T.C.
İSTANBUL ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

YÜKSEK LİSANS TEZİ

ZAMAN-FREKANS ANALİZİ VE BAZI OPERATÖRLER ÜZERİNE

Sevil KELEŞ

Matematik Anabilim Dalı

Matematik Programı

DANIŞMAN
Prof.Dr. Serap ÖZTOP KAPTANOĞLU

Temmuz, 2019

İSTANBUL

Bu çalışma 09.07.2019 tarihinde aşağıdaki jüri tarafından Matematik Anabilim Dalı Matematik Programında Yüksek Lisans Tezi olarak kabul edilmiştir.

Tez Jürisi

Prof.Dr. Serap ÖZTOP KAPTANOĞLU (Danışman)
İstanbul Üniversitesi
Fen Fakültesi

Prof.Dr. Erhan ÇALIŞKAN
İstanbul Üniversitesi
Fen Fakültesi

Prof.Dr. Ömer GÖK
Yıldız Teknik Üniversitesi
Fen Edebiyat Fakültesi

20.04.2016 tarihli resmi gazetede yayımlanan Lisansüstü Eğitim ve Öğretim Yönetmeliğinin 9/2 ve 22/2 maddeleri gereğince; Bu Lisansüstü teze, İstanbul Üniversitesi′nin abonesi olduğu intihal yazılım programı kullanılarak Fen Bilimleri Enstitüsü′nün belirlemiş olduğu ölçütlere uygun rapor alınmıştır.

ÖNSÖZ

Yüksek Lisans eğitimim ve tez aşaması boyunca her konudaki yardımı ve özveriyle gösterdiği desteği için değerli danışman hocam Sayın Prof.Dr. Serap ÖZTOP KAPTANOĞLU'na, tez aşamasında yardımını esirgemeyen Sayın Dr.Öğr.Üyesi Elçim ELGÜN KIRIMLI'ya, her konuda yanımda olan Sayın Araş.Gör. Rüya ÜSTER'e ve tez aşamasındaki desteği için Sayın Araş.Gör. Büşra ÜNAL'a sonsuz teşekkür ederim.

Temmuz, 2019 Sevil KELEŞ

İÇİNDEKİLER

Sayfa No

ÖNSÖZ .... **iv**
İÇİNDEKİLER .... **vi**
ŞEKİL LİSTESİ .... **vii**
SİMGE VE KISALTMA LİSTESİ .... **ix**
ÖZET .... **xi**
SUMMARY .... **xiii**
1. GİRİŞ **1**
1.1. TEMEL FOURİER ANALİZİ 5
1.1.1. Fourier Dönüşümü ve Özellikleri 8
1.2. TEMEL İŞLEMLER 10
1.2.1. Öteleme ve Modülasyon 10
1.2.2. Konvolüsyon İşlemi ve Özellikleri 12
1.2.3. Involüsyon ve Yansıma 13
1.2.4. Fourier Serisi 14
1.2.5. Poisson Toplam Formulü 15
1.2.6. Fourier Dönüşümü ve Belirsizlik İlkeleri 16
1.2.7. Donoho ve Stark'ın Belirsizlik İlkesi 16
2. GENEL KISIMLAR **18**
2.1. ZAMAN-FREKANS ANALİZİ 18
2.2. ZAMAN-FREKANS ANALİZİNİN TEMEL İŞLEMLERİ 19
2.3. KISA-ZAMANLI FOURİER DÖNÜŞÜMÜ VE TEMEL ÖZELLİKLERİ 21
2.3.1. Diklik İlişkisi ve Ters Formülü 28
2.3.2. Kısa-Zamanlı Fourier Dönüşümü ve Belirsizlik İlkeleri 33
2.3.3. Lieb Belirsizlik İlkesi 34
2.4. NOKTASAL ZAMAN-FREKANS TEMSİLLERİ: ÇERÇEVE TEORİSİ 36
2.4.1. Çerçeve Teorisi 37

2.5. BAZI OPERATÖRLER 38
2.5.1. Analiz, Sentez ve Çerçeve Operatörleri 38
2.5.2. Gabor Çerçevesi 42
2.5.3. Wiener Uzayı ve Özellikleri 46
2.6. ZAK DÖNÜŞÜMÜ VE ZAMAN-FREKANS ANALİZİ 47
2.6.1. Zak Dönüşümünün Özellikleri 48
2.6.2. Zak Dönüşümü ve Zaman-Frekans Ötelemeleri 52
2.6.3. Zak Dönüşümü ve Fourier Dönüşümü 53
2.6.4. Zak Dönüşümü ve Gabor Çerçevesi 54
3. MALZEME VE YÖNTEM 56
4. BULGULAR 57
5. TARTIŞMA VE SONUÇ 58
KAYNAKLAR 59
ÖZGEÇMİŞ 61

ŞEKİL LİSTESİ

Sayfa No

Şekil 1.1: T_x : Öteleme Fonksiyonu 11

Şekil 1.2: M_ω : Modülasyon Fonksiyonu 11

Şekil 2.1: $M_\omega T_x$ Zaman-Frekans Ötelemesi 20

Şekil 2.2: Kısa-Zamanlı Fourier Dönüşümü 22

SİMGE VE KISALTMA LİSTESİ

Simgeler	**Açıklama**
$\hat{f}$	: f fonksiyonunun Fourier dönüşümü
$Vf(x,\omega)$	: x anındaki ω frekansının uzunluğu
T_x	: x ile öteleme
M_ω	: ω ile modülasyon
$V_g f(x,\cdot)$	: x'in bir komşuluğunda f merkezli bölümünün Fourier dönüşümü
$V_g f(x,\omega)$	: x anındaki ω etrafındaki frekans genliği
$\mathbb{R}$	: Reel sayılar kümesi
$\mathbb{R}^d$	: d-boyutlu reel sayılar kümesi
$\mathbb{R}^{2d}$	: Zaman-frekans düzlemi
$\mathbb{R}^2$	: 2-boyutlu reel sayılar kümesi
$\|\|\cdot\|\|$	: Norm fonksiyonu
L^1	: İntegrallenebilir fonkisyonlar kümesi
L^∞	: Ölçülebilir sınırlı fonksiyonlar kümesi
L^p	: Ölçülebilir fonksiyonlar kümesi
$\|\|\cdot\|\|_\infty$	: L^∞-normu
$\mathfrak{F}$	: Fourier dönüşümü
C_0	: Sonsuzda sıfır olan fonkisyonlar kümesi
$M_\omega T_x$	: Zaman-frekans ötelemesi
$*$	: Konvolüsyon
$\bar{f}$	: f in eşleniği
$\mathfrak{F}^*$	: $\mathfrak{F}$ operatörünün eşleniği
f^*	: f fonksiyonunun involüsyonu
$\mathbb{Z}$	: Tam sayılar kümesi
$\mathbb{Z}^d$	: d-boyutlu Tam sayılar kümesi
$\mathbb{R}^d/\mathbb{Z}^d$	: Bölüm halkası
$\mathbb{T}^d$	: Torus
$\sum$	: Toplam fonksiyonu
C	: Analiz operatörü
D	: Sentez operatörü

S	: Çerçeve operatörü
$B(H)$	: H Hilbert uzayı üzerindeki sınırlı operatörler
I_H	: H Hilbert uzayının birim operatörü
S^{-1}	: S operatörünün tersi
$\mathscr{G}$	: Gabor dönüşümü
$g_{x,\omega}$	: x anındaki ω frekansının pencere fonksiyonu
$\tilde{f}$	: f fonksiyonunun Gabor dönüşümü
$\mathscr{G}f$	: f fonksiyonunun Gabor dönüşümü
$\tilde{f}_g$	: f fonksiyonunun g penceresine göre Gabor dönüşümü
$W(\mathbb{R}^d)$	: Wiener uzayı
$W_0(\mathbb{R}^d)$	: Wiener uzayının sürekli fonksiyonların alt uzayı
C_c	: Kompakt destekli sınırlı fonksiyonlar
$\mathscr{G}f$	: f nin Gabor dönüşümü
$\mathscr{Z}f$	: f nin Zak dönüşümü

Kısaltmalar	**Açıklama**
FD	: Fourier Dönüşümü
KZFD	: Kısa-Zamanlı Fourier Dönüşümü

ÖZET

YÜKSEK LİSANS TEZİ

ZAMAN-FREKANS ANALİZİ VE BAZI OPERATÖRLER ÜZERİNE

Sevil KELEŞ

İstanbul Üniversitesi

Fen Bilimleri Enstitüsü

Matematik Anabilim Dalı

Danışman: Prof.Dr. Serap ÖZTOP KAPTANOĞLU

Zaman-frekans analizi harmonik analizin modern bir dalıdır. Zaman-freakans analizi, operatörler ve fonksiyonların analizi için zamana bağlı değisen, zaman-frekans ötelemelerini kullanan matematiksel teknikler ve onun uygulamalarından oluşmaktadır. Zaman-frekans analizi, zamana ve frekansa aynı anda ve simetrik davranan yerel Fourier analizinin bir şeklidir.
Fourier Dönüşümü ile zaman uzayında bulunan sinyaller frekans uzayına taşınarak yorumlanır. Ancak bu dönüşüm ile frekans ortamına aktarılan sinyallerde zaman bilgisi kaybedilmektedir. Bu nedenle yöntem durağan olmayan sinyallerin analizi için yeterli değildir. Bu eksikliği giderebilmek için araştırmacılar çeşitli yöntemler önermişlerdir. Bu yöntemlerden biri kısa-zamanlı Fourier dönüşümüdür.

Bu tezde, Fourier analizi ve zaman-frekans analizi incelendi ve karşılaştırıldı. Daha çok zaman-frekans analizi uzayında yoğunlaşıldı. Günümüzde zaman-frekans analizi çok önemli teknolojik uygulamalara sahiptir ve Fourier analizine göre daha üstündür.
Tezin giriş kısmında klasik Fourier analizi ve temel özellikleri verildi. Fourier dönüşümü tanıtılarak belirsizlik ilkeleri verildi.
Genel kısımda ise zaman-frekans analizi tanıtıldı. Zaman-frekans analizine ait temel operatör ve özellikleri verildi. Çerçeve teorisi, özellikle Gabor çerçevesi üzerinde çalışıldı.

Son olarak Zak dönüşümü tanıtılarak özellikleri verildi. Ayrıca Zak dönüşümünün Fourier dönüşümü ve Gabor çerçevesi arasındaki ilişkileri verildi.

Temmuz 2019, 75 sayfa.

Anahtar kelimeler: Zaman-Frekans Analizi, Kısa-Zamanlı Fourier Dönüşümü, Belirsizlik İlkeleri.

SUMMARY

M.Sc. THESIS

ON TIME-FREQUENCY ANALYSIS AND SOME OPERATORS

Sevil KELEŞ

İstanbul University

Institute of Graduate Studies in Science and Engineering

Mathematics Program

Supervisor: Prof.Dr. Serap ÖZTOP KAPTANOĞLU

Time-frequency analysis is a modern branch of harmonic analysis which comprises of theory and its applications of mathematical techniques using the translations and modulations to analyze functions and operators. Time-frequency analysis is a form of local Fourier analysis that threats time and frequency simultaneously and symmetrically.
In classical Fourier Analysis, the signals on the time space are studied by transforming them in to the frequency space. However, in the frequency space, some informations related to time is lost which makes analysis of non-stationary signals difficult. To overcome this deficiency, a variety of methods are proposed, one of which is a local form of Fourier analysis, called the short-time Fourier transform.

In this thesis, techniques of Fourier analysis and time-frequency analysis are examined and compared. The thesis is concentrated mainly on time-frequency space. Today the theory time-frequency analysis has important technological and scientific applications extending the known results on Fourier analysis.
In the first part of the thesis classical Fourier analysis and its properties are given. In particular Fourier transform is introduced and uncertainty principles are given.
In the second and main part of the thesis, time-frequency analysis is introduced and basic operators togerther with their properties are given. Next frame theory, in particular Gabor frames are studied in connection with some key operators related to frames.

Finally, Zak transform is introduced and its properties are given. In addition, the relationship of Zak transform to Fourier transform and Gabor frames is studied.

Temmuz 2019, 75 pages.

Keywords: Time-Frequency Analysis, Short-Time Fourier Transform, Uncertainty Principles.

1. GİRİŞ

J.B.J. Fourier'nin (1770-1830) temellerini atmış olduğu Fourier analizi ve üzerine geliştirilen modeller, modern matematiksel analizin en önemli temellerinden biri olmuştur. Pek çok mühendislik, uzay, fen ve tıp bilimlerinde uygulama alanı bulmuştur. Günümüzde bir sinyali çevresindeki gürültüden ayırıp işleyen sistemlerin çok önemli bir kısmı modern Fourier analizi teknikleri ile çalışmaktadır.

Fourier'nin, Fourier dönüşümünü (FD) tanımlarken en önemli motivasyonu notaların harmonisinin matematiksel olarak düzenlenip, gürültüden arındırılıp, sesin ve müziğin mükemmelleştirilmesidir. Fourier'nin çalışmalarındaki en önemli nokta kendini tekrarlayan fiziksel davranışın çember ve üzerindeki trigonometrik fonksiyonlar kullanılarak modellenmesidir.

Fourier ve çalışma arkadaşları geliştirdikleri tekniklerin doğada gözlemlenebilecek makul her davranışın modellenebileceğini iddia etmişlerdir. "Makul davranış" olarak tanımladıkları fiziksel olgular halen modern bilimsel gelişmelerin içinde uygulama alanı bulmaktadır. Örneğin, radar sistemlerinin dalga verilerini sınıflandırmasında, sağlık hizmetlerinde çeşitli kan testlerinin sonuçlarının okunmasında, MR makinelerinin görüntü oluşturmasında, cep telefonlarında iletişimin kalitesinin arttırılmasında, astronomide uzaydan alınan elektromanyetik sinyallerin incelenip sınıflandırılmasında klasik Fourier analizi teknikleri kullanılmaktadır.

Matematiksel analizdeki makul davranışı anlama ve sınıflandırma üzerine yapılan çalışmalardaki ilerlemelere paralel olarak tüm uygulama alanları da özelleştirilmiş ve farklı sorulara cevap bulmaya başlanmıştır. D.Gabor'un (1946) çalışmalarına dayanarak, özellikle sinyal analizi alanında çalışan mühendislik bilimlerinde Fourier dönüşümünün küçük parçalara bölünebileceği keşfedilmiştir. Böylece, Fourier analizinin lokal şekli olan "zaman-frekans analizi" ya da "modern Fourier analizi" olarak adlandırılan disiplinlerarası alanın temeli atılmıştır.

Zaman-frekans analizinin günümüzdeki uygulamaları, yukarıda bahsedilen Fourier analizi uygulamalarının özelleştirilmesini sağlamıştır. Örneğin, dokunmatik ekranların gelişmesine ve hata oranlarının yok denecek kadar azalmasına yol açmıştır. Ayrıca kısa süre önce tüm dünya gündemine gelen "kara deliğin fotoğrafı" çekilirken de uzaydan gelen sinyallerin sınıflandırılıp temizlenmesinde zaman-frekans analizi teknikleri kullanılmıştır.

Zaman-frekans analizinin uygulama alanları klasik Fourier analizinin uygulama alanları ile sınırlı değildir. Bilim dünyasının geleceğini şekillendirecek olan yapay zeka sistemlerinin öğrenme mekanizmalarının bazıları da verilen bilgiyi sınıflandırıp temizlemekte zaman-frekans analizi teknikleri kullanılmaktadır.

Bugün yapay zeka sistemlerinin geliştirilmesindeki en büyük engel, sayısı çok az ve nadir de olsa görülen sistemlerin yaptığı ciddi hataların sebebinin anlaşılamamasıdır. Bilim dünyasının bu soruna önerdiği en sistematik çözüm ise kullanılan tekniklerin teorilerinin çalışılması ve derinlemesine çözümlenmesidir.

Klasik Fourier analizi fonksiyonları tanımlamak için iki tamamlayıcı temsili kullanır, biri f fonksiyonu, diğeri ise f fonksiyonunun Fouirer dönüşümü $\hat{f}(\omega) = \int_{\mathbb{R}} f(t)e^{-2\pi it\omega}dt$ dir. Sinyal analizinde, $f(x)$ zamana ait, $\hat{f}(\omega)$ ise frekansa ait davranışı tanımlar.

Genel olarak $\hat{f}$ ve tersinin özelliklerinden f'in özelliklerini tanımak zordur. İki prensip kural olarak kabul edilir:

- **Düzgünlük ve ayrışma prensibi:** f düzgün ise, $\hat{f}$ sıfıra gider, f sıfıra gider ise $\hat{f}$ düzgündür.
- **Belirsizlik Prensibi:** f ve $\hat{f}$ aynı anda küçük olamaz.

Zaman-frekans analizi, f ve $\hat{f}$'in bilgilerini birleştiren orta düzey temsillerinin araştırma ve incelemesi olarak yorumlanabilir. Amacımız sinyal ya da fonksiyon olan f'in aynı zamanda spektral ve zamansal açıklamasıdır. $Vf(x,\omega)$ temsili iki boyutlu ve x anındaki ω frekansının uzunluğunun ölçümüdür.

f fonksiyonunun ideal zaman-frekans temsili anlık her x teki frekans spektrumunun ortaya çıkmasını sağlar. Bu ideale engel olan ise belirsizlik prensibidir. Belirsizlik prensibi anlık freakans kavramını imkansız hale getirir. Her zaman-frekans temsili bir belirsizlik prensibine uyar. Bir x anındaki f sinyalininin freakans spektrumunu bulmak için,f x in bir komşuluğuna yerelleştirilir ve onun Fourier dönüşümü alınır. Bu da **Kısa-Zamanlı Fourier Dönüşümüdür** (KZFD). Sınırlama işleminin parametresi bir g pencere fonksiyonudur.

$$V_g f(x,\omega) = \int_{\mathbb{R}} f(t)\overline{g(t-x)}e^{-2\pi ix\omega}dt$$

$V_g f$ lineer bağımlıdır, özelliklerinin çoğu (enerji korunumu, ters formülü) Fourier dönüşümüne benzer.

Sayısal amaçlar için, kısa zamanlı Fourier dönüşümü örneklenmiş ve sadece $V_g f(\alpha k, \beta n)$, $k, n \in \mathbb{Z}$ değerlerinin noktasal kümesi için bulunmuştur. Problem f in bu değerlerden Gabor çerçeve teorisine yeniden yapılandırılması ile ilgilidir. Bunların zengin matematik yapısı ve nümerik analizle, seçme teorisi, Fourier analizi ve operatör cebiri ile bağlantısı vardır.

Zaman-frekans analizinin anahtarı, $T_x f(t) = f(t-x)$ öteleme ve $M_\omega f(t) = e^{2\pi i \omega t} f(t)$ modülasyon işlemleridir. Kısa zamanlı Fourier dönüşümü integrallenebilme ve ayrışma durumlarına sahiptir. Bu da modülasyon uzaylarının tanımına yol açar. Fonksiyonların bu yeni sınıfı, dağılımların kısa bir zaman-frekans analizini kolaylaştırır ve zaman-frekans analizinin bir çok probleminde de doğal olarak görünür.

Fourier ilk olarak, matematiksel analize dikkat etmeksizin, bir fonksiyonun trigonometrik seri açısından açılımı ifade eden dikkat çekici bir fikir ortaya atmıştır. Fourier açılımının katsayıları için intergral formülleri daha önce Leonardo Euler ve diğerleri tarafından verilmişti. Aslında, Fourier bu yeni fikrini Fourier serisi açısından, Fourier eşitliğinin çözümünü bulmak için kullanmıştır. Böylece Fourier serisi, öngörülen sınır koşulları altında kısmi diferansiyel denklemlerin Fourier serisinin çözümünün belirlenmesi için araç olarak kullanılabildi. Böylece bir $f(x)$ fonksiyonunun $(-\ell, \ell)$ aralığındaki Fourier serisi

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{\dfrac{in\pi x}{\ell}}$$

şeklinde tanımlanır. Burada Fourier katsayıları

$$c_n = \frac{1}{2\ell} \int_{-\ell}^{\ell} f(t) e^{-\dfrac{in\pi t}{\ell}} dt$$

şeklindedir.

Periyodik olmayan, her $x \in \mathbb{R}$ için tanımlanmış bir fonksiyonun temsilini almak için limiti $\ell \to \infty$ şeklinde almamız gerekir. Fourier integral teoremine uygularsak,

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\ell}^{\ell} e^{i\omega x} d\omega \int_{-\ell}^{\ell} e^{-i\omega t} f(t) dt$$

elde edilir.

Matematiksel olarak, bu eşitlik Fourier serisinin tamlık özelliğinin sürekli versiyonudur. Fiziksel olarak, bu eşitlik sürekli değişen $\left(\frac{\omega}{2\pi}\right)$ frekanslı harmonik bileşenlerin sonsuz sayısını verir. Genlik ise

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\ell}^{\ell} e^{-i\omega t} f(t)dt$$

şeklinde tanımlanır. Sıradan Fourier serisi sonsuz ama harmonik bileşenlerin diskret kümesinde verilen fonksiyonların çözümünü temsil eder. Bu kısmi diferansiyel denklemlerin çözümü için en uygun çözüm P.S. Laplace tarafından verilmiştir. Bu çözüm Fourier integralidir. Bu fikir Fourier, A.L. Cauchy ve S.D. Poisson a aittir.

Fourier serisi, Fourier integrali ve uygulamaları Fourier'nin 1822 yılında yayınlanan ünlü tezi "Theore Analytique de la Chaleur (The Analytical Theory of Heat)"in ana konusudur. Fourier serisinin kısmi diferansiyel denklemlerin çözümündeki etkisinin ve başarısının yanında, matematiksel anlamda en önemli noktalardan biri de Fourier serisinin yakınsaklığıdır.

Fourier dönüşümü, Fourier'nin "La Th$\acute{e}$orie Analytique de la Chaleur" tezinde yer alan Fourier integral teoreminden elde edilir. Hem Fourier serisi hem de Fourier dönüşümü bir çok yönden ilişkilidir. Sabit sinyallerin ve gerçek zaman sinyallerinin analizini içeren, zaman ve frekans düzlemindeki Fourier dönüşümünün etkili kullanımlarının yer aldığı pek çok uygulamaları vardır. Bir $f(t)$ fonksiyonu ya da sinyalinin Fourier dönüşümü

$$\mathfrak{F}f(t) = \hat{f}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega t} f(t)dt = \langle f, e^{i\omega t}\rangle$$

şeklinde tanımlanır. Burada $\hat{f}(\omega)$, ω frekansının fonksiyonu ve $\langle f, e^{i\omega t}\rangle$ ise bir Hilbert uzayındaki iç çarpımdır.

Yukarıda belirttiğimiz gibi bazı önemli başarılarına rağmen, Fourier dönüşümünün analizi en az iki nedenden dolayı bazı fiziksel problemler üzerinde çalışmada yetersiz kalmaktadır. Öncelikle, bir sinyalin Fourier dönüşümü herhangi bir lokal bilgi vermemektedir. Zamanla frekansın ya da uzayla dalgalanmanın değişimini yansıtmamaktadır. İkinci olarak da, Fourier dönüşüm yöntemleri hem zaman düzlemi hem de frekans düzlemindeki problemleri araştırmayı sağlar fakat her iki düzlemde aynı anda oluşan değişimleri incelemekte yetersiz kalır. Hem zaman hem de frekans düzlemindeki sinyalin enerji yoğunluğunu tanımlayabilmek için, zaman ve frekansın tek bir dönüşüme ihtiyacı vardır.

Gabor hem zaman hem de frekans lokalizasyon özelliklerini tek dönüşüm fonksiyonunda bir araya getirmek için, Gabor dağılım fonksiyonunu pencere fonksiyonu olarak kullanarak *pencereli Fourier dönüşümünü (Gabor Dönüşümü)* tanıtmıştır. En büyük iddiası bir $g_a(t-b)$ zaman lokalizasyonu pencere fonksiyonunu sinyalin Fourier dönüşümü hakkında lokal bilgileri edinmek için kullanmaktır. Burada pencerenin genişliği olan a parametresi ve b parametresi tüm zaman düzlemini örtmek amacıyla pencereyi ötelemek için kullanılmaktadır. Buradaki amaç Fourier dönüşümünü lokalize etmek için pencere fonksiyonunu kullanmak ve pencereyi farklı pozisyonlara kaydırmaktır. Gabor dönüşümünün bu önemli özelliği, pencere boyutuna eşit zaman çözünürlüğüyle Fourier dönüşümünün lokal yönünü sağlar. Gabor

$$g_{t,\omega}(\tau) = \overline{g}(\tau - t)e^{i\omega\tau}$$

fonksiyonunu, g fonksiyona öteleme ve modülasyonunu uygulayarak kullanmıştır. Burada $g(\tau) = \pi^{-\frac{1}{4}} e^{-\frac{1}{2}\tau^2}$ "kuantum fiziğinde kanonik tutarlı durum" olarak adlandırılır. f fonksiyonunun g'ye göre Gabor dönüşümü (pencereli Fourier dönüşümü) $\tilde{f}_g(t,\omega)$

$$\mathscr{G}f(t,\omega) = \tilde{f}_g(t,\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau)g(\tau - t)e^{-i\omega\tau}d\tau = \langle f, \overline{g}_{t,\omega}\rangle$$

şeklinde tanımlanır. Burada $f,g \in L^2(\mathbb{R}^d)$ fonksiyonlarının iç çarpımı $\langle f,g\rangle$ olarak verilmiştir. Pratik uygulamalarda, f ve g fonksiyonları sonlu enerjili sinyalleri temsil eder.
Bu tez çalışmasında klasik Fourier analizi dışında zaman-frekans analizi ve özellikleri tanıtılmıştır.

1.1. TEMEL FOURİER ANALİZİ

Bu bölümde Fourier analizinin temellerine ilişkin bazı kavram ve teroremler verilecektir. Bu kavramlar zaman-frekans analizinin çok yönlü araçlarıdır. Fourier analizinin temelleri Fourier serileri ve Fourier dönüşümünün sonuçlarını içermektedir. Fourier Analizi, kabaca fonksiyonları Fourier dönüşümleri aracılığıyla inceler.
Teorik olarak bir $\mathbb{R}^d$ Öklid uzayı üzerinde tanımlanan bir f fonksiyonu $x \in \mathbb{R}^d$ elemanını bir $f(x)$ kompleks sayısına götüren bir kuraldır. Oysa uygulamalarda aynı soyut kavram için farklı dilleri kullanırlar. Örneğin $d = 1$ boyutunda, sıklıkla $x \in \mathbb{R}$ "zaman" ve $f(x)$ de bir "elektrik alan" veya "voltajın genliği" anlamına gelir ve bir sinyalden bahsedilir. Örneğin,

$d = 2$ için, $f(x_1,x_2)$, $(x_1,x_2) \in \mathbb{R}^2$ piksel konumundaki gri seviyesini veya renk seviyesini gösterebilir ve bir görüntüden bahsedilebilir.
Bu tez boyunca fonksiyonları, daha genel olarak $\mathbb{R}^d$ üzerinde çalışacağız. Böylece $x = (x_1,...,x_d) \in \mathbb{R}^d$ olmak üzere,

$$\int_{\mathbb{R}^d} f(x)dx = \int_{-\infty}^{\infty} ... \int_{-\infty}^{\infty} f(x_1,...x_d)dx_1...dx_d$$

$\mathbb{R}^d$ üzerinde alışılmış Lebesgue integralidir. Yine, $E \subseteq \mathbb{R}^d$ ölçülebilir bir küme olmak üzere $|E| = \int_{\mathbb{R}^d} \chi_E(x)dx$, E kümesinin ölçüsüdür. $L^p(1 \le p \le \infty)$ Lebesgue uzayları analizde temel rol oynar. Özellikle $p = 2$, L^2 uzayları bu tez konusunda oldukça önemli olacaktır. Bu nedenle L^p uzaylarına ilişkin bazı tanım ve özellikleri vereceğiz. Fonksiyonları $\mathbb{R}^d$ üzerinde çalışacağımız için Lebesgue ölçü uzayına göre özel olarak tanımları ifade edeceğiz.

Tanım 1.1.1 *$f : \mathbb{R}^d \to \mathbb{C}$ Lebesgue ölçülebilir bir fonksiyon olsun. $L^p(\mathbb{R}^d)$ uzayı,*

$$\int_{\mathbb{R}^d} |f(x)|^p dx < \infty \tag{1.1}$$

koşulunu sağlayan f fonksiyonlarından oluşan bir uzaydır. Böylece $f \in L^p(\mathbb{R}^d)$ için

$$||f|| = \left(\int_{\mathbb{R}^d} |f(x)|^p dx\right)^{1/p}$$

şeklinde L^p-normu tanımlanır. $||f||_p$ veya $||f||_{L^p}$ ile gösterilir. $L^p(\mathbb{R}^d)$ uzayı $||\cdot||_p$ normuna göre bir Banach uzayıdır.
Eğer $p = 1$ ise $L^1(\mathbb{R}^d)$, $\mathbb{R}^d$ üzerinde integrallenen fonksiyonların Banach uzayıdır. Yine, $p = 2$ durumu özel bir öneme sahiptir. $L^2(\mathbb{R}^d)$ Hilbert uzaydır. $p = 2$ için iç çarpım

$$\langle f,g \rangle = \int_{\mathbb{R}^d} f(x)\overline{g(x)}dx$$

şeklinde tanımlanır. $L^2(\mathbb{R}^d)$ uzayı bu iç çarpımın oluşturduğu $||\cdot||_2$ normuna göre bir Hilbert uzayıdır. Problemleri Hilbert uzayında ele almak işimiz kolaylaştırır. Yine $\mathbb{R}^d$ üzerindeki iç çarpımı $x \cdot \omega = \sum_{i=1}^d x_i\omega_i$ ile verilir. Öklid normu ise $|x| = \sqrt{x \cdot x}$ olarak verilir.
Burada özlellikle teknik ayrıntıya dikkat etmek gerekir. Eğer $||f||_p = 0$ ise $f = 0$ olmayabilir. Bu nedenle hemen hemen $f = 0$ eşitliği kabul edilir. Yine, L^p uzayının tanımında denklik bağıntısından bahsetmek gerekir. f ve g fonkisyonlarının denk olması,

f ve g fonksiyonlarının hemen hemen eşit olmasıdır. $L^p(\mathbb{R}^d)$ uzayı (1.1) koşulunu sağlayan fonksiyonların denklik sınıflarında oluşur. Bununla birlikte, kolaylıklı olması bakımından pratikte $L^p(\mathbb{R}^d)$'nin elemanları fonksiyonların denklik sınıfı yerine fonksiyon olarak düşünülür.

Son olarak, $p = \infty$ limit durumu için $L^\infty(\mathbb{R}^d)$ uzayı, $\mathbb{R}^d$ üzerinde tanımlı esas sınırlı fonksiyonların bir uzayıdır. Bir başka ifadeyle,

$$\exists\, M > 0 \text{ hemen her } x \text{ için } |f(x)| \leq M \tag{1.2}$$

koşulunu sağlayan ölçülebilir fonksiyonların (denklik sınıflarının) bir uzayıdır. $||f||_{L^\infty}$ ya da $||f||_\infty$ normu (1.2) koşulunu sağlayan mümkün olan tüm M değerlerinin infimumu olarak tanımlanır. $||f||_{L^\infty}$ bazen f'nin esas supremumu olarak da adlandırılır ve

$$||f||_\infty = ess \sup_{x\in\mathbb{R}^d} |f(x)|$$

şeklinde de verilir.

Eğer f sürekli ise $||f||_\infty = \sup_{x\in\mathbb{R}^d} |f(x)|$ olur. Yine $||\cdot||_\infty$ normuna göre $L^\infty(\mathbb{R}^d)$ uzayı bir Banach uzayıdır.

$1 \leq p, q \leq \infty$ reel sayıları $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} = 1$ koşulunu sağlarsa p ve q, **birbirlerinin eşlenikleri** ya da **dualleri** olarak adlandırılır. Uygunluk olması bakımında $\dfrac{1}{\infty} = 0$ kabul edilir. Yine, p'nin eşleniği p' ile de gösterilir. $p = 2$ ise eşleniği $q = 2$ dir. $p = 0$ ise eşleniği $q = \infty$ olur.

Tanım 1.1.2 *$f : \mathbb{R}^d \to \mathbb{C}$ olsun. Eğer*

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists K_\varepsilon \subseteq \mathbb{R}^d\ \ \forall x \notin K_\varepsilon\ \ |f(x)| < \varepsilon$$

*koşulu sağlanırsa f fonkisyonuna **sonsuzda sıfıra gider** denir.*

$C_0(\mathbb{R}^d)$ ile sürekli ve sonsuzda sıfır olan fonksiyonların uzayı gösterilir ve $||f||_\infty = \sup_{x\in\mathbb{R}^d} |f(x)|$ normuna göre bir Banach uzayıdır. Yine noktasal çarpıma göre $C_0(\mathbb{R}^d)$, $L^1(\mathbb{R}^d)$ uzayının yoğun bir alt cebiridir.

1.1.1. Fourier Dönüşümü ve Özellikleri

Tanım 1.1.1.1 *$f \in L^1(\mathbb{R}^d)$ olsun. Eğer her $x \in \mathbb{R}^d$ için*

$$\int_{\mathbb{R}^d} e^{-2\pi i x\omega} f(x)dx$$

integrali varsa bu integrale $f \in L^1(\mathbb{R}^d)$ fonksiyonunun Fourier dönüşümü denir ve $\hat{f}$ ile gösterilir. Böylece

$$\hat{f}(\omega) = \int_{\mathbb{R}^d} f(x)e^{-2\pi i x\omega}dx$$

şeklinde tanımlanır.

Ayrıca

$$|\hat{f}(x)| \leq \int_{\mathbb{R}^d} |e^{2\pi i x t} f(t)|dt = \int_{\mathbb{R}^d} |f(t)|dt = ||f||_1$$

olduğundan $\hat{f}$ sınırlıdır ve

$$\sup_{x\in\mathbb{R}^d} |\hat{f}(x)| \leq ||f||_1$$

eşitsizliği sağlanır. Böylece

$$||\hat{f}||_\infty \leq ||f||_1$$

elde edilir.

Teorem 1.1.1.2 *Her $n \in \mathbb{N}$ için $f_n \in L^1(\mathbb{R}^d)$ olsun.*

$$\lim_{n\to\infty} ||f_n - f|| = 0$$

ise $x \in \mathbb{R}^d$ olmak üzere

$$\lim_{n\to\infty} \hat{f}_n(x) = \hat{f}(x)$$

düzgün yakınsaklığı geçerlidir.

İspat.

$$\sup_{x\in\mathbb{R}^d} |\hat{f}_n(x) - \hat{f}(x)| \leq ||f_n - f||_1$$

eşitsizliğinden elde edilir.

Lemma 1.1.1.3 (Riemann-Lebesgue) *$f \in L^1(\mathbb{R}^d)$, ise $\hat{f}$ düzgün süreklidir ve $\lim\limits_{|\omega|\to\to\infty} |\hat{f}(\omega)| = 0$ limiti sağlanır.*

Önerme 1.1.1.4 *$f \in L^1(\mathbb{R}^d)$ ve $x \in \mathbb{R}^d$ için $\hat{f}(x) = 0$ ise $t \in \mathbb{R}^d$ için $f(t) = 0$ sağlanır.*

Önerme 1.1.1.5 (Fourier Dönüşümünün Tekliği) *$f,g \in L^1(\mathbb{R}^d)$ ve $x \in \mathbb{R}^d$,$t \in \mathbb{R}^d$ için*

$$\hat{f}(x) = \hat{g}(x) \text{ ise } f(t) = g(t)$$

gerçeklenir.

Teorem 1.1.1.6 (Plancherel Eşitliği) *$f \in L^1 \cap L^2(\mathbb{R}^d)$ olsun.*

$$||f||_2 = ||\hat{f}||_2$$

eşitliği geçerlidir.
Bundan başka, her $f,g \in L^2(\mathbb{R}^d)$ için $\langle f,g\rangle = \langle \hat{f},\hat{g}\rangle$ Parseval formülü geçerlidir [8], [9].
Hatırlatma: Fourier dönüşümü

$$\begin{aligned} \mathscr{F} :& L^1(\mathbb{R}^d) \to C_0(\mathbb{R}^d) \\ & f \mapsto \mathfrak{F}(f) = \hat{f} \end{aligned}$$

şeklinde tanımlı lineer ve sınırlı bir operatör olarak düşünülebilir.
Riesz-Thorin Ara Değer Teoreminden, Fourier dönüşümü, bazı L^p-uzaylarına genişletilebilir.
Aşağıdaki eşitsizlikler oldukça kullanışlıdır.

Teorem 1.1.1.7 (Hausdorff-Young Eşitsizliği) *$1 \le p \le 2$ ve $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$ olacak şekilde bir p' olsun. Bu durumda $\mathfrak{F} : L^p(\mathbb{R}^d) \to L^{p'}(\mathbb{R}^d)$ ve $||\hat{f}||_{p'} \le ||f||_p$. eşitliği sağlanır.*

Fourier dönüşümünün tanımından $\hat{f}$, sadece $f \in L^1 \cap L^p$ için tanımlıdır.

Teorem 1.1.1.8 (Babenko Eşitsizliği) *$\mathfrak{F} : L^p(\mathbb{R}^d) \to L^{p'}(\mathbb{R}^d)$ ve $1 \le p \le 2$ olsun.*

$$||\hat{f}||_{p'} \leq A_p^d ||f||$$

eşitsizliği geçerlidir.

$$A_p = \left(\frac{p^{1/p}}{p'^{1/p'}} \right)^{1/2} \tag{1.3}$$

Babenko-Beckner sabiti olarak tanımlanır [6].

1.2. TEMEL İŞLEMLER

1.2.1. Öteleme ve Modülasyon

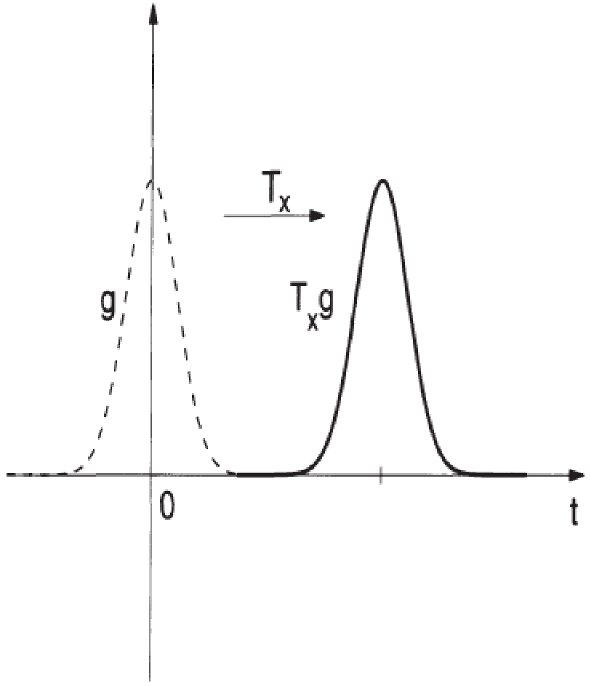
Tanım 1.2.1.1 *f iyi tanımlı bir fonksiyon ve $x, \omega \in \mathbb{R}^d$ olsun. Öteleme ve modülasyon işlemleri sırasıyla aşağıdaki gibi tanımlanır.*

$$T_x f(t) = f(t - x) \tag{1.4}$$

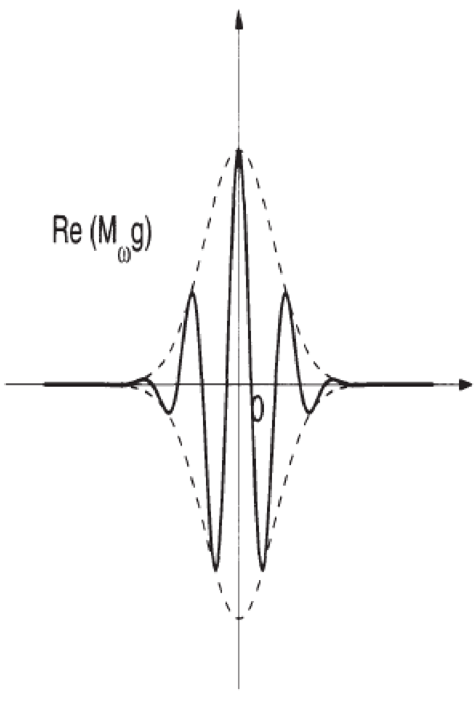
ve

$$M_\omega f(t) = e^{2\pi i \omega t} f(t) \tag{1.5}$$

Burada T_x (Şekil 1.1) bir x ile öteleme ya da zaman ötelemesidir. M_ω (Şekil 1.2) ise ω ile modülasyondur.



Şekil 1.1: T_x : Öteleme Fonksiyonu



Şekil 1.2: M_ω : Modülasyon Fonksiyonu

Önerme 1.2.1.2 *$f \in L^1(\mathbb{R}^d)$ ve $x, \omega \in \mathbb{R}^d$ olsun.*

$$\widehat{(T_x f)} = M_{-x}\hat{f} \text{ ve } \widehat{(M_\omega f)} = T_x\hat{f} \tag{1.6}$$

eşitlikleri geçerlidir.

İspat.

$$\begin{aligned}
\widehat{(T_x f)}(\xi) &= \int_{\mathbb{R}^d} (T_x f)(t) e^{-2\pi i t\xi} dt \\
&= \int_{\mathbb{R}^d} f(t-x) e^{-2\pi i t\xi} dt \\
&= \int f(t) e^{-2\pi i (t+x)\xi} dt \\
&== e^{-2\pi i x\xi} \hat{f}(\xi) \\
&= \widehat{(M_{-x}\hat{f})}(\xi)
\end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned}
\widehat{(M_\omega f)}(\xi) &= \int_{\mathbb{R}^d} (M_\omega f)(t) e^{-2\pi i t\xi} dt \\
&= \int_{\mathbb{R}^d} f(t) e^{-2\pi i t(\xi-\omega)} dt \\
&= T_\omega \hat{f}(\xi)
\end{aligned}$$

elde edilir.

Son eşitlik modülasyonun neden **frekans ötelemesi** olarak adlandırıldığını açıklamaktadır.

1.2.2. Konvolüsyon İşlemi ve Özellikleri

Tanım 1.2.2.1 (Konvolüsyon) *$f, g \in L^1(\mathbb{R}^d)$ iki fonksiyonun konvolüsyonu $f * g$ aşağıdaki şekilde tanımlanır.*

$$(f * g)(x) = \int_{\mathbb{R}^d} f(y) g(x-y) dy \tag{1.7}$$

$$||f * g||_1 \le ||f||_1 ||g||_1 \tag{1.8}$$

norm eşitliği geçerlidir [8].

Konvolüsyon tanımı ve Fubini teoremi kullanılırsa (1.8) deki eşitsizlik elde edilir. Bu eşitsizlik $L^1(\mathbb{R}^d)$ Banach uzayının konvolüsyona göre bir Banach Cebiri olduğunu gösterir.

Önerme 1.2.2.2 *$f,g \in L^1(\mathbb{R}^d)$ olsun.*

$$\widehat{(f*g)} = \hat{f}\cdot\hat{g} \tag{1.9}$$

eşitliği geçerlidir.

İspat.

$$\begin{aligned}\widehat{(f*g)}(\omega) &= \int_{\mathbb{R}^d}\left(\int_{\mathbb{R}^d} f(y)g(x-y)dy\right)e^{-2\pi iy\omega}e^{-2\pi i(x-y)\omega}dx\\ &\overset{\text{Fubini}}{=} \int_{\mathbb{R}^d} f(y)e^{-2\pi iy\omega}\left(\int_{\mathbb{R}^d} g(x-y)e^{-2\pi i(x-y)\omega}dx\right)dy\\ &= \hat{f}(\omega)\hat{g}(\omega).\end{aligned}$$

elde edilir.

Teorem 1.2.2.3 (Young Eşitsizliği) *$f \in L^p(\mathbb{R}^d)$ ve $g \in L^q(\mathbb{R}^d)$ olsun. $\dfrac{1}{p}+\dfrac{1}{q} = 1+\dfrac{1}{r}$ olmak üzere $f*g \in L^r(\mathbb{R}^d)$ olur ve*

$$||f*g||_r \le (A_pA_qA_{r'})||f||_p||g||_q$$

eşitsizliği sağlanır. Burada A_p (1.3) de verilen sabittir.

1.2.3. Involüsyon ve Yansıma

Tanım 1.2.3.1 *İnvolüsyon "∗" ile gösterilir ve*

$$f^*(x) = \overline{f(-x)} \tag{1.10}$$

şeklinde tanımlanır. Yansıma operatörü I ise

$$If(x) = f(-x). \tag{1.11}$$

şeklinde tanımlanır. Buradan

$$\widehat{f^*} = \overline{\hat{f}} \;\; ve \;\; \widehat{If} = I\hat{f}. \tag{1.12}$$

eşitlikleri elde edilir. Konvolüsyon işlemi, öteleme ve involüsyonun iç çarpımı şeklinde yazılabilir.

$$(f * g)(x) = \langle f, T_x g^* \rangle \tag{1.13}$$

$$\begin{aligned}
\langle f, T_x g^* \rangle &= \int_{\mathbb{R}^d} f(y)\overline{T_x g^*(y)}dy \\
&= \int_{\mathbb{R}^d} f(y) g^*(y-x)dy \\
&= \int_{\mathbb{R}^d} f(y)\overline{g(y-x)}dy \\
&= (f * g)(x)
\end{aligned}$$

şeklinde elde edilir.

Her iki taraf iyi tanımlı ise bu eşitlik geçerlidir.

Teorem 1.2.3.2 (Fourier Dönüşümünün Ters Formülü) *$f \in L^1(\mathbb{R}^d)$ ve $\hat{f} \in L^1(\mathbb{R}^d)$ olsun. Bu durumda her $x \in \mathbb{R}^d$ için,*

$$f(x) = \int_{\mathbb{R}^d} \hat{f}(\omega) e^{2\pi i x \omega} d\omega \tag{1.14}$$

olur. Diğer bir deyişle

$$\mathfrak{F}^{-1} = I\mathfrak{F}$$

geçerlidir. Burada I, $If(x) = f(-x)$ yansıma operatörüdür. Ters formulü diğer fonksiyon uzaylarına taşınabilir.

1.2.4. Fourier Serisi

Periyodik fonksiyonlar, Fourier serisi ile kolayca analiz edilir. f fonksiyonu $\mathbb{R}^d$ üzerinde $\mathbb{Z}^d$-periyotlu olsun. Yani her $k \in \mathbb{Z}^d$ için $f(x) = f(x+k)$ olsun. Bu koşulu sağlayan bir fonksiyon $[0,1)^d$ kübüne kısıtlayarak tek türlü belirlenir ve $[0,1]^d$ üzerinde bir fonksiyon ile aynılaşır. Ayrıca d-boyutlu torus $\mathbb{T}^d := \mathbb{R}^d/\mathbb{Z}^d$ şeklinde tanımlanır.

Teorem 1.2.4.1 (Plancherel) *$f \in L^2(\mathbb{T}^d)$ olmak üzere*

$$\hat{f}(n) = \int_{[0,1]^d} f(x)e^{-2\pi inx}dx \tag{1.15}$$

n.Fourier katsayısı olsun. Bu durumda yakınsak bir f yakınsak bir Fourier serisine genişletilebilir.

$$f = \sum_{n\in\mathbb{Z}^d} \hat{f}(n)e^{2\pi inx} \tag{1.16}$$

şeklinde yazılır. Böylece

$$\int_{[0,1]^d} |f(x)|^2 = ||f||^2_{L^2(\mathbb{T}^d)} = \sum_{n\in\mathbb{Z}^d} |\hat{f}(n)|^2 \tag{1.17}$$

eşitliği geçerlidir.

Uyarı:

1. Fourier katsayıları $\mathbb{T}^d$ kompakt gurubunda Fourier dönüşümüdür.
2. Eğer $\sum_{n\in\mathbb{Z}^d} |\hat{f}(n)| < \infty$ ise, (1.16) daki Fourier serisi, her $x \in \mathbb{R}^d$ için $f(x)$'e mutlak yakınsaktır ve f düzgün sürekli bir fonksiyondur.

1.2.5. Poisson Toplam Formulü

Bu çalışma için oldukça önemli olan Poisson toplam formulü $\mathbb{R}^d$ üzerindeki Fourier dönüşümü ile Fourier serisini ilişkilendirir.

Lemma 1.2.5.1 *$f \in L^1(\mathbb{R}^d)$ ise, her $\alpha > 0$ için*

$$\int_{\mathbb{R}^d} f(x)dx = \int_{[0,\alpha]^d} \left(\sum_{k\in\mathbb{Z}^d} f(x+\alpha k) \right) dx. \tag{1.18}$$

eşitliği sağlanır.

İspat. $[0,\alpha]^d$ küplerinin ötelemeleri $\alpha k + [0,\alpha]^d$ ayrık olduğundan ve $f \in L^1(\mathbb{R}^d)$ olduğundan Fubini teroremi gereği toplamla integral yer değiştirebilir. Böylece

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^d} f(x)dx &= \sum_{k\in\mathbb{Z}^d} \int_{\alpha k+[0,\alpha]^d} f(x)dx \\ &= \int_{[0,\alpha]^d} \left(\sum_{k\in\mathbb{Z}^d} f(x+\alpha k)\right) dx\end{aligned}$$

elde edilir.

1.2.6. Fourier Dönüşümü ve Belirsizlik İlkeleri

Bu bölümde belirsizlik ilkelerinin pek çok versiyonlarını tartışacağız. Fourier ve zaman-frekans analizi için belirsizlik ilkeleri kaçınılmazdır. Çünkü belirsizlik ilkeleri hem f hem de $\hat{f}$ Fourier dönüşümünü içeren eşitsizliklerdir.

Teorem 1.2.6.1 (Heisenberg-Weyl-Pauli Belirsizlik İlkesi) *$f \in L^2(\mathbb{R}^d)$ ve keyfi $a,b \in \mathbb{R}$ sayıları için*

$$\left(\int_{\mathbb{R}} (x-a)^2 |f(x)|^2 dx\right)^{1/2} \left(\int_{\mathbb{R}} (\omega-b)^2 |\hat{f}(\omega)|^2 d\omega\right)^{1/2} \geq \frac{1}{4\pi}||f||_2^2 \qquad (1.19)$$

eşitsizliği geçerlidir. Eşitlik ancak ve ancak bazı $a,b \in \mathbb{R}^d$ ve $c > 0$ için f fonksiyonunun $T_a M_b \varphi_c(x) = e^{2\pi i b(x-a)} e^{-\pi(x-a)^2/c}$ çarpanı olmasıdır.

Genel olarak $f \in L^2(\mathbb{R}^d)$ için (1.19) 'in sol tarafı sonlu olmayabilir, fakat eşitsizlik yine de sağlanır.

1.2.7. Donoho ve Stark'ın Belirsizlik İlkesi

Tanım 1.2.7.1 *$f \in L^2(\mathbb{R}^d)$ olsun. Eğer*

$$\left(\int_{T^c} |f(x)|^2 dx\right)^2 \leq \varepsilon.||f||_2$$

eşitsizliği sağlanıyorsa, f fonskiyonuna $T \subseteq \mathbb{R}^d$ ölçülebilir kümesi üzerinde ε-yoğunlaşmış fonksiyon denir. Eğer $0 \leq \varepsilon \leq 1/2$ ise T, f fonksiyonunun esas desteğidir. Eğer $\varepsilon = 0$ ise T, f fonksiyonunun tam desteğidir.

Teorem 1.2.7.2 *$f \in L^2(\mathbb{R}^d), f \neq 0$ fonksiyonu $T \subseteq \mathbb{R}^d$ kümesi üzerinde, $\hat{f}$ fonksiyonu ise $\Omega \subseteq \mathbb{R}^d$ kümesi üzerinde ε_Ω-yoğunlaşmış olsun. Bu durumda*

$$|T|.|\Omega| \geq (1-\varepsilon-\varepsilon_\Omega)^2$$

eşitsizliği sağlanır. Ayrıca $\varepsilon = \varepsilon_\Omega = 0$ ise $|T||\Omega| \geq 1$ sağlanır.

2. GENEL KISIMLAR

Bu bölümde zaman-frekans analizi ve özellikleri verilecektir. Zaman-frekans analizi zaman içerisinde değişen yani durağan olmayan frekans bileşenlerine sahip olan sinyallerin veya görüntülerin karakterizasyonu ve manipulasyonunu belirler. Örneğin, konuşma veya müzik parçasının ses kalınlığı veya inceliğini belirleyen frekanslar zamanla değişir.
Burada sinyalle $f \in \mathbb{R}^d \to \mathbb{C}$ fonksiyonu anlaşılacaktır. Böylece sinyallerin veya görüntülerin zaman-frekans analizi, sürekli veya noktasal verinin matematiksel dönüşümleriyle ilgilenir. Öyle ki dönüşümden sonra dönüşüm öncesinden daha fazla veriye ulaşılabilmesini amaçlar. Dönüşümün mümkün olan seçimi, sinyal veya görüntü kaynağınının matematiksel modeline kuvvetli olarak bağlıdır.

2.1. ZAMAN-FREKANS ANALİZİ

Pek çok uygulamada sinyaller, zamanla değişen bir süreci izlemek, düzenlemek veya kalitesini kontrol etmek amacıyla ölçülür. Ölçülen sinyaller, uygun ve hızlı değerlendirme yapabilecek şekile getirilmelidir. Bunun için bir f sinyali, bir dönüşüm altında daha kolay incelenebilen ve yorumlanabilen $\tilde{f}$ görüntüsüne dönüştürülür. Özel olarak, $\tilde{f}$ görüntüsü istenmeyen gürültüden arındırılmış olmalıdır ve yine f sinyalini karakterize eden parametreler $\tilde{f}$ dan kolaylıkla elde edilebilir olmalıdır. Buna ek olarak, $\tilde{f}$ dönüşümünden, f sinyalinin kendisinden elde edilebildiğinden daha fazla bilgi bulunmalıdır.
Bir sinyali dönüştürmek için pek çok yöntem vardır. Hangi yöntemin kullanılacağı, sinyali meydana getiren sistemin özelliklerine bağlıdır. İlk bilinen ve klasik yöntem Fourier tarafından geliştirilmiştir ve Fourier serileri olarak bilinir. Bu kısım önceki bölümde verilmiştir. f ve $\hat{f}$ Fourier dönüşümünü aynı f sinyalinin iki farklı ve eşdeğer temsili olarak da düşünebiliriz. Bu temsillerde her biri aynı bilgiyi içerir fakat her biri f'in farklı yerlerini görünür kılar.
Daha önce Fourier dönüşümünün durağan olmayan sinyaller için elverişli olmadığı ifade edilmişti. Gabor (1946), pencereleme yöntemini kullanarak, işaretin küçük bir parçasını zaman tanım aralığında ele almış, işareti zaman ve frekansın fonksiyonu olarak iki boyutta ifade etmiştir. Bu dönüşüm yönteminde işaretin belirli bir kesiminin durağan olduğu

kabul edilebilecek bir pencereden geçirilir ve yerel bir frekans parametresiyle FD işlemi gerçekleştirilir. KZFD' de sinyal küçük çerçevelere bölünür ve bu çerçeve anlarında sinyalin durağan olduğu kabul edilir. Durağanlığın geçerli olduğu bu çerçeveler sinyalin bir pencere fonksiyonu ile çarpılmasıyla elde edilir. FD'nün yerelleştirilmesi fikrine dayanan bu teknik ilgilenilen yerde uygun bir pencere seçilerek dönüşüm işlemi gerçekleşmesidir. Zaman-frekans analizi ise, f ve $\hat{f}$ Fourier dönüşümünün özelliklerini aynı fonksiyon altında birleştiren temsilleri bulmaya çalışır. Buna **zaman-frekans temsili** denir. Bununla birlikte bir fonksiyonu zaman-frekans içeriğinde temsil için farklı yöntemler de (yaklaşımlar da) vardır. Bunlardan en önemlisi sürekli Gabor dönüşümü ya da kısa-zamanlı Fourier dönüşümüdür.

2.2. ZAMAN-FREKANS ANALİZİNİN TEMEL İŞLEMLERİ

Tanım 1.2.1.1'deki Öteleme ve Modülasyon operatörleri zaman-frekans analizinde önemli rol oynar. T_xM_ω ya da $M_\omega T_x$ operatörleri **Zaman-Frekans Ötelemesi** olarak adlandırılır. Bu iki operatör arasındaki ilişki ise aşağıdaki önerme ile verilir.

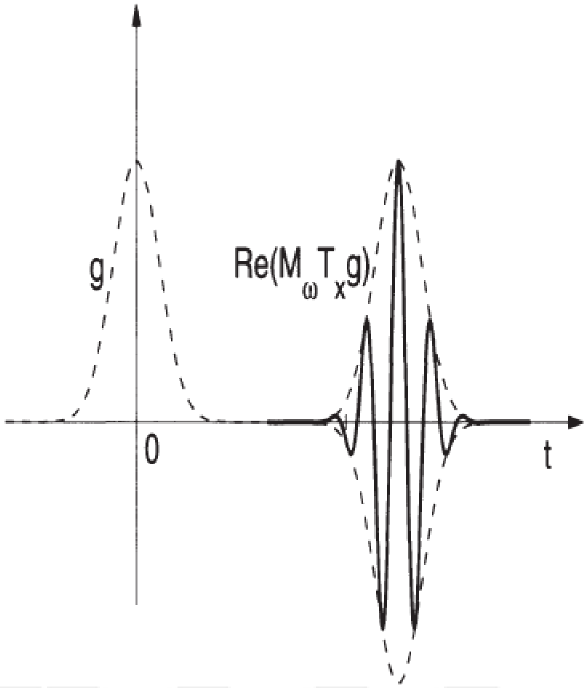
Önerme 2.2.1 *$x, \omega \in \mathbb{R}^d$ olsun. Bu durumda*

$$T_xM_\omega = e^{-2\pi i x\omega} M_\omega T_x \tag{2.1}$$

eşitliği geçerlidir.

İspat. f iyi tanımlı bir fonksiyon olmak üzere

$$\begin{aligned} T_xM_\omega f(t) &= (M_\omega f)(t-x) \\ &= e^{2\pi i\omega(t-x)} f(t-x) \\ &= e^{-2\pi i x\cdot\omega} e^{2\pi i\omega\cdot t} f(t-x) \\ &= e^{-2\pi i x\cdot\omega} M_\omega T_x f(t). \end{aligned}$$



Şekil 2.1: $M_\omega T_x$ Zaman-Frekans Ötelemesi

Sonuç 2.2.2 *T_x ve M_ω operatörlerinin değişmeli olması için gerek ve yeter koşul $x, \omega \in \mathbb{Z}^d$ olmasıdır.*

Zaman-frekans analizi için bu operatörlerin değişmeli olması önemlidir. Zaman-frekans ötelemelerinin basit özelliklerini aşağıdaki önerme ile verelim.

Önerme 2.2.3 *$f \in L^p(\mathbb{R}^d)$, $1 \leq p \leq \infty$ olsun.*

1.

$$||T_x M_\omega f||_p = ||f||_p$$

elde edilir. Zaman-frekans öteleme operatörü izometridir.

2. *$f \in L^1(\mathbb{R}^d)$ olsun.*

$$(\widehat{T_x M_\omega f}) = M_{-x} T_\omega \hat{f} = e^{-2\pi i x \omega} T_\omega M_{-x} \hat{f} \tag{2.2}$$

eşitliği geçerlidir.

İspat.

1. Önerme 2.2.1 kullanılırsa,

$$\begin{aligned}||T_xM_\omega f||_p &= ||e^{-2\pi ix\omega}M_\omega T_x f||_p \\ &= ||M_\omega T_x f||_p \\ &= ||e^{2\pi i\omega x}T_x f||_p \\ &= ||T_x f||_p \\ &= ||f||_p\end{aligned}$$

   elde edilir.

2.
$$(\widehat{T_xM_\omega f}) = (\widehat{T_x(M_\omega f)}) = M_{-x}T_\omega\hat{f} = e^{-2\pi ix\omega}T_\omega M_{-x}\hat{f}$$

   elde edilir.

(2.2) eşitliği zaman-frekans ötelemelerinin Fourier dönüşümü altındaki davranışını verir.

2.3. KISA-ZAMANLI FOURİER DÖNÜŞÜMÜ VE TEMEL ÖZELLİKLERİ

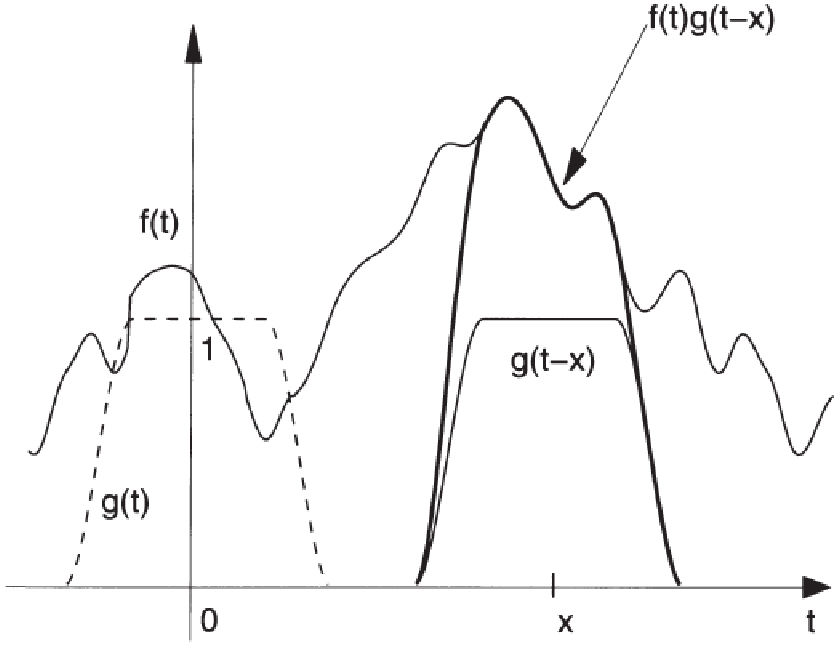
Bu bölümde zaman-frekans analizinin temel dönüşümü olan kısa-zamanlı Fourier dönüşümü **(KZFD)** ve özellikleri verilecektir. KZFD f fonksiyonunun lokal özellikleri hakkında bilgi edinme fikrine dayanır. Bunun için f fonksiyonu bir aralığa kısıtlanır ve bu aralıkta Fourier dönüşümü alınır. İstenmeyen problemlerle ya da süreksizlikle karşılaşmamak için pencere olarak adlandırılan, istenen özelliklere sahip, fonksiyon alınır.

Tanım 2.3.1 *Pencere fonksiyonu olarak adlandırılan sabit bir $g \neq 0$ fonksiyonu olsun. f'nin g ye göre kısa-zamanlı Fourier dönüşümü, $x, \omega \in \mathbb{R}^d$ için*

$$V_g f(x,\omega) = \int_{\mathbb{R}^d} f(t)\overline{g(t-x)}e^{-2\pi it\omega}dt \tag{2.3}$$

şeklinde tanımlanır.

Açıklama:



Şekil 2.2: Kısa-Zamanlı Fourier Dönüşümü

1. Eğer g fonksiyonu, merkezi orijinde olan kompakt destekli bir fonksiyon ise $V_g f(x,\cdot)$ merkezi x'in bir komşuluğunda olan f fonksiyonunun bir parçasının Fourier dönüşümüdür. x değerleri değiştikçe pencere fonksiyonu x-ekseninde farklı pozisyonlara kayar. Böylece her x için f fonksiyonunun farklı bir parçasının Fourier dönüşümü bulunur. Bu nedenle kısa-zamanlı Fourier dönüşümü, bazen "Sürgülü Pencere Fourier Dönüşümü" olarak da adlandırılır. Burada $V_g f(x,\omega)$, x anındaki ω etrafındaki frekans bandının genliği için ölçü olarak düşünülebilir. $V_g f(x,\cdot)$, x noktasındaki anlık frekans spektrumunun yerine geçer.

2. Sinyal analizinde, en az $d=1$ boyutunda ise, $\mathbb{R}^{2d}$ **zaman-frekans düzlemi**, fizikte ise $\mathbb{R}^{2d}$ **faz uzayı** olarak adlandırılır.

3. Kısa-zamanlı Fourier dönüşümü f fonksiyonunda lineer ve g fonksiyonunda eşlenik lineerdir. Genellikle g pencere fonksiyonu sabittir, $V_g f$, $\mathbb{R}^d$ üzerindeki fonksiyonlardan R^{2d} üzerindeki fonksiyonlara giden lineer bir dönüşümdür. Dolayısıyla $V_g f$ ve $f \to V_g f$ dönüşümünün özellikleri g pencere fonksiyonunun seçimine bağlıdır.

Şimdi kısa-zamanlı Fourier dönüşümünün temel özelliklerini inceleyelim.

Lemma 2.3.2 *$f,g \in L^2(\mathbb{R}^d)$ ise $V_g f$, $\mathbb{R}^{2d}$ üzerinde düzgün süreklidir ve*

$$
\begin{aligned}
V_g f(x,\omega) &= (\widehat{f \cdot T_x\overline{g}})(\omega) && (2.4)\\
&= \langle f, M_\omega T_x g\rangle && (2.5)\\
&= \langle \hat{f}, T_\omega M_{-x}\hat{g}\rangle && (2.6)\\
&= e^{-2\pi i x\omega}(\widehat{\hat{f} \cdot T_\omega\overline{\hat{g}}})(-x) && (2.7)\\
&= e^{-2\pi i x\omega} V_{\hat{g}}\hat{f}(\omega,-x) && (2.8)\\
&= e^{-2\pi i x\omega}(f * M_\omega g^*)(x) && (2.9)\\
&= (\hat{f} * M_{-x}\hat{g}^*)(\omega) && (2.10)\\
&= e^{-\pi i x\cdot\omega}\int_{\mathbb{R}^d} f(t+\frac{\pi}{2})\overline{g}(t-\frac{\pi}{2})e^{-2\pi i t\omega}dt. && (2.11)
\end{aligned}
$$

eşitlikleri sağlanır.

İspat. $\overline{T_x g(t)} = T_x\overline{g(t)}$ eşitliği kullanılırsa,

$$
\begin{aligned}
V_g f(x,\omega) &= \int_{\mathbb{R}^d} f(t)\underbrace{\overline{g(t-x)}}_{=T_x\overline{g}(t)}e^{-2\pi i t\omega}dt\\
&= \int_{\mathbb{R}^d} f(t)T_x\overline{g}(t)e^{-2\pi i t\omega}dt\\
&= \int_{\mathbb{R}^d} (f \cdot T_x\overline{g})(t)e^{-2\pi i t\omega}dt\\
&= (\widehat{f \cdot T_x\overline{g}})(\omega) && (2.4)
\end{aligned}
$$

elde edilir.

$$
\begin{aligned}
V_g f(x,\omega) &= \int_{\mathbb{R}^d} f(t)\overline{g(t-x)}e^{-2\pi i t\omega}dt\\
&= \int_{\mathbb{R}^d} f(t)\overline{g(t-x)e^{2\pi i t\omega}}dt\\
&= \int_{\mathbb{R}^d} f(t)\overline{T_x g(t)e^{2\pi i t\omega}}dt\\
&= \int_{\mathbb{R}^d} f(t)\overline{M_\omega T_x g(t)}dt\\
&= \langle f, M_\omega T_x g\rangle && (2.5)
\end{aligned}
$$

elde edilir.

$$\begin{aligned}
\langle f, M_\omega T_x g\rangle &= \langle \hat{f}, \widehat{M_\omega T_x g}\rangle \\
&= \langle \hat{f}, (\widehat{e^{2\pi i x\omega} T_x M_\omega g})\rangle \\
&= e^{-2\pi i x\omega}\langle \hat{f}, e^{-2\pi i x\omega} T_\omega M_{-x}\hat{g}\rangle \\
&= e^{-2\pi i x\omega} e^{-2\pi i x\omega}\langle \hat{f}, T_\omega M_{-x}\hat{g}\rangle \\
&= \langle \hat{f}, T_\omega M_{-x}\hat{g}\rangle \qquad (2.6)
\end{aligned}$$

elde edilir.

$$\begin{aligned}
V_g f(x,\omega) &= \int_{\mathbb{R}^d} \hat{f}(t)\overline{T_\omega M_{-x}\hat{g}(t)}dt \\
&= \int_{\mathbb{R}^d} \hat{f}(t)\overline{e^{2\pi i x\omega} M_{-x} T_\omega \hat{g}(t)}dt \\
&= \int_{\mathbb{R}^d} \hat{f}(t) e^{-2\pi i x\omega}\overline{e^{-2\pi i x t} T_\omega \hat{g}(t)}dt \\
&= e^{-2\pi i x\omega}\int_{\mathbb{R}^d} \hat{f}(t) T_\omega \overline{\hat{g}}(t) e^{2\pi i x t} dt \\
&= e^{-2\pi i x\omega}\widehat{\hat{f} T_\omega \overline{\hat{g}}}(-x) \qquad (2.7)
\end{aligned}$$

elde edilir.

$$\begin{aligned}
V_g f(x,\omega) &= e^{-2\pi i x\omega}\int_{\mathbb{R}^d} \hat{f}(t)\overline{\hat{g}(t-\omega)} e^{-2\pi i(-x)t} dt \\
&= e^{-2\pi i x\omega} V_{\hat{g}}\hat{f}(\omega, -x) \qquad (2.8)
\end{aligned}$$

elde edilir.

$$
\begin{aligned}
V_g f(x,\omega) &= e^{-2\pi i x\omega} \int_{\mathbb{R}^d} \hat{f}(t)\overline{T_\omega \hat{g}(t) e^{-2\pi i x t}} dt \\
&= e^{-2\pi i x\omega} \int_{\mathbb{R}^d} \hat{f}(t)\overline{M_{-x} T_\omega \hat{g}(t)} dt \\
&= e^{-2\pi i x\omega} \int_{\mathbb{R}^d} \hat{f}(t)\overline{e^{-2\pi i x\omega} T_\omega M_{-x} \hat{g}(t)} dt \\
&= e^{-2\pi i x\omega} \int_{\mathbb{R}^d} \hat{f}(t)\overline{\widehat{T_x M_\omega g}} dt \\
&= e^{-2\pi i x\omega} \int_{\mathbb{R}^d} f(t)\overline{T_x M_\omega g(t)} dt \\
&= e^{-2\pi i x\omega} \int_{\mathbb{R}^d} f(t)\overline{M_\omega g(t-x)} dt \\
&= e^{-2\pi i x\omega} \int_{\mathbb{R}^d} f(t)\overline{M_\omega g(-(x-t))} dt \\
&= e^{-2\pi i x\omega} \int_{\mathbb{R}^d} f(t) M_\omega g^*(x-t) dt \\
&= e^{-2\pi i x\omega} (f * M_\omega g^*)(x) \qquad (2.9)
\end{aligned}
$$

elde edilir.

$$
\begin{aligned}
V_g f(x,\omega) &= e^{-2\pi i x\omega} \int_{\mathbb{R}^d} \hat{f}(t)\overline{\hat{g}(t-\omega)} e^{-2\pi i(-x)t} dt \\
&= e^{-2\pi i x\omega} \int_{\mathbb{R}^d} \hat{f}(t)\overline{\hat{g}(t-\omega)} e^{2\pi i x t} dt \\
&= \int_{\mathbb{R}^d} \hat{f}(t)\overline{\hat{g}(t-\omega)} e^{2\pi i (t-\omega)} dt \\
&= \int_{\mathbb{R}^d} \hat{f}(t)\overline{\hat{g}(t-\omega) e^{-2\pi i (t-\omega)}} dt \\
&= \int_{\mathbb{R}^d} \hat{f}(t)\overline{M_{-x} \hat{g}(-(\omega-t))} dt \\
&= \int_{\mathbb{R}^d} \hat{f}(t) M_{-x} \hat{g^*}(\omega-t) dt \\
&= (\hat{f} * \widehat{M_{-x} g^*})(\omega) \qquad (2.10)
\end{aligned}
$$

elde edilir. (2.11) için $u = t + \dfrac{x}{2}$ diyelim. $du = dt$ olur. Böylece

$$
\begin{aligned}
V_g f(x,\omega) &= \int_{\mathbb{R}^d} f(u)\overline{g}(u-x)e^{-2\pi i u\omega}du \\
&= \int_{\mathbb{R}^d} f\left(t+\frac{x}{2}\right)\overline{g}\left(t+\frac{x}{2}-x\right)e^{-2\pi i u\omega}du \\
&= \int_{\mathbb{R}^d} f\left(t+\frac{x}{2}\right)\overline{g}\left(t-\frac{x}{2}\right)e^{-2\pi i(t+\frac{x}{2})\omega}dt \\
&= \int_{\mathbb{R}^d} f\left(t+\frac{x}{2}\right)\overline{g}\left(t-\frac{x}{2}\right)e^{-2\pi i t\omega}e^{-2\pi i x\omega}dt \\
&= e^{-2\pi i x\omega}\int_{\mathbb{R}^d} f\left(t+\frac{x}{2}\right)\overline{g}\left(t-\frac{x}{2}\right)e^{-2\pi i t\omega}dt
\end{aligned}
\tag{2.11}
$$

elde edilir.

Ayrıca $V_g f$, $\mathbb{R}^{2d}$ üzerinde düzgün sürekli bir fonksiyondur.

Kısa-Zamanlı Fourier Dönüşümünün Tanım Kümesi:

Dikkat edilirse Tanım (2.3.2)'de f ve g fonksiyonlarının hangi uzaya ait olduğuna dair herhangi bir kabul yapılmamıştır. Eğer $f,g \in L^2(\mathbb{R}^d)$ ise $f \cdot T_x\overline{g} \in L^1(\mathbb{R}^d)$ dir. Dolayısıyla $V_g f(x,\omega) = \widehat{(f.T_x\overline{g})}(\omega)$ eşitliğinden iyi tanımlıdır. Benzer şekilde $g \in L^p(\mathbb{R}^d)$ ve $f \in L^{p'}(\mathbb{R}^d)$ ise Hölder eşitsizliğinden $f.T_x\overline{g} \in L^1(\mathbb{R}^d)$ ve kısa-zamanlı Fourier dönüşümü iyi tanımlıdır. Kısa-zamanlı Fourier dönüşümü için $V_g f(x,\omega) = \langle f, M_\omega T_x g\rangle$ eşitliği, integralin iyi tanımlı olmadığı durumlarda oldukça kullanışlıdır.

Aşağıdaki Lemma kısa-zamanlı Fourier dönüşümünün kovaryans özelliği olarak adlandırılır.

Lemma 2.3.3 *$V_g f$ tanımlı ise $x,u,\omega,\eta \in \mathbb{R}^d$ için*

$$
V_g(T_u M_\eta f)(x,\omega) = e^{-2\pi i u\cdot\omega}.V_g f(x-u,\omega-\eta) \tag{2.12}
$$

olur.

Özel olarak

$$
|V_g(T_u M_\eta f)(x,\omega)| = |V_g f(x-u,\omega-\eta)|
$$

eşitliği geçerlidir.

İspat. Öncelikle $M_{-\eta}T_{-u}M_{\omega}T_x = e^{2\pi i x\omega}M_{\omega-\eta}T_{x-u}$ eşitliğinin sağlandığını gösterelim.

$$\begin{aligned}
M_{-\eta}T_{-u}M_{\omega}T_x &= e^{-2\pi i\eta t}(T_{-u}M_{\omega}T_x g)(t)\\
&= e^{-2\pi i\eta t}(M_{\omega}T_x g)(t+u)\\
&= e^{-2\pi i\eta t}(e^{2\pi i\omega(t+u)}T_x g(t+u))\\
&= e^{-2\pi i\eta t}e^{2\pi i\omega t}e^{2\pi i\omega u}g(t+u-x)\\
&= e^{2\pi i\omega u}e^{2\pi i t(\omega-\eta)}g(t+-(x-u))\\
&= e^{2\pi i\omega u}M_{\omega-\eta}T_{x-u}g(t)
\end{aligned}$$

Böylece $M_{-\eta}T_{-u}M_{\omega}T_x = e^{2\pi i x\omega}M_{\omega-\eta}T_{x-u}$ eşitliği elde edilir. Bu eşitliği kullanırsak,

$$\begin{aligned}
V_g(T_uM_\eta f)(x,\omega) &= \langle T_uM_\eta f, M_\omega T_x g\rangle\\
&= \int_{\mathbb{R}^d} T_uM_\eta f(t)\overline{M_\omega T_x g(t)}dt\\
&= \int_{\mathbb{R}^d} e^{2\pi i\eta(t-u)}f(t-u)\overline{M_\omega T_x g(t)}dt\\
&\overset{t-u=v}{=} \int_{\mathbb{R}^d} e^{2\pi i\eta v}f(v)\overline{M_\omega T_x g(u+v)}dv\\
&= \int_{\mathbb{R}^d} e^{2\pi i\eta v}f(v)\overline{T_{-u}(M_\omega T_x g)(v)}dv\\
&= \int_{\mathbb{R}^d} f(v)\overline{T_{-u}(M_\omega T_x g)(v)e^{-2\pi i\eta v}}dv\\
&= \int_{\mathbb{R}^d} f(v)\overline{M_{-\eta}T_{-u}M_\omega T_x g(v)}dv\\
&= \langle f, M_{-\eta}T_{-u}M_\omega T_x g\rangle\\
&= e^{-2\pi i\omega u}\langle f, M_{\omega-\eta}T_{x-u}g\rangle\\
&= e^{-2\pi i u\omega}V_g f(x-u,\omega-\eta).
\end{aligned}$$

elde edilir. Ayrıca

$$|V_g(T_uM_\eta f)(x,\omega) = |e^{-2\pi i\omega u}.V_g f(x-u,\omega-\eta)| = |V_g f(x-u,\omega-\eta)|$$

elde edilir.

2.3.1. Diklik İlişkisi ve Ters Formülü

Aşağıdaki teorem Kısa-Zamanlı Fourier Dönüşümünün iç çarpımlarının Parseval formülüne karşılık gelir.

Teorem 2.3.1.1 (KZFD için Diklik) $f_1, f_2, g_1 g_2 \in L^2(\mathbb{R}^d)$, $V_{g_1} f_1, V_{g_2} f_2 \in L^2(\mathbb{R}^{2d})$ *ve*

$$\langle V_{g_1} f_1, V_{g_2} f_2 \rangle = \langle f_1, f_2 \rangle . \overline{\langle g_1, g_2 \rangle} \tag{2.13}$$

olur.

İspat. $g_1, g_2 \in L^1 \cap L^\infty(\mathbb{R}^d) \subseteq L^2(\mathbb{R}^d)$ olsun. Böylece $f_1 T_x \overline{g_1} \in L^2(\mathbb{R}^d), f_2, T_x \overline{g_2} \in L^2(\mathbb{R}^d)$ sağlanır. Gerçekten, $g_j \in L^1 \cap L^\infty \subseteq L^2(\mathbb{R}^d)$ ve $f \in L^2(\mathbb{R}^d)$ ise

$$\begin{aligned}
\int |f_j(t) T_x g_j(t)|^2 dt &= \int |f(t) g(t-x)|^2 dt \\
&= \int |f(u+x)|^2 |g(u)|^2 du \\
&= ||g||_\infty \int |f(u+x)|^2 du \\
&= ||g||_\infty ||f||_2^2 < \infty
\end{aligned}$$

elde edilir. Böylece $f_j T_x g_j \in L^2(\mathbb{R}^d)$ bulunur.

$$
\begin{aligned}
\langle V_{g_1} f_1, V_{g_2} f_2 \rangle &= \int_{\mathbb{R}^d} \int_{\mathbb{R}^d} V_{g_1} f_1(x,\omega) \overline{V_{g_2} f_2(x,\omega)} d\omega dx \\
&= \int_{\mathbb{R}^d} \left(\int_{\mathbb{R}^d} \widehat{f_1 T_x \overline{g_1}}(\omega) \overline{\widehat{f_2 T_x \overline{g_2}}}(\omega) d\omega \right) dx \\
&\overset{Parseval}{=} \int_{\mathbb{R}^d} \left(\int_{\mathbb{R}^d} (f_1 T_x \overline{g_1})(t) \overline{(f_2 T_x \overline{g_2})}(t) dt \right) dx \\
&= \int_{\mathbb{R}^d} \left(\int_{\mathbb{R}^d} f_1(t) \overline{g_1(t-x) f_2(t)} g_2(t-x) dt \right) dx \\
&= \int_{\mathbb{R}^d} f_1(t) \overline{f_2(t)} \left(\int_{\mathbb{R}^d} \overline{g_1(t-x)} g_2(t-x) dx \right) dt \\
&\overset{t-x=u}{=} \int_{\mathbb{R}^d} f_1(x-u) \overline{f_2(x+u)} \left(\int_{\mathbb{R}^d} \overline{g_1(u)} g_2(u) du \right) dx \\
&= \int_{\mathbb{R}^d} f_1(x-u) \overline{f_2(x+u) \langle g_1, g_2 \rangle} dx \\
&= \langle f_1, f_2 \rangle \overline{\langle g_1, g_2 \rangle}
\end{aligned}
$$

elde edilir.

$g_1 \in L^1 \cap L^\infty \subseteq L^2(\mathbb{R}^d)$ ve keyfi $g_2 \in L^2(\mathbb{R}^d)$ için $g_2 \mapsto \langle V_{g_1} f_1, V_{g_2} f_2 \rangle_{L^2(\mathbb{R}^d)}$ lineer fonksiyoneli $L^2(\mathbb{R}^d)$'de yoğun olan $L^1 \cap L^\infty \subseteq L^2$ üzerinde sınırlıdır. Bu tüm $g_2 \in L^2(\mathbb{R}^d)$ lere genişletilebilir.

Ayrıca $g_1, g_2, f_1, f_2 \in L^2(\mathbb{R}^d)$ olmak üzere $g_1 \mapsto \langle V_{g_1} f_1, V_{g_2} f_2 \rangle_{L^2(\mathbb{R}^d)}$, $L^1 \cap L^\infty \subseteq L^2$ üzerinde eşlenik lineer ve sınırlıdır.

Sonuç 2.3.1.2 *Eğer $f, g \in L^2(\mathbb{R}^d)$ ise $||V_g f||_2 = ||f||_2 ||g||_2$ dir. $||g||_2 = 1$ olduğundan, her $f \in L^2(\mathbb{R}^d)$ için $||V_g f||_2 = ||f||_2$ dir. $V_g f : L^2(\mathbb{R}^d) \to L^2(\mathbb{R}^{2d})$ izometridir.*

Sonuç 2.3.1.3 (KZFD için Ters Formülü) *$g, \gamma \in L^2(\mathbb{R}^d)$ ve $\langle g, \gamma \rangle \neq 0$ olsun. Her $f \in L^2(\mathbb{R}^d)$ için*

$$
f = \frac{1}{\langle g, \gamma \rangle} \int \int_{\mathbb{R}^{2d}} V_g f(x,\omega) M_\omega T_x \gamma d\omega dx \tag{2.14}
$$

eşitliği sağlanır.

İspat. (2.3.1.2) den, $V_g f \in L^2(\mathbb{R}^{2d})$ olduğundan, vektör değerli integral,

$$\tilde{f} = \frac{1}{\langle g,\gamma\rangle}\int\int_{\mathbb{R}^{2d}} \underbrace{V_g f(x,\omega)}_{\in L^2(\mathbb{R}^d)} \underbrace{M_\omega T_x \gamma}_{L^2(\mathbb{R}^d)} dx d\omega$$

fonksiyonu $L^2(\mathbb{R}^d)$ de iyi tanımlıdır. Diklik ilişkisi kullanılırsa, yukarıdak vektörel çarpımın integralini hesaplamak için $h \in L^2(\mathbb{R}^d)$ ile iç çarpımı alınırsa

$$\begin{aligned}
\langle \tilde{f}, h\rangle &= \frac{1}{\langle g,\gamma\rangle}\int\int_{\mathbb{R}^{2d}} V_g f(x,\omega)\overline{\langle h, M_\omega T_x \gamma\rangle} dx d\omega \\
&= \frac{1}{\langle g,\gamma\rangle}\langle V_g f, V_\gamma h\rangle \\
&= \frac{1}{\langle g,\gamma\rangle}.\langle g,\gamma\rangle.\langle f,h\rangle \\
&= \langle f,h\rangle
\end{aligned}$$

olur. Böylece $\tilde{f} = f$ elde edilir ve böylece ters formülü ispatlanmış olur.
(2.14) deki ters formülü, f fonksiyonunun, ağırlık fonksiyonu olarak kısa-zamanlı Fourier dönüşümü ile zaman-frekans ötelemelerinin sürekli hareketi olarak ifade edilebilir. (2.14)'deki eşitlik FD için verilen ters formülüne benzerdir.

Fourier Dönüşümünün Tersi:

$f(x) = \int_{\mathbb{R}^d} \underbrace{\hat{f}(\omega)}_{\text{katsayı}} \underbrace{e^{2\pi i x\omega}}_{baz} d\omega$ periyodik fonksiyonu süreklidir.

Kısa-Zamanlı Fourier Dönüşümünün Tersi:

$$f = \frac{1}{\langle g,\gamma\rangle}\underbrace{\int\int_{\mathbb{R}^{2d}} \underbrace{V_g f(x,\omega)}_{\text{katsayı}} \underbrace{M_\omega T_x \gamma}_{\text{baz}} d\omega dx}_{\text{vektör değerli integral}}$$

Not: $F \in L^2(\mathbb{R}^{2d})$ olsun.

$$\int\int_{\mathbb{R}^{2d}} F(x,\omega) M_\omega T_x d dx d\omega \ \in L^2(\mathbb{R}^d)$$

V_g nin tersi olan $A_g : F \mapsto \int\int_{\mathbb{R}^{2d}} F(x,\omega) M_\omega T_x dx d\omega \in L^2(\mathbb{R}^d)$ sınırlıdır.

İddia: A_g, V_g'nin eşleniğidir.

Tanım 2.3.1.4 (Eşlenik Operatör) $T : H_1 \to H_2,\ \ T^* : H_2 \to H_1$ *eşlenik operatörü olsun.*

$$\forall u \in H_1, v \in H_2 \text{ için } \langle Tu, u\rangle_{H_2} = \langle u, T^* v\rangle_{H_1}$$

İspat. $\forall F \in L^2(\mathbb{R}^{2d})$

$$\begin{aligned}\langle A_g F, h\rangle_{L^2(\mathbb{R}^d)} &= \int\int_{\mathbb{R}^{2d}} F(x,\omega)\langle M_\omega T_x g, h\rangle dx d\omega \\ &= \langle F, V_g h\rangle \\ &= \langle V_g^* F, h\rangle\end{aligned}$$

$$A_g F = V_g^* F \Rightarrow A_g = V_g^*$$

Öyleyse $I = \dfrac{1}{\langle \gamma, g\rangle} V_\gamma^* V_g$ kullanılarak, Hilbert uzayından Banach uzaylarına geçebiliriz.

Ters Formülünün Güçlü Bir Versiyonu

$\{K_n\}$ İç içe geçmiş kompakt kümeler dizisini alalım. Bu durumda

- $\bigcup_{n\geq 1} K_n = \mathbb{R}^{2d}$
- $K_n \subseteq int(K_{n+1}),\ \forall n \in \mathbb{N}$

$[-n,n]^{2d}$ ya da $K_n = \overline{B}(0,n) = \{x \in \mathbb{R}^{2d} :\ |x| \leq n\}$ dir.

Teorem 2.3.1.5 $g, \gamma \in L^2(\mathbb{R}^d)$ *ve* $n \geq 1$ *için* $K_n \subseteq \mathbb{R}^{2d}$ *iç içe geçmiş kompakt kümeler dizisi olsun.* $f_n \in L^2(\mathbb{R}^d)$ *dizisini şu şekilde tanımlarız.*

$$f_n = \frac{1}{\langle g, \gamma\rangle} \int\int_{K_n} V_g f(x,\omega) M_\omega T_x \gamma dx d\omega$$

buradan $\lim_{n\to\infty} ||f - f_n||_2 = 0$

İspat. $h \in L^2(\mathbb{R}^d)$ için

$$
\begin{aligned}
|\langle f_n, h\rangle| &= \frac{1}{|\langle g,\gamma\rangle|}\Big|\int\int_{K_n} V_g f(x,\omega)\overline{V_\gamma h(x,\omega)}dxd\omega\Big| \\
&\overset{\text{Cauchy-Schwarz}}{\leq} \frac{1}{|\langle g,\gamma\rangle|}||V_g f||_2||V_\gamma h||_2 \\
&\overset{||V_g f||_2=||g||_2||f||_2}{=} \frac{1}{\langle g,\gamma\rangle}||g||_2||f||_2||\gamma||_2||h||_2
\end{aligned}
$$

$\Rightarrow \forall n$, $f_n \in L^2(\mathbb{R}^d)$ için

$$
||f_n||_2 \overset{||h||_2=1}{\leq} \frac{1}{\langle g,\gamma\rangle}||g||_2||\gamma||_2||f||_2
$$

olduğundan $||f_n||_2$ sonludur. $h \in L^2(\mathbb{R}^d)$ için ters formülünü hesaplarsak,

$$
\begin{aligned}
|\langle f-f_n, h\rangle| &= \Big|\frac{1}{|\langle g,\gamma\rangle|}\int\int_{\mathbb{R}^{2d}} V_g f(x,\omega)M_\omega T_x\gamma d\omega dx - \int\int_{K_n} V_g f(x,\omega)M_\omega T_x \gamma d\omega dx\Big| \\
&= \frac{1}{|\langle g,\gamma\rangle|}\left|\left(\int\int_{\mathbb{R}^{2d}} - \int\int_{K_n}\right)\right| V_g f(x,\omega)\overline{V_\gamma(x,\omega)}dxd\omega \\
&= \frac{1}{|\langle g,\gamma\rangle|}\left|\int\int_{K_n^c} V_g f(x,\omega)\overline{V_\gamma(x,\omega)}dxd\omega\right| \\
&\leq \frac{1}{|\langle g,\gamma\rangle|}\int\int_{K_n^c}\left|V_g f(x,\omega)\overline{V_\gamma(x,\omega)}\right|dxd\omega \\
&\leq \frac{1}{|\langle g,\gamma\rangle|}\left(\int\int_{K_n^c}|V_g f(x,\omega)|^2 dxd\omega\right)^{1/2}\left(\int\int_{K_n^c}|V_\gamma(x,\omega)|^2 dxd\omega\right)^{1/2} \\
&\leq \frac{1}{|\langle g,\gamma\rangle|}\underbrace{||V_\gamma h||_2}_{=||\gamma||_2||h||_2}\left(\int\int_{K_n^c}|V_g f(x,\omega)|^2 dxd\omega\right)^{1/2} \\
&= \frac{1}{|\langle g,\gamma\rangle|}||\gamma||_2||h||_2\left(\int\int_{K_n^c}|V_g f(x,\omega)|^2 dxd\omega\right)^{1/2}
\end{aligned}
$$

Her $h \in L^2(\mathbb{R}^d)$ için bu doğrudur.

$$
\begin{aligned}
||f-f_n||_2 &= \sup_{||h||_2\leq 1}|\langle f-f_n, h\rangle| \\
&= \frac{1}{|\langle g,\gamma\rangle|}||\gamma||_2\left(\int\int_{K_n^c}|V_g f(x,\omega)|^2 dxd\omega\right)^{1/2}
\end{aligned}
$$

$n \to \infty \Rightarrow ||f-f_n||_2 \to 0$

2.3.2. Kısa-Zamanlı Fourier Dönüşümü ve Belirsizlik İlkeleri

Bu kısımda kısa-zamanlı Fourier dönüşümü için, Fourier dönüşümlerine benzer belirsizlik ilkeleri verilecektir. Aşağıdaki belirsizlik ilkesi Donoho ve Stark Belirsizlik ilkesinin Tanım 1.2.7.1 benzer şeklidir. kısa zamanlı Fourier dönüşümünün Zayıf Belirsizlik ilkesi olarak da isimlendirilir.

Önerme 2.3.2.1 *Kabul edelim ki $||f||_2 = ||g||_2 = 1$, $U \subseteq \mathbb{R}^{2d}$ ve $\varepsilon > 0$ olsun. Eğer*

$$\int\int_U |V_g f(x,\omega)|^2 dx d\omega \geq 1-\varepsilon$$

eşitsizliği varsa $|U| \geq 1-\varepsilon$ olur.

İspat. Cauchy-Schwarz eşitsizliği de kullanılırsa, her $(x,\omega) \in \mathbb{R}^{2d}$ için

$$\begin{aligned} |V_g f(x,\omega)| &= |<f, M_\omega T_x g>| \\ &\leq ||f||_2 ||M_\omega T_x g||_2 \\ &= ||f||_2 ||g||_2 = 1 \end{aligned}$$

elde edilir ve $V_g f$ sınırlı olur. Böylece

$$\begin{aligned} 1-\varepsilon &\leq \int\int_U |V_g f(x,\omega)|^2 dx d\omega \\ &\leq \int\int_U \sup_{x,\omega} |V_g f(x,\omega)|^2 dx d\omega \\ &\leq ||V_g f||_\infty^2 \int\int_U dx d\omega \\ &= ||V_g f||_\infty^2 . |U| \leq |U| \end{aligned}$$

elde edilir ve $1-\varepsilon \leq |U|$ bulunur. Kısa-zamanlı Fourier dönüşümü için çok daha güçlü eşitsizlik Lieb tarafından ispatlanmıştır [10].

2.3.3. Lieb Belirsizlik İlkesi

Tanım 2.3.3.1 *$f,g \in L^2(\mathbb{R}^d)$ ve $2 \le p < \infty$ olsun. Bu durumda*

$$\int\int_{\mathbb{R}^{2d}} |V_g f(x,\omega)|^p dx d\omega \le \left(\frac{2}{p}\right)^d (||f||_2 ||g||_2)^p$$

olur.

İspat. p', p'nin eşleniği, $\frac{1}{p}+\frac{1}{p'}=1$ olsun. $2 \le p < \infty$ ise $1 \le p' \le 2$ olur.
$p=2$ için $\frac{1}{2}+\frac{1}{p'}=1$ ise $p'=2$ olur.
$p=\infty$ için $\frac{1}{\infty}+\frac{1}{p'}=1$ ise $p'=1$ olur ve $1<p'\le 2$ elde edilir. $f,g \in L^2(\mathbb{R}^d)$ olduğundan Hölder eşitsizliğinden $fT_x\bar{g} \in L^1(\mathbb{R}^d)$ olur.

$$V_g f(x,\omega) = \widehat{(fT_x\bar{g})}(\omega) \in L^2(\mathbb{R}^d)$$

olduğundan Fubini teoremi kullanılırsa hemen her $x \in \mathbb{R}^d$ için

$$\widehat{(fT_x\bar{g})} \in L^2(\mathbb{R}^d)$$

bulunur. Böylece hemen her x için $fT_x\bar{g} \in L^1 \cap L^2(\mathbb{R}^d)$ elde edilir.
$A_{p'} = \left(p'^{1/p'}.p^{-1/p}\right)^{1/2}$ ve $g^*(x) = \overline{g(-x)}$ olmak üzere

$$\begin{aligned}
\left(\int_{\mathbb{R}^d} |V_g f(x,\omega)|^p d\omega\right)^{1/p} &= \left(\int_{\mathbb{R}^d} |\widehat{(fT_x\bar{g})}(\omega)|^p d\omega\right)^{1/p} \\
&\overset{\text{Hausdorff-Young}}{\le} A_{p'}^d \left(\int_{\mathbb{R}^d} |(fT_x\bar{g}(y))|^{p'} dy\right)^{1/p'} \\
&= A_{p'}^d \left(\int_{\mathbb{R}^d} |f(y)|^{p'} |\bar{g}(y-x)|^{p'} dy\right)^{1/p'} \\
&= A_{p'}^d \left(\int_{\mathbb{R}^d} |f(y)|^{p'} |\bar{g}(-(x-y))|^{p'} dy\right)^{1/p'} \\
&= A_{p'}^d \left(\int_{\mathbb{R}^d} |f(y)|^{p'} |g^*(x-y)|^{p'} dy\right)^{1/p'} \\
&= A_{p'}^d \left(\int_{\mathbb{R}^d} |f|^{p'} * |g^*|^{p'}(x)\right)^{1/p'}
\end{aligned}$$

bulunur. Böylece

$$
\begin{aligned}
||V_g f||_p &= \left(\int_{\mathbb{R}^d}\left(\int_{\mathbb{R}^d}|\widehat{(fT_x\overline{g})}(\omega)^p d\omega\right)dx\right)^{1/p} \\
&\leq A_{p'}^d\left(\int_{\mathbb{R}^d}(|f|^{p'}*|g^*|^{p'}(x))^{p/p'}dx\right)^{\frac{1}{p}.\frac{p'}{p'}} \\
&= A_{p'}^d||\,|f|^{p'}*|g^*|\,||_{p/p'}^{1/p'}
\end{aligned}
$$

elde edilir.
$f\in L^2(\mathbb{R}^d)$ ise $\left(\int_{\mathbb{R}^d}|f|^2\right)^{1/2}<\infty$ olduğundan, ifadedeki üsleri $\dfrac{p'}{p'}$ ile çarparsak,

$$
\left(\int_{\mathbb{R}^d}|f|^{2.\frac{p'}{p'}}\right)^{\frac{1}{2}.\frac{p'}{p'}} = \left(\int_{\mathbb{R}^d}(|f|^{p'})^{\frac{2}{p'}}\right)^{\frac{p'}{2}.\frac{1}{p'}} = ||\,|f|^{p'}||_{\frac{2}{p'}}^{\frac{1}{p'}} < \infty
$$

bulunur ve $|f|^{p'}\in L^{2/p'}(\mathbb{R}^d)$ elde edilir. Benzer şekilde $|g^*|^{p'}\in L^{2/p'}(\mathbb{R}^d)$ elde edilir.
$|f|^{p'},|g^*|^{p'}\in L^{2/p'}(\mathbb{R}^d)$ elemanları için Young eşitsizliği uygulanırsa, $r=\dfrac{2}{p'}\geq 1, s=\dfrac{p}{p'}$, ve $\dfrac{1}{r}+\dfrac{1}{r}=1+\dfrac{1}{s}$ olsun.

$$
\begin{aligned}
||\,|f|^{p'}*|g^*|^{p'}||_s &\leq (A_rA_rA_{s'})^d||\,|f|^{p'}||_r||\,|g^*|^{p'}||_r \\
&= A_r^{2d}A_{s'}^d||\,|f|^{p'}||_r||\,|g^*|^{p'}||_r
\end{aligned}
$$

elde edilir.

$$
||\,|f|^{p'}||_r = \left(\int_{\mathbb{R}^d}|f|^{p'.\frac{2}{p'}}dx\right)^{\frac{p'}{2}} = ||f||_2^{p'}
$$

ve

$$
||\,|g^*|^{p'}||_r = \left(\int_{\mathbb{R}^d}|g^*|^{p'.\frac{2}{p'}}dx\right)^{\frac{p'}{2}} = ||g||_2^{p'}
$$

olur.

$$\begin{aligned}
||V_g f||_p &\leq A_{p'}^d || \, |f|^{p'} * |g^*|^{p'} ||_{p/p'}^{1/p'} \\
&= A_{p'}^d (A_r^{2d} A_{s'}^d || \, |f|^{p'} ||_r || \, |g^*|^{p'} ||_r)^{1/p'} \\
&= A_{p'}^d A_r^{2d/p'} A_{s'}^{d/p'} (|| \, |f|^{p'} ||_r || \, |g^*|^{p'} ||_r)^{1/p'} \\
&= \underbrace{A_{p'}^d A_r^{2d/p'} A_{s'}^{d/p'}}_{\left(\frac{2}{p}\right)^d} ||f||_2 ||g||_2 \\
&= \left(\frac{2}{p}\right)^d ||f||_2 ||g||_2
\end{aligned}$$

elde edilir. Buradan

$$||V_g f||_p = \left(\int \int_{\mathbb{R}^{2d}} |V_g f(x,\omega)|^p dx d\omega \right)^{1/p}$$

olur ve

$$\int \int_{\mathbb{R}^{2d}} |V_g f(x,\omega)|^p dx d\omega \leq \left(\frac{2}{p}\right)^d (||f||_2 ||g||_2)^p$$

bulunur.

Young ve Hausdorff-Young eşitsizliklerinin versiyonundaki fonksiyonların küçültülmesi analizinde, Lieb'in belirsizlik ilkesindeki eşitliğin ancak ve ancak f ve g fonksiyonlarının Gaussian zaman-frekans ötelemeleri olması durumunda elde edileceğini gösterir [10].

Lieb'in ilkesi kısa-zamanlı Fourier dönüşümü hakkındaki diğer önemli eşitsizliklerinden birini içerir. (2.3.3.1) teki eşitsizlikte, $1 \leq p \leq 2$ durumu için $f, g \in L^2(\mathbb{R}^d)$ ise

$$\int \int_{\mathbb{R}^{2d}} |V_g f(x,\omega)|^p dx d\omega \geq \left(\frac{2}{p}\right)^d (||f||_2 ||g||_2)^p$$

olur. Eşitlik ancak ve ancak $p > 1$ ve f, g belirli Gaussian fonksiyonları olduğunda geçerlidir. Lieb'in belirsizlik ilkesi, genel lokal kompakt abelyan gruplara da taşınabilir [11].

2.4. NOKTASAL ZAMAN-FREKANS TEMSİLLERİ: ÇERÇEVE TEORİSİ

Önceki bölümlerde sadece sürekli zaman-frekans temsillerini incelenmiştir. Bu zaman-frekans analizinin teorik yönleri için oldukça yeterlidir, ancak bazen pratik amaçlar için yeterli olmayabilir. Neye ihtiyacımız olduğunu anlamak için, kısa-zamanlı Fourier dönüşümünün tersini düşüneceğiz.

Bu ters dönüşüm, f fonksiyonun $\{M_\omega T_x\gamma : (x,\omega) \in \mathbb{R}^{2d}\}$ fonksiyonlarının sayılamaz sistemine göre "sürekli" bir açılımıdır. Ancak, $L^2(\mathbb{R}^d)$ ayrılabilir bir Hilbert uzayı olduğundan, zaman-frekans ötelemelerinin sayılabilir alt kümesine göre seri açılımı her $f \in L^2(\mathbb{R}^d)$ fonksiyonunu temsil etmek için yeterli olmalıdır.

Bu bölümde amacımız γ penceresinin sayılabilir pek çok zaman-frekans ötelemeleriyle f fonksiyonunun noktasal temsili olarak yazmaktır.

2.4.1. Çerçeve Teorisi

Fizik ve sinyal analizindeki uygulamalar için çerçevelerin önemli özellikleri I. Daubechies ve A. Grossmann tarafından tanıtılmıştır [13], [14]. Bu çalışmalarda soyut kavramlar düzenlenerek, belirli tip çerçeveler sinyal analizindeki uygulamalarda vazgeçilmez hale getirilmiştir. Çerçeveler fonksiyonel analizde de önemli rol oynar [3], [12], [15], [16], [17], [18].

Tanım 2.4.1.1 (Çerçeve) *Ayrılabilir Hilbert Uzayındaki $\{e_i\}_{j\in J}$ ailesini alalım. Her $f \in H$ fonksiyonu için eğer*

$$A||f||^2 \leq \sum_{j\in J} |\langle f, e_j\rangle|^2 \leq B||f||^2 \tag{2.15}$$

*eşitsizliğini sağlayan $A, B > 0$ pozitif sayıları varsa bu $\{e_i\}_{j\in J}$ ailesine **çerçeve** denir. A ve B çerçevenin sınırlarıdır. $\langle f, e_j\rangle$ çerçevenin katsayılarıdır. Eğer $A = B$ ise **dar** çerçevedir.*

Örneğin, bir ortonormal baz, $A = B = 1$ çerçeve sınırlarına sahip dar bir çerçevedir. Herhangi iki ortonormal bazın birleşimi ise $A = B = 2$ sınırlarına sahip dar bir çerçevedir. L tane keyfi birim vektörlü bir ortonormal bazın birleşimi, $A = 1$ ve $B = L+1$ sınırlarına sahip dar bir çerçevedir.

Çerçeveler ortonormal bazları genelleştirirler. Ancak, bu basit örnekler, genelde çerçeve elemanlarının ne birbirine dik ne de lineer bağımsız olduğunu gösterir. Çerçeve teorisini daha iyi anlamak için, bunlara ilişkin zaman-frekans analizinde önemli operatörler üzerinde çalışacağız.

2.5. BAZI OPERATÖRLER

Bu bölümde zaman-frekans analizinde, özellikle çerçeve teorisi için önemli olan bazı operatörler ve ilgili teoremler verilecektir. Öncelikle lineer sınırlı bir operatörün normunu verelim.

Tanım 2.5.1 $(X,||\cdot||_X),(Y,||\cdot||_Y)$ *normlu uzaylar olmak üzere ve* $T:X\to Y$ *lineer sınırlı bir operatör olsun.* T *operatörünün normu*

$$||T||_{op}=\sup_{x\in X}\frac{||T(x)||_Y}{||x||_X}$$

şeklinde tanımlanır.

2.5.1. Analiz, Sentez ve Çerçeve Operatörleri

Tanım 2.5.1.1 (Analiz Operatörü) *J bir indeks kümesi ve*

$$\begin{aligned} C:&H\to\ell^2(J)\\ &f\mapsto\{\langle f,e_j\rangle\}_{j\in J}\end{aligned}$$

olsun. Her $\{\{e_j\}_{j\in J}: j\in J\}\subseteq H$ *kümesi için katsayı ya da analiz operatörü*

$$Cf=\{\langle f,e_j\rangle:\ j\in J\}$$

şeklinde tanımlanır.

Tanım 2.5.1.2 (Sentez Operatörü) $c=\{c_j\}_{j\in J}$ *sonlu dizisi için sentez operatörü*

$$Dc=\sum_{j\in J}c_je_j$$

şeklinde tanımlanır.

Tanım 2.5.1.3 (Çerçeve Operatörü) $S:H\to H$ *ve* S^{-1} *var olsun. Çerçeve operatörü*

$$Sf=\sum_{j\in J}\langle f,e_j\rangle e_j$$

şeklinde tanımlanır.

Önerme 2.5.1.4 $\{e_j\}_{j\in J}$, *H Hilbert uzayı için bir çerçeve olsun.*

1. C, H den $\ell^2(J)$ görüntüsü kapalı sınırlı operatördür.

2. C ve D operatörleri birbirlerinin eşleniğidir. $D = C^*$. Sonuç olarak, D $\ell^2(J)$ den H ye sınırlı bir operatöre genişletilebilir ve

$$||\sum_{j\in J} c_j e_j|| \leq B^{1/2}||c||_2$$

   elde edilir.

3. $S = C^*C = DD^*$ çerçeve operatörü H den H ye terslenebilir bir operatör olsun. $A, B > 0$ çerçeve sınırları olmak üzere

$$AI_H \leq S \leq BI_H \ \text{ ve } \ \frac{I_H}{B} \leq S^{-1} \leq \frac{I_H}{A}$$

   Genel olarak $S = AI_H$ ise $\{e_j\}_{j\in J}$ **dar çerçeve**dir.

4. $||\cdot||_{op}$, S için operatör normu olsun. En küçük sınırı $A_{op} = ||S^{-1}||_{op}^{-1}$ ve en büyük sınırı $B_{op} = ||S||_{op}$ dir.

İspat.

1. Çerçeve eşitsizliği kullanılırsa,

$$A||f||^2 \leq \underbrace{\sum_{j\in J} |\langle f, e_j\rangle|^2}_{\in \ell^2} \leq B||f||^2$$

   eşitsizliğinden $\sum_{j\in J} |\langle f, e_j\rangle|^2 = ||Cf||_2^2 \leq B||f||^2$ elde edilir. Burada $K = B^{1/2}$ alırsak sınırlılığı elde ederiz.

2. $c = \{c_j\}_{j\in J}$ sonlu bir dizi olsun.

$$\begin{aligned}
\langle C^*c, f\rangle &= \langle c, Cf\rangle \\
&= \langle \{c_j\}, \{\langle f, e_j\rangle\}\rangle \\
&= \sum_{j\in J} c_j \overline{\langle f, e_j\rangle} \\
&= \sum_{j\in J} c_j \langle e_j, f\rangle \\
&= \langle \sum_{j\in J} c_j e_j, f\rangle \\
&= \langle Dc, f\rangle
\end{aligned}$$

elde edilir. Her $f \in H$ için $\langle C^*c, f\rangle = \langle Dc, f\rangle$ dir. Dolayısıyla (2.15) dan C, H üzerinde sınırlı bir operatördür. C nin operatör normu $||C||_{op} \leq B^{1/2}$ dir. Ayrıca $D := C^* : \ell^2(J) \to H$ seçersek, D de aynı operatör normuna göre sınırlı olduğundan

$$||Dc|| = ||C^*c|| \leq ||C^*||.||c|| \Rightarrow ||D||_{op} \leq B^{1/2}$$

elde edilir.

3. (2) den, çerçeve operatörü S_f

$$S_f = \sum_{j\in J} \langle f, e_j\rangle e_j = DCf = C^*Cf = DD^*f$$

Dolayısıyla, S operatörü kendine eşleniktir.

$$S^* = (C^*C)^* = C^*C^{**} = C^*C = S$$

olur.

Şimdi $f \in H$ olsun.

$$\begin{aligned}
\langle Sf, f\rangle &= \langle \sum_{j\in J} \langle f, e_j\rangle e_j, f\rangle \\
&= \sum_{j\in J} \langle f, e_j\rangle . \langle e_j, f\rangle \\
&= \sum_{j\in J} |\langle f, e_j\rangle|^2
\end{aligned}$$

$\langle Sf, f\rangle = \sum_{j\in J} |\langle f, e_j\rangle|^2 \geq 0$ olduğundan S pozitiftir.

Öte yandan (2.15) deki çerçeve eşitsizliğinden, $A, B > 0$ olmak üzere

$$AI_H \leq S \leq BI_H \text{ dir.}$$

$A > 0$ olduğundan S birebirdir. S görüntüsü üzerinde terslenebilirdir.

Dolayısıyla $S^{-1}(AI_H) \leq S^{-1}S \leq S^{-1}(BI_H)$ elde edilir.

$$AS^{-1} \leq S^{-1}S \leq BS^{-1} \Rightarrow AS^{-1} \leq I_H \leq BS^{-1}$$

$S^{-1} \leq \dfrac{I_H}{A}$ ve $S^{-1} \geq \dfrac{I_H}{B}$ olduğundan $\dfrac{I_H}{B} \leq S^{-1} \leq \dfrac{I_H}{A}$ elde edilir.

4. (2.15) deki çerçeve eşitsizliğinden, her $B > 0$ pozitifi için (3) teki S operatörünün normu,

$$||S||_{op} = \sup\{\langle Sf, f\rangle : ||f|| \leq 1\} \leq B.||f||^2$$

bulunur ve $||S||_{op} \leq B_{opt}$ olur. Tersine,

$$\langle Sf, f\rangle \leq ||Sf||.||f|| \leq ||S||_{op}.\underbrace{||f||^2}_{\leq 1} \leq ||S||_{op} = B$$

elde edilir. Böylece $\sum_{j\in J} |\langle f, e_j\rangle|^2 = \langle Sf, f\rangle \leq ||S||_{op}$ olur.

$B_{opt} \leq ||S||_{op} \Rightarrow B_{opt} = ||S||_{op}$ bulunur.

Benzer şekilde A_{opt} da elde edilir.

Bu teoremden aşağıdaki sonuç elde edilir.

Sonuç 2.5.1.5 *$\{e_j : j \in J\}$, H Hilbert uzayı için bir çerçeve olsun. Eğer $c = (cj)_{j\in J}$ olmak üzere bir $c \in \ell^2(J)$ için*

$$f = \sum_{j\in J} c_j e_j$$

koşulu sağlanıyorsa, her $\varepsilon > 0$ için $F_0 = F_0(\varepsilon) \leq J$ sonlu kümesi vardır öyle ki her $F_0 \subseteq F$ sonlu kümesi için

$$||f - \sum_{j\in F} c_j e_j|| < \varepsilon$$

sağlanır.

İspat. $\{ej\}_{j\in J}$ bir çerçeve ve bir $c \in \ell^2(J)$ için $f = \sum_{j\in J} c_j e_j$ olsun. $F_0 \subseteq J$, sonlu $F_0 \subseteq F$ seçelim. Ayrıca $\sum_{j\in F} |c_j|^2 < \dfrac{\varepsilon}{B^{1/2}}$ koşulu sağlansın.

$$c_F = c\chi_F = \begin{cases} c_j, & j \in F \\ 0, & j \notin F \end{cases}$$

sonlu bir dizi olsun. Bu durumda $f = \sum_{j\in J} c_j e_j = Dc_F$ olur ve

$$\begin{aligned} ||f - \sum_{j\in J} c_j e_j|| &= ||Dc - Dc_F|| \\ &= ||D(c - c_F)|| \\ &\leq B^{1/2} ||c - c_F|| \\ &< B^{1/2} \frac{\varepsilon}{B^{1/2}} = \varepsilon \end{aligned}$$

elde edilir.

Sonuç 2.5.1.5'te verilen yakınsaklık koşulsuz yakınsaklık olarak adlandırılır. Zaman-frekans analizi için koşulsuz yakınsaklık oldukça önemlidir.

2.5.2. Gabor Çerçevesi

Bu bölümde kısa-zamanlı Fourier dönüşümünün örnekleminde oluşan zaman-frekans ötelemesinin özel bir ailesini inceleyeceğiz.

Tanım 2.5.2.1 (Gabor Çerçevesi) *Sıfırdan farklı bir* $g \in L^2(\mathbb{R}^d)$ *pencere fonksiyonu,* $\alpha, \beta > 0$ *parametreleri için zaman-frekans ötelemelerinin kümesi*

$$\mathscr{G}(g, \alpha, \beta) = \{T_{\alpha k} M_{\beta n} g : \ k, n \in \mathbb{Z}^d\}$$

Gabor sistemi olarak adlandırılır.

Hatırlatma: Genellikle g fonksiyonu Gabor sistemi için pencere olarak adlandırılır ve α, β sayıları "zaman ve frekans öteleme parametreleri" ya da "latis parametreleri" olarak adlandırılır. Gabor sistemi, ilk olarak D.Gabor tarafından tanıtılmıştır. Gabor'un amacı f fonksiyonunu

$$f = \sum_k \sum_n c_{k,n} T_k M_n g$$

şeklinde yazmaktır. Burada temel soru, f fonksiyonuna bağlı olan $c_{k,n}$ katsayılarının seçimi ve f fonksiyonunun tekliğidir ve serinin yakınsaklığıdır. Bu çerçeve teorisi kullanılarak açıklanır.

Tanım 2.5.2.2 *Eğer $\mathscr{G}(\gamma,\alpha,\beta)$ Gabor sistemi, $L^2(\mathbb{R}^d)$ için bir çerçeve ise, Gabor çerçevesi olarak adlandırılır. Bu durumda $0 < A \leq B$ sabitleri vardır ve her $f \in L^2(\mathbb{R}^d)$ için*

$$A||f||^2 \leq \sum_{k,n\in\mathbb{Z}^d}\sum |\langle f, T_{\alpha k}M_{\beta n}g\rangle|^2 \leq B||f||^2$$

koşulu sağlanır. Gabor çerçevesinden elde edilen operatör, Gabor çerçeve operatörü olarak adlandırılır ve Gabor çerçeve operatörü S,

$$Sf = \sum_{k,n\in\mathbb{Z}^d}\sum \langle f, T_{\alpha k}M_{\beta n}g\rangle T_{\alpha k}M_{\beta n}g$$

şeklinde verilir.

Öte yandan $T_xM_\omega = e^{-2\pi ix\omega}M_\omega T_x$ ve $e^{2\pi ix\omega}T_xM_\omega = M_\omega T_x$ eşitlikleri kullanıllırsa,

$$\begin{aligned} Sf &= \sum_{k,n\in\mathbb{Z}^d}\sum \langle f, e^{-2\pi i\alpha k\beta n}M_{\beta n}T_{\alpha k}g\rangle e^{-2\pi i\alpha k\beta n}M_{\beta n}T_{\alpha k}g \\ &= \sum_{k,n\in\mathbb{Z}^d}\sum \langle f, M_{\beta n}T_{\alpha k}g\rangle M_{\beta n}T_{\alpha k}g \\ &= \sum_{k,n\in\mathbb{Z}^d}\sum V_gf(\alpha k,\beta n)M_{\beta n}T_{\alpha k}g \\ &= S_{g,g}^{\alpha,\beta} = S_{g,g} \end{aligned}$$

elde edilir.

Aşağıdaki önermeler, Gabor çerçevesinin dualleri ve tersleri ile ilgilidir.

Önerme 2.5.2.3 (Dual Çerçeve) *Eğer $\mathscr{G}(g,\alpha,\beta)$, $L^2(\mathbb{R}^d)$ için bir çerçeve ise $\gamma \in L^2(\mathbb{R}^d)$ dual pencere vardır ve $\mathscr{G}(g,\alpha,\beta)$ 'nin dual penceresi $\mathscr{G}(\gamma,\alpha,\beta)$ olur. Bunun sonucu olarak*

$f \in L^2(\mathbb{R}^d)$ *için*

$$\begin{aligned} f &= \sum_{k,n \in \mathbb{Z}^d} \sum \langle f, T_{\alpha k} M_{\beta n} g \rangle T_{\alpha k} M_{\beta n} \gamma \\ &= \sum_{k,n \in \mathbb{Z}^d} \sum \langle f, T_{\alpha k} M_{\beta n} \gamma \rangle T_{\alpha k} M_{\beta n} g \end{aligned}$$

açılımı yazılır ve $L^2(\mathbb{R}^d)$ de koşulsuz yakınsaklıktır. Ayrıca

$$A||f||_2^2 \leq \sum_{k,n \in \mathbb{Z}^d} \sum |V_g f(\alpha k, \beta n)|^2 \leq B||f||_2^2$$

$$\beta^{-1}||f||_2^2 \leq \sum_{k,n \in \mathbb{Z}^d} \sum |\langle f, T_{\alpha k} M_{\beta n} \gamma \rangle|^2 \leq A^{-1}||f||_2^2$$

eşitsizlikleri geçerlidir.

İspat. $\mathscr{G}(g, \alpha, \beta) = \{T_{\alpha k} M_{\beta n} g : \ k, n \in \mathbb{Z}^d\}$ olsun. $\mathscr{G}(\gamma, \alpha, \beta) = \{T_{\alpha k} M_{\beta n} \gamma : \ k, n \in \mathbb{Z}^d\}$ eşitliğini göstermemiz gerekir.

İddia: Herhangi $r, s \in \mathbb{Z}^d$ için

$$ST_{\alpha r} M_{\beta s} = T_{\alpha r} M_{\beta s} S \text{ ya da } (T_{\alpha r} M_{\beta s})^{-1} S (T_{\alpha r} M_{\beta s}) = S$$

$f \in L^2(\mathbb{R}^d)$ ve $r, s \in \mathbb{Z}^d$ olsun.

$$(T_{\alpha r} M_{\beta s})^{-1} S T_{\alpha r} M_{\beta s} f = \sum_{k,n \in \mathbb{Z}^d} \sum \langle T_{\alpha r} M_{\beta s} f, T_{\alpha k} M_{\beta n} g \rangle (T_{\alpha r} M_{\beta s})^{-1} T_{\alpha k} M_{\beta n} g \tag{2.16}$$

Öncelikle her $x \in \mathbb{R}^d$ ve $\omega \in \mathbb{R}^d$ için $(TxM_\omega)^{-1} = M_{-\omega} T_{-x}$ dir. Genel olarak $(T_x)^{-1} = T_{-x}$ ve $(M_\omega)^{-1} = M_{-\omega}$ eşitlikleri sağlanır. Böylece

$$\begin{aligned} (T_{\alpha r} M_{\beta s})^{-1} T_{\alpha k} M_{\beta n} &= M_{-\beta s} T_{\alpha r} T_{\alpha k} M_{\beta n} \\ &= M_{-\beta s} T_{\alpha k - \alpha r} M_{\beta n} \\ &= e^{-2\pi i \alpha (k-r) \beta s} T_{\alpha (k-r)} M_{\beta (n-s)} \end{aligned}$$

elde edilir. (2.16) eşitliğinden

$$(T_{\alpha r} M_{\beta s})^{-1} S (T_{\alpha r} M_{\beta s} f) = \sum_{k,n \in \mathbb{Z}^d} \sum \langle T_{\alpha r} M_{\beta s} f, T_{\alpha k} M_{\beta n} g \rangle e^{-2\pi i \alpha (k-r) \beta s} T_{\alpha (k-r)} M_{\beta (n-s)}$$

sağlanır. Eğer $L^2(\mathbb{R}^d)$ deki iç çarpımı genişletirsek

$$\begin{aligned}
\langle T_{\alpha r}M_{\beta s}f, T_{\alpha k}M_{\beta n}g\rangle &= \int_{\mathbb{R}^d} T_{\alpha r}M_{\beta s}f(t)\overline{T_{\alpha k}M_{\beta n}g(t)}dt \\
&= \int_{\mathbb{R}^d} e^{2\pi i\beta s(t-\alpha r)}f(t-\alpha r)\overline{T_{\alpha k}M_{\beta n}g(t)}dt \\
&\overset{t\to t+\alpha r}{=} \int_{\mathbb{R}^d} e^{2\pi i\beta st}f(t)\overline{T_{\alpha k}M_{\beta n}g(t+\alpha r)}dt \\
&= \int_{\mathbb{R}^d} f(t)\overline{e^{-2\pi i\beta st}e^{2\pi i\beta n(t+\alpha r-\alpha k)}g(t+\alpha r-\alpha k)}dt \\
&= e^{-2\pi i\beta s(\alpha k-\alpha r)}\langle f, T_{\alpha(k-r)}M_{\beta(n-s)}g\rangle
\end{aligned}$$

Yine (2.16) ten

$$\begin{aligned}
(T_{\alpha r}M_{\beta s})^{-1}S(T_{\alpha r}M_{\beta s}) &= \sum\sum_{k,n\in\mathbb{Z}^d} e^{-2\pi i\beta s(-\alpha k+\alpha r)}\langle f, T_{\alpha(k-r)}M_{\beta(n-s)}g\rangle \\
&\qquad .e^{2\pi i\alpha\beta(k-r)s}T_{\alpha(k-r)}M_{\beta(n-s)} \\
&= \sum\sum_{k-r,n-s\in\mathbb{Z}^d} \langle f, T_{\alpha(k-r)}M_{\beta(n-s)}g\rangle T_{\alpha(k-r)}M_{\beta(n-s)}g \\
&= \sum\sum_{k,n\in\mathbb{Z}^d} \langle f, T_{\alpha k}M_{\beta n}g\rangle T_{\alpha k}M_{\beta n}g \\
&= Sf
\end{aligned}$$

ile istenen elde edilir. Bunun sonucu olarak, dual çerçeve S^{-1}, $T_{\alpha r}M_{\beta n}$ ile değişmelidir ve dual çerçeve

$$S^{-1}(T_{\alpha k}M_{\beta n}g) = T_{\alpha k}M_{\beta n}\underbrace{S^{-1}g}_{\gamma}$$

fonksiyonlarından oluşur. Böylece $\gamma = S^{-1}g$ dual çerçeve olarak bulunur.

Sonuç 2.5.2.4 *Eğer $g\in L^2(\mathbb{R}^d)$ için $\mathscr{G}(g,\alpha,\beta)$, $\gamma = S^{-1}g$ dual pencereli bir çerçeve ise, ters çerçeve operatörü*

$$\begin{aligned}
S_{g,g}^{-1}f &= S_{\gamma,\gamma}f \\
&= \sum\sum_{k,n\in\mathbb{Z}^d} \langle f, T_{\alpha k}M_{\beta n}\gamma\rangle T_{\alpha k}M_{\beta n}\gamma
\end{aligned}$$

şeklinde tanımlanır.

Sonuç 2.5.2.5 *$g, \gamma \in L^2(\mathbb{R}^d)$ ve $\alpha, \beta > 0$, $k, n \in \mathbb{Z}^d$ olmak üzere Gabor çerçeve operatörü*

$$S_{g,\gamma} f = D_\gamma C_g f = \sum_{k,n \in \mathbb{Z}^d} \langle f, T_{\alpha k} M_{\beta n} g \rangle T_{\alpha k} M_{\beta n} \gamma$$

şeklinde de ifade edilir.

İleride kullanacağımız dönüşümler için, aşağıda tanımlayacağımız Wiener uzayı büyük bir öneme sahiptir.

2.5.3. Wiener Uzayı ve Özellikleri

Wiener uzayı periyodik fonksiyonlar ve Poisson toplam formülünün işlevinden gelir. Periyodizasyon Gabor çerçevelerinde doğal olarak ortaya çıkar. Wiener uzayı, $L^2(\mathbb{R}^d)$ üzerindeki zaman-frekans analizi için pencere fonksiyonlarının bir sınıfı olarak kullanılabilir.

Tanım 2.5.3.1 *$g \in L^\infty(\mathbb{R}^d)$ olsun.*

$$||g||_W = \sum_{n \in \mathbb{Z}^d} ess \sup_{x \in [0,1]^d} |g(x+n)| < \infty$$

koşulunu sağlayan fonksiyonların oluşturduğu uzay Wiener uzayı olarak adlandırılır ve $W = W(\mathbb{R}^d)$ ile gösterilir.

Bu uzayın sürekli fonksiyonların oluşturduğu alt uzayı $W_0(\mathbb{R}^d)$ olarak gösterilir. Bu uzay Wiener tarafından tanıtılmıştır [21].
$C_c(\mathbb{R}^d) \subseteq W(\mathbb{R}^d) \subseteq L^p(\mathbb{R}^d)$ yoğun bir alt uzayıdır. $1 \leq p < \infty$ ve $Q =: [0,1]^d$ olsun.

$$\begin{aligned}
||f||_p &= \left(\sum_{n \in \mathbb{Z}^d} \int_{n+Q} |f(x)|^p dx \right)^{1/p} \\
&\leq \left(\sum_{n \in \mathbb{Z}^d} ||f.T_n \chi_Q||_\infty^p \right)^{1/p} \\
&\leq \sum_{n \in \mathbb{Z}^d} ||f.T_n \chi_Q||_\infty = ||f||_W
\end{aligned}$$

eşitliği elde edilir.

Ayrıca, eğer ϕ kompakt destekli sınırlı fonksiyon olmak üzere

$$\int_{\mathbb{R}^d} ||f.T_x\phi||_\infty dx$$

integrali, W üzerinde normdur.

Wiener uzayı Gabor çerçevesinin varlığı için kullanılır. Eğer $g \in W(\mathbb{R}^d)$ ve $\alpha, \beta > 0$ yeterince küçük ise $\mathscr{G}(\gamma, \alpha, \beta)$, $L^2(\mathbb{R}^d)$ için bir çerçevedir.

Aşağıdaki lemmayı Zak dönüşümü için kullanacağız.

Lemma 2.5.3.2 *$g \in W(\mathbb{R}^d)$ ve $\gamma > 0$ olmak üzere hemen hemen her $x, \omega \in \mathbb{R}^d$ için*

$$ess \sup_{x\in\mathbb{R}^d} \sum_{n\in\mathbb{Z}^d} |f(x-\alpha n)| \leq \left(\frac{1}{\alpha}+1\right)^d ||f||_W$$

olur.

2.6. ZAK DÖNÜŞÜMÜ VE ZAMAN-FREKANS ANALİZİ

Zak dönüşümü harmonik analizde, 1950'de Gelfand tarafından ortaya atılan ve Weil-Brezin Dönüşümü olarak da bilinen bir dönüşümdür. Rus matematik literatüründe **Gelfand dönüşümü** olarak da bilinir. Genel olarak Zak dönüşümü Gabor temsil probleminde çalışmak için kullanılır. Bazı durumlarda Gabor çerçevelerinin tamlığı ve dikliğinin araştırılmasında kullanılır. Zak dönüşümünün önemi, çerçeve operatörünün spektrumu ve terslenebilirliği için kullanılır.

Tanım 2.6.1 (Zak Dönüşümü) *Bir $\alpha > 0$, parametresi ve f, $\mathbb{R}^{2d}$ üzerinde tanımlı bir fonksiyon olsun. f fonksiyonunun $\mathscr{Z}_\alpha f$ Zak dönüşümü, $(x,\omega) \in \mathbb{R}^{2d}$ olmak üzere*

$$\mathscr{Z}_\alpha f(x,\omega) = \sum_{k\in\mathbb{Z}^d} f(x-\alpha k)e^{2\pi i\alpha k\omega}$$

şeklinde ifade tanımlanır.
Öte yandan $T_{\alpha k}f(x) = f(x-\alpha k)$ ve $M_{\alpha k}T_{\alpha k}f(x) = f(x-\alpha k)e^{2\pi i\alpha k\omega}$ olduğundan

$$\mathscr{Z}_\alpha f(x,\omega) = \sum_{k\in\mathbb{Z}^d} f(x-\alpha k)e^{2\pi i\alpha k\omega} = \sum_{k\in\mathbb{Z}^d} M_{\alpha k}T_{\alpha k}f(x)$$

eşitliği ile de verilir.
Örnek:
$[0,\alpha]^d$ kübü Q_α ve $Q = Q_1 = [0,1]^d$ birim küp olarak gösterilsin. $d = 1$ boyutunda, $\chi_{[0,\alpha)}$ karakteristik fonksiyonunun Zak dönüşümü

$$\mathscr{Z}_\alpha \chi_{[0,\alpha)}(x,\omega) = \sum_{k\in\mathbb{Z}^d} \chi_{[0,\alpha)}(x-\alpha k)e^{2\pi i\alpha k\omega} = e^{2\pi i\alpha(\frac{x}{\alpha})\omega}$$

şeklindedir. Benzer şekilde daha büyük boyutlardaki χ_{Q_α} karakteristik fonksiyonunun Zak dönüşümü ise, $(x,\omega) \in Q_\alpha \times Q_{1/\alpha}$ olmak üzere

$$\mathscr{Z}_\alpha \chi_{Q_\alpha}(x,\omega) = 1$$

şeklindedir.

2.6.1. Zak Dönüşümünün Özellikleri

Lemma 2.6.1.1 1. *Eğer $f \in L^1(\mathbb{R}^d)$ ise, $\mathscr{Z}_\alpha f \in L^1(Q_\alpha \times Q_{1/\alpha})$ olur.*

2. *Eğer $f \in W(\mathbb{R}^d)$ ise, $\mathscr{Z}_\alpha f \in L^\infty(\mathbb{R}^{2d})$ olur.*

3. *Eğer $f \in W_0(\mathbb{R}^d)$ ise, $\mathscr{Z}_\alpha f, \mathbb{R}^{2d}$ de süreklidir.*

4. *Eğer $f \in L^2(\mathbb{R}^d)$ ise, $\mathscr{Z}_\alpha f$ hemen hemen heryerde tanımlı ve hemen her $x \in \mathbb{R}^d$ için $\mathscr{Z}_\alpha f \in L^2(Q_{1/\alpha}, d\omega)$ sağlanır.*

İspat.

1. (1.18) kullanılırsa, her $\omega \in \mathbb{R}^d$ için

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^d} |\mathscr{Z}_\alpha f(x,\omega)|dx &= \int_{Q_\alpha} \left| \sum_{k\in\mathbb{Z}^d} f(x-\alpha k).e^{2\pi i\alpha k\omega} \right| dx \\ &\leq \int_{Q_\alpha} \sum_{k\in\mathbb{Z}^d} |f(x-\alpha k)|dx \\ &= ||f||_1\end{aligned}$$

olur ve buradan $\int_{Q_{1/\alpha}} \left(\int_{Q_\alpha} |\mathscr{Z}_\alpha f(x,\omega)|dx \right) d\omega \leq \alpha^{-d}||f||_1$ eşitsizliği elde edilir. Böylece

$$\int_{Q_\alpha \times Q_{1/\alpha}} |\mathscr{Z}_\alpha f(x,\omega)|dxd\omega < \infty$$

koşulu sağlandığından $\mathscr{Z}_\alpha f \in L^1(Q_\alpha \times Q_{1/\alpha})$ elde edilir.

2. Lemma 2.5.3.2 kullanarak,

$$\begin{aligned}|\mathscr{Z}_\alpha f(x,\omega)| &= \left| \sum_{k\in\mathbb{Z}^d} f(x-\alpha k).e^{2\pi i\alpha k\omega} \right| \\ &\leq \sum_{k\in\mathbb{Z}^d} |f(x-\alpha k)| \\ &\leq \sup \sum_{k\in\mathbb{Z}^d} |f(x-\alpha k)| \\ &\leq \left(\frac{1}{\alpha}+1\right)^d ||f||_W\end{aligned}$$

$\mathscr{Z}_\alpha f \in L^\infty(\mathbb{R}^{2d})$ elde edilir.

3. Verilen $\varepsilon > 0$ sayısı için bir $N > 0$ vardır ve

$$\sum_{|k|\leq N} ||f.T_x\chi_Q||_\infty < \frac{\varepsilon}{4}$$

olur. Öte yandan $\sum_{|k|\leq N} f(x-\alpha k)e^{2\pi i\alpha k\omega}$, $\mathbb{R}^{2d}$'nin kompakt kümelerinde düzgün süreklidir. Böylece bir $\delta > 0$ sayısı vardır ve $|x'-x|+|\omega'-\omega| < \delta$ için

$$\left| \sum_{|k|\leq N} f(x'-\alpha k)e^{2\pi i\alpha k\omega'} - \sum_{|k|\leq N} f(x-\alpha k)e^{2\pi i\alpha k\omega} \right| < \frac{\varepsilon}{2}$$

geçerlidir. O halde, $|x' - x| + |\omega' - \omega| < \delta$ için $|\mathscr{Z}_\alpha f(x', \omega') - \mathscr{Z}_\alpha f(x, \omega)| < \varepsilon$ elde edilir. Bu ise $\mathscr{Z}_\alpha f$'nın sürekli olmasıdır.

4. $f \in L^2(\mathbb{R}^d)$ ise $\sum_{k\in\mathbb{Z}^d} |f(x-\alpha k)|^2 < \infty$ sağlanır. (1.18)'den $\int_{\mathbb{R}^d} f(x-\alpha k)dx = \int_{Q_\alpha} \left(\sum_{k\in\mathbb{Z}^d} f(x+\alpha k)\right) dx$ olduğu biliniyor.
Böylece hemen her x için, $\{f(x-\alpha k)\}_{k\in\mathbb{Z}^d} \in \ell^2(\mathbb{R}^d)$ ise

$$\int_{Q_\alpha} \left(\sum_{k\in\mathbb{Z}^d} |f(x-\alpha k)|^2 \right) dx = \int_{\mathbb{R}^d} |f(x-\alpha k)|^2 dx < \infty$$

$$\begin{aligned}
\int_{Q_{1/\alpha}} |\mathscr{Z}_\alpha f(x,\omega)|^2 dx &= \int_{Q_{1/\alpha}} |\sum_{k\in\mathbb{Z}^d} f(x-\alpha k) e^{2\pi i \alpha k \omega}|^2 dx \\
&\leq \int_{Q_{1/\alpha}} \sum_{k\in\mathbb{Z}^d} |f(x-\alpha k)|^2 dx \\
&= ||f||_2^2
\end{aligned}$$

elde edilir. Böylece $\mathscr{Z}_\alpha f \in L^2(Q_{1/\alpha}, d\omega)$ ve $\mathscr{Z}_\alpha f$ hemen her yerde iyi tanımlıdır.

Yukarıda yorumlanan $\mathscr{Z}_\alpha$ için eğer $f \in L^2(\mathbb{R}^d), L^1(\mathbb{R}^d)$ veya $W(\mathbb{R}^d)$ (2.5.3.1) ise aşağıdaki özelllikler de sağlanır. Ayrıca $f \in W_0(\mathbb{R}^d)$ ise noktasaldır.

Lemma 2.6.1.2 (Zak Dönüşümünün Yarıperiyodikliği) *$n \in \mathbb{Z}^d$ olsun.*

1. $\mathscr{Z}_\alpha f\left(x, \omega + \dfrac{n}{\alpha}\right) = \mathscr{Z}_\alpha f(x,\omega)$
2. $\mathscr{Z}_\alpha f(x+\alpha n, \omega) = e^{2\pi i \alpha n \omega} \mathscr{Z}_\alpha f(x,\omega)$

İspat.

1.

$$
\begin{aligned}
\mathscr{Z}_\alpha f\left(x,\omega+\frac{n}{\alpha}\right) &= \sum_{k\in\mathbb{Z}^d} f(x-\alpha k)e^{2\pi i\alpha k\left(\omega+\dfrac{n}{\alpha}\right)} \\
&= \sum_{k\in\mathbb{Z}^d} f(x-\alpha k)e^{2\pi i\alpha k\omega}.e^{2\pi i\alpha k\dfrac{n}{\alpha}} \\
&= \sum_{k\in\mathbb{Z}^d} f(x-\alpha k)e^{2\pi i\alpha k\omega} \\
&= \mathscr{Z}_\alpha f(x,\omega)
\end{aligned}
$$

elde edilir.

2.

$$
\begin{aligned}
\mathscr{Z}_\alpha f\left(x+\alpha n,\omega\right) &= \sum_{k\in\mathbb{Z}^d} f(x+\alpha n-\alpha k).e^{2\pi i\alpha k} \\
&= \sum_{k\in\mathbb{Z}^d} f(x-\alpha\underbrace{(k-n)}_{\in\mathbb{Z}^d})e^{2\pi i\alpha(k+n-n)\omega} \\
&= \sum_{k\in\mathbb{Z}^d} f(x-\alpha(k-n)).e^{2\pi i\alpha(k-n)\omega}.e^{2\pi i\alpha n\omega} \\
&= \mathscr{Z}_\alpha f(x,\omega).e^{2\pi i\alpha n\omega}
\end{aligned}
$$

elde edilir.

Klasik Fourier analizinden Fourier dönüşümü ve Fourier dönüşümünün tersi arasındaki

$$\int_{\mathbb{R}^d} f(x)e^{-2\pi ix\omega}dx = \hat{f}(\omega) \tag{2.17}$$

$$\int_{\mathbb{R}^d} \hat{f}(\omega)e^{2\pi ix\omega} = f(x) \tag{2.18}$$

ilişki, benzer şekilde Zak dönüşümü için de verilebilir.

Lemma 2.6.1.3 (Zak Dönüşümü için Ters Dönüşüm Formülü) *$f\in L^1(\mathbb{R}^d)$ olsun. Hemen her $x,\omega\in\mathbb{R}^d$ için*

$$f(x) = \alpha^d\int_{Q_{1/\alpha}} \mathscr{Z}_\alpha f(x,\omega)d\omega \tag{2.19}$$

$$\hat{f}(\omega) = \int_{Q_\alpha} \mathscr{Z}_\alpha f(x,\omega) e^{-2\pi i x\omega} dx \tag{2.20}$$

geçerlidir.

İspat. Lemma 2.6.1.1'deki (1) kullanılırsa, hemen her $x \in \mathbb{R}^d$ için $\mathscr{Z}_\alpha f(x,\omega) \in L^1(Q_{1/\alpha}, d\omega)$ bulunur.

$$\begin{aligned}
\int_{Q_{1/\alpha}} \mathscr{Z}_\alpha f(x,\omega) &= \int_{Q_{1/\alpha}} \left(\sum_{k\in\mathbb{Z}^d} f(x-\alpha k) e^{2\pi i \alpha k\omega} \right) d\omega \\
&\overset{\text{Fubini}}{=} \sum_{k\in\mathbb{Z}^d} \int_{Q_{1/\alpha}} f(x-\alpha k) e^{2\pi i \alpha k\omega} d\omega \\
&= \alpha^{-d} f(x)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\int_{Q_\alpha} \mathscr{Z}_\alpha f(x,\omega) e^{-2\pi i x\omega} d\omega &\overset{(1.18)}{=} \int_{Q_\alpha} \left(\sum_{k\in\mathbb{Z}^d} f(x-\alpha k) e^{-2\pi i \omega(x-\alpha k)} \right) dx \\
&= \sum_{k\in\mathbb{Z}^d} \int_{Q_\alpha} f(x-\alpha k) e^{-2\pi i \omega(x-\alpha k)} dx \\
&= \hat{f}(\omega)
\end{aligned}$$

elde edilir.

2.6.2. Zak Dönüşümü ve Zaman-Frekans Ötelemeleri

Lemma 2.6.2.1 $(u,v) \in \mathbb{R}^{2d}$ *olsun.*

$$\mathscr{Z}_\alpha(T_u M_v f)(x,\omega) = e^{2\pi i v(x-u)} \mathscr{Z}_\alpha f(x-u, \omega - v) \tag{2.21}$$

eşitliği geçerlidir.

İspat. Öteleme ve modülasyon eşitlikleri formüllerinden,

$$T_u M_v f(x,\omega) = (M_v f)(x-u,\omega) = e^{2\pi i v(x-u)} f(x-u)$$

olduğu biliniyor. Böylece

$$\begin{aligned}
\mathscr{Z}_\alpha(T_u M_v f)(x,\omega) &= \sum_{k\in\mathbb{Z}^d} f(x-u-\alpha k).e^{2\pi i v(x-u-\alpha k)}.e^{2\pi i v k \omega} \\
&= \sum_{k\in\mathbb{Z}^d} f(x-u-\alpha k).e^{2\pi i v(x-u)}.e^{2\pi i \alpha k(\omega-v)} \\
&= e^{2\pi i v(x-u)} \sum_{k\in\mathbb{Z}^d} f(x-u-\alpha k)e^{2\pi i \alpha k(\omega-v)} \\
&= e^{2\pi i v(x-u)}\mathscr{Z}_\alpha f(x-u,\omega-v)
\end{aligned}$$

elde edilir.

2.6.3. Zak Dönüşümü ve Fourier Dönüşümü

Fourier dönüşümü ve Zak dönüşümü arasındaki ilişki aşağıdaki önerme ile verilir.

Önerme 2.6.3.1 *$f \in W(\mathbb{R}^d), \hat{f} \in W(\mathbb{R}^d)$ ve $f, \hat{f}$ sürekli olmak üzere*

$$\mathscr{Z}_\alpha f(x,\omega) = \alpha^{-d} e^{2\pi i x\omega}\mathscr{Z}_{1/\alpha}\hat{f}(\omega,-x)$$

Özel olarak $\alpha = 1$ için

$$\mathscr{Z}_1\hat{f}(x,\omega) = e^{2\pi i x\omega}\mathscr{Z}_1(-\omega,x)$$

eşitliği sağlanır.

İspat. $If(x) = f(-x)$ yansıma operatörü olsun. $g(t) = M_\omega T_x If(t) = e^{2\pi i\omega t} f(x-t)$ denirse g fonksiyonuna (1.18) uygulanırsa,

$$\begin{aligned}
\alpha^d \mathscr{Z}_\alpha f(x,\omega) &= \alpha^d \sum_{k\in\mathbb{Z}^d} f(x-\alpha k) e^{2\pi i\alpha k\omega} \\
&= \alpha^d g(\alpha k) \\
&= \sum_{k\in\mathbb{Z}^d} \hat{g}(k/\alpha) \\
&= \sum_{k\in\mathbb{Z}^d} (\widehat{M_\omega T_x I f})(k/\alpha) \\
&= \sum_{k\in\mathbb{Z}^d} T_\omega M_{-x} F \hat{f}(k/\alpha) \\
&= \sum_{k\in\mathbb{Z}^d} \hat{f}(\omega - \frac{k}{\alpha}) e^{-2\pi i x k/\alpha} e^{2\pi i x\omega} \\
&= e^{2\pi i x\omega} \mathscr{Z}_{1/\alpha} \hat{f}(\omega,-x)
\end{aligned}$$

elde edilir. Eğer $f,\hat{f} \in W(\mathbb{R}^d)$ yerine $f,\hat{f} \in L^1(\mathbb{R}^d)$ alınırsa hemen her yerde

$$\mathscr{Z}_\alpha f(x,\omega) = \alpha^{-d} e^{2\pi i x\omega} \mathscr{Z}_{1/\alpha} \hat{f}(\omega,-x)$$

eşitliği sağlanır.

2.6.4. Zak Dönüşümü ve Gabor Çerçevesi

Zak dönüşümü zaman-frekans analizindeki pek çok sorun için uygun çözümler sağlar. Bu bölümde Gabor çerçeve operatörü $S_{g,\gamma}$ ile Zak dönüşümü arasındaki ilişkiyi inceleyeceğiz. Aşağıda vereceğimiz teoremin standart ispatı [13], [17], [19] kaynaklarında bulunur.

Teorem 2.6.4.1 *$g,\gamma \in L^2(\mathbb{R}^d)$ ve $\alpha\beta = 1$ olsun. Bu durumda*

$$\mathscr{Z}_\alpha(S_{g,\gamma} f) = \alpha^d \overline{\mathscr{Z}_\alpha g} \mathscr{Z}_\alpha \gamma \mathscr{Z}_\alpha f \tag{2.22}$$

eşitliği geçerlidir.

İspat. $\beta = 1/\alpha$ ve $\mathscr{Z}_\alpha(T_{\alpha k} M_{n/\alpha} f)(x,\omega) = e^{2\pi i n x/\alpha} e^{-2\pi i\alpha k\omega} \mathscr{Z}_\alpha f(x,\omega)$ eşitliğini kullanırsak,

$$\mathscr{Z}_\alpha(T_{\alpha k} M_{\beta n} g)(x,\omega) = e^{2\pi i n x/\alpha} e^{-2\pi i\alpha k\omega} \mathscr{Z}_\alpha g(x,\omega)$$

elde edilir. Böylece

$$\begin{aligned}\mathscr{Z}_\alpha(S_{g,\gamma}f)(x,\omega) &= \sum_{k,n\in\mathbb{Z}^d} \langle f, T_{\alpha k}M_{n/\alpha}g\rangle \mathscr{Z}_\alpha(T_{\alpha k}M_{n/\alpha}\gamma)(x,\omega) \\ &= \sum_{k,n\in\mathbb{Z}^d} \alpha^d\, \mathscr{Z}_\alpha f, \mathscr{Z}_\alpha(T_{\alpha k}M_{n/\alpha}g)\rangle \mathscr{Z}_\alpha(T_{\alpha k}M_{n/\alpha}\gamma)(x,\omega)\end{aligned}$$

$$= \alpha^d \sum_{k,n\in\mathbb{Z}^d} \left(\int\int_{Q_\alpha\times Q_{1/\alpha}} \mathscr{Z}_\alpha f(x,\omega)\overline{\mathscr{Z}_\alpha g(x,\omega)} e^{-2\pi i(nx/\alpha-\alpha k\omega)} dx d\omega \right) \times e^{2\pi i(nx/\alpha-\alpha k\omega)} \mathscr{Z}_\alpha \gamma(x,\omega)$$

elde edilir. Burada $\{e^{2\pi i(nx/\alpha-\alpha k\omega)} : k,n\in\mathbb{Z}^d\}$, $L^2(Q_\alpha\times Q_{1/\alpha})$ için ortonormal baz olduğundan, $\sum_{k,n\in\mathbb{Z}^d}$ toplamı, $L^2(Q_\alpha\times Q_{1/\alpha})$'da $\mathscr{Z}_\alpha f.\overline{\mathscr{Z}_\alpha g}$ çarpımının ortonormal açılımıdır. Böylece

$$\mathscr{Z}_\alpha(S_{g,\gamma}f) = \alpha^d\, \mathscr{Z}_\alpha\gamma\overline{\mathscr{Z}_\alpha g}\mathscr{Z}_\alpha f$$

elde edilir.

3. MALZEME VE YÖNTEM

Bu tez çalışmasında Fourier analizi ve zaman-frekans analizine ilişkin tanım ve teoremleri kullanılmıştır. Özellikle Fourier dönüşümü yerine kısa-zamanlı Fourier dönüşümü temel rol oynamaktadır. Hilbert uzayı ve Hilbert uzayının özelliklerinden gelen önemli ve güçlü teoremler yöntem olarak kullanılmıştır. Konuyla ilgili literatürde çeşitli kaynaklar tarandı. Kitap ve makaleler okunarak okuyucu tarafından daha rahat anlaşılması için gerekli düzenlemeler yapıldı. Çalışmanın temeli Karlheinz Gröchenig'nin "Foundations of Time-Frequency Analysis" adlı kitabına dayanmaktadır. Özellikle soyut harmonik analiz bakış açısıyla bazı teoremler detaylandırılmıştır.

4. BULGULAR

Bu tez boyunca zaman-frekans analizi üzerinde yoğunlaşılmıştır. Klasik Fourier analizinin çözümsüz kaldığı bazı problemler zaman-frekans analizindeki yöntemler aracılığıyla çözülebilir. Zaman-frekans analizinde temel rol oynayan kısa-zamanlı Fourier analizi, daha lokal alanda çalışmamızı sağlar ve sonuçlar hakkında daha net bilgi verir. Dolayısıyla klasik Fourier analizinde f ve $\hat{f}$ Fourier dönüşümüne aynı anda bakılarak yorum yapılamaması gibi durumlar, kısa-zamanlı Fourier dönüşümü ile giderilebilir. Bir başka ifadeyle, örneğin sınırlandırılmış frekans bilgisi elde edilmek istenirse klasik Fourier dönüşümü yeterli olmayacaktır. Bu durumda kısa-zamanlı Fourier dönüşümü kullanılacaktır.

Zaman-frekans analizinin amacı, insan kulağı 20-20000 Hertz aralığındaki sesleri duyacağından, insan kulağını taklit ederek sinyallerin ortak zaman-frekans temsillerini aramaktır. Bir Hertz, bir olayın saniyede bir tekrarlandığı anlamına gelir. Frekansı ölçmenin bir yolu ise, olayın kendini tekrar etmesi arasında geçen süreyi tayin etmektir. Frekans bu sürenin çarpmaya göre tersi olduğundan dolaylı olarak elde edilebilir. Arzu edilen bir zaman-frekans temsili, keyfi bir x anında ortaya çıkan ω frekansı ile ilgili doğrudan bilgi verir. Örneğin, müzikte partisyon zaman-frekans analizindeki birçok diğer kavramı resmetmek için yararlı bir modeldir. Partisyonun yazımı f sinyalinin ilgilenilen zaman-frekans bilgisi cinsinden analiz edilmesine karşılık gelir. Diğer taraftan müziğin çalınması ise orijinal f sinyalinin zaman-frekans temsilinden sentezlenmesi ya da yeniden kurulmasına karşılık gelir. Benzer şekilde sinyal analizi üç ana adımdan oluşur. Sinyali almak, sinyalin analizi ve sinyalin sentezlenmesi işlemidir.

Bu tez çalışmasında teorik olarak zaman-frekans analizinde temel rol oynayan analiz ve sentez operatörleri ve özellikleri incelendi. Farklı durumlarda zaman-frekans analizinin ne olabileceği incelendi. Çerçeve teorisi ve özellikle Gabor tanıtıldı. Buna ilişkin olarak Zak dönüşümü verildi. Zak dönüşümünün Fourier ve Gabor dönüşümleri ile arasındaki ilişkilere yer verildi.

Ülkemizde matematiksel olarak çok fazla çalışılmamış, uygulama alanı çok güçlü olan, zaman-frekans analizinin teorik alt yapısı tanıtıldı ve konu ile ilgili kaynaklar taranarak yeni ve modern bir konunun daha iyi anlaşılması sağlanarak Türkçeye kazandırıldı.

5. TARTIŞMA VE SONUÇ

Klasik Fourier analizinin iyi bilinmesine karşın kısa-zamanlı Fourier analizi ülkemizde ne yazık ki çok iyi bilinmemektedir. Fourier analizinin lokal olarak çalışılması olan zaman-frekans analizi, mühendislik, iletişim, tıp, astronomi gibi disiplinler arası çalışmalara olanak sağlar. Teorik çalışmalar, zaman-frekans analizinin günümüzdeki uygulamaları olarak hayatımızı kolaylaştıran teknolojik araçlara dönüşmüştür. Özellikle görüntü analizi ve görüntü sıkıştırma, nesne tanımlama, bilgisayarda görüntüleme gibi alanlarda kullanılmıştır. Tıbbi tanımlamalarda önemli rol oynamıştır. Örneğin, dokunmatik ekranlar, mobil telefonlar, MR cihazları, fotoğraf makineleri gibi cihazlarda zaman-frekans analizi ile ilişkili teorik çalışmalar önemli rol oynar.

Zaman-frekans analizi, matematiksel olarak oldukça zengin araştırma konusu sunar. Modülasyon uzayları, pseudodiferansiyel operatörleri gibi geniş ve önemli çalışma alanlarının yanı sıra çerçeve (frame) teorisi de bu alanın önemli ve özel konusudur.

Bu tez çalışmasında tanım kümesi olarak $\mathbb{R}^d$ alınmıştır. Ancak soyut harmonik analiz bakışıyla lokal kompakt gruplarda veya özel olarak Heisenberg gruplarda bu çalışmalar incelenebilir. Yine $L^2(\mathbb{R}^d)$ Hilbert uzayı için yapılan çalışmalar $L^p(\mathbb{R}^d)$, $1 \leq p \leq \infty$ için de araştırılabilir.

Oldukça zengin çalışma alanına sahip olan zaman-frekans analizinde teorik ve uygulama açısından önemli sonuçlar elde edilebilecek açık sorular mevcuttur ve popüler bir konu olarak çalışmalar devam etmektedir.

KAYNAKLAR

[1] Gröchenig, Karlheinz., 2001, *Foundations of Time-Frequency Analysis.*, I. Title. II. Series,(ISBN 978-1-4612-6568-9)

[2] Debnath, Lokenath., 2002, *Wavelet Transforms and Their Applications.*, I. Title., (ISBN 978-1-4612-6610-5)

[3] Daubechies, I., 1992, *Ten Lectures on Wavelets, NSF-CBMS Regional Conference Series in Applied Math.* 61,SIAM Publications, Philadelphia, PA, 1992.

[4] H. G. Feichtinger and Gröchenig, Karlheinz., 1989, *Banach spaces related to integrable group representations and their atomic decompositions I.*, J. Funct. Anal. ,(ISBN 307–340.)

[5] P. Casazza and 0. Christensen., 2000, *Approximation of the inverse frame operator and applications to Weyl-Heisenberg frames.*,Approx. Theory, (ISBN 103(3):338-356, 2000.)

[6] W.Beckner., 1975, *Inequalities in Fourier Analysis*, Ann. of Math.(2),102 (1), (ISBN 159-182, 1975.)

[7] D.F.Walnut., 1992, *Continuity properties of the Gabor frame operator.*, J. Math. Anal. Appl., 165(2): (ISBN 479-504, 1992.)

[8] Richard R.Goldberg, 1970,*Fourier Transforms.*, Cambridge University Press, (ISBN 6-17, 1970.)

[9] Y. Katznelson., 1968, *An introduction to harmonic analysis.*, John Wiley and Sons, New York, 1968.

[10] E. H. Lieb., 1990, *Integral bounds for radar ambiguity functions and Wigner distributions.* , J. Math. Phys., 31(3):594-599, 1990.

[11] Gröchenig, Karlheinz., 1998, *Aspects of Gabor analysis on locally compact abelian groups.*, In Gabor analysis and algorithms, pages 211-231.,Birkhiiuser

[12] P. Casazza., 2000, *The art of frame theory.* , Taiwanese J. Math., 2000. to appear.

[13] I. Daubechies., 1990, *The wavelet transform, time-frequency localization and signal analysis.*, IEEE Trans. Inform. Theory, 36(5):961-1005, 1990.

[14] I. Daubechies and A. Grossmann., 1988, *Frames in the Bargmann space of entire functions.*,Comm. Pure Appl. Math., 41(2):151-164, 1988.

[15] R. J. Duffin and A. C. Schaeffer., 1988, *A class of nonharmonic Fourier series.*, Trans. Amer. Math. Soc., 72:341-366, 1952.

[16] D. Han and D. Larsen., *Frames, bases, and group representations.*, Memoirs of Amer. Math. Soc., to appear.

[17] C. E. Heil and D. F. Walnut., 1989, *Continuous and discrete wavelet transforms.*, SIAM Rev., 31(4):628-666, 1989.

[18] R. M. Young., 1980, *An introduction to nonharmonic Fourier series.*, Academic Press Inc. Harcourt Brace Jovanovich Publishers, New York, 1980.

[19] A. J. E. M. Janssen., 1982, *Bargmann transform, Zak transform, and coherent states.*, J. Math. Phys., 23(5):720-731, 1982.

[20] J. B. Conway., 1990, *A course in functional analysis.*, Springer-Verlag, New York, second edition, 1990.

[21] N. Wiener., 1932, *Tauberian theorems.*, Ann. Math., 33:1-100, 1932.

ÖZGEÇMİŞ

Kişisel Bilgiler	
Adı Soyadı	Sevil KELEŞ
Doğum Yeri	Kartal
Doğum Tarihi	09.12.1986
Uyruğu	X T.C. ☐ Diğer:
Telefon	0536 468 48 02
E-Posta Adresi	sevilkeles@outlook.com
Web Adresi	

Eğitim Bilgileri	
Lisans	
Üniversite	İstanbul Üniversitesi
Fakülte	Fen Fakültesi
Bölümü	Matematik
Mezuniyet Yılı	2014

Yüksek Lisans	
Üniversite	İstanbul Üniversitesi
Enstitü Adı	Fen Bilimleri Enstitüsü
Anabilim Dalı	Matematik
Programı	Matematik
Mezuniyet Tarihi	2019