T.C.
İSTANBUL ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

YÜKSEK LİSANS TEZİ

OLASILIKSAL METRİK UZAYLARDA BAZI TOPOLOJİK ÖZELLİKLER

Sultan BOZKURT

Matematik Anabilim Dalı

Matematik Programı

DANIŞMAN
Doç. Dr. Hülya DURU

II. DANIŞMAN
Dr. Öğr. Ü. Serkan İLTER

Haziran, 2018

İSTANBUL

Bu çalışma 12.06.2018 tarihinde aşağıdaki jüri tarafından Matematik Anabilim Dalı Matematik Programında Yüksek Lisans Tezi olarak kabul edilmiştir.

Tez Jürisi

Doç. Dr. Hülya DURU (Danışman)
İstanbul Üniversitesi
Fen Fakültesi

Prof.Dr. Albert ERKİP
Sabancı Üniversitesi
Doğa Bilimleri Fakültesi

Prof.Dr. Hüseyin ÇAKALLI
Maltepe Üniversitesi
İnsan ve Toplum Bilimleri Fakültesi

Doç.Dr. Kadri Ülaş AKAY
İstanbul Üniversitesi
Fen Fakültesi

Dr.Öğr.Ü. Özkan DEĞER
İstanbul Üniversitesi
Fen Fakültesi

20.04.2016 tarihli resmi gazetede yayımlanan Lisansüstü Eğitim ve Öğretim Yönetmeliğinin 9/2 ve 22/2 maddeleri gereğince; Bu Lisansüstü teze, İstanbul Üniversitesi′nin abonesi olduğu intihal yazılım programı kullanılarak Fen Bilimleri Enstitüsü′nün belirlemiş olduğu ölçütlere uygun rapor alınmıştır.

ÖNSÖZ

Bu çalışma konusunu bana vererek çalışmalarım boyunca yakın ilgi ve yardımlarını esirgemeyen hocalarım, Sayın Doç. Dr. Hülya Duru ve Dr. Öğr. Ü. Serkan İlter'e en içten saygı ve minnetlerimi sunarım.

Tez yazımında kullandığım LaTeX programını bizlere öğreten Sayın Dr. Öğr. Ü. Özkan Değer hocama, haftalık çalışmalarım boyunca benimle birlikte olan sevgili arkadaşım Okan Duman'a, tez çalışmam boyunca bana destek ve yardımcı olan sevgili kardeşim Selami Bozkurt'a, her sıkıntımda yanımda olan yüzümü güldüren dostum Oğuzhan Güngör'e, hayatımın tüm aşamalarında beni yalnız bırakmayan sevgili annem Hanife Bozkurt ve babam Sami Bozkurt'a, en içten teşekkürlerimi sunarım.

Haziran, 2018 Sultan BOZKURT

İÇİNDEKİLER

Sayfa No

SİMGE VE KISALTMA LİSTESİ

Simgeler	**Açıklama**
$\mathbf{P}(X)$	: X Kümesinin Kuvvet Kümesi
$\mathbb{N}$	: Doğal Sayılar Kümesi
$\mathbb{R}$	: Reel Sayılar Kümesi
$\mathbb{Q}$	: Rasyonel Sayılar Kümesi
$B_\varepsilon(x)$	: ε Merkezli x Yarıçaplı Açık Yuvar
$\overline{A}$	: A Kümesinin Kapanışı
$i(A)$	: A Kümesinin İçi
d_L	: Lévy Metrik
Δ	: Soldan Sürekli Dağılım Fonksiyonlarının Kümesi
Δ^+	: Uzaklık Dağılım Fonksiyonlarının Kümesi
$f(x-)$	: f Fonksiyonunun Soldan Limiti
$f(x+)$	: f Fonksiyonunun Sağdan Limiti
$C(F)$	: F Fonksiyonunun Süreklilik Noktalarının Kümesi

ÖZET

YÜKSEK LİSANS TEZİ

OLASILIKSAL METRİK UZAYLARDA BAZI TOPOLOJİK ÖZELLİKLER

Sultan BOZKURT

İstanbul Üniversitesi

Fen Bilimleri Enstitüsü

Matematik Anabilim Dalı

Danışman: Doç. Dr. Hülya DURU

II. Danışman: Dr. Öğr. Ü. Serkan İLTER

Bu tez boyunca, sayılardan ziyade dağılım fonksiyonları tarafından belirlenen noktalar arasındaki uzaklığı esas alan genelleştirilmiş metrik uzaylardan biri ile çalışacağız.

Dağılım fonksiyonları uzayı tanımı verildikten sonra, bu uzay üzerindeki Lévy metriği ve zayıf yakınsaklık topoloji arasındaki bağlantıyı araştırıyoruz.

Daha sonra, dağılım fonksiyonları uzayının alt uzayına odaklanacağız. Bu uzay, destek kümesi genişletilmiş pozitif reel sayılar içinde, $[0,+\infty]$, olan bütün dağılım fonksiyonlarının uzayıdır. Daha sonra, bu alt uzayın maksimal ve minimal elemanları olan bir tam kafes olduğunun ispatını vereceğiz.

Son olarak, bazı temel tanım ve terminolojiyi verdikten sonra olasılıksal metrik uzay tanımını vereceğiz. Daha sonra, olasılıksal metrik uzay üzerinde, bir düzgünlük tarafından belirlenen topolojiyi inceleyeceğiz ve bu topolojinin metriklenebilir olduğunun ispatını vereceğiz. Verdiğimiz ispatlar kaynaklardaki ispatlardan farklı olacaktır.

Haziran 2018, 97 sayfa.

Anahtar kelimeler: olasılıksal metrik uzay, dağılım fonksiyonları, Lévy metriği, düzgün topoloji

SUMMARY

M.Sc. THESIS

SOME TOPOLOGICAL PROPERTIES OF PROBABILISTIC METRIC SPACES

Sultan BOZKURT

İstanbul University

Institute of Graduate Studies in Science and Engineering

Department of Mathematics

Supervisor: Doç. Dr. Hülya DURU

Co-Supervisor: Dr. Öğr. Ü. Serkan İLTER

In this thesis, we study one of the generalizations of metric spaces, in which the distance between points are specified by probability distributions rather than numbers.

After giving the definitions of distribution function space, Lévy metric ,and the natural topological structure on it, namely, the topology of weak convergence, we study the connection among them.

Next, we focus on a subspace of distribution function space. This is the space of all distribution functions whose supports lies in the extended half line $[0, +\infty]$. Then, we present some different proofs of the fact that this subspace is a complete lattice with maximal and minimal elements.

Finally, we present probabilistic metric space after giving some basic definitions and terminology. Then, we investigate the natural topology on a probabilistic metric space determined by a uniformity and give some different proofs of the fact that this topology is metrizable.

June 2018, 97 pages.

Keywords: probabilistic metric space, distribution function, Lévy metric, uniform topology.

1. GİRİŞ

Olasılıksal Metrik Uzay, sayılardan ziyade olasılık yoğunluk fonksiyonları tarafından belirlenen noktalar arasındaki uzaklığı esas alan genelleştirilmiş bir metrik uzaydır. Olasılıksal metrik uzay tanımı K.Menger tarafından 1942 yılında verilmiştir ve daha sonra bu kavram çok sayıda matematikçi tarafından geliştirilmiştir([1], [2], [3], [4]).

İkinci bölümde, kullanılacak olan temel kavramlar ve terminoloji tanıtıldıktan sonra, dağılım fonksiyonları uzayının, Δ, tanımını vereceğiz ve bu uzay üzerinde tanımlı Lévy metriğini, d_L, tanımlayacağız. Bu bölümde, son olarak olasılıksal metrik uzay tanımı ve bu uzayla ilgili terminolojiyi vereceğiz.

Dördüncü bölümde, (Δ, d_L) metrik uzayının kompakt olduğunun ispatını verdikten sonra uzaklık dağılım fonksiyonları uzayının, destek kümesi genişletilmiş pozitif reel eksen, $[0,+\infty]$, olan Δ^+ alt uzayına odaklanacağız. Burada, Δ^+ uzayının maksimal ve minimal elemanları olan, fonksiyonların alışılmış noktasal sıralaması altında, bir tam kafes olduğunu ispatlayacağız. Δ^+ üzerindeki zayıf yakınsaklık topolojisi ve metrik topolojinin aynı olduğunu ve bu topolojiye göre bu kümenin kompaktlığının ispatını veriyoruz. Bu bölümde son olarak, olasılıksal metrik uzayı tanımlanmış, bu uzay üzerinde bir düzgünlük(uniformity) tarafından belirlenen topolojinin metriklenebilir olduğunun ispatı çok iyi bilinen ve ikinci bölümde ispatı verilen ”sayılabilir bir tabana sahip bir düzgünlük tarafından belirlenen Hausdorff topolojisi metriklenebilirdir.” teoremi kullanılarak verilmiştir[5].

2. GENEL KISIMLAR

2.1. FİLTRE KAVRAMI

Tanım 2.1. X boştan farklı herhangi bir küme olmak üzere, $\mathfrak{B} \subseteq \mathbf{P}(X)$ topluluğu aşağıdaki koşulları sağlıyorsa, $\mathfrak{B}$ topluluğuna X üzerinde bir *filtre tabanı* denir.

(FB1) Boş küme, $\mathfrak{B}$ topluluğuna ait değildir.

(FB2) $\mathfrak{B}$ topluluğuna ait herhangi iki kümenin kesişiminin alt kümesi olacak şekilde $\mathfrak{B}$ topluluğunda bir eleman vardır.

Tanım 2.2. X boştan farklı herhangi bir küme olmak üzere $\mathfrak{F} \subseteq \mathbf{P}(X)$ topluluğu aşağıdaki koşulları sağlıyorsa, $\mathfrak{F}$ topluluğuna X üzerinde bir *filtre* denir.

(F1) Boş küme, $\mathfrak{F}$ topluluğuna ait değildir.

(F2) $\mathfrak{F}$ topluluğundaki herhangi iki kümenin kesişimi yine $\mathfrak{F}$ topluluğuna aittir.

(F3) $\mathfrak{F}$ topluluğundaki bir kümeyi kapsayan X in her alt kümesi, $\mathfrak{F}$ topluluğuna aittir.

Önerme 2.3. $\mathfrak{B} \subseteq \mathbf{P}(X)$ olmak üzere, $\mathfrak{B}$ topluluğuna ait bir kümeyi kapsayan X kümesinin alt kümelerinin oluşturduğu topluluğu $\mathfrak{F}(\mathfrak{B})$ ile gösterelim. $\mathfrak{F}(\mathfrak{B})$ topluluğunun X üzerinde bir filtre olabilmesi için gerek ve yeter koşul $\mathfrak{B}$ topluluğunun X üzerinde bir filtre tabanı olmasıdır.

İspat. $\mathfrak{F}(\mathfrak{B})$ topluluğu X üzerinde bir filtre olsun. Bu durumda, $\mathfrak{B}$ topluluğunun X üzerinde bir filtre tabanı olduğunu gösterelim.

(FB1): $\mathfrak{B} \subseteq \mathfrak{F}(\mathfrak{B})$ kapsaması gerçeklendiğinden ve $\mathfrak{F}(\mathfrak{B})$ topluluğu filtre olduğundan, $\emptyset \notin \mathfrak{B}$ gerçeklenir.

(FB2): Herhangi iki $B_1, B_2 \in \mathfrak{B}$ alalım. $\mathfrak{B} \subseteq \mathfrak{F}(\mathfrak{B})$ kapsaması gerçeklendiğinden ve $\mathfrak{F}(\mathfrak{B})$ filtre olduğundan

$$B_1 \cap B_2 \in \mathfrak{F}(\mathfrak{B})$$

olur. Dolayısıyla, $\mathfrak{F}(\mathfrak{B})$ topluluğunun tanımından,

$$B_3 \subseteq B_1 \cap B_2$$

olacak şekilde bir $B_3 \in \mathfrak{B}$ vardır.

Böylece Tanım 2.1 koşullarını sağlayan $\mathfrak{B}$ topluluğu, X üzerinde bir filtre tabanı olur. Tersine, $\mathfrak{B}$ topluluğu X üzerinde bir filtre tabanı olsun. $\mathfrak{F}(\mathfrak{B})$ topluluğunun Tanım 2.2 koşullarını gerçeklediğini gösterelim.

(F1): $\emptyset \in F(\mathfrak{B})$ olduğunu kabul edelim. Bu durumda $\mathfrak{F}(\mathfrak{B})$ topluluğunun tanımından, $B \subseteq \emptyset$ olacak şekilde bir $B \in \mathfrak{B}$ vardır. Buradan, $B = \emptyset \in \mathfrak{B}$ çelişkisi elde edilir. O halde $\emptyset \notin F(\mathfrak{B})$ olur.

(F2): Herhangi iki $F_1, F_2 \in F(\mathfrak{B})$ alalım. $\mathfrak{F}(\mathfrak{B})$ topluluğunun tanımından, $B_1 \subseteq F_1$ ve $B_2 \subseteq F_2$ olacak şekilde $B_1, B_2 \in \mathfrak{B}$ vardır. Buradan

$$B_1 \cap B_2 \subseteq F_1 \cap F_2 \tag{2.1}$$

elde edilir. (2.1) kapsamasından ve $\mathfrak{B}$ topluluğunun filtre tabanı olmasından dolayı

$$B_3 \subseteq B_1 \cap B_2 \subseteq F_1 \cap F_2$$

olacak şekilde $B_3 \in \mathfrak{B}$ vardır. Buradan $F_1 \cap F_2 \in \mathfrak{F}(\mathfrak{B})$ elde edilir.

(F3): Herhangi bir $A \subseteq X$ ve $F \subseteq A$ olacak şekilde $F \in \mathfrak{F}(\mathfrak{B})$ alalım. $\mathfrak{F}(\mathfrak{B})$ topluluğunun tanımından, $B \subseteq F$ olacak şekilde bir $B \in \mathfrak{B}$ vardır. Buradan $B \subseteq A$ olur. Dolayısıyla $A \in \mathfrak{F}(\mathfrak{B})$ elde edilir.

Böylece, Tanım 2.2 gereği $\mathfrak{F}(\mathfrak{B})$ bir filtredir. Ayrıca $\mathfrak{F}(\mathfrak{B})$ filtresinin, $\mathfrak{B}$ filtre tabanını kapsayan en küçük filtre olduğu açıktır.

Sonuç 2.4. $\mathfrak{B}$, X üzerinde bir filtre tabanı ise $\mathfrak{F}(\mathfrak{B})$ topluluğu $\mathfrak{B}$ tarafından doğurulan filtredir.

2.2. TOPOLOJİK UZAY VE KOMŞULUK KAVRAMI

Tanım 2.5. X boştan farklı bir küme olmak üzere, $\tau \subseteq \mathbf{P}(X)$ alt topluluğu aşağıdaki koşulları sağlıyorsa, bu topluluğa X kümesi üzerinde bir *topoloji* denir.

(T1) X ve boş küme, τ topluluğuna aittir.

(T2) τ topluluğuna ait sonlu sayıda kümenin kesişimi, τ topluluğuna aittir.

(T3) τ topluluğuna ait herhangi sayıda kümenin birleşimi, τ topluluğuna aittir.

Tanım 2.6. τ topluluğu, X üzerinde bir topoloji ise (X,τ) ikilisine bir *topolojik uzay* denir. Ayrıca,

(a) $O \in \tau$ gerçekleyen $O \subseteq X$ alt kümesine *açık küme*,

(b) Bütünleyeni açık olan kümeye *kapalı küme*

denir. $A \subseteq X$ herhangi bir küme olmak üzere; A kümesini kapsayan en küçük kapalı kümeye, bu kümenin kapanışı denir ve $\overline{A}$ ile gösterilir. A kümesinin kapsadığı en büyük açık kümeye, A kümesinin içi denir ve $i(A)$ ile gösterilir. Dikkat edilecek olursa topoloji tanımından, her kapanış kümesinin kapalı ve her iç kümesinin açık olduğu kolaylıkla elde edilir.

Tanım 2.7. (X,τ) bir topolojik uzay ve $x \in X$ herhangi bir nokta olsun. Bir $V \subseteq X$ alt kümesi, x noktasını eleman kabul eden açık bir kümeyi kapsıyorsa, V kümesine x noktasının bu topolojik uzay içindeki bir *komşuluğu* denir. Bir x noktasının bütün komşuluklarının topluluğu $V(x)$ ile gösterilir. Bu topluluğa, x noktasındaki *komşuluk sistemi* denir.

Önerme 2.8. (X,τ) bir topolojik uzay, $x \in X$ ve $V(x)$: x noktasındaki komşuluk sistemi olsun. Bu durumda aşağıdakiler gerçeklenir:

(N0) Her $V \in V(x)$ için $x \in V$.

(N1) $V(x)$, X üzerinde bir filtredir.

(N2) $U \in V(x)$ ise öyle bir $W \in V(x)$ vardır ki her $y \in W$ için $U \in V(y)$.

İspat. Komşuluk tanımından (N0) özelliğinin gerçeklendiği açıktır. Şimdi $V(x)$ topluluğunun, Tanım 2.2 koşullarını sağladığını gösterelim. (N0) özelliğinden, $\emptyset \notin V(x)$ elde edilir. Herhangi iki $V_1, V_2 \in V(x)$ alalım. Komşuluk tanımından,

$$x \in O_1 \subseteq V_1 \quad \text{ve} \quad x \in O_2 \subseteq V_2$$

olacak şekilde $O_1, O_2 \in \tau$ kümeleri vardır. Topoloji tanımından, $O_1 \cap O_2 \in \tau$ olduğundan ve

$$x \in O_1 \cap O_2 \subseteq V_1 \cap V_2$$

gerçeklendiğinden $V_1 \cap V_2 \in V(x)$ olur. Herhangi bir $A \subseteq X$ ve $V \subseteq A$ olacak şekilde $V \in V(x)$ alalım. Komşuluk tanımından $x \in O \subseteq V$ olacak şekilde bir $O \in \tau$ kümesi vardır ve $V \subseteq A$ olduğundan, $x \in O \subseteq A$ gerçeklenir. Bunun anlamı $A \in V(x)$ olmasıdır. Böylece (N1) özelliğinin gerçeklendiği gösterilmiş olur.

(N2): Herhangi bir $U \in V(x)$ alalım. Bu durumda $x \in \mathrm{i}(U)$ olur ve $\mathrm{i}(U) \in \tau$ gerçeklendiğinden

$$\mathrm{i}(U) \in V(x)$$

elde edilir. Şimdi herhangi bir $y \in \mathrm{i}(U)$ alalım. Bu durumda, $y \in \mathrm{i}(U) \subseteq U$ ve $\mathrm{i}(U) \in \tau$ olduğundan, komşuluk tanımı gereği $U \in V(y)$ elde edilir.

Teorem 2.9. X boştan farklı bir küme , $x \in X$ herhangi bir nokta ve $V(x) \subseteq \mathbf{P}(X)$ topluluğu Önerme 2.8 koşullarını sağlayan bir topluluk olsun. Bu durumda X üzerinde, $V(x)$ topluluğunu komşuluk sistemi olarak kabul eden bir τ topolojisi vardır.

İspat. Herhangi bir $x \in X$ alalım ve $V(x) \subseteq \mathbf{P}(X)$ topluluğu Önerme 2.8 koşullarını sağlayan bir topluluk olsun. Bu durumda

$$\tau = \{O \subseteq X \mid \forall x \in O \quad \exists V \in V(x) \quad V \subseteq O\} \cup \{\emptyset\}$$

topluluğunun X üzerinde bir topoloji olduğunu gösterelim.

(T1): $\emptyset, X \in \tau$ olduğu açıktır.

(T2): $O_1, O_2 \in \tau$ ve $x \in O_1 \cap O_2$ olsun. Bu durumda,

$$V_1 \subseteq O_1 \text{ ve } V_2 \subseteq O_2$$

olacak şekilde $V_1, V_2 \in V(x)$ kümeleri vardır. $V(x)$ bir filtre olduğundan $V_1 \cap V_2 \in V(x)$ olur ve

$$V_1 \cap V_2 \subseteq O_1 \cap O_2$$

gerçeklendiğinden $O_1 \cap O_2 \in \tau$ elde edilir.

(T3): I herhangi bir küme olmak üzere, her $\alpha \in I$ için $A_\alpha \in \tau$ ve $x \in \bigcup_{\alpha \in I} A_\alpha$ ise $x \in A_{\alpha_0}$ olacak şekilde bir $A_{\alpha_0} \in \tau$ vardır. Dolayısıyla $V \subseteq A_{\alpha_0}$ olacak şekilde bir $V \in V(x)$ vardır ve $A_{\alpha_0} \subseteq \bigcup_{\alpha \in I} A_\alpha$ olduğundan,

$$V \subseteq \bigcup_{\alpha \in I} A_\alpha$$

gerçeklenir ve buradan, $\bigcup_{\alpha \in I} A_\alpha \in \tau$ elde edilir.

Şimdi bu topolojinin, $V(x)$ topluluğunu komşuluk sistemi kabul ettiğini gösterelim. Herhangi bir $U \in V(x)$ alalım ve

$$A = \{y \in X \mid U \in V(y)\}$$

kümesini tanımlayalım. A kümesinin açık oldugunu ispatlayalım. Bunun için herhangi bir $a \in A$ alalım. Bu durumda $U \in V(a)$ olur ve (N2) özelliğinden, öyle bir $V \in V(a)$ vardır ki her $b \in V$ için $U \in V(b)$ gerçeklenir. Buradan, $V \subseteq A$ elde edilir. $A \subseteq U$ olduğundan U kümesi x noktasının bir komşuluğu olur.

Tanım 2.10. (X, τ) bir topolojik uzay, $x \in X$ bir nokta ve $V(x)$ bu noktadaki komşuluk sistemi olsun. Aşağıdaki koşulları sağlayan $\mathfrak{B}(x) \subseteq \mathbf{P}(X)$ topluluğuna *x noktasında bir lokal taban* denir.

(LB1) $\mathfrak{B}(x)$ topluluğunun her üyesi, x noktasının bir komşuluğudur.

(LB2) Her $V \in V(x)$ için $B \subseteq V$ olacak şekilde bir $B \in \mathfrak{B}(x)$ vardır.

Önerme 2.11. (X,τ) bir topolojik uzay, $x \in X$ ve $\mathfrak{B}(x)$: x noktasında bir lokal taban olsun. Bu durumda aşağıdakiler gerçeklenir:

(a) Her $B \in \mathfrak{B}(x)$ için $x \in B$.

(b) $\mathfrak{B}(x)$, X üzerinde bir filtre tabanıdır.

(c) $B \in \mathfrak{B}(x)$ ise öyle bir $B_0 \in \mathfrak{B}(x)$ vardır ki $y \in B_0$ ise $B_1 \subseteq B$ olacak şekilde $B_1 \in \mathfrak{B}(y)$ vardır.

İspat. (a) (LB1) koşulundan, her $B \in \mathfrak{B}(x)$ için $x \in B$ gerçeklenir.

(b) $\mathfrak{B}(x)$ topluluğunun Tanım 2.1 koşullarını sağladığını gösterelim. (a) şıkkından, $\emptyset \notin \mathfrak{B}(x)$ elde edilir. Şimdi herhangi iki $B_1, B_2 \in \mathfrak{B}(x)$ alalım. Bu durumda (LB1) ve (LB2) koşulları sırası ile uygulanarak,

$$B_3 \subseteq B_1 \cap B_2$$

olacak şekilde bir $B_3 \in \mathfrak{B}(x)$ elde edilir.

(c) Herhangi bir $B \in \mathfrak{B}(x)$ alalım. Bu durumda, (LB1) koşulundan ve (N2) özelliğinden dolayı öyle bir $B_0 \in \mathfrak{B}(x)$ vardır ki her $y \in B_0$ için, $B \in V(y)$ gerçeklenir ve (LB2) koşulu kullanılarak, $B_1 \subseteq B$ olacak şekilde bir $B_1 \in \mathfrak{B}(y)$ bulunur. Böylece istenen elde edilmiş olur.

Teorem 2.12. X boştan farklı bir küme, $x \in X$ bir nokta ve $\mathfrak{B}(x) \subseteq \mathbf{P}(X)$ Önerme 2.11 koşullarını sağlayan bir topluluk olsun. Bu durumda X üzerinde, $\mathfrak{B}(x)$ topluluğunu lokal taban olarak kabul eden bir τ topolojisi vardır.

İspat. Herhangi bir $x \in X$ alalım ve $\mathfrak{B}(x)$ topluluğu Önerme 2.11 koşullarını sağlasın. Bu durumda,

$$\tau = \{O \subseteq X \mid \forall x \in O \quad \exists B \in \mathfrak{B}(x) \quad B \subseteq O\} \cup \{\emptyset\}$$

topluluğunun X üzerinde bir topoloji olduğunu gösterelim.

(T1): $\emptyset, X \in \tau$ olduğu açıktır.

(T2): $O_1, O_2 \in \tau$ ve $x \in O_1 \cap O_2$ olsun. Bu durumda

$$B_1 \subseteq O_1 \qquad B_2 \subseteq O_2$$

olacak şekilde $B_1, B_2 \in \mathfrak{B}(x)$ kümeleri vardır. $\mathfrak{B}(x)$ bir filtre tabanı olduğundan

$$B_3 \subseteq B_1 \cap B_2$$

olacak şekilde bir $B_3 \in \mathfrak{B}(x)$ vardır ve

$$B_1 \cap B_2 \subseteq O_1 \cap O_2$$

gerçeklendiğinden $O_1 \cap O_2 \in \tau$ olur.

(T3): I herhangi bir küme olmak üzere her $\alpha \in I$ için $A_\alpha \in \tau$ ve $x \in \bigcup_{\alpha \in I} A_\alpha$ ise $x \in A_{\alpha_0}$ olacak şekilde bir $A_{\alpha_0} \in \tau$ vardır. Dolayısıyla $B \subseteq A_{\alpha_0}$ olacak şekilde bir $B \in \mathfrak{B}(x)$ vardır ve $A_{\alpha_0} \subseteq \bigcup_{\alpha \in I} A_\alpha$ olduğundan

$$B \subseteq \bigcup_{\alpha \in I} A_\alpha$$

gerçeklenir ve buradan $\bigcup_{\alpha \in I} A_\alpha \in \tau$ bulunur.

Şimdi $\mathfrak{B}(x)$ topluluğunun x noktasında bir lokal taban olduğunu gösterelim. Bunun için, ilk olarak

$$V(x) = F(\mathfrak{B}(x)) = \{V \subseteq X \mid \exists B \in B(x) \quad B \subseteq V\}$$

topluluğunu tanımlayalım ve bu topluluğun x noktasında bir komşuluk sistemi olduğunu gösterelim. Her $B \in \mathfrak{B}(x)$ için $x \in B$ gerçeklendiğinden, (N0) koşulu sağlanır. $\mathfrak{B}(x)$ bir filtre tabanı olduğundan, Önerme 2.3 gereğince, $V(x)$ bir filtredir ve böylece (N1) koşulu sağlanır. Şimdi, $V(x)$ topluluğunun (N2) koşulunu sağladığını göstermek için, herhangi bir $U \in V(x)$ alalım. Buradan, $B \subseteq U$ olacak şekilde bir $B \in \mathfrak{B}(x)$ elde edilir. Bu durumda, öyle bir $B_0 \in \mathfrak{B}(x)$ vardır ki, her $y \in B_0$ için, $B_1 \subseteq B$ olacak şekilde bir $B_1 \in \mathfrak{B}(y)$ vardır.

$V = B_0$ seçilirse, $B_0 \in V(x)$ ve her $y \in B_0$ için,

$$U \in V(y)$$

gerçeklendiğinden (N2) koşulu sağlanmış olur. Dolayısıyla, $V(x)$ topluluğu Teorem 2.9 gereğince x noktasında bir komşuluk sistemidir. Böylece $\mathfrak{B}(x)$ topluluğu, (LB1) ve (LB2) koşullarını sağladığından x noktasında bir lokal taban olur.

Önerme 2.13. : (X,τ) bir topolojik uzay, $x \in X$ ve $\mathfrak{B}(x)$, x noktasındaki lokal taban olsun. Bu durumda herhangi bir $A \subseteq X$ kümesi için aşağıdakiler gerçeklenir:

(a) x noktasının A kümesinin kapanışına ait olması için gerek ve yeter koşul A kümesinin, $\mathfrak{B}(x)$ topluluğundaki her kümeyle kesişiminin boştan farklı olmasıdır.

(b) x noktasının A kümesinin içine ait olması için gerek ve yeter koşul $\mathfrak{B}(x)$ topluluğunda A kümesinin alt kümesi olacak şekilde bir kümenin var olmasıdır.

(c) X içindeki bir $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dizisinin $x \in X$ noktasına yakınsaması için gerek ve yeter koşul her $B \in \mathfrak{B}(x)$ ve her $n \geq N$ için, $x_n \in B$ olacak şekilde bir $N \in \mathbb{N}$ olmasıdır.

İspat. (a) Herhangi bir $x \in \overline{A}$ ve $B \in \mathfrak{B}(x)$ alalım. Her $V \in V(x)$ için

$$V \cap A \neq \emptyset$$

ve $\mathfrak{B}(x) \subseteq V(x)$ olduğundan

$$B \cap A \neq \emptyset$$

gerçeklenir. Tersine, her $B \in \mathfrak{B}(x)$ için $B \cap A \neq \emptyset$ olduğunu kabul edelim ve herhangi bir $V \in V(x)$ alalım. (LB2) koşulundan,

$$B_0 \subseteq V$$

olacak şekilde bir $B_0 \in \mathfrak{B}(x)$ vardır. Dolayısıyla,

$$V \cap A \neq \emptyset$$

elde edilir.

(b) Herhangi bir $x \in \mathrm{i}(A)$ alalım. Bu durumda

$$V \subseteq A$$

olacak şekilde bir $V \in V(x)$ ve (LB2) koşulundan,

$$B \subseteq V \subseteq A$$

olacak şekilde bir $B \in \mathfrak{B}(x)$ vardır. Tersine, $B \subseteq A$ olacak şekilde bir $B \in \mathfrak{B}(x)$ olduğunu kabul edelim. (LB1) kullanılarak, $B \in V(x)$ elde edilir ve $B \subseteq A$ gerçeklendiğinden $x \in \mathrm{i}(A)$ elde edilir.

(c) X içinde $x \in X$ noktasına yakınsayan herhangi bir $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ dizisi ve herhangi bir $B \in \mathfrak{B}(x)$ alalım. Bu durumda $x_n \to x$ olduğundan, (LB1) koşulundan, her $n \geq N$ için $x_n \in B$ olacak şekilde bir $N \in \mathbb{N}$ elde edilir. Tersine, herhangi bir $V \in V(x)$ alalım. (LB2) koşulundan,

$$B \subseteq V$$

olacak şekilde bir $B \in \mathfrak{B}(x)$ vardır. Bu durumda hipotez gereği, her $n \geq N$ için $x_n \in B$ olacak şekilde bir $N \in \mathbb{N}$ var olduğundan, her $n \geq N$ için $x_n \in V$ olur.

Tanım 2.14. (X, τ) bir topolojik uzay ve $\mathfrak{B} \subseteq \tau$ olsun. Her boştan farklı O açık kümesi $\mathfrak{B}$ topluluğunun bazı elemanlarının birleşimi olarak yazılabiliyorsa veya buna eşdeğer olarak, her $O \in \tau$ açık kümesi ve her $x \in O$ için,

$$x \in B_x \subseteq O \tag{2.2}$$

olacak şekilde bir $B_x \in \mathfrak{B}$ varsa, $\mathfrak{B}$ topluluğuna τ topolojisi için bir *taban* denir.

Önerme 2.15. (X,τ) bir topolojik uzay ve $\mathfrak{B}$ topluluğu τ topolojisi için bir taban olsun. Bu durumda aşağıdakiler gerçeklenir:

(B1) $X = \bigcup_{B\in\mathfrak{B}} B$.

(B2) Her $B_1, B_2 \in \mathfrak{B}$ ve her $x \in B_1 \cap B_2$ için öyle bir $B_x \in \mathfrak{B}$ vardır ki $x \in B_x \subseteq B_1 \cap B_2$.

İspat. (X,τ) bir topolojik uzay ve $\mathfrak{B}$ topluluğu τ topolojisi için bir taban olsun.

(B1): $X \in \tau$ olduğundan, taban tanımından (B1) koşulu gerçeklenir.

(B2): Herhangi iki $B_1, B_2 \in \mathfrak{B}$ ve herhangi bir $x \in B_1 \cap B_2$ alalım. Bu durumda, $B_1 \cap B_2 \in \tau$ olduğundan, taban tanımı gereği,

$$x \in B_x \subseteq B_1 \cap B_2$$

olacak şekilde bir $B_x \in \mathfrak{B}$ vardır.

Teorem 2.16. X boştan farklı bir küme ve $\mathfrak{B} \subseteq \mathbf{P}(X)$ Önerme 2.15 koşullarını sağlayan bir topluluk olsun. Bu durumda X üzerinde, $\mathfrak{B}$ topluluğunu taban olarak kabul eden bir τ topolojisi vardır.

İspat. X boştan farklı bir küme ve $\mathfrak{B} \subseteq \mathbf{P}(X)$ topluluğu Önerme 2.15 koşullarını sağlasın. Bu durumda,

$$\tau = \{O \subseteq X \mid \forall x \in O \quad \exists B_x \in \mathfrak{B} \quad x \in B_x \subseteq O\} \cup \{\emptyset\}$$

topluluğunun X üzerinde bir topoloji olduğunu gösterelim.

(T1): $\emptyset, X \in \tau$ olduğu açıktır.

(T2): $O_1, O_2 \in \tau$ ve $x \in O_1 \cap O_2$ olsun. Bu durumda

$$x \in B_1 \subseteq O_1 \qquad x \in B_2 \subseteq O_2$$

olacak şekilde $B_1, B_2 \in \mathfrak{B}$ kümeleri vardır. (B2) koşulundan,

$$x \in B_3 \subseteq B_1 \cap B_2$$

olacak şekilde bir $B_3 \in \mathfrak{B}$ vardır. Dolayısıyla, $B_3 \subseteq O_1 \cap O_2$ gerçeklendiğinden, $O_1 \cap O_2 \in \tau$ olur.

(T3): I herhangi bir küme olmak üzere her $\alpha \in I$ için $A_\alpha \in \tau$ ve $x \in \bigcup\limits_{\alpha \in I} A_\alpha$ ise $x \in A_{\alpha_0}$ olacak şekilde bir $A_{\alpha_0} \in \tau$ vardır. Dolayısıyla,

$$x \in B_x \subseteq A_{\alpha_0}$$

olacak şekilde bir $B_x \in \mathfrak{B}$ vardır ve $A_{\alpha_0} \subseteq \bigcup\limits_{\alpha \in I} A_\alpha$ olduğundan,

$$x \in B_x \subseteq \bigcup_{\alpha \in I} A_\alpha$$

gerçeklenir ve buradan $\bigcup\limits_{\alpha \in I} A_\alpha \in \tau$ bulunur. $\mathfrak{B}$ topluluğunun bu topoloji için bir taban olduğu açıktır.

2.3. METRİK UZAY

Tanım 2.17. X boştan farklı bir küme olsun. Aşağıdaki koşulları sağlayan

$$d : X \times X \to \mathbb{R}$$

fonksiyonuna X üzerinde bir *metrik* ve bu durumda (X,d) ikilisine bir *metrik uzay* denir. Her $x,y,z \in X$ için,

(M1) $d(x,y) = 0 \Leftrightarrow x = y$.

(M2) $d(x,y) = d(y,x)$.

(M3) $d(x,z) \leq d(x,y) + d(y,z)$.

Bu tanımdan, her $x,y \in X$ için,

$$0 = d(x,x) \leq d(x,y) + d(x,y) = 2d(x,y)$$

olduğundan $d(x,y) \geq 0$ elde edilir.

Önerme 2.18. (X,d) bir metrik uzay, $\varepsilon > 0$ ve $x \in X$ olsun. Bu durumda

$$B_\varepsilon(x) = \{y \in X \mid d(x,y) < \varepsilon\}$$

olmak üzere

$$\mathfrak{B}(x) = \{B_\varepsilon(x) \mid \varepsilon > 0\}$$

olsun. Bu durumda, X üzerinde bu topluluğu x noktasında lokal taban kabul eden bir topoloji vardır.

İspat. $\mathfrak{B}(x)$ toluluğunun Önerme 2.11 koşullarını sağladığını göstermemiz yeterlidir.

(a) Her $\varepsilon > 0$ için,

$$d(x,x) = 0 < \varepsilon$$

olduğundan, $x \in B_\varepsilon(x)$ bulunur.

(b) $\mathfrak{B}(x)$ topluluğu X üzerine bir filtre tabanıdır. Gerçekten, (a) şıkkından, $\emptyset \notin \mathfrak{B}(x)$ gerçeklenir. Şimdi, herhangi iki r_1, r_2 pozitif reel sayılarını alalım. Bu durumda, $r = \min\{r_1, r_2\}$ olmak üzere $B_r(x) = B_{r_1}(x) \cap B_{r_2}(x)$ gerçeklenir.

(c) Herhangi bir $\varepsilon > 0$ ve $y \in B_\varepsilon(x)$ alalım. Şimdi

$$B_\delta(y) \subseteq B_\varepsilon(x)$$

olacak şekilde bir $\delta > 0$ sayısının bulunabildiğini gösterelim.

$$d(x,y) < \varepsilon$$

olduğundan,

$$0 < \delta = \frac{\varepsilon - d(x,y)}{2} < \varepsilon - d(x,y)$$

olur. Herhangi bir $z \in B_\delta(y)$ alalım. Üçgen eşitsizliğinden,

$$\begin{aligned} d(x,z) &\leq d(x,y) + d(y,z) < d(x,y) + \delta \\ &< d(x,y) + \varepsilon - d(x,y) = \varepsilon \end{aligned}$$

bulunur. Buradan $z \in B_\varepsilon(x)$ sonucuna ulaşılır ve

$$B_\delta(y) \subseteq B_\varepsilon(x)$$

kapsaması elde edilir.

Bu durumda Teorem 2.12 kullanılırsa,

$$\tau_d = \{A \subseteq X \mid \forall x \in A \quad \exists \varepsilon > 0 \quad B_\varepsilon(x) \subseteq A\} \cup \{\emptyset\}$$

topluluğu X üzerinde bir topoloji olur ve bu topoloji *metrik topoloji* olarak adlandırılır.

2.4. DÜZGÜN UZAYLAR

X boştan farklı bir küme ve $U,V \subseteq X \times X$ olmak üzere,

$$\triangle = \{(x,x) \mid x \in X\}$$

$$U^{-1} = \{(y,x) \mid (x,y) \in U\}$$

$$U \circ V = \{(x,z) \mid \exists y \in X \ (x,y) \in V \text{ ve } (y,z) \in U\}$$

kümelerini tanımlayalım.

Önerme 2.19. X boştan farklı bir küme ve $U,V \subseteq X \times X$ olsun. Bu durumda aşağıdakiler gerçeklenir:

(a) $(U^{-1})^{-1} = U$

(b) $U \subseteq V$ ise $U^{-1} \subseteq V^{-1}$

(c) $(U \cap V)^{-1} = U^{-1} \cap V^{-1}$

(d) $(U \circ V)^{-1} = V^{-1} \circ U^{-1}$

İspat. (a) Herhangi bir $(x,y) \in (U^{-1})^{-1}$ alalım. Bu durumda

$$(y,x) \in U^{-1} \Rightarrow (x,y) \in U$$

gerçekleneceğinden

$$(U^{-1})^{-1} \subseteq U \tag{2.3}$$

elde edilir. Tersine herhangi bir $(x,y) \in U$ alalım. Bu durumda

$$(y,x) \in U^{-1} \Rightarrow (x,y) \in (U^{-1})^{-1}$$

gerçekleneceğinden

$$U \subseteq (U^{-1})^{-1} \tag{2.4}$$

elde edilir. (2.3) ve (2.4) bağıntılarından $U = (U^{-1})^{-1}$ olur.

(b) $U \subseteq V$ olsun ve herhangi bir $(x,y) \in U^{-1}$ alalım. Bu durumda $(y,x) \in U$ olur ve $U \subseteq V$ gerçeklendiğinden $(y,x) \in V$ elde edilir. Buradan $(x,y) \in V^{-1}$ olacağından $U^{-1} \subseteq V^{-1}$ olduğu görülür.

(c) Herhangi bir $(x,y) \in (U \cap V)^{-1}$ alalım. Bu durumda $(y,x) \in U \cap V$ olacağından, $(x,y) \in U^{-1}$ ve $(x,y) \in V^{-1}$, dolayısıyla $(x,y) \in U^{-1} \cap V^{-1}$ bulunur. O halde,

$$(U \cap V)^{-1} \subseteq U^{-1} \cap V^{-1} \tag{2.5}$$

kapsaması gerçeklenir. Ters kapsama için herhangi bir $(x,y) \in U^{-1} \cap V^{-1}$ alalım. Bu durumda,

$$(x,y) \in U^{-1} \Rightarrow (y,x) \in U$$

$$(x,y) \in V^{-1} \Rightarrow (y,x) \in V$$

olacağından, $(y,x) \in U \cap V$ elde edilir ve bu $(x,y) \in (U \cap V)^{-1}$ olduğunu söyler. O halde

$$U^{-1} \cap V^{-1} \subseteq (U \cap V)^{-1} \tag{2.6}$$

bulunur. İstenilen eşitlik (2.5) ve (2.6) bağıntılarından elde edilir.

(d) Herhangi bir $(x,z) \in (U \circ V)^{-1}$ alalım. Bu durumda $(z,x) \in U \circ V$ olacağından,

$$(z,y) \in V \quad \text{ve} \quad (y,x) \in U$$

olacak şekilde bir $y \in X$ vardır. Bu durumda,

$$(z,y) \in V \Rightarrow (y,z) \in V^{-1}$$

$$(y,x) \in U \Rightarrow (x,y) \in U^{-1}$$

olduğundan,

$$(x,z) \in V^{-1} \circ U^{-1}$$

elde edilir. O halde

$$(U \circ V)^{-1} \subseteq V^{-1} \circ U^{-1} \tag{2.7}$$

gerçeklenir. Ters kapsama için herhangi bir $(x,z) \in V^{-1} \circ U^{-1}$ alalım. Bu durumda

$$(x,y) \in U^{-1} \quad \text{ve} \quad (y,z) \in V^{-1}$$

olacak şekilde bir $y \in X$ vardır. Buradan $(y,x) \in U$ ve $(z,y) \in V$ bulunur. Bu ise

$$(z,x) \in U \circ V$$

verir ve dolayısıyla $(x,z) \in (U \circ V)^{-1}$ elde edilir. Dolayısıyla,

$$V^{-1} \circ U^{-1} \subseteq (U \circ V)^{-1} \tag{2.8}$$

bulunur. İstenilen eşitlik (2.7) ve (2.8) bağıntılarından elde edilir.

Tanım 2.20. X boştan farklı bir küme olsun. $U = U^{-1}$ koşulunu sağlayan bir $U \subseteq X \times X$ alt kümesine *simetrik* denir.

Tanım 2.21. X boştan farklı bir küme olsun. Aşağıdaki koşulları sağlayan bir $\mathscr{U} \subseteq \mathbf{P}(X \times X)$ topluluğuna X kümesi üzerinde bir *düzgünlük* denir ve $(X, \mathscr{U})$ ikilisine bir *düzgün uzay* denir.

(U1) Her $U \in \mathscr{U}$ için $\triangle \subseteq U$

(U2) $\mathscr{U}$ topluluğu $X \times X$ üzerinde bir filtredir.

(U3) Her $U \in \mathscr{U}$ için $U^{-1} \in \mathscr{U}$

(U4) Her $U \in \mathscr{U}$ için $V \circ V \subseteq U$ olacak şekilde bir $V \in \mathscr{U}$ vardır.

Önerme 2.22. $(X,\mathscr{U})$ bir düzgün uzay olsun. Bu durumda aşağıdakiler gerçeklenir:

(a) Her $U \in \mathscr{U}$ için $U \subseteq U \circ U$

(b) Her $U \in \mathscr{U}$ için $U \cap U^{-1}$ kümesi simetriktir.

(c) Her $U \in \mathscr{U}$ için $V \subseteq U$ olacak şekilde bir $V \in \mathscr{U}$ simetrik kümesi vardır.

(d) Her $U \in \mathscr{U}$ için $V \circ V \subseteq U$ olacak şekilde bir $V \in \mathscr{U}$ simetrik kümesi vardır.

(e) Her $U \in \mathscr{U}$ için $V \circ V \circ V \subseteq U$ olacak şekilde bir $V \in \mathscr{U}$ simetrik kümesi vardır.

İspat. (a) Herhangi bir $U \in \mathscr{U}$ ve $(x,y) \in U$ alalım. (U1) koşulundan ve "$\circ$" tanımından $(x,y) \in U \circ U$ ve dolayısıyla

$$U \subseteq U \circ U$$

elde edilir. Ayrıca, $\mathscr{U}$ bir filtre olduğundan $U \circ U \in \mathscr{U}$ bulunur.

(b) Herhangi bir $U \in \mathscr{U}$ alalım. Önerme 2.19-(a) ve (c) şıkları yardımıyla,

$$(U \cap U^{-1})^{-1} = U \cap U^{-1}$$

olduğu görülür. Ayrıca, (U2) ve (U3) koşulu kullanılarak, $U \cap U^{-1} \in \mathscr{U}$ elde edilir.

(c) Her $U \in \mathscr{U}$ için $U \cap U^{-1} \in \mathscr{U}$ simetrik ve $U \cap U^{-1} \subseteq U$ olduğundan istenilen gerçeklenir.

(d) Herhangi bir $U \in \mathscr{U}$ alalım. (U4) gereği,

$$W \circ W \subseteq U$$

olacak şekilde bir $W \in \mathscr{U}$ kümesi ve (c) şıkkından,

$$V \subseteq W$$

olacak şekilde bir $V \in \mathscr{U}$ simetrik kümesi vardır. Şimdi, $V \circ V \subseteq W \circ W$ olduğunu gösterelim. Bunun için $(x,z) \in V \circ V$ alalım. Bu durumda,

$$(x,y) \in V \quad \text{ve} \quad (y,z) \in V$$

olacak şekilde bir $y \in X$ vardır. $V \subseteq W$ olduğundan $(x,z) \in W \circ W$ elde edilir. Bu ise

$$V \circ V \subseteq W \circ W$$

olduğunu gösterir. Böylece, $W \circ W \subseteq U$ olduğundan,

$$V \circ V \subseteq U$$

bulunur.

(e) Herhangi bir $U \in \mathscr{U}$ alalım. (U4) gereği,

$$V \circ V \subseteq U \tag{2.9}$$

olacak şekilde bir $V \in \mathscr{U}$ vardır ve (d) gereği

$$W \circ W \subseteq V \tag{2.10}$$

olacak şekilde bir $W \in \mathscr{U}$ simetrik kümesi vardır. (2.9) ve (2.10) kapsamalarından

$$W \circ W \circ W \circ W \subseteq V \circ V \subseteq U$$

bulunur. Ayrıca, (a) şıkkı kullanılarak,

$$W \circ W \circ W \subseteq W \circ W \circ W \circ W$$

ve buradan,

$$W \circ W \circ W \subseteq U$$

elde edilir.

Tanım 2.23. $(X,\mathscr{U}_1)$ ve $(X,\mathscr{U}_2)$ iki düzgün uzay ve $f : X \to Y$ bir fonksiyon olsun Bu durumda, f fonksiyonunun X üzerinde düzgün sürekli olması için gerek ve yeter koşul her $V \in \mathscr{U}_2$ ve her $x, y \in X$ için,

$$(x,y) \in U \Rightarrow (f(x), f(y)) \in V$$

koşulunu sağlayan bir $U \in \mathscr{U}_1$ kümesinin var olmasıdır.

Tanım 2.24. $(X,\mathscr{U})$ bir düzgün uzay ve $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dizisi X içinde bir dizi olsun. Bu durumda, $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dizisinin Cauchy dizisi olması için gerek ve yeter koşul her $U \in \mathscr{U}$ ve $m,n \geq N$ için

$$(x_n, x_m) \in U$$

olacak şekilde bir $N \in \mathbb{N}$ var olmasıdır.

Tanım 2.25. $(X,\mathscr{U})$ bir düzgün uzay ve $\mathfrak{B} \subseteq \mathscr{U}$ olsun. $\mathscr{U}$ topluluğundaki her küme $\mathfrak{B}$ topluluğuna ait en az bir kümeyi kapsıyorsa, $\mathfrak{B}$ topluluğuna $\mathscr{U}$ için bir *taban* denir.

Önerme 2.26. $\mathfrak{B} \subseteq \mathbf{P}(X \times X)$ boştan farklı küme ailesinin X üzerindeki bir düzgünlük için taban olması için gerek ve yeter koşullar

(UB1) $\mathfrak{B}$ topluluğundaki her küme $\Delta\triangle$ kümesini kapsar.

(UB2) Her $U \in \mathfrak{B}$ için $B \subseteq U^{-1}$ olacak şekilde bir $B \in \mathfrak{B}$ vardır.

(UB3) Her $U \in \mathfrak{B}$ için $V \circ V \subseteq U$ olacak şekilde bir $V \in \mathfrak{B}$ vardır.

(UB4) Her $B_1, B_2 \in \mathfrak{B}$ için $B_3 \subseteq B_1 \cap B_2$ olacak şekilde $B_3 \in \mathfrak{B}$ vardır.

İspat. $\mathfrak{B}$ topluluğu X üzerindeki bir $\mathscr{U}$ düzgünlüğü için taban olsun. Şimdi koşulları sağladığını gösterelim:

(UB1): Herhangi bir $U \in \mathfrak{B}$ alalım. $\mathfrak{B} \subseteq \mathscr{U}$ olduğundan ve (U1) koşulundan $\triangle \subseteq U$ elde edilir.

(UB2): Herhangi bir $U \in \mathfrak{B}$ alalım. $\mathfrak{B} \subseteq \mathscr{U}$ olduğundan $U^{-1} \in \mathscr{U}$ olur. Taban tanımından,

$$B \subseteq U^{-1}$$

olacak şekilde bir $B \in \mathfrak{B}$ vardır.

(UB3): Herhangi bir $U \in \mathfrak{B}$ alalım. $\mathfrak{B} \subseteq \mathscr{U}$ olduğundan ve (U4) koşulundan

$$V \circ V \subseteq U$$

olacak şekilde bir $V \in \mathscr{U}$ vardır ve $\mathfrak{B}$ taban olduğundan,

$$B \subseteq V$$

olacak şekilde bir $B \in \mathfrak{B}$ vardır. Buradan

$$B \circ B \subseteq V \circ V \subseteq U$$

elde edilir.

(UB4): Herhangi iki $U, V \in \mathfrak{B}$ alalım. $\mathfrak{B} \subseteq \mathscr{U}$ ve $\mathscr{U}$ bir filtre olduğundan $U \cap V \in \mathscr{U}$ olur. $\mathfrak{B}$ taban olduğundan,

$$B \subseteq U \cap V$$

olacak şekilde bir $B \in \mathfrak{B}$ vardır.

Tersine, $\mathfrak{B}$ topluluğu bu dört koşulu sağlayan bir topluluk olsun. Bu durumda Önerme 2.3 de tanımlanan

$$\mathfrak{F}(\mathfrak{B}) = \mathscr{U} = \{U \subseteq X \times X \mid \exists B \in \mathfrak{B} \quad B \subseteq U\}$$

topluluğu X üzerinde, $\mathfrak{B}$ topluluğunu taban kabul eden bir düzgünlüktür; Gerçekten , herhangi bir $U \in \mathscr{U}$ alalım. Bu durumda

$$B_U \subseteq U$$

olacak şekilde $B_U \in \mathfrak{B}$ vardır. Buradan,

(U1): $\triangle \subseteq B_U$ olduğundan $\triangle \subseteq U$ olur.

(U2): $\mathfrak{B}$ bir filtre tabanı olduğundan Önerme 2.3 gereği, $\mathscr{U}$ bir filtredir.

(U3): $\mathfrak{B}$ topluluğunun sağladığı (UB2) koşulundan,

$$C \subseteq B_U^{-1}$$

olacak şekilde bir $C \in \mathfrak{B} \subseteq \mathscr{U}$ vardır. $B_U^{-1} \subseteq U^{-1}$ ve $\mathscr{U}$ bir filtre olduğundan $C \subseteq U^{-1}$ kapsaması $U^{-1} \in \mathscr{U}$ olduğunu ispatlar.

(U4): $\mathfrak{B}$ topluluğunun sağladığı (UB3) koşulundan,

$$V \circ V \subseteq B_U$$

olacak şekilde $V \in \mathfrak{B} \subseteq \mathscr{U}$ vardır ve $B_U \subseteq U$ olduğundan istenen gerçeklenir.

Sonuç olarak, $\mathscr{U}$ topluluğu X için bir düzgünlük olur. $\mathscr{U}$ topluluğunun tanımından, $\mathfrak{B}$ topluluğunun $\mathscr{U}$ için bir taban olduğu açıktır.

Önerme 2.27. $(X,\mathscr{U})$ bir düzgün uzay, $x \in X$ bir nokta ve $U \in \mathscr{U}$ olsun.

$$U(x) = \{y \in X \mid (x,y) \in U\}$$

kümesini tanımlayalım. Bu durumda $y \in X$ ve $V \in \mathscr{U}$ olmak üzere,

(a) $x \in U(x)$

(b) $U \subseteq V \Rightarrow U(x) \subseteq V(x)$

(c) $y \in V(x) \Rightarrow V(y) \subseteq (V \circ V)(x)$

İspat. (a) Her $U \in \mathscr{U}$ için $\triangle \subseteq U$ olduğundan $x \in U(x)$ olur.

(b) $U \subseteq V$ olsun ve $y \in U(x)$ alalım. Bu durumda $(x,y) \in U$ ve $U \subseteq V$ olduğundan $(x,y) \in V$ olur. Buradan $y \in V(x)$ elde edildiğinden

$$U(x) \subseteq V(x)$$

olduğu görülür.

(c) $y \in V(x)$ olsun. Herhangi bir $z \in V(y)$ alalım. Bu durumda $(y,z) \in V$ ve $(x,y) \in V$ olduğundan, "$\circ$" tanımı gereği

$$(x,z) \in V \circ V$$

olur. Dolayısıyla,

$$V(y) \subseteq (V \circ V)(x)$$

elde edilir.

Önerme 2.28. $(X, \mathscr{U})$ bir düzgün uzay olsun. Bu durumda

(a)
$$\tau_{\mathscr{U}} = \{A \subseteq X \mid \forall x \in A \quad \text{için} \quad \exists U \in \mathscr{U} \quad U(x) \subseteq A\} \cup \{\emptyset\}$$

topluluğu X üzerinde bir topolojidir. Bu topolojiye *düzgün topoloji* denir. $(X, \tau_{\mathscr{U}})$ topolojik uzayında, aşağıdakiler gerçeklenir:

(b) Herhangi bir $A \subseteq X$ kümesi için

$$B_A = \{x \in X \mid \exists U \in \mathscr{U} \quad U(x) \subseteq A\}$$

kümesi açıktır.

(c) $A \subseteq X$ herhangi bir küme olsun. Bir $x \in X$ noktasının A kümesinin içine ait olması için gerek ve yeter koşul

$$U(x) \subseteq A$$

olacak şekilde bir $U \in \mathscr{U}$ olmasıdır.

(d) $x \in X$ herhangi bir nokta olsun. Bu durumda

$$\mathfrak{B}(x) = \{U(x) \mid U \in \mathscr{U}\}$$

topluluğu x noktasında bir lokal tabandır.

İspat. (a) $\tau_{\mathscr{U}}$ topluluğunun X üzerinde bir topoloji olduğunu gösterelim.

(T1) $\emptyset, X \in \tau_{\mathscr{U}}$ olduğu açıktır.

(T2) $O_1, O_2 \in \tau_{\mathscr{U}}$ ve $x \in O_1 \cap O_2$ olsun. Bu durumda $\tau_{\mathscr{U}}$ topluluğunun tanımından,

$$U_1(x) \subseteq O_1 \quad \text{ve} \quad U_2(x) \subseteq O_2$$

olacak şekilde $U_1, U_2 \in \mathscr{U}$ kümeleri vardır. $\mathscr{U}$ bir filtre olduğundan $U_1 \cap U_2 \in \mathscr{U}$ ve $(U_1 \cap U_2)(x) = U_1(x) \cap U_2(x)$ gerçeklendiğinden $O_1 \cap O_2 \in \tau_{\mathscr{U}}$ elde edilir.

(T3) I herhangi bir küme olmak üzere her $\alpha \in I$ için $O_\alpha \in \tau_{\mathscr{U}}$ ve $x \in \bigcup\limits_{\alpha \in I} O_\alpha$ ise $x \in O_{\alpha_0}$ olacak şekilde bir $O_{\alpha_0} \in \tau_{\mathscr{U}}$ vardır. Dolayısıyla,

$$U(x) \subseteq O_{\alpha_0}$$

olacak şekilde bir $U \in \mathscr{U}$ vardır ve $O_{\alpha_0} \subseteq \bigcup\limits_{\alpha \in I} O_\alpha$ olduğundan,

$$U(x) \subseteq \bigcup_{\alpha \in I} O_\alpha$$

gerçeklenir. Buradan, $\bigcup\limits_{\alpha \in I} O_\alpha \in \tau_{\mathscr{U}}$ elde edilir.

(b)Herhangi bir $x \in B_A$ alalım. Bu durumda,

$$U(x) \subseteq A$$

olacak şekilde bir $U \in \mathscr{U}$ vardır. (U4) koşulundan,

$$V \circ V \subseteq U$$

olacak şekilde bir $V \in \mathscr{U}$ vardır. Şimdi $V(x) \subseteq B_A$ olduğunu gösterelim. Herhangi bir $y \in V(x)$ alalım. Önerme 2.27-(b) ve (c) kullanılarak,

$$V(y) \subseteq (V \circ V)(x) \subseteq U(x) \subseteq A$$

elde edilir. B_A kümesinin tanımından $y \in B_A$ bulunur. Bu ise B_A kümesinin açık bir küme olduğunu söyler.

(c) $x \in \mathrm{i}(A) \in \tau_{\mathscr{U}}$ alalım. Bu durumda,

$$U(x) \subseteq \mathrm{i}(A) \subseteq A$$

olacak şekilde $U \in \mathscr{U}$ vardır. Buradan $x \in B_A$ olur ve dolayısıyla,

$$\mathrm{i}(A) \subseteq B_A \tag{2.11}$$

elde edilir. Diğer yandan, $B_A \subseteq A$ ve $B_A \in \tau_{\mathscr{U}}$ olduğundan,

$$B_A \subseteq \mathrm{i}(A) \tag{2.12}$$

elde edilir.
(2.11) ve (2.12) bağıntılarından $B_A = \mathrm{i}(A)$ elde edilir. Böylece ispat tamamlanmış olur.

(d) $\mathfrak{B}(x)$ topluluğunun Tanım 2.10 koşullarını sağladığını gösterelim;

(LB1): Herhangi bir $U \in \mathscr{U}$ alalım. (c) şıkkı ve Önerme 2.27-(a) kullanılarak, $B_{U(x)} = \mathrm{i}(U(x))$ ve $x \in \mathrm{i}(U(x))$ elde edilir. Dolayısıyla $U(x)$, x noktası için bir komşuluk olur.

(LB2): x noktasının herhangi bir V komşuluğunu alalım. Komşuluk ve $\tau_{\mathscr{U}}$ topluluğunun tanımından,

$$U(x) \subseteq O \subseteq V$$

olacak şekilde $O \in \tau_{\mathscr{U}}$ ve $U \in \mathscr{U}$ kümeleri vardır.

Önerme 2.29. Her metrik uzay düzgün uzaydır.

İspat. (X,d) bir metrik uzay olsun ve her $\varepsilon > 0$ için,

$$B(\varepsilon) = \{(x,y) \in X \times X \mid y \in B_\varepsilon(x)\}$$

ve

$$\mathfrak{B} = \{B(\varepsilon) \mid \varepsilon > 0\}$$

kümeleri tanımlansın. Bu durumda, Önerme 2.26 gereği, X kümesi üzerinde $\mathfrak{B}$

topluluğunu taban kabul eden bir $\mathscr{U}$ düzgünlüğü vardır. Gerçekten,

(UB1): Herhangi bir $\varepsilon > 0$ alalım. Önerme 2.18 kullanılırsa, $x \in B_\varepsilon(x)$ olur ve dolayısıyla $\triangle \subseteq B(\varepsilon)$ gerçeklenir.

(UB2): Herhangi bir $\varepsilon > 0$ alalım. $y \in B_\varepsilon(x)$ ise $x \in B_\varepsilon(y)$ olduğundan $B(\varepsilon) = B^{-1}(\varepsilon)$ olur.

(UB3): Herhangi bir $\varepsilon > 0$ ve $(x,y) \in B(\frac{\varepsilon}{2}) \circ B(\frac{\varepsilon}{2})$alalım. Bu durumda, $(x,z) \in B(\frac{\varepsilon}{2})$ ve $(z,y) \in B(\frac{\varepsilon}{2})$ olacak şekilde bir $z \in X$ vardır. d bir metrik olduğundan,

$$d(x,y) \leq d(x,z) + d(y,z) < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

bulunur ve buradan $(x,y) \in B(\varepsilon)$ elde edilir.

(UB4): Herhangi iki $\varepsilon_1, \varepsilon_2 > 0$ alalım. Bu durumda, $\varepsilon_3 = \min\{\varepsilon_1, \varepsilon_2\}$dersek,

$$B_{\varepsilon_3}(x) = B_{\varepsilon_1}(x) \cap B_{\varepsilon_2}(x)$$

olacağından,

$$B(\varepsilon_3) = B(\varepsilon_1) \cap B(\varepsilon_2)$$

elde edilir. Dolayısıyla, (UB1) ve (UB4) koşulları $\mathfrak{B}$ topluluğunun $X \times X$ üzerinde bir filtre tabanı olduğunu söyler.

Bu durumda, Önerme 2.28 yardımıyla,

$$\tau_{\mathscr{U}} = \{A \subseteq S \mid \forall x \in A \quad \exists \varepsilon > 0 \quad B_\varepsilon(x) \subseteq A\} \cup \{\emptyset\}$$

X üzerinde bir düzgün topoloji olur.

Önerme 2.30. $(X, \mathscr{U})$ bir düzgün uzay ve $V \in \mathscr{U}$ simetrik olsun. Bu durumda herhangi bir $U \in \mathscr{U}$ için

$$V \circ U \circ V = \bigcup \{V(x) \times V(y) \mid (x,y) \in U\}$$

olur.

İspat. Herhangi bir $U \in \mathscr{U}$ alalım ve $(u,v) \in V \circ U \circ V$ olsun. Bu durumda,

$$(u,a) \in V \quad \text{ve} \quad (a,b) \in U \quad \text{ve} \quad (b,v) \in V$$

olacak şekilde $a,b \in X$ elemanları vardır. V kümesi simetrik olduğundan $(u,v) \in V(a) \times V(b)$ ve

$$V(a) \times V(b) \subseteq \bigcup \{V(x) \times V(y) \mid (x,y) \in U\}$$

olduğundan,

$$V \circ U \circ V \subseteq \bigcup \{V(x) \times V(y) \mid (x,y) \in U\}$$

elde edilir. Ters kapsama için, herhangi bir $(u,v) \in \bigcup \{V(x) \times V(y) \mid (x,y) \in U\}$ alalım. Bu durumda,

$$(u,v) \in V(t) \times V(s)$$

olacak şekilde $(t,s) \in U$ vardır. Dolayısıyla, V kümesi simetrik olduğundan, $(u,t) \in V$ ve $(v,s) \in V$ olur ve $(t,s) \in U$ gerçeklendiğinden, "$\circ$" tanımı gereği

$$(u,v) \in V \circ U \circ V$$

elde edilir. Buradan istenilen,

$$\bigcup \{V(x) \times V(y) \mid (x,y) \in U\} \subseteq V \circ U \circ V$$

kapsaması elde edilir.

Önerme 2.31. $(X, \mathscr{U})$ bir düzgün uzay olsun. Bu durumda $\mathscr{U}$ topluluğuna ait her kümenin içi $\mathscr{U}$ topluluğuna aittir.

İspat. Herhangi bir $M \subseteq X \times X$ için $\mathrm{i}(M) = \{(x,y) \mid \exists U,V \in \mathscr{U} \quad U(x) \times V(y) \subseteq M\}$ olduğundan ve $U \cap V \in \mathscr{U}$ gerçeklendiğinden,

$$\mathrm{i}(M) = \{(x,y) \mid \exists U \in \mathscr{U} \quad U(x) \times U(y) \subseteq M\} \tag{2.13}$$

elde edilir. Herhangi bir $U \in \mathscr{U}$ alalım. Önerme 2.22-(e) şıkkından $V \circ V \circ V \subseteq U$ olacak şekilde $V \in \mathscr{U}$ simetrik kümesi vardır. Ayrıca, Önerme 2.30 kullanılırsa,

$$V \circ V \circ V = \bigcup \{V(x) \times V(y) \mid (x,y) \in V\}$$

gerçeklenir. Şimdi, $V \subseteq \mathrm{i}(U)$ olduğunu gösterelim. Herhangi bir $(x,y) \in V$ alalım. Bu durumda,

$$V(x) \times V(y) \subseteq V \circ V \circ V \subseteq U$$

olduğundan, (2.13) bağıntısı kullanılarak istenen kapsama elde edilir. $\mathscr{U}$ filtre olduğundan $\mathrm{i}(U) \in \mathscr{U}$ gerçeklenir.

Önerme 2.32. $(X, \mathscr{U})$ bir düzgün uzay olsun. Bu durumda $\mathscr{U}$ topluluğuna ait simetrik her kümenin içi simetriktir.

İspat. $U \in \mathscr{U}$ simetrik olsun ve herhangi bir $(x,y) \in \mathrm{i}(U)$ alalım. Bu durumda, Önerme 2.31 kullanılırsa,

$$V(x) \times V(y) \subseteq U$$

olacak şekilde bir $V \in \mathscr{U}$ vardır ve Önerme 2.22-(c) şıkkından,

$$W \subseteq V$$

olacak şekilde bir $W \in \mathscr{U}$ simetrik kümesi vardır. Buradan,

$$W(x) \times W(y) \subseteq V(x) \times V(y) \subseteq U$$

elde edilir. Şimdi,

$$W(y) \times W(x) \subseteq U$$

olduğunu gösterelim. Herhangi bir $(a,b) \in W(y) \times W(x)$ alalım. Bu durumda $W(x) \times W(y) \subseteq U$ gerçeklendiğinden $(b,a) \in U$ ve U kümesi simetrik olduğundan $(a,b) \in U$ bulunur. Dolayısıyla, $\mathrm{i}(U)$ kümesi simetriktir.

Teorem 2.33. $(X,\mathscr{U})$ bir düzgün uzay olsun. Bu durumda

$$\mathfrak{B} = \{U \in \mathscr{U} \mid U \text{ simetrik ve açık}\}$$

topluluğu $\mathscr{U}$ için bir tabandır.

İspat. Önerme 2.22-(b) şıkkından dolayı her $U \in \mathscr{U}$ için $U \cap U^{-1}$ simetriktir. Önerme 2.31 ve Önerme 2.32 kullanılarak,

$$\mathrm{i}(U \cap U^{-1}) \in \mathfrak{B}$$

elde edildiğinden $\mathfrak{B}$ topluluğu boştan farklıdır. Şimdi, Önerme 2.26 koşullarının sağlandığını gösterelim.

(UB1): Her $B \in \mathfrak{B}$ için $B \in \mathscr{U}$ olduğundan $\triangle \subseteq B$ olur.

(UB2): Herhangi bir $B \in \mathfrak{B}$ alalım. Bu durumda, B kümesi açık ve simetrik olduğundan B^{-1} kümesi açık ve simetriktir.

(UB3): Herhangi bir $B \in \mathfrak{B}$ alalım. Bu durumda, $B \in \mathscr{U}$ olduğundan

$$V \circ V \subseteq B$$

olacak şekilde bir $V \in \mathscr{U}$ simetrik kümesi vardır. Şimdi $\mathrm{i}(V) \in \mathfrak{B}$ ve $\mathrm{i}(V) \circ \mathrm{i}(V) \subseteq B$ olduğunu gösterelim.

Önerme 2.31 ve Önerme 2.32 yardımıyla, $\mathrm{i}(V) \in \mathscr{U}$ ve $\mathrm{i}(V)$ kümesinin simetrik olduğu elde edilir. Ayrıca $\mathrm{i}(V)$ açık olduğundan $\mathrm{i}(V) \in \mathfrak{B}$ olur.

Şimdi, $\mathrm{i}(V) \circ \mathrm{i}(V) \subseteq B$ olduğunu göstermek için, herhangi bir $(x,y) \in \mathrm{i}(V) \circ \mathrm{i}(V)$ alalım.

Bu durumda

$$(x,a),(a,y) \in \mathrm{i}(V)$$

olacak şekilde bir $a \in X$ vardır. $\mathrm{i}(V) \subseteq V$ olduğundan

$$(x,y) \in V \circ V$$

olur ve $V \circ V \subseteq B$ gerçeklendiğinden

$$(x,y) \in B$$

elde edilir.

(UB4): Herhangi iki $B_1, B_2 \in \mathfrak{B}$ alalım. Bu durumda B_1 ve B_2 kümeleri simetrik olduğundan $B_1 \cap B_2$ kümesi de simetriktir. Şimdi $B_1 \cap B_2$ kümesinin açık olduğunu gösterelim. B_1 ve B_2 kümeleri açık olduğundan, Önerme 2.31 kullanılarak,

$$\mathrm{i}(B_1 \cap B_2) = \{(x,y) \mid \exists U \in \mathscr{U} \quad U(x) \times U(y) \subseteq B_1 \cap B_2\} = \mathrm{i}(B_1) \cap \mathrm{i}(B_2) = B_1 \cap B_2$$

elde edilir.

Teorem 2.34. $(X, \tau_{\mathscr{U}})$ bir düzgün topolojik uzay olsun. Bu durumda $(X, \tau_{\mathscr{U}})$ uzayının Hausdorff uzay olabilmesi için gerek ve yeter koşul $\triangle = \bigcap\{U \mid U \in \mathscr{U}\}$ olmasıdır.

İspat. $(X, \tau_{\mathscr{U}})$ topolojik uzayı Hausdorff olsun. Her $U \in \mathscr{U}$ için $\triangle \subseteq U$ olduğundan,

$$\triangle \subseteq \bigcap\{U \mid U \in \mathscr{U}\} \tag{2.14}$$

elde edilir. Ters kapsama için, herhangi bir $(p,q) \in \bigcap\{U \mid U \in \mathscr{U}\}$ alalım. Her $U \in \mathscr{U}$ için $U^{-1} \in \mathscr{U}$ olduğundan, $(p,q) \in U^{-1}$ olur ve dolayısıyla $p \in U(q)$ bulunur. Şimdi q noktasının herhangi bir V komşuluğunu alalım. Komşuluk tanımından,

$$q \in O \subseteq V$$

olacak şekilde bir $O \in \tau_{\mathscr{U}}$ ve $O \in \tau_{\mathscr{U}}$ olduğundan,

$$W(q) \subseteq O \subseteq V$$

olacak şekilde bir $W \in \mathscr{U}$ vardır ve $p \in W(q)$ olduğundan, $p \in V$ elde edilir. Bunun anlamı $q \in \overline{\{p\}}$ olmasıdır. Uzay Hausdorff olduğundan, $p = q$ elde edilir.

Tersine, $\triangle = \bigcap\{U \mid U \in \mathscr{U}\}$ olduğunu kabul edelim. Herhangi bir $p \in X$ ve $q \in \overline{\{p\}}$ alalım.

Bu durumda her $U \in \mathscr{U}$ için $p \in U(q)$ olacağından, her $U \in \mathscr{U}$ için,

$$(q, p) \in U$$

olur ve hipotezden $p = q$ elde edilir. Buradan,

$$q \in \{p\}$$

elde edilir ve bu $\{p\}$ tek nokta kümesinin kapalı olduğunu söyler.

Şimdi, $(X, \tau_{\mathscr{U}})$ uzayının Hausdorff olduğunu gösterelim. Bunun için, $p \neq q$ olacak şekilde $p, q \in X$ alalım.Bu durumda $p \in X \setminus \{q\} \in \tau_{\mathscr{U}}$ olduğundan,

$$U(p) \subseteq X \setminus \{q\}$$

olacak şekilde $U \in \mathscr{U}$ vardır. (U4) koşulu ve Önerme 2.27-(b) kullanılırsa,

$$(V \circ V)(p) \subseteq U(p) \subseteq X \setminus \{q\}$$

olacak şekilde $V \in \mathscr{U}$ elde edilir. Şimdi $V(p) \cap V^{-1}(q) \neq \emptyset$ olduğunu kabul edelim. O halde,

$$r \in V(p) \cap V^{-1}(q)$$

olacak şekilde bir $r \in X$ vardır. Buradan, $(p, q) \in V \circ V$ ve dolayısıyla,

$$q \in (V \circ V)(p) \subseteq U(p) \subseteq X \setminus \{q\}$$

çelişkisi elde edilir. O halde,

$$V(p) \cap V^{-1}(q) = \emptyset$$

olmalıdır. Sonuç olarak, $(X, \tau_{\mathscr{U}})$ uzayının Hausdorff uzayı olduğunu gösterir.

Teorem 2.35. $\mathscr{U}$, X üzerinde bir düzgünlük olmak üzere, $(X, \tau_{\mathscr{U}})$ topolojik uzayı Hausdorff olsun. $\mathscr{U}$ sayılabilir bir tabana sahip ise $(X, \tau_{\mathscr{U}})$ topolojik uzayı metriklenebilirdir.

İspat. $\mathfrak{B} = \{V_1, V_2, V_3, \ldots\} \subseteq \mathscr{U}$ topluluğu $\mathscr{U}$ için sayılabilir bir taban olsun.

$U_0 = X \times X$ alalım.

$V_1 \in \mathscr{U}$ için,

$$U_1 \subseteq U_1 \circ U_1 \circ U_1 \subseteq V_1$$

olacak şekilde bir $U_1 \in \mathscr{U}$ simetrik kümesi vardır.

$V_2 \cap U_1 \in \mathscr{U}$ için,

$$U_2 \subseteq U_2 \circ U_2 \circ U_2 \subseteq V_2 \cap U_1$$

olacak şekilde bir $U_2 \in \mathscr{U}$ simetrik kümesi vardır.

$V_3 \cap U_2 \in \mathscr{U}$ için,

$$U_3 \subseteq U_3 \circ U_3 \circ U_3 \subseteq V_3 \cap U_2$$

olacak şekilde bir $U_3 \in \mathscr{U}$ simetrik kümesi vardır.

Bu şekilde devam edilerek aşağıdaki özellikleri sağlayan bir $(U_n)_{n \in \mathbb{N}} \subseteq \mathscr{U}$ azalan küme dizisi elde edilir:

$U_0 = X \times X$

Her $n \geq 1$ için,

$$U_{n+1} \circ U_{n+1} \circ U_{n+1} \subseteq U_n$$

$$U_n \subseteq V_n$$

$$U_n = U_n^{-1}$$

Şimdi bu küme dizisi yardımıyla aşağıdaki fonksiyonları tanımlayalım:

$$f : X \times X \to \mathbb{R}$$

$$f(x,y) = \begin{cases} 2^{-n} & (x,y) \in U_{n-1} \setminus U_n \\ 0 & (x,y) \in \bigcap\limits_{n \in \mathbb{N}} U_n \end{cases}$$

ve her $x, y \in X$ için, $A(x,y)$, ilk terimi x son terimi y olan bütün sonlu dizilerin kümesi olmak üzere,

$$d(x,y) = \inf\{\sum_{i=0}^{n} f(x_i, x_{i+1}) \mid (x_0, x_1, x_2, \ldots, x_{n+1}) \in A(x,y)\}$$

Şimdi, her $n \geq 1$ için,

$$U_n \subseteq \{(x,y) \mid d(x,y) < 2^{-n}\} \subseteq U_{n-1} \tag{2.15}$$

olduğunu gösterelim.

Herhangi bir $(x,y) \in U_n$ alalım. $d(x,y) \leq f(x,y)$ ve $f(x,y) < 2^{-n}$ olduğundan $d(x,y) < 2^{-n}$ olur. Dolayısıyla, her $n \geq 1$ için,

$$U_n \subseteq \{(x,y) \mid d(x,y) < 2^{-n}\}$$

kapsaması gerçeklenir. Şimdi,

$$\{(x,y) \mid d(x,y) < 2^{-n}\} \subseteq U_{n-1}$$

kapsamasını gösterelim. Bu kapsama için, her $n \in \mathbb{N}$ için,

$$f(x_0, x_{n+1}) \leq 2\sum_{i=0}^{n} f(x_i, x_{i+1}) \tag{2.16}$$

eşitsizliğinin sağlandığını göstermemiz yeterlidir. Çünkü, $d(x,y) < 2^{-n}$ ise, öyle bir $(x_0, x_1, \ldots, x_{n+1}) \in A(x,y)$ vardır ki,

$$\sum_{i=0}^{n} f(x_i, x_{i+1}) < 2^{-n}$$

sağlanır. (2.16) bağıntısı kullanılarak,

$$f(x,y) \leq 2\sum_{i=0}^{n} f(x_i, x_{i+1}) \leq 2(\frac{1}{2^n}) < \frac{1}{2^{n-1}}$$

elde edilir ve dolayısıyla $(x,y) \in U_{n-1}$ olur.

Şimdi, (2.16) bağıntısının $0, 1, \ldots, n-1$ tanesi için doğru olduğunu kabul edelim.

$$a = \sum_{i=0}^{n} f(x_i, x_{i+1})$$

diyelim ve $f(x,y) \leq 2a$ olduğunu gösterelim.

Durum 1. $a \geq \frac{1}{2}$ olsun. Bu durumda, f fonksiyonunun tanımı gereği,

$$f(x_0, x_{n+1}) \leq 1 \leq 2a$$

elde edilir.

Durum 2. $a = 0$ olsun. Bu durumda, f fonksiyonunun tanımı gereği, her $i = 0, 1, \ldots, n$ için,

$$f(x_i, x_{i+1}) \geq 0$$

olduğundan $a = 0$ olması için, her $i = 0, 1, \ldots, n$ için,

$$f(x_i, x_{i+1}) = 0$$

olmalıdır.

$1 \leq r \leq s \leq n$ için,

$$x_0, x_1, \ldots, x_r, x_{r+1}, x_{r+2}, \ldots, x_s, x_{s+1}, x_{s+2}, \ldots, x_{n+1}$$

sonlu dizisini göz önüne alalım. Tümevarım hipotezi ve $a = 0$ olmasından dolayı,

$$0 \leq f(x_0, x_r) \leq 2\sum_{i=0}^{r-1} f(x_i, x_{i+1}) = 0 \Rightarrow f(x_0, x_r) = 0$$

$$0 \leq f(x_r, x_s) \leq 2\sum_{i=r}^{s-1} f(x_i, x_{i+1}) = 0 \Rightarrow f(x_r, x_s) = 0$$

$$0 \leq f(x_s, x_{n+1}) \leq 2\sum_{i=s}^{n} f(x_i, x_{i+1}) = 0 \Rightarrow f(x_s, x_{n+1}) = 0$$

olur. f fonksiyonunun tanımından dolayı, her $n \in \mathbb{N}$ için

$$(x_0, x_r), (x_r, x_s), (x_s, x_{n+1}) \in U_n$$

bulunur. Her $n \in \mathbb{N}$ için,

$$U_n \circ U_n \circ U_n \subseteq U_{n-1}$$

olduğundan, $(x_0, x_{n+1}) \in U_{n-1}$ elde edilir. Buradan, f fonksiyonunun tanımı gereği,

$$f(x_0, x_{n+1}) = 0 = 2a$$

bulunur.

Durum 3. $0 < a < \frac{1}{2}$ olsun.

İlk olarak,

$$\sum_{i=0}^{h-1} f(x_i, x_{i+1}) \leq \frac{a}{2}$$

koşulunu sağlayan h sayılarının olduğunu kabul edelim ve

$$r = \max\{h \mid \sum_{i=0}^{h-1} f(x_i, x_{i+1}) \leq \frac{a}{2}\}$$

olsun. Bu durumda,

$$\sum_{i=0}^{r-1} f(x_i,x_{i+1}) \leq \frac{a}{2}$$

olur. Ayrıca,

$$\sum_{i=0}^{r} f(x_i,x_{i+1}) > \frac{a}{2}$$

olacağından,

$$\sum_{i=r+1}^{n} f(x_i,x_{i+1}) \leq \frac{a}{2}$$

elde edilir. Şimdi,

$$x_0,x_1,\ldots,x_r \text{ ve } x_{r+1},\ldots,x_{n+1}$$

sonlu dizilerini göz önüne alalım. Tümevarım hipotezinden dolayı,

$$f(x_0,x_r) \leq 2\sum_{i=0}^{r-1} f(x_i,x_{i+1}) \leq 2(\frac{a}{2}) = a < 1$$

$$f(x_{r+1},x_{n+1}) \leq 2\sum_{i=r+1}^{n} f(x_i,x_{i+1}) \leq 2(\frac{a}{2}) = a < 1$$

ve her $i = 0,1,\ldots,n$ için $f(x_i,x_{i+1}) \geq 0$ olduğundan,

$$f(x_i,x_{i+1}) \leq a < 1$$

elde edilir. Bu durumda f fonksiyonunun tanımından dolayı,

$$f(x_0,x_r) = 2^{-m_1},\ f(x_r,x_{r+1}) = 2^{-m_2},\ f(x_{r+1},x_{n+1}) = 2^{-m_3}$$

olacak şekilde $m_1,m_2,m_3 \in \mathbb{N}$ doğal sayıları vardır. $m = \min\{m_1,m_2,m_3\}$ alınırsa,

$$f(x_0,x_r) < 2^{-m} \leq a,\ f(x_r,x_{r+1}) < 2^{-m} \leq a,\ f(x_{r+1},x_{n+1}) < 2^{-m} \leq a$$

olur ve buradan

$$(x_0,x_r),(x_r,x_{r+1}),(x_{r+1},x_{n+1}) \in U_m$$

elde edilir. Ayrıca,

$$U_m \circ U_m \circ U_m \subseteq U_{m-1}$$

olduğundan $(x_0,x_{n+1}) \in U_{m-1}$ gerçeklenir. Buradan,

$$f(x_0,x_{n+1}) \leq 2^{-(m-1)} = 2 \cdot 2^{-m} \leq 2a$$

bulunur.

Şimdi,

$$\sum_{i=0}^{h-1} f(x_i,x_{i+1}) \leq \frac{a}{2}$$

koşulunu sağlayan bir h sayısının olmadığını, yani,

$$f(x_0,x_1) > \frac{a}{2}$$

olduğunu kabul edelim. Bu durumda, tümevarım hipotezinden dolayı,

$$f(x_0,x_1) \leq a < \frac{1}{2} \quad \text{ve} \quad f(x_1,x_{n+1}) \leq 2a < 1$$

gerçeklenir ve f fonksiyonunun tanımından dolayı,

$$f(x_0,x_1) = 2^{-m_1} \quad \text{ve} \quad f(x_1,x_{n+1}) = 2^{-m_2}$$

olacak şekilde $m_1,m_2 \in \mathbb{N}$ doğal sayıları vardır. $m = \min\{m_1,m_2\}$ alınırsa,

$$f(x_0,x_1) < 2^{-m} \leq a \quad \text{ve} \quad f(x_1,x_{n+1}) < 2^{-m} \leq a$$

olur ve buradan

$$(x_0,x_0),\quad (x_0,x_1),\quad (x_1,x_{n+1})\in U_m$$

elde edilir. Ayrıca

$$U_m\circ U_m\circ U_m\subseteq U_{m-1}$$

olduğundan $(x_0,x_{n+1})\in U_{m-1}$ gerçeklenir. Dolayısıyla,

$$f(x_0,x_{n+1})\leq 2^{-(m-1)}=2\cdot 2^{-m}\leq 2a$$

elde edilir.

Bu şekilde, (2.16) bağıntısının sağlandığı gösterilmiş olur. Şimdi, d fonksiyonunun Tanım 2.17 koşullarını sağladığını gösterelim.

(M1): $x=y$ olsun. Bu durumda, her $n\in\mathbb{N}$ için $(x,x)\in U_n$ olduğundan,

$$0\leq d(x,y)\leq f(x,y)=f(x,x)=0\Rightarrow d(x,y)=0$$

elde edilir.
$d(x,y)=0$ olsun. Bağıntı (2.15) kullanılırsa, her $n\in\mathbb{N}$ için,

$$(x,y)\in\{(x,y)\mid d(x,y)<2^{-n}\}$$

olacağından,

$$(x,y)\in U_n\subseteq V_n$$

elde edilir. $(X,\tau_{\mathscr{U}})$ bir Hausdorff uzay olduğundan,

$$(x,y)\in\bigcap_{n\in\mathbb{N}}V_n=\triangle$$

olur ve bu $x=y$ olduğunu gösterir.

(M2): Her $n \in \mathbb{N}$ için $U_n = U_n^{-1}$ olduğundan, $f(x,y) = f(y,x)$ olur ve dolayısıyla,

$$d(x,y) = d(y,x)$$

elde edilir.

(M3):

$$A = \{\sum_{i=0}^{n} f(x_i, x_{i+1}) \mid (x_0, x_1, \ldots, x_n, x_{n+1}) \in A(x,z)\}$$

$$B = \{\sum_{i=0}^{m} f(x_i, x_{i+1}) \mid (x_0, x_1, \ldots, x_m, x_{m+1}) \in A(x,y)\}$$

$$C = \{\sum_{i=0}^{r} f(x_i, x_{i+1}) \mid (x_0, x_1, \ldots, x_r, x_{r+1}) \in A(y,z)\}$$

olsun.
Herhangi bir $b \in B$ ve $c \in C$ alalım. Bu durumda,

$$b = f(x_0, x_1) + f(x_1, x_2) + \ldots\ldots + f(x_m, x_{m+1})$$

ve

$$c = f(y_0, y_1) + f(y_1, y_2) + \ldots\ldots + f(y_r, y_{r+1})$$

olacak şekilde $(x_0, x_1, x_2, \ldots, x_{m+1}) \in A(x,y)$, $(y_0, y_1, \ldots, y_{r+1}) \in A(y,z)$ vardır. $b + c \in A$ olduğundan,

$$d(x,z) \leq b + c$$

ve dolayısıyla, $d(x,z)$, $B + C$ kümesi için bir alt sınır olur. Bu durumda, infimum tanımından,

$$d(x,z) \leq \inf(B + C) = \inf B + \inf C = d(x,y) + d(y,z)$$

elde edilir.

2.5. DAĞILIM FONKSİYONLARINA GİRİŞ

Tanım 2.36. Genişletilmiş reel sayılar kümesini $[0,1]$ kompakt aralığına taşıyan, $-\infty$ noktasında sıfır ve $+\infty$ noktasında 1 değerlerini alan monoton artan fonksiyonlara *dağılım fonksiyonu* denir. $\mathbb{R}$ üzerinde soldan sürekli dağılım fonksiyonlarının kümesini Δ ile göstereceğiz.

Herhangi iki $F,G \in \Delta$ ve $h \in]0,1]$ alalım. J_h ile $]-\frac{1}{h},\frac{1}{h}[$ aralığını ve $(F,G;h)$ ile her $x \in J_h$ için,

$$F(x-h)-h \leq G(x) \leq F(x+h)+h \tag{2.17}$$

koşulunu göstereceğiz. Bu durumda,

$$A(F,G) = \{h \in]0,1] \mid (F,G;h) \text{ ve } (G,F;h) \text{ sağlanır}\}$$

olmak üzere $1 \in A(F,G)$ olduğundan $A(F,G)$ kümesi boştan farklıdır. Şimdi,

$$d_L(F,G) = \inf A(F,G) \tag{2.18}$$

olacak şekilde bir $d_L : \Delta \times \Delta \to \mathbb{R}$ fonksiyonunu tanımlayalım.

Bu bölümde Δ kümesine ait bazı temel örneklerden bahsedeceğiz. Bulgular bölümünde, Δ kümesinin özelliklerini, d_L fonksiyonunun Δ kümesi üzerinde bir metrik olduğunu ve (Δ, d_L) metrik uzayının kompakt olduğunu ispatlayacağız. İspatlarımız kaynaklarda verilen ispatlardan farklı olacaktır.

Dağılım fonksiyonlarının diğer disiplinlerle uygulama alanları geniştir. Örneğin; olasılık teorisinde kullanılan genel bir örnek aşağıdaki gibidir. (Ω, Σ, P) olasılık uzayı ve X bu uzay üzerinde bir rastgele değişken olsun. Olasılık teorisinde olasılık yoğunluk fonksiyonu olarak bilinen ve

$$F_X(x) = \begin{cases} P\{w \in \Omega \mid X(w) \leq x\} & , -\infty < x < +\infty \\ 0 & , x = -\infty \\ 1 & , x = +\infty \end{cases}$$

şeklinde tanımlanan $F_X : [-\infty, +\infty] \to [0,1]$ fonksiyonu sağdan sürekli bir dağılım fonksiyonudur[6].

Örnek 2.37. (Ω, Σ, P) olasılık uzayı ve X bu uzay üzerinde bir rastgele değişken olsun.

$$F_X(x) = \begin{cases} P\{w \in \Omega \mid X(w) < x\} & , -\infty < x < +\infty \\ 0 & , x = -\infty \\ 1 & , x = +\infty \end{cases}$$

şeklinde tanımlanan $F_X : [-\infty, +\infty] \to [0,1]$ fonksiyonu Δ kümesine aittir. Gerçekten,

(a) $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ ve $x_1 \leq x_2$ olsun. P olasılık ölçüsü olduğundan,

$$\begin{aligned} x_1 \leq x_2 \Rightarrow & \{w \in \Omega \mid X(w) < x_1\} \subseteq \{w \in \Omega \mid X(w) < x_2\} \\ \Rightarrow & P(\{w \in \Omega \mid X(w) < x_1\}) \leq P(\{w \in \Omega \mid X(w) < x_2\}) \\ \Rightarrow & F_X(x_1) \leq F_X(x_2) \end{aligned}$$

elde edilir. Buradan, F_X fonksiyonunun monoton artan olduğu görülür.

(b) Herhangi bir $x \in \mathbb{R}$ ve $(y_n)_{n\in\mathbb{N}} = (x - \frac{1}{n})_{n\in\mathbb{N}}$ monoton artan dizisini alalım. Her $n \in \mathbb{N}$ için $A_n = \{w \mid X(w) < y_n\}$ olmak üzere,

$$\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n = \{w \mid X(w) < x\} \tag{2.19}$$

olduğunu ispatlayalım:

Herhangi bir $w \in \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n$ alalım. Bu durumda,

$$X(w) < y_N$$

olacak şekilde bir $N \in \mathbb{N}$ vardır. $y_N < x$ olduğundan $w \in \{w \mid X(w) < x\}$ bulunur ve böylece

$$\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n \subseteq \{w \mid X(w) < x\} \tag{2.20}$$

elde edilir. Ters kapsama için, herhangi bir $w \in \{w \mid X(w) < x\}$ alalım. Doğal sayılar üstten sınırsız olduğundan $\frac{1}{N} < x - X(w)$ olacak şekilde bir $N \in \mathbb{N}$ vardır. Bu durumda $w \in A_N$ bulunur. Dolayısıyla,

$$\{w \mid X(w) < x\} \subseteq \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n \tag{2.21}$$

elde edilir. (2.20) ve (2.21) bağıntılarından istenilen eşitlik elde edilir. (2.19) bağıntısı ve olasılık ölçüsünün özellikleri kullanılarak,

$$\begin{aligned} F(x-) &= \lim_{h\to 0^+} F_X(x-h) = \lim_{n\to\infty} F_X(y_n) = \lim_{n\to\infty} P(\{w \mid X(w) < y_n\}) = \lim_{n\to\infty} P(A_n) \\ &= P(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n) = P(\{w \mid X(w) < x\}) = F_X(x) \end{aligned}$$

elde edilir. Buradan F_X fonksiyonunun $\mathbb{R}$ üzerinde soldan sürekli olduğu görülür.

Örnek 2.38. Her $a \in \mathbb{R}$ için,

$$\varepsilon_a(x) = \begin{cases} 0 \ , & -\infty \leq x \leq a \\ 1 \ , & a < x \leq +\infty \end{cases} \tag{2.22}$$

ve

$$\varepsilon_{+\infty}(x) = \begin{cases} 0 \ , & -\infty \leq x < +\infty \\ 1 \ , & x = +\infty \end{cases} \tag{2.23}$$

$$\varepsilon_{-\infty}(x) = \begin{cases} 0 \ , & x = -\infty \\ 1 \ , & -\infty < x \leq +\infty \end{cases} \tag{2.24}$$

şeklinde tanımlanan ε_a, $\varepsilon_{+\infty}$, $\varepsilon_{-\infty}$ fonksiyonları ve her $-\infty < a < b < +\infty$ için,

$$U_{ab}(x) = \begin{cases} 0 \ , & x \in [-\infty, a] \\ \frac{x-a}{b-a} \ , & x \in [a,b] \\ 1 & x \in [b, +\infty] \end{cases} \tag{2.25}$$

şeklinde tanımlanan U_{ab} fonksiyonu Δ kümesine aittir.

Tanım 2.39. Örnek 2.38 de tanımlanan ε_a fonksiyonuna *a noktasındaki birim basamak fonksiyonu* denir.

Önerme 2.40. Δ kümesi üzerinde aşağıdaki şekilde tanımlanan " $\leq$ " bağıntısı bir sıralama bağıntısıdır ; Her $F, G \in \Delta$ için,

$$F \leq G \Leftrightarrow \text{her } x \in \mathbb{R} \quad \text{için} \quad F(x) \leq G(x) \tag{2.26}$$

İspat. Her $F \in \Delta$, $x \in \mathbb{R}$ için $F(x) \in \mathbb{R}$ gerçeklendiğinden ve " $\leq$ " $\mathbb{R}$ üzerinde bir sıralama bağıntısı olduğundan,

Her $F, G, H \in \Delta$ ve her $x \in \mathbb{R}$ için,

(a) $F(x) \leq F(x)$

(b) $F(x) \leq G(x)$ ve $G(x) \leq F(x) \Rightarrow F(x) = G(x)$

(c) $F(x) \leq G(x)$ ve $G(x) \leq H(x) \Rightarrow F(x) \leq H(x)$

sağlanır. Dolayısıyla, bağıntı (2.26) de tanımlanan " $\leq$ " bağıntısı Δ kümesi üzerinde bir sıralama bağıntısıdır. Fakat, tam sıralama bağıntısı değildir. Örneğin, ε_3 ile U_{15} sıralanamaz.

Önerme 2.41. Örnek 2.38 de tanımlanan fonksiyonlar için aşağıdakiler gerçeklenir:

(a) $b \leq a \Leftrightarrow \varepsilon_a \leq \varepsilon_b$

(b) $\varepsilon_{-\infty}$, Δ kümesinin maksimal elemanıdır.

(c) $\varepsilon_{+\infty}$, Δ kümesinin minimal elemanıdır.

İspat. (a) $b \leq a$ olsun ve herhangi bir $x \in \mathbb{R}$ alalım.
$x \leq b \leq a$ ise $\varepsilon_a(x) = 0 = \varepsilon_b(x)$ eşitlik durumu elde edilir.
$b < x \leq a$ ise $\varepsilon_a(x) = 0 < \varepsilon_b(x) = 1$ elde edilir.
$b \leq a \leq x$ ise $\varepsilon_a(x) = 1 = \varepsilon_b(x)$ eşitlik durumu elde edilir.

(b) $\varepsilon_{-\infty} \leq F$ olacak şekilde herhangi bir $F \in \Delta$ ve herhangi bir $x \in]-\infty, +\infty]$ alalım. $\varepsilon_{-\infty} \leq F$ ve $\varepsilon_{-\infty}(x) = 1$ olduğundan $1 \leq F(x)$ elde edilir. Ayrıca $F \in \Delta$ olduğundan

$$F(x) = 1 \quad \text{ve} \quad F(-\infty) = 0$$

olur. Buradan $F = \varepsilon_{-\infty}$ bulunur.

(c) $F \leq \varepsilon_{+\infty}$ olacak şekilde herhangi bir $F \in \Delta$ ve herhangi bir $x \in [-\infty, +\infty[$ alalım. $F \leq \varepsilon_{+\infty}$ ve $\varepsilon_{+\infty}(x) = 0$ olduğundan $F(x) \leq 0$ elde edilir. Ayrıca $F \in \Delta$ olduğundan

$$F(x) = 0 \quad \text{ve} \quad F(+\infty) = 1$$

olur. Buradan $F = \varepsilon_{+\infty}$ elde edilir.

Önerme 2.42. $F \in \Delta$ ve $A \subseteq \mathbb{R}$ sınırlı bir küme olsun. Bu durumda,

$$\sup F(A) = F(\sup A) \tag{2.27}$$

eşitliği gerçeklenir.

İspat. $\sup A = \alpha$ ve $\sup F(A) = \beta$ diyelim. F monoton artan bir fonksiyon olduğundan,

$$\beta \leq F(\alpha) \tag{2.28}$$

elde edilir. Ters eşitsizliği göstermek için,

$$\beta < F(\alpha)$$

olduğunu kabul edelim. F fonksiyonunun α noktasındaki soldan sürekliliğini kullanırsak, $0 < \varepsilon < F(\alpha) - \beta$ pozitif sayısına karşılık,

$$x \in A \cap]\alpha - \delta, \alpha[\Rightarrow F(\alpha) < F(x) + \varepsilon \tag{2.29}$$

koşulunu sağlayan bir $\delta > 0$ vardır. $\alpha = \sup A$ olduğundan $\frac{\delta}{2} > 0$ sayısına karşılık,

$$\alpha - \frac{\delta}{2} < x_0 \tag{2.30}$$

olacak şekilde $x_0 \in A$ vardır.

(2.29), (2.30) bağıntıları ve F fonksiyonunun monoton artanlığı kullanılarak,

$$\beta < F(\alpha) - \varepsilon < F(\alpha - \frac{\delta}{2}) \leq F(x_0) \leq \beta$$

çelişkisi elde edilir. Böylece,

$$F(\alpha) \leq \beta \tag{2.31}$$

bulunur.

İstenilen eşitlik (2.28) ve (2.31) bağıntılarından elde edilir.

2.5.1. Uzaklık Dağılım Fonksiyonlarına Giriş

Tanım 2.43. $F(0) = 0$ koşulunu sağlayan bir $F \in \Delta$ fonksiyonuna, *uzaklık dağılım fonksiyonu* denir. Bütün uzaklık dağılım fonksiyonlarının kümesini Δ^+ ile göstereceğiz. Bu yüzden,

$$\Delta^+ = \{F \in \Delta \mid F(0) = 0\}$$

olur. Bu tanımdan, aşağıdaki özellikleri elde ederiz :

(a) $\varepsilon_0 \in \Delta^+$ olduğundan Δ^+ kümesi boştan farklıdır.

(b) $F \in \Delta^+$ ise, bu durumda, $F : [0,+\infty] \to [0,1]$ şeklinde tanımlıdır. Çünkü; F fonksiyonu monoton artan ve $F(0) = 0$ olduğundan, F fonksiyonunun tanım kümesini $[0,+\infty]$ olarak düşünebiliriz.

(c) ε_0, Δ^+ kümesinin maksimum elemanı ve $\varepsilon_{+\infty}$ ise Δ^+ kümesinin hala minimal elemanıdır.

2.6. ÜÇGEN FONKSİYONU VE ÜÇGENSEL NORM KAVRAMLARI

Tanım 2.44. Aşağıdaki özellikleri sağlayan bir $t : [0,1] \times [0,1] \to [0,1]$ fonksiyonuna *üçgensel norm (t-norm)* denir. Her $x,y,z \in [0,1]$ için,

(a) $t(t(x,y),z) = t(x,t(y,z))$

(b) $t(x,y) = t(y,x)$

(c) $x_1 \leq x_2 \quad \text{ve} \quad y_1 \leq y_2 \Rightarrow t(x_1,y_1) \leq t(x_2,y_2)$

(d) $t(1,x) = t(x,1) = x$

Örnek 2.45. Aşağıdaki şekilde tanımlanan fonksiyonlar birer t-normdur. Her $x,y \in [0,1]$ için,

(a) $M(x,y) = \min\{x,y\} = x \wedge y$

(b) $\Pi(x,y) = x \cdot y$

(c) $Z(x,y) = \begin{cases} 0\,, & (x,y) \in [0,1[\times[0,1] \\ x\,, & x \in [0,1]\,,\, y = 1 \\ y\,, & x = 1\,,\, y \in [0,1] \end{cases}$

Tanım 2.46. Aşağıdaki özellikleri sağlayan bir $T : \Delta^+ \times \Delta^+ \to \Delta^+$ fonksiyonuna *üçgen fonksiyon* denir. Her $F,G,H \in \Delta^+$ için,

(a) $T(T(F,G),H) = T(F,T(G,H))$

(b) $T(F,G) = T(G,F)$

(c) $F \leq G \Rightarrow T(F,H) \leq T(G,H)$

(d) $T(\varepsilon_0,F) = T(F,\varepsilon_0) = F$

Örnek 2.47. t soldan sürekli bir t-norm olmak üzere,

$$T_t(F,G)(x) = \sup\{t(F(u),G(v)) \mid u+v=x\} \tag{2.32}$$

şeklinde tanımlanan $T_t : \Delta^+ \times \Delta^+ \to \Delta^+$ bir fonksiyon belirtir. Çünkü, t bir fonksiyon olduğundan iyi tanımlıdır ve dolayısıyla T_t iyi tanımlıdır. Ayrıca, her $F,G \in \Delta^+$ için $T_t(F,G)$, Δ^+ kümesinin elemanıdır. Gerçekten,

(a) $u,v \geq 0$ olduğundan $x=0$ olması için $u=0$ ve $v=0$ olmalıdır. Bu durumda,

$$T_t(F,G)(0) = t(F(0),G(0)) = t(0,0) \leq t(1,0) = 0$$

ve $0 \leq t(0,0)$ olduğundan $T_t(F,G)(0) = 0$ elde edilir.

(b) $t(F(+\infty),G(+\infty)) = t(1,1) = 1 \leq T_t(F,G)(+\infty)$ ve $T_t(F,G)(+\infty) \leq 1$ olduğundan $T_t(F,G)(+\infty) = 1$ elde edilir.

(c) Herhangi bir $\varepsilon > 0$ ve $x \in]0,+\infty[$ alalım. Bu durumda,

$$T_t(F,G)(x) < t(F(u),G(v)) + \frac{\varepsilon}{2}$$

olacak şekilde $u > 0$, $v > 0$, $u+v=x$ vardır. Ayrıca, t fonksiyonu soldan sürekli olduğundan $\frac{\varepsilon}{2} > 0$ sayısına karşılık,

$$F(u)-\delta_1 < a < F(u) \quad \text{ve} \quad G(v)-\delta_1 < b < G(v) \Rightarrow t(F(u),G(v)) < t(a,b) + \frac{\varepsilon}{2} \tag{2.33}$$

olacak şekilde $\delta_1 > 0$ vardır. F ve G fonksiyonlarının soldan sürekliliğinden $\delta_1 > 0$ sayısına karşılık,

$$\begin{aligned} u-\delta_2 < s < u &\Rightarrow F(u)-\delta_1 < F(s) \\ v-\delta_3 < t < v &\Rightarrow G(v)-\delta_1 < G(t) \end{aligned} \tag{2.34}$$

olacak şekilde $\delta_2, \delta_3 > 0$ sayıları vardır. Bu durumda $\delta = \delta_2 + \delta_3$ seçilirse, (2.33) ve (2.34) bağıntılarından, $\quad x-\delta < y = s+t < x$ ise

$$T_t(F,G)(x) < t(F(u),G(v)) + \frac{\varepsilon}{2} < t(F(s),G(t)) + \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2}$$

olur. Dolayısıyla,

$$T_t(F,G)(x) < T_t(F,G)(y) + \varepsilon$$

elde edilir.

(d) $x < y$ olsun. $x = u+v$ ve $y = s+t$ olmak üzere $u+v < s+t$ olduğundan, $t(F(u),G(v)) \leq t(F(s),G(t))$ ve dolayısıyla,

$$T_t(F,G)(x) \leq T_t(F,G)(y)$$

elde edilir.

(a), (b), (c) ve (d) şıklarından istenilen elde edilir. Şimdi T_t fonksiyonunun Tanım 2.46 koşullarını sağladığını göstermek için herhangi bir $x \in [0,+\infty[$ ve $F,G,H \in \Delta^+$ alalım. t soldan sürekli bir t-norm olduğundan,

(a) $T_t(T_t(F,G),H)(x) = \sup\{t(T_t(F,G)(u),H(s)) \mid u+s = x\}$
$=\sup\{t(\sup\{t(F(v),G(w)) \mid v+w = u\},H(s)) \mid u+s = x\}$
$=\sup\{\sup\{t(t(F(v),G(w)),H(s)) \mid v+w = u\} \mid u+s = x\}$
$=\sup\{t(t(F(v),G(w)),H(s)) \mid (v+w)+s = x\}$
$=\sup\{t(F(v),t(G(w),H(s)) \mid v+(w+s) = x\}$
$=\sup\{\sup\{t(F(v),t(G(w),H(s)) \mid v+(w+s) = x\}\}$
$=\sup\{t(F(v),\sup\{t(G(w),H(s) \mid w+s = k)\}) \mid v+k = x\}$
$=\sup\{t(F(v),T_t(G,H)(k)) \mid v+k = x\}$
$=T_t(F,T_t(G,H))(x)$
elde edilir.

(b) $u+v = x$ olmak üzere, $t(F(u),G(v)) = t(G(v),F(u))$ olduğundan,

$$T_t(F,G)(x) = T_t(G,F)(x)$$

elde edilir.

(c) $F \leq G$ olsun. Bu durumda, t fonksiyonu monoton artan olduğundan,

$$T_t(F,H)(x) \leq T_t(G,H)(x)$$

elde edilir.

(d) $T_t(\varepsilon_0,F)(x) = \sup\{t(\varepsilon_0(u),F(v)) \mid u+v=x\}$ olmak üzere,

$$t(\varepsilon_0(u),F(v)) \leq t(1,F(v)) \leq t(1,F(x)) = F(x)$$

olduğundan,

$$T_t(\varepsilon_0,F)(x) \leq F(x) \tag{2.35}$$

ve $u > 0$ için,

$$t(\varepsilon_0(u),F(v)) = t(1,F(v)) = F(v) \leq T_t(\varepsilon_0,F)(x)$$

gerçeklenir. Buradan

$$\sup\{F(v) \mid v \in [0,x]\} \leq T_t(\varepsilon_0,F)(x)$$

ve dolayısıyla,

$$F(x) \leq T_t(\varepsilon_0,F)(x) \tag{2.36}$$

bulunur. Sonuç olarak, (2.35) ve (2.36) bağıntılarından,

$$F(x) = T_t(\varepsilon_0,F)(x)$$

elde edilir.

Örnek 2.48. t soldan sürekli bir t-norm olmak üzere,

$$\mathbf{T}(F,G)(x) = t(F(x),G(x)) \tag{2.37}$$

şeklinde tanımlanan $\mathbf{T} : \Delta^+ \times \Delta^+ \to \Delta^+$ bir fonksiyon belirtir. Çünkü, t bir fonksiyon olduğundan iyi tanımlıdır ve dolayısıyla $\mathbf{T}$ iyi tanımlıdır. Ayrıca, her $F,G \in \Delta^+$ için $\mathbf{T}(F,G)$, Δ^+ kümesinin elemanıdır. Gerçekten,

(a) $\mathbf{T}(F,G)(0) = t(F(0),G(0)) = t(0,0) = 0$

(b) $\mathbf{T}(F,G)(+\infty) = t(F(+\infty),G(+\infty)) = t(1,1) = 1$

(c) $x < y$ olsun. $\mathbf{T}(F,G)(x) = t(F(x),G(x)) \leq t(F(y),G(y)) = \mathbf{T}(F,G)(y)$ olur.

(d) Herhangi bir $\varepsilon > 0$ ve $x_0 \in]0,+\infty[$ alalım. t fonksiyonu $(F(x_0),G(x_0))$ noktasında soldan sürekli olduğundan,

$$F(x_0) - \delta < a < F(x_0) \quad \text{ve} \quad G(x_0) - \delta < b < G(x_0) \Rightarrow t(F(x_0),G(x_0)) < t(a,b) + \varepsilon \tag{2.38}$$

olacak şekilde bir $\delta > 0$ vardır. Ayrıca, F ve G fonksiyonlarının soldan sürekliliğinden,

$$\begin{aligned} x_0 - \delta_1 < x < x_0 \Rightarrow F(x_0) - \delta < F(x) \\ x_0 - \delta_2 < x < x_0 \Rightarrow G(x_0) - \delta < G(x) \end{aligned} \tag{2.39}$$

olacak şekilde $\delta_1, \delta_2 > 0$ vardır. $\eta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$ seçilirse, (2.38) ve (2.39) bağıntılarından, $x_0 - \eta < x < x_0$ ise

$$\mathbf{T}(F,G)(x_0) = t(F(x_0),G(x_0)) < t(F(x),G(x)) + \varepsilon = \mathbf{T}(F,G)(x) + \varepsilon$$

elde edilir. (a), (b), (c) ve (d) şıklarından istenilen elde edilir. Şimdi $\mathbf{T}$ fonksiyonunun Tanım 2.46 koşullarını sağladığını göstermek için herhangi bir $x \in [0,+\infty[$ ve $F,G,H \in \Delta^+$ alalım. t soldan sürekli bir t-norm olduğundan,

(a)

$$\begin{aligned}\mathbf{T}(\mathbf{T}(F,G),H)(x) &= t(\mathbf{T}(F,G)(x),H(x))\\ &= t(t(F(x),G(x)),H(x)) = t(F(x),t(G(x),H(x)))\\ &= t(F(x),\mathbf{T}(G,H)(x)) = \mathbf{T}(F,\mathbf{T}(G,H))(x)\end{aligned}$$

elde edilir.

(b) $\mathbf{T}(F,G)(x) = t(F(x),G(x)) = t(G(x),F(x)) = \mathbf{T}(G,F)(x)$
elde edilir.

(c) $G \leq H$ olsun. Bu durumda,

$$\mathbf{T}(F,G)(x) = t(F(x),G(x)) \leq t(F(x),H(x)) = \mathbf{T}(F,H)(x)$$

elde edilir.

(d) $x = 0$ için $\mathbf{T}(F,\varepsilon_0)(0) = t(F(0),\varepsilon_0(0)) = 0 = F(0)$ olduğundan istenen sağlanır. $x \in]0,+\infty[$ için,

$$\mathbf{T}(F,\varepsilon_0)(x) = t(F(x),\varepsilon_0(x)) = t(F(x),1) = F(x)$$

elde edilir.

2.7. OLASILIKSAL METRİK UZAY

Tanım 2.49. S boştan farklı bir küme, $F : S \times S \to \Delta^+$ bir fonksiyon ve T bir üçgen fonksiyon olsun. Bu durumda aşağıdaki koşulları sağlayan (S,F,T) üçlüsüne *olasılıksal metrik uzay* denir. Her $p,q,r \in S$ için,

(a) $F(p,q) = \varepsilon_0 \Leftrightarrow p = q$

(b) $F(p,q) = F(q,p)$

(c) $F(p,r) \geq T(F(p,q), F(q,r))$

Bundan sonra $F(p,q)$ dağılım fonksiyonunu F_{pq} ve x noktasındaki değerini $F_{pq}(x)$ ile göstereceğiz.

Tanım 2.50. t soldan sürekli bir t-norm olmak üzere, (S,F,T_t) üçlüsüne *Menger uzayı* denir.

Önerme 2.51. $(S,F,\mathbf{T})$ bir olasılıksal metrik uzay olsun. Bu durumda, her $a,b \in]0,+\infty[$ için,

$$\mathbf{T}(\varepsilon_a,\varepsilon_b) \geq \varepsilon_{a+b}$$

gerçeklenir.

İspat. Herhangi bir $a,b \in]0,+\infty[$ alalım ve $a < b$ olsun. $\mathbf{T}(\varepsilon_a,\varepsilon_b)(+\infty) = \varepsilon_{a+b}(+\infty) = 1$ olduğundan, $]0,+\infty[$ arasında

$$\mathbf{T}(\varepsilon_a,\varepsilon_b) \geq \varepsilon_{a+b} \tag{2.40}$$

olduğunu göstermemiz yeterli olacaktır. Bunun için herhangi bir $x \in]0,+\infty[$ alalım ve (2.40) bağıntısının sağlandığını gösterelim. İlk olarak, $x \leq a+b$ olduğunu kabul edelim. Bu durumda, $\varepsilon_{a+b}(x) = 0 \leq t(\varepsilon_a(x),\varepsilon_b(x))$ olduğundan,

$$\mathbf{T}(\varepsilon_a,\varepsilon_b)(x) \geq \varepsilon_{a+b}(x)$$

elde edilir. Şimdi, $x > a+b$ olsun. Bu durumda, $x > a$ ve $x > b$ olacağından,

$$\mathbf{T}(\varepsilon_a, \varepsilon_b)(x) = t(\varepsilon_a(x), \varepsilon_b(x)) = t(1,1) = 1 = \varepsilon_{a+b}(x)$$

elde edilir.

Önerme 2.52. (S,F,T_t) bir Menger uzayı olsun. Bu durumda, her $a,b \in]0,+\infty[$ için,

$$T_t(\varepsilon_a, \varepsilon_b) \geq \varepsilon_{a+b}$$

gerçeklenir.

İspat. Herhangi bir $a,b \in]0,+\infty[$ alalım ve $a < b$ olsun. $T_t(\varepsilon_a, \varepsilon_b)(+\infty) = \varepsilon_{a+b}(+\infty) = 1$ olduğundan, $]0,+\infty[$ arasında

$$T_t(\varepsilon_a, \varepsilon_b) \geq \varepsilon_{a+b} \tag{2.41}$$

olduğunu göstermemiz yeterli olacaktır. Bunun için herhangi bir $x \in]0,+\infty[$ alalım ve (2.41) bağıntısının sağlandığını gösterelim. İlk olarak $x \leq a+b$ olduğunu kabul edelim ve $u+v = x$ olacak şekilde $u,v \in]0,+\infty[$ alalım. Bu durumda,

$$t(\varepsilon_a(u), \varepsilon_b(v)) = 0$$

olacağından,

$$T_t(\varepsilon_a, \varepsilon_b)(x) = \varepsilon_{a+b}(x) = 0$$

elde edilir. Şimdi, $x > a+b$ olsun ve $u+v = x$ olacak şekilde $u,v \in]0,+\infty[$ alalım. $t(\varepsilon_a(u), \varepsilon_b(v)) \leq t(1,1) = 1$ olduğundan,

$$T_t(\varepsilon_a, \varepsilon_b)(x) \leq 1 \tag{2.42}$$

olur. Ayrıca, $u > a$ ve $v > b$ için,

$$t(\varepsilon_a(u), \varepsilon_b(v)) = t(1,1) = 1 \in \{t(\varepsilon_a(u), \varepsilon_b(v)) \mid u+v = x\}$$

olduğundan,

$$1 \leq T_t(\varepsilon_a, \varepsilon_b)(x) \tag{2.43}$$

olur. (2.42) ve (2.43) bağıntılarından

$$T_t(\varepsilon_a, \varepsilon_b)(x) = \varepsilon_{a+b}(x) = 1$$

elde edilir.

Önerme 2.53. (S,d) bir metrik uzay olsun. $S \times S$ üzerinde her $p,q \in S$ için,

$$F(p,q) = \varepsilon_{d(p,q)} \tag{2.44}$$

olacak şekilde bir $F : S \times S \to \Delta^+$ fonksiyonu tanımlayalım ve her $a,b \in]0,+\infty[$ için,

$$T(\varepsilon_a, \varepsilon_b) = \varepsilon_{a+b} \tag{2.45}$$

olacak şekilde herhangi bir T üçgen fonksiyonu alalım. Bu durumda (S,F,T) bir olasılıksal metrik uzay olur.

İspat. d bir metrik olduğundan, her $p,q,r \in S$ için,

(a) $F_{pq} = \varepsilon_0 \Leftrightarrow \varepsilon_{d(p,q)} = \varepsilon_0 \Leftrightarrow d(p,q) = 0 \Leftrightarrow p = q$

(b) $F_{pq} = \varepsilon_{d(p,q)} = \varepsilon_{d(q,p)} = F_{qp}$

(c) $T(F_{pq}, F_{qr}) = T(\varepsilon_{d(p,q)}, \varepsilon_{d(q,r)}) = \varepsilon_{d(p,q)+d(q,r)} \leq \varepsilon_{d(p,r)} = F_{pr}$

(a), (b) ve (c) şıklarından (S,F,T) üçlüsünün olasılıksal metrik uzay olduğu elde edilir.

Teorem 2.54. (S,F,T), her $a,b \in]0,+\infty[$ için,

$$T(\varepsilon_a, \varepsilon_b) \geq \varepsilon_{a+b} \tag{2.46}$$

koşulunu gerçekleyen bir olasılıksal metrik uzay olsun ve bağıntı (2.44) eşitliği gibi bir $d : S \times S \to [0,+\infty[$ fonksiyonu var olsun. Bu durumda, (S,d) bir metrik uzaydır.

İspat. (S,F,T), bağıntı (2.46) koşulunu sağlayan bir olasılıksal metrik uzay olduğundan, her $p,q,r\in S$ için,

(M1): $p=q\Leftrightarrow F(p,q)=\varepsilon_0\Leftrightarrow \varepsilon_{d(p,q)}=\varepsilon_0\Leftrightarrow d(p,q)=0$

(M2): $F_{pq}=F_{qp}\Rightarrow \varepsilon_{d(p,q)}=\varepsilon_{d(q,p)}\Rightarrow d(p,q)=d(q,p)$

(M3): $F_{pr}\geq T(F_{pq},F_{qr})\Rightarrow \varepsilon_{d(p,r)}\geq T(\varepsilon_{d(p,q)},\varepsilon_{d(q,r)})\Rightarrow \varepsilon_{d(p,r)}\geq \varepsilon_{d(p,q)+d(q,r)}$
olur ve buradan $d(p,r)\leq d(p,q)+d(q,r)$ elde edilir.

(M1),(M2) ve (M3) şıklarından d fonksiyonunun bir metrik olduğu elde edilir. Dolayısıyla, (S,d) bir metrik uzaydır.

Lemma 2.55. T_1 ile T_2, $T_1\leq T_2$ olacak şekilde iki üçgen fonksiyonu ve (S,F,T_2) olasılıksal metrik uzay olsun. Bu durumda, (S,F,T_1) bir olasılıksal metrik uzaydır.

İspat. (S,F,T_2) olasılıksal metrik uzay ve $T_1\leq T_2$ olduğundan, her $p,q,r\in S$ için,

(a) $p=q\Leftrightarrow F_{pq}=\varepsilon_0$

(b) $F_{pq}=F_{qp}$

(c) $F_{pr}\geq T_2(F_{pq},F_{qr})\geq T_1(F_{pq},F_{qr})$

(a), (b) ve (c) şıklarından (S,F,T_1) üçlüsünün olasılıksal metrik uzay olduğu elde edilir.

3. MALZEME VE YÖNTEM

Bu tez çalışmasında, dağılım fonksiyonu, üçgen fonksiyonu, üçgensel norm, olasılıksal metrik uzay gibi kavramlar temel alınarak, [13], [5], [7], [24] kaynaklarındaki temel yöntemler kullanılmıştır. Bunlara ek olarak, [8], [9], [10], [11], [12], [14], [15], [16], [17], [18], [19], [20], [21], [22], [23], [25], [26], [27], [28], [29], [30] kaynaklarından yararlanılmıştır.

Çok iyi bilinen ”Sayılabilir bir tabana sahip bir Hausdorff düzgün uzayı metriklenebilirdir” teoreminden yararlanılmıştır [[5],176-180]. Bunlara ek olarak, [5] kitabındaki topolojik kavram ve teoremler kullanılmıştır.

4. BULGULAR

Bu bölümde, genel kısımda (2.18) bağıntısıyla tanımlanan d_L fonksiyonunun Δ kümesi üzerinde bir metrik olduğu ve (Δ, d_L) metrik uzayının kompakt olduğu ispatlanacaktır. Δ^+ kümesinin bu metrik uzayda kapalı olduğu gösterilecektir. Bu metrik uzaydaki yakınsaklık ile noktasal yakınsama arasındaki ilişki belirlenecektir. Daha sonra, Δ^+ kümesi yardımıyla olasılıksal metrik uzayı üzerinde bir düzgün topoloji tanımlanacaktır ve bu topolojinin metriklenebilir olduğu ispatlanacaktır. İspatlarımız kaynaklarda verilen ispatlardan farklı olacaktır.

4.1. LÉVY METRİĞİ

Lemma 4.1. $F, G \in \Delta$ olmak üzere, aşağıdakiler gerçeklenir:

(a) $d_L(F,G) = h > 0 \;\Rightarrow h \in A(F,G)$

(b) $h \leq t$ ve $h \in A(F,G) \;\Rightarrow t \in A(F,G)$

(c) $d_L(F,G) = h_0 > 0 \;\Rightarrow \min A(F,G) = h_0$ ve $A(F,G) = [h_0, 1]$

(d) $\alpha, \beta > 0\,,\, 0 < \alpha+\beta < 1$ ve $x \in J_{\alpha+\beta} \Rightarrow x-\alpha, x+\alpha \in J_\beta$ ve $x-\beta, x+\beta \in J_\alpha$

İspat. (a) $d_L(F,G) = h > 0$ olsun. Bu durumda $A(F,G)$ kümesi içinde

$$\lim_{n\to\infty} k_n = h$$

olacak şekilde bir $(k_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dizisi vardır. Ayrıca, her reel sayı dizisinin monoton bir alt dizisi olduğundan, bu $(k_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dizisinin monoton bir $(h_n)_{n\in\mathbb{N}}$ alt dizisi vardır.
$(h_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dizisi monoton artan ise,

$$\lim_{n\to\infty} h_n = \sup\{h_n \mid n \in \mathbb{N}\} = h$$

olacağından, her $n \in \mathbb{N}$ için $h = h_n \in A(F,G)$ elde edilir ve ispat biter. Şimdi, $(h_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dizisinin monoton azalan olduğunu kabul edelim ve herhangi bir $x \in J_h$ alalım. Bu durumda, $\frac{1}{h_n} \nearrow \frac{1}{h}$ ve $-\frac{1}{h_n} \searrow -\frac{1}{h}$ olduğundan, monoton yakınsaklık teoreminden,

$$\sup\{\frac{1}{h_n} \mid n \in \mathbb{N}\} = \frac{1}{h}$$

ve

$$\inf\{-\frac{1}{h_n} \mid n \in \mathbb{N}\} = -\frac{1}{h}$$

bulunur ve buradan $-\frac{1}{h_N} < x < \frac{1}{h_N}$ olacak şekilde bir $N \in \mathbb{N}$ elde edilir. Şimdi, herhangi bir $-\frac{1}{h_N} < y < x$ olacak şekilde bir y sayısını alalım. $(-\frac{1}{h_n})_{n\in\mathbb{N}}$ dizisi azalan olduğundan, her $n \geq N$ için, $y \in J_{h_n}$ olur. Bu durumda, $(h_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dizisi $A(F,G)$ içinde olduğundan, her $n \geq N$ için,

$$F(y-h_n) - h_n \leq G(y) \leq F(y+h_n) + h_n$$

olur. Buradan, $(y-h_n)_{n\in\mathbb{N}}$ monoton artan bir dizi, $(y+h_n)_{n\in\mathbb{N}}$ monoton azalan bir dizi ve F soldan sürekli monoton artan bir fonksiyon olduğundan,

$$F(y-h) - h \leq G(y) \leq F((y+h)+) + h \leq F(x+h) + h$$

elde edilir. F ve G fonksiyonlarının soldan sürekliliğini kullanırsak,

$$F(x-h) - h = F((x-h)-) - h = \lim_{\substack{y\to x\\ y<x}}[F(y-h) - h] \leq \lim_{\substack{y\to x\\ y<x}} G(y) = G(x-) = G(x)$$

bulunur ve böylece

$$F(x-h) - h \leq G(x) \leq F(x+h) + h$$

elde edilir. Benzer şekilde, $(G,F;h)$ sağlandığından,

$$G(x-h) - h \leq F(x) \leq G(x+h) + h$$

bulunur.

(b) Herhangi bir $x \in J_t$ alalım. $h \leq t$ olduğundan, $J_t \subseteq J_h$ ve dolayısıyla $x \in J_h$ olur.

$h \in A(F,G)$ ve $h \leq t$ olduğu kullanılarak,

$$F(x-t)-t \leq F(x-h)-h \leq G(x) \leq F(x+h)+h \leq F(x+t)+t$$

ve

$$G(x-t)-t \leq G(x-h)-h \leq F(x) \leq G(x+h)+h \leq G(x+t)+t$$

elde edilir.

(c) Herhangi bir $h \in A(F,G)$ alalım. Bu durumda, $h_0 \leq h \leq 1$ olacağından,

$$A(F,G) \subseteq [h_0,1] \tag{4.1}$$

elde edilir. Ters kapsama için, herhangi bir $h \in [h_0,1]$ alalım. $h_0 \leq h$ ve $h_0 \in A(F,G)$ olduğundan, (b) şıkkından dolayı, $h \in A(F,G)$ ve

$$[h_0,1] \subseteq A(F,G) \tag{4.2}$$

elde edilir. Bu durumda, (4.1) ve (4.2) bağıntılarından $A(F,G) = [h_0,1]$ bulunur.

(d) $0 < \alpha, \beta < \alpha+\beta < 1$ ve $x \in J_{\alpha+\beta}$ olduğundan, $x \in J_\alpha$ ve $x \in J_\beta$ bulunur. Diğer yandan,

$$\begin{aligned} \alpha(\alpha+\beta) < 1 &\Rightarrow \alpha\beta(\alpha+\beta) < \beta \Rightarrow \alpha + \alpha\beta(\alpha+\beta) < \alpha+\beta \\ &\Rightarrow \alpha < (\alpha+\beta)(1-\alpha\beta) \Rightarrow \frac{1}{\alpha+\beta} < \frac{1-\alpha\beta}{\alpha} \\ &\Rightarrow \frac{1}{\alpha+\beta} < \frac{1}{\alpha} - \beta \end{aligned} \tag{4.3}$$

elde edilir. (4.3) bağıntısı ve $x \in J_{\alpha+\beta}$ olduğu kullanılarak, $x-\beta, x+\beta \in J_\alpha$ bulunur. Benzer şekilde, $x-\alpha, x+\alpha \in J_\beta$ olduğu görülür.

Teorem 4.2. d_L fonksiyonu Δ üzerinde bir metriktir ve bu metriğe *Lévy Metriği* denir.

İspat. $F,G,H \in \Delta$ alalım ve d_L fonksiyonunun Tanım 2.17 koşullarını sağladığını gösterelim.

(M1): $F = G$ olsun. Bu durumda, her $h \in]0,1]$ ve her $x \in J_h$ için,

$$F(x-h) - h \leq F(x) \leq F(x+h) + h$$

sağlandığından $]0,1] \subseteq A(F,F)$ olur ve $A(F,F) \subseteq]0,1]$ gerçekleneceğinden,

$$A(F,F) =]0,1]$$

bulunur. Bu durumda,

$$d_L(F,F) = \inf A(F,F) = \inf(]0,1]) = 0$$

elde edilir.

Tersine, $d_L(F,G) = 0$ olsun. $F(-\infty) = G(-\infty) = 0$ ve $F(+\infty) = G(+\infty) = 1$ olduğundan, $\mathbb{R}$ içinde $F = G$ olduğunu göstermemiz yeterli olacaktır. Bunun için herhangi bir $x \in \mathbb{R}$ alalım. $d_L(F,G) = 0$ olduğundan, $A(F,G)$ içinde,

$$\lim_{n\to\infty} h_n = 0$$

olacak şekilde bir $(h_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dizisi vardır ve bu dizinin monoton bir alt dizisi vardır. Bu alt diziyi de yine $(h_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ile gösterelim. Bu alt dizinin monoton azalan bir dizi olarak kabul edebiliriz. Çünkü; monoton artan olsaydı, her $n \in \mathbb{N}$ için

$$0 < h_n \leq 0$$

çelişkisi elde edilirdi. $\frac{1}{h_n} \nearrow +\infty$ ve $-\frac{1}{h_n} \searrow -\infty$ olduğundan, monoton yakınsaklık teoreminden,

$$\sup\left\{\frac{1}{h_n} \mid n \in \mathbb{N}\right\} = +\infty$$

ve

$$\inf\left\{-\frac{1}{h_n} \mid n \in \mathbb{N}\right\} = -\infty$$

olur ve buradan, her $n \geq N$ için, $-\frac{1}{h_n} < x < \frac{1}{h_n}$ olacak şekilde bir $N \in \mathbb{N}$ elde edilir. Bu durumda her $n \geq N$ için $h_n \in A(F,G)$ olduğundan,

$$F(x-h_n)-h_n \leq G(x) \quad \text{ve} \quad G(x-h_n)-h_n \leq F(x)$$

elde edilir. Buradan, $(x-h_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dizisi monoton artan olduğundan, F ve G fonksiyonlarının soldan sürekliliği kullanılarak,

$$F(x) = G(x)$$

elde edilir.
(M2): $d_L(F,G) = d_L(G,F)$ olduğu açıktır.
(M3): $d_L(F,G) = \alpha$ ve $d_L(G,H) = \beta$ diyelim ve

$$d_L(F,H) \leq \alpha+\beta$$

olduğunu gösterelim. α veya β dan en az biri sıfıra eşit olursa,

$$d_L(F,H) = \alpha+\beta$$

eşitlik durumu sağlanır.
Şimdi, $\alpha,\beta > 0$ olsun. Eğer, $\alpha+\beta \geq 1$ ise, üçgen eşitsizliğinin sağlandığı açıktır. Şimdi, $\alpha+\beta < 1$ olduğunu kabul edelim ve herhangi bir $x \in J_{\alpha+\beta}$ alalım. Lemma 4.1-(d) kullanılarak,

$$x-\beta, x+\beta \in J_\alpha \quad \text{ve} \quad x-\alpha, x+\alpha \in J_\beta$$

elde edilir. Lemma 4.1-(a) kullanılırsa, $x-\beta, x+\beta \in J_\alpha$ olduğundan,

$$\begin{aligned} F(x-\beta-\alpha)-\beta-\alpha \leq G(x-\beta)-\beta \leq H(x) \\ \leq G(x+\beta)+\beta \leq F(x+\beta+\alpha)+\alpha+\beta \end{aligned} \tag{4.4}$$

ve $x-\alpha, x+\alpha \in J_\beta$ olduğundan

$$H(x-\alpha-\beta)-\alpha-\beta \leq G(x-\alpha)-\alpha \leq F(x) \leq G(x+\alpha)+\alpha \leq H(x+\alpha+\beta)+\alpha+\beta \tag{4.5}$$

elde edilir. 4.4 ve (4.5) bağıntılardan $\alpha+\beta \in A(F,H)$ bulunur ve buradan

$$d_L(F,H) \leq \alpha+\beta$$

elde edilir.

Tanım 4.3. $(F_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dağılım fonksiyonlarının bir dizisi ve F bir dağılım fonksiyonu olsun. F fonksiyonunun sürekli olduğu noktaların kümesini $C(F)$ ile göstereceğiz. Her $x \in C(F)$ için,

$$\lim_{n\to\infty} F_n(x) = F(x)$$

oluyorsa, $(F_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *dizisi F fonksiyonuna zayıf olarak yakınsar* denir ve $F_n \xrightarrow{w} F$ şeklinde gösterilir.

Teorem 4.4. $(F_n)_{n\in\mathbb{N}}$, Δ içinde bir dizi ve $F \in \Delta$ olsun. Bu durumda $F_n \xrightarrow{w} F$ olabilmesi için gerek ve yeter koşul $\lim\limits_{n\to\infty} d_L(F_n,F)=0$ olmasıdır.

İspat. $\lim\limits_{n\to\infty} d_L(F_n,F)=0$ ve $x \in C(F)$ olsun. Bu durumda, $h_n = d_L(F_n,F)$ dersek, bu dizinin monoton bir $(t_k)_{k\in\mathbb{N}}$ alt dizisi vardır. Bu alt dizinin monoton azalan olduğunu ve her $k \in \mathbb{N}$ için, $t_k > 0$ olduğunu kabul edebiliriz. Dolayısıyla, Lemma 4.1-(a) kullanılırsa, her $k \in \mathbb{N}$ için, $t_k \in A(F_k,F)$ elde edilir. Ayrıca, $\lim\limits_{k\to\infty} t_k = 0$ olduğundan, yeterli büyüklükteki k doğal sayıları için,

$$0 < t_k < \frac{1}{2}$$

ve Lemma 4.1-(d) kullanılarak,

$$x \in J_{2t_k}$$

bulunur. Dolayısıyla, yeterli büyüklükteki k doğal sayıları için,

$$F(x-2t_k)-t_k \leq F_k(x-t_k) \leq F_k(x) \leq F_k(x+t_k) \leq F(x+2t_k)+t_k$$

ve F fonksiyonu x noktasında sürekli olduğundan,

$$\lim_{k\to\infty} F_k(x) = F(x)$$

elde edilir.

Tersine, $F_n \xrightarrow{w} F$ olduğunu kabul edelim ve herhangi bir $h \in]0,1[$ alalım. $C(F)$ kümesi $\mathbb{R}$ içinde yoğun olduğundan,

$$a \in]-\frac{1}{h}-h,-\frac{1}{h}[,\ c_0 \in]-\frac{1}{h},a+h[,\ b \in]\frac{1}{h},\frac{1}{h}+h[,\ c_m \in]b-h,\frac{1}{h}[,$$

ve her $i = 1,2,\ldots,m-1$ için,

$$c_i \in]c_{i-1},c_{i-1}+h[$$

olacak şekilde $a,c_0,c_1,\ldots,c_m,b \in C(F)$ noktaları vardır. Şimdi, herhangi bir $x \in J_h$ alalım.

Durum 1. $c_{k-1} \leq x \leq c_k$ olsun. Bu durumda, hipotez gereği, yeterli büyüklükteki n doğal sayıları için,

$$F(x-h)-h \leq F_n(c_{k-1}) \leq F_n(x) \leq F_n(c_k) \leq F(c_k)+h \leq F(x+h)+h$$

elde edilir.

Durum 2. $-\frac{1}{h} < x < c_0$ olsun. Bu durumda, hipotez gereği, yeterli büyüklükteki n doğal sayıları için,

$$F(x-h)-h \leq F_n(a) \leq F_n(x) \leq F_n(c_0) \leq F(c_0)+h \leq F(x+h)+h$$

elde edilir.

Durum 3. $c_m \leq x \leq \frac{1}{h}$ olsun. Bu durumda, hipotez gereği, yeterli büyüklükteki n doğal sayıları için,

$$F(x-h)-h \leq F_n(c_m) \leq F_n(x) \leq F_n(b) \leq F(b)+h \leq F(x+h)+h$$

elde edilir.

Bu üç durumda da, yeterli büyüklükteki n doğal sayıları için, $h \in A(F_n, F)$ olur ve dolayısıyla,

$$\lim_{n\to\infty} d_L(F_n, F) = 0$$

elde edilir.

Teorem 4.5. (Δ, d_L) metrik uzayı kompakttır.

İspat. : $\mathbb{Q} = \{r_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ ve $(G_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \Delta$ bir dizi olsun. İlk olarak,

$$G_1(r_1), G_2(r_1), \ldots, G_n(r_1), \ldots$$

reel sayı dizisini düşünelim. Her $n \in \mathbb{N}$ için $G_n(r_1) \in [0,1]$ ve $[0,1]$ kompakt olduğundan, $(G_n(r_1))_{n\in\mathbb{N}}$ dizisinin

$$G_{i_1}(r_1), G_{i_2}(r_1), \ldots G_{i_n}(r_1), \ldots$$

şeklinde yakınsak bir alt dizisi vardır. Dolayısıyla

$$G_{i_1}, G_{i_2}, \ldots G_{i_n}, \ldots$$

dizisi r_1 noktasında bir limite sahiptir. r_1 noktasında limite sahip olan bu diziyi

$$F_n^{(1)} = G_{i_n}\,,\ n = 1, 2, \ldots$$

şeklinde gösterirsek, $(F_n^{(1)})_{n\in\mathbb{N}}$ dizisi $(G_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dizisinin bir alt dizisi olur. Şimdi,

$$F_1^{(1)}(r_2), F_2^{(1)}(r_2), \ldots, F_n^{(1)}(r_2), \ldots$$

dizisini göz önüne alalım. Her $n \in \mathbb{N}$ için $F_n^{(1)}(r_2) \in [0,1]$ ve $[0,1]$ kompakt olduğundan, $(F_n^{(1)}(r_2))_{n\in\mathbb{N}}$ dizisinin

$$F_{i_1}^{(1)}(r_2), F_{i_2}^{(1)}(r_2), \ldots, F_{i_n}^{(1)}(r_2), \ldots$$

şeklinde yakınsak bir alt dizisi vardır. Dolayısıyla,

$$F_{i_1}^{(1)}, F_{i_2}^{(1)}, \ldots, F_{i_n}^{(1)}, \ldots$$

dizisi r_1 ve r_2 noktalarında limite sahiptir. r_1 ve r_2 noktalarında limite sahip olan bu diziyi

$$F_n^{(2)} = F_{i_n}^{(1)} \ , \ n = 1, 2, \ldots$$

şeklinde gösterirsek, $(F_n^{(2)})_{n\in\mathbb{N}}$ dizisi $(G_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dizisinin bir alt dizisi olur. Bu şekilde devam edersek,

$$\begin{array}{cccccc}
F_1^{(1)}, & F_2^{(1)}, & F_3^{(1)}, & \ldots, & F_n^{(1)}, & \ldots \\
F_1^{(2)}, & F_2^{(2)}, & F_3^{(2)}, & \ldots, & F_n^{(2)}, & \ldots \\
F_1^{(3)}, & F_2^{(3)}, & F_3^{(3)}, & \ldots, & F_n^{(3)}, & \ldots \\
\vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \\
F_1^{(m)}, & F_2^{(m)}, & F_3^{(m)}, & \ldots, & F_n^{(m)}, & \ldots \\
\vdots & \vdots & \vdots & & \vdots &
\end{array}$$

şeklinde dizilerin dizisini elde ederiz. Bu dizi şu özelliklere sahiptir:

(a) Her dizi, önceki dizilerin alt dizisidir.

(b) Her dizi, $(G_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dizisinin alt dizisidir.

(c) $(F_n^{(m)})_{n\in\mathbb{N}}$ dizisi $r_1, r_2, \ldots, r_m$ noktalarında limite sahiptir.

Şimdi, bu dizilerin dizisi yardımıyla,

$$F_n = F_n^{(n)} \ , \ n = 1, 2, \ldots$$

olmak üzere,

$$F_1, F_2, \ldots, F_n, \ldots$$

diagonal dizisini kuralım. Bu dizi $(G_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dizisinin bir alt dizisidir ve her $n \in \mathbb{N}$ için r_n noktasında yakınsaktır. Dolayısıyla, $(F_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dizisi yardımıyla

$$\Phi(r) = \lim_{n\to\infty} F_n(r)$$

olacak şekilde $\Phi : \mathbb{Q} \to [0,1]$ fonksiyonunu ve bu fonksiyon yardımıyla,

$$F(x) = \begin{cases} 0 & , x = -\infty \quad \text{ise} \\ \sup\{\Phi(r) \mid r < x\} & , x \in \mathbb{R} \quad \text{ise} \\ 1 & , x = +\infty \quad \text{ise} \end{cases}$$

olacak şekilde $F : [-\infty, +\infty] \to [0,1]$ fonksiyonunu tanımlayabiliriz.

Şimdi $F \in \Delta$ ve $F_n \xrightarrow{w} F$ olduğunu gösterelim.

(a) F fonksiyonunun tanımı gereği, $F(-\infty) = 0$ ve $F(+\infty) = 1$ olduğu açıktır.

(b) $x < y$ olsun. $A_x = \{\Phi(r) \mid r < x\}$ ve $A_y = \{\Phi(r) \mid r < y\}$ olmak üzere,

$$A_x \subseteq A_y$$

olur ve buradan

$$F(x) = \sup A_x \leq \sup A_y = F(y)$$

elde edilir.

(c) Herhangi bir $\varepsilon > 0$ ve $x_0 \in \mathbb{R}$ alalım. $\sup\{\Phi(r) \mid r < x_0\} = F(x_0)$ olduğundan,

$$F(x_0) - \Phi(r) < \varepsilon$$

olacak şekilde bir $r < x_0$ vardır. $\delta = x_0 - r > 0$ seçilirse, $x \in]x_0 - \delta, x_0[$ için, $\Phi(r) \leq F(x)$

olacağından,

$$F(x_0) - F(x) \leq F(x_0) - \Phi(r) < \varepsilon$$

elde edilir. Dolayısıyla, F fonksiyonu soldan süreklidir

(a), (b) ve (c) şıklarından $F \in \Delta$ olduğu görülür. $F_n \xrightarrow{w} F$ olduğunu göstermek için, herhangi bir $x \in C(F)$ ve $\varepsilon > 0$ alalım. Bu durumda, $F(x) = \sup\{\Phi(r) \mid r < x\}$ olduğundan,

$$0 \leq F(x) - \Phi(r) < \frac{\varepsilon}{6} \tag{4.6}$$

olacak şekilde bir $r < x$ vardır. F fonksiyonu x noktasında sürekli olduğundan,

$$z \in]x, x+\delta[\Rightarrow 0 \leq F(z) - F(x) < \frac{\varepsilon}{6}) \tag{4.7}$$

koşulunu sağlayan bir $\delta > 0$ vardır. Şimdi, $x < s < x + \frac{\delta}{2}$ olacak şekilde bir $s \in \mathbb{Q}$ alalım. Φ fonksiyonu monoton artan olduğundan, $\Phi(s), A_x$ kümesi için bir üst sınır olur. Dolayısıyla $F(x) \leq \Phi(s)$ bulunur. Bağıntı (4.7) kullanılarak,

$$0 \leq \Phi(s) - F(x) < \frac{\varepsilon}{6} \tag{4.8}$$

elde edilir. $\Phi(r) = \lim_{n\to\infty} F_n(r)$ ve $\Phi(s) = \lim_{n\to\infty} F_n(s)$ olduğundan, yeterli derecede büyük n doğal sayısı için,

$$\mid \Phi(r) - F_n(r) \mid < \frac{\varepsilon}{6} \tag{4.9}$$

ve

$$\mid \Phi(s) - F_n(s) \mid < \frac{\varepsilon}{6} \tag{4.10}$$

gerçeklenir. Bu durumda, yeterli derecede büyük n doğal sayısı için, F_n fonksiyonlarının monoton artanlığı ve (4.6) , (4.8) , (4.9) ve (4.10) bağıntıları kullanılırsa,

$$
\begin{aligned}
|\, F_n(x) - F_n(r) \,| &\leq |\, F_n(s) - F_n(r) \,| \\
&\leq |\, F_n(s) - \Phi(s) \,| + |\, \Phi(s) - F(x) \,| + |\, F(x) - \Phi(r) \,| + |\, \Phi(r) - F_n(r) \,| \\
&< \frac{4\varepsilon}{6} \qquad (4.11)
\end{aligned}
$$

elde edilir. Dolayısıyla (4.6) , (4.9) ve (4.11) bağıntılarından,

$$|\, F_n(x) - F(x) \,| \leq |\, F(x) - \Phi(r) \,| + |\, \Phi(r) - F_n(r) \,| + |\, F_n(r) - F_n(x) \,| < \frac{\varepsilon}{6} + \frac{\varepsilon}{6} + \frac{4\varepsilon}{6} = \varepsilon$$

bulunur. Dolayısıyla,

$$\lim_{n\to\infty} F_n(x) = F(x)$$

elde edilir. Metrik uzayda dizisel kompaktlık ile kompaktlık eşdeğer olduğundan (Δ, d_L) uzayı kompakttır.

4.2. UZAKLIK DAĞILIM FONKSİYONU İLE İLGİLİ SONUÇLAR

Teorem 4.6. Δ^+ kümesi, (Δ, d_L) metrik uzayında kompakttır.

İspat. Δ kümesi kompakt olduğundan Δ^+ kümesinin, Δ içinde kapalı olduğunu göstermek yeterlidir. Bunun için, Δ^+ içinde, $F_n \xrightarrow{w} F \in \Delta$ olacak şekilde bir $(F_n)_{n\in\mathbb{N}}$ fonksiyon dizisini alalım.

Durum 1. $0 \in C(F)$ ise, her $n \in \mathbb{N}$ için $F_n(0) = 0$ olduğundan,

$$\lim_{n\to\infty} F_n(0) = F(0) = 0$$

elde edilir.

Durum 2. Şimdi, $0 \notin C(F)$ olduğunu kabul edelim ve $F(0) = 0$ olduğunu ispatlayalım. $d_L(F_n, F) = h_n$ diyelim. Eğer, öyle bir $N \in \mathbb{N}$ için $h_N = 0$ ise, $F_N = F$ olacağından, $F \in \Delta^+$ elde edilir. Bu yüzden, her $n \in \mathbb{N}$ için $d_L(F_n, F) = h_n > 0$ olduğunu kabul edebiliriz. Lemma 4.1-(c) kullanılarak, $A(F_n, F) = [h_n, 1]$ elde edilir. $\lim\limits_{n\to\infty} h_n = 0$ olduğundan, $h_n \searrow 0$ olduğunu kabul edebiliriz. $C(F)$, $\mathbb{R}$ içinde yoğun olduğundan, $C(F)$ içinde,

$$-h_{m-1} < x_m < -h_m \quad \text{ve} \quad \lim_{n\to\infty} F_n(x_m) = F(x_m)$$

olacak şekilde bir $(x_m)_{m\in\mathbb{N}}$ dizisi vardır. Bu durumda, her $m \in \mathbb{N}$ için $F_n(x_m) = 0$ olur. F fonksiyonu soldan sürekli monoton artan bir fonksiyon ve $x_m \nearrow 0$ olduğundan, her $m \in \mathbb{N}$ için $F(x_m) = 0 = F(0)$ elde edilir.

Notasyon: Herhangi iki $F, G \in \Delta^+$ ve $h \in]0,1]$ için $[F, G; h]$ ile $\forall x \in]0, \frac{1}{h}[$ için,

$$G(x) \leq F(x+h) + h \tag{4.12}$$

koşulunu göstereceğiz. Şimdi,

$$A^+(F,G) = \{h \in]0,1] \mid [F,G;h] \text{ ve } [G,F;h] \text{ sağlanır}\}$$

kümesini tanımlayalım.

Önerme 4.7. $F, G \in \Delta^+$ olsun. Bu durumda, $d_L(F,G) = \inf A^+(F,G)$ olur.

İspat. Herhangi iki $F,G \in \Delta^+$ alalım ve $A(F,G) = A^+(F,G)$ olduğunu gösterelim. $A(F,G) \subseteq A^+(F,G)$ kapsaması sağlandığından, eşitliği göstermek için $A^+(F,G) \subseteq A(F,G)$ kapsamasının sağlandığını göstermeliyiz. Bunun için, herhangi bir $h \in A^+(F,G)$ ve $x \in J_h =]-\frac{1}{h}, 0] \cup]0, \frac{1}{h}[$ alalım. F,G fonksiyonları monoton artan, değer kümeleri $[0,1]$ ve $F(0) = G(0) = 0$ olduğundan,

$$F(x-h) - h \leq G(x) \leq F(x+h) + h$$

ve

$$G(x-h) - h \leq F(x) \leq G(x+h) + h$$

elde edilir ve buradan $h \in A(F,G)$ bulunur.

Sonuç 4.8. $F \in \Delta^+$ olsun. Bu durumda,

$$d_L(F,\varepsilon_0) = \inf\{h \in]0,1] \mid [F,\varepsilon_0;h] \quad \text{sağlanır}\}$$

İspat. Herhangi bir $F \in \Delta^+$ ve $h \in \{h \in]0,1] \mid [F,\varepsilon_0;h] \quad \text{sağlanır}\}$ alalım. Her $x \in]0, \frac{1}{h}[$ için,

$$F(x) \leq 1 < 1 + h = \varepsilon_0(x+h) + h$$

olduğundan $[\varepsilon_0, F; h]$ her zaman sağlanır ve dolayısıyla,

$$A(F,\varepsilon_0) = \{h \in]0,1] \mid [F,\varepsilon_0;h] \quad \text{sağlanır}\}$$

elde edilir.

Lemma 4.9. $F \in \Delta^+$ olsun. Bu durumda,

$$d_L(F,\varepsilon_0) = \inf\{h \in]0,1] \mid F(h+) > 1 - h\}$$

İspat. $B_F = \{h \in]0,1] \mid F(h+) > 1 - h\}$ ve $d_L(F,\varepsilon_0) = \alpha$ olmak üzere, $\alpha = \inf B_F$ olduğunu gösterelim. $\alpha = 0$ ise, eşitliğin sağlandığı açıktır. $\alpha > 0$ olsun ve herhangi bir

$h \in B_F$ alalım. Bu durumda, $F(h+)$ tanımı kullanılarak, her $x \in]0, \frac{1}{h}[$ için,

$$F(x+h)+h \geq F(h+)+h > 1 = \varepsilon_0(x)$$

olur ve bu $[F,\varepsilon_0;h]$ koşulunun sağlandığını söyler. Dolayısıyla,

$$B_F \subseteq A(F,\varepsilon_0)$$

sağlandığından,

$$\alpha \leq \inf B_F \tag{4.13}$$

elde edilir. Ters eşitsizlik için , herhangi bir $h \in]\alpha, 1]$ alalım. $\alpha > 0$ olduğundan, Lemma 4.1-(a) kullanılarak, her $x \in]0, \frac{1}{h}[$ için,

$$\varepsilon_0(x) \leq F(x+\alpha)+\alpha \tag{4.14}$$

bulunur. Bağıntı (4.14) ve $\alpha < h$ olduğu kullanılarak,

$$1-h < 1-\alpha \leq F(\alpha+) \leq F(h+)$$

elde edilir ki bu $h \in B_F$ olduğunu söyler. Dolayısıyla, $]\alpha, 1] \subseteq B_F$ gerçeklendiğinden,

$$\inf B_F \leq \alpha \tag{4.15}$$

bulunur. (4.13) ve (4.15) bağıntılarından istenilen eşitlik elde edilir.

Örnek 4.10. $a \geq 1$ olmak üzere, $d_L(\varepsilon_a, \varepsilon_0)$ değerini hesaplayalım: Bunun için, öncelikle, $0 < h < 1$ için, $\varepsilon_a(h+) = \inf\{\varepsilon_a(h+c)|c > 0\}$ değerini bulalım. $a > 0$ olduğundan, $1 = \varepsilon_a(h+a) \in \{\varepsilon_a(h+c)|c > 0\}$ olur. $1-h > 0$ olduğundan, $h + \frac{1}{N} < 1 \leq a$ olacak şekilde bir $N \in \mathbb{N}$ elde edilir ve dolayısıyla $0 \in \{\varepsilon_a(h+c)|c > 0\}$ bulunur. Böylece, $\varepsilon_a(h+) = \inf\{0,1\} = 0$ elde edilir. Bu durumda, $0 > 1-h > 0$ çelişkisi olacağından, $h \notin A(\varepsilon_a, \varepsilon_0)$ olur. Dolayısıyla, $d_L(\varepsilon_a, \varepsilon_0) = \inf A(\varepsilon_a, \varepsilon_0) = 1$ elde edilir.

Sonuç 4.11. $F \in \Delta^+$ olsun. Bu durumda, her $t > 0$ için,

$$F(t) > 1-t \Leftrightarrow d_L(F,\varepsilon_0) < t \tag{4.16}$$

İspat. $t > 1$ için sağlandığı açıktır. Şimdi, herhangi bir $t \leq 1$ sayısını alalım ve $F(t) > 1-t$ olduğunu kabul edelim. Bu durumda, $F(\frac{t}{2}) > 1-\frac{t}{2}$ sağlanacağından ve F fonksiyonu monoton artan olduğundan,

$$F(\frac{t}{2}+) \geq F(\frac{t}{2}) > 1-\frac{t}{2}$$

olur ve bu $\frac{t}{2} \in B_F$ olduğunu söyler. Lemma 4.9 kullanılarak,

$$d_L(F,\varepsilon_0) \leq \frac{t}{2} < t$$

elde edilir. Tersine, $d_L(F,\varepsilon_0) = \inf B_F < t$ olsun. Bu durumda,

$$h_0 < t$$

olacak şekilde bir $h_0 \in B_F$ vardır. $F(h_0+)$ tanımı kullanılarak,

$$1-t < 1-h_0 < F(h_0+) \leq F(t)$$

elde edilir.

Sonuç 4.12. $F,G \in \Delta^+$ ve $F \leq G$ olsun. Bu durumda

$$d_L(G,\varepsilon_0) \leq d_L(F,\varepsilon_0)$$

olur.

İspat. Herhangi bir $h \in B_F$ alalım. Bu durumda, $F \leq G$ olduğundan,

$$G(h+) \geq F(h+) > 1-h$$

olur ve bu $h \in B_G$ olduğunu söyler. Dolayısıyla, $B_F \subseteq B_G$ sağlandığından,

$$d_L(G,\varepsilon_0) = \inf B_G \leq \inf B_F = d_L(F,\varepsilon_0)$$

elde edilir.

Lemma 4.13. Δ^+ kümesinin herhangi bir alt kümesinin supremumu Δ^+ kümesine aittir. Fakat, bu infimum için geçerli değildir.

İspat. I bir indis kümesi olmak üzere, $A = \{F_\alpha \mid \alpha \in I\}$ kümesi Δ^+ kümesinin bir alt kümesi olsun. Bu durumda, ε_0, A kümesi için bir üst sınırdır. Her $x \in [0,+\infty]$ için, $A(x) = \{F_\alpha(x) \mid \alpha \in I\}$ diyelim. $A(x) \subseteq [0,1]$ olduğundan, $\sup A(x)$ bir reel sayıdır. Şimdi, her $x \in [0,+\infty]$ için, $\sup A(x) = F(x)$ diyelim. Bu durumda, $F : [-\infty,+\infty] \to [0,1]$ fonksiyonu Δ^+ kümesinin elemanıdır. Çünkü,

(a) $F(0) = \sup\{F_\alpha(0) \mid \alpha \in I\} = 0$

(b) $F(+\infty) = \sup\{F_\alpha(+\infty) \mid \alpha \in I\} = 1$

(c) $x < y$ olsun. Bu durumda her $\alpha \in I$ için F_α fonksiyonları monoton artan olduğundan,

$$F_\alpha(x) \leq F_\alpha(y) \leq F(y)$$

olduğundan $F(y)$, $A(x)$ kümesi için bir üst sınırdır. Dolayısıyla,

$$F(x) \leq F(y)$$

elde edilir.

(d) Öncelikle her $t \in \mathbb{R}$ için,

$$\{x \in \mathbb{R} \mid F(x) > t\} = \bigcup_{\alpha \in I} \{x \in \mathbb{R} \mid F_\alpha(x) > t\} \tag{4.17}$$

olduğunu gösterelim. Bunun için, herhangi bir $F(x) > t$ olacak şekilde bir $x \in \mathbb{R}$ alalım. Bu durumda,

$$F_{\alpha_0}(x) > t$$

olacak şekilde bir $\alpha_0 \in I$ vardır ve buradan $x \in \bigcup_{\alpha \in I} \{x \in \mathbb{R} \mid F_\alpha(x) > t\}$ elde edilir.

Dolayısıyla,

$$\{x \in \mathbb{R} \mid F(x) > t\} \subseteq \bigcup_{\alpha \in I} \{x \in \mathbb{R} \mid F_\alpha(x) > t\} \tag{4.18}$$

kapsaması sağlanır. Ters kapsama için herhangi bir $x \in \bigcup_{\alpha \in I} \{x \in \mathbb{R} \mid F_\alpha(x) > t\}$ alalım. Bu durumda,

$$F_{\alpha_0}(x) > t$$

olacak şekilde bir $\alpha_0 \in I$ vardır. $F(x)$ supremum olduğundan, $F(x) > t$ olur ve bu

$$\bigcup_{\alpha \in I} \{x \in \mathbb{R} \mid F_\alpha(x) > t\} \subseteq \{x \in \mathbb{R} \mid F(x) > t\} \tag{4.19}$$

olduğunu söyler. (4.18) ve (4.19) bağıntılarından istenilen eşitlik elde edilir.

Her $\alpha \in I$ için, F_α fonksiyonları monoton artan ve soldan sürekli olduğundan alttan yarı süreklidir. Dolayısıyla,

$$\{x \in \mathbb{R} \mid F_\alpha(x) > t\}$$

kümesi açık bir kümedir. Topoloji tanımı ve (4.17) bağıntısı kullanılarak,

$$\{x \in \mathbb{R} \mid F(x) > t\}$$

kümesi açık olur. F fonksiyonu alttan yarı sürekli ve monoton artan olduğundan soldan sürekli olur. Dolayısıyla, $\sup A = F \in \Delta^+$ elde edilir.

$A \subseteq \Delta^+$ için $\inf A \in \Delta^+$ olmak zorunda değildir. Örneğin, herhangi bir $\alpha \geq 1$ için, $(\varepsilon_{\alpha - \frac{1}{n}})_{n \in \mathbb{N}} \subseteq \Delta^+$ dizisini göz önüne alırsak, $F = \inf\left\{\varepsilon_{\alpha-\frac{1}{n}} \mid n \in \mathbb{N}\right\}$ fonksiyonu α noktasında soldan sürekli değildir.

4.3. OLASILIKSAL METRİK UZAY ÜZERİNDE KUVVETLİ TOPOLOJİ

Tanım 4.14. (S,F,T) bir olasılıksal metrik uzay, $p \in S$ herhangi bir nokta ve $t > 0$ herhangi bir reel sayı olsun. Şimdi,

$$N_p(t) = \{q \mid F_{pq}(t) > 1 - t\} \tag{4.20}$$

kümesini tanımlayalım. Bu durumda, Sonuç 4.11 kullanılarak,

$$N_p(t) = \{q \mid d_L(F_{pq}, \varepsilon_0) < t\} \tag{4.21}$$

bulunur.

Şimdi, her $p, q \in S$ için,

$$d(p,q) = d_L(F_{pq}, \varepsilon_0) \geq 0 \tag{4.22}$$

şeklinde $d : S \times S \to \mathbb{R}$ fonksiyonunu tanımlayalım. Bu durumda, d fonksiyonu,

(M1): $p = q \Leftrightarrow F_{pq} = \varepsilon_0 \Leftrightarrow d_L(F_{pq}, \varepsilon_0) = 0 \Leftrightarrow d(p,q) = 0$

(M2): $F_{pq} = F_{qp}$ olduğundan $d(p,q) = d_L(F_{pq}, \varepsilon_0) = d_L(F_{qp}, \varepsilon_0) = d(q,p)$
koşullarını sağlar. Fakat, d fonksiyonu üçgen eşitsizliğini sağlamaz. Bu yüzden, d fonksiyonu S üzerinde bir metrik değildir.

Teorem 4.15. (S,F,T) bir olasılıksal metrik uzay ve T fonksiyonu, her $F \in \Delta$ için, (F, ε_0) noktasında sürekli olsun. Şimdi, herhangi bir $p \in S$ için,

$$\mathfrak{B}(p) = \{N_p(t) \mid t > 0\}$$

topluluğunu tanımlayalım. Bu durumda, S üzerinde, $\mathfrak{B}(p)$ topluluğunu, p noktasında lokal taban kabul eden bir topoloji vardır.

İspat. $\mathfrak{B}(p) \subseteq \mathbf{P}(S)$ topluluğunun, Önerme 2.11 koşullarını sağladığını göstermek yeterlidir.

(a) Herhangi bir $t > 0$ reel sayısını alalım. $F_{pp} = \varepsilon_0$ olduğundan, $d_L(F_{pp}, \varepsilon_0) = 0 < t$ olur ve buradan, $p \in N_p(t)$ elde edilir.

(b) Herhangi iki $t_1, t_2 > 0$ reel sayılarını alalım ve $t_3 = min\{t_1, t_2\}$ diyelim. Bu durumda, herhangi bir $r \in N_p(t_3)$ için,

$$d_L(F_{pr}, \varepsilon_0) < t_3 \leq t_1$$

ve

$$d_L(F_{pr}, \varepsilon_0) < t_3 \leq t_2$$

olduğundan,

$$N_p(t_3) = N(t_1) \cap N_p(t_2)$$

elde edilir.

(c) Herhangi bir $t > 0$ ve $q \in N_p(t)$ alalım. $d_L(F_{pq}, \varepsilon_0) = \alpha$ dersek, $\alpha < t$ ve dolayısıyla $t - \alpha > 0$ olur. Hipotez gereği, T fonksiyonu (F_{pq}, ε_0) noktasında sürekli olduğundan, $t - \alpha > 0$ sayısına karşılık, her $(G, H) \in \Delta^+ \times \Delta^+$ için,

$$d_L(F_{pq}, G) < \eta \text{ ve } d_L(\varepsilon_0, H) < \eta \Rightarrow d(T(F_{pq}, \varepsilon_0), T(G, H)) < t - \alpha \tag{4.23}$$

olacak şekilde bir $\eta > 0$ vardır. Şimdi, $N_q(\eta) \subseteq N_p(t)$ olduğunu gösterelim. Bunun için herhangi bir $r \in N_q(\eta)$ alalım. Bu durumda, (4.23) bağıntısı kullanılarak,

$$d_L(T(F_{pq}, F_{qr}), T(F_{pq}, \varepsilon_0)) < t - \alpha \tag{4.24}$$

elde edilir. Bağıntı (4.24) ve Sonuç 4.12 yardımıyla,

$$\begin{aligned} d_L(F_{pr}, \varepsilon_0) &\leq d_L(T(F_{pq}, F_{qr}), \varepsilon_0) \\ &\leq d_L(T(F_{pq}, F_{qr}), F_{pq}) + d_L(F_{pq}, \varepsilon_0) \\ &< t - \alpha + \alpha = t \end{aligned}$$

elde edilir ve bu $r \in N_p(t)$ olduğunu gösterir.

Bu durumda Teorem 2.12 kullanılırsa,

$$\tau_{\mathscr{U}} = \{A \subseteq S \mid \forall p \in A \quad \exists t > 0 \quad N_p(t) \subseteq A\} \cup \{\emptyset\}$$

topluluğu S üzerinde, herhangi bir $p \in S$ noktasında $\mathfrak{B}(p)$ topluluğunu lokal taban kabul eden bir topoloji olur.

(4.22) bağıntısında tanımlanan $d : S \times S \to \mathbb{R}$ fonksiyonu metrik olmamasına rağmen aşağıdakiler gerçeklenir:

Önerme 4.16. (S,F,T) bir olasılıksal metrik uzay ve T fonksiyonu sürekli olsun. $A \subseteq S$ herhangi bir küme ve $p \in S$ herhangi bir nokta olsun. Bu durumda $(S, \tau_{\mathscr{U}})$ topolojik uzayında aşağıdakiler geçerlidir.

(CL1) p noktasının A kümesinin kapanışına ait olması için gerek ve yeter koşul her $t > 0$ için $N_p(t) \cap A \neq \emptyset$ olmasıdır.

(CL2) p noktasının A kümesinin kapanışına ait olması için gerek ve yeter koşul A içinde $p_n \to p$ olacak şekilde bir $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dizisinin var olmasıdır.

(CL3) $d(p,A) = \inf\left\{d_L(F_{pq}, \varepsilon_0) \mid q \in A\right\}$ olmak üzere, p noktasının A kümesinin kapanışına ait olması için gerek ve yeter koşul $d(p,A) = 0$ olmasıdır.

(CL4) $N_A(t) = \{p \in S \mid d(p,A) < t\}$ olmak üzere, $A \subseteq N_A(t)$ kapsaması sağlanır ve $N_A(t) \in \tau_{\mathscr{U}}$ gerçeklenir.

İspat. (CL1): $\mathfrak{B}(p)$ topluluğu p noktasında bir lokal taban olduğundan Önerme 2.13-(a) gereği istenilen elde edilir.

(CL2): p noktası A kümesinin kapanışına ait olsun. Bu durumda, (CL1) koşulundan dolayı, A içinde her $n \in \mathbb{N}^*$ için,

$$0 \leq d_L(F_{pp_n}, \varepsilon_0) < \frac{1}{n}$$

olacak şekilde bir $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dizisi vardır. Buradan limite geçersek, $\lim\limits_{n\to\infty} p_n = p$ elde edilir.

Tersine, A içinde $p_n \to p$ olacak şekilde bir $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dizisi var olsun. Bu durumda, Önerme

2.13-(c) kulanılırsa, her $t>0$ ve $n \geq N$ için,

$$p_n \in N_p(t)$$

olacak şekilde bir $N \in \mathbb{N}$ vardır. Böylece, her $t>0$ için $p_N \in N_p(t) \cap A \neq \emptyset$ elde edilir ve bu p noktasının A kümesinin kapanışına ait olduğunu söyler.

(CL3): p noktası A kümesinin kapanışına ait olsun ve $t = d(p,A) > 0$ olduğunu kabul edelim. Bu durumda, (CL1) koşulundan dolayı, $q \in N_p(t) \cap A$ vardır. Fakat bu durumda,

$$t \leq d_L(F_{pq}, \varepsilon_0) < t$$

çelişkisi elde edilir. O halde $d(p,A) = 0$ olmalıdır.

Tersine, $d(p,A) = 0$ olsun. Bu durumda, A içinde her $n \in \mathbb{N}^*$ için,

$$0 \leq d_L(F_{pp_n}, \varepsilon_0) < \frac{1}{n}$$

olacak şekilde bir $(p_n)_{n \in \mathbb{N}}$ dizisi vardır. Buradan limite geçersek, $\lim_{n \to \infty} p_n = p$ elde edilir ve (CL2) koşulundan dolayı p noktası A kümesinin kapanışına ait olur.

(CL4): Herhangi bir $p \in A$ ve $t > 0$ alalım. Bu durumda, (CL3) koşulundan dolayı $d(p,A) = 0 < t$ sağlanır ve buradan,

$$A \subseteq N_A(t)$$

elde edilir. Şimdi, $N_A(t) \in \tau_{\mathscr{U}}$ olduğunu gösterelim. Bunun için, herhangi bir $p \in N_A(t)$ alalım. Bu durumda, T fonksiyonu $\Delta^+ \times \Delta^+$ üzerinde düzgün sürekli olduğundan, $t - d(p,A) > 0$ sayısına karşılık, her $(F_1, G_1), (F_2, G_2) \in \Delta^+ \times \Delta^+$ için,

$$d_L(F_1, F_2) < \mu \quad \text{ve} \quad d_L(G_1, G_2) < \mu \Rightarrow d(T(F_1, G_1), T(F_2, G_2)) < t - d(p,A)$$

olacak şekilde bir $\mu > 0$ vardır. Şimdi, $N_p(\mu) \subseteq N_A(t)$ olduğunu gösterelim. Bunun için, herhangi bir $q \in N_p(\mu)$ alalım. T fonksiyonunun düzgün sürekliliğini (F_{pq}, ε_0) ve $(\varepsilon_0, \varepsilon_0)$

noktalarına uygularsak,

$$d_L(F_{pq},\varepsilon_0) = d_L(T(F_{pq},\varepsilon_0),\varepsilon_0) < t - d(p,A)$$

olur ve buradan,

$$d(q,A) < t - d(p,A) \leq t$$

elde edilir.

Önerme 4.17. (S,F,T) bir olasılıksal metrik uzay ve T fonksiyonu sürekli olsun. Bu durumda aşağıdakiler geçerlidir:

(a) Her $p \in S$ ve $t > 0$ için, $N_p(t) \in \tau_{\mathscr{U}}$ gerçeklenir.

(b) $\tau_{\mathscr{U}}$ topluluğunun, $\mathfrak{B} = \{N_p(t) \mid p \in S,\ t > 0\}$ alt topluluğu, $\tau_{\mathscr{U}}$ için bir tabandır.

(c) $(S,\tau_{\mathscr{U}})$ topolojik uzayı bir T_3 uzayıdır.

İspat. (a) Herhangi bir $q \in N_p(t)$ alalım. $d_L(F_{pq},\varepsilon_0) = \alpha$ dersek, $\alpha < t$ ve dolayısıyla $t-\alpha > 0$ olur. Hipotez gereği, T fonksiyonu (F_{pq},ε_0) noktasında sürekli olduğundan, $t-\alpha > 0$ sayısına karşılık, her $(G,H) \in \Delta^+ \times \Delta^+$için,

$$d_L(F_{pq},G) < \eta \quad \text{ve} \quad d_L(\varepsilon_0,H) < \eta \Rightarrow d(T(F_{pq},\varepsilon_0),T(G,H)) < t-\alpha \tag{4.25}$$

olacak şekilde bir $\eta > 0$ vardır. Şimdi, $N_q(\eta) \subseteq N_p(t)$ olduğunu gösterelim. Bunun için herhangi bir $r \in N_q(\eta)$ alalım. Bu durumda, (4.25) bağıntısı kullanılarak,

$$d_L(T(F_{pq},F_{qr}),T(F_{pq},\varepsilon_0)) < t-\alpha \tag{4.26}$$

elde edilir. Bağıntı (4.26) ve Sonuç 4.12 yardımıyla,

$$\begin{aligned} d_L(F_{pr},\varepsilon_0) &\leq d_L(T(F_{pq},F_{qr}),\varepsilon_0) \\ &\leq d_L(T(F_{pq},F_{qr}),F_{pq}) + d_L(F_{pq},\varepsilon_0) \\ &< t-\alpha+\alpha = t \end{aligned}$$

elde edilir ve bu $r \in N_p(t)$ olduğunu gösterir.

(b) Teorem 4.15 ve (a) şıkkının bir sonucudur.

(c) $A \subseteq S$ herhangi bir kapalı küme ve $p \notin A$ olsun. Bu durumda, (CL3) koşulundan $d(p,A) > 0$ olur. T fonksiyonu $\Delta^+ \times \Delta^+$ üzerinde düzgün sürekli olduğundan, $d(p,A) > 0$ sayısına karşılık, her $(F_1, G_1), (F_2, G_2) \in \Delta^+ \times \Delta^+$ için,

$$d_L(F_1,F_2) < \mu \quad \text{ve} \quad d(G_1,G_2) < \mu \Rightarrow d(T(F_1,G_1),T(F_2,G_2)) < d(p,A)$$

olacak şekilde bir $\mu > 0$ vardır. Şimdi, $N_p(\mu) \cap N_A(\mu) = \emptyset$ olduğunu gösterelim. Aksine, $q \in N_p(\mu) \cap N_A(\mu)$ olduğunu kabul edelim. Buradan, $d(q,A) < \mu$ olacağından,

$$d_L(F_{qr}, \varepsilon_0) < \mu$$

olacak şekilde bir $r \in A$ vardır. T fonksiyonunun düzgün sürekliliğini (F_{pq}, F_{qr}) ve $(\varepsilon_0, \varepsilon_0)$ noktalarına uygularsak,

$$d_L(F_{pr}, \varepsilon_0) \leq d_L(T(F_{pq}, F_{qr}), \varepsilon_0) < d(p,A) \tag{4.27}$$

elde edilir. Fakat, $r \in A$ olduğundan,

$$d(p,A) \leq d_L(F_{pr}, \varepsilon_0) < d(p,A)$$

çelişkisi elde edilir. O halde $N_p(\mu) \cap N_A(\mu) = \emptyset$ olmalıdır. Dolayısıyla, $(S, \tau_{\mathscr{U}})$ düzenli uzaydır.

Şimdi, $(S, \tau_{\mathscr{U}})$ uzayının T_1 uzayı olduğunu gösterelim. Bunun için, herhangi bir $p \in S$ ve $q \in \bigcap_{t>0} N_p(t)$ alalım. Bu durumda, her $t > 0$ için, $d_L(F_{pq}, \varepsilon_0) < t$ olur ve dolayısıyla $d_L(F_{pq}, \varepsilon_0) = 0$ elde edilir. Buradan, $F_{pq} = \varepsilon_0$ olacağından, $p = q$ bulunur. Böylece, $\bigcap_{t>0} N_p(t) = \{p\}$ elde edilir ve bu $(S, \tau_{\mathscr{U}})$ uzayının T_1 uzayı olduğunu gösterir.

$(S, \tau_{\mathscr{U}})$ topolojik uzayı T_3 uzayı olmasına rağmen, sayılabilir bir tabana sahip olup olmadığını bilmiyoruz.Ancak, Teorem 2.35 ile sayılabilir bir tabana sahip olan düzgün bir uzayın metriklenebilir olduğunu göstermiştik. Şimdi, bu teorem yardımıyla, $(S, \tau_{\mathscr{U}})$ topolojik uzayının metriklenebilir olduğunu göstereceğiz.

Teorem 4.18. (S,F,T) bir olasılık metrik uzay ve T sürekli bir üçgen fonksiyon olsun. Her $t>0$ için,

$$B(t)=\{(p,q)\in S\times S \mid q\in N_p(t)\}$$

ve

$$\mathfrak{B}=\{B(t)\mid t>0\}$$

şeklinde tanımlansın. Bu durumda, S kümesi üzerinde $\mathfrak{B}$ topluluğunu taban kabul eden bir $\mathscr{U}$ düzgünlüğü vardır.

İspat. $\mathfrak{B}$ topluluğunun Önerme 2.26 koşullarını sağladığını gösterelim.

(UB1): Herhangi bir $t>0$ alalım. Teorem 4.15 kullanılırsa, $p\in N_p(t)$ olur ve dolayısıyla $\triangle\subseteq B(t)$ gerçeklenir.

(UB2): Herhangi bir $t>0$ alalım. $F_{pq}=F_{qp}$ olduğundan $B(t)=B^{-1}(t)$ olur.

(UB3): Herhangi bir $t>0$ alalım.T fonksiyonu $\Delta^+\times\Delta^+$ üzerinde düzgün sürekli olduğundan, $t>0$ sayısına karşılık, her $(F_1,G_1),(F_2,G_2)\in\Delta^+\times\Delta^+$ için,

$$d_L(F_1,F_2)<\eta \quad \text{ve} \quad d(G_1,G_2)<\eta \Rightarrow d_L(T(F_1,G_1),T(F_2,G_2))<t$$

olacak şekilde bir $\eta>0$ vardır. Şimdi, $B(\eta)\circ B(\eta)\subseteq B(t)$ olduğunu gösterelim. Bunun için herhangi bir $(p,r)\in B(\eta)\circ B(\eta)$ alalım. Bu durumda, $(p,q)\in B(\eta)$ ve $(q,r)\in B(\eta)$ olacak şekilde bir $q\in X$ vardır. T fonksiyonunun düzgün sürekliliğini (F_{pq},F_{qr}) ve $(\varepsilon_0,\varepsilon_0)$ noktalarına uygularsak,

$$d_L(T(F_{pq},F_{qr}),\varepsilon_0)<t \tag{4.28}$$

elde edilir. Bağıntı (4.28) ve Sonuç 4.12 kullanılarak,

$$d_L(F_{pr},\varepsilon_0)\le d_L(T(F_{pq},F_{qr}),\varepsilon_0)<t$$

bulunur ve buradan $(p,r)\in B(t)$ elde edilir.

(UB4): Herhangi iki $t_1, t_2 > 0$ alalım. Bu durumda, $t_3 = \min\{t_1, t_2\}$dersek,

$$N_p(t_3) = N_p(t_1) \cap N_p(t_2)$$

olacağından, $B(t_3) = B(t_1) \cap B(t_2)$ elde edilir. Dolayısıyla, (UB1) ve (UB4) koşulları $\mathfrak{B}$ topluluğunun $S \times S$ üzerinde bir filtre tabanı olduğunu söyler.

Bu durumda, Önerme 2.28 yardımıyla,

$$\tau_{\mathscr{U}} = \{A \subseteq S \mid \forall p \in A \quad \exists t > 0 \quad N_p(t) \subseteq A\} \cup \{\emptyset\}$$

S üzerinde bir düzgün topoloji olur. Olasılık metrik uzay teorisinde, bu topoloji "Kuvvetli Topoloji" olarak adlandırılır.

Sonuç 4.19. (S, F, T) bir olasılıksal metrik uzay , T sürekli bir üçgen fonksiyon olsun. Bu durumda, $(S, \tau_{\mathscr{U}})$ düzgün uzayı metriklenebilirdir.

İspat. $\mathfrak{B} = \{B(\frac{1}{n}) \mid n \geq 1\}$ topluluğu $\mathscr{U}$ için sayılabilir bir tabandır. Şimdi, $\triangle = \bigcap\limits_{t>0} B(t)$ olduğunu gösterelim. Bunun için, $p \neq q$ olacak şekilde $(p, q) \in \bigcap\limits_{t>0} B(t)$ alalım. Bu durumda, $\alpha = d_L(F_{pq}, \varepsilon_0) > 0$ olduğundan,

$$(p, q) \in B(\alpha) \Rightarrow \alpha < \alpha$$

çelişkisi elde edilir. Buradan $\bigcap\limits_{t>0} B(t) \subseteq \triangle$ bulunur ve $\triangle \subseteq \bigcap\limits_{t>0} B(t)$ kapsaması her zaman gerçeklendiğinden istenen elde edilir.

Sonuç olarak Teorem 2.35 kullanılarak, $(S, \tau_{\mathscr{U}})$ düzgün uzayının metriklenebilir olduğu elde edilir.

Tanım 2.24 dikkate alınarak aşağıdaki Cauchy dizisi tanımı verilebilir.

Tanım 4.20. (S, F, T) bir olasılıksal metrik uzay, T sürekli bir üçgen fonksiyon ve $(p_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq S$ bir dizi olsun. Bu durumda, her $t > 0$ ve $n, m \geq N$ için,

$$d_L(F_{p_n p_m}, \varepsilon_0) < t$$

olacak şekilde bir $N \in \mathbb{N}$ varsa, $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dizisine *Cauchy dizisi* denir.

4.4. UZAKLIK FONKSİYONUNUN DÜZGÜN SÜREKLİLİĞİ

Lemma 4.21. T sürekli üçgen fonksiyonu olsun ve $\mathscr{S}$ kümesi aşağıdaki şekilde tanımlanmış olsun.

$$\mathscr{S} = \left\{(F,G,H) \in (\Delta^+)^3 \,|\, F \geq T(H,G) \quad ve \quad G \geq T(H,F)\right\}$$

Bu durumda, her $h > 0$ için öyle bir $\eta > 0$ vardır ki aşağıdaki koşul sağlanır.

$$(F,G,H) \in \mathscr{S} \text{ ve } d_L(H,\varepsilon_0) < \eta \Rightarrow d_L(F,G) < h \tag{4.29}$$

İspat. Herhangi bir $h > 0$ alalım. T fonksiyonu $\Delta^+ \times \Delta^+$ üzerinde düzgün sürekli olduğundan, her $(F_1,G_1),(F_2,G_2) \in \Delta^+ \times \Delta^+$ için,

$$d_L(F_1,F_2) < \eta \quad \text{ve} \quad d_L(G_1,G_2) < \eta \Rightarrow d_L(T(F_1,G_1),T(F_2,G_2)) < h$$

olacak şekilde bir $\eta > 0$ vardır. Şimdi $d_L(H,\varepsilon_0) < \eta$ olacak şekilde bir $(F,G,H) \in \mathscr{S}$ alalım. T fonksiyonunun düzgün sürekliliğinden,

$$d_L(T(G,H),G) < h$$

ve

$$d_L(T(F,H),F) < h$$

elde edilir. d_L fonksiyonunun tanımından, her $x \in]0,\frac{1}{h_0}[$ için,

$$G(x) \leq T(G,H)(x+h_0)+h_0 \leq F(x+h_0)+h_0 \tag{4.30}$$

ve

$$F(x) \leq T(F,H)(x+h_0)+h_0 \leq G(x+h_0)+h_0 \tag{4.31}$$

olacak şekilde bir $h_0 \in]0,1]$ bulunur ve buradan $h_0 \in A(F,G)$ olur. Dolayısıyla,

$$d_L(F,G) \leq h_0 < h$$

elde edilir.

Teorem 4.22. (S,F,T) bir olasılıksal metrik uzay ve T sürekli üçgen fonksiyonu olsun. Bu durumda $F : S\times S \to \Delta^+$ fonksiyonu düzgün süreklidir.

İspat. Tanım 2.23 ve Önerme 2.29 yardımıyla, F fonksiyonunun düzgün sürekli olduğunu, yani, her $h>0$ için $(p,q),(p',q') \in S\times S$ ($p \in N_{p'}(\delta)$ ve $q \in N_{q'}(\delta) \Rightarrow$ $d_L(F_{pq},F_{p'q'}) < h$) özelliğini sağlayacak şekilde bir $\delta = \delta(h) > 0$ bulunabildiğini göstereceğiz:

Herhangi iki $(p,q),(p',q') \in S\times S$ için, T üçgen fonksiyon olduğundan,

$$F_{p'q'} \geq T(F_{p'q},F_{qq'}) \geq T(T(F_{pp'},F_{pq}),F_{qq'}) = T(T(F_{pp'},F_{qq'}),F_{pq})$$

ve benzer şekilde

$$F_{pq} \geq T(T(F_{pp'},F_{qq'}),F_{p'q'})$$

elde edilir. Yani,

$$(F_{pq},F_{p'q'},T(F_{pp'},F_{qq'})) \in \mathscr{S} \tag{4.32}$$

olur. $h>0$ için Lemma 4.21 yardımıyla öyle bir $\eta > 0$ elde edilir ve T fonksiyonunun düzgün sürekliliğinden $\eta > 0$ sayısına karşılık, her $(F_1,G_1),(F_2,G_2) \in \Delta^+ \times \Delta^+$ için,

$$d_L(F_1,F_2) < \eta_1 \quad \text{ve} \quad d_L(G_1,G_2) < \eta_1 \Rightarrow d_L(T(F_1,G_1),T(F_2,G_2)) < \eta$$

olacak şekilde bir $\eta_1 > 0$ vardır. Bu durumda, $\delta = \eta_1$ seçilip, T fonksiyonunun düzgün sürekliliği $(F_{pp'},F_{qq'})$,$(\varepsilon_0,\varepsilon_0)$ noktalarına uygulanırsa,

$$d_L(T(F_{pp'},F_{qq'}),\varepsilon_0) < \eta \tag{4.33}$$

elde edilir. (4.32) , (4.33) bağıntılarına dikkat edilip, $F = F_{pq}$, $G = F_{p'q'}, H = T(F_{pp'},F_{qq'})$ alınıp Lemma 4.21 deki (4.29) bağıntısı uygulanırsa istenilen elde edilecektir.

Teorem 4.23. (S,F,T) bir olasılıksal metrik uzay, T sürekli üçgen fonksiyonu, $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ve $(q_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dizileri, $p_n \to p$, $q_n \to q$ olacak şekilde iki dizi olsun. Bu durumda $d_L(F_{p_nq_n}, F_{pq}) \to 0$, yani, $F_{p_nq_n} \to F_{pq}$ olur.

İspat. Herhangi bir $t > 0$ alalım. F fonksiyonu düzgün sürekli olduğundan, $t > 0$ sayısına karşılık öyle bir $\eta > 0$ vardır ve $p_n \to p$, $q_n \to q$ olduğundan, $\eta > 0$ sayısına karşılık her $n \geq N$ için,

$$p_n \in N_p(\eta) \quad \text{ve} \quad q_n \in N_q(\eta)$$

olacak şekilde bir $N \in \mathbb{N}$ vardır. Bu durumda, F fonksiyonunun düzgün sürekliliğinden, her $n \geq N$ için, $d_L(F_{p_nq_n}, F_{pq}) < t$ elde edilir ve bu $d_L(F_{p_nq_n}, F_{pq}) \to 0$ olduğunu söyler.

Sonuç 4.24. (S,F,T) bir olasılıksal metrik uzay, T sürekli bir üçgen fonksiyonu olsun. Bu durumda S kümesi içindeki her yakınsak dizi, Cauchy dizisidir.

İspat. $(p_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq S \quad p_n \to p$ olacak şekilde yakınsak bir dizi olsun. Bu durumda, Teorem 4.23 kullanılarak,

$$d_L(F_{p_np_m}, F_{pp}) = d_L(F_{p_np_m}, \varepsilon_0) \to 0$$

elde edilir.

Sonuç 4.25. (S,F,T) bir olasılıksal metrik uzay, T sürekli bir üçgen fonksiyon, $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ve $(q_n)_{n\in\mathbb{N}}$, S kümesi içinde yakınsak iki dizi olsun. Bu durumda, $(F_{p_nq_n})_{n\in\mathbb{N}}$ dizisi (Δ^+, d_L) içinde Cauchy dizisidir.

İspat. $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}, (q_n)_{n\in\mathbb{N}}$ S içinde iki yakınsak dizi olduğundan Sonuç 4.24 kullanılırsa, $d_L(F_{p_nq_n}, F_{pq}) \to 0$ olur. Böylece

$$d_L(F_{p_nq_n}, F_{p_mq_m}) \leq d_L(F_{p_nq_n}, F_{pq}) + d_L(F_{pq}, F_{p_mq_m})$$

ve dolayısıyla,

$$d_L(F_{p_nq_n}, F_{p_mq_m}) \to 0$$

olduğundan, $(F_{p_nq_n})_{n\in\mathbb{N}}$ dizisi (Δ^+, d_L) içinde bir Cauchy dizisidir.

5. TARTIŞMA VE SONUÇ

Üzerinde Lévy metriği olan dağılım fonksiyonları uzayının kompakt olduğunu ispatladık. Uzaklık dağılım fonksiyonları uzayının maksimal ve minimal elemanları olan, fonksiyonların alışılmış noktasal sıralaması altında, bir tam kafes olduğunu gösterdik. Yine bu uzay üzerindeki zayıf yakınsaklık topolojisi ve metrik topolojinin aynı olduğunu ve bu topolojiye göre bu kümenin kompakt olduğunu ispatladık.

Olasılıksal metrik uzay üzerinde, bir düzgünlük tarafından belirlenen topolojiyi inceledik ve bu topolojinin metriklenebilir olduğunu ispatladık. İspatlarımız kaynaklardaki ispatlardan farklıdır.

KAYNAKLAR

[1]. Menger, K., 1942, Statistical metrics, *Proceedings of the National Academy of Sciences of the USA* , 29, 535-537.

[2]. Wald, A., 1943,1955, On a statistical generalization of metric spaces, *Proceedings of the National Academy of Sciences of the USA*, 29, 196-197.

[3]. Menger, K., 1951, Probabilistic Theories of relations, *Proceedings of the National Academy of Sciences of the USA*, 37, 178-180.

[4]. Menger, K., 1951, Probabilistic geometry , *Proceedings of the National Academy of Sciences of the USA*, 37, 226-229.

[5]. Kelley, J.L., 1975, *General Topology*, Springer Verlag, New York.

[6]. Billingsley, P., 1966, *Probability and Measure*, A Wiley-Interscience Publication, USA, ISBN:0-471 -007 10-2.

[7]. Schweizer, B., Sklar, A., 1960, Statistical metric spaces, *Pacific Journal of Mathematics* , 10, 313-334.

[8]. Schweizer, B., Sklar, A., 1962, Statistical metric spaces arising from sets of random variable in Euclidean n spaces, *Theory of Probability and Its Applications* , 71, 447-456.

[9]. Schweizer, B., Sklar, A., 1963, Triangle inequalities in the class of statistical metric spaces, *Journal of the London Mathematical Society*, 38, 401-406.

[10]. Schweizer, B., Sklar, A., 1973, Probabilistic metric spaces determined by measurepreserving transformations, *Z. Wahrsch. Verw. Gerb.*, 26, 235-239.

[11]. Schweizer, B., Sklar, A., 1974, Operations on distrubition functions not derivable from operations on random variables, *Studia Mathematica*, 52(1), 43-52.

[12]. Moynihan, R., Schweizer, B., 1979, Betwenness relations in probabilistic metric spaces, *Pacific Journal of Mathematics* , 81(1), 175-196.

[13]. Schweizer, B., Sklar, A., 1983, *Probabilistic metric spaces*, Elsevier Science Publishing, New York, ISBN:0-444-00666-4.

[14]. Bocşan, G., Constantin, G., 1973, The Kuratowski function and some applications to probabilistic metric spaces, *Atti della Accademia Nazionale dei Lincei*, 55(8), 236-240.

[15]. Calabrese, P., 1978, The probability of the triangle inequality in probabilistic metric spaces , *Aequationes Mathematicae*, 18(1), 187-205.

[16]. Erber, T., Schweizer, B., Sklar, A., 1971, Probabilistic metric spaces and hysteresis systems, *Communications in Mathematical Physics* , 20(3), 205-219.

[17]. Fritsche, R., 1971, Topologies for probabilistic metric spaces, *Fund. Math.* , 72, 7-16.

[18]. Hotelling, H., 1928, Spaces of statistics and their metrization , *Science*, 67(1728), 149-150.

[19]. Kurosaki, I., 1964, A note on statistical metric spaces, *Proceedings of the Japan Academy*, 40, 396-399.

[20]. Nishiura, E., 1970, Constructive methods in probabilistic metric spaces, *Fund. Math.* , 67(1), 115-124.

[21]. Schweizer, B., 1964, Equivalence relations in probabilistic metric spaces, *Buletinul Institutului Politehnic din Iaşi* , 10, 67-70.

[22]. Schweizer, B., 1966, On the uniform continuity of the probabilistic distance, *Z. Wahrsch. Verw. Gerb.*, 5, 357-360.

[23]. Schweizer, B., 1967, Probabilistic metric spaces, *New York Statistician* , 19, 3-6.

[24]. Schweizer, B., Sklar, A., Thorp, E. 1960, The metrization os statistical metric spaces, *Pacific Journal of Mathematics* , 10, 673-675.

[25]. Tardiff, R.M., 1975, Topologies for probabilistic metric spaces, *Pacific Journal of Mathematics* , 65(1), 233-251.

[26]. Thorp, E., 1962, Generalized topologies for statistical metric spaces, *Fund. Math.* , 51, 9-21.

[27]. Wagner, F., 1965, Statistical topological spaces, *Notices of the American Mathematical Society* , 12, 588.

[28]. Feller, W., 1966, *An introduction to probability theory and its applications*, Wiley, New York.

[29]. Kingman, F.C., Taylor, S.J., 1966, *Introduction to measure and theory probability*, Cambridge Univ. Press., New York and London.

[30]. Tardiff, R.M., 1975, *Topologies for probabilistic metric spaces*, Ph.D. thesis, Univ. of Massachusetts.

ÖZGEÇMİŞ

Kişisel Bilgiler	
Adı Soyadı	Sultan BOZKURT
Doğum Yeri	İstanbul
Doğum Tarihi	12.09.1992
Uyruğu	X T.C. Diğer:
Telefon	05342614405
E-Posta Adresi	sultan__bozkurt@hotmail.com
Web Adresi	

Eğitim Bilgileri	
Lisans	
Üniversite	İstanbul Üniversitesi
Fakülte	Fen Fakültesi
Bölümü	Matematik
Mezuniyet Yılı	2014

Yüksek Lisans	
Üniversite	İstanbul Üniversitesi
Enstitü Adı	Fen Bilimleri
Anabilim Dalı	Matematik Anabilim Dalı
Programı	Matematik Programı
Mezuniyet Yılı	2018