



T.C.
İSTANBUL ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ



DOKTORA TEZİ

**KABUK YAPILARDA AKIŞKAN-ELASTİK CİSİM
ETKİLEŞİMİNİN TEORİK İNCELENMESİ**

Birkan DURAK

Makine Mühendisliği Anabilim Dalı

Makine Mühendisliği Programı

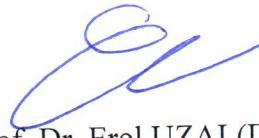
DANIŞMAN
Prof. Dr. Erol UZAL

Haziran, 2018

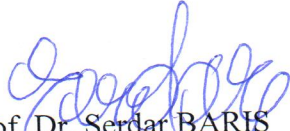
İSTANBUL

Bu çalışma, 19.06.2018 tarihinde aşağıdaki jüri tarafından Makine Mühendisliği Anabilim Dalı, Makine Mühendisliği Programında Doktora tezi olarak kabul edilmiştir.

Tez Jürisi



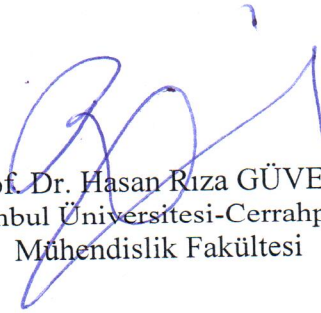
Prof. Dr. Erol UZAL(Danışman)
İstanbul Üniversitesi
Mühendislik Fakültesi



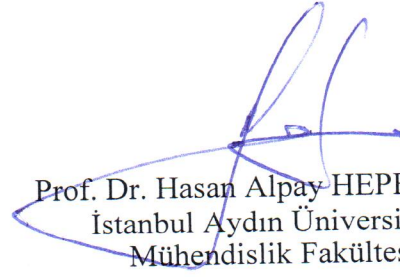
Prof. Dr. Serdar BARIŞ
İstanbul Üniversitesi-Cerrahpaşa
Mühendislik Fakültesi



Prof. Dr. Metin Orhan KAYA
İstanbul Teknik Üniversitesi
Uçak ve Uzay Bilimleri Fakültesi



Prof. Dr. Hasan Rıza GÜVEN
İstanbul Üniversitesi-Cerrahpaşa
Mühendislik Fakültesi



Prof. Dr. Hasan Alpay HEPERKAN
İstanbul Aydın Üniversitesi
Mühendislik Fakültesi



20.04.2016 tarihli Resmi Gazete’de yayımlanan Lisansüstü Eğitim ve Öğretim Yönetmeliğinin 9/2 ve 22/2 maddeleri gereğince; Bu Lisansüstü teze, İstanbul Üniversitesi’nin aboneli olduğu intihal yazılım programı kullanılarak Fen Bilimleri Enstitüsü’nün belirlemiş olduğu ölçütlere uygun rapor alınmıştır.

ÖNSÖZ

Doktora öğrenimim sırasında ve tez çalışmam boyunca gösterdiği her türlü destek ve yardımlarından dolayı tüm bölüm öğretim üyelerimize ve tez danışmanım Prof. Dr. Erol UZAL'a teşekkür ederim.

Tezime çeşitli noktalarda yardımlarıyla katkıda bulunmuş olan Alaattin SAYIN'a, Hüseyin YILDIZ'a ve Mehmet Ş. DEMİR'e teşekkür ederim.

Çalışmam boyunca desteklerini esirgemeyen aileme ve çalışma arkadaşlarıma teşekkürü bir borç bilirim.

Mayıs 2018

Birkan DURAK

İÇİNDEKİLER

Sayfa No

ÖNSÖZ	iv
İÇİNDEKİLER.....	v
ŞEKİL LİSTESİ	vii
TABLO LİSTESİ.....	viii
SİMGE VE KISALTMA LİSTESİ.....	ix
ÖZET	xi
SUMMARY	xii
1. GİRİŞ.....	1
2. GENEL KISIMLAR.....	2
3. MALZEME VE YÖNTEM.....	11
3.1. KOLLOKASYON YÖNTEMİNİN ADI DİFERANSİYEL DENKLEMLERİN ÇÖZÜMÜNE UYGULANMASI.....	11
3.2. KOLLOKASYON YÖNTEMİNİN KISMİ DİFERANSİYEL DENKLEMLERİN ÇÖZÜMÜNE UYGULANMASI.....	16
3.3. İNCE PLAKA VE KABUK TEORİSİ	22
3.4. POTANSİYEL AKIŞ	23
3.5. DÜZ PLAKANIN AKIŞ TESİRİ ALTINDAKİ TİTREŞİMİ.....	25
3.6. SİLİNDİRİK KABUĞUN AKIŞ TESİRİ ALTINDAKİ TİTREŞİMİ.....	31
4. BULGULAR.....	33
4.1. PLAKANIN SERBEST TİTREŞİMİNE AİT ÖZDEĞERLERİN BULUNMASI	33
4.2. PLAKANIN FLUTTER HIZI VE FLUTTER FREKANSININ BULUNMASI	39
4.3. SİLİNDİRİK KABUK ÜZERİNDEKİ BASINCIN ANALİTİK ÇÖZÜMÜ.....	53
4.4. SİLİNDİRİK KABUK SERBEST TİTREŞİMİ ÖZDEĞERLERİ HESABI	57
5. TARTIŞMA VE SONUÇ	62
KAYNAKLAR.....	64
EKLER	68
EK 1. Laplace denkleminin analitik çözümü	68
EK 2. Lineerleştirilmiş Bernoulli denkleminin çıkarılması	70
EK 3. Pertürbe olmuş silindir için çözüm	72
EK 4. Dirac delta fonksiyonun özellikleri.....	76

EK 5. Silindirik kabuğun serbest titreşiminin özdeğerleri hesabı	78
EK 6. Serbest titreşimde sınır şartlarını sağlayan fonksiyonların bulunması.....	80
ÖZGEÇMİŞ	84



ŞEKİL LİSTESİ

Sayfa No

Şekil 3.1: Analitik ve Kollokasyon çözümlerinin karşılaştırılması.	15
Şekil 3.2: Laplace denkleminin analitik ve kollokasyon çözümlerinin karşılaştırılması.....	21
Şekil 3.3: z doğrultusunda sonsuz uzun plaka.	25
Şekil 3.4: Plakanın sol yan görünüşü.	25
Şekil 3.5: x doğrultusunda sonsuz uzun Silindirik Kabuk.	31
Şekil 3.6: Silindirik Kabuk sol yan görünüşü.	31
Şekil 4.1: Boyutsuz Flutter Hızının Kütle oranı ile değişimi.....	45
Şekil 4.2: Boyutsuz Flutter Frekansının Kütle oranı ile değişimi.....	45
Şekil 4.3: Hızda 1 adımlık değişime karşılık özdeğer gerçel ve sanal kısımları.	47
Şekil 4.4: Hızda 0.1 adımlık değişime karşılık özdeğer gerçel ve sanal kısımları.....	47
Şekil 4.5: Hızda 0.002 adımlık değişime karşılık özdeğer gerçel ve sanal kısımları.....	48
Şekil 4.6: Hızda 0.00002 adımlık değişime karşılık özdeğer gerçel ve sanal kısımları.....	48
Şekil 4.7: Flutter öncesi öz fonksiyonların gerçel kısımları.	50
Şekil 4.8: Flutter sonrası öz fonksiyonların gerçel kısımları.	50
Şekil 4.9: Flutter öncesi öz fonksiyonların sanal kısımları.	51
Şekil 4.10: Flutter sonrası öz fonksiyonların sanal kısımları.....	51
Şekil 4.11: Flutter öncesi öz fonksiyonların mutlak değeri.	52
Şekil 4.12: Flutter sonrası öz fonksiyonların mutlak değeri.	52

TABLO LİSTESİ

	Sayfa No
Tablo 4.1: Özdeğerlerin çeşitli yöntemlerle hesabı.....	38
Tablo 4.2: Flutter Hızı ve Flutter Frekansının değerleri.....	44
Tablo 4.3: Özdeğerlerin Flutter öncesi ve sonrası değerleri.....	49
Tablo 4.4: Kabuk Serbest Titreşimine ait Özdeğerlerin karşılaştırılması.....	61



SİMGE VE KISALTMA LİSTESİ

Simgeler	Açıklama	
b	: Plaka genişliği	[m]
C_0	: Karakteristik hız	
D	: Plaka eğilme rijitliği	[N.m]
E	: Elastisite modülü	[Pa]
h_p	: Plaka kalınlığı	[m]
h, h_k	: Kabuk kalınlığı	[m]
$H(x)$: Heaviside fonksiyonu	
n	: Kollokasyon nokta sayısı	
P	: Basınç	[Pa]
R	: Kabuk yarıçapı	[m]
r	: silindirik radyal koordinat	
θ	: silindirik açısal koordinat	
u, v, w	: x, y, z doğrultularındaki yer değiştirmeler	[m]
$v(x)$: Plaka yer değiştirmesi	[m]
$v(\theta, t)$: Kabuğun y doğrultusunda yer değiştirmesi	[m]
$w(\theta, t)$: Kabuğun z doğrultusunda yer değiştirmesi	[m]
∇	: Nabla operatörü	
∇^2	: Laplasyen	
$\delta(x)$: Dirac delta fonksiyonu	
ψ	: Akım fonksiyonu	
φ	: Hız potansiyeli	
$\varphi(x), \varphi(x_i)$: Taban fonksiyonları	
ν	: Poisson oranı	
μ	: Boyutsuz kütle oranı	
ρ_p	: Plaka yoğunluğu	[kg/m ³]
ρ_f	: Akışkan yoğunluğu	[kg/m ³]
ρ_k	: Kabuk yoğunluğu	[kg/m ³]
ω	: Açısal frekans, Özdeğer	

Kısaltmalar**Açıklama**

DMV	: Donnell Mushtari Vlasov ince kabuk teorisi
FEM	: Sonlu Elemanlar Metodu
IMD	: Gecikmeli Atalet Manifoldları
MNF	: Normal Form Metodu
SSM	: Eğrisel Şeritler Yöntemi
TGM	: Geleneksel Galerkin Metodu



ÖZET

DOKTORA TEZİ

KABUK YAPILARDA AKIŞKAN-ELASTİK CİSİM ETKİLEŞİMİNİN TEORİK İNCELENMESİ

Birkan DURAK

İstanbul Üniversitesi

Fen Bilimleri Enstitüsü

Makine Mühendisliği Anabilim Dalı

Danışman : Prof. Dr. Erol UZAL

Akış kaynaklı titreşimde meydana gelen çırpınma olayının incelenmesi mevcut plaka, kabuk gibi yapıların bozulmalarına neden olacak hızların belirlenmesinde önemlidir. Bu çalışmada Lineerleştirilmiş Bernoulli denkleminde yararlanılarak potansiyel akışa maruz düz plaka üzerinde oluşan basınç bulunmuştur.

Tanımlanan yer değiştirme fonksiyonu ailesi, plakanın hareket denklemine yazılmıştır. Kollokasyon yöntemi kullanarak oluşan homojen denklem sisteminin katsayılar matrisinin determinantının kökleri olan özdeğerler farklı hızlar için hesaplanmıştır. Özdeğerlerin hesabı bilgisayarda simgesel olarak yapılmıştır. Bu özdeğerlerin sanal kısımlarının pozitiften negatife geçtiği hızlar çalışmada aranan çırpınma hızlarıdır. Çırpınma hızının ve frekansının tanımlanan boyutsuz kütle oranı ile değişimi tablo ve grafik halinde verilmiştir.

Silindirik kabuğun hareket denklemleri, akışın olmaması durumu için çözülerek serbest titreşime ait özdeğerler hesaplanmıştır. Sınır şartlarını sağlayan taban fonksiyonları önerilerek akışın kabuk üzerinde meydana getirdiği basıncın analitik ifadesi bulunmuştur.

Mayıs 2018, 96 sayfa.

Anahtar kelimeler: Plaka Titreşimi, Silindirik Kabuk Titreşimi, Çırpınma Hızı, Özdeğer

SUMMARY

Ph.D. THESIS

THEORETICAL INVESTIGATION OF FLUID-ELASTIC BODY INTERACTIONS IN SHELL STRUCTURES

Birkan DURAK

İstanbul University

Institute of Graduate Studies in Science and Engineering

Department of Mechanical Engineering

Supervisor : Prof. Dr. Erol UZAL

Examination of the fluttering phenomenon in flow-induced vibrations is important in determining the velocities that will cause deterioration of structures such as plates, shells. In the study using the linearized Bernoulli equation, the pressure on the flat plate exposed to the potential flow is found.

The defined displacement functions are written in the equation of motion of plate. The eigenvalues, which are the roots of the determinant of the coefficient matrix of the homogeneous equation system using the collocation method, are calculated for different velocities, calculated symbolically on the computer. The velocities at which the imaginary parts of these eigenvalues pass from positive to negative are the flutter velocities. The variation of the rate of flutter velocity and frequency with the defined dimensionless mass ratio is given in table and graph.

For the case of no flow, the free vibration are calculated by solving the equations of the cylindrical shell motion. The analytical expression of the pressure due to the flow on the shell was found by proposing the base functions that provided boundary conditions.

May 2018, 96 pages.

Keywords: Plate Vibration, Cylindrical Shell Vibration, Flutter Velocity, Eigenvalue

1. GİRİŞ

Plaka ve kabuk yapılara başta makine, inşaat, uçak, uzay mühendisliği olmak üzere birçok mühendislik dalında rastlamak mümkündür. Tasarlanan yapıların üzerinden akışkan geçişi sırasında meydana gelen titreşimlerin incelenmesi önemli bir mühendislik konusudur. Akışın yapıya olan etkisi, çarpınma hızının tespit edilmesi ile anlaşılmaya çalışılmaktadır. Bu hızlar belirlenerek gerekli önlemler alınıp mühendislik sisteminin çalışma ömrü arttırılabilecektir.

Tezin genel kısımlarında bu alanda daha önceden çalışmalar yürüten araştırmacıların plaka ve kabuk titreşim incelemelerinde göz önüne aldıkları sınır şartları ve geometriler hakkında bilgi verilmiştir. Bu çalışmalarda yapılan kabuller ve kullanılan hesaplama yöntemlerinden bahsedilmiştir.

Malzeme ve yöntem bölümünde plaka veya kabuk hareket denklemlerinin çözümünde kullanılan kollokasyon yönteminin matematiksel alt yapısına değinilmiştir. İnce Plaka Teorisinden ve bu teorinin kabulleri hakkında bilgi verilmiştir. Potansiyel Akış Teorisinden bahsedilmiştir. İncelenen problemlerdeki hareket denklemleri ve sınır şartları verilmiştir.

Bulgular kısmında düz plakanın hareketinin incelenmesinde öncelikle serbest titreşime ve ardından potansiyel akış kaynaklı titreşime ait özdeğerler kollokasyon yöntemi ile bulunmuştur. Çarpınma hızının hangi işlem adımları izlenerek bulunduğu anlatılmıştır. Bu hızın ve çarpınma frekansının tanımlanan boyutsuz kütle oranı ile değişimi tablo ve grafik olarak gösterilmiştir. Silindirik Kabuk yapılar üzerinde akış yüzünden meydana gelen basınç analitik olarak bulunmuştur.

Son bölümde tezde elde edilen sonuçlar tartışılarak sonraki çalışmalara dair öneriler yapılmıştır.

2. GENEL KISIMLAR

Plakların ve Kabukların Flutter (çarpınma) olayı günümüze kadar oldukça fazla sayıda yayına konu olmuştur. Araştırmacılar konuyu çeşitli sınır şartlarında ve çeşitli matematiksel metotlarla incelemişlerdir. Yapılan incelemelerde özdeğerlerin ve çarpınma hızlarının bulunabilmesi hedeflenmiştir.

Eloy ve diğ. [1] değişken boy ve en oranına sahip uniform ve sıkıştırılmaz aksel akış içerisindeki dikdörtgen plakanın hareketini incelerken Galerkin yöntemi ve Fourier dönüşümünden faydalanmışlardır. Kritik akış hızını, kütle oranı ile plakanın en boy oranının bir fonksiyonu olarak hesaplamışlardır.

Tubaldi ve diğ. [2] üst tarafından rijit bir duvar ile alt tarafından ise periyodik olarak basit mesnetlenmiş bir plaka ile oluşturulan bir kanal içerisinde tek yönlü akışkan geçişi sırasında oluşan titreşimlerinin hareket denklemlerini oluştururken Von Karman'ın nonlineer plaka teorisini ve sistemdeki geometrik kusurları göz önüne almışlardır. Akış hızı ve geometrik kusurlar gibi sistem parametrelerinin plakanın dengesine ve doğrusal olmayan titreşim cevabına olan etkisine bakmışlardır.

Dowell [3] sonsuz uzunluktaki ve sonlu genişliğe sahip bir plaka üzerinden sıkıştırılmaz akışkan geçişi sırasında bu plakanın aeroelastik stabilitesini incelemiştir. Problemin çözümünde hareket eden dalga yaklaşımını kullanmıştır. Bu çalışmada çarpınma hızının, kütle oranı ve Mach sayısı ile değişiminin grafikleri verilmiştir.

Vedeneev [4] çalışmasında yüksek Mach sayılarında plakaya etki eden hava basıncını temsil etmek amacıyla piston teorisini kullanmıştır. Araştırmacıya göre; Piston teorisini kullanan tipik aeroelastik analiz yöntemleri, tek modlu titreşim olaylarının oluşumunu araştırmak veya tahmin etmek için yetersizdir. Bu tarz problemlerin incelenebilmesi için potansiyel akış teorisi veya daha karmaşık aerodinamik teoriler gerektiğini belirtmiştir.

Serbest, basit desteklenen ve sabit kenarlar birleştirilerek elde edilebilecek olası tüm sınır koşullarına sahip dikdörtgen plakaların serbest enine titreşimlerini inceleyen Warburton [5] çalışmasında Rayleigh yöntemini tüm titreşim modları için basit bir yaklaşık frekans ifadesi elde etmek için kullanmıştır.

Soedel [6] düz plakaların doğal frekansları ile küresel kavisli panellerin doğal frekansları arasında bir ilişki tanımlamıştır. Bulunan ifadenin basitliği ve genel uygulanabilirliği sayesinde bu ilişkinin akustik, titreşim alanlarında çalışan araştırmacılar için faydalı olacağını belirtmiştir.

Gecikmeli Atalet Manifoldları (IMD) metodunu iki ve üç boyutlu plaka çarpınma problemlerine uygulayan Mei ve diğ. [7] sonsuz boyutlu sürekli dinamik sistemler için uygun sonuçlara ulaşmışlardır. Araştırmacılar öncelikle Von Karman'ın plakalar için büyük deformasyon teorisi ve birinci derece piston teorisini sistemi modellemek için kullanarak bir dizi nonlinear kısmi diferansiyel denklem elde etmişlerdir. Ardından IMD 'ye dayanan lineer olmayan Galerkin yöntemi sonsuz boyutlu dinamik sistemin çözümünde kullanılmıştır. Bu metot ile elde edilen sonuçlarla geleneksel Galerkin metodundan (TGM) bulunan sonuçlar karşılaştırılmıştır. Daha yüksek modlar ile daha düşük modlar arasındaki etkileşimler ortaya çıkarılmaya çalışılmış ve bunun için zaman gecikmeli bazı ifadeler önerilmiştir. IMD' nin hesaplama süresini %7 ile %50 arasında düşürdüğünü ve yöntemin çok serbestlik derecesine sahip dağınık dinamik sistemlere genişletilebileceğini belirtmişlerdir.

Basit mesnetlenmiş sınır şartlarına sahip ve subsonik hava akışı içerisinde yer alan iki boyutlu kompozit lamine plakaların doğrusal olmayan titreşimini araştıran Yao ve Li [8] hareket denklemini Von Karman'ın plaka teorisine dayanarak Hamilton prensibinden çıkarmışlardır. Aerodinamik basıncı lineer potansiyel akış teorisinden türetmişlerdir. Değişkenlere ayırma yönetimi ile plakanın hareket denklemi doğrusal olmayan adi diferansiyel denklemlere dönüştürülerek çözüm yapılmıştır. Plakanın doğrusal olmayan titreşim davranışlarında akış hızının, kalınlık oranının ve tabakaların diziliş açısının etkisini inceleyen yazarlar kritik hızın analitik ve sayısal sonuçları arasındaki uyumdan hareketle kullandıkları aerodinamik model seçiminin doğruluğunu göstermişlerdir.

Xing ve Liu [9] ince plakaların enine serbest titreşimi problemindeki hareket denklemini çözebilmek için sistemin Hamiltonyen diferansiyel operatör matrisini ve durum vektör bileşenlerini kullanmışlardır. Değişkenlerin ayrıştırılması metodunu kullanarak özdeğer denklemleri, normal modlar ve frekanslar için tam çözüm vermişlerdir. Mevcut sonuçlar ile Sonlu Elemanlar Metodu (FEM) sonuçlarının birbirleri ile uyumlu olduğunu göstermişlerdir.

Kenarlarından basit mesnetlenmiş uniform dikdörtgen şeklindeki eğrisel panellerin serbest titreşimi için tam ve bazı yaklaşık çözümler Webster [10] tarafından verilmiştir. Kesin

çözümlerin tüm sınır şartları için var olmadığı ve panel orta yüzeyindeki yer değiştirmelerin orta yüzey koordinatlarındaki kesikli çift güç serileri ile temsil edilebildiği genel bir enerji yöntemi özetlenmiştir. Kelepçelenmiş paneller için bulunan yaklaşık frekans denkleminin doğru sonuçlar verdiği panel geometrisi aralığı tanımlanmıştır.

Yadykin ve diğ. [11] düşük en boy oranına sahip düzlemsel esnek bir levhanın durgun bir sıvıya daldırılması problemini incelemiştir. Problemin çözümünde ek kütle kavramından faydalanmışlardır. Ek kütle kavramının akış içerisinde bulunan esnek plakaların dinamik analizinde geniş bir uygulama alanına sahip olduğunu belirtilmiştir. Modelde plaka bir kenarından kelepçelenirken diğer ucu serbest bırakılmıştır. Plaka tek bir doğal modda titreşmektedir. İnce kanat teorisi plakanın üzerindeki basınç atlamalarının hesaplanmasında kullanılmıştır. Eklenen kütle büyüklüğü, genişlik bakımından yarım sinüs temel modu için hesaplanmış ve düşük en boy oranında ilk on kordsal mod bulunmuştur.

Titreşim analizinde ek kütle çözümünü Pretlove [12] panellere ve Minami [13] ise membrana uygulamıştır.

Haziran 1960 yılına kadar plaka çırpınması ile ilgili yayınlanmış yaklaşık yetmiş makaleyi Fung [14] incelemiştir. Düz plakalar ve silindirik kabuklarla ilgili deneysel sonuçların kısa bir açıklaması bu yayında verilmiştir. Havacılık araçlarındaki panel çırpınma analizinde gerçekçi bir hesaplama programının oluşturulması amacıyla deneysel sonuçlardan hareketle makul basitleştirici varsayımların incelendiği bu çalışmada bazı durumlarda çok basit analizlerin yeterli olduğu, bazı incelenen problemler için ise büyük ayrıntıların gerektiği belirtilmiştir. Düz plakalar için statik aerodinamik kuvvet basitleştirmesi (Ackeret formülü), yarı kararlı yaklaşım (indirgenmiş frekanstaki birinci dereceden terimlerin varlığı) ve doğrusal piston teorisinin (Lighthill'in lineer terimlerle tutarlı piston teorisi) Mach sayısının 2 den büyük olduğu durumlarda iyi sonuçlar verdiği bahsetmiştir.

Sınır tabaka kalınlığının plaka uzunluğunun yaklaşık yirmide birinden büyük olması durumunda, sınır tabaka etkisinin düşük süpersonik Mach sayısında oldukça önemli olabileceğini Dowell [15] yaptığı deneylerle göstermiştir. Bu çalışmada çırpınma dinamik basıncının ve frekansının Mach sayısı ile değişimleri gösterilmiştir.

Hareketli tekil bir yük etkisindeki dairesel, ince, izotropik bir plakanın dinamik cevabı için analitik seri çözümü veren Uzal ve Sakman [16] hesaplamalarını iki özel durum için

yapmışlardır. Birinci durumda yük düz bir çizgide sabit hızla hareket ediyor iken ikinci durumda sabit açısız hıza sahip olacak şekilde plakayla eş merkezli bir çember üzerinde hareket etmektedir. Fourier Bessel serisi formundaki tam çözüm, üzerinde keyfi olarak hareket eden tekil yüke plakanın dinamik tepkisini göstermektedir.

Epstein ve diğ. [17] üst ve alt yüzeyinden sıkıştırılabilir akışa maruz kalacak şekilde bir kanal içerisinde bulunan sonlu genişlik ve sonsuz uzunluğa sahip bir plakanın aeroelastik kararlılığını incelemişlerdir. Plaka davranışını küçük sapma plakası teorisiyle analiz etmişlerdir. Plaka üzerine etki eden aerodinamik kuvvetlerin potansiyel teoride doğrusallaştırılmış küçük bozulmalardan dolayı oluştuğu varsayılmıştır. Plakanın yan kenarları boyunca basitçe mesnetlendiği veya kanal kenarlarına kenetlendiği iki farklı plaka sınır şartı için hesaplamalar yapmışlardır.

Anizotropinin çarpınma hızı, dalga boyu ve dalga hızı üzerindeki etkisini anlamak amacıyla Körbahti ve Uzal [18] ortotropik bir plakanın dikdörtgen kesitli kanal içerisindeki davranışını incelemişlerdir. Plaka, kanalın orta bölümüne yerleştirilmiş ve yan taraflarından basit mesnetlenmiştir. Sıkıştırılabilir akış lineer potansiyel teori ile modellenmiştir. Plakanın titreşiminin özdeğerleri için analitik bir çözüm sunmuşlardır.

Uzal ve Körbahti [19] homojen, izotropik ve elastik bir plakanın titreşiminin kontrolünü inceledikleri problemde plakayı kenarlarından basitçe desteklenmiş sonsuz uzunluğa sahip bir şerit olarak düşünmüşlerdir. Bu şeridin titreşim özellikleri uygulanan yanal bir tekil yük ile kontrol edilmeye çalışılmıştır. Uygulanan kontrol kuvvetinin büyüklüğü plakanın belirli bir noktasında ölçülen yer değiştirmeye orantılı olarak değiştirilmektedir. Titreşim frekanslarını tanımladıkları boyutsuz bir kontrol parametresinin fonksiyonu olarak çizdirmişlerdir.

Liew ve diğ. [20] tarafından kalın plakaların titreşim analizi hakkındaki yüzden fazla makaleye sahip bir derleme yazılmıştır. Burada incelenen yayınlar çoğunlukla Mindlin ve Modifiye Mindlin plaka teorilerine dayanan çalışmalardır. Daha önce yapılan çalışmaları araştırmacılara yardımcı olmak amacıyla farklı plaka şekillerine göre sınıflandırmışlardır.

Chakravorty ve Bandyopahyay [21] genelleştirilmiş sığ kabukların serbest titreşim analizi için bir sonlu elemanlar formülasyonu tanımlamışlardır. Köşelerinden mesnetlenmiş hiperbolik paraboloidal, silindirik ve küresel kabukların bulunan doğal frekansları ile benzer kabuklarla

çalışmaları olan araştırmacıların daha önceden bulmuş oldukları frekansları karşılaştırarak tanımladıkları formülasyonun doğruluğunu test etmişlerdir.

İnce dairesel silindirik kabuğun serbest titreşim frekanslarını hesaplamak amacıyla yeni bir yaklaşım geliştiren Li [22] incelemesinde Flügge'nin ortotropik malzemeler için verdiği kabuk teorisi denklemlerinden yararlanmıştır. Çalışmasında analiz sırasında kabuk yer değiştirmesinin genel bir türünü kullanmıştır. Farklı bir tipte sekizinci dereceden karakteristik denkleme ulaşmış ve denklemin köklerini Newton-Raphson İterasyon Yöntemi ile bulmuştur. Sunduğu yaklaşımın keyfi sınır koşulları için dairesel silindirik kabuk analizinde değişkenlerin ayrıştırılmasıyla ilgili genel bir form verdiğini belirtmiştir. Yönteminin uygulanabilirliğini incelemek amacıyla izotropik ve ortotropik kabuklar için sayısal örnekler vermiştir.

Leissa ve Kadı [23] çalışmalarında eğriliğin sığ kabukların titreşim frekansına olan etkisini değerlendirmişlerdir. Bu amaçla kabuk kesme diyagramları tarafından desteklenen dikdörtgen bir sınıra sahip olacak şekilde seçilmiştir yani sınırlarda eğilme momenti ve membran kuvvetleri oluşmamaktadır. Sınır koşulları lineer ve küçük sapmalara karşılık gelen tam kapalı form çözümlerine imkan vermektedir. Bu durumun pratik uygulamalarda kolayca oluşabileceği belirtilmiştir. İnceledikleri kabuk iki bağımsız eğrilik yarıçapına sahiptir. Doğrusal özdeğer problemi teğetsel ataletin olma ve olmama durumları için çözülmüştür. Doğrusal analizde elde edilen mod şekilleri doğrusal olmayan hareket ve uygunluk denklemlerini Galerkin yöntemi ile çözecek şekilde genişletilmiştir. Çözüm sırasında ortaya çıkan eliptik integral sayısal olarak hesaplanmıştır. Böylece büyük sapmaların olduğu durumlarda çeşitli eğrilik oranları için frekansın ve faz düzleminin değişimini gösterebilmişlerdir.

Leissa ve Narita [24] keyfi eğriliğe sahip kabuklar için bir problem çözümü sunmuşlardır. Deplasman fonksiyonlarının polinom şeklinde alındığı bu çalışmada çözümde Ritz yöntemi kullanılmıştır. Uygun çözüm için alınması gereken polinom terim sayısı hesaplanmıştır. Sayısal hesaplamalar sonucunda dairesel silindirik, küresel ve hiperbolik paraboloidal şekle sahip üç tip kabuğun frekansları ve mod şekilleri bulunmuştur. Bu değerler düz plakanın sonuçları ile karşılaştırılmıştır.

Tedesco ve diğ. [25] kapağa sahip silindirik tankların serbest titreşiminin incelenmesinde elde edilen radyal deplasman verileri üzerinde regrasyon analizi yapmışlardır. Radyal deplasman ve

tank yükseklik parametresi arasındaki ilişkiyi temsil etmek üzere kübik bir polinom seçmişlerdir.

Sınır şartlarının ince silindirik kabukların modal karakteristiklerine olan etkisini inceleyen Forsberg [26] Flügge tarafından bu tip kabuklar için verilen hareket denklemlerini çeşitli sayıda sınır şartı seti için çözmüştür. Her bir set dört sınır koşulu içermektedir. Herhangi bir yeni basitleştirme ve yaklaşım sunmadığından mod şekilleri, modal hızlanma ve modal gerilmenin hareket denklemlerinin çözümünden doğru olarak bulunabileceğini belirtmiştir.

Basit olarak desteklenmiş ince dairesel silindirik kabukların lineer olmayan serbest ve zorlanmış titreşimleri Rougui ve diğ. [27] tarafından incelenmiştir. Araştırmada Donell'in nonlineer kabuk teorisi kullanılmış ve büyük titreşim genliklerinden dolayı oluşan dalgalanmalar hesaba katılmıştır. Lagrange denklemlerinin uygulanması ile elde edilen lineer olmayan dinamik hareket problemi harmonik denge metodu kullanılarak statik problemine indirgenmiştir. Sonlu Elemanlar Metodu (FEM) ve Normal Form Metodu (MNF) hesap sonuçlarıyla teorik hesaplamalarda ve deneylerde bulunan değerlerin uyumlu olduğu görülmüştür.

Dairesel silindirik bir kabuk ve bir ucuna bağlı rijit cisimden oluşan mekanik bir sistemin serbest titreşim problemini inceleyen Trotsenko [28] hareket denklemini virtüel iş prensibinden çıkarmıştır. Kabuk problemine eş değer bir Timoshenko kiriş problemini oluşturarak tam çözümleri verebilmiştir. Sistemin dinamik özelliklerinin bulunması için kurulan algoritma basit kiriş teorisinde genel hesaplamalar yapmaya imkan vermiştir. Kayma teorisi denklemlerine kesme gerilmeleri ve dönел atalet terimlerinin eklenmesi kabuk problemine kiriş çözümü ile yaklaşabilmeyi sağlamıştır.

Mizusawa [29] çeşitli sınır koşullarına sahip açık silindirik kabukların titreşim problemini çözmek amacıyla Novozhilov'un kabuk teorisine dayanan Eğrisel Şeritler Yöntemini (Spline Strip Method) kullanmıştır. Bu yöntem, geleneksel Sonlu Şeritler Yöntemine göre daha doğru sonuçlar ve daha az miktarda bilinmeyen terimler vermektedir. Hassasiyetin eğri fonksiyonlarının derecelerine ve şerit sayısına olan bağlılığının incelendiği çalışmanın sonuçlarıyla diğer sayısal yöntemlerle bulunan doğal frekans değerleri karşılaştırılmıştır.

Silindirik gövdelerin titreşimi inceleyen Zhang ve diğ. [30] çalışmalarında dalga yayılım yöntemini kullanmışlardır. Yöntemin karmaşık sınır koşullarına ve sıvı yüküne maruz kabuk

yapılara genişletilebileceğini belirtmişlerdir. Her iki ucundan tamamen sıkıştırılmış silindirik bir kabuk için sonlu elemanlar modelini oluşturarak MSC/NASTRAN sonlu elemanlar yazılımı ile ilk sekiz doğal frekansı hesaplamışlardır. Buldukları sonuçlarla sayısal sonlu elemanlar sonuçları uyumludur.

Yapısal elemanlarla boylamasına güçlendirilmiş basit mesnetli silindirik kabukların titreşimi Rinehart ve Wang [31] tarafından enerji yöntemi kullanılarak incelenmiştir. Güçlendiriciler Vlasov'un ince cidarlı kiriş teorisine göre değerlendirilmiştir. Silindirin incelenmesinde ise Donnell'in yaklaşım kuramı ve Flügge'nin kabuk teorisi göz önüne alınmıştır. Sinüsoidal dalga formu uzunlamasına yönde kabul edilirken çevresel yöndeki mod şekilleri Fourier serileri ile temsil edilmiştir. Hesaplanan frekans ve mod şekillerini deney sonuçları ve diğer analitik çözümlerle karşılaştırmışlardır.

Farshidianfar ve diğ. [32] uzun dairesel silindirlerin titreşimlerini akustik uyarma yöntemi ile incelemiştirler. Farklı uyarma türlerini karşılaştırarak bu yöntemin daha önceki araştırmalarda kullanılan yöntemlere göre birçok avantajı olduğunu keşfetmişlerdir. Love ve Flugge teorilerine dayanan beş farklı analitik yöntemin değerlendirildiği çalışmada, doğal frekansların ve mod şekillerinin belirlenmesinde her bir teorinin doğruluğu saptanmaya çalışılmıştır. Bu iki teoriden elde edilen doğrudan çözümlerin deney sonuçları ile karşılaştırılmasıyla eksenel simetrik ve kiriş benzeri modlar için uyumlu oldukları görülmüştür. Yu'nun, Flugge kabuk teorisine uygulamış olduğu basitleştirmenin, varsayımın geçerli olmadığı eksenel simetrik modlar haricinde uygun bir yaklaşım olduğunu belirtmişlerdir.

Lim ve diğ. [33] çalışmalarında açık silindirik kabukların titreşiminin üç boyutlu elastisite analizini yapmışlardır. Plaka ve kabukların yüksek mertebeden teorilerinde ihmal edilen enine normal gerilmeleri göz önüne almışlardır. Doğal frekanslar ve mod şekilleri üç boyutlu bir yer değiştirme esaslı ekstremum enerji prensibinden bulunmuştur. Çeşitli sınır koşullarına sahip kabuklarda eğim açısının ve en boy oranının titreşime olan etkisini grafik halinde göstermişlerdir. Geliştirdikleri algoritmayla bir sonlu elemanlar paket programı ile saatlerce süren hesaplamaları bir dakikadan az bir sürede gerçekleştirebilmişlerdir.

Singh ve Shen [34] farklı noktalarından mesnetlenen açık dairesel silindirik lamine kabukların serbest titreşimlerinin analizi için varyasyonel bir tam alan metodu önermişlerdir. Birinci mertebeden kabuk teorisine kesme kuvvetleri ve dönел ataleti dahil ederek diferansiyel

denklemleri matris formunda elde etmişlerdir. Yer değiştirme alanlarını, çok yüksek dereceli interpolasyon polinomları ve kabuğun referans yüzeyinde önceden seçilmiş çok sayıda düğüm noktası kullanarak tanımlamışlardır. Her düğüm noktasının beş serbestlik derecesi, üç yer değiştirme bileşeni ve normalin referans yüzeyindeki dönüşünün iki bileşeni vardır. Sayısal sonuçları iki paralel düz kenar boyunca dört, altı ve sekiz noktada desteklenmiş sığ veya derin paneller için vermişlerdir.

Halka takviyeleri ve bölmeleriyle birleştirilmiş olan konik, silindirik ve küresel kabuk olmak üzere üç parçadan oluşan bir yapının serbest ve zorlanmış titreşim analizi probleminde yarı analitik bir yöntem Xie ve diğ. [35] tarafından önerilmiştir. Çalışmada, açılmış küresel kabuk yaklaşık olarak konik kabuklar olarak ele alınmış, dar şeritler halinde bölünmüştür. Konik ve silindirik bölümlerin hareket denklemlerini Flugge'nin kabuk teorisiyle vermişlerdir. Bağlantı noktalarındaki dikdörtgen kesitli güçlendiriciler dairesel plaka olarak modellenmiştir. Konik parçaların, silindirik kısmın ve halka şeklindeki plakaların yer değiştirme fonksiyonlarının sırasıyla güç serileri, dalga fonksiyonları ve Bessel fonksiyonları olarak genişletilebileceğini söylemişlerdir. Hesaplamalarını ANSYS programı ile yaparak literatürdeki sonuçlarla karşılaştırmışlardır.

Farshidianfar ve Oliazadeh [36] dairesel silindirik kabukların serbest titreşimini giriş fonksiyonu yöntemi ile incelemişlerdir. Bu yöntemin sınır koşulu denklemlerini içermediğinden yoğun hesaplamalar gerektirmediğini belirtmişlerdir. Yöntemi on farklı kabuk teorisine uygulamışlardır. Bu teoriler; Donnell-Mushtari, Love-Timoshenko, Arnold-Warburton, Houghton-Johns, Flugge-Byrne-Lur'ye, Reissner-Naghdi-Berry, Sanders, Vlasov, Kennard-Simplified, Soedel kabuk teorileridir. Genlik oranları üzerinde uzunluğun, yarıçapın ve kalınlığın etkisinin incelendiği çalışma sonuçlarıyla deney sonuçları uyumludur.

Çevresel incelmeye sahip açık silindirik kabukların doğal frekansları ve modlarını hesaplamak için analitik bir metot sunan Ohga ve diğ. [37] kullandıkları transfer matrisini silindirik kabuklar için yazılan nonlinear diferansiyel denklemin sayısal integralinden bulmuşlardır. Kesitin kalınlık değişiminin doğal frekanslar ve modlar üzerindeki etkisini araştırmışlardır. Yöntemin doğruluğunu ve yakınsaklığını bulmak amacıyla çeşitli eğrilikler, en boy oranları, sınır koşulları ve kalınlık oranları için çevresel kalınlık değişimine sahip kabuklarda hesaplamalar yapmışlardır.

Karagiozis ve diğ. [38] tarafından iki ucundan sıkıştırılmış, eksenel akışa maruz, ince dairesel silindirik kabukların nonlinear dinamiği ve stabilitesiyle ilgili teorik bir model verilmiştir. Geometrik nonlinear yapıyı tanımlamak için Donnell'in doğrusal olmayan sığ kabuk denklemlerini kullanmışlardır. Sıkıştırılmış kirişin öz fonksiyonlarını, sınır koşullarını ve çevresel süreklilik koşullarını tam olarak sağlayan kabuk deformasyonunun eksenel değişimlerini tanımlamak için vermişlerdir. İncelenen problemde akışkan sıkıştırılmaz ve sürtünmesizdir. Akış yapı etkileşimi lineer potansiyel teori ile tanımlanmıştır. Hareketin diferansiyel denklemi Galerkin yöntemi ile ayrıklaştırılmış ve son denklem seti sahte yay devam (Pseudo-arclenght continuation) ve kollakosyon teknikleriyle sayısal olarak integre edilmiştir.

Sıvı-yapı etkileşimi olan veya olmayan dairesel silindirik kabukların ve panellerin doğrusal olmayan titreşimlerinin dinamiği üzerine yapılan çalışmaların değerlendirilmesini Amabili ve Paidoussis [39] yapmıştır.

Liew ve diğ. [40] tarafından yapılan sığ kabukların titreşimi konusundaki derlemede, kalın ve ince kabuk teorilerindeki varsayımlara, tek ve çift eğrilikli kabuklarla ilgili geniş bir yayın listesine ulaşılabilir.

Yao ve diğ. [41] çalışmalarında açık silindirik kabukların serbest titreşimini incelemiştir. Kabuk iki düz kenarından veya iki kavisli kenarından basitçe mesnetlenirken geriye kalan diğer iki kenar keyfi klasik sınır koşullarına sahiptir.

Kabuk teorisi olarak Donnell-Mushtari-Vlasov ince kabuk teorisi kullanılmıştır. Basit desteklenmiş kenarlarda ilerleyen dalga formu ve diğer iki kenar boyunca modal dalga formu için analitik çözümler vermişlerdir. Bu tarz tek yönlü hareket eden dalga formu çözümü yankılanma ışın matrisi metodu (Reverberation-ray matrix) ile farklı klasik sınır koşullarına sahip kabuğun doğal frekanslarının denklemini bulmak için verilmiştir. Doğal frekanslar için kesin çözümler Altın Oran Arama Algoritması (Golden Section Search Algorithm) uygulanarak bulunmuştur. Sonlu elemanlar ve literatürdeki mevcut sonuçlarla karşılaştırmalar yapılmıştır. Doğal frekanslara; kabuğun uzunluğunun, kalınlığının, yarıçap, iç açısının, sınır koşullarının etkisini incelemiştir. Bu çalışmanın sonuçlarının başka araştırmacıların sayısal yöntemlerini kontrol etmek için veya tasarım mühendislerince ince kabuk bileşenli yapıların analizinde kullanılabileceğini belirtmişlerdir.

3. MALZEME VE YÖNTEM

3.1. KOLLOKASYON YÖNTEMİNİN ADİ DİFERANSİYEL DENKLEMLERİN ÇÖZÜMÜNE UYGULANMASI

Adi diferansiyel denklemlerin çözümünde kullanılan belirsiz parametreler yönteminde sınır değer probleminin yaklaşık bir çözümü bulunmaya çalışılır. Bu çözüme yaklaşım fonksiyonu adı verilir. Seçilen yaklaşım fonksiyonun sınır şartlarını veya diferansiyel denklemi sağlaması yöntemin esasını oluşturur. Bazı problem tiplerindeyse kısmen sınır şartlarını veya kısmen de denklemi sağlayan yaklaşım fonksiyonları seçilir. Bakioğlu [42] bu fonksiyonların sağlamadığı şartlar üzerine çeşitli kriterler konularak yaklaşık olarak sağlatılması gerektiğini ve ağırlıklı kalan yöntemi olarak adlandırılmasının diferansiyel denklemin kalanları üzerinde konulan şartların bir ağırlık fonksiyonuyla çarpılarak verilmesinden dolayı olduğunu belirtmiştir.

L bir diferansiyel operatörü göstermek üzere bir diferansiyel denklem

$$L u = f(x) \quad (3.1)$$

şeklinde gösterilebilir. Denklem yaklaşık çözümü

$$\hat{u} = \sum_{i=1}^n c_i \varphi_i(x) \quad (3.2)$$

olsun burada $\varphi_i(x)$ 'ler sınır şartlarını sağlayan taban fonksiyonlarıdır. Bunlar uygun bir şekilde seçilmiş bir fonksiyon ailesidir. Bu çözüm (3.1) denkleminde yazılırsa denklem sağlanmayacağından

$$R(x) = L \hat{u} - f(x) \neq 0 \quad (3.3)$$

olacaktır. $R(x)$ ' e kalan (residual) denir. (3.2) denklemdeki c_i katsayıları mümkün olduğunca (3.1) eşitliğini sağlayacak tarzda seçilirler. Kollokasyon yönteminde kalan seçilmiş kollokasyon noktalarında sifira eşitlenir. Kollokasyon noktaları x_i ile gösterilirse

$$R(x_i) = L \hat{u}(x_i) - f(x_i) = 0 \quad i = 1, 2, 3, \dots, n \quad (3.4)$$

olacaktır.

(3.4) denklemi C_i katsayıların bulunması için n adet cebirsel denklem şeklindedir. Bu katsayılar bulunarak (3.2) de yazıldığında diferansiyel denklemin yaklaşık çözümü bulunmuş olur.

Kollokasyon yöntemi adi diferansiyel denklemler başta olmak üzere kısmi diferansiyel, integral, integro-diferansiyel denklemlerin çözümünde kullanılan bir yöntemdir. Kollokasyon yöntemini verilen diferansiyel denkleme uygulayalım

$$y'' + y = 0 \quad (3.5)$$

Sınır şartları ise

$$y(0)=1 \quad (3.6)$$

$$y(1)=0 \quad (3.7)$$

olarak verilmiş olsun denklemin analitik çözümü

$$y(x) = \cos(x) - \cot(1) \sin(x) \quad (3.8)$$

Denklemin sınır şartlarını sağlayan iki tane çözümünü $x(1-x)$ ve $x(1-x)^2$ şeklinde alalım. C_1 ve C_2 keyfi sabitler olmak üzere denklemin genel çözümü

$$y(x) = C_1 (1-x) + C_2 (1-x)^2 \quad (3.9)$$

C_1 ve C_2 sabitlerini bulmak için (3.6) ile verilen homojen olmayan sınır şartı ve denklem kullanılmalıdır.

$$y(0)=1 \quad \Rightarrow \quad C_1 + C_2 = 1 \quad (3.10)$$

$$R(x) = y'' + y = 2C_2 + C_1(1-x) + C_2(1-x)^2 = C_1(1-x) + C_2[2+(1-x)^2] \quad (3.11)$$

(3.11) verilen ifadenin keyfi bir x değeri için sıfır olması sağlanırsa (3.5) ile verilmiş olan diferansiyel denklemin çözümüne ulaşılabacaktır. Kollokasyon noktası olarak $x = \frac{1}{3}$ olarak alınırsa

$$R\left(\frac{1}{3}\right)=0 \quad \Rightarrow \quad \frac{2}{3}C_1 + \frac{22}{9}C_2 = 0 \quad (3.12)$$

(3.10) ve (3.12) nolu denklemlerden (3.13) ile verilen denklem sistemine ulaşılır.

$$\begin{aligned} C_1 + C_2 &= 1 \\ 6C_1 + 22C_2 &= 0 \end{aligned} \quad (3.13)$$

Denklem (3.13) ün çözümünden $C_1 = 1.375$ ve $C_2 = -0.375$. olarak hesaplanıp denklem (3.9) de yerine yazılırsa diferansiyel denklemin genel çözümü bulunmuş olur.

$$y(x) = 1.375(1-x) - 0.375(1-x)^2 \quad (3.14)$$

Verilen diferansiyel denklemdeki ilk şartı homojen hale getirilerek farklı bir çözüme ulaşılabilir. Bu durumda 2 adet kollokasyon noktası kullanılmalıdır. Diferansiyel denklemin genel çözümü

$$y(x) = u(x) + (1-x) \quad (3.15)$$

formunda olsun bu çözüme sınır şartları uygulanırsa

$$\begin{aligned} y(0)=1 &\Rightarrow u(0)+1=1 \\ y(1)=0 &\Rightarrow u(1)+0=0 \end{aligned} \quad (3.16)$$

Denklem (3.15) ve denklem (3.16) göz önüne alınarak (3.5) ile verilen denklem aşağıdaki hale gelir.

$$\begin{aligned} u'' + u + 1 - x &= 0 \\ u(0) &= 0 \\ u(1) &= 0 \end{aligned} \quad (3.17)$$

denklem (3.17) in sınır şartlarını sağlayan iki tane çözümü $x(1-x)$ ve $x(1-x)^2$ dir. C_1 ve C_2 keyfi sabitler olmak üzere denklemin genel çözümü

$$u(x) = C_1 x(1-x) + C_2 x(1-x)^2 \quad (3.18)$$

ile verilir. Denklem (3.18) denklem (3.17) de yazılırsa

$$R(x) = u'' + u + 1 - x = C_1[x - x^2 - 2] + C_2[x(1-x)^2 + 6x - 4] + 1 - x \quad (3.19)$$

(3.19) ile verilen ifadenin keyfi bir x_1 ve x_2 değerleri için sıfır olması sağlanırsa (3.5) ile verilmiş olan diferansiyel denklemin çözümüne ulaşılabacaktır. Kollokasyon noktası olarak $x_1 = \frac{1}{3}$ ve $x_2 = \frac{2}{3}$ olarak alınır

$$\begin{aligned} R\left(\frac{1}{3}\right) = 0 &\Rightarrow \left(-\frac{15}{9}\right)C_1 - \frac{50}{27}C_2 = -\frac{2}{3} \\ R\left(\frac{2}{3}\right) = 0 &\Rightarrow -\frac{16}{9}C_1 + \frac{2}{27}C_2 = -\frac{1}{3} \end{aligned} \quad (3.20)$$

denklemler (3.20) ile verilen denklem sistemi düzenlenirse

$$\begin{aligned} -45C_1 - 50C_2 &= -18 \\ -48C_1 + 2C_2 &= -9 \end{aligned} \quad (3.21)$$

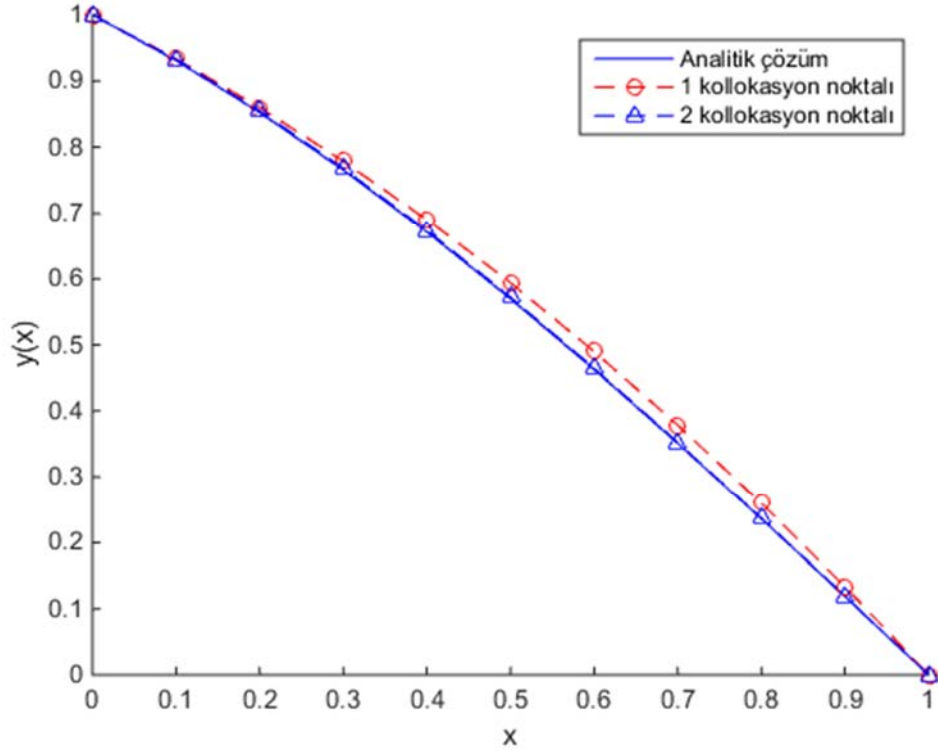
(3.21) deki sistem çözülerek $C_1 = 0.1952$ ve $C_2 = 0.1843$ olarak bulunur. Bu değerler denklem (3.18) da yazılırsa

$$u(x) = 0.1952 x(1-x) + 0.1843 x(1-x)^2 \quad (3.22)$$

(3.22) denklemini (3.15) denklemine yazılarak (3.5) ile verilen diferansiyel denklemin çözümü

$$y(x) = 0.1952 x(1-x) + 0.1843 x(1-x)^2 + (1-x) \quad (3.23)$$

şeklinde bulunmuş olur.



Şekil 3.1: Analitik ve Kollokasyon çözümlerinin karşılaştırılması.

Şekil 3.1 de bulunan iki çözüm ve analitik çözüm karşılaştırılmıştır. Kollokasyon nokta sayısı arttıkça çözümün analitik çözüme yaklaştığı görülmektedir. Analitik çözüme daha yakın sonuçlar bulabilmek için (3.9) ve (3.18) ile verilen genel çözümler aşağıdaki formda alınarak aynı işlem adımları uygulanmalıdır.

$$y(x) = \sum_{n=1}^N C_n (1-x)^n \quad (3.24)$$

$$y(x) = \sum_{n=1}^N C_n (1-x)^n + 1-x$$

3.2. KOLLOKASYON YÖNTEMİNİN KISMİ DİFERANSİYEL DENKLEMLERİN ÇÖZÜMÜNE UYGULANMASI

Sınır şartları ile verilmiş denklem göz önüne alınsın

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 \quad 0 < x < 1, \quad 0 < y < 1$$

$$\begin{aligned} u(x, 0) &= 0 \\ u(x, 1) &= 0 \\ u(0, y) &= 1 \\ u(1, y) &= y \end{aligned} \tag{3.25}$$

denklemin analitik çözümü

$$u(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{-2[1 - (-1)^n + (-1)^n e^{n\pi}]e^{n\pi x} - 2e^{n\pi}[-(-1)^n - e^{n\pi} + (-1)^n e^{n\pi}]e^{-n\pi x}}{n\pi(e^{2n\pi} - 1)} \sin(n\pi y)$$

(3.26)

EK 1 de bu çözümün elde edilmesi verilmiştir. Denklemin sınır şartlarını sağlayan iki tane çözümünü $y(1 - y)$ ve $y^2(1 - y)$ şeklinde alalım. $a_1(x)$ ve $a_2(x)$ keyfi fonksiyonlar olmak üzere denklemin genel çözümü

$$u(x, y) = a_1(x)y(1 - y) + a_2(x)y^2(1 - y) \tag{3.27}$$

şeklinde dir. Denklem (3.27) deki çözüm denklem (3.25) da yazılırsa

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = a_1''(x)(y - y^2) + a_2''(x)(y^2 - y^3) + a_1(x)(-2) + a_2(x)(2 - 6y) \tag{3.28}$$

Bu denklem keyfi olarak belirlenen y_1 ve y_2 kollokasyon noktasında sıfıra eşitlenerek $a_1(x)$ ve $a_2(x)$ keyfi fonksiyonları bulunabilir. (3.28) verilen denklem $R(x)$ fonksiyonu olarak tanımlanırsa aşağıdaki eşitlikler geçerlidir.

$$\begin{aligned} R(y_1) &= 0 \\ R(y_2) &= 0 \end{aligned} \tag{3.29}$$

Kollokasyon noktası olarak $y_1 = \frac{1}{3}$ ve $y_2 = \frac{2}{3}$ alınarak (3.29) daki denklemlere yazılırsa

$$\begin{aligned} R\left(\frac{1}{3}\right)=0 &= a_1''(x) \left(\frac{1}{3}-\left(\frac{1}{3}\right)^2\right) + a_2''(x) \left(\left(\frac{1}{3}\right)^2-\left(\frac{1}{3}\right)^3\right) + a_1(x) (-2) + a_2(x) \left(2-6\frac{1}{3}\right) \\ R\left(\frac{2}{3}\right)=0 &= a_1''(x) \left(\frac{2}{3}-\left(\frac{2}{3}\right)^2\right) + a_2''(x) \left(\left(\frac{2}{3}\right)^2-\left(\frac{2}{3}\right)^3\right) + a_1(x) (-2) + a_2(x) \left(2-6\frac{2}{3}\right) \end{aligned} \quad (3.30)$$

gerekli düzenlemeler yapılarak

$$\begin{aligned} 6a_1''(x) + 2a_2''(x) - 54a_1(x) &= 0 \\ 6a_1''(x) + 4a_2''(x) - 54a_1(x) - 54a_2(x) &= 0 \end{aligned} \quad (3.31)$$

denklemine ulaşılır. $a_1(x) = A e^{rx}$ ve $a_2(x) = B e^{rx}$ şeklinde alınan çözümler denklem (3.31) de yazılır ve düzenlenirse

$$\begin{aligned} A(6r^2 - 54) + B(2r^2) &= 0 \\ A(6r^2 - 54) + B(4r^2 - 54) &= 0 \end{aligned} \quad (3.32)$$

olacaktır. Denklem sistemi matris formunda gösterilirse

$$\begin{bmatrix} 6r^2 - 54 & 2r^2 \\ 6r^2 - 54 & 4r^2 - 54 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A \\ B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (3.33)$$

$A, B \neq 0$ şeklinde çözümün varlığı için verilen denklem sisteminde katsayılar matrisinin determinanı 0 olmalıdır.

$$(6r^2 - 54)(2r^2 - 54) = 0 \quad (3.34)$$

Burada kökler $r_1 = 3$, $r_2 = -3$, $r_3 = 3\sqrt{3}$, $r_4 = -3\sqrt{3}$ olacaktır. Bulunan kökler ile aşağıda verilen çözümlerin toplamı oluşturulabilir.

$$\begin{aligned} a_1(x) &= \sum_{k=1}^4 A_k e^{r_k x} = A_1 e^{r_1 x} + A_2 e^{r_2 x} + A_3 e^{r_3 x} + A_4 e^{r_4 x} \\ a_2(x) &= \sum_{k=1}^4 B_k e^{r_k x} = B_1 e^{r_1 x} + B_2 e^{r_2 x} + B_3 e^{r_3 x} + B_4 e^{r_4 x} \end{aligned} \quad (3.35)$$

$$\begin{aligned}
a_1(x) &= A_1 e^{3x} + A_2 e^{-3x} + A_3 e^{3\sqrt{3}x} + A_4 e^{-3\sqrt{3}x} \\
a_2(x) &= B_1 e^{3x} + B_2 e^{-3x} + B_3 e^{3\sqrt{3}x} + B_4 e^{-3\sqrt{3}x}
\end{aligned} \tag{3.36}$$

(3.32) daki ilk denklem göz önüne alınırsa B_k ifadesi A_k cinsinden yazılabilecektir. Böylece bilinmeyen katsayılar sekizden dörde düşecektir.

$$\begin{aligned}
A_k (6r_k^2 - 54) + B_k (2r_k^2) &= 0 \\
B_k &= \frac{54 - 6r_k^2}{2r_k^2} A_k
\end{aligned} \tag{3.37}$$

(3.27) deki çözüme

$$\begin{aligned}
x=0 \text{ da } u &= 1 \\
x=1 \text{ de } u &= y
\end{aligned} \tag{3.38}$$

sınır şartları uygulanırsa

$$\begin{aligned}
u(0, y) &= a_1(0) (y - y^2) + a_2(0) (y^2 - y^3) \\
u(1, y) &= a_1(1) (y - y^2) + a_2(1) (y^2 - y^3)
\end{aligned} \tag{3.39}$$

denklemini bulunur. Seçilen $y_1 = \frac{1}{3}$ ve $y_2 = \frac{2}{3}$ kollokasyon noktaları için çözüm

$$\begin{aligned}
u(0, \frac{1}{3}) &= a_1(0) (\frac{1}{3} - (\frac{1}{3})^2) + a_2(0) ((\frac{1}{3})^2 - (\frac{1}{3})^3) = 1 \\
u(0, \frac{2}{3}) &= a_1(0) (\frac{2}{3} - (\frac{2}{3})^2) + a_2(0) ((\frac{2}{3})^2 - (\frac{2}{3})^3) = 1 \\
u(1, \frac{1}{3}) &= a_1(1) (\frac{1}{3} - (\frac{1}{3})^2) + a_2(1) ((\frac{1}{3})^2 - (\frac{1}{3})^3) = \frac{1}{3} \\
u(1, \frac{2}{3}) &= a_1(1) (\frac{2}{3} - (\frac{2}{3})^2) + a_2(1) ((\frac{2}{3})^2 - (\frac{2}{3})^3) = \frac{2}{3}
\end{aligned} \tag{3.40}$$

(3.40) de verilen denklemin sağ tarafındaki terimler (3.36) den hesaplanır.

$$\begin{aligned}
a_1(0) &= A_1 + A_2 + A_3 + A_4 = \sum_{k=1}^4 A_k \\
a_2(0) &= B_1 + B_2 + B_3 + B_4 = \sum_{k=1}^4 B_k \\
a_1(1) &= A_1 e^3 + A_2 e^{-3} + A_3 e^{3\sqrt{3}} + A_4 e^{-3\sqrt{3}} = \sum_{k=1}^4 A_k e^{r_k} \\
a_2(1) &= B_1 e^3 + B_2 e^{-3} + B_3 e^{3\sqrt{3}} + B_4 e^{-3\sqrt{3}} = \sum_{k=1}^4 B_k e^{r_k}
\end{aligned} \tag{3.41}$$

(3.37) deki eşitlikten faydalanılarak (3.41) ifade A_k ' lar cinsinden ve ardından (3.40) te yerine yazılarak ve gerekli düzenlemeler yapılırsa

$$\begin{aligned}
u(0, \frac{1}{3}) &= \sum_{k=1}^4 \left[\frac{2}{9} + \frac{2}{27} \left(\frac{54 - 6r_k^2}{2r_k^2} \right) \right] A_k = 1 \\
u(0, \frac{2}{3}) &= \sum_{k=1}^4 \left[\frac{2}{9} + \frac{4}{27} \left(\frac{54 - 6r_k^2}{2r_k^2} \right) \right] A_k = 1 \\
u(1, \frac{1}{3}) &= \sum_{k=1}^4 \left[\frac{2}{9} + \frac{2}{27} \left(\frac{54 - 6r_k^2}{2r_k^2} \right) \right] A_k e^{r_k} = \frac{1}{3} \\
u(1, \frac{2}{3}) &= \sum_{k=1}^4 \left[\frac{2}{9} + \frac{4}{27} \left(\frac{54 - 6r_k^2}{2r_k^2} \right) \right] A_k e^{r_k} = \frac{2}{3}
\end{aligned} \tag{3.42}$$

(3.42) denklemi açık olarak şöyle yazılabilir.

$$\begin{bmatrix} \frac{2}{r_1^2} & \frac{2}{r_2^2} & \frac{2}{r_3^2} & \frac{2}{r_4^2} \\ \frac{36-2r_1^2}{9r_1^2} & \frac{36-2r_2^2}{9r_2^2} & \frac{36-2r_3^2}{9r_3^2} & \frac{36-2r_4^2}{9r_4^2} \\ \frac{2}{r_1^2} e^{r_1} & \frac{2}{r_2^2} e^{r_2} & \frac{2}{r_3^2} e^{r_3} & \frac{2}{r_4^2} e^{r_4} \\ \frac{36-2r_1^2}{9r_1^2} e^{r_1} & \frac{36-2r_2^2}{9r_2^2} e^{r_2} & \frac{36-2r_3^2}{9r_3^2} e^{r_3} & \frac{36-2r_4^2}{9r_4^2} e^{r_4} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_1 \\ A_2 \\ A_3 \\ A_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0.33 \\ 0.66 \end{bmatrix} \tag{3.43}$$

Buradan katsayılar bulunur.

$$\begin{aligned}
 A_1 &= 0.1011 & B_1 &= 0 \\
 A_2 &= 4.3989 & B_2 &= 0 \\
 A_3 &= -0.0124 & B_3 &= 0.0249 \\
 A_4 &= 0.0124 & B_4 &= -0.0249
 \end{aligned} \tag{3.44}$$

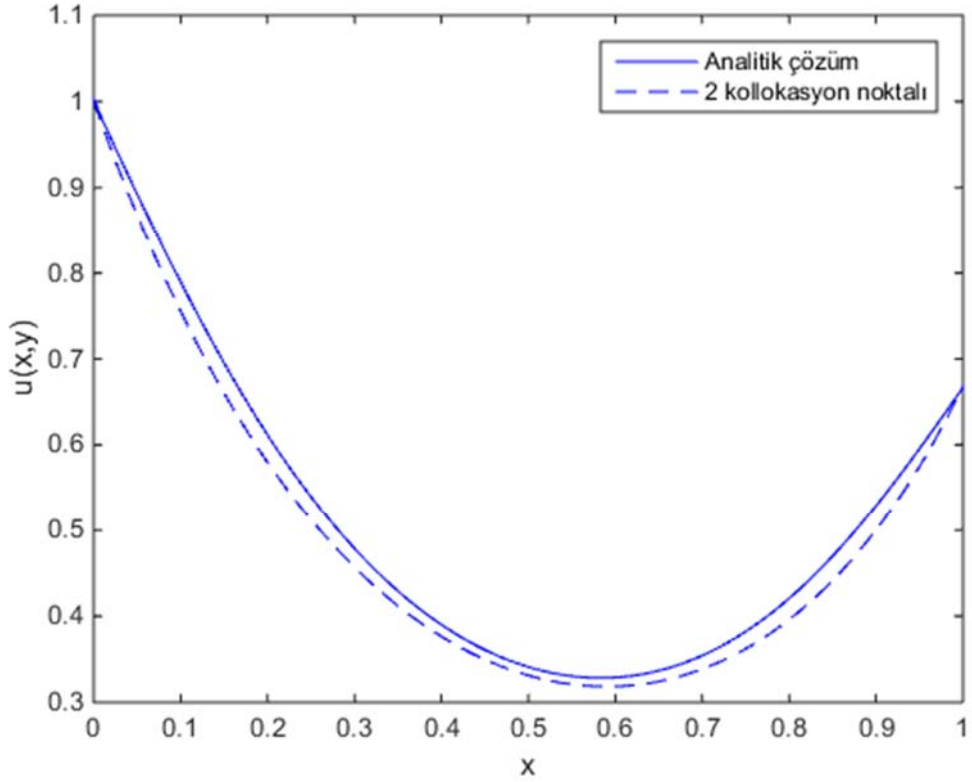
Bu katsayılar (3.36) da yazılarak $a_1(x)$ ve $a_2(x)$ fonksiyonları bulunmuş olur.

$$\begin{aligned}
 a_1(x) &= 0.1011e^{3x} + 4.3989e^{-3x} - 0.0124e^{3\sqrt{3}x} + 0.0124e^{-3\sqrt{3}x} \\
 a_2(x) &= 0.0249e^{3\sqrt{3}x} - 0.0249e^{-3\sqrt{3}x}
 \end{aligned} \tag{3.45}$$

(3.45) da bulunan bu fonksiyonlar (3.27) de yerine yazılarak aranan kollokasyon bulunacaktır.

$$\begin{aligned}
 u(x, y) &= [0.1011e^{3x} + 4.3989e^{-3x} - 0.0124e^{3\sqrt{3}x} + 0.0124e^{-3\sqrt{3}x}] (y - y^2) \\
 &+ [0.0249e^{3\sqrt{3}x} - 0.0249e^{-3\sqrt{3}x}] (y^2 - y^3)
 \end{aligned} \tag{3.46}$$

Bu çözümün grafiği bir yüzey gösterecektir. İki çözümün birbirine yakınlığını daha rahat anlayabilmek için $y = \frac{2}{3}$ alınarak u ' nun x ile değişimi çizdirilmiştir. Şekil 3.2 de bulunan kollokasyon çözümü ve analitik çözüm ile karşılaştırılmıştır.



Şekil 3.2: Laplace denkleminin analitik ve kollokasyon çözümlerinin karşılaştırılması.

(3.25) da verilen kısmi diferansiyel denklemin analitik çözümü olan (3.26) denkleminde terim sayısı arttırdıkça daha uygun sonuçlar bulunacaktır. Yüksek sayıda terimin alınması halinde çözümün sınır şartlarını sağlayıp sağlamadığına dikkat edilmelidir. Diferansiyel denklemin kollokasyon çözümü (3.46) daki gibidir. Kollokasyon nokta sayısı arttırıldıkça çözüm analitik çözüme yaklaşacaktır. Bu durumda daha fazla sayıda denkleme sahip denklem sistemi oluşturulmalı ve çözülmelidir. İşlem adımları iki kollokasyon noktası olması durumundaki gibidir.

3.3. İNCE PLAKA VE KABUK TEORİSİ

İnce kabukların küçük yer değiştirmelerinin klasik teorisinde aşağıdaki dört varsayım kullanılır.

1. Kabuğun kalınlığı diğer boyutları yanında daha küçüktür.
2. Gerinme ve yer değiştirmeler yeterince küçük olduğundan oluşturulan bağıntılarda bu ifadelerin ikinci mertebeden terimleri çok küçük kalacaktır. Bu yüzden birinci mertebeden terimler yanında iki ve daha yüksek mertebeden terimler ihmal edilebilirler.
3. Enine normal gerilmeler diğer gerilme bileşenleri ile karşılaştırıldıklarında ihmal edilebilecek kadar küçüktürler.
4. Deformasyon öncesindeki orta yüzey normali deformasyon sonrasında da herhangi bir değişmeye uğramaz.

Leissa [43] bahsedilen dördüncü yaklaşımın literatürde Kirchhoff hipotezi olarak bilindiğini belirtmiştir. Kirchhoff hipotezi kirişlerin basit eğilme teorisindeki ilişkilere benzemektedir. Oluşturulan plaka eğilme teorisi, klasik veya Kirchhoff'un plaka teorisi olarak adlandırılmaktadır. Üçüncü ve dördüncü varsayımlar, ince elastik kabukların hareket denklemlerinin oluşturulmasında kullanılır ve kabuğun özel bir ortotropi tipine sahip bir malzeme gibi davranmasını kabul ederler.

Plaka hareket denkleminin kısa ve net bir şekilde türetilmesi için bu varsayımlar kullanılmaktadır. Tezde incelenen plaka ve kabuk malzemesi lineer elastik, homojen ve izotropiktir.

Gerinme ve yer değiştirme denklemlerinde bazı basitleştirmeler yapan araştırmacılar kendi adları ile anılan kabuk teorilerini oluşturmuşlardır. Leissa orta yüzeyin değişimi, toplam gerinme ve orta yüzeyin çarpılması için hangi terimlerin alındığını tablo halinde vermiştir.

3.4. POTANSİYEL AKIŞ

Doğada yapılan gözlemler hareket halinde veya etrafında akış olan cisimlerin etrafında meydana gelen akımın birbiriyle temas eden iki ayrı bölgede incelenebileceği, Çıray [44] tarafından belirtilmiştir. Bu iki bölgeden katı cisimle temas olanında ince bir akım tabakası oluşması durumunda ince bölgede viskozite etkilidir. Diğer bölgede ise viskozite etkileri ihmal edilebilir. Birçok fiziksel problemde dışta kalan bölgenin potansiyel teoriye göre hesabı ve ardından ince akım tabakasına ait hesaplamaların yapılması bütün akım ortamı için akışkanlar mekaniğinin denklemlerinin daha kolay ve yeterli doğrulukta çözülmesini sağlayacaktır.

Prandtl [45] tarafından cidara yakın ince bir tabaka içerisinde viskozitenin etkili olduğu ve bu tabaka dışında akımın çevrintisiz olarak ele alınabileceği belirtilmiştir.

Bir akışkan hareketi sırasında akışkan taneciklerinin hareket düzlemine dik bir eksen etrafındaki dönmelerinin olmaması durumuna çevrintisizlik denilmektedir.

Literatürde cismin yüzeyinin hemen üzerinde oluşan hızın sıfırdan başlayarak akış hızının % 99'una ulaştığı ince ve viskozitenin etkin olduğu bu bölge, sınır tabaka olarak adlandırılır. Sınır tabaka kalınlığının tanımına ve araştırmacıların tercihinine göre bu yüzde 95 ten az olmamak üzere farklı şekillerde de verilir.

Akış kaynaklı titreşim problemlerinde basınç kuvvetleri genellikle viskoz kuvvetlerden çok daha büyüktür. Basınç kuvvetleri titreşimi besler, viskoz kuvvetlerin etkisi azdır. Bu yüzden akış kaynaklı titreşim problemleri incelenirken sürtünmesiz akış göz önüne alınır.

İki ve üç boyutlu akışa ait süreklilik ve hareket denklemlerini kullanarak problemi çözmenin zorluğunu ve bu durumda potansiyel akım kabulü yapılması gerektiğini Yüksel [46] belirtmiştir.

Hareketin çevrintisiz olması durumunda, Bernoulli denklemi sadece aynı akım çizgisi üzerindeki noktalar arasında değil, akım alanındaki herhangi iki nokta arasında da geçerli olacaktır.

Potansiyel akım kabulü ile akım ağı ve basınç dağılımı elde edilecektir. Aşağıdaki kabullerle akış problemi Laplace denkleminin çözümüne indirgenir.

Akış çevrintisizdir (irrotasyonel), aşağıdaki denklemi sağlar

$$\nabla \times \vec{V} = 0 \quad (3.47)$$

Dolayısıyla

$$\vec{V} = \nabla \varphi \quad (3.48)$$

yazılabilir. Sıkıştırılamaz akışkan için süreklilik denklemi

$$\nabla \cdot \vec{V} = 0 \quad (3.49)$$

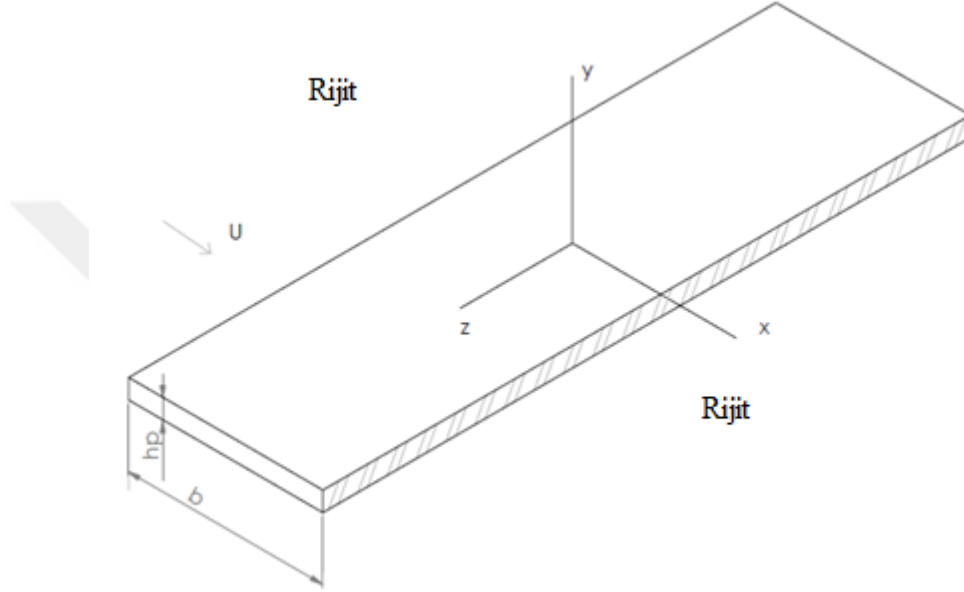
(3.48) denklemi (3.49) denkleminde yazılırsa

$$\nabla^2 \varphi = 0 \quad (3.50)$$

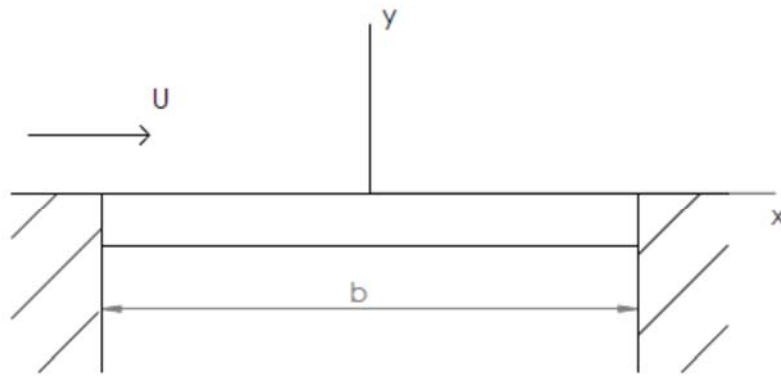
görüldüğü gibi çevrintisiz, sıkıştırılamaz ve sürtünmesiz bir akışta hız potansiyeli Laplace denklemini sağlar.

3.5. DÜZ PLAKANIN AKIŞ TESİRİ ALTINDAKİ TİTREŞİMİ

İki kenarından basit mesnetlenmiş ve üzerinden sıkıştırılamaz, sürtünmesiz akışkan geçen Şekil 3.3 deki ölçülere sahip olan düz bir plaka titreşim hareketi incelenmek istensin. Plaka z doğrultusunda sonsuz uzunluğa sahiptir. Akış x doğrultusundadır. Şekil 3.4 te sol yan görünüş verilmiştir.



Şekil 3.3: z doğrultusunda sonsuz uzun plaka.



Şekil 3.4: Plakanın sol yan görünüşü.

Plakanın hareket denklemi aşağıdaki şekilde verilir. [3], [17], [19]

$$D \frac{\partial^4 v}{\partial x^4} + \rho_p h_p \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} + P = 0 \quad (3.51)$$

Burada D plaka eğilme rijitliği olarak adlandırılır

$$D = \frac{E h_p^3}{12(1 - \nu^2)} \quad (3.52)$$

denklem (3.52) deki diğer terimler ise

$\nu = \text{Poisson Oranı}$

$E = \text{Elastisite Modülü}$

$h_p = \text{Plaka Kalınlığı}$

$\rho_p = \text{Plaka Yoğunluğu}$

$\rho_f = \text{Akışkan Yoğunluğu}$

$P = \text{Akışkanın Plakaya Uyguladığı Basınç}$

$V = \text{Plakanın Çökmesi}$

şeklindedir. Sıkıştırılmaz akış için hız potansiyeli

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} = 0 \quad (3.53)$$

denklemi ile verilir. Plaka üzerindeki basınç lineerleştirilmiş Bernoulli denklemi ile yazılırsa

$$P = -\rho_f \left[\frac{\partial \phi}{\partial t} + U \frac{\partial \phi}{\partial x} \right] \Big|_{y=0} \quad (3.54)$$

olacaktır. Lineerleştirilmiş Bernoulli denkleminin çıkarılması EK 2 de verilmiştir. Plaka üzerinde akış hız potansiyeli lineer yaklaşım göz önünde bulundurularak verilen şartı sağlamalıdır.

$$\left. \frac{\partial \varphi}{\partial y} \right|_{y=0} = \begin{cases} \frac{\partial v}{\partial t} + U \frac{\partial v}{\partial x}, & |x| < \frac{b}{2} \\ 0, & |x| > \frac{b}{2} \end{cases} \quad (3.55)$$

Plaka yer değiştirmesi ve hız potansiyeli için aşağıdaki çözümleri önerilirse

$$\begin{aligned} v(x, t) &= V(x) e^{i\omega t} \\ \varphi(x, y, t) &= \Phi(x, y) e^{i\omega t} \end{aligned} \quad (3.56)$$

ve (3.56) denklemindeki eşitlikleri (3.51), (3.53), (3.54) ve (3.55) denklemlerine yazılırsa aşağıdaki denklemlere ulaşılır.

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} &= 0 \\ \left. \frac{\partial \Phi}{\partial y} \right|_{y=0} &= F(x) = \begin{cases} i\omega V + U \frac{dV}{dx}, & |x| < \frac{b}{2} \\ 0, & |x| > \frac{b}{2} \end{cases} \end{aligned} \quad (3.57)$$

(3.57) nolu denklemin çözümleri aşağıdaki bilgi sayesinde kolayca bulunabilir. [48]

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} &= 0 \quad -\infty < x < \infty, y > 0 \\ \frac{\partial u}{\partial y}(x, 0) &= g(x) \\ u(x, y) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \ln [y^2 + (x - \xi)^2] g(\xi) d\xi \end{aligned} \quad (3.58)$$

(3.57) nolu denkleminin çözümleri (3.58) denklemleri ve sınır şartları göz önünde bulundurularak

$$\Phi(x, y) = \frac{1}{2\pi} \int_{-b/2}^{b/2} \ln [y^2 + (x - \xi)^2] F(\xi) d\xi \quad (3.59)$$

Burada

$$F(\xi) = \begin{cases} i\omega V(\xi) + U \frac{dV}{d\xi}(\xi), & |x| < \frac{b}{2} \\ 0 & , |x| > \frac{b}{2} \end{cases} \quad (3.60)$$

şeklindedir. (3.60) nolu denklem (3.59) nolu denkleme yazılırsa

$$\Phi(x, y) = \frac{1}{2\pi} \int_{-b/2}^{b/2} \ln [y^2 + (x - \xi)^2] [i\omega V(\xi) + U \frac{dV}{d\xi}(\xi)] d\xi \quad (3.61)$$

olacaktır. Basınç denklemi

$$P = -\rho_f \left[\frac{\partial \Phi}{\partial t} + U \frac{\partial \Phi}{\partial x} \right] \Big|_{y=0} \quad (3.62)$$

$$\Phi \Big|_{y=0} = \frac{1}{\pi} \int_{-b/2}^{b/2} \ln [(x - \xi)] F(\xi) d\xi \quad (3.63)$$

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x} \Big|_{y=0} = \frac{1}{\pi} \int_{-b/2}^{b/2} \frac{1}{x - \xi} F(\xi) d\xi \quad (3.64)$$

(3.63) ve (3.64) denklemleri (3.62) denklemine yazılır ve (3.60) nolu denklem dikkate alınarak gerekli düzenlemeler yapılırsa basınç

$$P = \int_{-b/2}^{b/2} G(x, \xi) F(\xi) d\xi \quad (3.65)$$

formunda olacaktır. İntegral içerisindeki terimler

$$G(x, \xi) = -\frac{\rho_f}{\pi} \left[i\omega \ln |x - \xi| + \frac{U}{x - \xi} \right] \quad (3.66)$$

$$F(\xi) = i\omega V(\xi) + U \frac{dV}{d\xi}(\xi)$$

şeklindedir. Bundan sonraki hesaplamalarda $b = 1$ metre kabul edilecektir. Plakanın hareket denklemi

$$D \frac{d^4 V}{dx^4} - \omega^2 \rho_p h_p V + \int_{-1/2}^{1/2} G(x, \xi) F(\xi) d\xi = 0 \quad (3.67)$$

$$V(-1/2) = V(+1/2) = 0 \quad (3.68)$$

$$\frac{d^2 V}{dx^2}(-1/2) = \frac{d^2 V}{dx^2}(+1/2) = 0 \quad (3.69)$$

şeklindedir. (3.66) nolu denklem (3.67) nolu denkleme yazılırsa

$$D \frac{d^4 V}{dx^4} - \omega^2 \rho_p h_p V - \int_{-1/2}^{1/2} \frac{\rho_f}{\pi} [i\omega \ln|x-\xi| + \frac{U}{x-\xi}] [i\omega V(\xi) + U \frac{dV}{d\xi}(\xi)] d\xi = 0 \quad (3.70)$$

Düzenlenerek

$$\begin{aligned} & D \frac{d^4 V}{dx^4} - \omega^2 \rho_p h_p V + \frac{\rho_f \omega^2}{\pi} \int_{-1/2}^{1/2} V(\xi) \ln|x-\xi| d\xi \\ & - \frac{\rho_f U i \omega}{\pi} \int_{-1/2}^{1/2} \frac{dV}{d\xi}(\xi) \ln|x-\xi| d\xi \\ & - \frac{\rho_f i \omega U}{\pi} \int_{-1/2}^{1/2} \frac{V(\xi)}{x-\xi} d\xi - \frac{\rho_f U^2}{\pi} \int_{-1/2}^{1/2} \frac{\frac{dV}{d\xi}(\xi)}{x-\xi} d\xi = 0 \end{aligned} \quad (3.71)$$

haline gelecektir. Sınır şartları ise

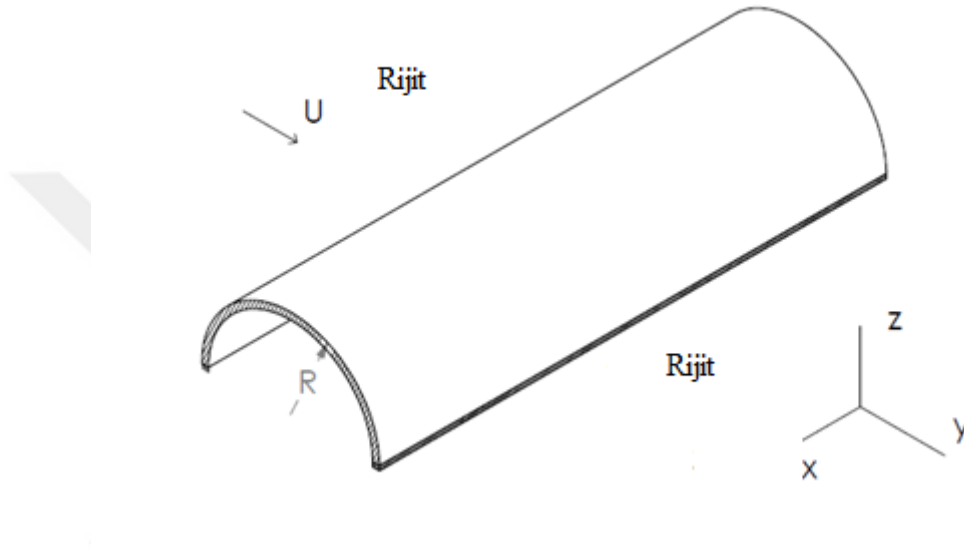
$$\begin{aligned} & V(-1/2) = V(+1/2) = 0 \\ & \frac{d^2 V}{dx^2}(-1/2) = \frac{d^2 V}{dx^2}(+1/2) = 0 \end{aligned} \quad (3.72)$$

olmaktadır. Denklem (3.71) ve (3.72) deki sınır şartları kullanılarak düz plakanın serbest veya akış kaynaklı durumdaki titreşimleri için özdeğerler hesaplanabilir.

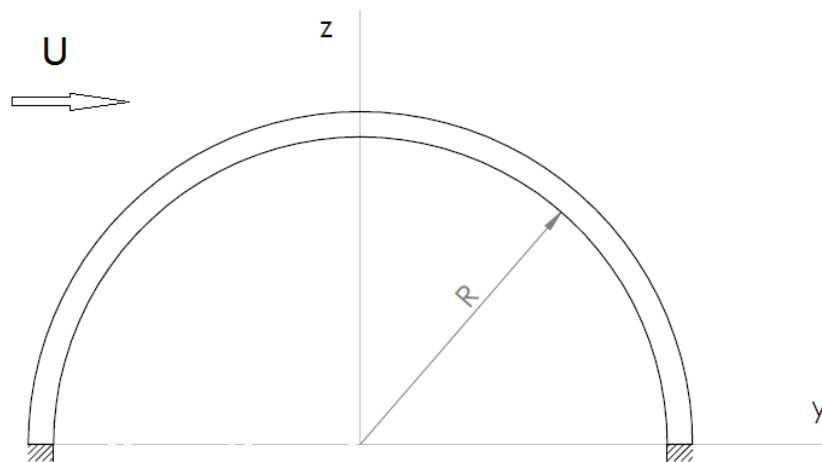


3.6. SİLİNDİRİK KABUĞUN AKIŞ TESİRİ ALTINDAKİ TİTREŞİMİ

Silindirik kabuk Şekil 3.5 teki gibi x doğrultusunda sonsuz uzunluğa sahiptir ve bu doğrultu boyunca iki ucundan basit mesnetlenmiştir. Silindirik kabuğun oturduğu zemin olan xy düzlemi rijittir. Silindirden uzakta akışkan y doğrultusunda sabit U hızıyla akmaktadır ve akış potansiyelidir.



Şekil 3.5: x doğrultusunda sonsuz uzun Silindirik Kabuk.



Şekil 3.6: Silindirik Kabuk sol yan görünüşü.

Kabukta meydana gelen x, y ve z yönlerindeki yer değiştirmeler sırasıyla $u(x, \theta, t)$, $v(x, \theta, t)$ ve $w(x, \theta, t)$ olmak üzere hareket denklemleri Donell-Mushtari-Vlasov (DMV) İnce Kabuk Teorisine göre aşağıdaki şekilde verilir. [41], [43], [47]

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{1-\nu}{2R^2} \frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} + \frac{1+\nu}{2R} \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial \theta} + \frac{\nu}{R} \frac{\partial w}{\partial x} - \frac{(1-\nu^2)}{E} \rho_k \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} &= 0 \\ \frac{1-\nu}{2} \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{1}{R^2} \frac{\partial^2 v}{\partial \theta^2} + \frac{1+\nu}{2R} \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial \theta} + \frac{1}{R^2} \frac{\partial w}{\partial \theta} - \frac{(1-\nu^2)}{E} \rho_k \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} &= 0 \\ R^2 \lambda \left(\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + \frac{2}{R^2} \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial \theta^2} + \frac{1}{R^4} \frac{\partial^4 w}{\partial \theta^4} \right) + \frac{w}{R^2} + \frac{\nu}{R} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{R^2} \frac{\partial v}{\partial \theta} + \frac{(1-\nu^2)}{E} \rho_k \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} &= P \end{aligned} \quad (3.73)$$

Burada $\lambda = \frac{h_k^2}{12R^2}$ dir. Silindirik kabuk x doęrultusunda sonsuz uzun olduęundan içerisinde u 'yu barındıran terimler dūřer ve $\frac{\partial(\dots)}{\partial x}$ řeklindeki kısmi tūrevler sıfır olur. Verilen yer deęiřtirmelerden x doęrultusunda olanı $u = 0$ olurken y ve z doęrultularında olanları ise $v(x, \theta, t)$ ve $w(x, \theta, t)$ olacaktır. Gerekli dūzenlemeler yapılarak (3.73) denklemi

$$\begin{aligned} \frac{1}{R^2} \frac{\partial^2 v}{\partial \theta^2} + \frac{1}{R^2} \frac{\partial w}{\partial \theta} - \frac{(1-\nu^2)}{E} \rho_k \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} &= 0 \\ \frac{h_k^2}{12R^4} \left(\frac{\partial^4 w}{\partial \theta^4} \right) + \frac{w}{R^2} + \frac{1}{R^2} \frac{\partial v}{\partial \theta} + \frac{(1-\nu^2)}{E} \rho_k \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} &= P \end{aligned} \quad (3.74)$$

haline gelecektir. Sınır şartları ise aşağıdaki gibidir.

$$\begin{aligned} v(0) &= v(\pi) \\ \frac{\partial w}{\partial \theta}(0) &= \frac{\partial w}{\partial \theta}(\pi) = 0 \\ \frac{\partial^3 w}{\partial \theta^3}(0) &= \frac{\partial^3 w}{\partial \theta^3}(\pi) = 0 \end{aligned}$$

(3.74) ile verilen denklem bu sınır şartları altında çözölerek kabuğun serbest titreşimine ait özdeğerler ve akışkan geçişi sırasında kabuk üzerinde oluşan basınç için analitik bir ifade bulunabilir.

4. BULGULAR

4.1. PLAKANIN SERBEST TİTREŞİMİNE AİT ÖZDEĞERLERİN BULUNMASI

Denklem (3.71) ile verilen plakanın hareket denklemi $\rho_f = 0$ durumu için aşağıdaki basit hale gelecektir.

$$\begin{aligned}
 D \frac{d^4 V}{dx^4} - \omega^2 \rho_p h_p V &= 0 \\
 V(-1/2) = V(+1/2) &= 0 \\
 \frac{d^2 V}{dx^2}(-1/2) = \frac{d^2 V}{dx^2}(+1/2) &= 0
 \end{aligned} \tag{4.1}$$

Bu denklemin karakteristik denklemi ve çözümü

$$\begin{aligned}
 r^4 - k^4 &= 0 \\
 k &= \sqrt[4]{\frac{\omega^2 \rho_p h_p}{D}} \\
 V(x) &= C_1 \cos(kx) + C_2 \sin(kx) + C_3 \cosh(kx) + C_4 \sinh(kx)
 \end{aligned} \tag{4.2}$$

(4.1) deki sınır şartları (4.2) denkleminde yazılırsa aşağıdaki gibi matris formunda gösterilen denklem sistemine ulaşılır.

$$\begin{bmatrix}
 \cos(k/2) & \sin(k/2) & \cosh(k/2) & \sinh(k/2) \\
 \cos(-k/2) & \sin(-k/2) & \cosh(-k/2) & \sinh(-k/2) \\
 -\cos(k/2) & -\sin(k/2) & \cosh(k/2) & \sinh(k/2) \\
 -\cos(-k/2) & -\sin(-k/2) & \cosh(-k/2) & \sinh(-k/2)
 \end{bmatrix}
 \begin{bmatrix}
 C_1 \\
 C_2 \\
 C_3 \\
 C_4
 \end{bmatrix}
 =
 \begin{bmatrix}
 0 \\
 0 \\
 0 \\
 0
 \end{bmatrix} \tag{4.3}$$

Bu denklem sisteminde $C_1, C_2, C_3, C_4 \neq 0$ şeklinde bir çözüm olması için katsayılar matrisinin determinanı ω nın bir fonksiyonu olup sıfır olmalıdır. ω incelenen problemin özdeğeridir.

Aşağıda verilen değerler kullanılarak

$$\nu = 0,3$$

$$E = 70.10^9 \text{ N / m}^2$$

$$D = \frac{Eh_p^3}{12(1-\nu^2)} = 6410,26 \text{ kgm}^2 / \text{s}^2$$

$$h_p = 0.01 \text{ m}$$

$$\rho_p = 2720 \text{ kg / m}^3$$

$k_1 = \sqrt[4]{\frac{\rho_p h_p}{D}} = 0.127613$ ve $k = k_1 \sqrt{\omega}$ olmak üzere (4.3) denklemindeki determinant hesaplanmıştır. Bu determinat açık yazılırsa

$$16 \cos(k_1 \sqrt{\omega}) \sin(k_1 \sqrt{\omega}) \cosh(k_1 \sqrt{\omega}) \sinh(k_1 \sqrt{\omega}) = 0 \quad (4.4)$$

(4.4) denkleminin kökleri özdeğerleri verir. Hiperbolik fonksiyonların sıfır olmayacakları göz önüne alınarak özdeğerler aşağıdaki şekilde bulunur.

$$\cos(k_1 \sqrt{\omega}) = 0 \quad k_1 \sqrt{\omega} = \frac{2n+1}{2} \pi \quad \omega = \left(\frac{2n+1}{2k_1} \pi \right)^2 \quad n=0,1,2,\dots \quad (4.5)$$

$$\sin(k_1 \sqrt{\omega}) = 0 \quad k_1 \sqrt{\omega} = n\pi \quad \omega = \left(\frac{n}{k_1} \pi \right)^2 \quad n=1,2,3,\dots \quad (4.6)$$

İlk üç özdeğer $n = 1, 2, 3$ için

$$\omega_1 = \left(\frac{\pi}{2k_1} \right)^2 = 151.5130$$

$$\omega_2 = \left(\frac{\pi}{k_1} \right)^2 = 606.0520$$

$$\omega_3 = \left(\frac{3\pi}{2k_1} \right)^2 = 1363.6170$$

olarak bulunur. (4.1) ile verilen diferensiyel denkleminin bulunan bu özdeğerleri ile kollokasyon yöntemi çözümünden bulunan özdeğerleri karşılaştırılmak istenirse n serbest bir parametre olmak üzere

$$\varphi(x) = x^n + cx^{n-1} + dx^{n-2} + ex^{n-3} + f \quad (4.7)$$

şeklinde bir taban fonksiyonu göz önüne alınmalıdır. Katsayılar (4.7) denkleminin (4.1) deki sınır şartlarını sağlamasından bulunur.

$$\begin{aligned} \left(\frac{-1}{2}\right)^n + c\left(\frac{-1}{2}\right)^{n-1} + d\left(\frac{-1}{2}\right)^{n-2} + e\left(\frac{-1}{2}\right)^{n-3} + f &= 0 \\ \left(\frac{1}{2}\right)^n + c\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} + d\left(\frac{1}{2}\right)^{n-2} + e\left(\frac{1}{2}\right)^{n-3} + f &= 0 \\ (n)(n-1)\left(\frac{-1}{2}\right)^{n-2} + c(n-1)(n-2)\left(\frac{-1}{2}\right)^{n-3} + d(n-2)(n-3)\left(\frac{-1}{2}\right)^{n-4} + e(n-3)(n-4)\left(\frac{-1}{2}\right)^{n-5} &= 0 \\ (n)(n-1)\left(\frac{1}{2}\right)^{n-2} + c(n-1)(n-2)\left(\frac{1}{2}\right)^{n-3} + d(n-2)(n-3)\left(\frac{1}{2}\right)^{n-4} + e(n-3)(n-4)\left(\frac{1}{2}\right)^{n-5} &= 0 \end{aligned} \quad (4.8)$$

Bu durumda oluşan denklem sistemi ile (4.8) verilmiştir. Bu denklem sisteminin matris formu

$$\begin{bmatrix} \left(\frac{-1}{2}\right)^{n-1} & \left(\frac{-1}{2}\right)^{n-2} & \left(\frac{-1}{2}\right)^{n-3} & 1 \\ \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} & \left(\frac{1}{2}\right)^{n-2} & \left(\frac{1}{2}\right)^{n-3} & 1 \\ (n-1)(n-2)\left(\frac{-1}{2}\right)^{n-3} & (n-2)(n-3)\left(\frac{-1}{2}\right)^{n-4} & (n-3)(n-4)\left(\frac{-1}{2}\right)^{n-5} & 0 \\ (n-1)(n-2)\left(\frac{1}{2}\right)^{n-3} & (n-2)(n-3)\left(\frac{1}{2}\right)^{n-4} & (n-3)(n-4)\left(\frac{1}{2}\right)^{n-5} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c \\ d \\ e \\ f \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\left(\frac{-1}{2}\right)^n \\ -\left(\frac{1}{2}\right)^n \\ -n(n-1)\left(\frac{-1}{2}\right)^{n-2} \\ -n(n-1)\left(\frac{1}{2}\right)^{n-2} \end{bmatrix}$$

(4.9)

$n = 1, 2, 3, 4, 5$ değerleri için c, d, e, f katsayıları hesaplanırsa sınır şartlarını sağlayan beş adet taban fonksiyonu bulunabilir.

$$\begin{aligned}
 \varphi_1(x) &= x^4 - \frac{3}{2}x^2 + \frac{5}{16} \\
 \varphi_2(x) &= x^5 - \frac{5}{6}x^3 + \frac{7}{48}x \\
 \varphi_3(x) &= x^6 - \frac{7}{10}x^4 + \frac{9}{80}x^2 \\
 \varphi_4(x) &= x^7 - \frac{9}{14}x^5 + \frac{11}{112}x^3 \\
 \varphi_5(x) &= x^8 - \frac{11}{18}x^6 + \frac{13}{144}x^4
 \end{aligned} \tag{4.10}$$

homojen sınır şartlarını sağlayan bu fonksiyonların

$$\varphi_n(x) = x^{n+3} - \frac{(2n+1)}{(4n-2)}x^{n+1} + \frac{(2n+3)}{16(2n-1)}x^{n-1} \tag{4.11}$$

şeklinde olduğu görülmektedir. Fonksiyonların her biri homojen sınır şartlarını sağladığına göre C_i ler sabit katsayılar olmak üzere bu fonksiyonların lineer kombinasyonları da sınır şartlarını sağlar. Plakanın yer değiştirmesi

$$V(x) = \sum_{n=1}^N C_n \varphi_n(x) \tag{4.12}$$

şeklindedir. (4.12) nolu denklemi (4.1) de yazılırsa

$$\begin{aligned}
 D \left[C_1 \frac{d^4 V_1}{dx^4} + C_2 \frac{d^4 V_2}{dx^4} + C_3 \frac{d^4 V_3}{dx^4} + \dots + C_n \frac{d^4 V_n}{dx^4} \right] \\
 - \omega^2 \rho_p h_p [C_1 V_1 + C_2 V_2 + C_3 V_3 + \dots + C_n V_n] = 0
 \end{aligned} \tag{4.13}$$

olacaktır. n kollokasyon nokta sayısını göstermek üzere

$$D\left[C_1 \frac{d^4 \varphi_1}{dx^4}(x_k) + C_2 \frac{d^4 \varphi_2}{dx^4}(x_k) + \dots + C_n \frac{d^4 \varphi_k}{dx^4}(x_k)\right] - \omega^2 \rho_p h_p [C_1 \varphi_1(x_k) + C_2 \varphi_2(x_k) + \dots + C_n \varphi_k(x_k)] = 0 \quad (4.14)$$

k = 1, 2, 3, ..., n için bir denklem takımına ulaşılır. Bu denklem takımının matris gösterimi

$$\begin{bmatrix} D \frac{d^4 \varphi_1}{dx^4}(x_1) - \omega^2 \rho_p h_p \varphi_1(x_1) & D \frac{d^4 \varphi_2}{dx^4}(x_1) - \omega^2 \rho_p h_p \varphi_2(x_1) & \dots & D \frac{d^4 \varphi_n}{dx^4}(x_1) - \omega^2 \rho_p h_p \varphi_n(x_1) \\ D \frac{d^4 \varphi_1}{dx^4}(x_2) - \omega^2 \rho_p h_p \varphi_1(x_2) & D \frac{d^4 \varphi_2}{dx^4}(x_2) - \omega^2 \rho_p h_p \varphi_2(x_2) & \dots & D \frac{d^4 \varphi_n}{dx^4}(x_2) - \omega^2 \rho_p h_p \varphi_n(x_2) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ D \frac{d^4 \varphi_1}{dx^4}(x_n) - \omega^2 \rho_p h_p \varphi_1(x_n) & D \frac{d^4 \varphi_2}{dx^4}(x_n) - \omega^2 \rho_p h_p \varphi_2(x_n) & \dots & D \frac{d^4 \varphi_n}{dx^4}(x_n) - \omega^2 \rho_p h_p \varphi_n(x_n) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C_1 \\ C_2 \\ \vdots \\ C_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \quad (4.15)$$

şeklindedir. Basit bir gösterim olarak

$$\left[D \frac{d^4 V_i}{dx^4}(x_j) - \omega^2 \rho_p h_p V_i(x_j) \right]_{n \times n} [C_n]_{n \times 1} = [0]_{n \times 1} \quad i, j = 1, 2, 3, \dots, n \quad (4.16)$$

yazılabilir. Burada i satır ve j ise sütun sayısını göstermektedir. Bu denklem sisteminin katsayılar matrisinin determinanı sıfıra eşitlenerek $C_1, C_2, C_3, \dots, C_n \neq 0$ katsayıları hesaplanabilir. Katsayılar matrisinin determinanı ω nın bir fonksiyonudur ve bu fonksiyonun kökleri özdeğerleri verir. Çeşitli kollokasyon nokta sayıları için bulunan özdeğerler Tablo 4.1 de verilmiştir.

Tablo 4.1: Özdeğerlerin çeşitli yöntemlerle hesabı.

(4.8) dekleme			Kollokasyon nokta sayısı			
ω_1	ω_2	ω_3		ω_1	ω_2	ω_3
			2	144.308	478.615	-----
			3	152.234	538.138	954.97
			4	151.902	634.077	1111.48
			5	151.498	620.349	1662.46
151.513	606.052	1363.62	6	151.504	604.291	1535.2
			7	151.514	604.976	1337.59
			8	151.514	606.146	1347.25
			9	151.514	606.113	1366.44
			10	151.514	606.053	1365.41
			11	151.514	606.054	1363.43

4.2. PLAKANIN FLUTTER HIZI VE FLUTTER FREKANSININ BULUNMASI

Akış kaynaklı plaka hareketi çözümünde serbest titreşim çözümünde kullanılan taban fonksiyonları göz önüne alınacaktır. $\varphi_1(x)$, $\varphi_2(x)$, $\varphi_3(x)$, ..., $\varphi_n(x)$ fonksiyonları (3.71) ile verilen integro-diferansiyel denklemin sınır şartlarını sağlayan taban fonksiyonlarıdır. Yer değiştirme

$$V(x) = C_1 \varphi_1 + C_2 \varphi_2 + C_3 \varphi_3 + \dots + C_N \varphi_N = \sum_{n=1}^N C_n \varphi_n(x) \quad (4.17)$$

şeklinde yazılabilir. Taban fonksiyonlarının (4.11) de verilen kuralı sağladıkları hatırlanarak

$$\varphi_n(\xi) = \xi^{2n+3} - \frac{(2n+1)}{(4n-2)} \xi^{2n+1} + \frac{(2n+3)}{16(2n-1)} \xi^{2n-1} \quad (4.18)$$

olarak yazılabilir. (4.17) ifadesi (3.71) de yazılırsa kalan

$$\begin{aligned} R(x) = & D \sum_{n=1}^N C_n \frac{d^4 \varphi_n(x)}{dx^4} - \omega^2 \rho_p h_p \sum_{n=1}^N C_n \varphi_n(x) + \frac{\rho_f \omega^2}{\pi} \int_{-1/2}^{1/2} \sum_{n=1}^N C_n \varphi_n(\xi) \ln|x-\xi| d\xi \\ & - \frac{\rho_f U i \omega}{\pi} \int_{-1/2}^{1/2} \sum_{n=1}^N C_n \frac{d\varphi_n(\xi)}{d\xi} \ln|x-\xi| d\xi \\ & - \frac{\rho_f i \omega U}{\pi} \int_{-1/2}^{1/2} \frac{\sum_{n=1}^N C_n \varphi_n(\xi)}{x-\xi} d\xi - \frac{\rho_f U^2}{\pi} \int_{-1/2}^{1/2} \frac{\sum_{n=1}^N C_n \frac{d\varphi_n(\xi)}{d\xi}}{x-\xi} d\xi \end{aligned} \quad (4.19)$$

şeklindedir ve kısaca

$$R(x) = \sum_{n=1}^N C_n F_n(x) \quad (4.20)$$

olarak yazılabilir. Bu denklemdaki $F_n(x)$ ifadesi

$$\begin{aligned}
F_n(x) = & D \frac{d^4 \varphi_n}{dx^4}(x) - \omega^2 \rho_p h_p \varphi_n(x) + \frac{\rho_f \omega^2}{\pi} \int_{-1/2}^{1/2} \varphi_n(\xi) \ln|x-\xi| d\xi \\
& - \frac{\rho_f U i \omega}{\pi} \int_{-1/2}^{1/2} \frac{d\varphi_n}{d\xi}(\xi) \ln|x-\xi| d\xi - \frac{\rho_f i \omega U}{\pi} \int_{-1/2}^{1/2} \frac{\varphi_n(\xi)}{x-\xi} d\xi \\
& - \frac{\rho_f U^2}{\pi} \int_{-1/2}^{1/2} \frac{d\varphi_n}{d\xi}(\xi) \frac{d\xi}{x-\xi} d\xi
\end{aligned} \tag{4.21}$$

şeklindedir. (4.18) de kuralı verilen φ_n ler (4.19) a yazılırsa $A_n = \frac{2n+1}{4n-2}$ ve $B_n = \frac{2n+3}{16(2n-1)}$

olmak üzere kalan

$$\begin{aligned}
R(x) = & D \sum_{n=1}^N C_n \left[(n+3)(n+2)(n+1)n x_n^{n-1} - (n+1)n(n-1)(n-2)A_n x_n^{n-3} \right. \\
& \left. + (n-1)(n-2)(n-3)(n-4)B_n x_n^{n-5} \right] \\
& - \omega^2 \rho_p h_p \sum_{n=1}^N C_n (x_n^{n+3} - A_n x_n^{n+1} + B_n x_n^{n-1}) \\
& + \frac{\rho_f \omega^2}{\pi} \sum_{n=1}^N C_n \left[\int_{-1/2}^{1/2} (\xi^{n+3} - A_n \xi^{n+1} + B_n \xi^{n-1}) \ln|x-\xi| d\xi \right] \\
& - \frac{\rho_f U i \omega}{\pi} \sum_{n=1}^N C_n \left[\int_{-1/2}^{1/2} ((n+3)\xi^{n+2} - A_n(n+1)\xi^n + B_n(n-1)\xi^{n-2}) \ln|x-\xi| d\xi \right] \\
& - \frac{\rho_f i \omega U}{\pi} \sum_{n=1}^N C_n \left[\int_{-1/2}^{1/2} \left(\frac{\xi^{n+3} - A_n \xi^{n+1} + B_n \xi^{n-1}}{x-\xi} \right) d\xi \right] \\
& - \frac{\rho_f U^2}{\pi} \sum_{n=1}^N C_n \left[\int_{-1/2}^{1/2} \left(\frac{(n+3)\xi^{n+2} - A_n(n+1)\xi^n + B_n(n-1)\xi^{n-2}}{x-\xi} \right) d\xi \right]
\end{aligned} \tag{4.22}$$

olacaktır. Burada

$$Y_n(\xi) = \int_{-1/2}^{1/2} \frac{\xi^n}{\xi - x_n} d\xi \quad , \quad Y_0(\xi) = \ln \left| \frac{1}{2} - x_n \right| - \ln \left| -\frac{1}{2} - x_n \right| \tag{4.23}$$

$$Y_{n+1}(\xi) = x_n Y_n(\xi) - \left[\frac{\left(\frac{1}{2} \right)^{n+1} - \left(-\frac{1}{2} \right)^{n+1}}{n+1} \right] \tag{4.24}$$

$$I_n(\xi) = \int_{-1/2}^{1/2} \xi^n \ln|x_n - \xi| d\xi \tag{4.25}$$

$$I_n(\xi) = \left[\frac{\left\{ \left(\frac{1}{2} \right)^{n+1} \operatorname{In} \left| x_n - \frac{1}{2} \right| - \left(-\frac{1}{2} \right)^{n+1} \operatorname{In} \left| x_n + \frac{1}{2} \right| \right\} + Y_{n+1}}{n+1} \right] \quad (4.26)$$

$$I_0(\xi) = \left(\frac{1}{2} \right) \left\{ \operatorname{In} \left| x_n - \frac{1}{2} \right| - \operatorname{In} \left| x_n + \frac{1}{2} \right| \right\} + Y_1 \quad (4.27)$$

şeklinde verilen tanımlar kullanılarak denklem (4.22)

$$\begin{aligned} R(x) = & D \sum_{n=1}^N C_n \left[(n+3)(n+2)(n+1)n x_n^{n-1} - (n+1)n(n-1)(n-2)A_n x_n^{n-3} \right. \\ & \left. + (n-1)(n-2)(n-3)(n-4)B_n x_n^{n-5} \right] \\ & - \omega^2 \rho_p h_p \sum_{n=1}^N C_n (x_n^{n+3} - A_n x_n^{n+1} + B_n x_n^{n-1}) + \frac{\rho_f \omega^2}{\pi} \sum_{n=1}^N C_n [I_{n+3} - A_n I_{n+1} + B_n I_{n-1}] \\ & - \frac{\rho_f U i \omega}{\pi} \sum_{n=1}^N C_n [(n+3)I_{n+2} - (n+1)A_n I_n + (n-1)B_n I_{n-2}] \\ & - \frac{\rho_f i \omega U}{\pi} \sum_{n=1}^N C_n [Y_{n+3} - A_n Y_{n+1} + B_n Y_{n-1}] \\ & - \frac{\rho_f U^2}{\pi} \sum_{n=1}^N C_n [(n+3)Y_{n+2} - (n+1)A_n Y_n + (n-1)B_n Y_{n-2}] \end{aligned} \quad (4.28)$$

haline gelir.

Kollokasyon noktaları $x_1, x_2, x_3, \dots, x_N$ olsun bu noktalarda kalan sıfıra eşitlenirse

$$R(x_m) = \sum_{n=1}^N C_n F_n(x_m) = 0 \quad m=1, 2, 3, \dots, N \quad (4.29)$$

(4.29) elde edilir. Bu denklem sisteminin matris gösterimi

$$[F_n(x_m)]_{nxm} [C_n]_{nx1} = [0]_{nx1} \quad (4.30)$$

şeklinde olacaktır.

Burada $F_n(x_m)$ ler katsayılar matrisinin sütunlarını oluşturmaktadır. Denklem sisteminin açık yazılmış şekli

$$\begin{bmatrix} F_1(x_1) & F_2(x_1) & \dots & F_N(x_1) \\ F_1(x_2) & F_2(x_2) & \dots & F_N(x_2) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ F_1(x_N) & F_2(x_N) & \dots & F_N(x_N) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C_1 \\ C_2 \\ C_3 \\ \vdots \\ C_N \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \quad (4.31)$$

olmaktadır. $C_1, C_2, C_3, \dots, C_N$ lerin sıfırdan farklı olabilmesi için katsayılar matrisinin determinanı sıfır olmalıdır.

$$\det [F_n(x_m)]_{N \times N} = 0 \quad (4.32)$$

Katsayılar matrisinin determinanı ω nın fonksiyonudur. Bu fonksiyona $f(\omega)$ diyelim. Sabit h_p değeri için akış hızı olan U değeri değiştirilerek $f(\omega)$ fonksiyonları bilgisayarla bulunur. $f(\omega)$ nın kökleri incelenen problemin özdeğerlerini vermektedir.

Bu kökler $\omega = \omega_{gerçel} + i \omega_{sanal}$ şeklindedir. ω ların sanal kısımları çeşitli U değerlerine karşılık çizdirilmiş ve özdeğerin sanal kısmının artıdan eksiye geçtiği hız flutter (çırpınma) hızı olarak belirlenmiştir. Flutter hızı üzerindeki akış hızları için sistem kararsızdır. $\omega_{gerçel}$ ise flutter frekansı olarak adlandırılmaktadır. Boyutsuz kütle oranı

$$\mu = \frac{\rho_f b}{\rho_p h_p} \quad (4.33)$$

karakteristik hız

$$C_0 = \sqrt{\frac{D}{\rho_p h_p b^4}} \quad (4.34)$$

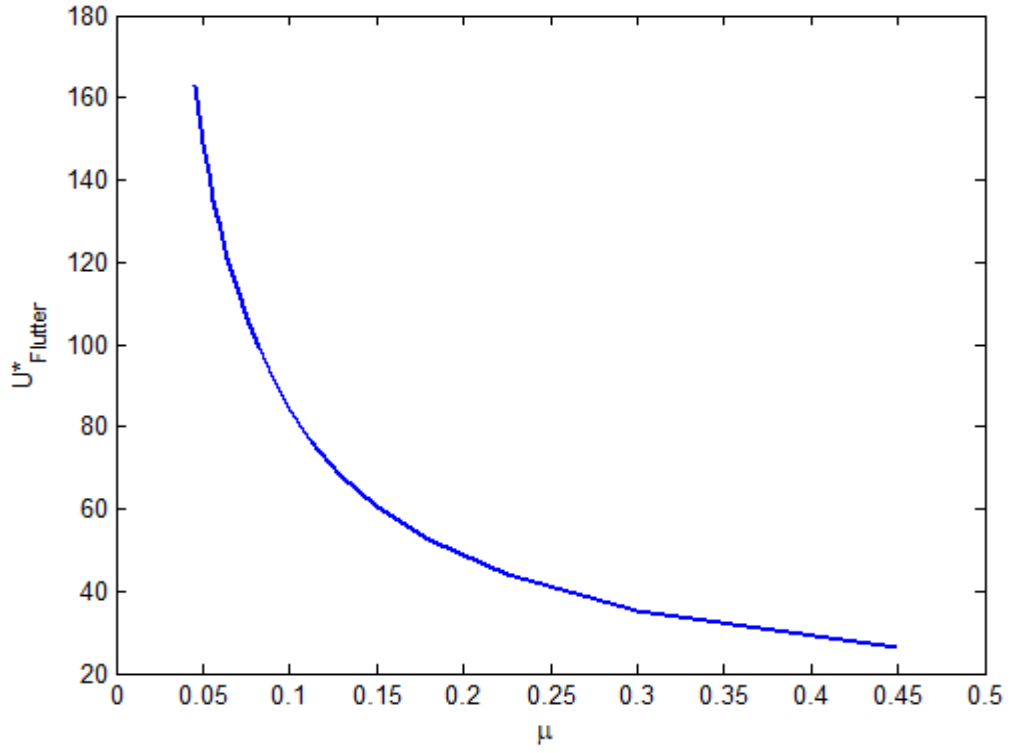
olarak tanımlanırsa bunlardan hareketle boyutsuz flutter hızları ve boyutsuz flutter frekansları bulunabilir.

$$\begin{aligned} U_{Flutter}^* &= \frac{U_{Flutter}}{C_0} \\ \omega_0 &= \frac{C_0}{b} \\ \omega_{Flutter}^* &= \frac{\omega_{reel}}{\omega_0} \end{aligned} \tag{4.35}$$

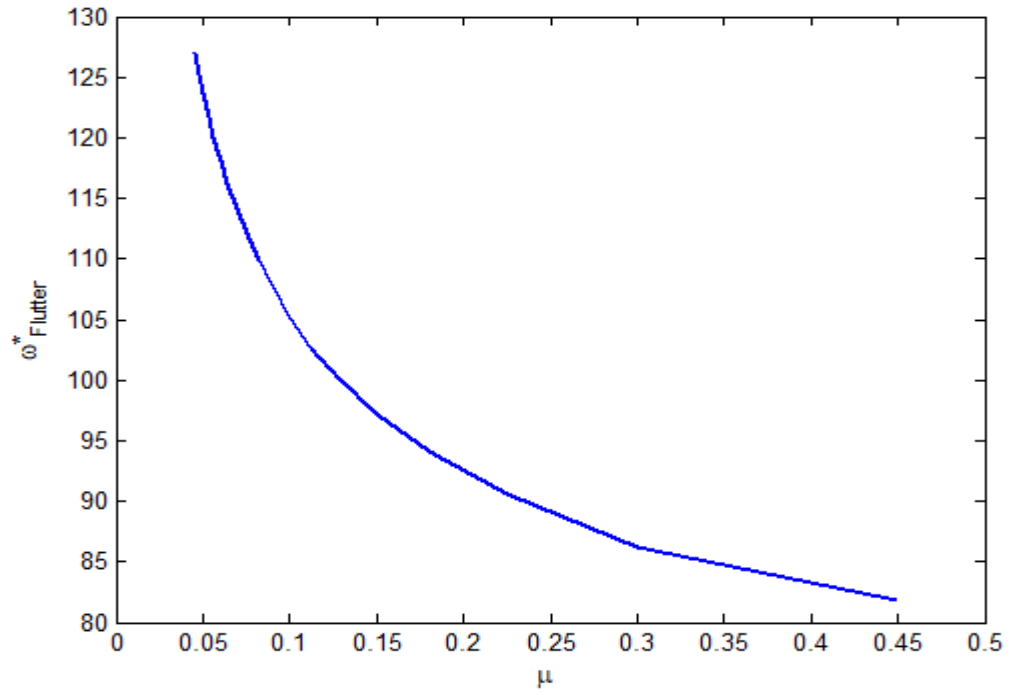
Tablo 4.2 de bulunan sonuçlar gösterilmiştir.

Tablo 4.2: Flutter Hızı ve Flutter Frekansının değerleri.

Plaka Kalınlığı h_p	Flutter Hızı $U_{Flutter}$	Kütle Oranı μ	Boyutsuz Flutter Hızı $U_{Flutter}^*$	Karakteristik Hız C_0	Flutter Frekansı $\omega_{Flutter}$	Boyutsuz Flutter Frekansı $\omega_{Flutter}^*$
0.0010	40.4635	0.4504	26.3572	1.5352	125.6410	81.8402
0.0015	81.6004	0.3002	35.4368	2.3027	198.4890	86.1984
0.0020	135.4045	0.2252	44.1247	3.0470	278.1879	90.6061
0.0025	201.5535	0.1801	52.5166	3.8379	361.0822	94.0833
0.0030	279.4270	0.1501	60.6725	4.6055	447.7277	97.2159
0.0035	368.7816	0.1287	68.6348	5.3731	537.7995	100.0911
0.0040	469.3620	0.1126	76.4359	6.1406	630.0478	102.6036
0.0045	580.9601	0.1001	84.0972	6.9082	727.2749	105.2770
0.0050	703.3980	0.0901	91.6384	7.6758	826.3192	107.6525
0.0055	836.5279	0.0819	99.0748	8.4434	928.0465	109.9138
0.0060	980.2210	0.0751	106.4185	9.2110	1032.3436	112.0773
0.0065	1134.3688	0.0693	113.6813	9.9785	1139.1137	114.1558
0.0070	1298.874	0.0643	120.8693	10.7461	1284.2731	116.1606
0.0075	1473.6570	0.0600	127.9916	11.5137	1359.7488	118.0983
0.0080	1658.643	0.0563	135.0544	12.2813	1473.4770	119.9773
0.0085	1853.7711	0.0530	142.0645	13.0488	1589.4010	121.8044
0.0090	2058.9860	0.0500	149.0248	13.8164	1707.4708	123.5829
0.0095	2274.2424	0.0474	155.9409	14.5840	1827.6416	125.3183
0.0100	2499.4980	0.0450	162.8168	15.3516	1949.8734	127.0143



Şekil 4.1: Boyutsuz Flutter Hızının Kütle oranı ile değişimi.

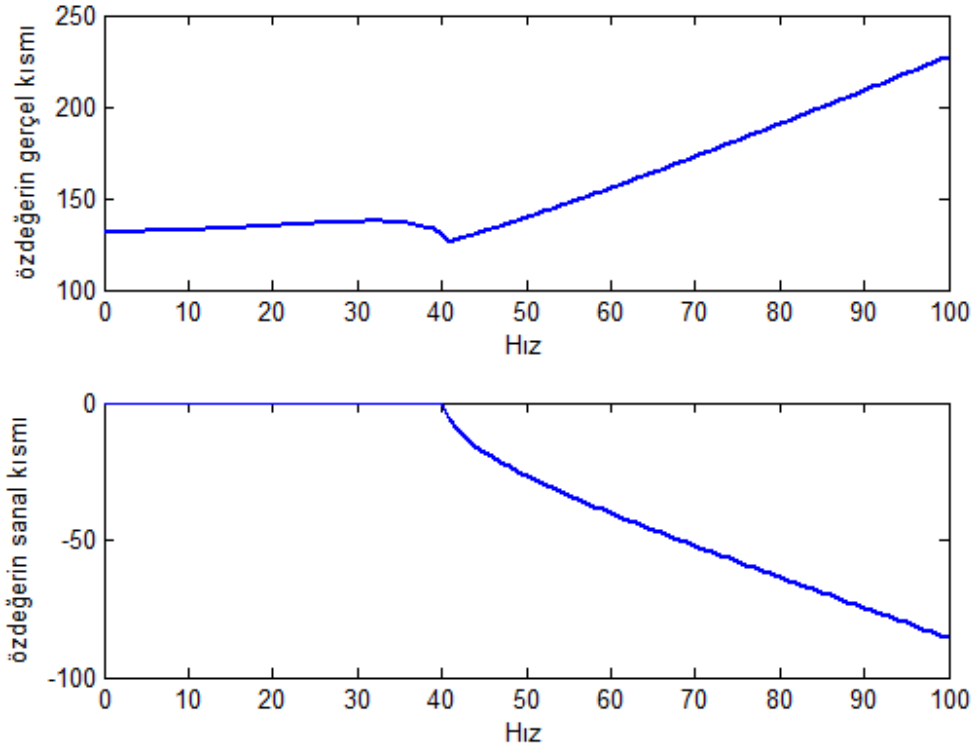


Şekil 4.2: Boyutsuz Flutter Frekansının Kütle oranı ile değişimi.

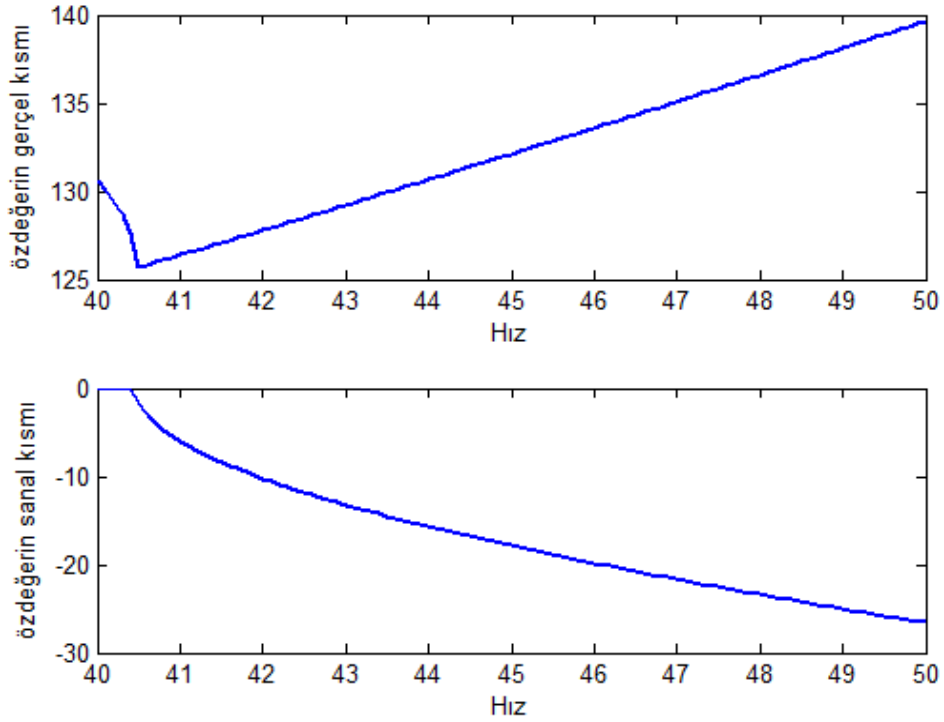
Tablo 4.2 deki değerler grafik olarak Şekil 4.1 ve Şekil 4.2 de gösterilmiştir.

Tablo 4.2 deki sonuçlar bulunurken hız önce 0 ile 100 arasında birer adımlık deęiŐimlerle alınmıştır. Çizdirilen grafiklerden özdeğerin sanal kısmının pozitif iŐareten negatif iŐarete geçtiği hızın 40 ile 50 aralığında olduğu belirlenmiştir. Ardından bu aralık tekrar yüz eşit parçaya bölünerek iŐaret değişiminin, 40 ile 41 aralığında olduğu belirlenmiştir. Virgülden sonraki dört basamağa ulaŐana kadar aynı işlem adımları tekrarlanmıŐtır. Elde edilen grafikler. Şekil 4.3, Şekil 4.4 Şekil 4.5 ve Şekil 4.6 daki gibidir.

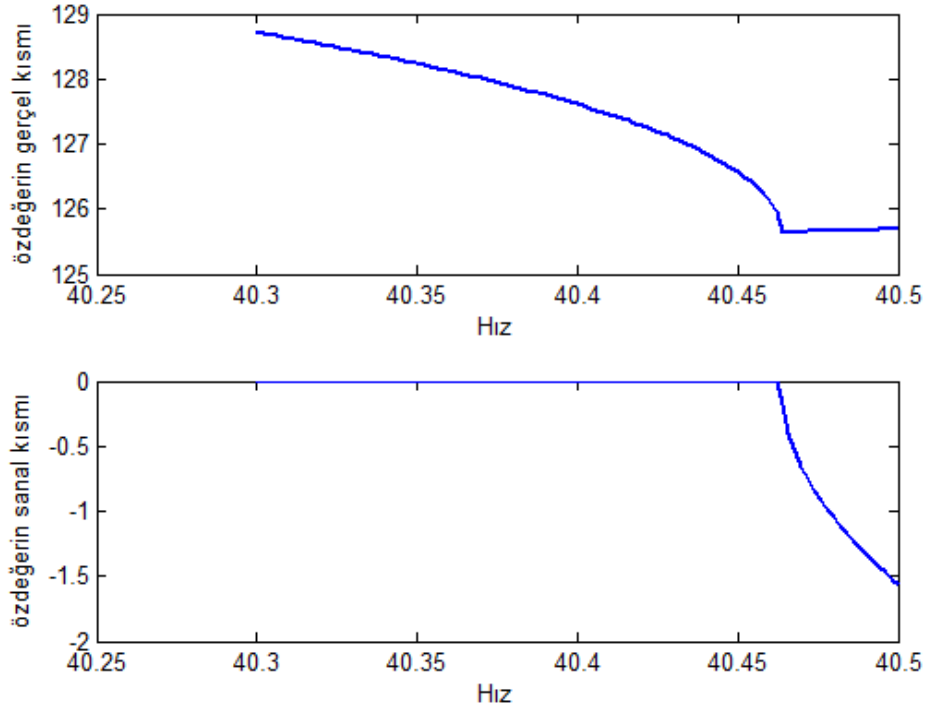




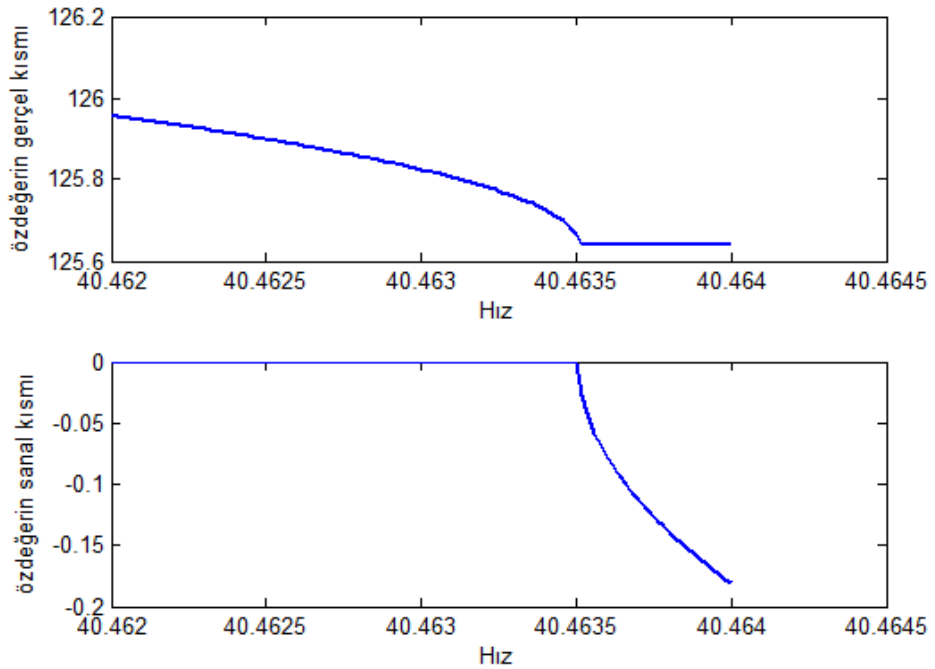
Şekil 4.3: Hızda 1 adımlık değişime karşılık özdeğer gerçel ve sanal kısımları.



Şekil 4.4: Hızda 0.1 adımlık değişime karşılık özdeğer gerçel ve sanal kısımları.



Şekil 4.5: Hızda 0.002 adımlık değişime karşılık özdeğer gerçel ve sanal kısımları.



Şekil 4.6: Hızda 0.00002 adımlık değişime karşılık özdeğer gerçel ve sanal kısımları.

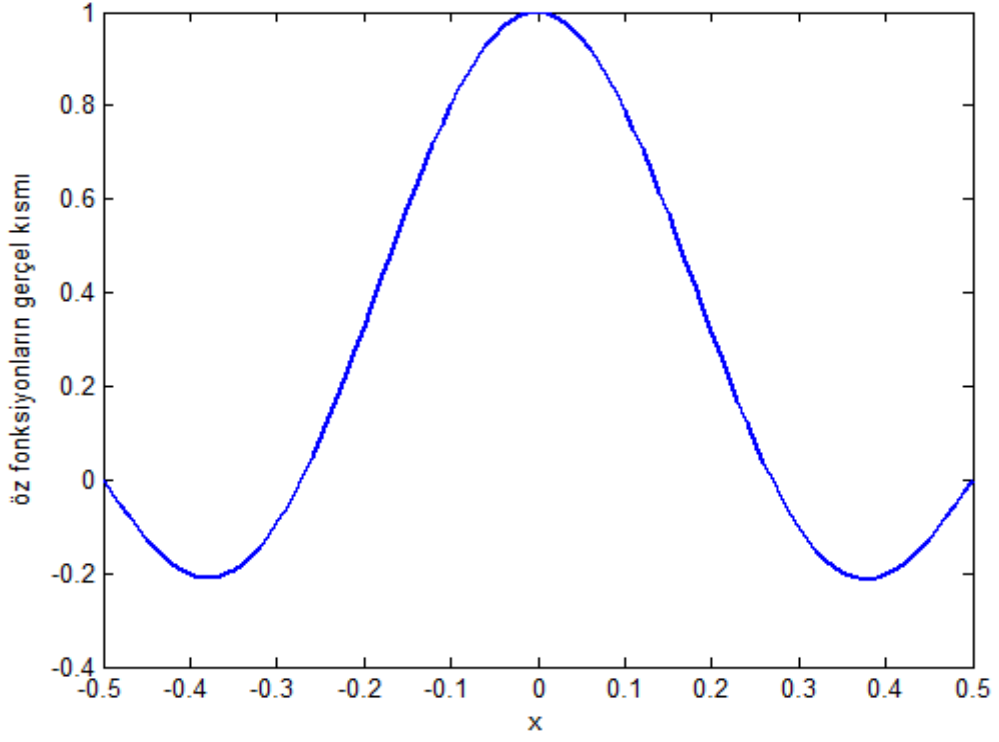
Öz fonksiyonlar bulunurken Şekil 4.3 ten yararlanılmıştır. Flutter hızı olan 40.4635 ten önceki ve sonraki hızlardaki özdeğerler aşağıdaki gibidir.

Tablo 4.3: Özdeğerlerin Flutter öncesi ve sonrası değerleri.

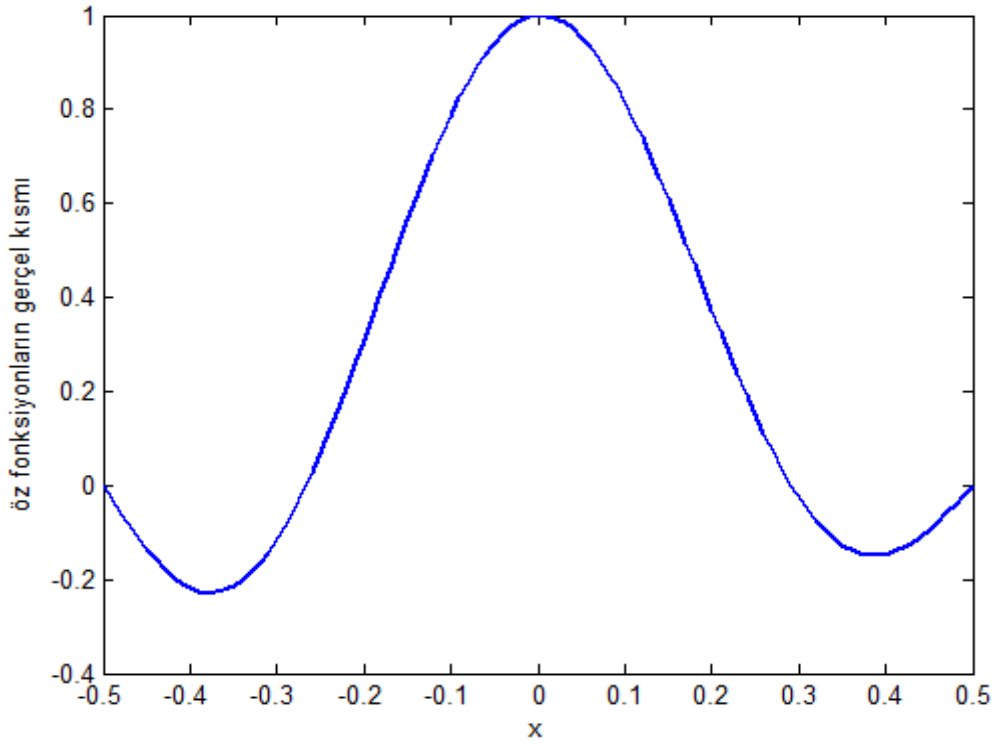
Plaka Kalınlığı	Hız	Özdeğer
	40	125.7
0.0010	40.4635	125.6410
	41	125.640 - 6.003i

Tablo 4.3 ün birinci ve üçüncü satırında yer alan hızlar ve özdeğerler denklem (4.15) e yazılır.

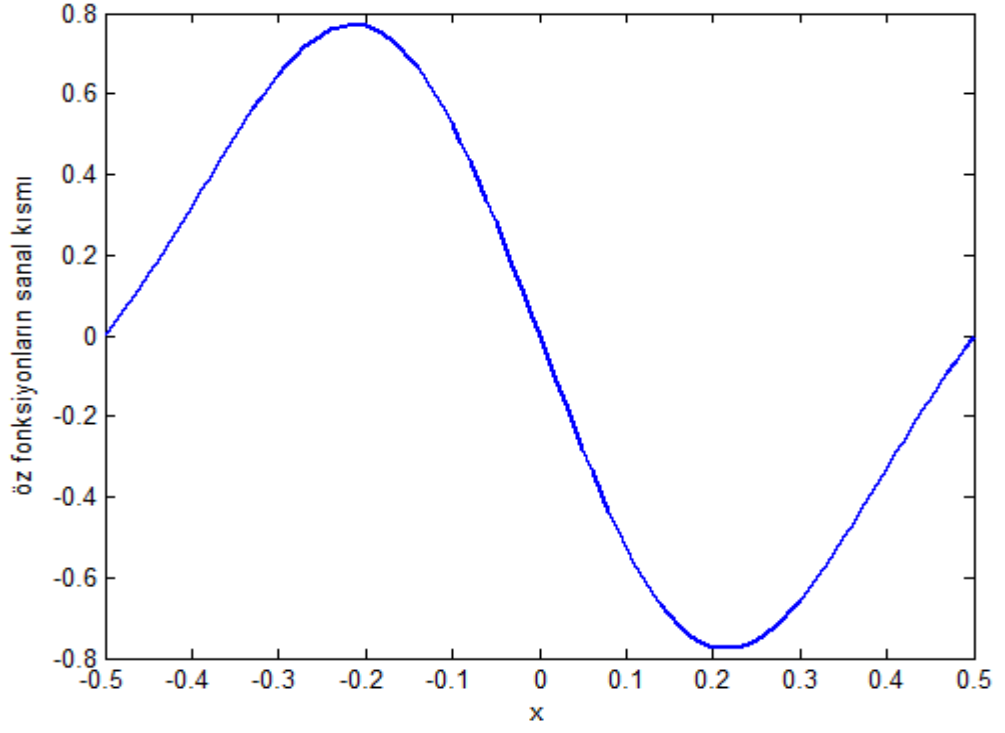
$\varphi_2, \varphi_3, \dots, \varphi_{14}$ değerleri (4.11) den hesaplanır. Bulunan denklem sistemi 14 bilinmeyenli ve homojendir. $C_1 = 1$ alınarak ve (4.15) deki ilk denklem atılarak denklem sistemi 13 bilinmeyenli hale getirilir. Bu durumda sistemdeki homojenlikte ortadan kalkmıştır ve geriye kalan $C_2, C_3, C_4, \dots, C_{14}$ hesaplanabilir. Bulunan bu katsayılar ve denklem (4.11) kullanılarak, denklem (4.12) ile verilen ifade x' in bir fonksiyonu olarak yazılabilecektir. x' ler $[-0.5, 0.5]$ aralığında 0.01 adımla değiştirilerek öz fonksiyonlar bulunur. Bulunan bu öz fonksiyonlar normalize edilmek için 3.2 ile çarpılmış ve Şekil 4.7 ile Şekil 4.12 arasındaki grafikler elde edilmiştir.



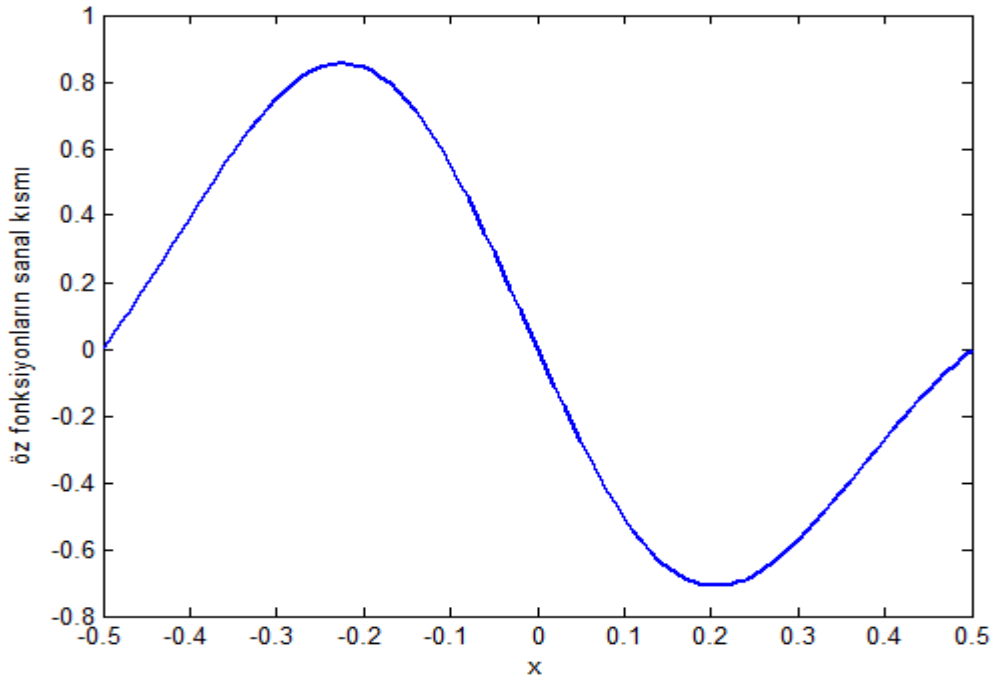
Şekil 4.7: Flutter öncesi öz fonksiyonların gerçel kısımları.



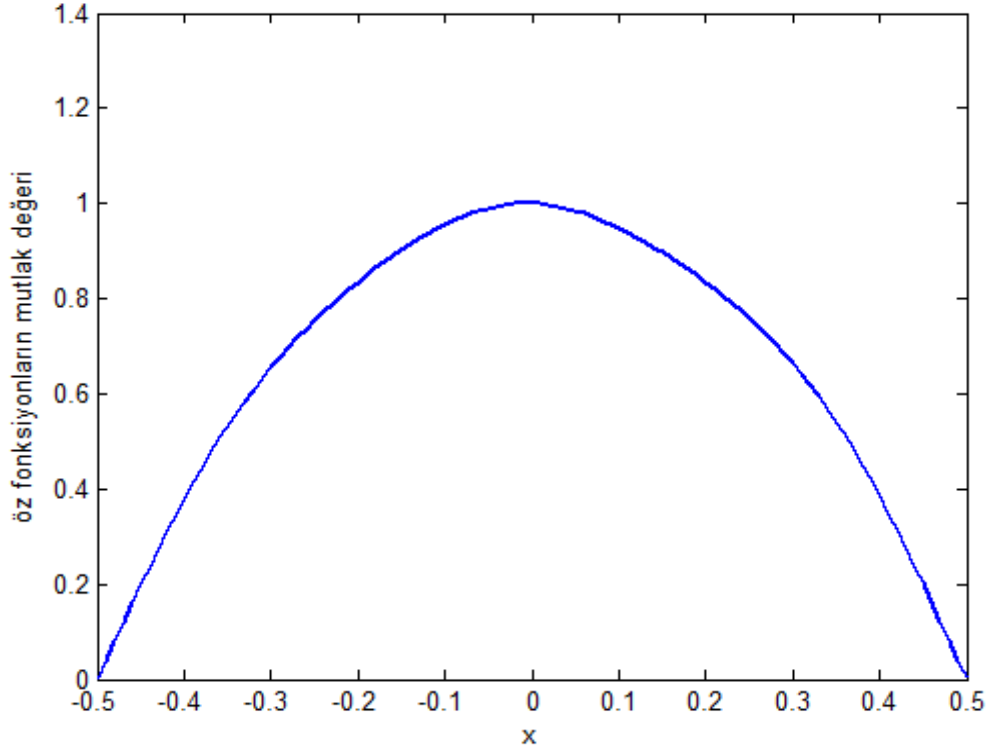
Şekil 4.8: Flutter sonrası öz fonksiyonların gerçel kısımları.



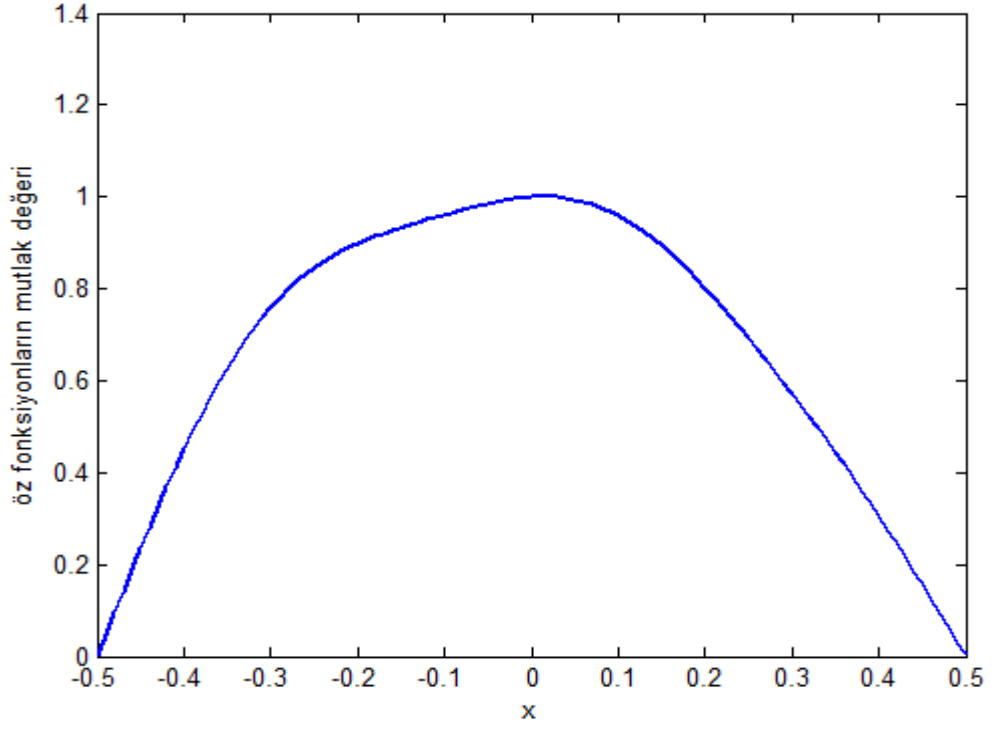
Şekil 4.9: Flutter öncesi öz fonksiyonların sanal kısımları.



Şekil 4.10: Flutter sonrası öz fonksiyonların sanal kısımları.



Şekil 4.11: Flutter öncesi öz fonksiyonların mutlak değeri.



Şekil 4.12: Flutter sonrası öz fonksiyonların mutlak değeri.

4.3. SİLİNDİRİK KABUK ÜZERİNDEKİ BASINCIN ANALİTİK ÇÖZÜMÜ

Silindirik kabuğun yarıçapının zamanla değişimi (4.36) ve akım fonksiyonu (4.37) denklemleri ile verilir denklemlerdeki ε pertürbasyon parametresidir.

$$r = R + \varepsilon w(\theta, t) \quad (4.36)$$

$$\psi(r, \theta; \varepsilon) = \psi_0(r, \theta) + \varepsilon \psi_1(r, \theta) + \dots \quad (4.37)$$

Potansiyel Akış göz önüne alınırsa Akım Fonksiyonu için

$$\nabla^2 \psi = \nabla^2 \psi_0 + \nabla^2 \psi_1 = 0$$

$$\nabla^2 \psi_0 = 0 \quad \text{dan} \quad \psi_0 = U \left(r - \frac{R^2}{r} \right) \sin \theta \quad (4.38)$$

yazılabilir. Silindirik kabuk üzerinde Akım fonksiyonu

$$\psi(R + \varepsilon w(\theta, t), \theta) = \psi_0(R + \varepsilon w(\theta, t), \theta) + \varepsilon \psi_1(R + \varepsilon w(\theta, t), \theta) + \dots = 0 \quad (4.39)$$

denklemleri ile verilir.

$$\psi(R, \theta) = \psi_0(R, \theta) + \varepsilon w(\theta, t) \frac{\partial \psi_0(R, \theta)}{\partial r} + \varepsilon \psi_1(R, \theta) + \dots = 0 \quad (4.40)$$

$$\psi_0(R, \theta) = 0$$

$$\psi_1(R, \theta) = -w(\theta, t) \frac{\partial \psi_0(R, \theta)}{\partial r} \quad (4.41)$$

(4.38) nolu denklemdaki ψ_0 in eşiti (4.41) nolu denkleme yazılırsa

$$\psi_1(R, \theta) = -w(\theta, t) U \left(1 + \frac{R^2}{r^2} \right) \sin \theta \quad (4.42)$$

Denklemler (3.74) teki basınç terimi hesaplanırken kullanılacak akım fonksiyonu (4.43) denkleminin çözümünden gelecektir.

$$\nabla^2 \psi_1 = 0$$

$$r = R \text{ de}$$

$$\psi_1(R, \theta) = f(\theta) = -w(\theta, t) U \left(1 + \frac{R^2}{r^2}\right) \sin \theta \quad (4.43)$$

$$r \rightarrow \infty \text{ iken } \psi_1 = 0$$

Denklemin çözümü değişkenlerin ayrıştırılması yöntemi kullanılarak bulunur. Bu çözüm EK 3 te verilmiştir.

$$\begin{aligned} \psi_1(r, \theta) &= \frac{\alpha_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{R}{r}\right)^n [\alpha_n \cos n\theta + \beta_n \sin n\theta] \\ \alpha_n &= \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(\theta) \cos n\theta d\theta \\ \beta_n &= \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(\theta) \sin n\theta d\theta \\ \alpha_0 &= \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(\theta) d\theta \end{aligned} \quad (4.44)$$

Denklem (4.43) ile verilen sınır şartları denklem (4.44) te yazılırsa silindirik kabuk üzerindeki basınç teriminde kullanılacak Akım Fonksiyonu hesaplanabilir.

$$r = R \text{ de}$$

$$f(\theta) = -2U w(\theta, t) \sin \theta$$

$$\psi_1(r, \theta) = \frac{\alpha_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{R}{r}\right)^n [\alpha_n \cos n\theta + \beta_n \sin n\theta] = -2U w(\theta, t) \sin \theta$$

$$\alpha_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(\xi) \cos n\xi d\xi = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} -2Uw(\xi, t) \sin \xi \cos n\xi d\xi \quad (4.45)$$

$$\beta_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(\xi) \sin n\xi d\xi = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} -2Uw(\xi, t) \sin \xi \sin n\xi d\xi$$

$$\alpha_0 = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(\xi) d\xi = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} -2Uw(\xi, t) \sin \xi d\xi$$

Akım fonksiyonunun son hali

$$\begin{aligned} \psi_1(r, \theta, \xi) &= \frac{-2U}{\pi} \int_0^{2\pi} \frac{1}{2} w(\xi, t) \sin \xi d\xi \\ &+ \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{R}{r} \right)^n \cos n\theta \left[-\frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} 2U w(\xi, t) \sin \xi \cos n\xi d\xi \right] \\ &+ \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{R}{r} \right)^n \sin n\theta \left[-\frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} 2U w(\xi, t) \sin \xi \sin n\xi d\xi \right] \end{aligned} \quad (4.46)$$

(4.46) denkleminin daha basit şekli

$$\begin{aligned} \psi_1(r, \theta) &= \frac{-2U}{\pi} \int_0^{2\pi} w(\xi, t) G(r, \theta, \xi) d\xi \\ G_1(r, \theta, \xi) &= \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{R}{r} \right)^n \cos n\theta \sin \xi \cos n\xi \\ G_2(r, \theta, \xi) &= \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{R}{r} \right)^n \sin n\theta \sin \xi \sin n\xi \\ G(r, \theta, \xi) &= \frac{\sin \xi}{2} + G_1(r, \theta, \xi) + G_2(r, \theta, \xi) \end{aligned} \quad (4.47)$$

olacaktır. Kabuk üzerinde Lineerleştirilmiş Bernoulli denklemi yazılırsa basınç

$$P = -\rho_f \left[\frac{\partial \psi_1}{\partial t} + U \frac{\partial \psi_1}{\partial \theta} \right] \Big|_{r=R} \quad (4.48)$$

$$P = -\rho_f \left[\frac{-2U}{\pi} \int_0^{2\pi} \frac{\partial w(\xi, t)}{\partial t} G(r, \theta, \xi) d\xi - \frac{2U^2}{\pi} \int_0^{2\pi} w(\xi, t) \frac{\partial G(r, \theta, \xi)}{\partial \theta} d\xi \right] \quad (4.49)$$

olacaktır. Burada

$$G(r, \theta, \xi) \Big|_{r=R} = G(\theta, \xi) = \frac{\sin \xi}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \cos n\theta \sin \xi \cos n\xi + \sum_{n=1}^{\infty} \sin n\theta \sin \xi \sin n\xi \quad (4.50)$$

$$G(\theta, \xi) = \sin \xi \left[\frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \cos n\theta \cos n\xi + \sin n\theta \sin n\xi \right] = \sin \xi \left[\frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \cos[n(\theta - \xi)] \right] \quad (4.51)$$

şeklindedir. Fourier serisi, Dirac delta ve Heaviside fonksiyonlarının aşağıdaki özellikleri kullanılarak [49], [50]

$$\sum_{n=1}^{\infty} \cos[n(\theta - \xi)] = -\frac{1}{2} + \pi \delta(\theta - \xi) \quad (4.52)$$

$$\begin{aligned} G(\theta, \xi) &= \sin \xi \left[\frac{1}{2} - \frac{1}{2} + \pi \delta(\theta - \xi) \right] = \pi \delta(\theta - \xi) \sin \xi \\ \frac{\partial G(\theta, \xi)}{\partial \theta} &= \pi \sin \xi \frac{\partial \delta(\theta - \xi)}{\partial \theta} = \pi \delta'(\theta - \xi) \sin \xi \end{aligned} \quad (4.53)$$

(4.55) ve (4.56) denklemleri bulunur. Denklem (4.52) teki eşitliğin çıkarılması EK 4 te verilmiştir. Basınç ifadesi şöyle yazılabilir

$$\begin{aligned} P &= -\rho_f \left[\frac{-2U}{\pi} \int_0^{2\pi} \pi \sin \xi \delta(\theta - \xi) \frac{\partial w(\xi, t)}{\partial t} d\xi - \frac{2U^2}{\pi} \int_0^{2\pi} w(\xi, t) \pi \sin \xi \delta'(\theta - \xi) d\xi \right] \\ &= 2U \rho_f \left[\int_0^{2\pi} \sin \xi \delta(\theta - \xi) \frac{\partial w(\xi, t)}{\partial t} d\xi + U \int_0^{2\pi} w(\xi, t) \sin \xi \delta'(\theta - \xi) d\xi \right] \end{aligned} \quad (4.54)$$

Silindirik kabuktaki y ve z yönlerindeki yer değiştirmeler sırasıyla $v(\theta, t) = v(\theta) e^{i\omega t}$ ve $w(\theta, t) = w(\theta) e^{i\omega t}$ olarak verilsin Bu yer değiştirmeler (4.54) denkleminde yazılırsa silindirik kabuğa etkileyen basınç yer değiştirme cinsinden

$$\begin{aligned} P &= 2U \rho_f e^{i\omega t} \left[\int_0^{2\pi} i \omega w(\xi) \sin \xi \delta(\theta - \xi) d\xi + U \int_0^{2\pi} w(\xi) \sin \xi \delta'(\theta - \xi) d\xi \right] \\ P &= 2U \rho_f e^{i\omega t} \left[i \omega w(\theta) \sin \theta + U \left\{ \frac{\partial w(\theta)}{\partial \theta} \sin \theta + w(\theta) \cos \theta \right\} \right] \end{aligned} \quad (4.55)$$

şeklinde yazılabilir.

4.4. SİLİNDİRİK KABUK SERBEST TİTREŞİMİ ÖZDEĞERLERİ HESABI

Bu bölümde Silindirik bir kabuk serbest titreşimine ait özdeğerler hesaplanmıştır. Hesaplamalar aşağıda verilmiştir. x doğrultusunda sonsuz uzun silindirik kabuk için hareket denklemleri aşağıdaki gibidir.

$$\begin{aligned} \frac{1}{R^2} \frac{\partial^2 v}{\partial \theta^2} + \frac{1}{R^2} \frac{\partial w}{\partial \theta} - \frac{(1-\nu^2)}{E} \rho_k \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} &= 0 \\ \frac{h^2}{12R^4} \left(\frac{\partial^4 w}{\partial \theta^4} \right) + \frac{w}{R^2} + \frac{1}{R^2} \frac{\partial v}{\partial \theta} + \frac{(1-\nu^2)}{E} \rho_k \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} &= P \end{aligned} \quad (4.56)$$

Sınır şartları ise

$$\begin{aligned} v(0) &= v(\pi) \\ \frac{\partial w}{\partial \theta}(0) &= \frac{\partial w}{\partial \theta}(\pi) = 0 \\ \frac{\partial^3 w}{\partial \theta^3}(0) &= \frac{\partial^3 w}{\partial \theta^3}(\pi) = 0 \end{aligned}$$

şeklindedir. $R = 1$ ve $P = 0$ için kabuğun serbest titreşiminin özdeğerleri bulunmak istenirse (4.56) nolu denklem sistemi aşağıdaki formda olacaktır.

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 v}{\partial \theta^2} + \frac{\partial w}{\partial \theta} - k \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} &= 0 \\ \frac{h^2}{12} \frac{\partial^4 w}{\partial \theta^4} + w + \frac{\partial v}{\partial \theta} + k \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} &= 0 \\ k &= \frac{(1-\nu^2)}{E} \rho_k \end{aligned} \quad (4.57)$$

Bu denklemin sınır şartları ise

$$\begin{aligned} v(0) &= v(\pi) \\ \frac{dw}{d\theta}(0) &= \frac{dw}{d\theta}(\pi) = 0 \\ \frac{d^3 w}{d\theta^3}(0) &= \frac{d^3 w}{d\theta^3}(\pi) = 0 \end{aligned}$$

olarak verilir. y ve z doğrultularındaki yer değiştirmeler

$$\begin{aligned} v(\theta, t) &= V(\theta) e^{i\omega t} \\ w(\theta, t) &= W(\theta) e^{i\omega t} \end{aligned} \quad (4.58)$$

şeklinde tanımlanıp (4.57) nolu denklem takımına yazılırsa

$$\begin{aligned} \frac{d^2V}{d\theta^2} + \frac{dW}{d\theta} + k\omega^2 V &= 0 \\ \frac{h^2}{12} \frac{d^4W}{d\theta^4} + W + \frac{dV}{d\theta} - k\omega^2 W &= 0 \end{aligned} \quad (4.59)$$

(4.58) nolu denklem takımındaki $V(\theta)$ ve $W(\theta)$ aşağıdaki şekilde olsunlar

$$\begin{aligned} V(\theta) &= A_n e^{r_n \theta} \\ W(\theta) &= B_n e^{r_n \theta} \end{aligned} \quad (4.60)$$

Bunları (4.59) nolu denkleme yazalım

$$\begin{aligned} A_n r_n^2 + r_n B_n + k\omega^2 A_n &= 0 \\ \frac{h^2 r_n^4}{12} B_n + B_n + A_n r_n - k\omega^2 B_n &= 0 \end{aligned} \quad (4.61)$$

Bu denklemler düzenlenirse

$$(r_n^2 + k\omega^2) A_n + r_n B_n = 0 \quad (4.62)$$

$$r_n A_n + \left(\frac{h^2 r_n^4}{12} - k\omega^2 + 1 \right) B_n = 0 \quad (4.63)$$

verilen denklemleri matris formunda yazarsak

$$\begin{bmatrix} r_n^2 + k\omega^2 & r_n \\ r_n & \frac{h^2 r_n^4}{12} - k\omega^2 + 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_n \\ B_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (4.64)$$

(4.62) denkleminden faydalanılarak aşağıdaki bağıntıya ulaşılır.

$$B_n = \frac{-(r_n^2 + k\omega^2)}{r_n} A_n \quad (4.65)$$

(4.64) nolu denklem takımı r_n^6 terimini içermektedir. Bu durum hesaplanması gereken $r_1, r_2, r_3, r_4, r_5, r_6$ şeklinde 6 adet kökün olduğunu belirtir. (4.60) denklemi ile verilen yer değiştirmeler aşağıdaki formda yazılabilir.

$$\begin{aligned}
V(\theta) &= \sum_{n=1}^6 A_n e^{r_n \theta} = A_1 e^{r_1 \theta} + A_2 e^{r_2 \theta} + A_3 e^{r_3 \theta} + A_4 e^{r_4 \theta} + A_5 e^{r_5 \theta} + A_6 e^{r_6 \theta} \\
W(\theta) &= \sum_{n=1}^6 B_n e^{r_n \theta} = B_1 e^{r_1 \theta} + B_2 e^{r_2 \theta} + B_3 e^{r_3 \theta} + B_4 e^{r_4 \theta} + B_5 e^{r_5 \theta} + B_6 e^{r_6 \theta} \\
W(\theta) &= \sum_{n=1}^6 \frac{-(r_n^2 + k\omega^2)}{r_n} A_n e^{r_n \theta}
\end{aligned} \tag{4.66}$$

(4.66) denklemindeki eşitlikler (4.56) nolu denklemin sınır şartlarına yazılırsa aşağıdaki denklem takımına ulaşılır.

$$\begin{aligned}
V(0) = 0 &\quad \rightarrow \sum_{n=1}^6 A_n e^{r_n 0} = \sum_{n=1}^6 A_n = 0 \\
V(\pi) = 0 &\quad \rightarrow \sum_{n=1}^6 A_n e^{r_n \pi} = 0 \\
\frac{dW}{d\theta}(0) = 0 &\quad \rightarrow \sum_{n=1}^6 \frac{-(r_n^2 + k\omega^2)}{r_n} A_n e^{r_n 0} = \sum_{n=1}^6 \frac{-(r_n^2 + k\omega^2)}{r_n} A_n = 0 \\
\frac{dW}{d\theta}(\pi) = 0 &\quad \rightarrow \sum_{n=1}^6 \frac{-(r_n^2 + k\omega^2)}{r_n} A_n e^{r_n \pi} = 0 \\
\frac{d^3W}{d\theta^3}(0) = 0 &\quad \rightarrow \sum_{n=1}^6 -r_n^2 (r_n^2 + k\omega^2) A_n e^{r_n 0} = \sum_{n=1}^6 -r_n^2 (r_n^2 + k\omega^2) A_n = 0 \\
\frac{d^3W}{d\theta^3}(\pi) = 0 &\quad \rightarrow \sum_{n=1}^6 -r_n^2 (r_n^2 + k\omega^2) A_n e^{r_n \pi} = 0
\end{aligned} \tag{4.67}$$

(4.67) de verilen denklemlerin oluşturduğu sistem açık olarak

$$A_1 + A_2 + A_3 + A_4 + A_5 + A_6 = 0 \tag{4.68}$$

$$A_1 e^{r_1 \pi} + A_2 e^{r_2 \pi} + A_3 e^{r_3 \pi} + A_4 e^{r_4 \pi} + A_5 e^{r_5 \pi} + A_6 e^{r_6 \pi} = 0 \tag{4.69}$$

$$\begin{aligned}
&(r_1^2 + k\omega^2)A_1 + (r_2^2 + k\omega^2)A_2 + (r_3^2 + k\omega^2)A_3 + (r_4^2 + k\omega^2)A_4 \\
&+ (r_5^2 + k\omega^2)A_5 + (r_6^2 + k\omega^2)A_6 = 0
\end{aligned} \tag{4.70}$$

$$\begin{aligned}
&(r_1^2 + k\omega^2)e^{r_1 \pi} A_1 + (r_2^2 + k\omega^2)e^{r_2 \pi} A_2 + (r_3^2 + k\omega^2)e^{r_3 \pi} A_3 + (r_4^2 + k\omega^2)e^{r_4 \pi} A_4 \\
&+ (r_5^2 + k\omega^2)e^{r_5 \pi} A_5 + (r_6^2 + k\omega^2)e^{r_6 \pi} A_6 = 0
\end{aligned} \tag{4.71}$$

$$\begin{aligned}
&r_1^2 (r_1^2 + k\omega^2)A_1 + r_2^2 (r_2^2 + k\omega^2)A_2 + r_3^2 (r_3^2 + k\omega^2)A_3 + r_4^2 (r_4^2 + k\omega^2)A_4 \\
&+ r_5^2 (r_5^2 + k\omega^2)A_5 + r_6^2 (r_6^2 + k\omega^2)A_6 = 0
\end{aligned} \tag{4.72}$$

$$\begin{aligned}
& r_1^2 (r_1^2 + k\omega^2) e^{r_1\pi} A_1 + r_2^2 (r_2^2 + k\omega^2) e^{r_2\pi} A_2 + r_3^2 (r_3^2 + k\omega^2) e^{r_3\pi} A_3 \\
& + r_4^2 (r_4^2 + k\omega^2) e^{r_4\pi} A_4 + r_5^2 (r_5^2 + k\omega^2) e^{r_5\pi} A_5 + r_6^2 (r_6^2 + k\omega^2) e^{r_6\pi} A_6 = 0
\end{aligned} \tag{4.73}$$

şeklinde yazılır . Bu denklemlerin matris formunda gösterimi aşağıdaki gibidir.

$$\begin{bmatrix}
1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\
e^{r_1\pi} & e^{r_2\pi} & e^{r_3\pi} & e^{r_4\pi} & e^{r_5\pi} & e^{r_6\pi} \\
(r_1^2 + k\omega^2) & (r_2^2 + k\omega^2) & (r_3^2 + k\omega^2) & (r_4^2 + k\omega^2) & (r_5^2 + k\omega^2) & (r_6^2 + k\omega^2) \\
(r_1^2 + k\omega^2) e^{r_1\pi} & (r_2^2 + k\omega^2) e^{r_2\pi} & (r_3^2 + k\omega^2) e^{r_3\pi} & (r_4^2 + k\omega^2) e^{r_4\pi} & (r_5^2 + k\omega^2) e^{r_5\pi} & (r_6^2 + k\omega^2) e^{r_6\pi} \\
r_1^2 (r_1^2 + k\omega^2) & r_2^2 (r_2^2 + k\omega^2) & r_3^2 (r_3^2 + k\omega^2) & r_4^2 (r_4^2 + k\omega^2) & r_5^2 (r_5^2 + k\omega^2) & r_6^2 (r_6^2 + k\omega^2) \\
r_1^2 (r_1^2 + k\omega^2) e^{r_1\pi} & r_2^2 (r_2^2 + k\omega^2) e^{r_2\pi} & r_3^2 (r_3^2 + k\omega^2) e^{r_3\pi} & r_4^2 (r_4^2 + k\omega^2) e^{r_4\pi} & r_5^2 (r_5^2 + k\omega^2) e^{r_5\pi} & r_6^2 (r_6^2 + k\omega^2) e^{r_6\pi}
\end{bmatrix}
\begin{bmatrix}
A_1 \\
A_2 \\
A_3 \\
A_4 \\
A_5 \\
A_6
\end{bmatrix}
=
\begin{bmatrix}
0 \\
0 \\
0 \\
0 \\
0 \\
0
\end{bmatrix} \tag{4.74}$$

(4.74) denklemi ile verilen sistem

$$[M_n]_{6 \times 6} [A_n]_{6 \times 1} = [0]_{6 \times 1} \tag{4.75}$$

şeklinde yazılabilir. Bu denklem sisteminin 0 dan farklı çözümlerinin var olması için katsayılar matrisinin determinant sıfır olmalıdır.

$$\det[M_n] = 0 \tag{4.76}$$

(4.64) ile verilen denklem sistemi aşağıdaki formda yazılabilir.

$$\begin{bmatrix}
R_n
\end{bmatrix}_{2 \times 2}
\begin{bmatrix}
A_n \\
B_n
\end{bmatrix}_{2 \times 1}
=
\begin{bmatrix}
0 \\
0
\end{bmatrix}_{2 \times 1} \tag{4.77}$$

(4.77) İle verilen denklem sisteminde $A_n, B_n \neq 0$ şeklindeki çözümlerin varlığı için katsayılar matrisinin determinant 0 olmalıdır.

$$\det[R_n] = 0 \tag{4.78}$$

Buradan sonraki hesaplamalar bilgisayar aracılığıyla yapılabilir. Hesaplamalar yapılırken ω ' a bir reel sayı değeri verilir. (4.78) denkleminin kökleri olan $r_1, r_2, r_3, r_4, r_5, r_6$ değerleri bulunur. Bu kökler kullanılarak (4.74) nolu denklem sistemi oluşturulur. Denklem (4.76) göz önüne alınarak determinantın sıfır olup olmadığına bakılır. Determinant sıfır olana kadar ω değiştirilir. Determinantın 0 olduğu ω aranan özdeğerdir. Hesaplamalardaki h kabuk kalınlığını göstermektedir. (4.57) ile verilen k terimi ise malzemeye ait özellikleri belirtmektedir.

Serbest titreşimin özdeğerleri olan ω lar bu yöntemle hesaplanmış ve Blevins'in [47] çalışması ile karşılaştırmak amacıyla aşağıdaki gibi tablolandırılmıştır. Blevins'in çözümünün işlem adımları EK 5 te verilmiştir. EK 6 da ise hesaplamaları sırasında kullandığı ve sınır şartlarını sağlayan trigonometrik fonksiyonların genel çözümden çıkarılması verilmiştir. Hesaplamalar sırasında kullanılan değerler aşağıdadır.

$$h=0,0040 \text{ m}$$

$$k=3,5360.10^{-8}$$

Tablo 4.4: Kabuk Serbest Titreşimine ait Özdeğerlerin karşılaştırılması.

i	Blevins'in	n	Kollokasyon
	Sonuçları		Sonuçları
1	4.342083490079136	0	4.34208349074316
2	21.969392081625575	1	21.9693920815772
3	52.42962721085838	2	52.4296272109254
4	95.3165900242981	3	95.3165900242392
5	150.53459256900265	4	150.534592566193
6	218.0549024208632	5	218.054902420842
7	297.86678637658554	6	297.866786376546

5. TARTIŞMA VE SONUÇ

Plakanın hareket denklemi, basınç teriminin integral formda olmasından dolayı integro-diferansiyel denklem şeklinde bulunmuştur. Denklem (4.19) ile verilen bu denklemde gerekli düzenlemeler yapılarak (4.28) denklemine ulaşılmıştır. Sınır şartlarını sağlayan taban fonksiyonlarının bulunması açısından çalışma yenidir. Bu fonksiyonların lineer kombinasyonu ile denklem (4.17) oluşturulmuştur. Böylece kollokasyon yöntemi incelenen probleme uygulanabilmiştir. Yöntem sayesinde lineer homojen denklem sistemine ulaşılmıştır. Yer değiştirmelerin (3.56) deki gibi yazılmasıyla incelenen problem bir özdeğer problemi haline getirilmiş ve çözülmüştür.

Akışkanın olmadığı durumda problemi tanımlayan denklem bir diferansiyel denklemdir. Serbest titreşime karşılık gelen bu durumda yer değiştirmeler için analitik bir ifade bulunabilmektedir. (4.1) denkleminin genel çözümünden (4.3) denklemi ile verilen denklem sistemi bulunmuştur. Plaka malzemesi olarak alüminyum kabul edilerek ilk özdeğer hesaplanmıştır. (4.4) ile (4.6) arasındaki denklemlerden faydalanılmış ve bulunan ilk üç özdeğer Tablo 4.1'e yazılmıştır. (4.1) denkleminin taban fonksiyonları şeklinde bir çözümü varsayılarak ve problemin sınır şartları bu taban fonksiyonlara uygulanarak kollokasyon yönteminde kullanılacak olan taban fonksiyonları ailesinin kuralı bulunmuştur. Tablo 4.1' den de görüldüğü gibi bulunan ilk üç özdeğer ile yedi ve yukarısında kollokasyon noktası alınması durumundaki kollokasyon çözümleri uyumludur.

Kollokasyon nokta sayısının artırılması özdeğerlerin virgülden sonraki basamaklarının hassasiyetinde önemlidir.

Akış durumundaki denklemlerdeki basınç teriminin karışık bir yapıda olmasından dolayı hesaplama zamanı kollokasyon nokta sayısına bağlı olarak artmaktadır. Bu haldeki özdeğerlerin bulunmasında en az ne kadar kollokasyon noktası alınması gerektiği önemli bir sorudur. Serbest titreşimdeki hesaplamalara bakılarak uygun sayısal sonuçlar için 14 kollokasyon noktasının alınmasının fazlasıyla yeterli olduğu görülmüştür. Kollokasyon noktalarının problemin sınırları içerisinde eşit olarak dağılması gerek şart olmadığı halde hesaplamaların rahat kontrolü için eşit dağıtılmışlardır.

Boyutsuz flutter hızının kütle oranı ile değişimini gösteren Şekil 4.1 incelendiğinde yüksek kalınlığa sahip plakanın daha yüksek bir hızda fluttera gireceği görülür. Kütle oranının plakanın yoğunluğu ve kalınlığı ile ters orantılı olmasından dolayı yoğunluğu büyük olan plakanın boyutsuz flutter hızının da yüksek olması gerektiği sonucuna ulaşılır. Bu fiziksel olarak beklenen bir sonuçtur.

Şekil 4.2 de boyutsuz flutter frekansının kütle oranı ile değişimi verilmiştir. Boyutsuz flutter frekansı kütle oranı ile ters orantılı olarak değişmektedir. Plaka kalınlığı arttıkça kütle oranı azalacağından boyutsuz flutter frekansı artacaktır. Tablo 4.2 incelendiğinde karakteristik hızın plaka kalınlığı ile doğru orantılı olduğu görülür.

Flutter öncesi ve sonrası hızlarda öz fonksiyonların (titreşim modları veya mod şekilleri) gerçel kısımlarında bir değişme meydana gelmez iken sanal kısımlarında ve mutlak değerlerinde değişim vardır. Şekil 4.9 ve Şekil 4.10 incelenirse öz fonksiyonların sanal kısımlarının flutter sonrası hızda arttığı görülür.

Silindirik kabuğun serbest titreşimi ile ilgili yapılan hesaplamalarda kollokasyon yöntemi sonuçlarıyla Blevins'in çalışma sonuçlarının uyumlu olduğu görülmüştür. Blevins tarafından sınır şartlarını sağlayan bu iki yer değiştirme fonksiyonunu neden bu şekilde seçmiş olduğu anlaşılacak istenmiştir. Genel çözümden hareket ederek bu iki fonksiyona ulaşılabileceği belirlenmiştir.

Silindirik kabuğun üzerinde akışın oluşturduğu basıncın bulunmasında denklem (4.54) ile verilen ifadeye Blevins'in yer değiştirme için seçtiği $V(\theta)$ ve $W(\theta)$ fonksiyonları uygulanmıştır. Gerekli olan işlem adımlarının ardından denklem (4.55) ile verilen basıncın analitik ifadesine ulaşılmıştır.

Bundan sonraki yapılacak çalışmalarda farklı sınır şartlarına sahip plakaların veya kabukların titreşimi incelenebilir. Plaka üzerinde belirli bir geometriye sahip delik veya çatlakın titreşim üzerindeki etkisi araştırılabilir. İlerleyen çalışmalarda akışın türbülanslı olduğu başka bir problem çözülebilir. Akışın potansiyelli olduğu ve plaka veya kabuğun kalınlığının eni boyunca değişken olması durumu için titreşim hareketi incelenebilir.

KAYNAKLAR

- [1]. Eloy, C., 2007, Flutter of a rectangular plate, *Journal of fluids and structures* 23 (2007), 904-919.
- [2]. Tubaldi, E., 2014, Non-linear vibrations and stability of a periodically supported rectangular plate in axial flow, *International journal of non-linear mechanics*, 66 (2014), 54-65.
- [3]. Dowell, E.H., 1966, Flutter of infinitely long plates and shells part I: plate, *AIAA Journal*, 4 (8), 1370-1377.
- [4]. Vedeneev, V.V., 2012, Panel flutter at low supersonic speeds, *Journal of fluids and structures*, 29 (2012), 79-96.
- [5]. Warburton, G.B., 1954, The vibration of rectangular plates, *Proceeding of institution of mechanical engineers*, 168 (1), 371-384.
- [6]. Soedel, W., 1973, A natural frequency analogy between spherically curved panels and flat plates, *Journal of sound and vibration*, 29 (4), 457-461.
- [7]. Mei, G., 2012, Numerical analysis of panel flutter on inertial manifolds with delay, *Journal of computational and nonlinear dynamics*, 8 (2), 1-11.
- [8]. Yao, G., 2015, Nonlinear vibration of a two-dimensional composite laminated plate in subsonic air flow, *Journal of vibration and control*, 21 (4), 662-669.
- [9]. Xing, Y., 2009, New exact solutions for free vibrations of rectangular thin plates by symplectic dual method, *Acta mechanica sinica*, 25 (2009), 265-270.
- [10]. Webster, J.J., 1968, Free vibration of rectangular curved panels, *International journal of mechanical sciences*, 10 (7), 571-582.
- [11]. Yadykin, Y., 2003, The added mass of a flexible plate oscillating in a fluid, *Journal of fluids and structures*, 17 (2003), 115-123.
- [12]. Pretlove, A.J., 1965, Note on the virtual mass for a panel in an infinite baffle, *Journal of the acoustical society of america*, 38 (2), 266-270.
- [13]. Minami, H., 1998, Added mass of a membrane vibrating at finite amplitude, *Journal of fluids and structures*, 12, 919-932.
- [14]. Fung Y.C., 1963, Some recent contributions to panel flutter research, *AIAA Journal*, 1 (4), 898-909.
- [15]. Dowell, E.H., 1968, Theoretical-experimental correlation of of plate flutter boundaries at low supersonic speeds , *AIAA Journal*, 6 (9), 1810-1811.

- [16]. Uzal, E., 2010, Dynamic response of a circular plate to a moving load, *Acta mechanica*, 210 (3-4), 351-359.
- [17]. Epstein R.J., 1995, Flutter of an infinitely long panel in a duct, *AIAA Journal*, 33 (1), 109-115.
- [18]. Körbahti, B., 2004, The flutter analysis of an infinitely long orthotropic panel in a rectangular duct, *Aircraft engineering and aerospace technology*, 76 (6), 584-591.
- [19]. Uzal, E., 2010, Vibration control of an elastic strip by a singular force, *Indian academy of sciences, sadhana*, 35 (2), 233-240.
- [20]. Liew, K.M., 1995, Research on thick plate vibration: a literature survey, *Journal of sound and vibration*, 180 (1), 163-176.
- [21]. Chakravorty, D., 1995, On the free vibration of shallow shells, *Journal of sound and vibration*, 185 (4), 673-684.
- [22]. Li, X., 2006, A new approach for free vibration analysis of thin circular cylindrical shell, *Journal of sound and vibration*, 296 (1-2), 91-98.
- [23]. Leissa, A.W., 1971, Curvature effects on shallow shell vibrations, *Journal of sound and vibration*, 16 (2), 173-187.
- [24]. Leissa, A.W., 1984, Vibrations of completely free shallow shells of rectangular planform, *Journal of sound and vibration*, 96 (2), 207-218.
- [25]. Tedesco, J.W., 1987, Free vibration analysis of circular cylindrical shells, *Computers and structures*, 25 (5), 677-685.
- [26]. Forsberg, K., 1964, Influence of boundary conditions on the modal characteristics of thin cylindrical shells, *AIAA Journal*, 2 (12), 2150-2157.
- [27]. Rougui, M., 2007, Geometrically non-linear free and forced vibrations of simply supported circular cylindrical shells: A semi-analytical approach, *International journal of non-linear mechanics*, 42 (9), 1102-1115.
- [28]. Trotsenko, Y.V., 2006, Frequencies and modes of vibration of a cylindrical shell with attached rigid body, *Journal of sound and vibration*, 292 (3-5), 535-551.
- [29]. Mizusawa, T., 1988, Application of spline strip method to analyse vibration of open cylindrical shells, *International Journal for numerical Methods in Engineering*, 26 (3), 663-676.
- [30]. Zhang, X.M., 2001, Vibration analysis of thin cylindrical shells using wave propagation approach, *Journal of sound and vibration*, 239 (3), 397-403.
- [31]. Rinehart, S.A., 1972, Vibration of simply supported cylindrical shells with longitudinal stiffener, *Journal of sound and vibration*, 24 (2), 151-163.

- [32]. Farshidianfar, A., 2011, Vibration analysis of long cylindrical shells using acoustical excitation, *Journal of sound and vibration*, 330 (14), 3381-3399.
- [33]. Lim, C.W., 1998, Vibration of open cylindrical shells: A three-dimensional elasticity approach, *The journal of the acoustical society of america*, 104, 1436-1443.
- [34]. Singh, A.V., 2005, Free vibration of open circular cylindrical composite shells with point supports, *Journal of aerospace engineering*, 18 (2), 120-128.
- [35]. Xie, K., 2017, Free and forced vibration analysis of ring-stiffened conical–cylindrical–spherical shells through a semi-analytic method, *Journal of vibration and acoustic* , 139 (3), 031001-1-16.
- [36]. Anooshiravan, F., 2012, Free vibration analysis of circular cylindrical shells: comparison of different shell theories, *International journal of mechanics and applications*, 2 (5), 74-80.
- [37]. Ohga, M., 1995, Natural frequencies and modes of open cylindrical shells with a circumferential thickness taper, *Journal of sound and vibration*, 183 (1), 143-156.
- [38]. Karagiozis, K.N., 2008, Nonlinear stability of cylindrical shells subjected to axial flow: theory and experiments, *Journal of sound and vibration*, 309 (3-5), 637-676.
- [39]. Amabili, M., 2003, Review of studies on geometrically nonlinear vibrations and dynamics of circular cylindrical shells and panels, with and without fluid-structure interaction, *Applied mechanics reviews*, 56 (4), 349-381.
- [40]. Liew, K.M., 1997, Vibration of shallow shells: a review with bibliography, *Applied mechanics reviews*, 50 (8), 431-444.
- [41]. Yao, X., 2016, Exact free vibration analysis of open circular cylindrical shells by the method of reverberation-ray matrix, *Journal of Zhejiang University-SCIENCE A (Applied Physics & Engineering)*, 17 (4), 295-316.
- [42]. Bakioğlu, M., 2011, *Sayısal analiz*, 2.baskı., Birsen yayınevi., İstanbul, ISBN: 978-975-511-353-3.
- [43]. Leissa, A.W., 1973, *Vibration of Shells*, 1st ed., Scientific and Technical Information Office, National Aeronautics and Space Administration, Washington, D.C. USA Library of Congress Catalogue Card Number 77-186367.
- [44]. Çıray, C., 2010, *Akışkanlar mekaniğine giriş (mühendislik yaklaşımı) ikinci kitap*, 1.baskı., Odtü yayıncılık., Ankara, ISBN: 978-9944-344-88-3.
- [45]. Ackyord, J.A.K., 2011, *Early developments of modern aerodynamics*, Chapter 9, Butterworth-heinemann., Oxford, ISBN: 0 7506 5133 4, (77-84).
- [46]. Yüksel, Y., 2013, *İleri akışkanlar mekaniği*, 1.baskı., Beta basım yayım dağıtım a.ş., İstanbul, ISBN: 978-605-836-3.

- [47]. Blevins, R.D., 2016, *Formulas for dynamics, acoustics and vibration*, 1st ed., John wiley & sons ltd., U.K. , ISBN: 978-1-119-03811-5.
- [48]. Duchateau, P., 2011, *Schaum's outline of partial differential equations*, 3rd ed., McGraw hill inc., USA, ISBN: 978-0-07-175618-1.
- [49]. Bracewell R.N., 2000, *The fourier transform and its applications*, 3rd ed., McGraw hill inc., Singapore, ISBN: 0-07-303938-1.
- [50]. Arfken, G., 1985, *Mathematical method for physicists*, 3rd ed., Academic press inc., USA ISBN: 0-12-059820-5.
- [51]. Currie, I.G., 1993, *Fundamental mechanics of fluids*, 2nd ed., McGraw hill inc., Singapore, ISBN: 0-07113242-2.
- [52]. Kraus, H., 1967, *Thin elastic shells*, 1st ed., John wiley & sons ltd., USA, Library of Congress Catalogue Card Number: 67-23328.

EKLER

EK 1. Laplace denkleminin analitik çözümü

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 \quad 0 < x < 1, \quad 0 < y < 1$$

$$\begin{aligned} u(x, 0) &= 0 \\ u(x, 1) &= 0 \\ u(0, y) &= 1 \\ u(1, y) &= y \end{aligned} \tag{6.1}$$

şeklinde verilen diferansiyel denklemin genel çözümü değişkenlere ayırma yöntemi ile

$$u(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} [a_n e^{n\pi x} + b_n e^{-n\pi x}] \sin(n\pi y) \tag{6.2}$$

olarak bulunur. (6.2) ile verilen çözüme (6.1) deki son iki sınır şartı uygulanırsa

$$u(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} [a_n + b_n] \sin(n\pi y) = 1 \tag{6.3}$$

$$u(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} [a_n e^{n\pi} + b_n e^{-n\pi}] \sin(n\pi y) = y \tag{6.4}$$

(6.3) ve (6.4) ifadelerinin her iki tarafı $\sin(m\pi y)$ ile çarpılıp 0 dan 1 e kadar y ye göre integrali alınır ve $n \rightarrow m$ değişirmesi yapılırsa

$$\frac{1}{2}[a_m + b_m] = \int_0^1 \sin(m\pi y) dy = -\frac{\cos(m\pi y)}{m\pi} \Big|_0^1 = \frac{1 - (-1)^m}{m\pi} \tag{6.5}$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}[a_m e^{m\pi} + b_m e^{-m\pi}] &= \int_0^1 y \sin(m\pi y) dy = \left[-y \frac{\cos(m\pi y)}{m\pi} + \frac{\sin(m\pi y)}{m^2 \pi^2} \right] \Big|_0^1 \\ &= -\frac{\cos(m\pi)}{m\pi} = \frac{-(-1)^m}{m\pi} \end{aligned} \tag{6.6}$$

$m \rightarrow n$ değişirmesi yapılarak aşağıdaki denklem sistemine ulaşılır.

EK 1(devam):

$$\begin{aligned} [a_n + b_n] &= \frac{2(1 - (-1)^n)}{n\pi} \\ [a_n e^{n\pi} + b_n e^{-n\pi}] &= \frac{-2(-1)^n}{n\pi} \end{aligned} \quad (6.7)$$

denklem (6.7) de verilen denklem sistemi çözümlür.

$$a_n = \frac{-2[1 - (-1)^n + (-1)^n e^{n\pi}]}{n\pi(e^{2n\pi} - 1)} \quad (6.8)$$

$$b_n = \frac{-2e^{n\pi}[-(-1)^n - e^{n\pi} + (-1)^n e^{n\pi}]}{n\pi(e^{2n\pi} - 1)} \quad (6.9)$$

Bulunan a_n ve b_n katsayıları denklem (6.2) de yerine yazılarak aranan çözüm bulunacaktır.

$$\begin{aligned} u(x, y) &= \left[\sum_{n=1}^{\infty} \frac{-2[1 - (-1)^n + (-1)^n e^{n\pi}]}{n\pi(e^{2n\pi} - 1)} e^{n\pi x} \right] \sin(n\pi y) \\ &+ \left[\sum_{n=1}^{\infty} \frac{-2e^{n\pi}[-(-1)^n - e^{n\pi} + (-1)^n e^{n\pi}]}{n\pi(e^{2n\pi} - 1)} e^{-n\pi x} \right] \sin(n\pi y) \end{aligned} \quad (6.10)$$

bulunur.

EK 2. Lineerleştirilmiş Bernoulli denkleminin çıkarılması

Daimi olmayan (non-steady) akışa ait Bernoulli denklemi aşağıdaki şekildedir. [51]

$$P + \frac{1}{2} \rho V^2 + \rho \frac{\partial \varphi}{\partial t} = F(t) \quad (6.11)$$

(6.11) ifadesindeki terimlere pertürbasyon uygulayalım ε pertürbasyon parametresi olmak üzere

$$\begin{aligned} P &= P_0 + \varepsilon P_1 + \varepsilon^2 P_2 + \dots \\ \varphi &= \varphi_0 + \varepsilon \varphi_1 + \varepsilon^2 \varphi_2 + \dots \\ V &= \nabla \varphi_0 + \varepsilon \nabla \varphi_1 + \varepsilon^2 \nabla \varphi_2 + \dots = V_0 + \varepsilon V_1 + \varepsilon^2 V_2 + \dots \end{aligned} \quad (6.12)$$

(6.12) nolu denklem (6.11) denkleminde yazılarak ε nun ikinci ve daha yüksek dereceden kuvvetleri ihmal edilirse

$$P_0 + \varepsilon P_1 + \frac{1}{2} \rho (V_0 + \varepsilon V_1)^2 + \rho \left(\frac{\partial \varphi_0}{\partial t} + \varepsilon \frac{\partial \varphi_1}{\partial t} \right) = F(t) \quad (6.13)$$

$$\left(P_0 + \frac{1}{2} \rho V_0^2 + \rho \frac{\partial \varphi_0}{\partial t} \right) + \varepsilon \left(P_1 + \rho V_0 V_1 + \rho \frac{\partial \varphi_1}{\partial t} \right) + \frac{1}{2} \rho \varepsilon^2 V_1^2 = F(t) \quad (6.14)$$

(6.14) denklemindeki ε^2 nin olduğu terim atılır ve denklemin en solundaki parantez içerisindeki ifadenin $F(t)$ olduğu göz önüne alınırsa denklemin son hali

$$\varepsilon \left(P_1 + \rho V_0 V_1 + \rho \frac{\partial \varphi_1}{\partial t} \right) = 0 \quad (6.15)$$

Yukarıdaki denklemin $\varepsilon \neq 0$ için sağlanabilmesi için

$$P_1 + \rho V_0 V_1 + \rho \frac{\partial \varphi_1}{\partial t} = 0 \quad (6.16)$$

(6.16) denklemindeki basınç terimi aşağıdaki gibi yazılabilir.

$$P_1 = -\rho \left[V_0 V_1 + \frac{\partial \varphi_1}{\partial t} \right] \quad (6.17)$$

EK 2(devam):

Denklem (6.18) ile verilen değiştirmeler yapılırsa

$$P_1 \rightarrow P \quad V_0 \rightarrow U \quad \frac{\partial \varphi_1}{\partial t} \rightarrow \frac{\partial \varphi}{\partial t} \quad V_1 \rightarrow \frac{\partial \varphi_1}{\partial x} \quad (6.18)$$

(6.19) denklemi ile verilen Lineerleştirilmiş Bernoulli denklemi bulunur

$$P = -\rho \left[\frac{\partial \varphi}{\partial t} + U \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right] \quad (6.19)$$



EK 3. Pertürbe olmuş silindir için çözüm

$\psi_1(r, \theta) = R(r) \phi(\theta)$ formundaki çözüm silindirik koordinatlarda Laplace denkleminde yazılırsa

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \psi_1}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \psi_1}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \psi_1}{\partial \theta^2} &= 0 \\ \frac{r^2 R'' + r R'}{R} + \frac{\phi''}{\phi} &= 0 \end{aligned} \quad (6.20)$$

olacaktır. (6.20) nolu denklem λ bir reel sayı olmak üzere

$$\frac{r^2 R'' + r R'}{R} = \lambda \quad \text{dan} \quad r^2 R'' + r R' - \lambda R = 0 \quad (6.21)$$

$$\frac{\phi''}{\phi} = -\lambda \quad \text{dan} \quad \phi'' + \lambda \phi = 0 \quad (6.22)$$

çözümün tek değerli olabilmesi için $\psi_1(r, \theta + 2\pi) = \psi_1(r, \theta)$ şartı sağlanmalıdır. (6.22) denklemini sınır şartları yazılarak çözülür

$$\begin{aligned} \phi'' + \lambda \phi &= 0 \\ \phi(0) &= \phi(2\pi) = 0 \\ \phi'(0) &= \phi'(2\pi) = 0 \end{aligned} \quad (6.23)$$

(6.23) ün çözümü için

$$\begin{aligned} \lambda < 0 \quad \text{iken} \quad \phi(\theta) &= 0 \\ \lambda = 0 \quad \text{iken} \quad \phi(\theta) &= C_2 \\ \lambda > 0 \quad \text{iken} \quad \phi(\theta) &= C_5 \cos(\sqrt{\lambda} \theta) + C_3 \sin(\sqrt{\lambda} \theta) \quad \text{ve} \quad \lambda = n^2 \quad \text{olarak} \\ \phi(\theta) &= C_5 \cos n\theta + C_3 \sin n\theta \quad n = 1, 2, 3, \dots \end{aligned} \quad (6.24)$$

Aranan çözüm $\lambda > 0$ durumudur. (6.21) denklemini çözülürse

$$r^2 \frac{d^2 R}{dr^2} + r \frac{dR}{dr} - n^2 R = 0 \quad (6.25)$$

EK 3(devam):

Euler diferansiyel denkleminin ulaşılır ve çözümü

$$R(r) = \begin{cases} C_7 r^n + C_8 r^{-n} & , \quad n \neq 0 \text{ ise} \\ C_3 \ln r + C_4 & , \quad n = 0 \text{ ise} \end{cases} \quad (6.26)$$

(6.24) ve (6.26) nolu denklemler akım fonksiyonunda yazılırsa

$$\psi_1(r, \theta) = \begin{cases} [C_7 r^n + C_8 r^{-n}] [C_5 \cos n\theta + C_6 \sin n\theta] & n=1,2,3,\dots \\ C_2 [C_3 \ln r + C_4] & n=0 \text{ ise} \end{cases} \quad (6.27)$$

(6.27) verilen çözümün sınırlı olabilmesi için $\lim_{r \rightarrow \infty} |\psi_1(r, \theta)| < M$ (M bir reel sayı) olmalıdır. Buna göre

$$\left. \begin{array}{l} C_7 r^n = 0 \text{ ve } C_2 C_3 \ln r = 0 \text{ olacaktır} \\ C_8 C_5 = C_9 \\ C_8 C_6 = C_{10} \end{array} \right\} \text{ olsun} \quad (6.28)$$

(6.28) ile verilen eşitlikler (6.27) denkleminde yazılırsa

$$\psi_1(r, \theta) = \begin{cases} C_2 C_4 & , \quad n=0 \text{ ise} \\ r^{-n} [C_9 \cos n\theta + C_{10} \sin n\theta] & n=1,2,3,\dots \end{cases} \quad (6.29)$$

$C_2 C_4 = \alpha_0$ olsun buna göre akım fonksiyonunun formel çözümü

$$\psi_1(r, \theta) = \alpha_0 + \sum_{n=1}^{\infty} r^{-n} [\alpha_n \cos n\theta + \beta_n \sin n\theta] \quad (6.30)$$

(6.30) nolu denklem sınır şartlarını sağlamalıdır. Hesaplamalarda karşılaşılan δ Dirac delta fonksiyonunu göstermek üzere

EK 3(devam):

$$\begin{aligned}
 \psi_1(R, \theta) = f(\theta) &= \alpha_0 + \sum_{n=1}^{\infty} R^{-n} [\alpha_n \cos n\theta + \beta_n \sin n\theta] \\
 \int_0^{2\pi} f(\theta) \cos m\theta d\theta &= \alpha_0 \int_0^{2\pi} \cos m\theta d\theta + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{R^n} \alpha_n \underbrace{\int_0^{2\pi} \cos n\theta \cos m\theta d\theta}_{\pi \cdot \delta_{nm}} + \dots \\
 &+ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{R^n} \beta_n \underbrace{\int_0^{2\pi} \sin n\theta \cos m\theta d\theta}_{\substack{n=m \rightarrow 0 \\ n \neq m \rightarrow 0}}
 \end{aligned} \tag{6.31}$$

α_n katsayısı hesaplanırsa

$$\begin{aligned}
 \int_0^{2\pi} f(\theta) \cos m\theta d\theta &= \alpha_0 \int_0^{2\pi} \cos m\theta d\theta + \frac{1}{R^m} \alpha_m \pi \\
 m \neq 0 \rightarrow \alpha_m &= \frac{1}{\pi R^{-m}} \int_0^{2\pi} f(\theta) \cos m\theta d\theta \quad (m=1, 2, 3, \dots) \\
 m = 0 \rightarrow \alpha_0 &= \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(\theta) d\theta
 \end{aligned} \tag{6.32}$$

$$\begin{aligned}
 \int_0^{2\pi} f(\theta) \sin m\theta d\theta &= \alpha_0 \int_0^{2\pi} \sin m\theta d\theta + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{R^n} \alpha_n \underbrace{\int_0^{2\pi} \cos n\theta \sin m\theta d\theta}_{\substack{n=m \rightarrow 0 \\ n \neq m \rightarrow 0}} + \dots \\
 &+ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{R^n} \beta_n \underbrace{\int_0^{2\pi} \sin n\theta \sin m\theta d\theta}_{\pi \cdot \delta_{nm}}
 \end{aligned} \tag{6.33}$$

EK 3(devam):

β_n katsayısı hesaplanırsa

$$\int_0^{2\pi} f(\theta) \sin m\theta d\theta = \alpha_0 \int_0^{2\pi} \sin m\theta d\theta + \frac{1}{R^m} \beta_m \pi$$

$$m \neq 0 \rightarrow \beta_m = \frac{1}{\pi R^{-m}} \int_0^{2\pi} f(\theta) \sin m\theta d\theta \quad (m=1,2,3,\dots)$$
(6.34)

(6.32) ve (6.34) nolu denklemler (6.30) nolu denklemde yazılır ve $m \rightarrow n$ yapılırsa aşağıdaki denkleme ulaşılır.

$$\psi_1(r, \theta) = \frac{\alpha_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{R}{r} \right)^n [\alpha_n \cos n\theta + \beta_n \sin n\theta]$$

$$\alpha_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(\theta) \cos n\theta d\theta$$

$$\beta_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(\theta) \sin n\theta d\theta$$

$$\alpha_0 = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(\theta) d\theta$$
(6.35)

EK 4. Dirac delta fonksiyonun özellikleri

Fourier serisi denklem (6.36) ile verilir. [49]

$$\begin{aligned}
 f(x) &= \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin nx \\
 a_n &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nx \, dx \\
 b_n &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin nx \, dx
 \end{aligned} \tag{6.36}$$

$f(x) = \delta(x - a)$ şeklinde bir Dirac delta fonksiyon göz önüne alınırsa

$$\begin{aligned}
 \delta(x - a) &= \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin nx \\
 a_0 &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \delta(x - a) \, dx = \frac{1}{\pi} H(x - a) = \frac{1}{\pi} \\
 a_n &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \delta(x - a) \cos nx \, dx = \frac{1}{\pi} \cos na \\
 b_n &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin nx \, dx = \frac{1}{\pi} \sin na
 \end{aligned} \tag{6.37}$$

(6.37) denkleminde geçen $\delta(x)$ ve $H(x)$ aşağıdaki özelliklere sahiplerdir.

$$\begin{aligned}
 \delta(x) &= \frac{dH(x)}{dx} \\
 H(x - a) &= \begin{cases} 1 & , x > a \\ 0 & , x < a \end{cases}
 \end{aligned} \tag{6.38}$$

Gerekli düzenlemeler yapılarak

$$\delta(x - a) = \frac{1}{2\pi} + \frac{1}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \cos nx \cos na + \frac{1}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \sin nx \sin na = \frac{1}{2\pi} + \frac{1}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \cos[n(x - a)] \tag{6.39}$$

EK 4(devam):

(6.39) nolu denklemde $x \rightarrow \theta$ ve $a \rightarrow \xi$ yapılarak

$$\sum_{n=1}^{\infty} \cos[n(\theta - \xi)] = -\frac{1}{2} + \pi \delta(\theta - \xi) \quad (6.40)$$

Denklemine ulaşılır ve bu (4.52) deki ifadedir.



EK 5. Silindirik kabuğun serbest titreşiminin özdeğerleri hesabı

Donnel ince kabuk teorisine göre Elastik kabuğun hareket denklemleri aşağıdaki gibi verilir. [43],[44],[52]

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{1-\nu}{2R^2} \frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} - \frac{(1-\nu^2)}{E} \rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + \frac{1+\nu}{2R} \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial \theta} + \frac{\nu}{R} \frac{\partial w}{\partial x} &= -\frac{(1-\nu^2)}{Eh} q_x \\
 \frac{1+\nu}{2R} \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial \theta} + \frac{1-\nu}{2} \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{1}{R^2} \frac{\partial^2 v}{\partial \theta^2} - \frac{(1-\nu^2)}{E} \rho \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} + \frac{1}{R^2} \frac{\partial w}{\partial \theta} &= -\frac{(1-\nu^2)}{Eh} q_y \\
 -\frac{\nu}{R} \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{1}{R^2} \frac{\partial v}{\partial \theta} - \frac{\nu}{R^2} - R^2 k (\nabla^4 w) - \frac{(1-\nu^2)}{E} \rho \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} &= -\frac{(1-\nu^2)}{Eh} p \\
 k &= \frac{h^2}{12R^2}
 \end{aligned} \tag{6.41}$$

İncelenen problemde kabuk x doğrultusunda sonsuz uzun olduğundan bu durumda içerisinde u' yu barındıran terimler düşer ve $\frac{\partial(\dots)}{\partial x}$ şeklindeki kısmi türevler sıfır olur. Serbest titreşim durumu göz önüne alındığından $q_x = q_y = p = 0$ olacaktır. Denklemler bu bilgilere göre yeniden düzenlenirse.

$$\begin{aligned}
 \frac{1}{R^2} \frac{\partial^2 v}{\partial \theta^2} + \frac{1}{R^2} \frac{\partial w}{\partial \theta} - \frac{(1-\nu^2)}{E} \rho \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} &= 0 \\
 \frac{R^2 h^2}{12R^2} \left(\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + \frac{2}{R^2} \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial \theta^2} + \frac{1}{R^4} \frac{\partial^4 w}{\partial \theta^4} \right) + \frac{1}{R^2} \frac{\partial v}{\partial \theta} + \frac{w}{R^2} + \frac{(1-\nu^2)}{E} \rho \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} &= p
 \end{aligned} \tag{6.42}$$

şekline gelir. (6.42) nolu denklemleri $-R^2$ ile çarpılır ve aşağıdaki yer değiştirmeler denklemlere yazılarak düzenlenirse

$$\begin{aligned}
 v(\theta, t) &= B \sin \beta \theta \cos \omega t \\
 w(\theta, t) &= C \cos \beta \theta \cos \omega t
 \end{aligned} \tag{6.43}$$

$$\begin{aligned}
 B \beta^2 + C \beta - \rho \frac{(1-\nu^2) R^2}{E} \omega^2 B &= 0 \\
 -\frac{h^2}{12R^2} \beta^4 C - B \beta - C + \rho \frac{(1-\nu^2) R^2}{E} \omega^2 C &= 0
 \end{aligned} \tag{6.44}$$

EK 5(devam):

$\lambda^2 = \rho \frac{(1-\nu^2)R^2}{E} \omega^2$ ve $k = \frac{h^2}{12R^2}$ olmak üzere (6.44) denklemi basit bir şekilde yazılabilir.

$$\begin{aligned} (\beta^2 - \lambda^2)B + \beta C &= 0 \\ \beta B + (k\beta^4 + 1 - \lambda^2)C &= 0 \end{aligned} \quad (6.45)$$

(6.45) ile verilen denklemleri matris formu

$$\begin{bmatrix} \beta^2 - \lambda^2 & \beta \\ \beta & k\beta^4 + 1 - \lambda^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} B \\ C \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (6.46)$$

olur. (6.46) denkleminde $B, C \neq 0$ şeklinde çözümler için katsayılar matrisinin determinantı 0 olmalıdır.

$$\begin{aligned} (\beta^2 - \lambda^2)(k\beta^4 + 1 - \lambda^2) - \beta^2 &= 0 \\ \lambda^4 - \lambda^2(\beta^2 + k\beta^4 + 1) + k\beta^6 &= 0 \end{aligned} \quad (6.47)$$

(6.47) denkleminde $k = \frac{h^2}{12R^2}$ ve $\beta = 1, 2, 3, \dots$ olacaktır. $h = 0.0040$ ve $R = 1$ alınarak λ

lar hesaplanır. Bulunan değerler (6.48) ile verilen denkleme konularak serbest titreşime ait özdeğerler hesaplanabilir.

$$\omega = \lambda \sqrt{\frac{E}{\rho(1-\nu^2)}} \quad (6.48)$$

(6.48) denkleminde kullanılan diğer parametreler

$$\begin{aligned} E &= 70.10^9 \text{ Pa} && \text{(Elastisite Modülü)} \\ \rho &= 2720 \text{ kg/m}^3 && \text{(Kabuğun Yoğunluğu)} \\ \nu &= 0.30 && \text{(Poisson Oranı)} \end{aligned}$$

EK 6. Serbest titreşimde sınır şartlarını sağlayan fonksiyonların bulunması

Kabuğun hareket denklemleri aşağıdaki gibidir.

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 v}{\partial \theta^2} + \frac{\partial w}{\partial \theta} - \frac{(1-\nu^2)}{E} \rho_k \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} &= 0 \\ \frac{h^2}{12} \left(\frac{\partial^4 w}{\partial \theta^4} \right) + w + \frac{\partial v}{\partial \theta} + \frac{(1-\nu^2)}{E} \rho_k \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} &= 0 \end{aligned} \quad (6.49)$$

(6.49) denklemindeki yer değiştirmeler için aşağıdaki eşitlikler kullanılabilir.

$$\begin{aligned} v(\theta, t) &= V(\theta) e^{i\omega t} \\ w(\theta, t) &= W(\theta) e^{i\omega t} \end{aligned} \quad (6.50)$$

(6.49) denkleminin homojen çözümü

$$\begin{aligned} V(\theta) &= \sum_{n=1}^6 A_n e^{r_n \theta} \\ W(\theta) &= \sum_{n=1}^6 B_n e^{r_n \theta} \end{aligned} \quad (6.51)$$

ile verilir. Homojen çözüm için yapılan hesaplamalarda r_n ler için aşağıdaki eşitlikler bulunmuştur.

$$\begin{aligned} r_1 &= a + ib_1 & r_3 &= -a + ib_1 & r_5 &= ib_2 \\ r_2 &= a - ib_1 & r_4 &= -a - ib_1 & r_6 &= -ib_2 \end{aligned} \quad (6.52)$$

(6.52) denklemindeki eşitlikler (6.51) denkleminde yerine yazılırsa

$$\begin{aligned} V(\theta) &= A_1 e^{(a+ib_1)\theta} + A_2 e^{(a-ib_1)\theta} + A_3 e^{(-a+ib_1)\theta} + A_4 e^{(-a-ib_1)\theta} + A_5 e^{(ib_2)\theta} + A_6 e^{(-ib_2)\theta} \\ W(\theta) &= B_1 e^{(a+ib_1)\theta} + B_2 e^{(a-ib_1)\theta} + B_3 e^{(-a+ib_1)\theta} + B_4 e^{(-a-ib_1)\theta} + B_5 e^{(ib_2)\theta} + B_6 e^{(-ib_2)\theta} \end{aligned} \quad (6.53)$$

(6.53) denklemini açıkça yazılarak

EK 6(devam):

$$\begin{aligned}
V(\theta) &= e^{a\theta} [A_1 (\cos b_1 \theta + i \sin b_1 \theta) + A_2 (\cos b_1 \theta - i \sin b_1 \theta)] \\
&+ e^{-a\theta} [A_3 (\cos b_1 \theta + i \sin b_1 \theta) + A_4 (\cos b_1 \theta - i \sin b_1 \theta)] + A_5 (\cos b_2 \theta + i \sin b_2 \theta) \\
&+ A_6 (\cos b_2 \theta - i \sin b_2 \theta)
\end{aligned} \tag{6.54}$$

$$\begin{aligned}
W(\theta) &= e^{a\theta} [B_1 (\cos b_1 \theta + i \sin b_1 \theta) + B_2 (\cos b_1 \theta - i \sin b_1 \theta)] \\
&+ e^{-a\theta} [B_3 (\cos b_1 \theta + i \sin b_1 \theta) + B_4 (\cos b_1 \theta - i \sin b_1 \theta)] + B_5 (\cos b_2 \theta + i \sin b_2 \theta) \\
&+ B_6 (\cos b_2 \theta - i \sin b_2 \theta)
\end{aligned}$$

düzenlenirse

$$\begin{aligned}
V(\theta) &= e^{a\theta} [(A_1 + A_2) \cos b_1 \theta + i (A_1 - A_2) \sin b_1 \theta] \\
&+ e^{-a\theta} [(A_3 + A_4) \cos b_1 \theta + i (A_3 - A_4) \sin b_1 \theta] + (A_5 + A_6) \cos b_2 \theta + i (A_5 - A_6) \sin b_2 \theta
\end{aligned} \tag{6.55}$$

$$\begin{aligned}
W(\theta) &= e^{a\theta} [(B_1 + B_2) \cos b_1 \theta + i (B_1 - B_2) \sin b_1 \theta] \\
&+ e^{-a\theta} [(B_3 + B_4) \cos b_1 \theta + i (B_3 - B_4) \sin b_1 \theta] + (B_5 + B_6) \cos b_2 \theta + i (B_5 - B_6) \sin b_2 \theta
\end{aligned} \tag{6.56}$$

(6.55) ve (6.56) ile verilen denklemler bulunur. Bu denklemler göz önüne alınarak $\frac{\partial W}{\partial \theta}$ ve $\frac{\partial^3 W}{\partial \theta^3}$ ifadeleri de hesaplanırsa

$$\begin{aligned}
\frac{\partial W}{\partial \theta} &= a e^{a\theta} [(B_1 + B_2) \cos b_1 \theta + i (B_1 - B_2) \sin b_1 \theta] + \\
&+ e^{a\theta} [-(B_1 + B_2) b_1 \sin b_1 \theta + i (B_1 - B_2) b_1 \cos b_1 \theta] \\
&- a e^{-a\theta} [(B_3 + B_4) \cos b_1 \theta + i (B_3 - B_4) \sin b_1 \theta] + \\
&+ e^{-a\theta} [-(B_3 + B_4) b_1 \sin b_1 \theta + i (B_3 - B_4) b_1 \cos b_1 \theta] \\
&- (B_5 + B_6) b_2 \sin b_2 \theta + i (B_5 - B_6) b_2 \cos b_2 \theta
\end{aligned} \tag{6.57}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^3 W}{\partial \theta^3} &= [B_1 (a + i b_1)^3 + B_2 (a - i b_1)^3] e^{a\theta} [\cos b_1 \theta + i \sin b_1 \theta] \\
&+ [B_3 (-a + i b_1)^3 + B_4 (-a - i b_1)^3] e^{-a\theta} [\cos b_1 \theta + i \sin b_1 \theta] \\
&+ [B_5 (i b_2)^3 + B_6 (i b_2)^3] [\cos b_2 \theta + i \sin b_2 \theta]
\end{aligned} \tag{6.58}$$

(6.55) , (6.57) , (6.58) denklemleri problemin aşağıdaki sınır şartlarını sağlamalıdır.

$$V(0) = V(\pi) \tag{6.59}$$

$$\frac{\partial W}{\partial \theta}(0) = \frac{\partial W}{\partial \theta}(\pi) = 0 \tag{6.60}$$

$$\frac{\partial^3 W}{\partial \theta^3}(0) = \frac{\partial^3 W}{\partial \theta^3}(\pi) = 0 \tag{6.61}$$

EK 6(devam):

(6.59) eşitliğinden aşağıdaki denklemlere ulaşılır

$$\begin{aligned}
A_1 + A_2 = 0 & \quad -(A_1 + A_2) = 0 \\
A_3 + A_4 = 0 & \quad -(A_3 + A_4) = 0 \\
A_5 + A_6 = 0 & \quad -(A_5 + A_6) = 0
\end{aligned} \tag{6.62}$$

(6.60) eşitliğinden aşağıdaki denklemlere ulaşılır

$$\begin{aligned}
B_1 + B_2 = 0 & \quad B_3 + B_4 = 0 & \quad B_6 - B_5 = 0 \\
B_1 - B_2 = 0 & \quad B_3 - B_4 = 0
\end{aligned} \tag{6.63}$$

(6.61) eşitliğinden aşağıdaki denklemlere ulaşılır

$$\begin{aligned}
B_1 + B_2 = 0 & \quad -(B_3 + B_4) = 0 & \quad B_6 - B_5 = 0 \\
B_1 - B_2 = 0 & \quad B_3 - B_4 = 0 \\
-(B_1 + B_2) = 0 & \quad B_3 + B_4 = 0 \\
(B_2 - B_1) = 0 & \quad B_4 - B_3 = 0
\end{aligned} \tag{6.64}$$

(6.63) ve (6.64) denklemleri çözümlerse $B_1, B_2, B_3, B_4 \neq 0$ ve $B_5 = B_6$ bulunur. A_n ile B_n arasında aşağıdaki bağıntı vardır.

$$B_n = \frac{-(r_n^2 + k\omega^2)}{r_n} A_n \tag{6.65}$$

(6.65) bağıntısından aşağıdaki eşitlikler yazılabilir.

$$\begin{aligned}
B_1 = \frac{-(r_1^2 + k\omega^2)}{r_1} A_1 = 0 & \quad \rightarrow A_1 = 0 \\
B_2 = \frac{-(r_2^2 + k\omega^2)}{r_2} A_2 = 0 & \quad \rightarrow A_2 = 0 \\
B_3 = \frac{-(r_3^2 + k\omega^2)}{r_3} A_3 = 0 & \quad \rightarrow A_3 = 0 \\
B_4 = \frac{-(r_4^2 + k\omega^2)}{r_4} A_4 = 0 & \quad \rightarrow A_4 = 0 \\
B_5 = \frac{-(r_5^2 + k\omega^2)}{r_5} A_5 & \\
B_6 = \frac{-(r_6^2 + k\omega^2)}{r_6} A_6 &
\end{aligned} \tag{6.66}$$

EK 6(devam):

$B_5, B_6 \neq 0$ şeklindeki çözümlerin varlığı için A_5 ve A_6 sıfırdan farklı olmalıdır. Buradan aşağıdaki eşitlikler yazılabilir.

$$\begin{aligned} A_5 &= -A_6 \\ B_5 &= B_6 \end{aligned} \quad (6.67)$$

(6.55), (6.56) denklemleri ve (6.66) daki eşitlikler göz önüne alınarak yer değiştirmeler aşağıdaki gibi yazılır.

$$\begin{aligned} V(\theta) &= (A_5 + A_6) \cos b_2 \theta + (A_5 - A_6) i \sin b_2 \theta \\ W(\theta) &= (B_5 + B_6) \cos b_2 \theta + (B_5 - B_6) i \sin b_2 \theta \end{aligned} \quad (6.68)$$

$$\begin{aligned} V(\theta) &= -2A_6 i \sin b_2 \theta \\ W(\theta) &= 2B_6 \cos b_2 \theta \end{aligned} \quad (6.69)$$

A_6, B_6 lar ve b_2 ler problemin özdeğeri ω ya bağlı olarak değişecektir. Aşağıda verilen tanımlar kullanılırsa

$$\begin{aligned} -2A_6 i &\rightarrow A_m \\ 2B_6 &\rightarrow B_m \\ b_2 &\rightarrow m \end{aligned} \quad (6.70)$$

yer değiştirmelerin genel formu

$$\begin{aligned} V(\theta) &= A_m \sin m\theta \\ W(\theta) &= B_m \cos m\theta \end{aligned} \quad (6.71)$$

şeklinde olur.

ÖZGEÇMİŞ

Kişisel Bilgiler	
Adı Soyadı	Birkan DURAK
Doğum Yeri	İstanbul
Doğum Tarihi	28.02.1978
Uyruğu	<input checked="" type="checkbox"/> T.C. <input type="checkbox"/> Diğer:
Telefon	05357479055
E-Posta Adresi	birkand@istanbul.edu.tr
Web Adresi	



Eğitim Bilgileri	
Lisans	
Üniversite	İstanbul Üniversitesi
Fakülte	Mühendislik Fakültesi
Bölümü	Makine Mühendisliği
Mezuniyet Yılı	31.10.2002

Yüksek Lisans	
Üniversite	İstanbul Üniversitesi
Enstitü Adı	Fen Bilimleri Enstitüsü
Anabilim Dalı	Makine Mühendisliği
Programı	Makine Mühendisliği
Mezuniyet Tarihi	23.09.2008

Doktora	
Üniversite	İstanbul Üniversitesi
Enstitü Adı	Fen Bilimleri Enstitüsü
Anabilim Dalı	Makine Mühendisliği Anabilim Dalı
Programı	Makine Mühendisliği Programı
Mezuniyet Tarihi	19.06.2018