



T.C.  
İSTANBUL ÜNİVERSİTESİ  
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ



**YÜKSEK LİSANS TEZİ**

**KÜRESEL TERS SARKACIN TEORİK MODELLEME ve  
KONTROLÜ**

**Fatih Burak TAN**

**Makine Mühendisliği Anabilim Dalı**

**Makine Mühendisliği Programı**

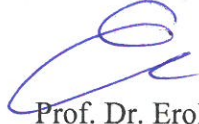
**DANIŞMAN  
Prof. Dr. Erol UZAL**

**Haziran, 2018**

**İSTANBUL**

Bu çalışma, 19.06.2018 tarihinde aşağıdaki jüri tarafından Makine Mühendisliği Anabilim Dalı, Makine Mühendisliği Programında Yüksek Lisans tezi olarak kabul edilmiştir.

**Tez Jürisi**



Prof. Dr. Erol UZAL(Danışman)  
İstanbul Üniversitesi  
Mühendislik Fakültesi



Prof. Dr. Cüneyt FETVACI  
İstanbul Üniversitesi  
Mühendislik Fakültesi



Prof. Dr. Recep BURKAN  
İstanbul Üniversitesi  
Mühendislik Fakültesi



Prof. Dr. Metin Orhan KAYA  
İstanbul Teknik Üniversitesi  
Uçak ve Uzay Bilimleri Fakültesi



Dr. Öğr. Üyesi Adem ÇINARLI  
İstanbul Üniversitesi  
Mühendislik Fakültesi



20.04.2016 tarihli Resmi Gazete’de yayımlanan Lisansüstü Eğitim ve Öğretim Yönetmeliğinin 9/2 ve 22/2 maddeleri gereğince; Bu Lisansüstü teze, İstanbul Üniversitesi’nin aboneli olduğu intihal yazılım programı kullanılarak Fen Bilimleri Enstitüsü’nün belirlemiş olduğu ölçütlere uygun rapor alınmıştır.

## ÖNSÖZ

Yüksek lisans öğrenimim ve tez çalışmam sırasında kıymetli bilgi, birikim ve tecrübeleri ile bana destek olan başta değerli danışman hocam sayın Prof. Dr. Erol UZAL'a, bilgi ve önerileri ile yol gösteren Öğr.Gör. Aydın ÖZBEY'e, kıymetli yardımlarından dolayı Dilara TAPDIK'a ve her zaman beni destekleyen aileme sonsuz teşekkür ve saygılarımı sunarım.

Haziran 2018

Fatih Burak TAN



# İÇİNDEKİLER

Sayfa No

ÖNSÖZ .....	iv
İÇİNDEKİLER.....	v
ŞEKİL LİSTESİ .....	vi
SİMGE VE KISALTMA LİSTESİ.....	vii
ÖZET .....	viii
SUMMARY .....	ix
1. GİRİŞ.....	1
2. GENEL KISIMLAR .....	3
3. MALZEME VE YÖNTEM .....	5
3.1. TAYLOR SERİSİ İLE LİNEERLEŞTİRME.....	5
3.2. TAM DURUM GERİ BESLEMELİ KONTROL.....	6
3.2.1. Geri Besleme Kazancı Sabitlerinin Kutup Yerleştirme Metodu ile Hesaplanması.....	6
4. BULGULAR .....	8
4.1. KÜRESEL TERS SARKACIN MODELLENMESİ VE KONTROLÜ .....	8
4.1.1. Nonlineer Hareket Denklemlerinin Taylor Serisi İle Lineerleştirilmesi .....	10
4.1.2. Sistemin Durum Uzay Gösterimi .....	10
4.1.3. Kontrol Edilebilirlik .....	12
4.1.4. Tam Durum Geri Beslemeli Kontrol .....	12
5. TARTIŞMA VE SONUÇ .....	34
KAYNAKLAR.....	35
ÖZGEÇMİŞ .....	36

## ŞEKİL LİSTESİ

	Sayfa No
Şekil 1.1: Ayakta Duran İnsan Modeli.....	1
Şekil 4.1: Küresel Ters Sarkaç Sistemi.....	8
Şekil 4.2: Farklı kutupların $x$ , $y$ , $\theta$ ve $\phi$ çıktılarına etkisi.....	17
Şekil 4.3: Farklı kutupların $\dot{x}$ , $\dot{y}$ , $\dot{\theta}$ ve $\dot{\phi}$ çıktılarına etkisi .....	18
Şekil 4.4: Farklı kutupların $F_x$ kuvveti üzerindeki etkisi .....	19
Şekil 4.5: Farklı kutupların $F_y$ kuvveti üzerindeki etkisi .....	20
Şekil 4.6: Sistemin kütlesi ve sarkacın boyu uzatıldığında farklı kutupların $F_x$ kuvveti üzerindeki etkisi.....	21
Şekil 4.7: Sistemin kütlesi ve sarkacın boyu uzatıldığında farklı kutupların $F_y$ kuvveti üzerindeki etkisi.....	22
Şekil 4.8: $\theta = \phi = 5^\circ$ iken lineer ve nonlinear sistemlerde $x$ , $y$ , $\theta$ ve $\phi$ çıktıları .....	23
Şekil 4.9: $\theta = \phi = 5^\circ$ iken lineer ve nonlinear sistemlerde $\dot{x}$ , $\dot{y}$ , $\dot{\theta}$ ve $\dot{\phi}$ çıktıları.....	24
Şekil 4.10: $\theta = \phi = 30^\circ$ iken lineer ve nonlinear sistemlerde $x$ , $y$ , $\theta$ ve $\phi$ çıktıları.....	25
Şekil 4.11: $\theta = \phi = 30^\circ$ iken lineer ve nonlinear sistemlerde $\dot{x}$ , $\dot{y}$ , $\dot{\theta}$ ve $\dot{\phi}$ çıktıları.....	26
Şekil 4.12: $\theta = \phi = 40^\circ$ iken nonlinear sistemin $x$ , $y$ , $\theta$ ve $\phi$ çıktıları için kararsız davranışı .....	27
Şekil 4.13: $\theta = \phi = 40^\circ$ iken nonlinear sistemin $\dot{x}$ , $\dot{y}$ , $\dot{\theta}$ ve $\dot{\phi}$ çıktıları için kararsız davranışı .....	28
Şekil 4.14: $\theta = \phi = 40^\circ$ iken lineer ve nonlinear sistemlerde $x$ , $y$ , $\theta$ ve $\phi$ çıktıları .....	30
Şekil 4.15: $\theta = \phi = 40^\circ$ iken lineer ve nonlinear sistemlerde $\dot{x}$ , $\dot{y}$ , $\dot{\theta}$ ve $\dot{\phi}$ çıktıları .....	31
Şekil 4.16: $\theta = \phi = 40^\circ$ iken $F_x$ kuvveti .....	32
Şekil 4.17: $\theta = \phi = 40^\circ$ iken $F_y$ kuvveti .....	33

## SİMGE VE KISALTIMA LİSTESİ

<b>Simgeler</b>	<b>Açıklama</b>
<b>I</b>	: Sarkacın atalet momenti [kg.m <sup>2</sup> ]
<b>k</b>	: Geri besleme kazancı sabitleri
<b>l</b>	: Ters sarkacın boyunun yarısı [m]
<b>M</b>	: Hareketli taban plakasının kütlesi [kg]
<b>m</b>	: Sarkacın kütlesi [kg]
<b><math>\phi</math></b>	: Sarkacın x-z düzlemiyle yaptığı açı [derece]
<b><math>\theta</math></b>	: Sarkacın y-z düzlemiyle yaptığı açı [derece]
<b>x</b>	: Hareketli taban plakasının x doğrultusundaki yer değiştirmesi [m]
<b>y</b>	: Hareketli taban plakasının y doğrultusundaki yer değiştirmesi [m]
<b>s</b>	: Sistem kutupları
<b>Kısaltmalar</b>	<b>Açıklama</b>
<b>KTS</b>	: Küresel ters sarkaç

## ÖZET

### YÜKSEK LİSANS TEZİ

#### KÜRESEL TERS SARKACIN TEORİK MODELLEME ve KONTROLÜ

**Fatih Burak TAN**

**İstanbul Üniversitesi**

**Fen Bilimleri Enstitüsü**

**Makine Mühendisliği Anabilim Dalı**

**Danışman : Prof. Dr. Erol UZAL**

Bu çalışmada küresel ters sarkaç sistemi modellenerek bu sistemi kararlı duruma getirmek için lineer bir kontrolcü tasarlanmıştır. Lineer kontrolcünün tasarlanabilmesi için küresel ters sarkaç sisteminin sahip olduğu nonlinear hareket denklemleri lineerleştirilmiştir. Çalışma sonucunda tam durum geri besleme metoduna dayalı lineer kontrolcünün, küresel ters sarkacı üst denge konumuna, hareketli taban plakasını da başlangıç konumuna getirerek küresel ters sarkaç sistemini kontrol edebildiği görülmüştür.

Haziran 2018, 45 sayfa.

**Anahtar kelimeler:** Lineerleştirme, Tam Durum Geri Besleme, Kutup Yerleştirme, Kontrol Edilebilirlik



## **SUMMARY**

### **M.Sc. THESIS**

#### **THEORETICAL MODELLING AND CONTROL OF SPHERICAL INVERTED PENDULUM**

**Fatih Burak TAN**

**İstanbul University**

**Institute of Graduate Studies in Science and Engineering**

**Department of Mechanical Engineering**

**Supervisor : Prof. Dr. Erol UZAL**

In this study, a spherical inverted pendulum system was modeled and a linear controller was designed to stabilize this system. Nonlinear equations of motion of the spherical inverted pendulum system were linearized to design the linear controller. The result of the study shows that the linear controller based on full state feedback method is capable to bring the pendulum to the top equilibrium point and the movable base to the origin.

June 2018, 45. pages.

**Keywords:** Linearization, Full State Feedback, Pole Placement, Controlability



Ters sarkaç sisteminin görüldüğü diğer uygulamalara örnek olarak roket ya da füzelerin güdümleri, gınger ulaşım araçları örnek olarak verilebilir.



## 2. GENEL KISIMLAR

Küresel ters sarkaç sisteminin stabilizasyonu çeşitli kontrol stratejilerinin uygulanabilmesi için elverişli bir çalışma imkanı sağladığından bu konu ile ilgili oldukça çeşitli çalışma yapılmıştır. Bu bölümde bu çalışmaların bazılarından bahsedilmiştir.

Fajar, Douglas ve Gomm [1] LQR yöntemi kullanarak çok tahrikli bir sistem olan küresel ters sarkacın stabilizasyonu üzerine çalışmışlardır. Ters sarkaç sistemi, x ve y eksenlerinde hareket eden araba üzerinde sarkacın küresel olarak hareketinden oluşmaktadır. Bu çalışmada LQR kontrolcünün küresel sarkaç sisteminin çoklu giriş ve çoklu çıkışını başarılı bir şekilde kontrol edebildiği görülmüştür.

Octavio, Humberto ve Carlos [2] üzerinde çalıştıkları ters sarkaç sistemi, yatay düzlemde(x, y) hareket eden plaka üzerine küresel bir mafsal ile serbest bir şekilde monte edilmiş sarkaçtan oluşan, dört serbestlik derecesine sahip bir sistemdir. Bu çalışmada LaSalle'nin değişmezlik prensibi ile birlikte Lyapunov yaklaşımına dayalı kontrol stratejisini kullanarak küresel ters sarkacın stabilizasyonunu incelemişlerdir. Çalışma sonucunda önerilen kontrolcünün sarkacı hareketli taban ile birlikte stabil olmayan denge konumuna getirebildiğini gözlemlemişlerdir.

Grangyu, Dragan ve Iven [3] nonlinear dört serbestlik dereceli bir küresel ters sarkaç sistemi için çıktı izleme kontrol yasası tasarlayarak ters sarkacı kontrol etmişlerdir.

Myung-Gon Yoon [4] birbirine paralel durumdaki iki tekerlek ile hareket eden bir taban üzerindeki küresel ters sarkacın lineer olmayan dinamik modelini oluşturup ulaşılmak istenen tam dik denge konumuna çok yakın bir bölgede sistemi lineerleştirerek geliştirmiş oldukları lineer kontrolcü ile küresel ters sarkacı stabilize etmiştir.

Albouy ve Praly [5] ters sarkaç sistemlerini kontrol etmek için bir yukarı salınım (swing-up) stratejisi tasarlamışlardır. Sarkacı yeterli seviyede ancak düşük bir hız ile en üst konuma getirmek için öncelikle bir yukarı salınım (swing-up) kontrolcü tasarlamış ve daha sonra nonlinear kontrolcüden lineer kontrolcüye geçiş yaparak sistemi arzu edilen denge konumuna getirmişlerdir.

Hoshino ve diğlereri [6] düzlemsel yönlendirici ve görüntü sensörü kullanarak üçlü küresel ters sarkacın üst denge konumu civarında stabilize etmek için sistemi modelleyerek kontrolcü geliştirmiştir.

Yukarıda bahsedilen çalışmalarda görüldüğü üzere ters sarkaç sistemleri için kontrolcü geliştirilirken birçok farklı yöntem uygulanmıştır. Bu çalışma da ise tam durum geri besleme olarak adlandırılan lineer kontrolcü ile küresel ters sarkacın kontrolü gerçekteştirilmiştir.



### 3. MALZEME VE YÖNTEM

Küresel ters sarkaç sistemini kontrol edebilmek için uygulanan yöntemler bu bölümde açıklanmaktadır.

Bu çalışmada uygulanacak olan kontrolcü lineer sistem üzerinden geliştirilmektedir. Bu nedenle sistemin sahip olduğu nonlinear hareket denklemlerin lineerleştirilmesi gerekmektedir.

#### 3.1. TAYLOR SERİSİ İLE LİNEERLEŞTİRME

Lineerlik prensip olarak giriş ve çıkışın orantılı olması iken nonlinear sistemler zamana bağlı olarak girişi ile çıkışı arasındaki oranın değişiklik gösterdiği sistemlerdir.

Nonlinear sistemler, sistemin ulaşılmak istenen referans değere yakın küçük bir aralıkta çalışacağı kabulü ile lineerleştirilerek kontrol edilebilirler. Bu aralık lineer ve nonlinear sistemlerin aynı girişlere verdiği cevapların benzeştiği bölge olarak tanımlanabilir.

Bu çalışmada Taylor serisi yöntemi kullanılarak lineerleştirme yapılmıştır.

Bir  $f(x)$  fonksiyonu  $a$  noktası etrafında Taylor serisi açılımı,

$$f(a) + f'(a)(x - a) + \frac{f''(a)}{2!}(x - a)^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x - a)^n + \dots \quad (3.1)$$

(3.1) ifadesinde verilmiştir. Lineerleştirme için  $n=1$  alınır ve serinin diğer terimleri ihmal edilerek (3.2)' deki sadeleştirilmiş ifade elde edilir.

$$f(x) \approx f(a) + f'(a)(x - a) \quad (3.2)$$

Eğer çok değişkenli bir  $f(x)$  fonksiyonu söz konusu ise Taylor serisi açılımı,

$$f(x, y) \approx f(a, b) + \frac{\partial f}{\partial x}(a, b)(x - a) + \frac{\partial f}{\partial y}(a, b)(y - b) \quad (3.3)$$

şeklinde tanımlanır. [8]

### 3.2. TAM DURUM GERİ BESLEMELİ KONTROL

Tam durum geri beslemeli kontrol, lineer bir sistemin tüm durum değişkenlerinin göz önüne bulundurulduğu kontrol yöntemidir. Bir sisteme tam durum geri besleme yönteminin uygulanabilmesi için sistemin tüm durum değişkenlerinin ölçülebilir olması ve sistemin kontrol edilebilir olması gerekmektedir.

Lineer bir sistemin durum uzay gösterimi,

$$\dot{x} = Ax + Bu \quad (3.4)$$

olmak üzere, A sistem matrisini, x durum değişkenlerini, u kontrol girişi, B ise giriş matrisini temsil etmektedir. Kontrol edilebilirlik şartı,

$$C = [B \quad AB \quad A^2B \quad \dots \quad A^{n-1}B] \quad (3.5)$$

olmak üzere C matrisinin rankının sistemin derecesine (n) eşit olması gerekmektedir. Böylece sistemin tüm durum değişkenleri belirli bir zaman aralığında başlangıç konumundan hedeflenen referans konumuna götürülebilir.

#### 3.2.1. Geri Besleme Kazancı Sabitlerinin Kutup Yerleştirme Metodu ile Hesaplanması

Kutup yerleştirme yönteminin uygulanabilmesi için gerek ve yeter şart sistemin kontrol edilebilir olmasıdır. Bu şartın sağlanması ile birlikte lineer sistem üzerinden kutup yerleştirme yöntemi ile geri besleme kazancı sabitleri elde edilebilir. Elde edilen bu kontrol kazancı sabitleri, nonlinear sistemin lineerleştirme yapılan bölge civarında kontrol edilebilmesine olanak sağlar.

Bir sistemin davranışını kutupların konumu belirler. Sistemin kararlı olabilmesi için kutupların s-düzleminin sol kısmında olması gerekir. Kutupların s-düzleminin imajiner ekseninde yer alması ise osilasyona neden olmaktadır. Osilasyon olmaması için sistem kutuplarının negatif reel eksen üzerinde olması gerekir.

Kutup yerleştirme metodu ile lineer bir sistemin kutupları (özdeğer) önceden seçilerek geri besleme kazancı sabitleri hesaplanır. Bu sabitler hedeflenen kapalı çevrim performansının elde edilmesine olanak sağlar.

Lineer bir sistemin durum uzay gösterimi,

$$\dot{x} = Ax + Bu \quad (3.6)$$

olmak üzere bu sisteme tam durum geri beslemesi uygulanırsa,

$$u = -Kx \quad (3.7)$$

kontrol kanunu ile (3.6) denkleminde tanımlanan lineer sistemden,

$$\dot{x} = (A + BK)x \quad (3.8)$$

kapalı çevrim sistemi elde edilir. Daha sonra (3.9) ifadesinde verilen karakteristik polinom eşitliği yazılarak sistemin geri besleme kazancı matrisi (K matrisi) elde edilir.

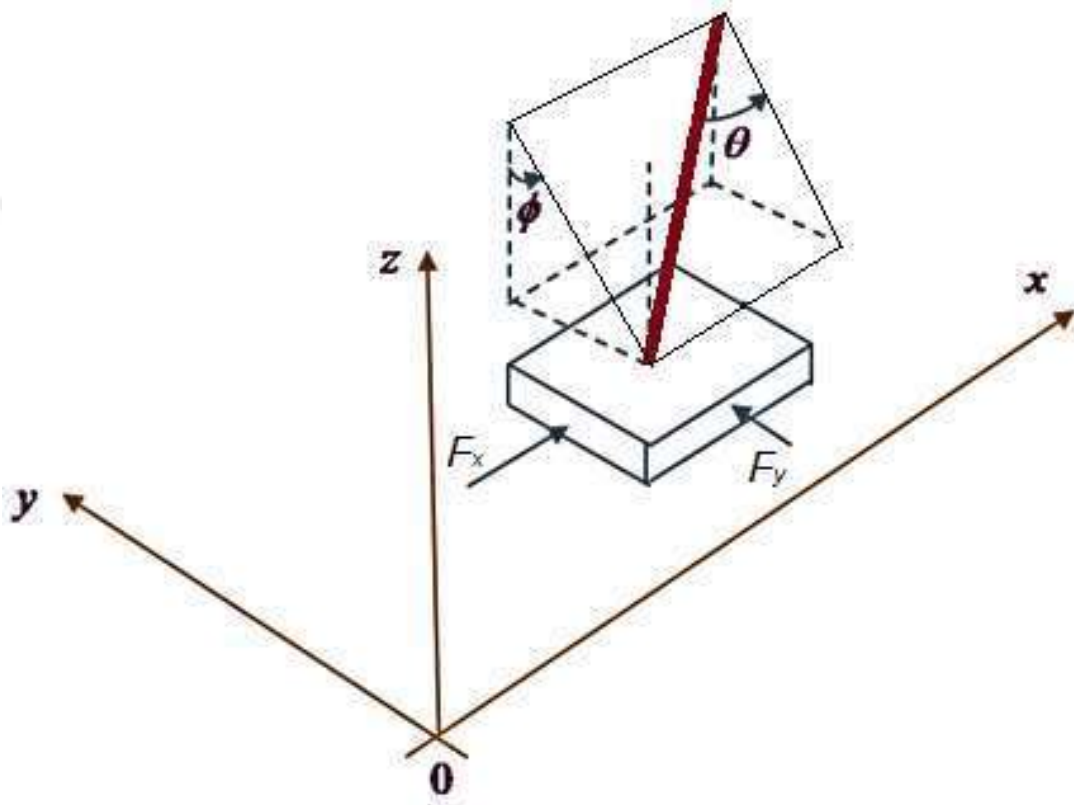
$$|sI - A - BK| = (s - \mu_1) (s - \mu_2) \dots (s - \mu_n) \quad (3.9)$$

Burada  $\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_n$  sisteme keyfi olarak yerleştirebildiğimiz kutuplardır. [9]



## 4. BULGULAR

### 4.1. KÜRESEL TERS SARKACIN MODELLENMESİ VE KONTROLÜ



Şekil 4.1: Küresel Ters Sarkaç Sistemi

KTS sistemi yatay düzlemde x ve y doğrultuları üzerinde hareket edebilen M kütleli taban plakası üzerine küresel mafsallik ile mesnetlenmiş  $2l$  boyundaki m kütleli bir çubuktan meydana gelmektedir.

Küresel ters sarkacın konum bileşenleri,

$$x = l \sin \theta \quad (4.1)$$

$$y = l \sin \phi \cos \theta \quad (4.2)$$

$$z = l \cos \phi \cos \theta \quad (4.3)$$

olarak ifade edilir.

Sistemin hareket denklemlerini elde etmek için Lagrangian metodu kullanılacaktır. Bu metotta T, sistemin toplam kinetik enerjisini U ise sistemin potansiyel enerjisini ifade etmek üzere Lagrangian fonksiyonu,

$$L = T - U$$

şeklindedir.

Sistemin toplam kinetik enerjisi,

$$T = \frac{1}{2}(M + m)(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) + \frac{1}{2}m[l^2\dot{\theta}^2 + l^2\dot{\phi}^2\cos^2\theta + 2l(\dot{x}\dot{\theta}\cos\theta - \dot{y}\dot{\theta}\sin\theta\sin\phi + \dot{y}\dot{\phi}\cos\theta\cos\phi)]$$

potansiyel enerjisi,

$$U = mgl\cos\theta\cos\phi$$

olmak üzere Lagrangian fonksiyonu,

$$L = \frac{1}{2}(M + m)(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) + \frac{1}{2}m[l^2\dot{\theta}^2 + l^2\dot{\phi}^2\cos^2\theta + 2l(\dot{x}\dot{\theta}\cos\theta - \dot{y}\dot{\theta}\sin\theta\sin\phi + \dot{y}\dot{\phi}\cos\theta\cos\phi)] - mgl\cos\theta\cos\phi \quad (4.4)$$

olarak bulunur ve Lagrangian denklemleriyle,

$$Q_i = \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) - \left( \frac{\partial L}{\partial q_i} \right)$$

Sistemin nonlinear hareket denklemleri,

$$(M + m)\ddot{x} + ml(\ddot{\theta}\cos\theta - \dot{\theta}^2\sin\theta) = F_x \quad (4.5)$$

$$(M + m)\ddot{y} - ml(\ddot{\theta}\sin\theta\sin\phi + \dot{\theta}^2\cos\theta\sin\phi + \dot{\theta}\dot{\phi}\sin\theta\cos\phi - \ddot{\phi}\cos\theta\cos\phi + \dot{\phi}\dot{\theta}\sin\theta\cos\phi + \dot{\phi}^2\cos\theta\sin\phi) = F_y \quad (4.6)$$

$$\frac{4l}{3}\ddot{\theta} + \ddot{x}\cos\theta - \ddot{y}\sin\theta\sin\phi - l\dot{\phi}^2\sin\theta\cos\theta - g\sin\theta\cos\phi = 0 \quad (4.7)$$

$$\frac{4l}{3} \ddot{\phi} \cos^2 \theta + 2l\dot{\phi}\dot{\theta} \cos \theta \sin \theta + \ddot{y} \cos \theta \cos \phi - g \cos \theta \sin \phi = 0 \quad (4.8)$$

şeklinde elde edilir.

#### 4.1.1. Nonlinear Hareket Denklemlerinin Taylor Serisi İle Lineerleştirilmesi

Nonlinear hareket denklemleri  $\theta = 0$  ve  $\phi = 0$  civarında Taylor serisi kullanılarak lineerleştirilirse,

$$(M + m)\ddot{x} + ml\ddot{\theta} = F_x \quad (4.9)$$

$$(M + m)\ddot{y} + ml\ddot{\phi} = F_y \quad (4.10)$$

$$\frac{4l}{3}\ddot{\theta} + \ddot{x} - g\theta = 0 \quad (4.11)$$

$$\frac{4l}{3}\ddot{\phi} + \ddot{y} - g\phi = 0 \quad (4.12)$$

lineer hareket denklemleri elde edilir. Bu denklemler  $\ddot{x}$ ,  $\ddot{y}$ ,  $\ddot{\theta}$  ve  $\ddot{\phi}$  yalnız bırakılarak düzenlendiğinde hareket denklemleri,

$$\ddot{x} = \frac{4F_x - 3mg\theta}{m + 4M}$$

$$\ddot{y} = \frac{4F_y - 3mg\phi}{m + 4M}$$

$$\ddot{\theta} = \frac{3[g\theta(m + M) - F_x]}{l(m + 4M)}$$

$$\ddot{\phi} = \frac{3[g\phi(m + M) - F_y]}{l(m + 4M)}$$

halini alır.

#### 4.1.2. Sistemin Durum Uzay Gösterimi

Sistemin durum uzay gösterimini elde etmek için,

$$x = x_1$$

$$\dot{x} = \dot{x}_1 = x_2$$

$$\ddot{x} = \dot{x}_2$$

$$y = x_3$$

$$\dot{y} = \dot{x}_3 = x_4$$

$$\ddot{y} = \dot{x}_4$$

$$\theta = x_5$$

$$\dot{\theta} = \dot{x}_5 = x_6$$

$$\ddot{\theta} = \dot{x}_6$$

$$\phi = x_7$$

$$\dot{\phi} = \dot{x}_7 = x_8$$

$$\ddot{\phi} = \dot{x}_8$$

özdeşlikleri yazılarak (4.9), (4.10), (4.11), (4.12) hareket denklemlerinden A ve B matrisleri (4.13) ve (4.14) ifadelerindeki gibi yazılır.

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{-3mg}{(m+4M)} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{-3mg}{(m+4M)} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{3g(m+M)}{(m+4M)l} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{3g(m+M)}{(m+4M)l} & 0 \end{bmatrix} \quad (4.13)$$

$$B = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ \frac{4}{(m+4M)} & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & \frac{4}{(m+4M)} \\ 0 & 0 \\ \frac{-3}{(m+4M)l} & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & \frac{-3}{(m+4M)l} \end{bmatrix} \quad (4.14)$$

A ve B matrislerinin yazılmasıyla birlikte sistemin durum uzay gösterimi (3.4) denklemindeki gibi ifade edilir.

#### 4.1.3. Kontrol Edilebilirlik

Bu çalışmada incelenen küresel ters sarkaç sistemi 8. dereceden olduğu için kontrol edilebilirlik matrisi,

$$C = [B \quad AB \quad A^2B \quad A^3B \quad A^4B \quad A^5B \quad A^6B \quad A^7B]$$

şeklinde tanımlanır. C kontrol edilebilirlik matrisinin mertebesi 8 olduğundan, sistemin kontrol edilebilir olması için C matrisinin rankı da 8 olmalıdır. C kontrol edilebilirlik matrisinin rankı hesaplandığında,

$$\text{rank}(C) = 8$$

olarak bulunur. Yani sistem kontrol edilebilirdir.

#### 4.1.4. Tam Durum Geri Beslemeli Kontrol

Sistem kontrol edilebilirdir ve tüm durum değişkenlerinin ölçülebilir olduğu kabul edilir. Böylece tam durum geri beslemesi için gerek ve yeter şartlar sağlanmış olur ve kontrol kanunu,

$$u = Kx$$

$$u = \begin{bmatrix} k_1 & k_2 & k_3 & k_4 & k_5 & k_6 & k_7 & k_8 \\ k_9 & k_{10} & k_{11} & k_{12} & k_{13} & k_{14} & k_{15} & k_{16} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \\ x_7 \\ x_8 \end{bmatrix}$$

$$u = k_1x_1 + k_2x_2 + k_3x_3 + k_4x_4 + k_5x_5 + k_6x_6 + k_7x_7 + k_8x_8 + k_9x_1 + k_{10}x_2 + k_{11}x_3 + k_{12}x_4 + k_{13}x_5 + k_{14}x_6 + k_{15}x_7 + k_{16}x_8 \quad (4.15)$$

şeklinde yazılır.

Durum uzay gösterimi,

$$\dot{x} = Ax + Bu$$

olan sisteme (4.15) ifadesindeki kontrol kanunu uygulandığında,

$$\dot{x} = (A + BK)x$$

kapalı çevrim sistemini,

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \\ \dot{x}_4 \\ \dot{x}_5 \\ \dot{x}_6 \\ \dot{x}_7 \\ \dot{x}_8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{4k_1}{(m+4M)} & \frac{4k_2}{(m+4M)} & \frac{4k_3}{(m+4M)} & \frac{4k_4}{(m+4M)} & \frac{4k_5-3mg}{(m+4M)} & \frac{4k_6}{(m+4M)} & \frac{4k_7}{(m+4M)} & \frac{4k_8}{(m+4M)} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{4k_9}{(m+4M)} & \frac{4k_{10}}{(m+4M)} & \frac{4k_{11}}{(m+4M)} & \frac{4k_{12}}{(m+4M)} & \frac{4k_{13}}{(m+4M)} & \frac{4k_{14}}{(m+4M)} & \frac{4k_{15}-3mg}{(m+4M)} & \frac{4k_{16}}{(m+4M)} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ \frac{-3k_1}{(m+4M)l} & \frac{-3k_2}{(m+4M)l} & \frac{-3k_3}{(m+4M)l} & \frac{-3k_4}{(m+4M)l} & \frac{3g(m+M)-3k_5}{(m+4M)l} & \frac{-3k_6}{(m+4M)l} & \frac{-3k_7}{(m+4M)l} & \frac{-3k_8}{(m+4M)l} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ \frac{-3k_9}{(m+4M)l} & \frac{-3k_{10}}{(m+4M)l} & \frac{-3k_{11}}{(m+4M)l} & \frac{-3k_{12}}{(m+4M)l} & \frac{-3k_{13}}{(m+4M)l} & \frac{-3k_{14}}{(m+4M)l} & \frac{3g(m+M)-3k_{15}}{(m+4M)l} & \frac{-3k_{16}}{(m+4M)l} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \\ x_7 \\ x_8 \end{bmatrix} \quad (4.16)$$

şeklinde elde ederiz.

Geri besleme kazancı sabitlerinin yani K matrisinin hesaplanabilmesi için,

$$|sI - A - BK| = (s-\mu_1)(s-\mu_2) \dots (s-\mu_n)$$

karakteristik polinom eşitliği kullanılır.

Sistem bileşenlerinden hareketli taban plakası kütlesi  $M = 1$  kg, ters sarkacın kütlesi  $m = 0.3$  kg ve ters sarkacın boyu ( $2l$ )  $0.3$  m olarak seçilmiştir.

Sistemin kutupları seçilirken B matrisinin rankı dikkate alınmalıdır.

$$\text{Rank}(B) = 2$$

olduğundan sistemin kutuplarından en fazla iki tanesi bir biri ile aynı olabilir. Bu nedenle kutuplar aşağıdaki gibi seçilmiştir. Sistem kutupları,

$$s_1 = s_2 = -0.9$$

$$s_3 = s_4 = -1$$

$$s_5 = s_6 = -1.1$$

$$s_7 = s_8 = -1.2$$

iken geri besleme kazancı sabitleri,

$$k_1 = 0.0260$$

$$k_2 = 0.1003$$

$$k_3 = 4.2401e^{-13}$$

$$k_4 = 1.2932e^{-12}$$

$$k_5 = 14.1751$$

$$k_6 = 0.9231$$

$$k_7 = 1.2849e^{-11}$$

$$k_8 = 4.4982e^{-12}$$

$$k_9 = 3.5260e^{-13}$$

$$k_{10} = 1.0411e^{-12}$$

$$k_{11} = 0.0260$$

$$k_{12} = 0.1003$$

$$k_{13} = 1.0036e^{-11}$$

$$k_{14} = 3.4225e^{-1}$$

$$k_{15} = 14.1751$$

$$k_{16} = 0.9231$$

olarak bulunur. Sistem kutupları,

$$s_1 = s_2 = -1.9$$

$$s_3 = s_4 = -2$$

$$s_5 = s_6 = -2.1$$

$$s_7 = s_8 = -2.2$$

iken geri besleme kazancı sabitleri,

$$k_1 = 0.3848$$

$$k_2 = 0.7530$$

$$k_3 = -6.1571e^{-12}$$

$$k_4 = -9.1730e^{-1}$$

$$k_5 = 18.2458$$

$$k_6 = 1.9136$$

$$k_7 = -4.5815e^{-11}$$

$$k_8 = -9.1799e^{-12}$$



$$k_9 = -5.5505e^{-12}$$

$$k_{10} = -8.1800e^{-12}$$

$$k_{11} = 0.3848$$

$$k_{12} = 0.7530$$

$$k_{13} = -4.0462e^{-1}$$

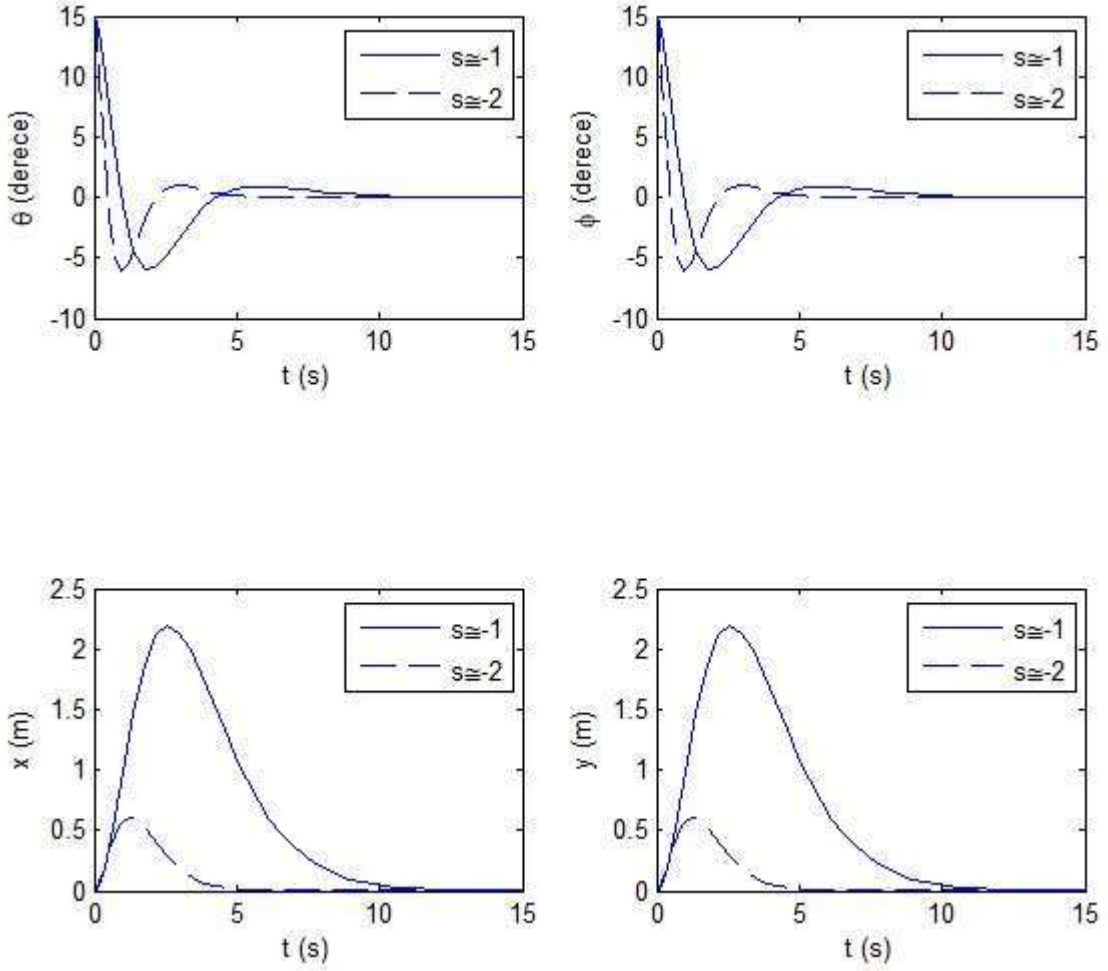
$$k_{14} = -8.0566e^{-12}$$

$$k_{15} = 18.2458$$

$$k_{16} = 1.9136$$

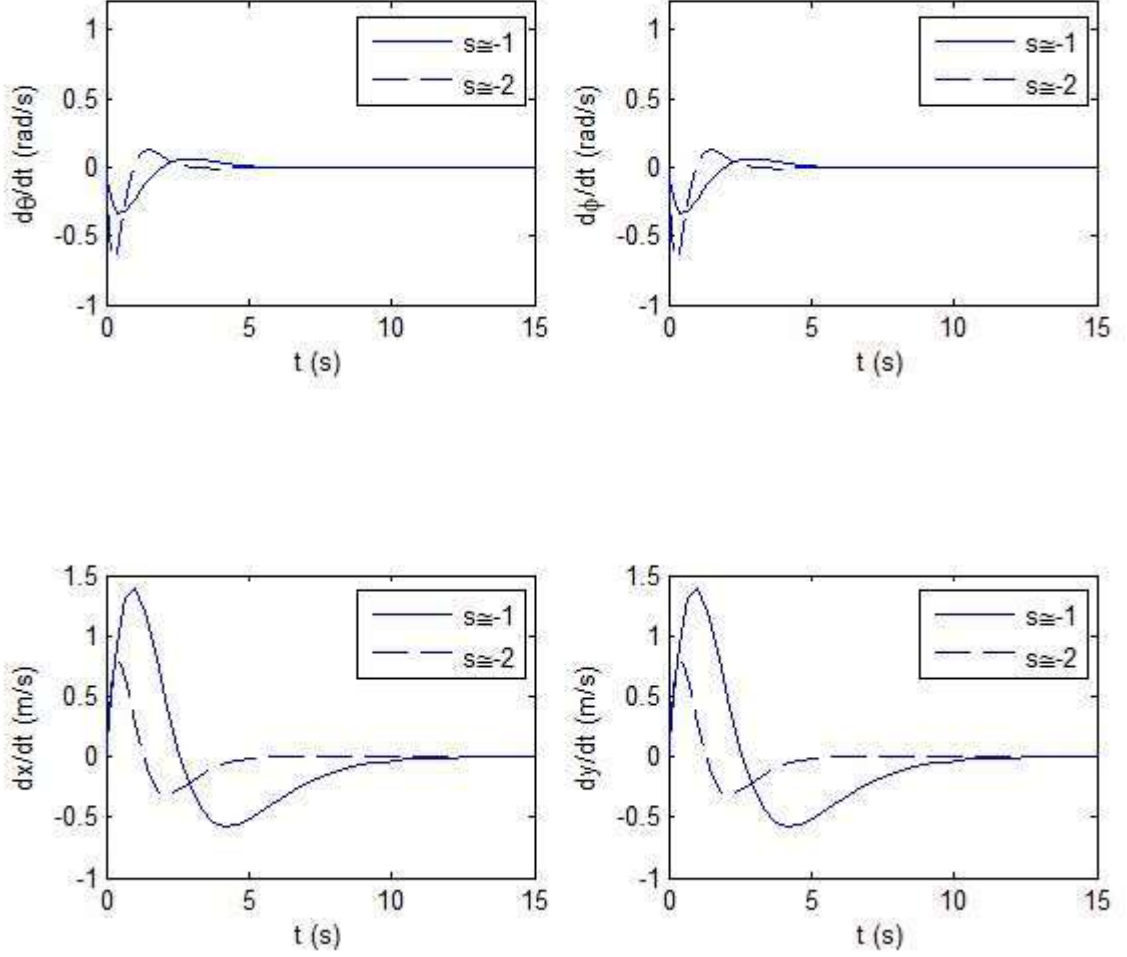
olarak hesaplanır.

Seçilen iki farklı kutup için ters sarkacın başlangıç açıları  $\theta = \phi = 15$  derece iken lineer sistemin cevabı Şekil 4.2 ve Şekil 4.3 'teki grafiklerde gösterilmektedir.



**Şekil 4.2:** Farklı kutupların  $x$ ,  $y$ ,  $\theta$  ve  $\phi$  çıktılarına etkisi

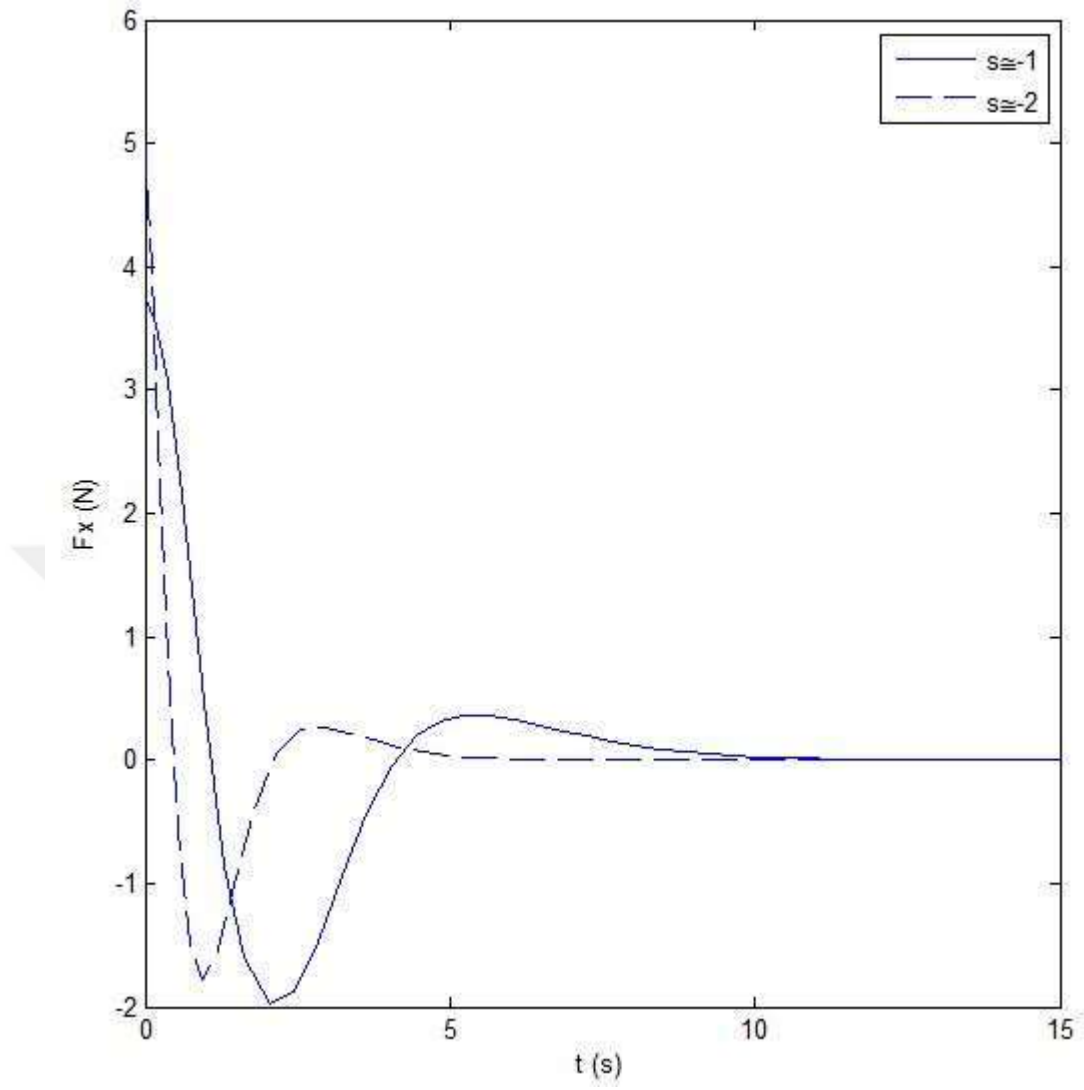
Şekil 4.2’deki grafiklerde görüldüğü üzere negatif reel eksen üzerinde bulunan kutupların mutlak değerinin artması sistem cevap hızını arttırmaktadır. Sistem kutupları  $-2$  civarında iken başlangıç değerleri  $15$  derece olan  $\theta$  ve  $\phi$  açılarının, kutupların  $-1$  civarında olduğu durumdan daha erken sıfır konumuna geldiği gözlenmektedir. Hareketli taban plakasının da sıfır konumuna, kutuplar  $-1$  civarında iken  $-2$  civarına göre yaklaşık olarak iki kat daha geç sürede ulaştığı ve ayrıca ters sarkacı denge konumuna getirmek için alması gereken yolun yaklaşık olarak üç kat daha fazla olduğu görülmektedir.



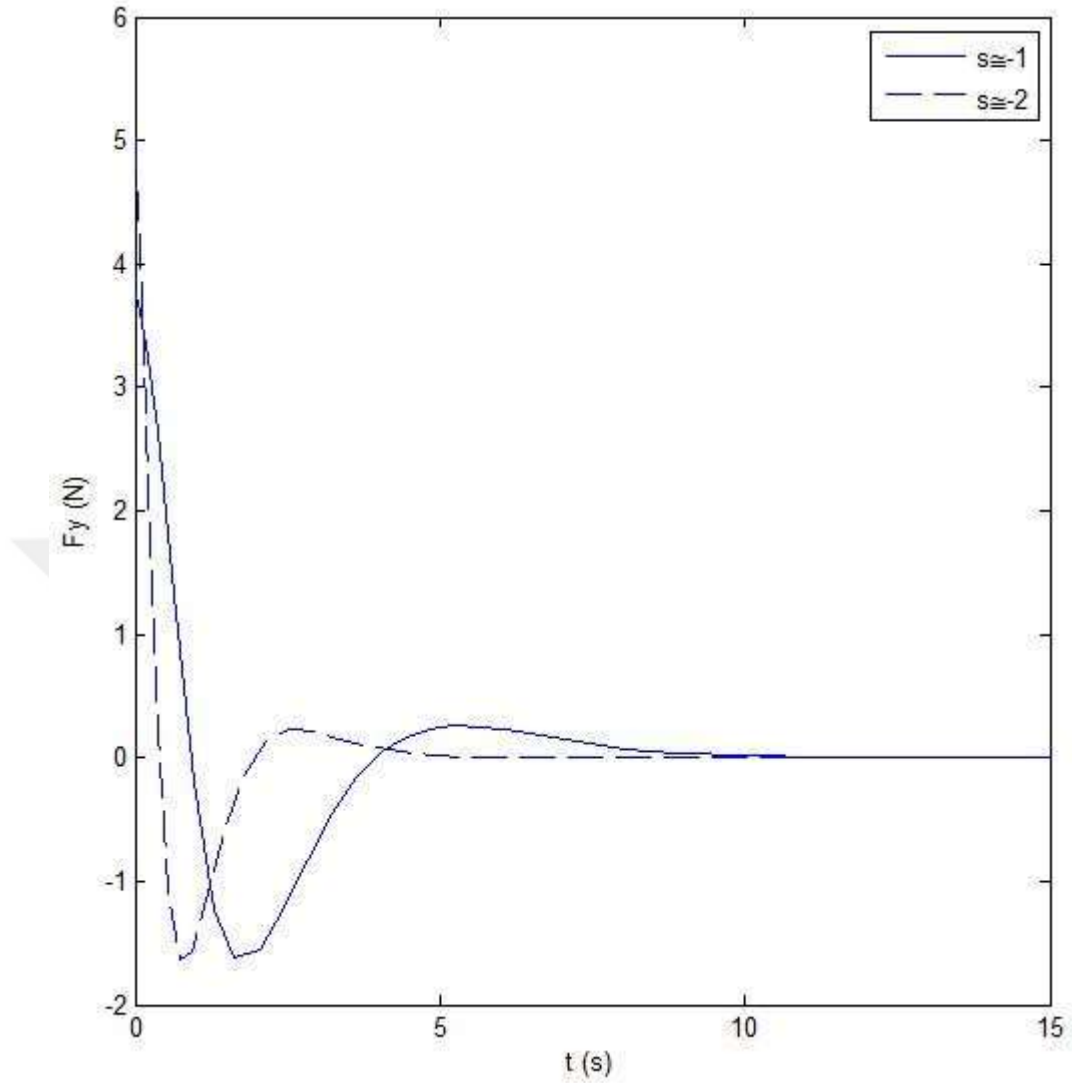
**Şekil 4.3:** Farklı kutupların  $\dot{x}$ ,  $\dot{y}$ ,  $\dot{\theta}$  ve  $\dot{\phi}$  çıktılarına etkisi

Şekil 4.3' te ise ters sarkacın açısal hızlarının, kutupların negatif reel eksende mutlak değerleri artmasıyla arttığı, hareketli taban plakasının x ve y doğrultularındaki hızlarının ise azaldığı görülmektedir.

Sonuç olarak, ters sarkacın  $\theta = \phi = 15$  başlangıç açıları için kutup değerlerinin değişmesi sistemin cevap hızına etki etsede lineer sistemin her iki durumda da kararlı olduğu grafiklerden gözlenebilmektedir. Sistem kutuplarının değişmesi yalnızca sistemin cevap hızına değil taban plakasına x ve y eksenleri boyunca uygulanması gereken kuvvet üzerinde de etkisi vardır.  $\theta = \phi = 15$  başlangıç değerleri için kuvvet grafikleri Şekil 4.4 ve Şekil 4.5'teki grafiklerde gösterilmiştir.



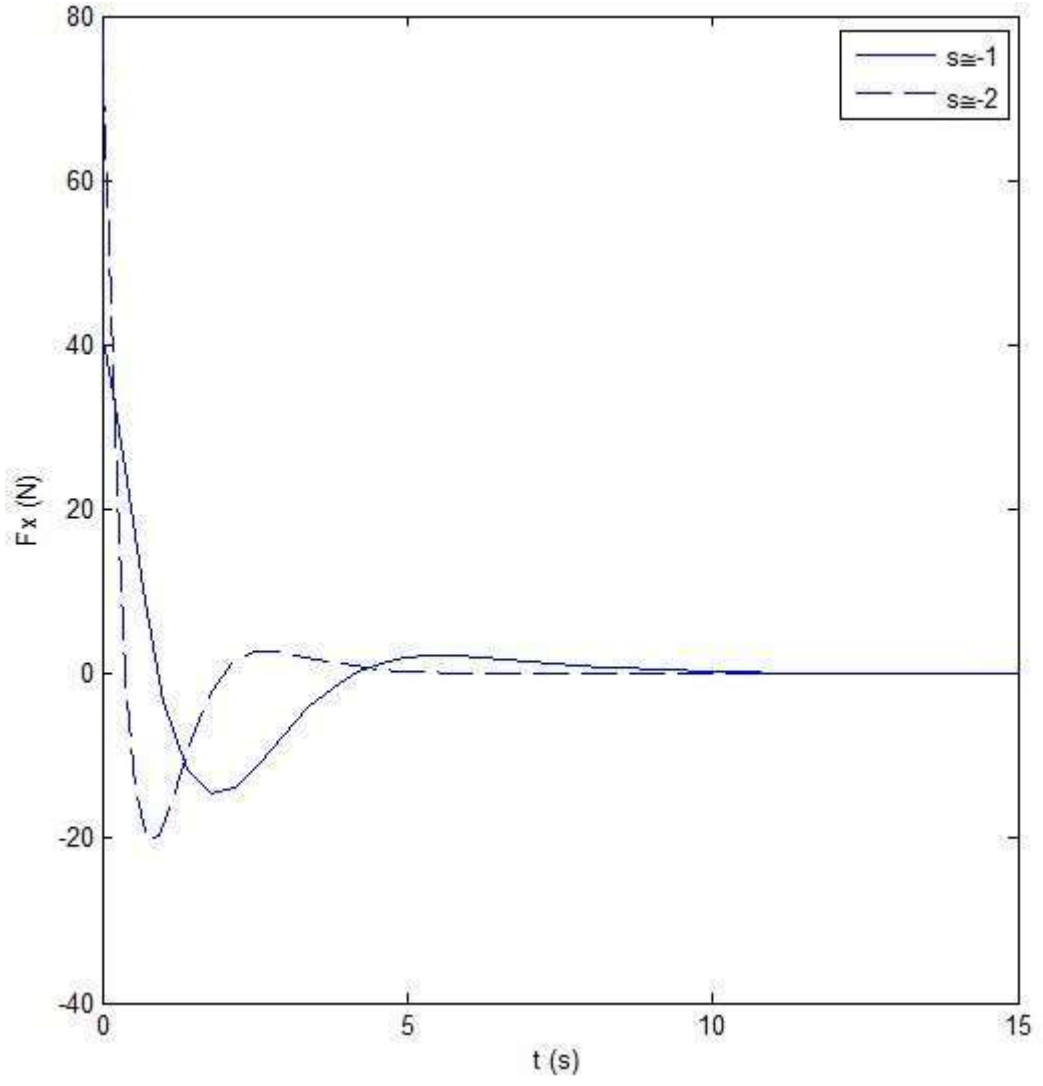
**Şekil 4.4:** Farklı kutupların  $F_x$  kuvveti üzerindeki etkisi



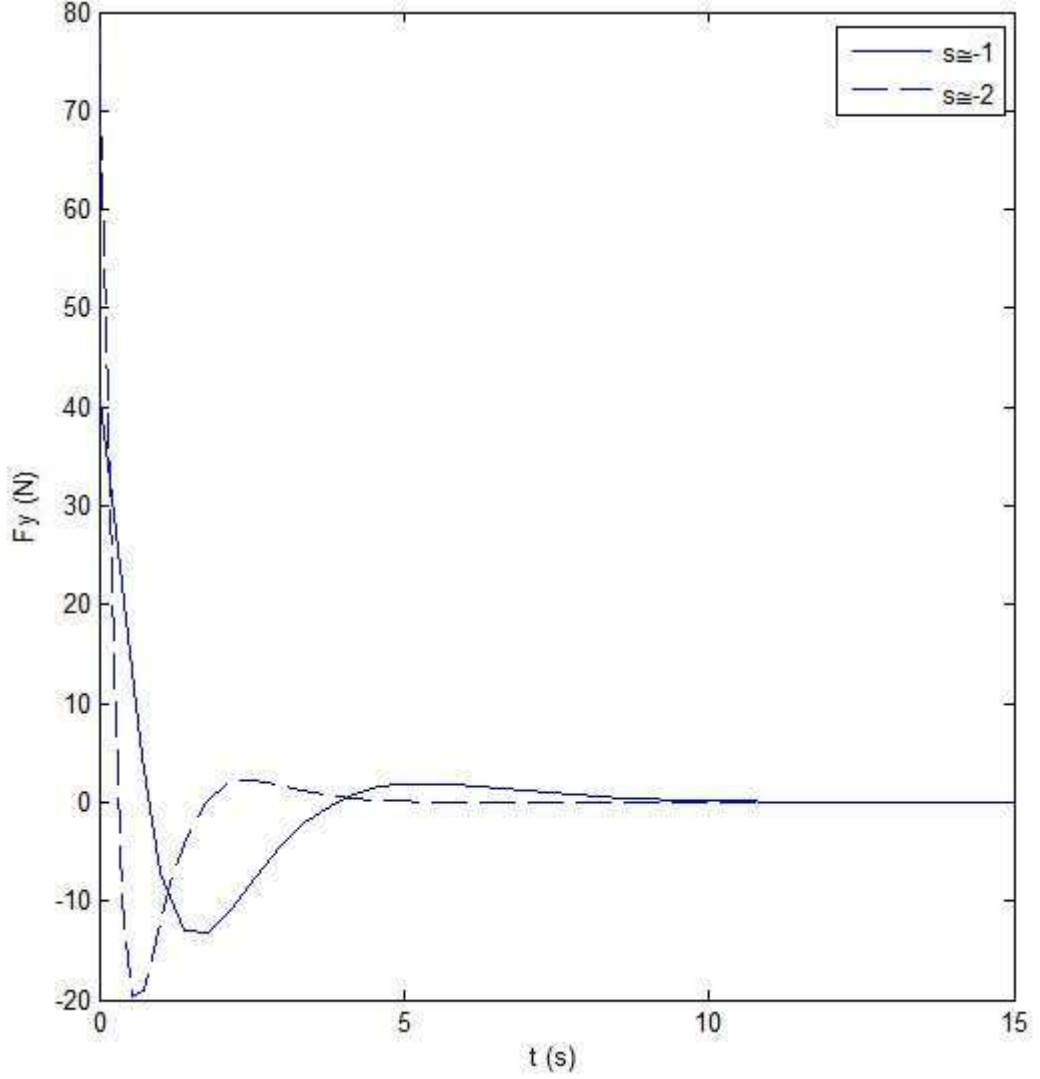
Şekil 4.5: Farklı kutupların  $F_y$  kuvveti üzerindeki etkisi

Lineer kontrolcü uyguladığımız nonlineer sistemde, iki farklı kutup değeri için  $F_x$  ve  $F_y$  kuvvet çıktıklarına bakıldığında, negatif reel ekseninde seçilen kutupların mutlak değerleri büyüdükçe, sarkacı üst denge konumuna getirmek için hareketli taban plakasına uygulanması gereken kuvvet değerinin de arttığı gözlenmektedir.

Farklı kutupların  $F_x$  ve  $F_y$  kuvvetleri üzerindeki etkisini daha iyi görebilmek adına hareketli tabanın kütlesi, ters sarkacın kütlesi ve boyu arttırılarak  $M = 10$  kg,  $m = 1$  kg ve  $2l = 1$  m olarak alınır,



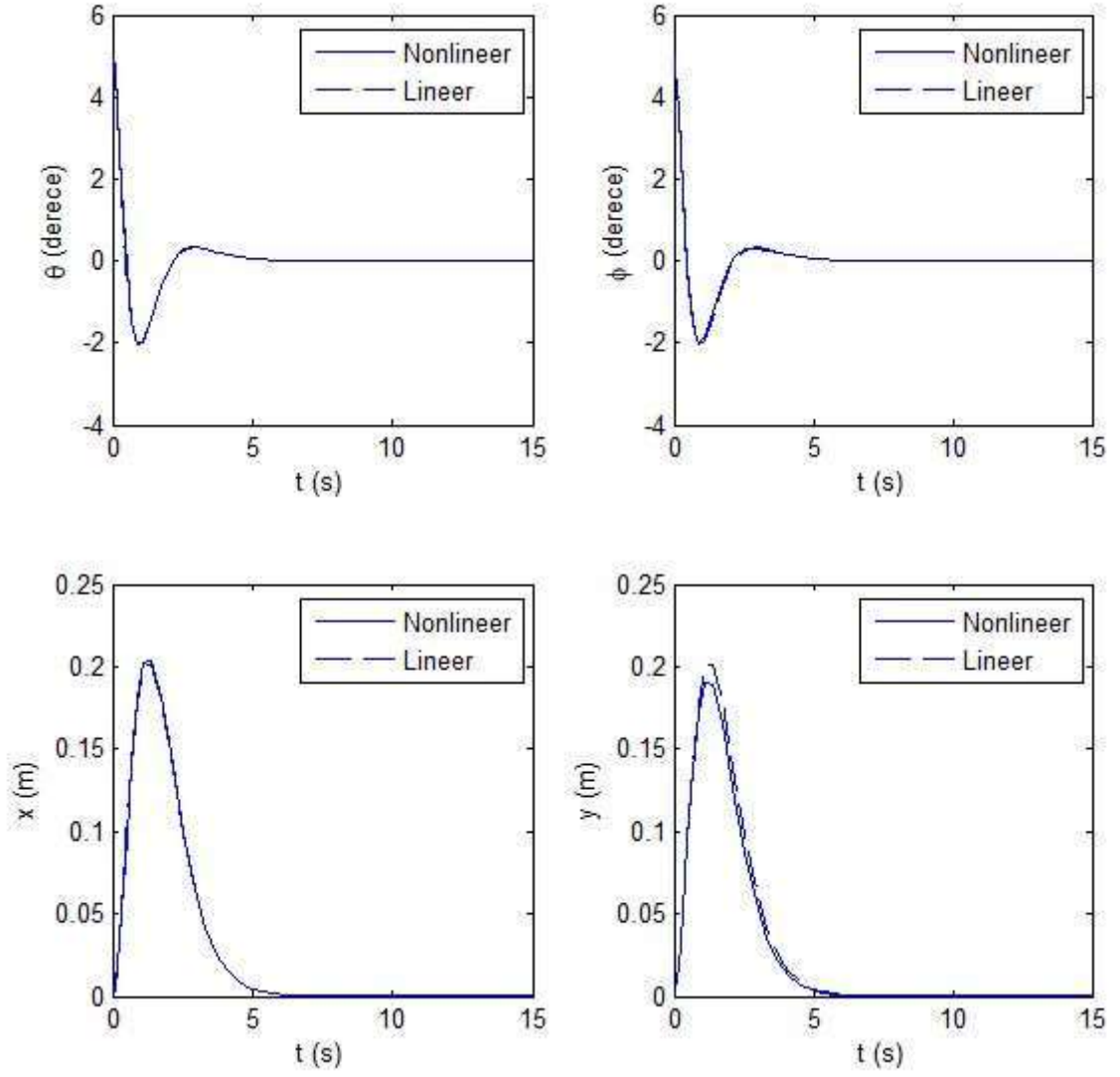
Şekil 4.6: Sistemin kütlesi ve sarkacın boyu uzatıldığında farklı kutupların  $F_x$  kuvveti üzerindeki etkisi



**Şekil 4.7:** Sistemin kütlesi ve sarkacın boyu uzatıldığında farklı kutupların  $F_y$  kuvveti üzerindeki etkisi

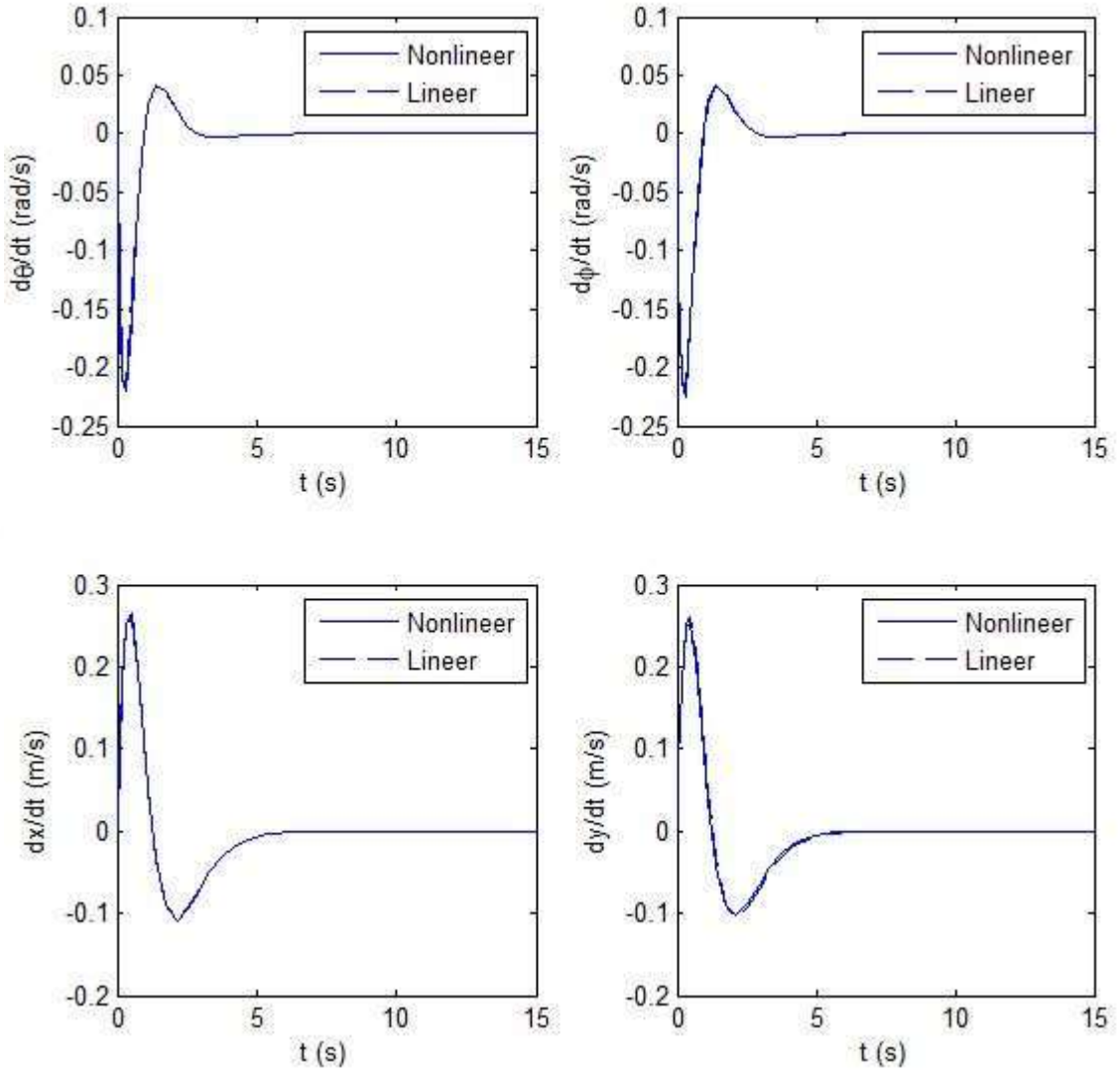
Şekil 4.6 ve Şekil 4.7' deki grafiklerde görüleceği üzere kutuplar -2 civarında ve başlangıç açıları  $\theta = \phi = 15$  dereceyken  $F_x$  ve  $F_y$  kuvvetleri yaklaşık olarak 40N daha fazla olmaktadır.

Tam durum beslemesi ile geliştirilen kontrolcünün lineer ve nonlineer sistem cevaplarına etkisi aşağıdaki grafiklerde kıyaslanmaktadır. Şekil 4.2' de sistemin cevap süresi, hareketli taban plakasının ters sarkacı üst denge konumunda dengelemesi için kat etmesi gereken mesafe ve kuvvet değerleri göz önüne alındığında kıyaslamaların yapılması için kutupların -2 civarında seçilmesi daha uygun bulunmuştur.



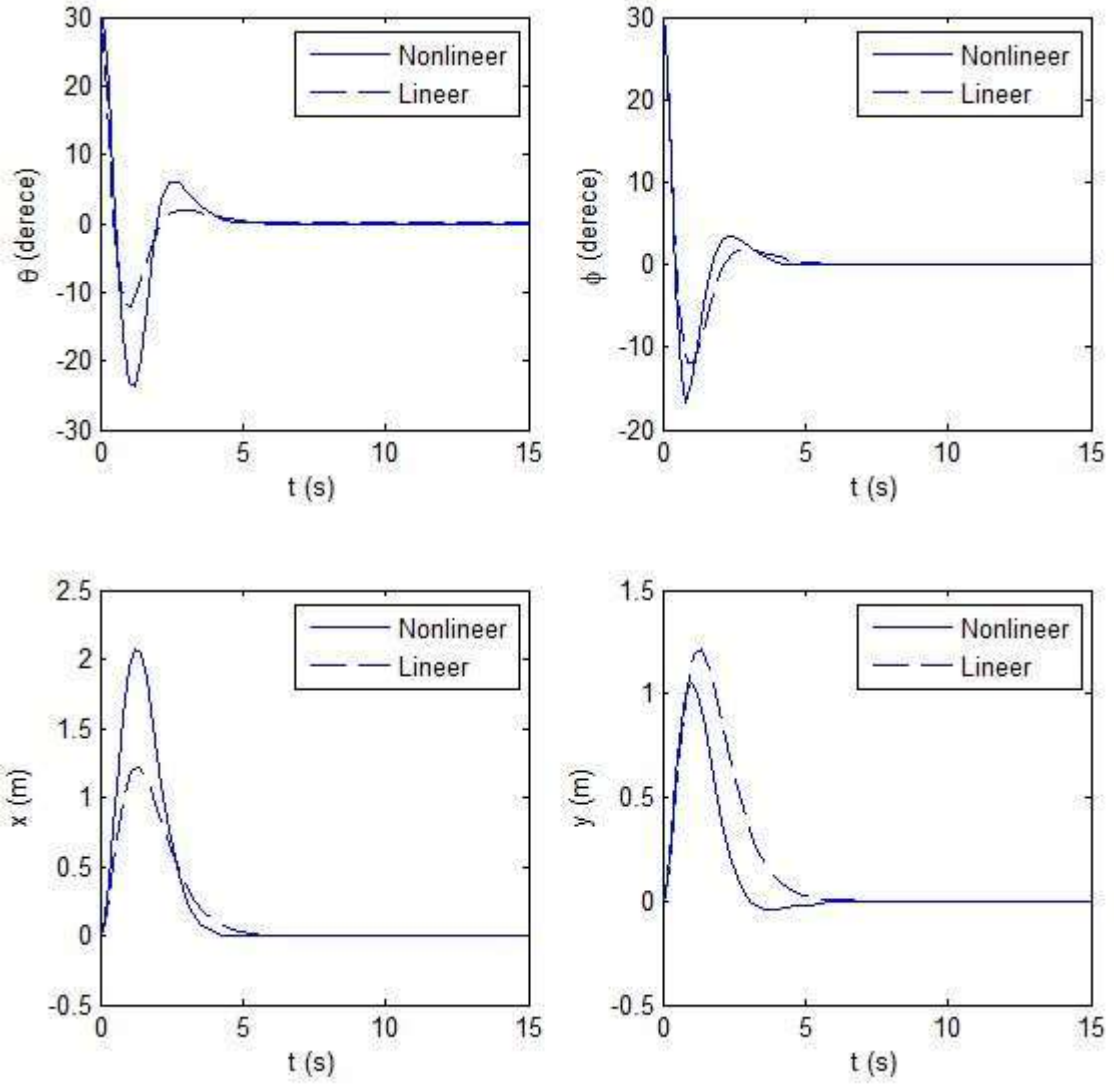
Şekil 4.8:  $\theta = \phi = 5^\circ$  iken lineer ve nonlineer sistemlerde  $x$ ,  $y$ ,  $\theta$  ve  $\phi$  çıktıları



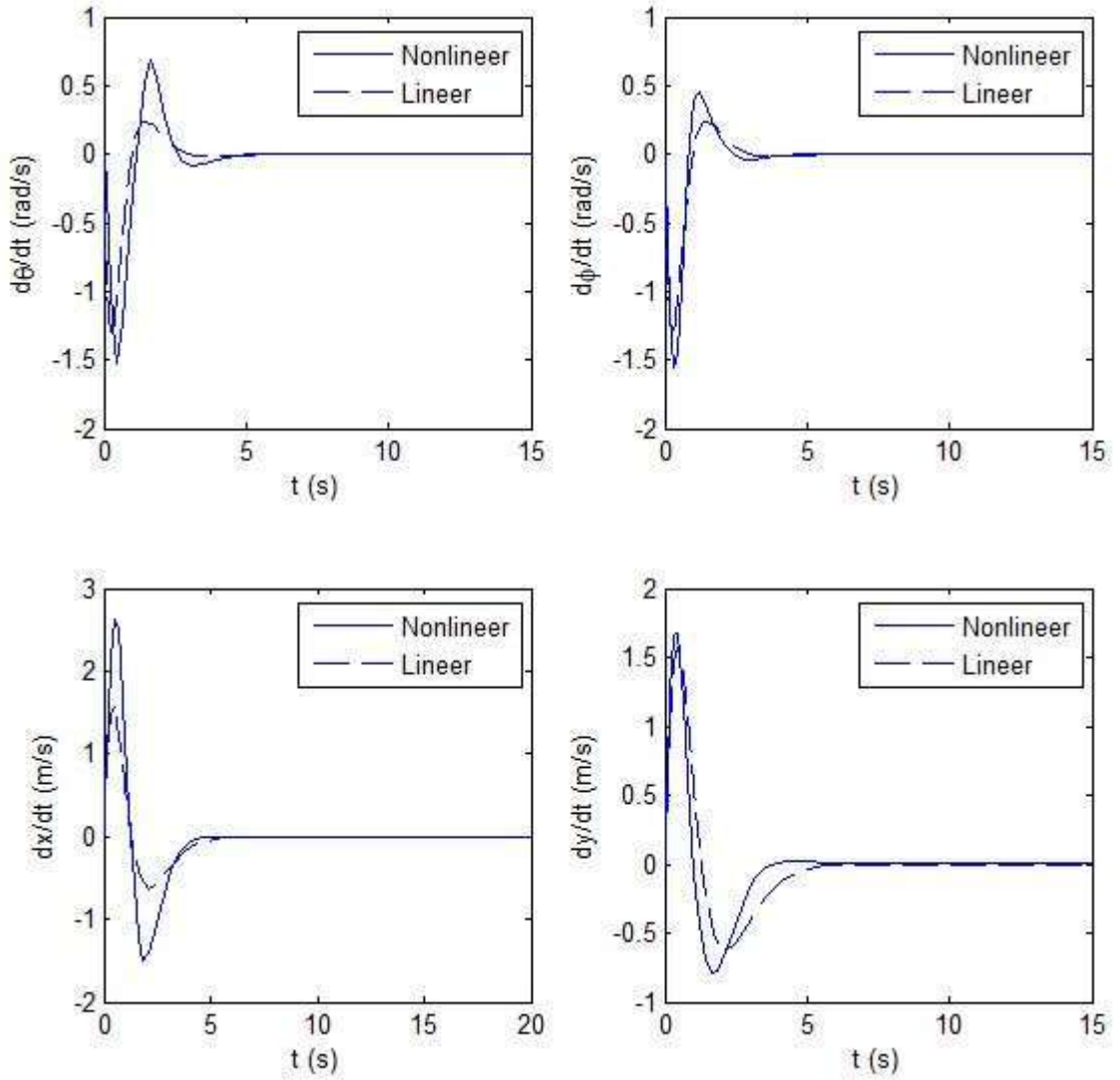


**Şekil 4.9:**  $\theta = \phi = 5^\circ$  iken lineer ve nonlinear sistemlerde  $\dot{x}$ ,  $\dot{y}$ ,  $\dot{\theta}$  ve  $\dot{\phi}$  çıktıları

Şekil 4.8 ve Şekil 4.9'daki grafiklerde lineer ve nonlinear sistem cevaplarının  $\theta = \phi = 5$  derece başlangıç açıları için neredeyse bire bir örtüştüğü gözlenmektedir. Bunun sebebi başlangıç açılarının sistemin lineerleştirildiği noktaya çok yakın olmasıdır. Bu kıyaslama sistem kutupları -2 civarına yerleştirilerek yapılmıştır.

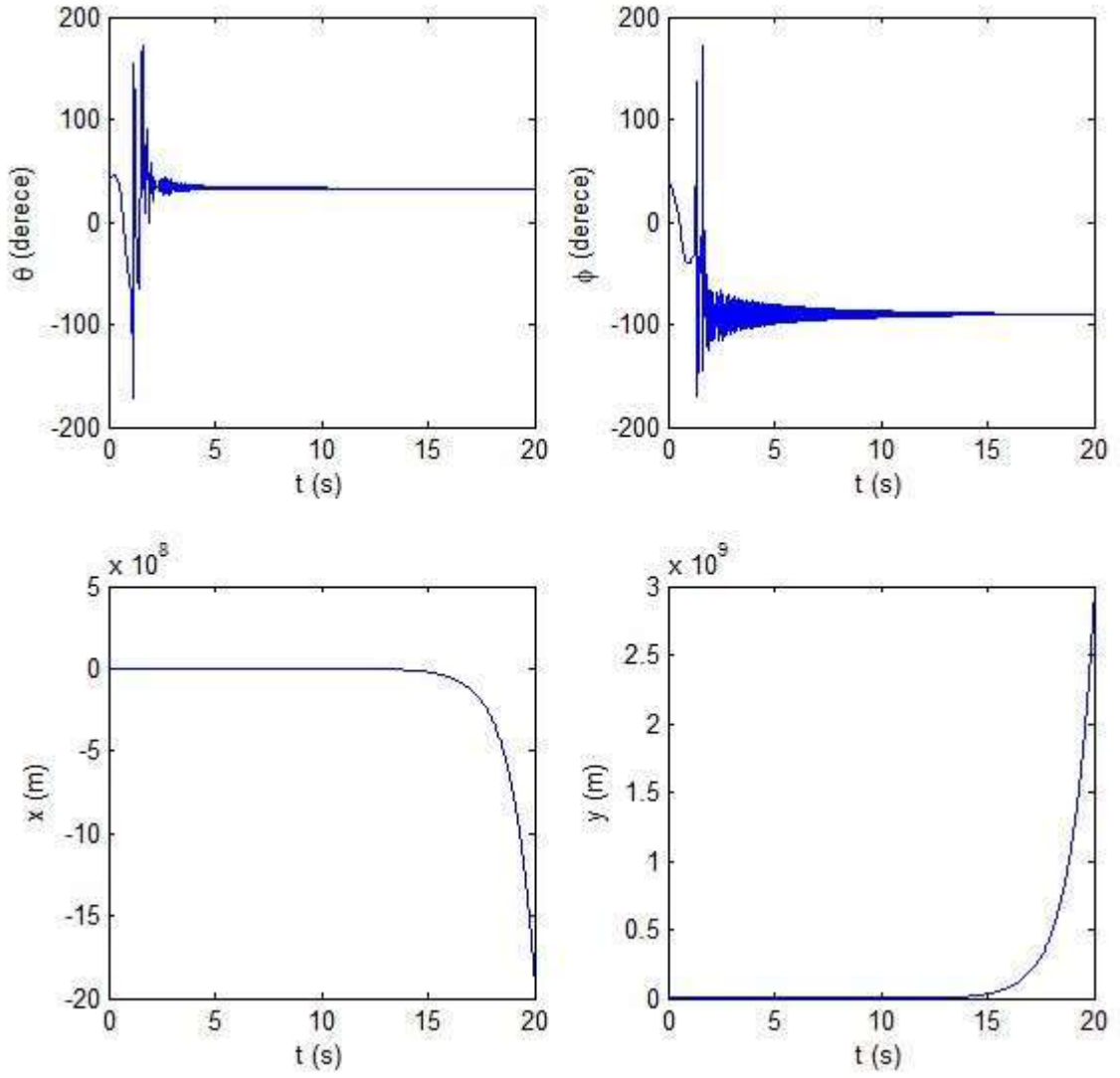


Şekil 4.10:  $\theta = \phi = 30^\circ$  iken lineer ve nonlineer sistemlerde  $x$ ,  $y$ ,  $\theta$  ve  $\phi$  çıktıları

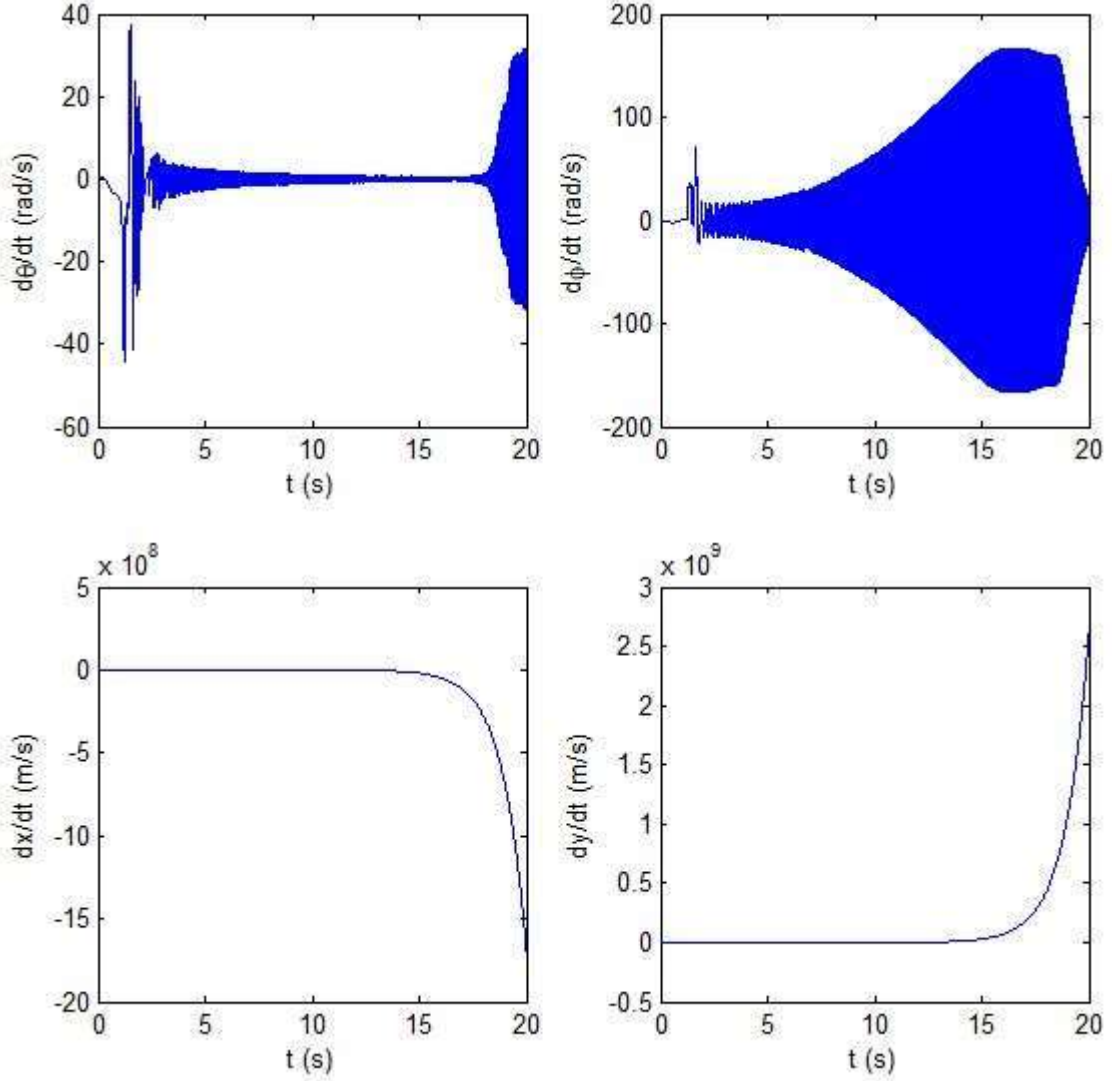


Şekil 4.11:  $\theta = \phi = 30^\circ$  iken lineer ve nonlinear sistemlerde  $\dot{x}$ ,  $\dot{y}$ ,  $\dot{\theta}$  ve  $\dot{\phi}$  çıktıları

Ters sarkacın başlangıç açılarının lineerleştirme yapılan  $\theta = 0$  ve  $\phi = 0$  konumundan uzaklaşmasının nonlinear ve lineer sistem cevapları üzerindeki etkisini görebilmek için başlangıç açıları  $\theta = \phi = 30$ , sistem kutupları ise yine -2 civarında seçilmiştir. Şekil 4.10 ve Şekil 4.11'deki grafiklerde başlangıç açılarının lineerleştirme yapılan bölgeden uzaklaşmasının lineer ve nonlinear sistem cevaplarının birbirlerine göre farklılık göstermesine neden olduğu gözükmemektedir.



Şekil 4.12:  $\theta = \phi = 40^\circ$  iken nonlineer sistemin  $x$ ,  $y$ ,  $\theta$  ve  $\phi$  çıktıları için kararsız davranışı



Şekil 4.13:  $\theta = \phi = 40^\circ$  iken nonlinear sistemin  $\dot{x}$ ,  $\dot{y}$ ,  $\dot{\theta}$  ve  $\dot{\phi}$  çıktıları için kararsız davranışı

Şekil 4.12 ve Şekil 4.13'te görüleceği üzere sistem kutupları -2 civarında seçilmesinin sarkacın başlangıç açılarının  $\theta = \phi = 40$  derece olduğu durumda nonlinear sistemi kararlı hale getirmekte yeterli olmadıgı görülmüştür. Bunun nedeni başlangıç açılarının nonlinear sistemin lineerleştirildiği  $\theta = \phi = 0$  derece konumundan uzak olmasıdır. Başka bir deyişle sistem kutupları -2 civarındayken linner sistem üzerinden hesaplanan geri besleme kazancı sabitleri nonlinear sistemi  $\theta = \phi = 40$  derece başlangıç açıları için kararlı hale getirememektedir. Bu durumda sistem kutupları -3 civarına getirilerek geri besleme kazancı sabitleri tekrar hesaplanırsa,

Sistem kutupları,

$$s_1 = s_2 = -2.8$$

$$s_3 = s_4 = -2.9$$

$$s_5 = s_6 = -3$$

$$s_7 = s_8 = -3.1$$

seçildiğinde geri besleme kazancı sabitleri,

$$k_1 = 2.0014$$

$$k_2 = 2.7177$$

$$k_3 = -7.0406e^{-1}$$

$$k_4 = -7.0294e^{-11}$$

$$k_5 = 35.5517$$

$$k_6 = 3.6115$$

$$k_7 = -2.4316e^{-1}$$

$$k_8 = -3.9381e^{-11}$$

$$k_9 = -1.2887e^{-10}$$

$$k_{10} = -1.3121e^{-10}$$

$$k_{11} = 2.0014$$

$$k_{12} = 2.7177$$

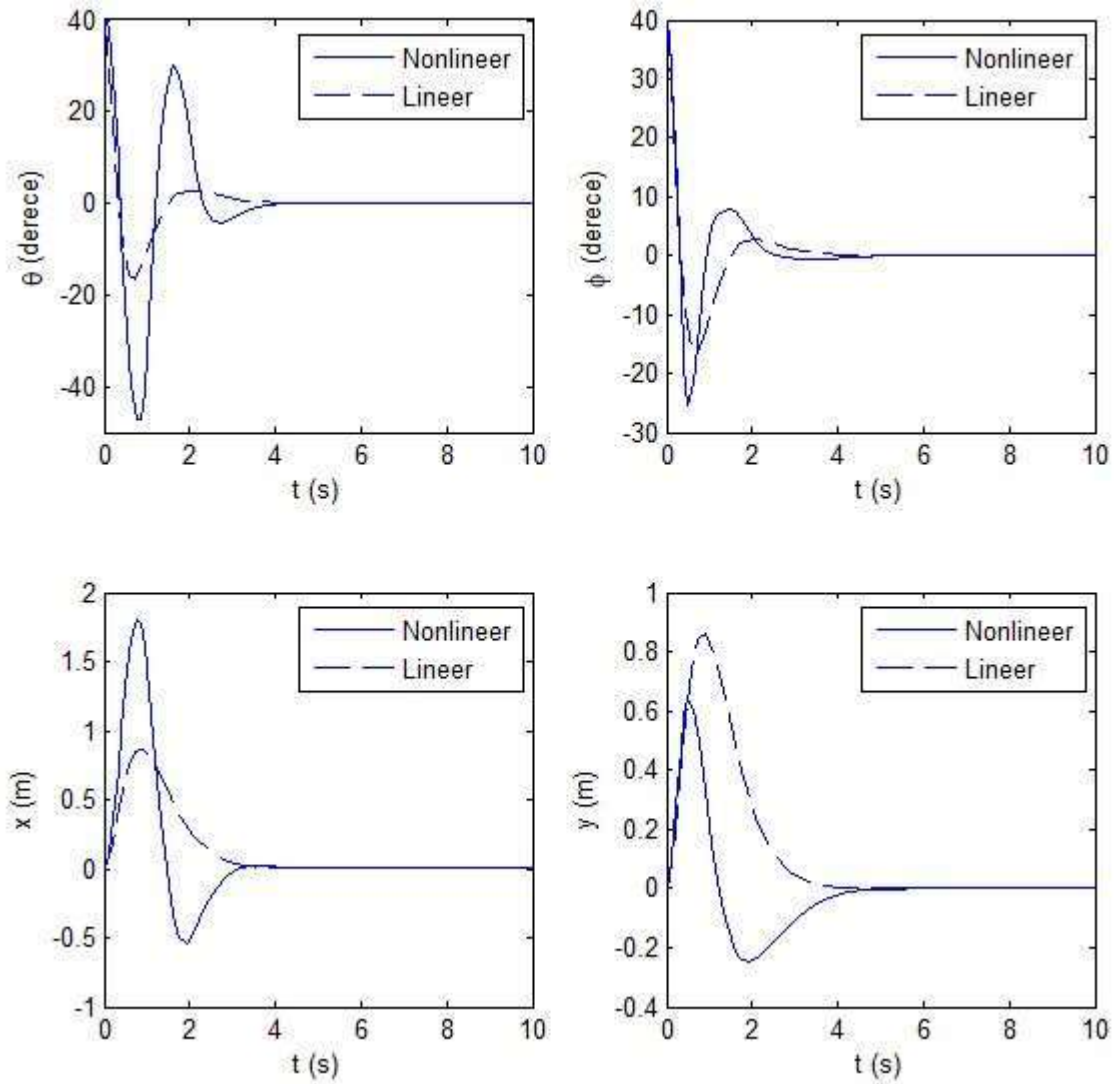
$$k_{13} = -4.6230e^{-10}$$

$$k_{14} = -7.5557e^{-11}$$

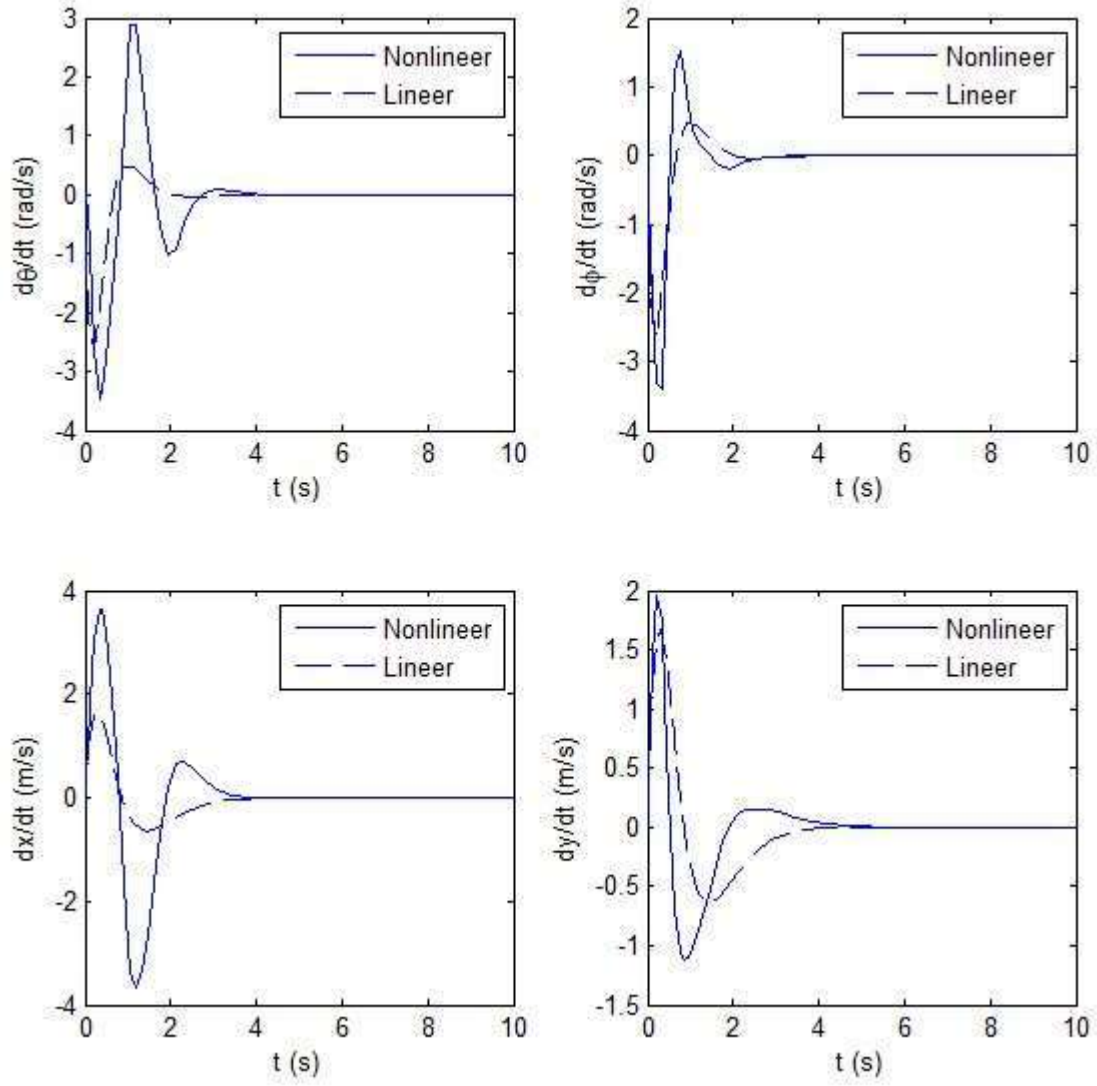
$$k_{15} = 35.5517$$

$$k_{16} = 3.6115$$

olmaktadır. Hesaplanan bu geri besleme kazancı sabitleri ile linner ve nonlinear sistem kontrol edildiğinde kararlı davranış elde edildiği Şekil 4.14 ve Şekil 4.15 'teki grafiklerde görülmektedir.

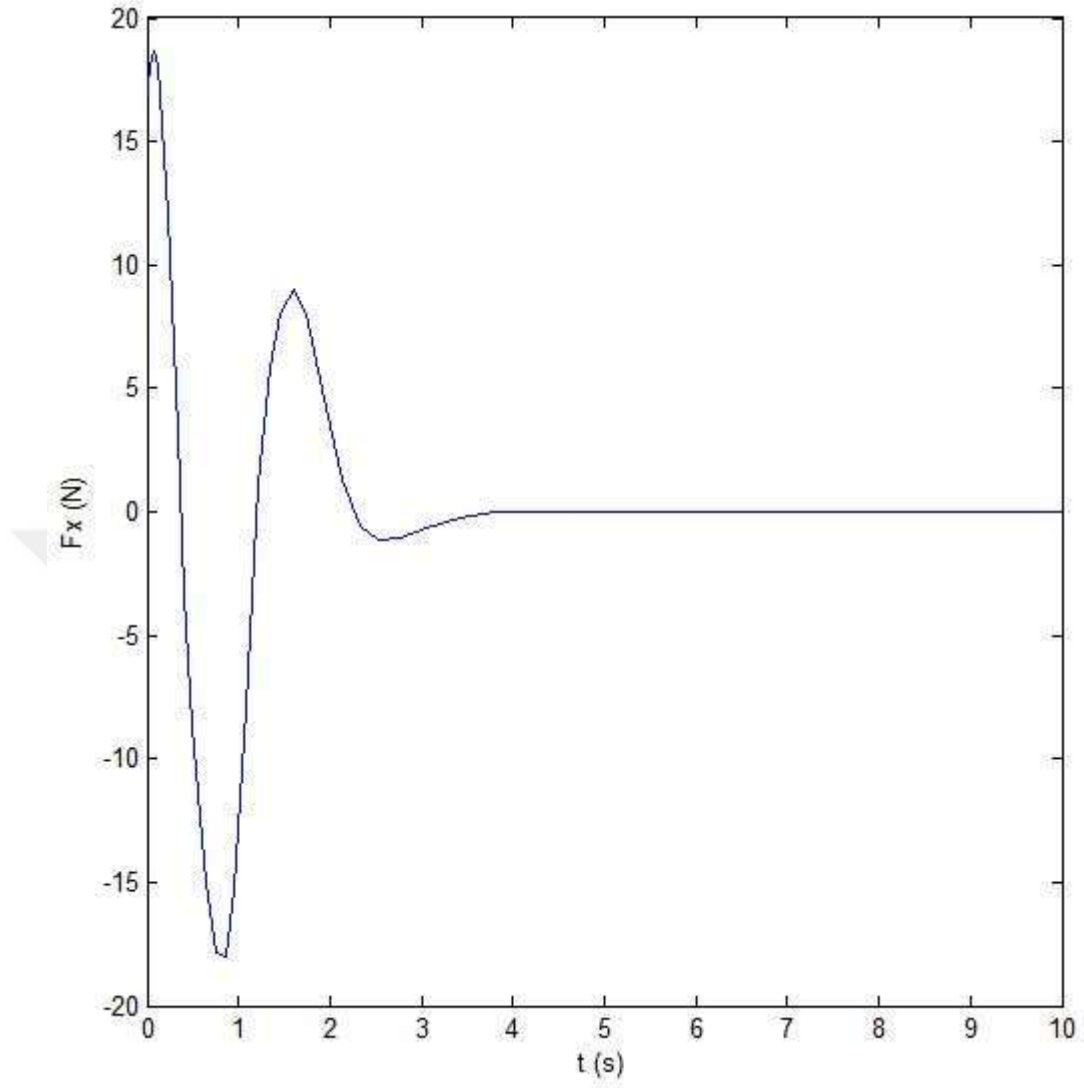


Şekil 4.14:  $\theta = \phi = 40^\circ$  iken lineer ve nonlinear sistemlerde  $x$ ,  $y$ ,  $\theta$  ve  $\phi$  çıktıları

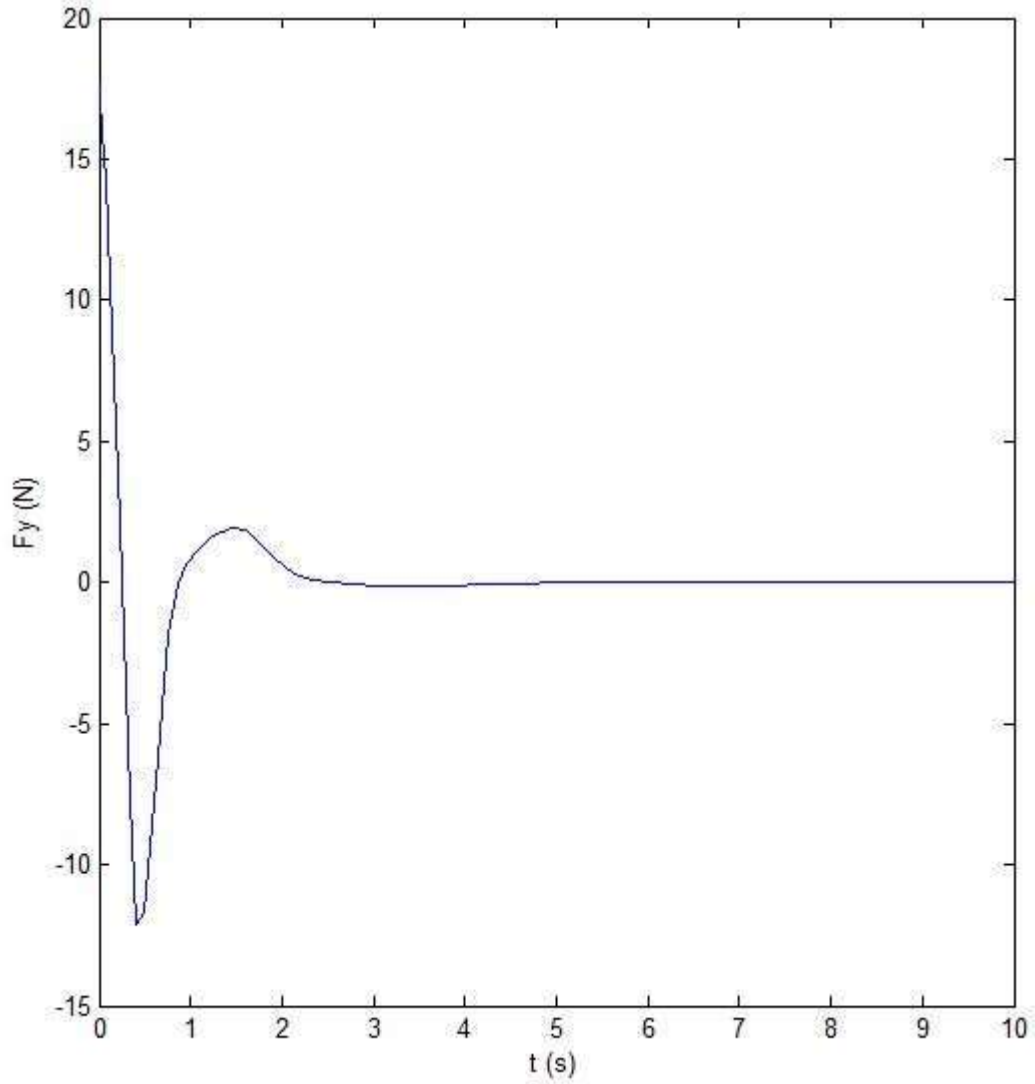


Şekil 4.15:  $\theta = \phi = 40^\circ$  iken lineer ve nonlinear sistemlerde  $\dot{x}$ ,  $\dot{y}$ ,  $\dot{\theta}$  ve  $\dot{\phi}$  çıktıları





Şekil 4.16:  $\theta = \phi = 40^\circ$  iken  $F_x$  kuvveti



Şekil 4.17:  $\theta = \phi = 40^\circ$  iken  $F_y$  kuvveti

Şekil 4.16 ve Şekil 4.17’de sistem kutuplarının -3 civarında seçilmesiyle birlikte  $F_x$  ve  $F_y$  kuvvet değerlerinde artış olduğu gözükmemektedir. Kutupların s-düzleminin imajiner eksenine daha yakın seçildiği durumda elde edilen kuvvet değerlerinin gösterildiği Şekil 4.4 ve Şekil 4.5 ‘teki grafiklere bakıldığı bu artış rahatlıkla görülebilir. Ancak elde edilen kuvvet değerler kabul edilebilir seviyededir ve seçilen kutuplar  $\theta = \phi = 40^\circ$  başlangıç açıları ile sistemin kararlı hale getirebilmiştir.

## 5. TARTIŞMA VE SONUÇ

Bu çalışma kapsamında, kontrolü için tercih edilen küresel ters sarkaç sistemi modellenmiş ve tam durum geri beslemesi kullanılarak sistem kontrol edilmiştir. Çalışma sonucunda tercih edilen kutup yerleştirme metodunun küresel ters sarkacı belirli bir başlangıç açısından sıfır konumuna, hareketli taban plakasını da başlangıç konumuna getirerek sistemin mevcut durumunu muhafaza edebildiği görülmüştür.

Sisteme tam durum geri beslemesi uygulanabilmesi için hareket denklemlerinin lineerleştirilmesi gerektiğinden öncelikle sistemin hareket denklemleri Taylor serisi kullanılarak lineerleştirilmiş sonrasında sistem kutupları, sistemin kararlı davranış gösterebilmesi ve osilasyona uğramaması için negatif reel eksen üzerinde farklı noktalardan seçilerek, bu seçilen kutupların büyüklüğünün sistem cevabı üzerindeki etkisi gözlenmiştir. Sonuçlar, negatif reel eksen üzerinde seçilen kutupların mutlak değerinin büyümesinin küresel ters sarkaç sistemini daha erken denge konumuna ulaştırdığını göstermiştir. Kutupların mutlak değerinin artması ayrıca hareketli plakaya yatay düzlemin x ve y doğrultularında uygulanması gereken kuvvetlerin de artmasına neden olmuştur.

Nonlinear hareket denklemleri  $\theta = \phi = 0$  civarında lineerleştirilerek lineer ve nonlinear sistemlere tam durum geri beslemesi ile kontrol uygulandığında  $\theta$  ve  $\phi$ 'nin başlangıç değerlerinin sıfıra yakın olduğu durumlarda lineer ve nonlinear kapalı çevrim sistemlerinin cevaplarının birbirine çok yakın olduğu görülmüştür. Başlangıç açıları sıfır noktasından uzaklaştıkça lineer ve nonlinear kapalı çevrim sistemlerinin cevaplarının birbirine göre farklılaştığı tespit edilmiştir. Başlangıç açılarının büyümesi ile birlikte  $s \cong -2$  civarında seçilen sistem kutuplarının nonlinear kapalı çevrim sistemini denge konumuna getiremediği görülmüştür. Bunun üzerine sistem kutupları  $s \cong -3$  değerine kadar arttırılmış ve bu kutuplarla hesaplanan geri besleme kazancı sabitlerinin nonlinear kapalı çevrim sistemini daha büyük başlangıç açılarında da başarıyla kontrol edebildiği görülmüştür. Sistem kutuplarının mutlak değerinin daha büyük başlangıç açıları için arttırılması hareketli plakaya uygulanması gereken kuvveti arttırmış ancak ulaşılan kuvvet değerinin kabul edilebilir seviyelerde kaldığı gözlenmiştir.

## KAYNAKLAR

- [1]. Fajar, M., Douglas, S.S., Gomm, J.B., 2013, Modelling and Simulation of Spherical Inverted Pendulum Based on LQR Control with SimMechanics, *Applied Mechanics and Materials*, V. 391, Issue 2013, Pg. 163-167.
- [2]. Gutierrez, O.O., Ibanez, C.A., Sossa, A.H., 2009, Stabilization of The Inverted Spherical Pendulum Via Lyapunov Approach, *Asian Journal of Control*, V. 11, Issue 6, Pg. 587-594.
- [3]. Liu, G., Nesic, D., Mareels, I., 2008, Non-Linear Stable Inversion-Based Output Tracking Control For a Spherical Inverted Pendulum, *International Journal of Control*, V. 81, Issue 1, Pg. 116–133.
- [4]. Yoon, M., 2010, Dynamics and Stabilization of a Spherical Inverted Pendulum on a Wheeled Cart, *International Journal of Control, Automation and Systems*, V. 8, Issue 6, Pg. 1271-1279.
- [5]. Albouy, X., Praly, L., 2000, On the use of dynamic invariants and forwarding for swinging up a spherical inverted pendulum, *Proc. 39th IEEE Conf. Decis. Control*, Sydney, Australia, Pg. 1663–1672.
- [6]. Hoshino, T., Kawai, K., Furuta, K., 2000, Stabilization of The Triple Spherical Pendulum-A Simultaneous Design Approach, *Automatisierungstechnik*, V. 48, Pg. 577–587.
- [7]. Omer, A., Hashimoto, K., Takanishi, A., Lim, H., 2014, Study of Bipedal Robot Walking Motion in Low Gravity, *International Journal of Advanced Robotic Systems*, 11(1):1.
- [8]. Gören, A., 2012, *Sistem Dinamiği ve Modellemesi*, <http://kisi.deu.edu.tr/aytac.goren/MAK3017/h1.pdf>, [Ziyaret tarihi: 6 Nisan 2018]
- [9]. Padhi, R., *Pole Placement Control Design*, <http://nptel.ac.in/courses/101108047/module9/Lecture%2021.pdf>, [Ziyaret tarihi: 12 Nisan 2018]

## ÖZGEÇMİŞ

Kişisel Bilgiler	
Adı Soyadı	Fatih Burak TAN
Doğum Yeri	SAKARYA
Doğum Tarihi	01.01.1993
Uyruğu	<input checked="" type="checkbox"/> T.C. <input type="checkbox"/> Diğer:
Telefon	0538 504 87 37
E-Posta Adresi	<a href="mailto:fburaktan@gmail.com">fburaktan@gmail.com</a>
Web Adresi	



Eğitim Bilgileri	
Lisans	
Üniversite	İstanbul Üniversitesi
Fakülte	Mühendislik Fakültesi
Bölümü	Makine Mühendisliği
Mezuniyet Yılı	07.07.2014

Yüksek Lisans	
Üniversite	İstanbul Üniversitesi
Enstitü Adı	Fen Bilimleri Enstitüsü
Anabilim Dalı	Makine Mühendisliği
Programı	Makine Mühendisliği