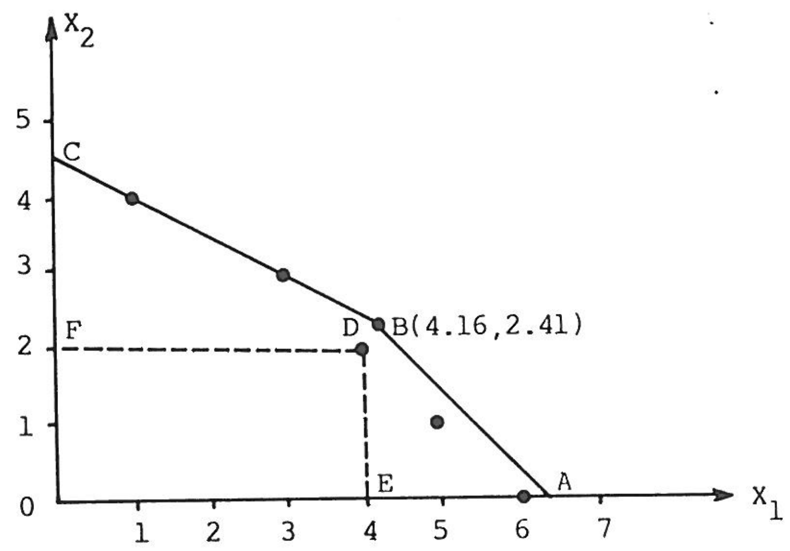
Görüldüğü gibi problemin optimum tamsayılı çözümü grafikte H ile gösterilen $X_1=2$, $X_2=3$ noktasıdır. Yürüyen nokta yöntemi gereğince, alt bölgede yer alan $X_1=4$, $X_2=1$ noktasının incelenmesine gerek yoktur. Çünkü bu nokta daha düşük amaç fonksiyonu değerine sahiptir. Test etmek amacıyla bu noktayı değerlendirelim. $X_1=4$, $X_2=1$ noktasının amaç fonksiyonu değeri 170 olup, diğer noktalardan daha düşük Z değerine sahiptir.

3.4.3.2. Amaç Fonksiyonu Katsayıları Eşit Olan Problemlerde Yürüyen Nokta Yöntemi

Problemde karar değişkenlerinin amaç fonksiyonu katsayılarının eşit olması halinde aranması gereken yön belirlemede farklı bir yaklaşım uygulanmaktadır. Böyle problemlerde, sınırlardaki sağ taraf sabitleri, sınırlarda yer alan X_1 ve X_2 değişkenlerinin katsayılarına ayrı ayrı bölünür ve tamsayılı kısmı bulunur. Bu hesaplamalar sonucunda X_1 için bulunan en küçük değer ile, X_2 için bulunan en küçük değer, tam sayılı problemler için eksenler üzerindeki uygun çözüm alanını belirleyen köşe noktalarını oluşturur ve bu noktaların değeri araması gereken yönü belirlemede bize ışık tutar. Eğer X_1 ekseni üzerindeki uygun çözüm alanını belirleyen köşe noktasının amaç fonksiyonu değeri X_2 ekseni üzerindeki uygun çözüm alanını belirleyen köşe noktasının amaç fonksiyonu değerinden daha büyük ise aranması gereken bölgenin alt bölge olması gerekir. Tersi durumda ise üst bölge aranmalıdır. Problemde uygun çözüm alanını belirleyen eksenler üzerindeki köşe noktalarının amaç fonksiyonu değerleri birbirine eşit ise istenilen herhangi bir yön seçilerek optimum tamsayılı çözüme ulaşılabilir.

Yürüyen nokta yönteminin bu özellikteki problemlerde nasıl uygulandığını göstermek için aşağıdaki problemi dikkate alalım.

$$\begin{aligned} \text{Mak } Z &= 5X_1 + 5X_2 \\ \text{Sınırlar } \quad X_1 + 2X_2 &\leqslant 9 \\ 11X_1 + 10X_2 &\leqslant 70 \\ X_1, X_2 &\geqslant 0 \text{ ve tamsayı} \end{aligned} \qquad \text{Problem 3.7.}$$



Şekil 3.13. Amaç Fonksiyonu Katsayıları Eşit Olan Problemlerde Yürüyen Nokta Yöntemi.

Problemin uygun çözüm alanını OABC alanı göstermektedir. Tamsayı olma koşulu dikkate alınmadan problem çözüldüğünde $X_1=4.16$, $X_2=2.41$ ve $Z=32.85$ değerindedir. Değerler aşağıya doğru yuvarlandığında $X_1=4$, $X_2=2$ noktası elde edilir ve bu nokta grafikte D noktası ile gösterilmiştir. D noktasından sağa ve yukarı hareket etme olanağı olmadığı için başlangıç noktası D noktası olarak dikkate alınır. Problemde aranması gereken bölge DEA ile gösterilen alt bölgedir. Çünkü X_1 ekseni üzerindeki uygun çözüm alanını belirleyen köşe noktasının amaç fonksiyonu değeri olan Z=6x5=30, X_2 ekseni üzerindeki uygun çözüm alanını belirleyen köşe noktasının amaç fonksiyonu değeri olan Z=5x4=20 den daha yüksektir.

	Alternatif Noktalar	**Amaç Fonksiyonu Değeri**
Alt Bölgedeki	(6,0)	30*
	(5,1)	30*
	(4,2)	30*
Üst Bölgedeki	(3,3)	30*
	(1,4)	25

Hesaplamalardan da görüldüğü gibi alt bölgede incelenen üç noktanın hepsinde de aynı amaç fonksiyonu değerine ulaşılmıştır. Ayrıca üst bölgede yer alan (3,3) noktası da aynı amaç fonksiyonu değerini vermektedir. Alt bölgede incelenen ve aynı amaç fonksiyonu değerini sağlayan noktalardan herhangi bir tanesi problemin optimum çözümü olarak seçilebilir.

Yukarıda da belirtildiği gibi uygun çözüm alanının eksenler üzerindeki köşe noktalarının amaç fonksiyonu değerleri dikkate alınarak yön tesbiti yapıldığında optimum tamsayılı çözüme ulaşılabilmektedir.

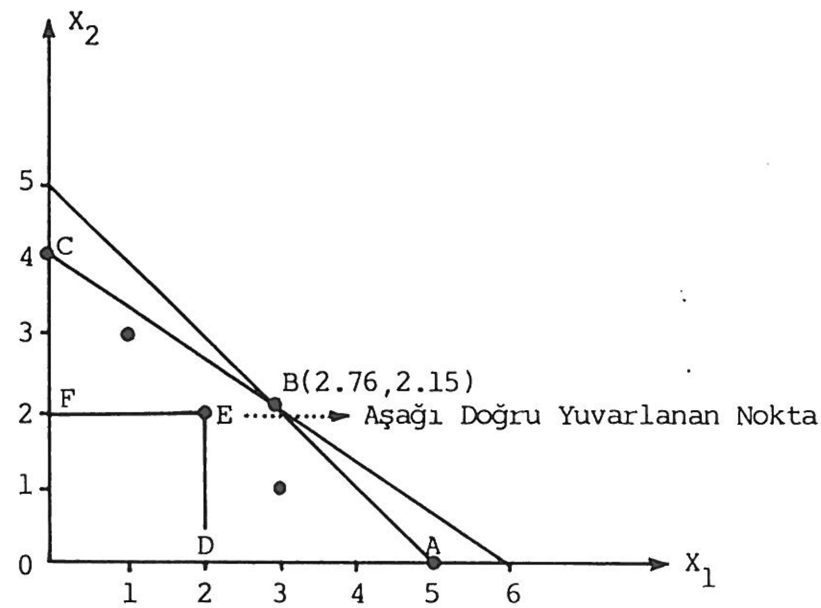
3.4.3.3. Yürüyen Nokta Yönteminin Optimum Çözümü Yakalayamadığı Bir Problem

İnceleme yapılan problemlerde yürüyen nokta yöntemi kuralları etkin bir şekilde uygulanmış ve optimum tamsayılı çözüme ulaşılmıştır. Çalışma sırasında karşılaşılan bir problemde optimum tamsayılı çözüme, yürüyen nokta yöntemi gereğince inceleme yapılan bölge dışındaki bölgede bulunan herhangi bir alternatif tamsayılı noktada ulaşılmıştır.

Problem 3.8 yürüyen nokta yönteminin optimum çözüme ulaşamadığı bir örnektir.

$$\begin{aligned} \text{Mak } Z \quad & 21X_1 + 22X_2 \\ \text{Sınırlar } \quad & 4X_1 + 6X_2 \leq 24 \\ & 0.913X_1 + 0.95X_2 \leq 4.565 \\ & X_1, X_2 \geq 0 \text{ ve tamsayı} \end{aligned}$$

Problem 3.8.



Şekil 3.14. Yürüyen Nokta Yönteminin Optimum Tamsayı Çözümü Yakalayamadığı Problem.

Problem tamsayı olma koşulu dikkate alınmadan çözüldüğünde X_1=2.769, X_2=2.153 ve Z=105.515 olarak bulunur. Yürüyen nokta yöntemi gereğince

X_2 karar değişkeninin amaç fonksiyonu katsayısı yüksek olması nedeniyle EFC ile gösterilen üst bölgenin aranması gerekmektedir.

(Üst Bölgedeki) **Alternatif Tamsayılı Noktalar**	**Amaç Fonksiyonu Değeri**
(2,2)	86
(1,3)	87
(0,4)	88

Bu hesaplamalara göre (0,4) noktası üst bölgedeki diğer alternatif tam sayılı noktalardan daha yüksek Z değeri sağladığı için optimum tamsayılı nokta olmalıdır. Ancak problem optimum sonuç veren diğer yöntemlerle çözüldüğünde optimum tamsayılı noktanın EDA ile gösterilen a l t bölgedeki $X_1=5$, $X_2=0$ noktası olduğu görülür. Bu nokta grafikte A ile gösterilmiştir ve amaç fonksiyonu değeri Z=105 dir.

Ele alınan problemde yürüyen nokta yönteminin optimum tamsayılı çözümü neden yakalayamadığı konusu bizi problemin özelliklerini araştırmaya yöneltmiştir. Bu amaçla problemdeki hem amaç fonksiyonu hem de sınırlardaki karar değişkenlerinin katsayıları birbirlerine oranlanmıştır ve oranlar X_1 nin katsayısı/X_2 in katsayısı şeklinde hesaplanmıştır. Problem 3.8 de amaç fonksiyonu katsayılarının oranı ile sınırlarda ikinci sınırın oranı birbirine eşit olmamasına karşın çok yakın değerler olarak bulunmuştur.Problemdeki amaç fonksiyonundaki karar değişkenleri katsayılarının oranı 22/21=1.047619, birinci sınırdaki karar değişkenleri katsayılarının oranı 6/4=1.5, ikinci sınırdaki karar değişkenleri katsayılarının oranı 0.95/0.913=1.0405257 dir. İnceleme yapılan diğer problemlerde de aynı oranlar ayrı ayrı hesaplanmış ve bu kadar birbirine yakın oranlar elde edilmemiştir. Yürüyen nokta yönteminin optimum çözüme ulaşamamasının nedeni, belki de bu oranların birbirine çok yakın olmasından kaynaklanabilir.

Bu görüşü test etmek için problemin amaç fonksiyonu ve birinci sınırı aynı kalmak koşulu ile ikinci sınırdaki X_2 değişkeninin katsayısını değiştirelim ve ikinci sınır → $0.913X_1 + 0.90X_2 \leq 4.565$ olsun. Sınırdaki bu değişiklik ile oran da değişecek ve 0.90/0.913=0.9857 elde edilecektir. Oranlar çok yakın olmadığı için yürüyen nokta yöntemi, problemdeki bu değişiklik ile optimum tamsayılı çözüme ulaşacaktır. Sınırdaki değişiklik ile problem tamsayı olma koşulu aranmaksızın çözüldüğünde $X_1=3$, $X_2=1.9$ ve Z=107.52 olarak bulunur. Probleme yürüyen nokta yöntemi uygulandığında optimum tamsayılı çözüme ulaşılır. Problem için optimum tamsayılı çözüm $X_1=3$, $X_2=2$ noktası olup amaç fonksiyonu değeri Z=107 dir.

Problemin bir diğer özelliği de inceleme yapılmayan bölgede karar değişkeninin değeri bir birim azaltıldığı halde diğer karar değişkeninin değeri iki birim arttırılabilmektedir. Bu ise, elde edilen kazancın kayıptan daha fazla olmasına neden olmaktadır. Şekil 3.14 de, EDA ile gösterilen alt bölgede $X_2=1$ değerinde iken bu değer bir birim azaltılıp $X_2=0$ noktası elde edilmekte, buna karşın X_1 değişkeninin değeri $X_1=3$ den $X_1=5$ değerine ulaşmaktadır. $X_2=1$ den $X_2=0$ değerine azalması halinde amaç fonksiyonundaki azalış 22 birim iken, $X_1=3$ den $X_1=5$ değerine yükselmesi halinde amaç fonksiyonundaki artış 42 birim olmaktadır.

Ayrıca problemde, yürüyen nokta yöntemi gereğince inceleme yapılmayan bölgedeki uygun çözüm alanını belirleyen eksen üzerindeki köşe noktasının amaç fonksiyonu değeri, inceleme yapılan bölgedeki uygun çözüm alanını belirleyen eksen üzerindeki köşe noktasının amaç fonksiyonu değerinden daha yüksektir. Problem 3.8 de yürüyen nokta yöntemi gereğince incelenmesi gereken bölge, Şekil 3.14 de EFC ile gösterilen üst bölgedir ve bu bölgedeki C (0,4) noktasının amaç fonksiyonu değeri 4x22=88 dir. Buna karşın, EDA ile gösterilen alt bölgedeki A (5,0) noktasının amaç fonksiyonu değeri 5x21=105 olup, C noktasının amaç fonksiyonu değerinden daha yüksektir.

Tüm sezgisel yöntemlerde olduğu gibi, yürüyen nokta yöntemi de daima optimum sonucu garanti etmeyen fakat, optimuma en yakın sonuç veren sezgisel yöntem olarak dikkate alınmalıdır. Problem 3.8 yürüyen nokta yönteminin optimum tamsayılı çözümü yakalayamadığı bir örnektir. Problem optimum tamsayılı çözümü vermemekle birlikte optimum çözüm ile arasında fark ancak (105-88)/105=0.1619348 dir.

3.4.4. Yürüyen Nokta Yönteminin Algoritması

Tamsayılı programlama problemlerinin yürüyen nokta yöntemi ile nasıl çözüleceği aşağıda adım adım anlatılmıştır:

1. Problem öncelikle tamsayılı olma koşulu dikkate alınmadan doğrusal programlama problemi olarak çözülür.

2. Problemin çoklu çözümlü DP problemi olup-olmadığı belirlenir. Eğer problem çoklu çözümlü DP problemi ise dokuzuncu adıma, değilse üçüncü adıma geçilir.

3. Birinci adımda çözülen DP probleminden elde edilen karar değişkenlerinin çözüm sonuçları tamsayılı değerler ise onbeşinci adıma geçilir. Değilse kesirli olarak elde edilen karar değişkenlerinin çözüm sonuçları aşağıya doğru yuvarlanır (tamsayılı kısmı alınır).

4. Problemdeki amaç fonksiyonu katsayılarının eşit olup olmadığı belirlenir. Eğer katsayılar eşit ise onüçüncü adıma, değilse beşinci adıma geçilir.

5. Problemde X_2 değişkeninin amaç fonksiyonu katsayısı X_1 değişkeninin amaç fonksiyonu katsayısından daha yüksek ise altıncı adıma, aksi taktirde yedinci adıma geçilir.

6. Bu aşamada başlangıç noktasının belirlenmesi gerekmektedir. Problemde aşağıya doğru yuvarlanarak elde edilen noktadan sonra, X_1 değişkeninin değerini uygun çözüm alanı içerisinde olacağı en yüksek tamsayılı değere artırma olanağı varsa (sağa doğru hareket söz konusu ise) bu yeni değer başlangıç noktası olarak belirlenir.Eğer problemde X_1 değişkeninin değerini artırma olanağı yoksa fakat, aşağıya doğru yuvarlanarak elde edilen değerden itibaren X_2 değişkeninin değerini uygun çözüm alanı içerisinde alacağı en yüksek tamsayılı değere artırma olanağı varsa (yukarı doğru hareket söz konusu ise) bu yeni nokta çözüm için başlangıç olarak belirlenir.Eğer problemde aşağı doğru yavarlanarak elde edilen noktadan itibaren hem X_1 in hem de X_2 nin değerini artırmak mümkün ise (hem yukarı hem de sağa doğru hareket söz konusu ise), X_2 değişkeninin değerinin artırılması ile elde edilen nokta (yukarı doğru hareketle ulaşılan nokta) çözüm için başlangıç noktasıdır. Problemde ne X_1 in ne de X_2 nin değerini artırmak mümkün değilse (yukarı ve sağa doğru hareket etme olanağı yoksa),aşağıya doğru yuvarlanarak elde edilen nokta çözüm için başlangıç noktasıdır. Belirlenen bu başlangıç noktasından, karar değişkeni eksenlerine dikmeler çizilerek incelenmesi gereken bölge (üst bölge) belirlenir. Sekizinci adıma geçilir.

7. Bu aşamada, aşağı doğru yuvarlanarak elde edilen noktadan itibaren X_2 değişkeninin değerini uygun çözüm alanı içerisinde alacağı en yüksek tamsayılı değere artırma olanağının olup-olmadığı test edilir. Eğer böyle bir hareket varsa(yukarı doğru hareket söz konusu ise),

bu yeni nokta çözüm için başlangıç noktası olarak dikkate alınır. Eğer problemde X_2 değişkeninin değerini artırma olanağı yoksa fakat,aşağıya doğru yuvarlanarak elde edilen noktadan itibaren X_1 değişkeninin değerini uygun çözüm alanı içerisinde alacağı en yüksek tamsayılı değere artırma olanağı varsa (sağa doğru hareket söz konusu ise),bu yeni nokta çözüm için başlangıç noktası olarak belirlenir. Eğer problemde aşağıya doğru yuvarlanarak elde edilen noktadan itibaren hem X_1 in hem de X_2 nin değerini artırmak mümkün ise (hem yukarı hem de sağa doğru hareket söz konusu ise), X_1 değişkeninin değerinin artırılması ile elde edilen nokta (sağa doğru hareketle ulaşılan nokta) çözüm için başlangıç noktasıdır. Problemde ne X_1 in ne de X_2 nin değerini artırmak mümkün değilse (yukarı ve sağa doğru hareket etme olanağı yoksa), aşağıya doğru yuvarlanarak elde edilen nokta çözüm için başlangıç noktasıdır. Belirlenen bu başlangıç noktasından, karar değişkeni eksenlerine dikmeler çizilerek incelenmesi gereken bölge (alt bölge)belirlenir ve sekizinci adıma geçilir.

8. Bölge ve başlangıç noktası belirlendikten sonra eksenlere çizilen dikmelerin oluşturduğu alan dışında bulunan ve başlangıç noktası da dahil olmak üzere o bölgedeki diğer alternatif tamsayılı noktalara göre daha yüksek amaç fonksiyonu değeri sağlayacak olan noktalar incelenir. Bölgelerdeki nokta tarama işlemleri şu şekilde yapılmaktadır:

İncelenen bölgeye göre karar değişkenlerinden birinin değeri bir birim azaltılıp, diğer değişkenin değerinin uygun çözüm alanı içerisinde alabileceği en yüksek tamsayılı değere yükseltme olanağının olup olmadığı test edilir. Eğer artırma olanağı yoksa değişkenin değeri iki birim azaltılır. Yine diğer değişkenin değerini artırma olanağı yoksa değişkenin değeri üç birim azaltılır. Bu azaltma işlemi nereye kadar devam edecek? Eğer bir değişkenin değeri azaltılıp diğerinin değeri artırılabiliyorsa o noktadan sonra azaltma işlemi yapılmayacaktır. Böylece arttırılarak elde edilen nokta yeniden dikkate alınır ve aynı işlemler bu nokta içinde uygulanır. Ele alınan bölgede açıklanan mantık çerçevesinde incelenecek alternatif tamsayılı nokta kalmayana kadar işlemlere devam edilir. Böylece söz konusu bölgedeki sınır koşullarına yakın noktalar dikkate alınarak bu noktaların amaç fonksiyonu değerleri bulunur. Bunlar içinde en yüksek amaç fonksiyonu değerine sahip nokta problem için tamsayılı noktadır ve onbeşinci adıma geçilir.

9. Çoklu çözümlü DP probleminin çözüm sonuçlarından bir tanesi tamsayılı değer ise onbeşinci adıma,değilse onuncu adıma geçilir.

10. Çoklu çözümlü DP probleminde elde edilen çözüm sonuçlarının her ikisi de kesirli değerler ise,bu iki noktadaki çözüm sonuçları yine aşağıya doğru yuvarlanır. Eğer yuvarlama işlemi sonucunda tek bir tamsayılı nokta elde edilmişse beşinci adıma geçilir.Değilse onbirinci adıma devam edilir.

11. Çoklu çözümlü DP problemlerinde kesirli değerler aşağıya doğru yuvarlandığında iki ayrı nokta elde edilmişse,bu noktadan yukarı ve sağa doğru hareketin olup olmadığı test edilerek başlangıç noktası belirlenmeye çalışılır. Bu hareketlerle elde edilen nokta yine tek bir nokta ise beşinci adıma, değilse onikinci adıma geçilir.

12. Aşağıya doğru yuvarlanarak elde edilen iki noktadan X_1 ve X_2 nin en küçük değerleri belirlenir ve beşinci adıma geçilir.

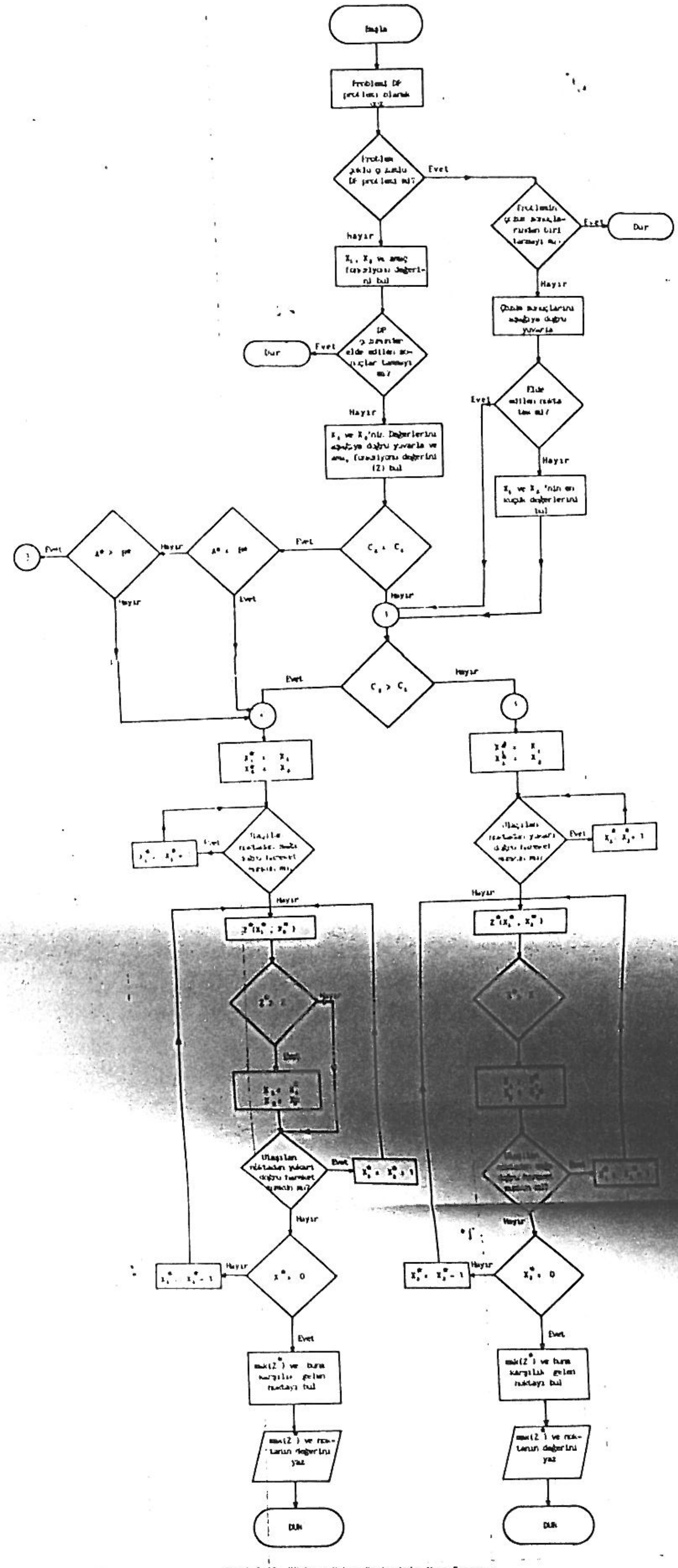
13. Amaç fonksiyonu katsayıları eşit problemlerde eğer uygun çözüm alanı içerisinde ve eksenler üzerindeki en yüksek tamsayılı noktaların amaç fonksiyonu değerleri eşit ise ya altıncı ya da yedinci

aşamaya geçilir. Değilse ondördüncü adıma geçilir.

14. Amaç fonksiyonu katsayıları eşit problemlerde eğer, X_1 ekseni üzerinde ve uygun çözüm alanı içerisinde yer alan en yüksek tamsayılı noktanın amaç fonksiyonu değeri X_2 ekseni üzerindeki en yüksek tamsayılı noktanın amaç fonksiyonu değerinden daha yüksek ise yedinci adıma, aksi taktirde altıncı adıma geçilir.

15. Problemin çözümü tamamlanmıştır ve durulur.

3.4.5. Yürüyen Nokta Yönteminin Akış Şeması.



Şekil 3.15. Yürüyen Nokta Yönteminin Akış Şeması.

Akış şemasında kullanılan bazı sembollerin anlamları:

C_2 : X_2 değişkeninin amaç fonksiyonu katsayısı
C_1 : X_1 değişkeninin amaç fonksiyonu katsayısı
Z : DP çözümünden elde edilen kesirli çözüm değerlerinin aşağıya doğru yuvarlanmasıyla elde edilen noktanın amaç fonksiyonu değeri
Z^* : X_1 ve X_2 noktasının amaç fonksiyonu değeri
A^* : DP probleminin uygun çözüm alanı içinde ve X_1 ekseni üzerindeki en yüksek tamsayılı noktanın amaç fonksiyonu değeri
b^* : DP probleminin uygun çözüm alanı içinde ve X_2 ekseni üzerindeki en yüksek tamsayılı noktanın amaç fonksiyonu değeri

3.5. YÜRÜYEN NOKTA YÖNTEMİNİN DİĞER YÖNTEMLERLE KARŞILAŞTIRILMASI

3.5.1. Yürüyen Nokta Yöntemi İle Yuvarlama Yönteminin Karşılaştırılması

Daha önce belirtildiği gibi yuvarlama yöntemi DP probleminin çözümünden elde edilen kesirli çözüm sonuçlarının en yakın tamsayıya yuvarlanmasıdır. Bu nokta tüm problemlerde optimum tamsayılı nokta olmayıp, yöntem optimum çözümü daima garanti etmemektedir. Yürüyen nokta yöntemi bir çok problemde optimum sonucu garanti etmekte ve daha önce belirtilen varsayımlar altında yuvarlama yöntemindeki yuvarlanan noktanın uygun çözüm alanı dışında olması sorununu da tamamen ortadan kaldırmaktadır.

Yöntemlerin karşılaştırılması Tablo 3.1'de gösterilmiştir.

Tablo 3.1. Yürüyen Nokta ve Yuvarlama Yöntemlerinin Karşılaştırılması.

	Yürüyen Nokta Yöntemi	Yuvarlama Yöntemi
Problem No	Optimum sonucu bulup bulmaması	Optimum sonucu bulup bulmaması
1	Optimum tamsayılı sonucu buluyor	Yuvarlanan nokta uygun çözüm alanı dışında
2	"	"
3	"	Yuvarlanan nokta optimum tamsayılı noktadır
4	"	Yuvarlanan nokta uygun çözüm alanı dışında
5	"	"
6	"	"
7	"	"
8	Optimum tamsayılı sonucu buluyor	Yuvarlanan nokta optimum tamsayılı noktadır
9	"	Yuvarlanan nokta uygun çözüm alanı dışında
10	"	"
11	"	"
12	"	Yuvarlanan nokta optimum tamsayılı noktadır
13	"	"
14	"	Yuvarlanan nokta uygun çözüm alanı dışında
15	"	"
16	"	"
17	"	".
18	"	Yuvarlanan nokta optimum tamsayılı noktadır
19	"	Yuvarlanan nokta uygun çözüm alanı dışında
20	"	"
21	"	"
22	"	"
23	"	"
24	"	Yuvarlanan nokta optimum tamsayılı noktadır
25	"	Yuvarlanan nokta uygun çözüm alanı içinde olmakla beraber optimum nokta değildir
26	Optimum tamsayılı sonuca ulaşamıyor	Yuvarlanan nokta uygun çözüm alanı dışında

Tablo 3.1'den de görüldüğü gibi incelenen 26 problemden altı tanesinde yuvarlama yöntemi ile optimum tamsayılı çözüm bulunmuştur. Yöntem yaklaşık % 23 oranında optimum çözüme ulaşabilmektedir. Yürüyen nokta yönteminde ise 26 problemden 25 tanesinde optimum sonuç elde edilmiştir. Ele alınan problemlerde yürüyen nokta yönteminin optimum tamsayılı sonucu elde etme başarısı % 96'dır. 26.problem daha önce çözümü yapılan 3.8 nolu problem olduğu için,bu problem 0.1619048'lik bir sapma ile optimum tamsayılı çözümü yakalayamamıştır.

3.5.2. Yürüyen Nokta Yöntemi İle Tam Tarama Yönteminin Karşılaştırılması

Tam tarama yöntemi problemin simpleks yöntemi ile çözülmesini gerektirmeyip, uygun çözüm alanı içindeki tüm alternatif tamsayılı noktaların incelenmesini gerektirmektedir. Fakat öyle noktalar vardır ki incelenmesine gerek kalmadan diğer noktalara göre daha az amaç fonksiyonu değeri sağlayacağı açıktır.Tam tarama yönteminde tüm alternatif noktaların tek tek incelenmesi oldukça uzun zaman alacaktır. Uygun çözüm alanı içinde çok sayıda alternatif noktanın bulunması halinde problemin çözüm süresi oldukça uzayacaktır. Bununla beraber yöntem tüm problemlerde optimum sonucu garantilemektedir. Yürüyen nokta yönteminde daha az sayıda alternatif nokta test edildiği için optimum sonuca ulaşmak daha kısa sürede olmaktadır. Fakat yöntem tüm problemlerde optimum sonucu garanti etmemektedir.Yürüyen nokta yönteminde optimum sonucu garanti etmeyen problemlerle karşılaşma olasılığı da düşüktür.

Tam tarama ve yürüyen nokta yönteminde incelenen alternatif tamsayılı noktalar Tablo 3.2'de gösterilmiştir.

Tablo 3.2. Yürüyen Nokta ve Tam Tarama Yöntemlerinin Karşılaştırılması.

	Yürüyen Nokta Yöntemi	Tam Tarama Yöntemi
Problem No	İncelenen Nokta Sayısı	İncelenen Nokta Sayısı
1	3	15
2	2	19
3	1	8
4	1	20
5	2	10
6	2	13
7	2	26
8	2	16
9	2	17
10	3	28
11	1	17
12	1	19
13	2	12
14	2	16
15	3	24
16	1	33
17	3	43
18	3	12
19	1	16
20	2	11
21	2	21
22	2	32
23	2	14
24	3	36
25	2	6
26	3	16

Aynı problemler üzerinde yapılan incelemede tam tarama yöntemine göre 500 nokta incelenirken, yürüyen nokta yönteminde 53 nokta incelenmiştir. Tam tarama yönteminde 26 problemde de optimum sonuç elde edilirken, yürüyen nokta yönteminde sadece bir problemde optimum sonuç elde edilmemektedir.Böylece yürüyen nokta yöntemi 500-53/500=0.894 etkinliğe sahiptir. Ortalama olarak her problemde 500/26=19 tamsayılı nokta olduğu dikkate alınırsa, yürüyen nokta yöntemine göre tüm problemlerdeki incelenen nokta sayısı, tam tarama yöntemine göre 53/19=

2.789 adet probleme karşılık gelmektedir. Diğer bir deyişle, tam tarama yönteminde yaklaşık olarak üç problemde incelenen nokta sayısı yürüyen nokta yöntemindeki 26 problemin incelenen nokta sayısına eşit olmaktadır.

3.5.3. Yürüyen Nokta Yöntemi İle Kesen-Düzlem Yönteminin Karşılaştırılması

Kesen-düzlem yönteminde optimum çözüme ulaşılıncaya kadar probleme yeni sınır koşullarının ilave edilmesi gerekmektedir. Bu ise tablo ve hesaplanması gereken işlem sayısındaki artışı beraberinde getirmektedir. Ayrıca çözüme girecek karar değişkeninin belirlenmesi, karar değişkeni seçimi yapıldıktan sonra o değişkene ait satır vektörü üzerindeki rakamların tamsayılı ve kesirli kısımlarının ayrılması işlemi hem fazla hesaplama yapmayı gerekli kılmakta, hem de bu hesaplamalar uzun zaman almaktadır.

Her iki yöntemi tablo sayısı bakımından karşılaştırmak anlamsız olabilir. Çünkü yürüyen nokta yönteminde DP probleminin optimum sonucuna ulaşıldıktan sonra tamsayılı sonucun elde edilmesi için ilave tablolara gereksinim olmayıp sadece alternatif noktaların değerlendirilmesi söz konusudur. Alternatif nokta değerlemenin simpleks tablo çözümünden daha kısa sürede problemin optimum tamsayılı sonucunu sağladığı söylenebilir.

Bir fikir vermesi açısından uygulanan problemlerden 16 tanesinde, tamsayılı optimum sonuç elde edilene kadar, kesen-düzlem yöntemindeki hesaplanan tablo sayısı ile yürüyen nokta yöntemindeki incelenen nokta sayısı Tablo 3.3'de gösterilmiştir.

Tablo 3.3. Yürüyen Nokta ve Kesen-Düzlem Yöntemlerinin Karşılaştırılması.

	Yürüyen Nokta Yöntemi	Kesen-Düzlem Yöntemi
Problem No	İncelenen Nokta Sayısı	Optimum Tamsayılı Çözüm Bulununcaya Kadar Hesaplanan Tablo Sayısı
2	2	5
5	2	7
7	2	5
8	2	7
9	2	5
10	3	5
11	1	6
12	1	5
13	2	5
14	2	7
15	3	7
18	3	5
19	1	7
20	2	5
21	2	9
24	3	7

Problemler üzerinde kesen-düzlem yöntemi uygulanırken, karar değişkeni seçiminde

$$\text{maxi } \{ f_i / \sum_{j=1}^{n} f_{ij} \}$$

kuralı uygulanmıştır.

Tablo 3.3'deki 21 nolu problemi dikkate alırsak, kesen-düzlem yöntemi ile optimum sonuca ulaşılabilmesi için dokuz simpleks tablo hazırlanmıştır ve optimum sonuç 3.kesen-düzlem koşulunun ilavesi ile bulunmuştur. Aynı problem tamsayı koşulu dikkate alınmadan çözüldüğünde, üç simpleks tablo ile optimum sonuca ulaşılmaktadır. Bu sonuç elde edildikten sonra yürüyen nokta yöntemi uygulandığında sadece iki noktanın amaç fonksiyonu değeri bulunduğunda optimum sonuca ulaşılmıştır. Bir problemdeki açıklama dahi, kesen-düzlem yönteminin hesaplama süresi açısından etkin olmadığını gösterir.

3.5.4. Yürüyen Nokta Yöntemi İle Dal-Sınır Yönteminin Karşılaştırılması

Dal-sınır yönteminde de kesen-düzlem yönteminde olduğu gibi, optimum tamsayılı çözümün elde edilmesi için probleme ilave sınır koşulları eklenmektedir. Her yeni sınır yeni tablolar gerektirdiği için nümerik işlem sayısı oldukça fazla olmaktadır. Yürüyen nokta yönteminde yeni bir sınır probleme ilave edilmediği ve orijinal problemdeki sınır koşulları ile yetinildiği için ilave simpleks tablolara gerek kalmamaktadır. Sadece belirli noktaların değerlendirilmesi söz konusudur. Dal-sınır yönteminde tamsayılı optimum çözüm bulununcaya kadar ilave edilen sınır sayısının (alt problem sayısının) çok sayıda olması halinde hesaplanan tablo sayısı da buna paralel olarak çok sayıda olmaktadır. Ayrıca dual simpleks yönteminin uygulanması tablo sayısının daha da artmasına neden olmaktadır.

Her iki yöntemin karşılaştırılması amacıyla orijinal problemin sınır sayısı, tamsayı olma koşulu dikkate alınmadan çözülen DP problemindeki tablo sayısı, dal-sınır yöntemi gereğince orijinal probleme ilave edilen sınır sayısı ile yürüyen nokta yönteminde incelenen alternatif tamsayılı noktaların sayısı Tablo 3.4'de gösterilmiştir.

Uygulama yapılan problemler üzerinde dal-sınır yöntemi uygulanırken, ilk olarak dallara ayrılması gereken karar değişkeni olarak amaç fonksiyonu katsayısı yüksek olan karar değişkeni seçilmiştir ve alt problemler oluşturulmuştur. Oluşturulan alt problemlerden ise, amaç fonksiyonu değeri yüksek olan alt problemin öncelikle çözülmesi kuralı benimsenmiştir.

Tablo 3.4. Yürüyen Nokta ve Dal-Sınır Yöntemlerinin Karşılaştırılması.

Problem No	Orijinal Problemdeki Sınır Sayısı	Tamsayı Olma Koşulu Dikkate Alınmadan Çözülen Orijinal Problemdeki Tablo Sayısı	Yürüyen Nokta Yönteminde İncelenen Nokta Sayısı	Dal-Sınır Yönteminde Orijinal Problemdeki Sınırlara İlaveten Probleme Eklenen Sınır Sayısı
1	2	3	3	12
2	2	3	2	2
3	2	3	1	4
4	3	3	1	4
5	2	3	2	4
6	2	3	2	6
7	2	3	2	2
8	2	3	2	2
9	2	3	2	2
10	2	3	3	2
11	2	2	1	4
12	3	3	1	4
13	3	3	2	2
14	2	3	2	2
15	2	3	3	2
16	2	3	1	6
17	2	3	3	6
18	2	3	3	2
19	2	3	1	4
20	3	3	2	2
21	2	3	2	4
22	2	3	2	6
23	3	4	2	8
24	2	3	3	6
25	2	3	2	12
26	2	3	3	

Hem kesen-düzlem hem de dal-sınır yöntemleri için elimizdeki mevcut bilgisayarlara uygun bilgisayar programları olmadığı için, yöntemleri problemleri hesaplama süresi açısından karşılaştırma olanağı elde edilememiştir.

Bir örnek olması açısından 1 nolu problem için dal-sınır yöntemi uygulandığında orijinal problemdeki iki sınıra ilave 12 sınır daha eklenmesi ile optimum çözüm bulunmuştur. 12 sınır 12 alt problemin çözülmesi demektir. Aynı problem için yürüyen nokta yöntemi uygulandığında, iki sınırlı problemin çözümü ile birlikte 3 tane alternatif tamsayılı noktanın incelenmesi yeterli olacaktır. 12 alt problemin çözümünün gerekli kılan dal-sınır yöntemi, iki sınırlı ve üç noktanın değerlendirilmesini içeren yürüyen nokta yöntemleri karşılaştırıldığında yürüyen nokta yönteminin daha az işlemle ve daha kısa sürede optimum sonuca ulaştığı açıkca görülür.

IV SONUÇ

Tamsayılı programlama problemlerinin çözümünde kullanılan yöntemler; a)Yuvarlama Yöntemi, b)Tam Tarama Yöntemi, c)Kesen-Düzlem Yöntemi, d)Dal-Sınır Yöntemi olmak üzere dört tanedir. Problemlerin çözümü için geliştirilen sezgisel yöntemleri de ilave edersek çözüm yöntemlerini beş gruba ayırabiliriz. Bu yöntemlerden en yaygın kullanılanları ise,dal-sınır ve kesen-düzlem yöntemleridir. Bu yöntemlerin yaygın kullanılma nedeni, optimum tamsayılı çözümü garantilemesinin yanısıra belirli bir algoritmasının olmasıdır.

Yuvarlama yöntemi,DP problemlerinin optimum çözümünden elde edilen kesirli çözüm sonuçlarının en yakın tamsayıya yuvarlanmasıdır. Yöntem bazı problemlerde optimum çözüme ulaşmasına karşın,birçok problemde optimum tamsayılı çözüme ulaşamamaktadır.Çünkü,yuvarlanarak elde edilen tamsayılı nokta uygun çözüm alanının içerisinde olmayabilir veya uygun çözüm alanının içerisinde dahi olsa optimum tamsayılı çözümden uzak olabilir.

Tam tarama yöntemi ise,uygun çözüm alanı içerisinde yer alan tüm alternatif tamsayılı noktaların ayrı ayrı değerlendirilmesini ve bunlar arasında amaç fonksiyonu değeri en yüksek olanının seçilmesini içermektedir. İki karar değişkenli ve iki sınırlı bir maksimizasyon probleminde bile uygun çözüm alanı içerisinde çok sayıda alternatif tamsayılı noktanın bulunma olasılığı dikkate alınırsa, yöntemin etkin bir yöntem olduğu söylenemez. Buna karşın,yöntem optimum tamsayılı çözümü garantilemektedir.

Kesen-düzlem yöntemi, DP problemlerinin optimum simpleks tablosundan itibaren uygulanmaya başlar. DP problemlerinin optimum simpleks tablosunda yer alan kesirli karar değişkenleri için kesen-düzlem koşulları oluşturularak optimum tamsayılı çözüme ulaşılmaya çalışılır. İlave sınır koşulları ilave simpleks tabloların çözülmesini gerektirir, ayrıca tablolara dual simpleks yönteminin uygulanması ile de hesaplanması gereken tablo sayısında artış olmaktadır. İlave sınır koşullarına eklenen boş değişkenler nedeniyle de, simpleks tabloların hem satır hem de sütun sayısında artış olmaktadır. Bunlardan başka,yöntemin hem karma hem de saf tamsayılı problemler için ayrı ayrı uygulanması, çözüme ilk alınacak karar değişkeninin belirlenmesi,değişken seçimi yapıldıktan sonra o değişkene ait satır vektörü üzerinde yapılan işlemlerin uzunluğu nedeniyle de optimum tamsayılı çözüme ulaşma uzun zaman almaktadır.

Dal-sınır yöntemi de kesen-düzlem yönteminde olduğu gibi DP probleminin optimum simpleks tablosundan itibaren uygulanmaya başlar. Yöntem problemi çeşitli alt setlere ayırmakta, bunları sistematik bir şekilde incelemekte ve gereksiz alt setleri elimine etmektir.Yine ilave sınırların problemleme eklenmesi ile ve simpleks tablolara dual simpleks yönteminin uygulanması nedeniyle hesaplanması gereken tablo sayısında artış olmaktadır. İlave sınırlara eklenen boş değişkenler sonucunda da simpleks tabloların hem satır hem de sütun sayısında artış meydana gelmektedir. Bütün bunlardan dolayı da optimum tamsayılı çözüme ulaşma süresi uzun olmaktadır.

Tamsayılı programlama problemlerinin çözümü için geliştirilen söz konusu yöntemlerin bazı özelliklerine dayalı olarak,fakat yuvarlama yöntemindeki güçlüğü ortadan kaldıracak, tam tarama yönteminde olduğu gibi uygun çözüm alanı içerisindeki tüm alternatif tamsayılı noktaların incelenmesini gerektirmeyecek,dal-sınır ve kesen-düzlem yöntemlerinde olduğu gibi çok sayıda işlemi gerekli kılmayacak bir sezgisel yöntem arayışına gidilmiş ve bu noktadan hareketle yeni bir sezgisel yöntem geliştirilmeye çalışılmıştır.

Bilindiği gibi sezgisel yöntemler, optimum sonucu her zaman garanti etmemekle birlikte çoğu kez optimuma yakın sonuçlar vermektedir. Ayrıca sezgisel yöntemler çözümün,optimum çözümden ne kadar uzak olduğunu da belirtmemektedir. Bazı durumlarda ise, optimum sonucu garanti etmektedir. Sezgisel yöntemlerde problemi çözme işleminin anlaşılabilirliği daha kolay olmakta, zamandan tasarruf edilmekte ve işlem sayısı da daha az düzeyde olmaktadır. Bu nedenle de sık sık problemlerin çözümü için bir yöntem olarak kullanılmaktadır. Sezgisel yöntemlerin uygulanması genellikle kolay ve hızlıdır.

Çalışmada öne sürülen sezgisel yöntem, mevcut diğer tekniklerin bazı özelliklerinden yararlanılarak oluşturulmuştur.Yuvarlama yönteminde olduğu gibi kesirli çözüm sonuçları yuvarlanmakta,ancak yuvarlama işlemi en yakın tamsayıya değil aşağıya doğru yapılmaktadır. Böylece yuvarlanarak elde edilen tamsayılı noktanın uygun çözüm alanı içerisinde kalma şansı daha yüksek olmaktadır. Tam tarama yönteminde olduğu gibi önerilen sezgisel yöntemde de, uygun çözüm alanı içerisinde bulunan alternatif tamsayılı noktalar incelenmektedir. Ancak tüm noktaların değerlendirilmesi yapılmayıp,diğerlerine göre daha yüksek amaç fonksiyonu değeri sağlayan noktalar dikkate alınmaktadır.Önerilen sezgisel yöntem, dal-sınır ve kesen-düzlem yöntemlerine de benzemektedir. Bu iki yöntemde olduğu gibi, önerilen sezgisel yöntemde de problemin tamsayı olma koşulu aranmaksızın DP problemi olarak çözülmesi gerekmektedir. Çözüm sonuçları kesirli değerler olarak elde edilmişse, dal-sınır ve kesen-düzlem yöntemlerindeki gibi önerilen sezgisel yöntemde de kesirli çözüm sonuçları çözüm için başlangıç değerleri olarak dikkate alınmaktadır.

Önerilen sezgisel yöntemde DP probleminin çözümünden elde edilen kesirli çözüm sonuçları aşağıya doğru yuvarlanarak bir tamsayılı nokta elde edilmeye çalışılmakta ve bu noktadan eksenlere dikmeler çizilmektedir. Aşağıya doğru yuvarlanarak elde edilen nokta eksenlere çizilen dikmelerin oluşturduğu alanın köşe noktasında yer aldığı için, bu alandaki diğer noktalardan daha yüksek amaç fonksiyonu değerine sahiptir. Böylece söz konusu alandaki diğer noktaların incelenmesine gerek yoktur. Optimum tamsayılı çözüme ulaşmak için incelenecek alan,eksenlere çizilen dikmelerin oluşturduğu alan dışında bulunan bölgelerdir. Bu bölgelerde incelenmesi gereken alternatif tamsayılı noktalar ise, diğerlerine göre daha yüksek amaç fonksiyonu değeri sağlayan noktalardır.Bu noktaların incelenmesi ile kesin olarak optimum tamsayılı çözüme ulaşılmaktadır. Ancak çalışmaların çoğunda amaç fonksiyonu katsayısı yüksek olan karar değişkeni yönünde optimum tamsayılı çözüme ulaşıldığı için incelenmesi gereken bölge tek bölgeye indirgenmiştir. Yine de çok sayıdaki problemde optimum sonuca ulaşılmıştır.

İnceleme yapılan bölgelerin tek bölgeye indirgenmesi ile önerilen sezgisel yöntem bir çok problemde optimum sonucu garanti etmekle birlikte yine de bazı problemlerde optimuma yakın sonuçlar vermektedir. Ek-1'de gösterilen örnek problemlerin 25 tanesinde önerilen sezgisel yöntem optimum tamsayılı çözüme ulaşmakta, yuvarlama yöntemi ile altı problemde aynı başarı sağlanmaktadır. Çözümü yapılan örnek problemlerde yuvarlama yöntemi % 23 oranında optimum tamsayılı çözüme ulaşmasına karşın, önerilen sezgisel yöntemdeki başarı oranı % 96'dır.

Tam tarama yöntemi gereğince örnek problemlerde toplam olarak 500 alternatif tamsayılı nokta değerlendirilirken,önerilen yöntemde 53 noktanın değerlendirilmesi yapılmıştır. Böylece tam tarama yönteminde incelenen nokta sayısı, önerilen yöntemdeki incelenen nokta sayısının yaklaşık 9.5 katıdır. Tam tarama yönteminde optimum tamsayılı sonuca ulaşma şansı 26 problemin tamamında mümkün olmasına karşın,önerilen sezgisel yöntemde sadece bir problemde sonuca ulaşılmamıştır.

Önerilen sezgisel yöntemi dal-sınır ve kesen-düzlem yöntemleri ile tablo sayısı bakımından karşılaştırmak anlamsızdır. Çünkü önerilen yöntemde ilave tablolara gereksinim duyulmamaktadır.Dal-sınır ve kesen-düzlem yöntemleri için elimizdeki mevcut bilgisayarlara uygun bilgisayar programlarının bulunamaması nedeniyle, önerilen sezgisel yöntemi bu iki yöntemle işlem süresi açısından karşılaştırma yapma olanağı elde edilememiştir. Ancak hesaplanan tablo sayısı,çözülmesi gereken alt problemler ile, önerilen sezgisel yöntemdeki incelenen nokta sayısı dikkate alındığında, nokta değerlemenin tablo hesaplamaktan çok daha kolay olduğu ve daha kısa sürede problemi çözdüğü açıkca görülür.

Önerilen sezgisel yöntem, iki karar değişkenli maksimizasyon problemleri üzerinde çalışılarak oluşturulmuştur. Bundan sonraki çalışmalarda karar değişkeni sayısı arttırılabilir veya yöntemin varsayımlarından bazıları kaldırılabilir ya da bu varsayımlar daha esnek hale getirilerek çalışmalara devam edilebilir kanısındayız. Bu nedenle konu ile ilgilenenlere bu çerçeve doğrultusunda çalışmalara devam etmelerini öneririz.

EK-I ÖRNEK PROBLEMLER

1. Mak Z $21X_1 + 22X_2$
Sınırlar $4X_1 + 6X_2 \leqslant 24$
$7X_1 + 4X_2 \leqslant 28$
$X_1, X_2 \geqslant 0$ ve tamsayı

2. Mak Z $2X_1 + 3X_2$
Sınırlar $6X_1 + 5X_2 \leqslant 30$
$X_1 + 2X_2 \leqslant 8$
$X_1, X_2 \geqslant 0$ ve tamsayı

3. Mak Z $4X_1 + 3X_2$
Sınırlar $4X_1 + X_2 \leqslant 10$
$2X_1 + 3X_2 \leqslant 8$
$X_1, X_2 \geqslant 0$ ve tamsayı

4. Mak Z $3X_1 + X_2$
Sınırlar $17X_1 + 11X_2 \leqslant 86.5$
$X_1 + 2X_2 \leqslant 10.2$
$X_1 \leqslant 3.87$
$X_1, X_1 \geqslant 0$ ve tamsayı

5. Mak Z $2X_1 + 3X_2$
Sınırlar $X_1 + 5X_2 \leqslant 11$
$9X_1 + 4X_2 \leqslant 33$
$X_1, X_2 \geqslant 0$ ve tamsayı

6. Mak Z $4X_1 + 7X_2$
Sınırlar $2X_1 + X_2 \leqslant 7$
$X_1 + 3X_2 \leqslant 10.5$
$X_1, X_2 \geqslant 0$ ve tamsayı

7. Mak Z $3X_1 + 4X_2$
Sınırlar $2X_1 + 4X_2 \leqslant 21$
$X_1 + X_2 \leqslant 6$
$X_1, X_2 \geqslant 0$ ve tamsayı

8. Mak Z $4X_1 + 7X_2$
Sınırlar $X_1 + 2X_2 \leqslant 8$
$7X_1 + 4X_2 \leqslant 28$
$X_1, X_2 \geqslant 0$ ve tamsayı

9. Mak Z $4X_1 + 3X_2$
Sınırlar $2X_1 + X_2 \leqslant 8$
$X_1 + 2X_2 \leqslant 8$
$X_1, X_2 \geqslant 0$ ve tamsayı

10. Mak Z $5X_1 + 6X_2$
Sınırlar $X_1 + 2X_2 < 10$
$2X_1 + X_2 < 12$
$X_1, X_2 \geqslant 0$ ve tamsayı

11. Mak Z $35X_1 + 20X_2$
Sınırlar $4X_1 + 7X_2 \leqslant 28$
$9X_1 + 12X_2 \leqslant 50$
$X_1, X_2 \geqslant 0$ ve tamsayı

12. Mak Z $3X_1 + 4X_2$
Sınırlar $X_1 \leqslant 4$
$X_2 \leqslant 3$
$3X_1 + 4X_2 \leqslant 22$
$X_1, X_2 \geqslant 0$ ve tamsayı

13. Mak Z $6X_1 + 4X_2$
Sınırlar $4X_1 + 1.5X_2 \leqslant 12$
$2X_1 + 2X_2 \leqslant 8$
$X_2 \leqslant 3$
$X_1, X_2 \geqslant 0$ ve tamsayı

14. Mak Z $2X_1 + 4X_2$
Sınırlar $2X_1 + 5X_2 \leqslant 16$
$6X_1 + 5X_2 \leqslant 30$
$X_1, X_2 \geqslant 0$ ve tamsayı

15. Mak Z $2X_1 + 3X_2$

Sınırlar $X_1 + X_2 \leqslant 6.5$

$X_1 + 2X_2 \leqslant 9$

$X_1, X_2 \geqslant 0$ ve tamsayı

16. Mak Z $3X_1 + 7X_2$

Sınırlar $X_1 + X_2 \leqslant 7.5$

$X_1 + 3X_2 \leqslant 17.4$

$X_1, X_2 \geqslant 0$ ve tamsayı

17. Mak Z $3X_1 + 7X_2$

Sınırlar $5/7X_1 + X_2 \leqslant 7.5$

$X_1 + 3X_2 \leqslant 16.5$

$X_1, X_2 \geqslant 0$ ve tamsayı

18. Mak Z $3X_1 + 4X_2$

Sınırlar $X_1 + X_2 \leqslant 4$

$3X_1 + 5X_2 \leqslant 15$

$X_1, X_2 \geqslant 0$ ve tamsayı

19. Mak Z $3X_1 + 2X_2$

Sınırlar $X_1 + 2X_2 \leqslant 8$

$2X_1 \leqslant 7$

$X_1, X_2 \geqslant 0$ ve tamsayı

20. Mak Z $7X_1 + 3X_2$

Sınırlar $3X_1 + 7X_2 \leqslant 21$

$3X_1 + X_2 \leqslant 9$

$X_1 + X_2 \leqslant 4$

$X_1, X_2 \geqslant 0$ ve tamsayı

21. Mak Z $2X_1 + 3X_2$

Sınırlar $3X_1 + 20X_2 \leqslant 50$

$X_1 \leqslant 7.5$

$X_1, X_2 \geqslant 0$ ve tamsayı

22. Mak Z $3X_1 + 7X_2$

Sınırlar $X_1 + X_2 \leqslant 7.5$

$X_1 + 3X_2 \leqslant 16.5$

$X_1, X_2 \geqslant 0$ ve tamsayı

23. Mak Z $21X_1 + 16X_2$

Sınırlar $4X_1 + 6X_2 \leqslant 24$

$7X_1 + 4X_2 \leqslant 28$

$X_1 \leqslant 3.75$

$X_1, X_2 \geqslant 0$ ve tamsayı

24. Mak Z $5X_1 + 3X_2$

Sınırlar $16X_1 + 6X_2 \leqslant 96$

$7X_1 + 11X_2 \leqslant 77$

$X_1, X_2 \geqslant 0$ ve tamsayı

25. Mak Z $560X_1 + 540X_2$

Sınırlar $10X_1 + 12X_2 \leqslant 30$

$6X_1 + 5X_2 \leqslant 15$

$X_1, X_2 \geqslant 0$ ve tamsayı

26. Mak Z $21X_1 + 22X_2$

Sınırlar $4X_1 + 6X_2 \leqslant 24$

$0.913X_1 + 0.95X_2 \leqslant 4.565$

$X_1, X_2 \geqslant 0$ ve tamsayı

E K - 2

```
5 REM  ***YÜRÜYEN NOKTA YÖNTEMİ***

6 REM ÇOKLU ÇÖZÜMLÜ VE AMAÇ FONKSİYONU KATSAYILARI EŞİT DP PROBLEMLERİ PROGRAMA DAHİL EDİLMEMİŞTİR. PROBLEMİN SINIR KOŞULLARINA AİT VERİLER 610 NO'LU DATA SATIRINA ÖNCE SAĞ TARAF SABİTİ, SONRA KARAR DEĞİŞKENLERİNİN KATSAYILARI ŞEKLİNDE GİRİLECEKTİR. 700 NO'LU DATA SATIRINA İSE ÖNCE "0" SONRA DA AMAÇ FONKSİYONU KATSAYILARI GİRİLECEKTİR. OLMAYAN DEĞİŞKENLER İÇİN "0" GİRİLMELİDİR.

10 CLS
20 İNPUT "SINIR SAYISI=";N
25 DIM T(N+1)
30 DIM A(N+1,N+3):DIM A$(N+1,3)
40 DIM B$(N+4,3):DIM O(N):DIM S(N+1,3):DIM P(N+1)
42 DIM W(N)
45 FOR I=1 TO N:LET A$(I)="Y"+STR$ I:NEXT I
46 FOR I=1 TO 4
47 READ B$(I)
48 NEXT I
49 DATA "CD","CDD","X1","X2"
50 FOR I=5 TO N+4:LET B$(I)="Y"+STR$(1-4):NEXT I
55 FOR I=1 TO N+1
60 FOR J=1 TO 3
70 READ A(I,J):LET S(I,J)=A(I,J)
80 NEXT J:NEXT I
90 LET A=1
100 FOR I=4 TO N+3
110 LET A(A,I)=1
120 LET A=A+1
130 NEXT I
135 GO TO 422
140 LET A=A(N+1,2)
145 FOR I=2 TO N+3
150 IF A<=A(N+1,I) THEN LET A=A(N+1,I):LET B=I
160 NEXT I
170 IF A =0 THEN GO TO 600
180 FOR I=1 TO N
184 IF A(I,B)<=0 THEN GO TO 190
186 LET O(I)=A(I,1)/A(I,B)
190 NEXT I
200 FOR I=1 TO N
210 IF O(I)< =0 THEN GO TO 230
220 LET A=O(I)
230 NEXT I
240 FOR I=1 TO N
250 IF O(I) < =0 THEN GO TO 270
260 IF A > =O(I) THEN LET A=O(I):LET C=I
270 NEXT I
274 LET A$(C)=B$(B+1)
275 LET AA=A(C,B)
278 FOR I=1 TO N+3
280 LET A(C,I)=A(C,I)/AA
290 NEXT I
300 IF C=1 THEN GO TO 370
310 FOR I=1 TO C-1
```

```
320 LET AA=A(I,B)
330 FOR J=1 TO N+3
340 LET A(I,J)=A(I,J)-AA * (C,J)
350 NEXT J
360 NEXT I
370 FOR I=C+1 TO N+1
380 LET AA=A(I,B)
390 FOR J=1 TO N+3
400 LET A(I,J)=A(I,J)-AA * A(C,J)
410 NEXT J
420 NEXT I
422 CLS
425 PRİNT B$(1);
430 FOR I=2 TO N+4
440 PRİNT TAB((I-1) * 5);B$(I);
450 NEXT I:PRİNT
460 FOR I=0 TO 31:PRİNT "-";:NEXT I:PRİNT
465 FOR I=1 TO N
470 PRİNT A$(I);
480 FOR J=1 TO N+3
490 PRİNT TAB J*5;INT(A(I,J)*100)/100;
500 NEXT J:PRİNT
510 NEXT I
520 FOR I=0 TO 31:PRİNT "-";:NEXT I:PRİNT
530 FOR I=1 TO N+3
540 PRİNT TAB(I*5);INT(A(N+1,I)*100)/100;
550 NEXT I:PRİNT
555 FOR I=1 TO N:LET O(I)=0:NEXT I
560 GO TO 140
600 PRİNT "OPTİMUM ÇÖZÜME ULAŞILDI"
610 DATA 30,6,5,8,1,2
700 DATA 0,2,3
720 FOR I=1 TO N
730 LET T(I)=S(I,1)
770 NEXT I
780 FOR I=1 TO N
790 IF A$(I,1 TO 3)="X1" THEN LET A=INT(A(I,1))
800 IF A$(I,1 TO 3)="X2" THEN LET B=INT(A(I,1))
810 NEXT I
820 LET X1=S(N+1,2):LET X2=S(N+1,3)
830 IF X1 > X2 THEN GO TO 942
832 LET S=3
833 GO SUB 2000
835 DIM D(A+2,A1+1)
836 LET QQ=A+2:LET ZZ=A1+1
837 GO SUB 3000
840 FOR J=1 TO N
850 LET P(J)=A*S(J,2)+B*S(J,3)
860 NEXT J
865 LET SS=0
880 FOR J=1 TO N
890 IF P(J) < =T(J) THEN LET SS=SS+1
895 NEXT J
897 IF A=0 AND SS < N THEN GO TO 1060
901 IF SS < N THEN GO TO 910
```

```
902 LET D(A+1,B+1)=A*S(N+1,2)+B*S(N+1,3)
904 IF A=0 THEN GO TO 1060
905 IF SS=N THEN GO TO 930
910 LET A=A-1
920 GO TO 840
930 LET B=B+1
940 GO TO 840
942 LET S=2: LET B=B+2
943 GO SUB 2000
944 DIM D(A1+1,B+1)
945 LET QQ=A1+1: LET ZZ=B+1
950 LET SS=0
952 IF B=0 THEN GO TO 1014
955 FOR J=1 TO N
960 LET P(J)=A*S(J,2)+B*S(J,3)
970 NEXT J
990 FOR J=1 TO N
1000 IF P(J)< =T(J) THEN LET SS=SS+1
1010 NEXT J
1011 IF B=0 AND SS <0 THEN GO TO 1060
1012 IF SS < N THEN GO TO 1020
1014 LET D(A+1,B+1)=A*S(N+1,2)+B*S(N+1,3)
1017 IF B=0 THEN GO TO 1060
1018 IF SS=N THEN GO TO 1040
1020 LET B=B-1
1030 GO TO 950
1040 LET A=A+1
1050 GO TO 950
1060 LET F=D(1,1)
1065 FOR I=1 TO QQ
1070 FOR J=1 TO ZZ
1075 IF D(I,J)=0 THEN GO TO 1090
1080 IF F < D(I,J) THEN LET F=D(I,J):LET S1=I:LET S2=J
1090 NEXT J:PRİNT:NEXT I
1095 PRİNT "OPTİMUM TAMSAYILI NOKTA:":PRİNT:PRİNT "X1=";S1-1;"
     ";"X2=";S2-1;"Z=";F
1100 STOP
2000 FOR I=1 TO N
2002 IF S(I,S)=0 THEN GO TO 2020
2010 LET W(I)=S(I,1)/S(I,S)
2020 NEXT I
2030 LET A1=W(1)
2040 FOR I=1 TO N
2050 IF S(I,S)=0 THEN GO TO 2070
2060 IF A1 >W(I) THEN LET A1=W(I)
2070 NEXT I
2080 RETURN
3000 FOR J=1 TO N
3010 LET P(J)=A*S(J,2)+B*S(J,3)
3030 NEXT J:LET SS=0
3035 FOR J=1 TO N
3040 IF P(J) < =T(J) THEN LET SS=SS+1
3050 NEXT J
3060 IF SS <N THEN RETURN
3070 LET A=A+1
3080 GO TO 3000
4000 STOP
```

YARARLANILAN KAYNAKLAR

KİTAPLAR

Bazaara,Mokhtar S.and John J.Jarvis. **Linear Programming and Network Flows**. New York: John Wiley and Sons Inc.,1977.

Campell,Hugh G. **Linear Algebra with Applications Including Linear Programming**.Englewood Cliffs,N.J.:Prentice-Hall Inc.,1971.

Cohen,S.S. **Operational Research**.London:Butler and Tanner Ltd.,1985.

Cook,Thomas M.and Robert A.Russell.**Introduction to Management Science**. 2nd Ed.Englewood Cliffs,N.J.:Prentice-Hall Inc.,1981.

Daellenbach,Hans G.and John A.George.**Introduction to Operations Research Techniques**.Boston:Allyn and Bacon Inc.,1978.

Dannenbring,David G.and Martin K.Starr.**Management Science:An Introduction**.Auckland:McGraw-Hill Inc.,1981.

Dantzig,George B.**Linear Programming and Extensions**.Englewood Cliffs,N. J.:Princeton University Press,1963.

Doğan,Muammer.**İşletme Ekonomisi ve Yönetimi**.Genişletilmiş 2.Baskı. İzmir:İstiklal Matbaası,1984.

Eppen,Gary D.and F.J.Gould.**Quantative Concepts for Management:Decision Making Without Algorithms**.Englewood Cliffs,N.J.:Prentice-Hall Inc., 1976.

Gallagher,Charles A.and Watson Hugh J.**Quantitative Methods for Business Decisions**.New York:McGraw-Hill Inc.,1980.

Garfinkel,Robert S.and George L.Nemhauser.**Integer Programming**.New York: John Wiley and Sons Inc.,1972.

Gass,Saul I.**Linear Programming Methods and Applications**.Fourth Ed. New York:McGraw-Hill Inc.,1975.

Greenberg,Harold.**Integer Programming**.New York:Academic Press Inc.,1971.

Halaç,Osman.**Kantitatif Karar Verme Teknikleri(Yöneylem Araştırması)**. İstanbul:İstanbul Üniversitesi Yayını,1978.

Hartley,Ronald V.**Operations Research:A Managerial Emphasis**.California: Goodyear Publishing Inc.,1976.

Johnson,Rodney D.and Bernard R.Sıskın.**Quantitative Techniques for Business Decisions**.Englewood Cliffs,N.J.:Prentice-Hall Inc.,1976.

Kobu,Bülent.**İşletme Matematiği II**.3.Baskı.İstanbul:İstanbul Üniversi - tesi Yayını,1981.

Lawrence,Lapin L.**Management Science for Business Decision**.New York: Harcourt Brace Jouanovich Inc.,1980.

Levin,Richard I.and Charles A.Kirkpatrick.**Quantitative Approachs to Management**.Fourth Ed.New York:McGraw-Hill Inc.,1978.

Maskowitz,Herbert. and Gordon P.Wright.**Operations Research Techniques for Management**.Englewood Cliffs,N.J.:Prentice-Hall Inc.,1979.

Murty,Katta G.**Linear and Combinatorial Programming**.New York:John Wiley and Sons Inc.,1976.

Özer,Serper. ve Necmi Gürsakal.**Doğrusal Programlama**.Bursa:BİTİA İşletme Fakültesi Yayını,1982.

Özgüven,Cemal.**Doğrusal Programlama**.Kayseri:Erciyes Üniversitesi İkti - sadi ve İdari Bilimler Fakültesi Yayını,1986.

--,"Saf Tamsayı Programlama Problemleri".(Teksir,Erciyes Üniversitesi İktisadi ve İdari Bilimler Fakültesi,1982).

Pfaffenberger,Roger C.and David A.Walker.**Mathematical Programming for Economics and Business.**Iowa:The Iowa State University Press,1976.

Sarıaslan,Halil.**Kaynak Dağılımında Doğrusal Programlama.**Ankara: Ankara Üniversitesi Siyasal Bilgiler Fakültesi Yayını,1986.

Savaş,Vural Fuat.**Yatırım Planlaması İçin Metodolojik Bir Sentez.**İstanbul:Sermet Matbaası,1965.

Şenel,Musa.**Doğrusal Programlama İle Üretim Planlaması ve Bir Tekstil İşletmesinde Uygulama.**Ankara:Eskişehir İktisadi ve Ticari İlimler Akademisi Yayını,1974.

Taha,Hamdy A.**Integer Programming:Theory,Applications and Computations.** New York:Academic Press Inc.,1975.

--,**Operations Research:An Introduction.**2nd Ed.New York:Mcmillan Publishing Inc.,1976.

Thierauf,Robert J.**Decision Making Through Operations Research.**Ed. Richard A.Grosse.New York:John Wiley and Sons Inc.,1970.

Tolunoy,Yılmaz.**Matematik Programlama ve İşletme Uygulamaları.**Vize: İstanbul Üniversitesi Yayını,1980.

Ullmann,John.**Theory and Problems of Quantitative Methods in Management.** New York:McGraw-Hill Inc.,1976.

Uman,Nuri.**Ulaştırma Modeli ve Petrol Ofisinde Uygulama Denemesi.**Ankara: Ankara Üniversitesi Siyasal Bilgiler Fakültesi Yayını,1974.

Wagner,Harvey M.**Principles of Management Science With Applications to Executive.**2nd Ed.Englewood Cliffs,N.J.:Prentice-Hall Inc.,1975.

Yılmaz,Cengiz.**Yönetim Ekonomisi.**Kayseri:Erciyes Üniversitesi Matbaası, 1985.

--,"İşletmelerde Karar Verme Süreci ve Sayısal Yöntemler".(Teksir,Erciyes Üniversitesi İktisadi ve İdari Bilimler Fakültesi,1983).

MAKALELER

Dizdaroğlu T.ve C.Çakır."Tamsayılı Programlama Yönteminin Esasları", **Ege Üniversitesi Bilgisayar Araştırma ve Uygulama Dergisi**.Cilt 6, Sayı 2(Aralık 1983),ss.127-140.

Grötschel,Martin,Michael Jünger and Gerhard Reinelt."A Cutting Plane Algorithms for The Linear Ordering Problem",**Operations Research**. Vol.32,No.4(November-December 1984),ss.1195-1220.

Henderson,Alexander and Robert Schlaifer."Matematiksel Programlama:Tutarlı Karar Vermede İleri Bilgiler",Çev.Ahmet S.Talu,**Eskişehir İktisadi ve Ticari İlimler Akademisi Dergisi**.Cilt 7,Sayı 1(Ocak 1971) ss.199-264.

Holm,Soren."Maintaining the All-Integer Property of An ILP When Using Cuts in Rational Data",**Operations Research**.Vol.33,No.1(January-February 1982),ss.208-209.

Kara,İmdat."Yöneylem Araştırması ve İşletmecilikteki Yeri", **Eskişehir İktisadi ve Ticari İlimler Akademisi Dergisi**.Cilt 9,Sayı 2(Haziran 1973),ss.82-104.

Özgen,Hüseyin."Doğrusal Programlama:Kuram ve Uygulama Açısından Genel Bir Yaklaşım",**Adana İktisadi ve Ticari İlimler Akademisi Dergisi**. Sayı 3(Mart 1974),ss.55-71.

--,"Üretim Planlama ve Kontrol Sürecine İlişkin Analitik Yöntemler Üzerine Kuramsal Bir İnceleme",**Adana İktisadi ve Ticari İlimler Akademisi Dergisi**.Sayı 5(Mart 1976),ss.169-219.

Özgüven,Cemal ve Cengiz Yılmaz."Değişik Kâr Düzeylerinde En Az Kaynak Kullanımlı Ürün Bileşimlerinin Bulunması",**Erciyes Üniversitesi İktisadi ve İdari Bilimler Fakültesi Dergisi**.Sayı 4(Mayıs 1983), ss. 169-179.