



T.C.  
İSTANBUL ÜNİVERSİTESİ  
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ



DOKTORA TEZİ

ZAMAN GECİKMELİ VE BELİRSİZ YAPAY SİNİR AĞLARININ  
KARARLILIK ANALİZİ

ÖZLEM FAYDASIÇOK

Matematik Anabilim Dalı

Matematik Programı

DANIŞMAN

Dr. Öğr. Üyesi Cemal ÇİÇEK

II. DANIŞMAN

Prof. Dr. Sabri ARIK

Kasım, 2019

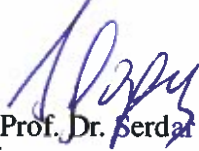
İSTANBUL

Bu çalışma 25.11.2019 tarihinde aşağıdaki jüri tarafından Matematik Anabilim Dalı Matematik Programında Doktora Tezi olarak kabul edilmiştir.

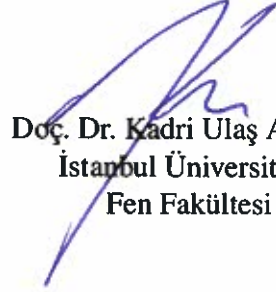
### Tez Jürisi



Dr. Öğr. Üyesi Cemal ÇİÇEK (Danışman)  
İstanbul Üniversitesi  
Fen Fakültesi



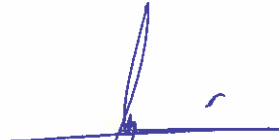
Prof. Dr. Serdar ÖZOĞUZ  
İstanbul Teknik Üniversitesi  
Elektrik-Elektronik Fakültesi



Doç. Dr. Kadri Ulaş AKAY  
İstanbul Üniversitesi  
Fen Fakültesi



Doç. Dr. Rüya ŞAMLI  
İstanbul Üniversitesi-Cerrahpaşa  
Mühendislik Fakültesi



Dr. Öğr. Üyesi Beran PİRİNÇCI  
İstanbul Üniversitesi  
Fen Fakültesi

20.04.2016 tarihli resmi gazetede yayımlanan Lisansüstü Eğitim ve Öğretim Yönetmeliğinin 9/2 ve 22/2 maddeleri gereğince; Bu Lisansüstü teze, İstanbul Üniversitesi'nin abonesi olduğu intihal yazılım programı kullanılarak Fen Bilimleri Enstitüsü'nün belirlemiş olduğu ölçütlere uygun rapor alınmıştır.

## ÖNSÖZ

Öncelikle, doktora çalışmalarım sırasında desteğini esirgemeyen değerli danışman hocam Dr. Öğr. Üyesi Cemal ÇİÇEK'e çok teşekkür ederim.

Ayrıca; tüm doktora sürecimde sabırla verdiği emek ve desteklerinden dolayı sayın hocam ve doktora ikinci danışmanım Prof. Dr. Sabri ARIK'a içten dileklerle teşekkür ederim.

Son olarak, çalışmalarım sırasında her zaman yanımda olan ve her türlü fedakarlığı gösteren sevgili eşim Cem Faydasıçok, ailem ve manevi desteğim olan oğullarım Emir ile Yaman'a çok teşekkür ederim.

Kasım, 2019

ÖZLEM FAYDASIÇOK

# İÇİNDEKİLER

	Sayfa No
ÖNSÖZ .....	iv
İÇİNDEKİLER .....	v
SİMGE VE KISALTMA LİSTESİ .....	vi
ÖZET .....	viii
SUMMARY .....	1
1. GİRİŞ .....	1
2. GENEL KISIMLAR .....	3
2.1. MATRİSLER VE VEKTÖRLER .....	3
2.2. ÇOKLU ZAMAN GECİKMELİ YAPAY SİNİR AĞI MODELİ .....	4
3. MALZEME VE YÖNTEM .....	8
4. ÇOKLU ZAMAN GECİKMELİ VE BELİRSİZ YAPAY SİNİR AĞI MODELİNİN KARARLILIK ANALİZİ .....	12
5. AYRIK ZAMAN GECİKMELİ VE BELİRSİZ YAPAY SİNİR AĞI MODELİNİN KARARLILIK ANALİZİ .....	37
6. BULGULAR .....	47
7. TARTIŞMA VE SONUÇ .....	76
ÖZGEÇMİŞ .....	83

## SİMGE VE KISALTMA LİSTESİ

Simgeler	Açıklama
$A^T$	: $A$ matrisinin transpozu
$A^{-1}$	: $A$ matrisinin tersi
$ A $	: $A$ matrisinin mutlak değeri
$\lambda_m(A)$	: Simetrik $A$ matrisinin en küçük özdeğeri
$\lambda_M(A)$	: Simetrik $A$ matrisinin en büyük özdeğeri
$A > 0$	: $A$ matrisi simetrik ve pozitif tanımlı
$D = \text{diag}(d_k)$	: $k$ elemanlı diagonal bir $D$ matrisi
$R^k$	: $k$ boyutlu reel sayılar kümesi
$C^0$	: Sürekli fonksiyonlar kümesi
$ x $	: $x$ vektörünün mutlak değeri

## ÖZET

### DOKTORA TEZİ

#### ZAMAN GECİKMELİ VE BELİRSİZ YAPAY SINIR AĞLARININ KARARLILIK ANALİZİ

ÖZLEM FAYDASIÇOK

İstanbul Üniversitesi

Fen Bilimleri Enstitüsü

Matematik Anabilim Dalı

Danışman: Dr. Öğr. Üyesi Cemal ÇİÇEK

II. Danışman: Prof. Dr. Sabri ARIK

Bu doktora tez çalışmasında, ağ parametreleri belirsizlik içeren çoklu zaman gecikmeli ve ayırık zaman gecikmeli yapay sinir ağı modellerinin robust asimtotik kararlılığının Lyapunov analizi gerçekleştirilmiştir. Homeomorfizm ve Lyapunov kararlılık teoremleri yardımıyla gecikmeli yapay sinir ağlarının denge noktasının varlığını, tekliliğini ve global asimtotik kararlılığını sağlayan yeni yeterli koşullar elde edilmiştir. Bu kararlılık koşulları elde edilirken, yapay sinir ağına ait belirsiz sistem matrisleri içi yeni bir üst norm sınırı geliştirilmiş ve üst norm sınırı sayesinde ayırık zaman gecikmeli yapay sinir ağlarının robust kararlılığını sağlayan yeni koşullar elde edilmiştir. Kararlılık koşullarının elde edilmesinde Lipschitz ve monoton artan aktivasyon fonksiyonları kullanılmıştır. Bu çalışmada elde edilen robust kararlılık koşulları özellikle iki açıdan önemli üstünlüklere sahiptir: Birincisi, bu yeni koşulların zaman gecikmelerinden bağımsız olarak ifade edilebilmiş olmalarıdır. İkincisi ise, kararlılık sonuçlarının sadece yapay sinir ağı parameterelerine bağlı olarak ifade edilebilmeleridir. Bu iki önemli üstünlük, sunulan kararlılık koşullarının geçerliliğini kolayca test edilmesine olanak sağlar. Bu tezin son aşamasında ise, bu tez kapsamında edilen koşulların daha önce literatürde yayınlanmış sonuçlara göre üstünlüklerini göstermek için sayısal örnekler yardımıyla bir karşılaştırma yapılmıştır.

Kasım 2019, 92 sayfa.

**Anahtar kelimeler:** Gecikmeli yapay sinir ağları, kararlılık analizi, Lyapunov teoremleri, matris teorisi.

## SUMMARY

### Ph.D. THESIS

#### STABILITY ANALYSIS OF UNCERTAIN NEURAL NETWORKS WITH TIME DELAYS

ÖZLEM FAYDASIÇOK

İstanbul University

Institute of Graduate Studies in Sciences

Department of Mathematics

Supervisor: Dr. Öğr. Üyesi Cemal ÇİÇEK

Co-Supervisor: Prof. Dr. Sabri ARIK

In this thesis, we have carried out the Lyapunov stability analysis of neural systems possessing multiple and discrete time delays with uncertain parameter values. By using the Homeomorphism and Lyapunov stability theorems, we have obtained new results for the existence and uniqueness and global asymptotic stability equilibrium point for various classes of dynamical neural networks. When obtaining some of stability results of this thesis, we have derived a novel and improved upper bound norm of uncertain system matrices of neural networks. After introducing an alternative novel upper bound norm, we have obtained new sufficient criteria for neural networks including discrete and multiple time delays. In establishing the obtained stability results, Lipschitz and monotonically increasing activation functions have been used. The conditions presented in this thesis have two important advantages over robust stability of neural networks. Firstly, stability criteria presented in the thesis are independently of time delay parameters. Secondly, these stability results can only be stated in terms of the parameters of neural networks. These advantages of the results provide us to easily test the established stability conditions. Finally, we have compared our results with the previous literature results by studying some constructive examples to indicate the advantages of the proposed stability criteria.

Nov 2019, 92 pages.

**Keywords:** Delayed neural networks, stability analysis, Lyapunov theorems, matrix theory.



## 1. GİRİŞ

Dinamik yapay sinir ağıları son yıllarda, özellikle işaret işleme, görüntü işleme, kontrol teorisi, maliyet optimizasyonu, çağrışımlı bellek tasarımı ve örnek tanıma gibi pratik mühendislik problemlerinin çözümlerinde yaygın olarak kullanılmaktadır. Dinamik yapay sinir ağlarının bu tür mühendislik problemlerinin çözümlerinde başarılı sonuç verebilmesi için, uygulandığı problemin tipine uygun bir dinamik davranış sergilemesi gerekir. Genel olarak, işlenecek bilgi nöronların durumları ile temsil edildiğinden, tasarlanacak yapay sinir ağında yer alan nöronların durumlarının sabit değerlere yakınsaması istenir. Başka bir deyişle, bu tür problemlerde kullanılacak dinamik yapay sinir ağlarının kararlı denge noktalarına sahip olması gerekir. Son yıllarda, farklı matematiksel modeller ile tanımlanmış yapay sinir ağlarının kararlılık analizi üzerine çok sayıda araştırma ve çalışma yapılmıştır. Özellikle, yapay sinir ağlarının denge noktasının varlığı, teklifi ve global asimtotik kararlılığı ile ilgili literatürde önemli sayıda çalışma bulunmaktadır. Bu tür bir kararlılık analizi önemlidir çünkü, yapay sinir ağlarının kullanıldığı uygulama alanlarının çoğunda, denge noktasının ilk koşullardan bağımsız olarak her bir giriş için tek bir denge noktasına yakınsaması istenir.

Literatürde, ilk dinamik yapay sinir ağı modeli, Hopfield tarafından 1980'lerin başında geliştirilmiş olan ve gecikme parametreleri içermeyen Hopfield yapay sinir ağı modelidir. Bu yapay sinir ağı modelinin denge noktası için, kararlılık analizinin gerçekleştirildiği ve farklı kararlılık koşullarının elde edildiği çok sayıda yayın mevcuttur. Yapay sinir ağlarının kararlılık koşulları elde edilirken, öncelikle nöron çıkışı ile nöron durumu arasındaki ilişkiyi belirleyen doğrusal olmayan aktivasyon belirlenir, daha sonra da, bu aktivasyon fonksiyonuna bağlı olarak, nöronların ara bağlantı değerleri arasında kararlılığı sağlayacak matematiksel bir ilişki kurulur.

Son yıllarda dinamik yapay sinir ağlarının, elektronik devre elemanları kullanılarak VLSI teknolojisi yardımıyla donanımsal olarak da gerçekleştirildiği bilinmektedir. Yapay sinir ağlarının donanımsal gerçekleştirilmelerinde, her nöron işlemsel kuvvetlendirici, direnç ve kapasite içeren bir elektronik devre ile modellenmektedir. Ancak, bu durumda, nöron modellenmesinde kullanılan işlemsel kuvvetlendiricinin sonlu anahtarlama hızı nedeni ile

nöronlar arasındaki bilgi iletişim sürelerinde yapay sinir ağlarının dinamik davranışını önemli ölçüde etkileyebilecek gecikmeler oluşmaktadır. Bu nedenle, dinamik yapay sinir ağlarının dinamik davranışını tam olarak analiz edebilmek için bu gecikme parametrelerinin sistem modelinde yer alması gerekir. Bu şekilde modellenen sistemler zaman gecikmeli yapay sinir ağları olarak isimlendirilir.

Yapay sinir ağlarının donanımsal gerçeklenmeleri durumunda, kararlılık özelliklerinin belirlenmesinde etkili olan diğer bir faktör ise; nöronun elektronik devre modelinde kullanılan direnç ve kapasite değerlerinde gürültü gibi dış faktörler nedeniyle bu elemanların gerçek değerlerinde oluşan sapmalardır. Bu sapmalar sebebiyle, yapay sinir ağlarının dinamik davranışını doğrudan etkileyen parametre belirsizlikleri oluşmaktadır. Bu nedenle, dinamik yapay sinir ağlarının kararlılık analizinde parametre belirsizliklerinin de dinamik davranış üzerindeki etkisi dikkate alınarak robust kararlılık analizi gerçekleştirilmelidir.

Bu tez çalışmasının amacı, hem zaman gecikmelerinin hem de ara bağlantı değerlerinde meydana gelen belirsizliklerin, yapay sinir ağının matematiksel modelinde ifade edilecek şekilde, zaman gecikmeli ve parametere belirsizlikleri ile tanımlanmış yapay sinir ağlarının robust kararlılık analizini gerçekleştirerek bu alanda yeni sonuçlar elde etmektir. Bu amaçla, ilk olarak, bu tez kapsamında önemli bir araç olan matris-vektör teorisi ve bunlara ait bazı önemli özellikler verilecektir. Daha sonra, gecikmeli yapay sinir ağlarının en genel modeli olan doğrusal olmayan çoklu zaman gecikmeli yapay sinir ağının modeli ve bu modele ait gerekli varsayımlar verilecektir. Bir sonraki aşamada ise, yapay sinir ağlarının robust kararlılık analizinde kullanılacak bazı temel kurallar ve yöntemler verilecektir. Daha sonra ise, farklı iki model olan çoklu ve ayrık zaman gecikmeli yapay sinir ağı modellerinin robust kararlılık analizi gerçekleştirilecektir. Bu tezde son olarak, tez kapsamında elde edilmiş ve tamamı yayınlanmış robust kararlılık sonuçlarını, daha önce literatürde aynı yapay sinir ağı modelleri için elde edilmiş olan robust kararlılık sonuçları ile sayısal örnekler kullanarak karşılaştırılacaktır. Bu karşılaştırmalar yardımıyla, elde ettiğimiz kararlılık koşullarının, daha önce yayınlanmış kararlılık koşullarına yeni alternatif koşullar oluşturduğu gösterilmektedir.

## 2. GENEL KISIMLAR

### 2.1. MATRİSLER VE VEKTÖRLER

Matrisler ve vektörler ile bunlara ait özellikler dinamik yapay sinir ağlarının kararlılık analizinin gerçekleştirilmesinde önemli bir rol oynar. Çünkü, yapay sinir ağlarının denge noktasının kararlılık özellikleri esas olarak bu sinir ağlarının ara bağlantı matrislerine uygulanan bazı kısıtlara dayanır. Başka bir deyişle, ağ parametreleri arasında teşkil edilen bazı özel koşullar denge noktasının dinamik davranış özelliklerini belirler. Bu nedenle, bu tez çalışması kapsamında ihtiyaç duyulabilecek bazı matris ve vektör özellikleri incelenecektir.

Bu tezde şu notasyonlar ve tanımlar kullanılacaktır:  $A = (a_{kl})_{n \times n}$  matrisi  $n$  satır ve  $n$  sütundan oluşan ve elemanları  $a_{kl}$  olan bir kare matrisi temsil edecektir.  $A^T$ ,  $A$  matrisinin transpozunu ve  $A^{-1}$ ,  $A$  matrisinin tersini ifade eder.  $\lambda_k(A)$ ,  $A$  matrisinin  $k$ . özdeğeridir.  $\lambda_m(A)$  ve  $\lambda_M(A)$  sırasıyla  $A$  matrisinin en küçük ve en büyük özdeğerlerini temsil ederler.  $D = \text{diag}(d_k > 0)$ , elemanları  $d_k$  olan pozitif köşegen bir matrisi temsil eder.  $|A|$  matrisi,  $A$  matrisinin elemanlarının mutlak değerleri alındıktan sonra elde edilen matristir, yani,  $|A| = (|a_{kl}|)_{n \times n}$ . Eğer  $A$  matrisi simetrik ve bütün özdeğerleri pozitif ise  $A$  pozitif tanımlıdır ve  $A > 0$  ile gösterilir.  $A$  ve  $B$  reel matrisleri için  $A \preceq B$  gösterimi  $a_{kl} \leq b_{kl}$ , ( $k, l = 1, 2, \dots, n$ ) olduğunu ifade eder. Eğer  $A = (a_{kl})_{n \times n}$  matrisinin elemanları  $a_{kk} > 0$  ve  $a_{kl} \leq 0$  şeklinde tanımlanmış ve  $A$  matrisi pozitif tanımlı ise,  $A$  matrisi tekil olmayan M-matrisi olarak isimlendirilir.  $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)^T$  bir sütun vektörüdür.  $x^T$  ise  $x$  vektörünün transpozunu temsil eder ve bir satır vektörüdür.  $|x| = (|x_1|, |x_2|, \dots, |x_n|)$  şeklindedir.

Bu tez kapsamında, yapay sinir ağlarının kararlılık koşullarının ispatında matris ve vektör normları önemli bir rol oynayacaktır. Bu nedenle, literatürde yaygın olarak kullanılan temel vektör ve matris normları ile birlikte bazı özelliklerini vereceğiz.

$x$ ,  $n$  adet reel değerli elemanı olan bir vektör,  $y$ ,  $n$  adet reel değerli elemanı olan bir diğer vektör ve  $\gamma$  sabit bir sayı olsun.  $x$  vektörünün normu  $\|x\|$  ile gösterilir ve  $x$  vektörünün reel değerli bir fonksiyonudur. Bu fonksiyonun bir norm tanımlayabilmesi için aşağıdaki koşulları sağlaması gerekir (Horn ve Johnson , 1991):

(i)  $\|x\| > 0, \forall x \neq 0$  ve  $x = 0$  ise  $\|x\| = 0$ ,

(ii)  $\|x+y\| \leq \|x\| + \|y\|$ ,

(iii)  $\|\gamma x\| = |\gamma| \|x\|$ .

Yukarıdaki üç koşulu sağlayan ve literatürde yaygın olarak kullanılan norm fonksiyonlarından bir tanesi aşağıda verilmektedir (Horn ve Johnson , 1991) :

$$\|x\|_p = (|x_1|^p + |x_2|^p + \dots + |x_n|^p)^{\frac{1}{p}}, \quad 1 \leq p < \infty.$$

Yukarıdaki norm ifadesinden türetilen ve bu tezdeki sonuçların elde edilmesinde kullanılacak olan  $\|x\|_1$ ,  $\|x\|_2$  ve  $\|x\|_\infty$  vektör normları aşağıda verilmektedir (Horn ve Johnson , 1991) :

$$\|x\|_\infty = \max_{1 \leq k \leq n} |x_k|, \|x\|_1 = \sum_{k=1}^n |x_k| \text{ ve } \|x\|_2 = \sqrt{\sum_{k=1}^n x_k^2}.$$

Herhangi bir  $A = (a_{kl})_{n \times n}$  matrisi için ise norm ifadesi aşağıdaki ifade ile tanımlanmaktadır (Horn ve Johnson , 1991) :

$$\|A\| = \sup_{x \in R^n, x \neq 0} \frac{\|Ax\|}{\|x\|} = \sup_{\|x\|=1} \|Ax\|$$

Bu  $A$  matrisine ait birinci norm  $\|A\|_1$ , ikinci norm  $\|A\|_2$  ve sonsuz norm  $\|A\|_\infty$  aşağıdaki verilen şekilde elde edilmektedir (Horn ve Johnson , 1991) :

$$\|A\|_1 = \max_{1 \leq k \leq n} \sum_{l=1}^n |a_{lk}|, \|A\|_2 = [\lambda_M(A^T A)]^{1/2} \text{ ve } \|A\|_\infty = \max_{1 \leq k \leq n} \sum_{l=1}^n |a_{kl}|$$

## 2.2. ÇOKLU ZAMAN GECİKMELİ YAPAY SİNİR AĞI MODELİ

$n$  adet nöron içeren bir yapay sinir ağı modelinde eğer gecikme parametrelerinin sayısı  $n^2$  ise, bu yapay sinir ağı çoklu zaman gecikmeli yapay sinir ağı olarak isimlendirilir ve aşağıdaki diferansiyel denklemler ile tanımlanır :

$$\frac{dx_k(t)}{dt} = -c_k x_k(t) + \sum_{l=1}^n a_{kl} f_l(x_l(t)) + \sum_{l=1}^n b_{kl} f_l(x_l(t - \tau_{kl})) + u_k, \quad k = 1, 2, \dots, n \quad (2.1)$$

(2.1) denkleminde,  $n$  nöronların sayısını,  $x_k(t)$   $t$  anında  $k$ . nöronun durumunu,  $f_k(x_k(t))$   $k$ . nöronun durumu ile çıkışı arasındaki ilişkiyi belirleyen doğrusal olmayan aktivasyon fonksiyonunu,  $a_{kl}$  değeri  $t$  anında  $k$ . ve  $l$ . nöronlar arasındaki bağlantı katsayısını,  $b_{kl}$  değeri  $t - \tau_{kl}$  anında  $k$ . ve  $l$ . nöronlar arasındaki bağlantı katsayısını,  $c_k > 0$  değeri  $k$ . nöronun yakınsama hızını,  $\tau_{kl}$   $l$ . nörondan  $k$ . nörona bilgi iletimi sırasında oluşan zaman gecikmesini,  $u_k$  değeri ise  $k$ . nörona ait sabit girişi temsil eder.

(2.1) ile tanımlanan model için, nöron durumları  $x(t) = (x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t))^T$  vektörü,  $a_{kl}$  değerleri  $A = (a_{kl})$  matrisi,  $b_{kl}$  değerleri  $B = (a_{kl})$  matrisi,  $c_k$  değerleri  $C = \text{diag}(c_k > 0)_{n \times n}$  matrisi,  $u_k$  değerleri  $u = (u_1, u_2, \dots, u_n)^T$  vektörü ve  $f_k(x_k(t))$  aktivasyon fonksiyonları  $f(x(t)) = (f_1(x_1(t)), f_2(x_2(t)), \dots, f_n(x_n(t)))^T$  vektörü ile temsil edileceklerdir.

(2.1) ile tanımlanan yapay sinir ağı modelinin denge noktasının robust kararlılık analizini gerçekleştirebilmek için, (2.1) sisteminde yer alan aktivasyon fonksiyonlarının matematiksel özelliklerinin ve  $A$ ,  $B$  ve  $C$  sistem matrislerinin sahip olduğu belirsizliklerin matematiksel ifadesinin bilinmesi gerekir.

Dinamik yapay sinir ağlarının tasarımında yaygın olarak kullanılan aktivasyon fonksiyonları genel olarak türevi sınırlı monoton artan ve Lipschitz aktivasyon fonksiyonlarıdır. Türevi sınırlı monoton artan aktivasyon fonksiyonları aşağıdaki koşulu sağlar :

$$0 \leq \frac{f_k(x) - f_k(y)}{x - y} \leq \psi_k, \quad \forall x, y \in \mathbb{R}, x \neq y, k = 1, 2, \dots, n. \quad (2.2)$$

(2.2) ifadesinde yer alan  $\psi_k$  değerleri pozitif sabitlerdir. Bu koşulu sağlayan aktivasyon fonksiyonlarının  $\mathcal{K}$  sınıfına ait olduğu söylenir ve  $f \in \mathcal{K}$  ile gösterilir.

Lipschitz aktivasyon fonksiyonları ise aşağıdaki koşulu sağlar :

$$\frac{|f_k(x) - f_k(y)|}{|x - y|} \leq \ell_k, \quad \forall x, y \in \mathbb{R}, x \neq y, k = 1, 2, \dots, n. \quad (2.3)$$

(2.3) ifadesinde yer alan  $\ell_k$  değerleri pozitif sabitlerdir. Bu koşulu sağlayan aktivasyon fonksiyonlarının  $\mathcal{L}$  sınıfına ait olduğu söylenir ve  $f \in \mathcal{L}$  ile gösterilir.

Yapay sinir ağlarındaki  $A$ ,  $B$  ve  $C$  matrislerinin eleman değerlerindeki değişimlere karşı denge noktasının arzu edilen robust kararlılık özelliklerini sağlayabilmek için bu matrislerde oluşabilecek parametre belirsizliklerinin analitik olarak ifade edilebilmesi

gerekir. Literatürde genel olarak  $A = (a_{kl})$ ,  $B = (b_{kl})$  ve  $C = \text{diag}(c_k > 0)$  matrislerinin elemanları belirli bir aralık içinde tanımlanarak sınırlı norm değerlerine sahip olduğu kabul edilir ve bu durum aşağıdaki şekilde formüle edilir :

$$\begin{aligned} C_I &:= \{0 \prec \underline{C} \preceq C \preceq \bar{C}, 0 < \underline{c}_k \leq c_k \leq \bar{c}_k\} \\ A_I &:= \{\underline{A} \preceq A \preceq \bar{A}, \underline{a}_{kl} \leq a_{kl} \leq \bar{a}_{kl}\} \\ B_I &:= \{\underline{B} \preceq B \preceq \bar{B}, \underline{b}_{kl} \leq b_{kl} \leq \bar{b}_{kl}\} \end{aligned} \quad (2.4)$$

Bu tez çalışmasının amacı, (2.1) ile tanımlanan gecikmeli yapay sinir ağı modelinin denge noktasının kararlılık analizini (2.4) ile verilen parametre belirsizlikleri altında gerçekleştirmektir. Başka bir deyişle, amacımız (2.1) sisteminin robust kararlılık analizini gerçekleştirmek olacaktır. Bu nedenle, ilk olarak (2.1) sistemi için robust kararlılık tanımını vermemiz gerekir. Ama daha önce, (2.1) sistemi için denge noktasının tanımını vereceğiz.

(2.1) sisteminin denge noktası  $x^*$  sabit vektörü ile gösterilsin. Bu durumda  $x^*$  aşağıdaki denklemi sağlar.

$$-Cx^* + Af(x^*) + Bf(x^*) + u = 0 \quad (2.5)$$

Şimdi aşağıdaki tanımları verebiliriz :

**Tanım 2.1** (Cao ve Chen, 2004).

(2.1) ile tanımlanan gecikmeli yapay sinir ağının denge noktası  $x^* = (x_1^*, x_2^*, \dots, x_n^*)^T$  olsun. Eğer,  $x^*$  bütün  $A \in A_I$ ,  $B \in B_I$  ve  $C \in C_I$  değerleri için global asimtotik kararlı ise, bu durumda (2.1) ile tanımlanan yapay sinir ağı modelinin denge noktası global asimtotik robust kararlıdır.

(2.1) ile tanımlanan yapay sinir ağı modelinin denge noktasının robust asimtotik kararlılık analizini gerçekleştirmek için, analizleri basitleştirmek ve kolaylaştırmak amacıyla, (2.1) sisteminin denge noktası  $x^*$  orijine ötelenecektir.  $z_k(t) = x_k(t) - x_k^*, \forall k$  dönüşümü kullanılarak, (2.1) sistemi aşağıdaki yeni formda yazılabilir :

$$\dot{z}_k(t) = -c_k z_k(t) + \sum_{l=1}^n a_{kl} g_l(z_l(t)) + \sum_{l=1}^n b_{kl} g_l(z_l(t - \tau_{kl})), \quad k = 1, 2, \dots, n \quad (2.6)$$

(2.6) ile elde edilen sistemin aktivasyon fonksiyonları  $g_k(z_k(t)) = f_k(z_k(t) + x_k^*) - f_k(x_k^*)$  olarak yazılabilir.  $z(t) = (z_1(t), z_2(t), \dots, z_n(t))^T$  bu yeni sisteme ait durumları temsil eden dönüştürülmüş durum vektörü ve  $g(z(t)) = (g_1(z_1(t)), g_2(z_2(t)), \dots, g_n(z_n(t)))^T$  yeni sisteme ait durum çıkış ilişkilerini belirleyen yeni aktivasyon fonksiyonlarını temsil eden vektördür. Açıkça görüleceği gibi, eğer  $f \in \mathcal{K}$  ise  $g \in \mathcal{K}$  olur ve şu koşullar sağlanır :

$$|g_k(z_k(t))| \leq \psi_k |z_k(t)| \quad \text{ve} \quad g_k(0) = 0 \quad (2.7)$$

Eğer eğer  $f \in \mathcal{L}$  ise  $g \in \mathcal{L}$  olur ve şu koşullar sağlanır :

$$|g_k(z_k(t))| \leq \ell_k |z_k(t)|, \quad \text{ve} \quad g_k(0) = 0 \quad (2.8)$$

(2.6) ile verilen dönüştürülmüş sistemin denge noktası sadece  $z(t) = 0$  olduğunda, (2.1) ile verilen sistemin denge noktası  $x(t) = x^*$  olacaktır. Bu nedenle, (2.1) sisteminin denge noktasının kararlılığını ispatlamak için (2.6) sisteminin orijininin kararlı olduğunu göstermek yeterli olacaktır.

### 3. MALZEME VE YÖNTEM

Bu bölümde tez kapsamında kullanılacak temel bazı kurallar ve yöntemler verilecektir. İlk olarak, (2.4) ile tanımlanmış ve parametere belirsizliği içeren sistem matrisleri için elde edilmiş ve yayınlanmış üst sınır normlarını vereceğiz.

**Kural 3.1** (Faydasicok ve Arik, 2013c).

$B$  matrisi (2.4) ile verilen aralıklarda tanımlanmış reel bir matris olsun. Ayrıca  $B^* = \frac{1}{2}(\bar{B} + \underline{B})$  ve  $B_* = \frac{1}{2}(\bar{B} - \underline{B})$  olarak tanımlansın. Bu matris için  $\sigma_1(B)$  değeri aşağıdaki şekilde ifade edilsin :

$$\sigma_1(B) = \sqrt{\| |B^{*T} B^*| + B_*^T B_* + 2|B^{*T} B_*| \|_2}$$

Bu durumda, aşağıdaki eşitsizlik sağlanır :

$$\|B\|_2 \leq \sigma_1(B)$$

**Kural 3.2** (Cao ve Chen, 2004).

$B$  matrisi (2.4) ile verilen aralıklarda tanımlanmış reel bir matris olsun. Ayrıca  $B^* = \frac{1}{2}(\bar{B} + \underline{B})$  ve  $B_* = \frac{1}{2}(\bar{B} - \underline{B})$  olarak tanımlansın. Bu matris için  $\sigma_2(B)$  değeri aşağıdaki şekilde ifade edilsin :

$$\sigma_2(B) = \|B^*\|_2 + \|B_*\|_2$$

Bu durumda aşağıdaki eşitsizlik sağlanır :

$$\|B\|_2 \leq \sigma_2(B)$$

**Kural 3.3** (Ensari ve Arik, 2010).

$B$  matrisi (2.4) ile verilen aralıklarda tanımlanmış reel bir matris olsun. Ayrıca  $B^* = \frac{1}{2}(\bar{B} + \underline{B})$  ve  $B_* = \frac{1}{2}(\bar{B} - \underline{B})$  olarak tanımlansın. Bu matris için  $\sigma_3(B)$  değeri aşağıdaki şekilde ifade edilsin :

$$\sigma_3(B) = \sqrt{\|B^*\|_2^2 + \|B_*\|_2^2 + 2\|B_*^T B^*\|_2}$$



Bu durumda, aşağıdaki eşitsizlik sağlanır :

$$\|B\|_2 \leq \sigma_3(B)$$

**Kural 3.4** (Singh, 2007).

$B$  matrisi (2.4) ile verilen aralıklarda tanımlanmış reel bir matris olsun. Bu matris için  $\hat{b}_{kl} = \max\{|\underline{b}_{kl}|, |\bar{b}_{kl}|\}$ ,  $(k, l = 1, 2, \dots, n)$  olacak şekilde  $\hat{B} = (\hat{b}_{kl})_{n \times n}$  matrisi tanımlansın.  $\hat{B}$  matrisine bağlı  $\sigma_4(B)$  değeri aşağıdaki şekilde ifade edilsin :

$$\sigma_4(B) = \|\hat{B}\|_2$$

Bu durumda, aşağıdaki eşitsizlik sağlanır :

$$\|B\|_2 \leq \sigma_4(B)$$

**Kural 3.5** (Faydasicok ve Arik, 2012a).

$A$  matrisi (2.4) ile verilen aralıklarda tanımlanmış reel bir matris olsun.  $S = (s_{kl})_{n \times n}$ , digonal elemanları  $s_{kk} = -2d_k \bar{a}_{kk}$  ve diğer elemanları  $s_{kl} = -\max\{|d_k \bar{a}_{kl} + d_l \bar{a}_{lk}|, |d_k \underline{a}_{kl} + d_l \underline{a}_{lk}|\}$ ,  $k \neq l$ ,  $(k, l = 1, 2, \dots, n)$  olacak şekilde tanımlansın. Bu durumda, her  $D = \text{diag}(d_k > 0)$  matrisi ve her  $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)^T \in R^n$  vektörü için aşağıdaki eşitsizlik sağlanır :

$$x^T (DA + A^T D)x \leq -|x^T |S|x|$$

**Kural 3.6** (Faydasicok ve Arik, 2012a).

$A$  matrisi (2.4) ile verilen aralıklarda tanımlanmış reel bir matris olsun. Ayrıca  $A^* = \frac{1}{2}(\bar{A} + \underline{A})$  ve  $A_* = \frac{1}{2}(\bar{A} - \underline{A})$  olarak tanımlansın. Bu durumda, her  $D = \text{diag}(d_k > 0)$  matrisi ve her  $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)^T \in R^n$  vektörü için aşağıdaki eşitsizlik sağlanır :

$$x^T (DA + A^T D)x \leq x^T (DA^* + A_*^T D + \|DA_* + A_*^T D\|_2 I)x$$

**Kural 3.7** (Faydasicok ve diğ., 2018a).

$D = \text{diag}(d_k > 0)$  pozitif diagonal bir matris,  $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)^T$  ve  $B$  matrisi (2.4) ile verilen aralıklarda tanımlanmış reel bir matris olsun. Ayrıca  $B^* = \frac{1}{2}(\bar{B} + \underline{B})$  ve  $B_* = \frac{1}{2}(\bar{B} - \underline{B})$  olarak tanımlansın. Bu durumda, aşağıdaki eşitsizlik sağlanır :

$$x^T B^T D B x \leq |x^T| (|B^{*T} D B^*| + B_*^T D |B^*| + |B^{*T} D B_* + B_*^T D B_*)|x|$$

Kural 3.7 aslında Kural 3.1'in genelleştirilmiş bir halidir. Ancak, bu tez kapsamında elde edilen sonuçların daha önce yayınlanmış sonuçlar ile karşılaştırılmasında kolaylık sağlaması açısından Kural 3.1 ile verilen sonuç kullanılacaktır.

Şimdi ise doğrusal olmayan dinamik sistemlerin denge noktasının varlık ve teklik analizinin gerçekleştirilmesinde sıkça kullanılan bir kuralı veriyoruz :

**Kural 3.8** (Forti ve Tesi, 1995).

Eğer  $H(x) \in C^0$  operatörü aşağıdaki iki koşulu sağlar ise

(a)  $\forall x \neq y$  için  $H(x) \neq H(y)$ ,

(b)  $\|x\| \rightarrow \infty$  iken  $\|H(x)\| \rightarrow \infty$ ,

bu durumda,  $H(x)$  operatörü  $R^n$  üzerinde homeomorfizmdir.

Burada önemli bir noktaya dikkat çekmek gerekiyor. (2.5) ile verilen  $-Cx^* + Af(x^*) + Bf(x^*) + u = 0$  denklemi ile  $H(x) = -Cx + Af(x) + Bf(x) + u = 0$  denkleminin çözümleri aynı sonucu verecektir. Bu nedenle, (2.1) ile tanımlanan yapay sinir ağı modelinin, her bir  $u$  girişine karşı tek bir denge noktasına sahip olması için  $H(x) = -Cx + Af(x) + Bf(x) + u = 0$  operatörünün  $R^n$  üzerinde homeomorfizm olması yeterlidir.

Bu bölümde son olarak, doğrusal olmayan dinamik sistemlerin kararlılık analizinde kullanılan Lyapunov kararlılık teoremini vereceğiz :

**Teorem 3.1** (Khalil , 1996).

$\dot{x}_k(t) = f_k(x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t))$ , ( $k = 1, 2, \dots, n$ ), ya da  $\dot{x}(t) = f(x(t))$  olarak tanımlanmış doğrusal olmayan dinamik sistem için  $f(0) = 0$  ve denge noktası  $x^* = 0$  olsun. Bu sistem

için  $V(x(t)) : R^n \rightarrow R$  tanımlı, sürekli ve türevi alınabilir bir fonksiyon tanımlansın.  $V(x(t))$  fonksiyonunun zamana göre türevi aşağıdaki şekilde yazılabilir:

$$\dot{V}(x(t)) = \sum_{k=1}^n \frac{\partial V(x(t))}{\partial x_k(t)} \dot{x}_k(t) = \sum_{k=1}^n \frac{\partial V(x(t))}{\partial x_k(t)} f_k(x(t)) = \frac{\partial V(x(t))}{\partial x(t)} f(x(t))$$

Eğer, bu Lyapunov fonksiyonu için,  $V(0) = 0$  ve  $\forall x(t) \neq 0$  için  $V(x(t)) > 0$  koşulları sağlanıyor ise, bu durumda

(i)  $\forall x(t) \in R^n$  için  $\dot{V}(x(t)) \leq 0$  ise denge noktası  $x^* = 0$  kararlıdır.

(ii)  $\forall x(t) \neq 0$  için  $\dot{V}(x(t)) < 0$  ise denge noktası  $x^* = 0$  asimtotik kararlıdır.

(iii)  $\forall x(t) \neq 0$  için  $\dot{V}(x(t)) > 0$  ise denge noktası  $x^* = 0$  kararsızdır.

(iv)  $\forall x(t) \neq 0$  için  $\dot{V}(x(t)) < 0$  koşuluna ilave olarak, eğer bu fonksiyon radyal sınırsız ise, yani  $\|x(t)\| \rightarrow \infty$  iken  $V(x(t)) \rightarrow \infty$  oluyorsa, bu durumda denge noktası  $x^* = 0$  global asimtotik kararlıdır.

#### 4. ÇOKLU ZAMAN GECİKMELİ VE BELİRSİZ YAPAY SINIR AĞI MODELİNİN KARARLILIK ANALİZİ

Literatürde en yaygın olarak analiz edilmiş olan dört önemli yapay sinir ağı modeli mevcuttur. Bunlar, hücresel sinir ağları (Chua ve Yang, 1988), Hopfield yapay sinir ağları (Hopfield, 1982), Cohen-Grossberg yapay sinir ağları (Grossberg, 1969), ve bulanık yapay sinir ağları (Takagi ve Sugeno, 1983) modelleridir. Gecikme parameterelerinin dahil edilmesi ile oluşan farklı matematiksel modeller ile tanımlanan gecikmeli yapay sinir ağlarının robust kararlılık analizi konusunda çok sayıda önemli çalışmalar ve yayınlar yapılmıştır (Syed Ali ve diğ., 2017), (Shan ve diğ., 2017), (Samli, 2015), (Chen ve diğ., 2017), (Guo ve diğ., 2014), (Song ve diğ., 2018), (Samli ve Yucel, 2015), (Li ve diğ., 2018), (Liu ve diğ., 2015), (Luo ve diğ., 2014), (Xue ve diğ., 2019), (Muralisankar ve Gopalakrishnan, 2014), (Wan ve diğ., 2016), (Arik, 2014), (Hu ve diğ., 2018), (Wang ve diğ., 2018), (Wu ve diğ., 2011), (Liu, 2015), (Liu, 2018), (Feng ve diğ., 2014), (Wu ve diğ., 2010), (Tian ve diğ., 2012), (Yue ve diğ., 2008), (Arik, 2016), (Huang ve diğ., 2015), (Zhang, 2012), (Ozcan ve Arik, 2016), (Sun ve Feng, 2003), (Ozcan, 2011), (Liao ve Yu, 1998), (Liao ve diğ., 2001), (Chen ve Cao, 2005), (Li ve Cao, 2004), (Shao ve diğ., 2010), (Qi, 2007), (Cao ve diğ., 2005), (Arik, 2005)

Bu bölümde, (2.1) ile tanımlanmış yapay sinir ağı modelinin denge noktasının varlığı, tekliği ve global robust asimtotik kararlılığı için yeni yeterli koşullar sunulacaktır.

**Teorem 4.1** (Faydasicok ve Arik, 2013a) .

(2.1) nolu yapay sinir ağı modeli için  $f \in \mathcal{H}$  olsun. Ayrıca,  $\Psi = \text{diag}(\psi_k > 0)$ ,  $S = (s_{kl})_{n \times n}$ ,  $s_{kk} = -2d_k \bar{a}_{kk}$  ve  $s_{kl} = -\max\{|d_k \bar{a}_{kl} + d_j \bar{a}_{lk}|, |d_k \underline{a}_{kl} + d_l \underline{a}_{lk}|\}$ ,  $k \neq l$ ,  $P = (p_{kl})_{n \times n}$ ,  $p_{kl} = \hat{b}_{kl}^2$ ,  $\hat{b}_{kl} = \max\{|\underline{b}_{kl}|, |\bar{b}_{kl}|\}$ ,  $d_M = \max\{d_k\}$ , ( $k, l = 1, 2, \dots, n$ ),  $\kappa_1 \geq 0$ ,  $\kappa_2 \geq 0$ ,  $\kappa_1 + \kappa_2 = 1$  ve  $\kappa_1 \kappa_2 = 0$  olarak tanımlansın. Eğer

$$\Upsilon = 2\underline{C}D\Psi^{-1} + S - 2\sqrt{nd_M}(\kappa_1 \sqrt{\|P\|_\infty} + \kappa_2 \sqrt{\|P\|_1})I > 0$$

koşulunu sağlayan pozitif bir diagonal  $D = \text{diag}(d_k > 0)$  matrisi mevcut ise, bu durumda (2.1) ile tanımlanan yapay sinir ağı global asimtotik robust kararlıdır.

**İspat :**

İlk olarak denge noktasının varlığı ve tekliğini ispat etmek için (2.1) sisteminin analizine uygun aşağıdaki operatörü tanımlayacağız :

$$H(x) = -Cx + Af(x) + Bf(x) + u \quad (4.1)$$

Şimdi  $x \neq y$  olacak şekilde  $x \in R^n$  ve  $y \in R^n$  iki vektör göz önüne alalım. Bu durumda, (4.1) ile tanımlanan  $H(x)$  operatörü için aşağıdaki ifadeyi yazabiliriz :

$$H(x) - H(y) = -C(x - y) + A(f(x) - f(y)) + B(f(x) - f(y)) \quad (4.2)$$

İlk olarak  $f(x) - f(y) = 0$  durumunu dikkate aldığımızda aşağıdaki eşitliği elde ederiz :

$$H(x) - H(y) = -C(x - y) \quad (4.3)$$

(4.3) nolu denklemde,  $x - y \neq 0$  durumu için,  $C$  pozitif diagonal bir matris olduğundan, (4.1) ile tanımlanan  $H(x)$  dönüşümü için  $H(x) \neq H(y)$  özelliğinin sağlanacağı açık bir şekilde görülebilir. Şimdi de aktivasyon fonksiyonları için  $f(x) - f(y) \neq 0$  durumunu göz önüne alalım.  $D = \text{diag}(d_k > 0)$  olsun. (4.2) nolu denklemin her iki tarafını  $2(f(x) - f(y))^T D$  ile çarparsak, aşağıdaki ifadeyi elde ederiz :

$$\begin{aligned} 2(f(x) - f(y))^T D(H(x) - H(y)) &= -2(f(x) - f(y))^T DC(x - y) \\ &\quad + (f(x) - f(y))^T (DA + A^T D + 2DB)(f(x) - f(y)) \end{aligned} \quad (4.4)$$

Kural 3.5 ışığında aşağıdaki eşitsizlik yazılabilir :

$$(f(x) - f(y))^T (DA + A^T D)(f(x) - f(y))^T \leq -|f(x) - f(y)|^T S |f(x) - f(y)| \quad (4.5)$$

Diğer yandan, (2.2) ile verilen koşuldan yararlanılarak aşağıdaki eşitsizlik elde edilir :

$$\begin{aligned} -(f(x) - f(y))^T 2DC(x - y) &= -\sum_{k=1}^n d_k c_k (f_k(x_k) - f_k(y_k))(x_k - y_k) \\ &\leq -2 \sum_{k=1}^n \frac{d_k c_k}{\psi_k} (f_k(x_k) - f_k(y_k))^2 \\ &= -2 \underline{CD} \Psi^{-1} \|f(x) - f(y)\|_2^2 \end{aligned} \quad (4.6)$$

Aşağıdaki eşitsizliği de yazabiliriz :

$$\begin{aligned}
& 2(f(x) - f(y))^T DB(f(x) - f(y)) \\
&= 2 \sum_{k=1}^n \sum_{l=1}^n d_k b_{kl} (f_k(x_k) - f_k(y_k)) (f_l(x_l) - f_l(y_l)) \\
&\leq 2 \sum_{k=1}^n \sum_{l=1}^n d_M |b_{kl}| |(f_k(x_k) - f_k(y_k))| |(f_l(x_l) - f_l(y_l))| \\
&\leq 2 \sum_{k=1}^n \sum_{l=1}^n d_k \hat{b}_{kl} |(f_k(x_k) - f_k(y_k))| |(f_l(x_l) - f_l(y_l))| \\
&= \sum_{k=1}^n \sum_{l=1}^n [2\kappa_1 d_M \hat{b}_{kl} |f_k(x_k) - f_k(y_k)| |f_l(x_l) - f_l(y_l)| \\
&\quad + 2\kappa_2 d_M \hat{b}_{kl} |f_k(x_k) - f_k(y_k)| |f_l(x_l) - f_l(y_l)|] \\
&= 2\kappa_1 d_M \sum_{k=1}^n \sum_{l=1}^n \hat{b}_{kl} |f_k(x_k) - f_k(y_k)| |f_l(x_l) - f_l(y_l)| \\
&\quad + 2\kappa_2 d_M \sum_{k=1}^n \sum_{l=1}^n \hat{b}_{lk} |f_k(x_k) - f_k(y_k)| |f_l(x_l) - f_l(y_l)| \tag{4.7}
\end{aligned}$$

(4.7) eşitsizliği aşağıdaki formda yazılabilir :

$$\begin{aligned}
& 2(f(x) - f(y))^T DB(f(x) - f(y)) \\
&\leq \sum_{k=1}^n \sum_{l=1}^n [\kappa_1 d_M (\alpha \hat{b}_{kl}^2 (f_k(x_k) - f_k(y_k))^2 + \frac{1}{\alpha} (f_l(x_l) - f_l(y_l))^2) \\
&\quad + \kappa_2 d_M (\beta \hat{b}_{lk}^2 (f_k(x_k) - f_k(y_k))^2 + \frac{1}{\beta} (f_l(x_l) - f_l(y_l))^2)] \\
&= \kappa_1 d_M \sum_{k=1}^n \sum_{l=1}^n (\alpha p_{kl} (f_k(x_k) - f_k(y_k))^2 + \frac{1}{\alpha} (f_l(x_l) - f_l(y_l))^2) \\
&\leq \kappa_1 d_M (\alpha \sqrt{\|P\|_\infty} + \frac{1}{\alpha} \sqrt{n}) \|f(x) - f(y)\|_2^2 \\
&\quad + \kappa_2 p_M (\beta \sqrt{\|P\|_1} + \frac{1}{\beta} \sqrt{n}) \|f(x) - f(y)\|_2^2 \tag{4.8}
\end{aligned}$$

(4.8) ifadesinde yer alan  $\alpha$  and  $\beta$  pozitif sabitlerdir. Eğer,  $\alpha = \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{\|P\|_\infty}}$  ve  $\beta = \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{\|P\|_1}}$  olarak seçilir ise, bu durumda (4.8) aşağıdaki formu alır :

$$\begin{aligned}
& (f(x) - f(y))^T 2DB(f(x) - f(y)) \\
&\leq 2\sqrt{\|P\|_\infty} \kappa_1 d_M \sqrt{n} \|f(x) - f(y)\|_2^2 \\
&\quad + 2\sqrt{\|P\|_1} \kappa_2 d_M \sqrt{n} \|f(x) - f(y)\|_2^2 \\
&= 2|(f(x) - f(y))^T| (d_M \kappa_1 \sqrt{\|P\|_\infty} \sqrt{n} + d_M \kappa_2 \sqrt{\|P\|_1} \sqrt{n}) \|f(x) - f(y)\| \tag{4.9}
\end{aligned}$$

Eğer (4.5),(4.6) and (4.9) nolu eşitsizlikleri (4.4) denkleminde yerine yazarsak, şu sonucu elde ederiz :

$$\begin{aligned} & 2f(x) - f(y))^T D(H(x) - H(y)) \\ \leq & |(f(x) - f(y))^T|(-2CD\Psi^{-1} + S)|f(x) - f(y)| \\ & + 2|(f(x) - f(y))^T|(\sqrt{nd_M}\kappa_1\sqrt{\|P\|_\infty} + \sqrt{nd_M}\kappa_2\sqrt{\|P\|_1})|f(x) - f(y)| \end{aligned} \quad (4.10)$$

(4.10) eşitsizliği aşağıdaki şekilde yazılabilir :

$$2(f(x) - f(y))^T D(H(x) - H(y)) \leq -|(f(x) - f(y))^T|\Upsilon|(f(x) - f(y))| \quad (4.11)$$

Bu durumda,  $\Upsilon > 0$  koşulundan yararlanarak, (4.11) ifadesinden aşağıdaki eşitsizliği elde ederiz :

$$2(f(x) - f(y))^T D(H(x) - H(y)) < 0 \quad (4.12)$$

(4.12) eşitsizliğinden kolayca görülebileceği gibi eğer aktivasyon fonksiyonları için  $f(x) - f(y) \neq 0$  durumunu göz önüne alırsak, bu durumda,  $H(x) \neq H(y)$  olacaktır. Diğer yandan, aktivasyon fonksiyonları  $f \in \mathcal{K}$  olduğunda,  $f(x) - f(y) \neq 0$  koşulu sağlandığında  $x \neq y$  olmak zorundadır. Böylece, tüm  $x \neq y$  durumları için, sistem (2.1) için tanımlanan ve (4.1) ile verilen operatör için  $H(x) \neq H(y)$  olacaktır. Şimdi de  $\|x\| \rightarrow \infty$  iken  $\|H(x)\| \rightarrow \infty$  olduğunu göstereceğiz.  $y = 0$  için, (4.11) nolu eşitsizlik aşağıdaki formu alır :

$$2(f(x) - f(0))^T D(H(x) - H(0)) \leq -\lambda_m(\Upsilon)\|f(x) - f(0)\|_2^2 \quad (4.13)$$

(4.13) eşitsizliğinin her iki tarafının mutlak değerini aldığımızda şu ifadeyi elde ederiz :

$$2|(f(x) - f(0))^T D(H(x) - H(0))| \geq \lambda_m(\Upsilon)\|f(x) - f(0)\|_2^2 \quad (4.14)$$

Standart norm özelliklerinden yararlanarak, (4.14) ifadesini aşağıdaki şekilde yazabiliriz :

$$\|f(x) - f(0)\|_\infty\|D\|_\infty\|H(x) - H(0)\|_1 \geq 0.5\lambda_m(\Upsilon)\|f(x) - f(0)\|_2^2 \quad (4.15)$$

(4.15) ile verilen denklem üzerinde,  $\|f(x) - f(0)\|_\infty \leq \|f(x) - f(0)\|_2$  ve  $\|f(x) - f(0)\|_1 \leq \|f(x)\|_1 + \|f(0)\|_1$  norm özelliklerini kullanarak ve gerekli matematiksel işlemleri

gerçekleştirerek aşağıdaki sonucu elde ederiz :

$$\|H(x)\|_1 > \frac{0.5\lambda_m(\Upsilon)\|f(x)\|_2 - 0.5\lambda_m(\Upsilon)\|f(0)\|_2 - \|D\|_\infty\|H(0)\|_1}{\|D\|_\infty} \quad (4.16)$$

(4.16) denkleminde yer alan  $\|D\|_\infty$ ,  $\|H(0)\|_1$  ve  $\|f(0)\|_2$  sonlu normlar olduğu için,  $\|f(x)\| \rightarrow \infty$  iken  $\|H(x)\| \rightarrow \infty$  olacaktır. Ya da eşdeğer olarak,  $\|x\| \rightarrow \infty$  iken  $\|H(x)\| \rightarrow \infty$  olacaktır. Böylece, Kural 3.8 ile verilen sonuca dayanarak, (2.1) nolu yapay sinir ağının denge noktasının varlığı ve tekliliği ispatlanmış oldu.

İspatımızın ikinci adımı olarak,  $\Upsilon > 0$  koşulunun (2.1) ile tanımlanan yapay sinir ağı modelinin denge noktasının ya da eşdeğer olarak (2.6) nolu sistemin orijinin global robust asimtotik kararlılığı için yeterli bir koşul olduğunu ispat edeceğiz. Bu amaçla, (2.6) nolu sistemin denge noktasının kararlılık analizi için aşağıda verilen pozitif tanımlı Lyapunov fonksiyonunu kullanacağız :

$$\begin{aligned} V(z(t)) = & \sum_{k=1}^n z_k^2(t) + 2\varepsilon \sum_{k=1}^n \int_0^{z_k(t)} d_k g_k(\xi) d\xi \\ & + \sum_{k=1}^n \sum_{l=1}^n \left( \gamma + \frac{n}{c_k} \hat{b}_{kl}^2 + \kappa_1 \frac{\varepsilon}{\alpha} d_M + \kappa_2 \varepsilon \beta d_M \hat{b}_{kl}^2 \right) \int_{t-\tau_{kl}}^t g_l^2(z_l(\xi)) d\xi \quad (4.17) \end{aligned}$$

burada  $d_k$ ,  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$  ve  $\varepsilon$  sayısal değerleri sonradan belirlenecek pozitif sabitlerdir. (4.17) ile tanımlanan Lyapunov fonksiyonunun zamana göre türevi aşağıdaki şekildedir :

$$\begin{aligned} \dot{V}(z(t)) = & \sum_{k=1}^n [-2c_k z_k^2(t) + \sum_{l=1}^n 2a_{kl} z_k(t) g_l(z_l(t)) + \sum_{l=1}^n 2z_k(t) b_{kl} g_l(z_l(t - \tau_{kl}))] \\ & \varepsilon \sum_{k=1}^n [-2d_k c_k z_k(t) g_k(z_k(t)) + \sum_{l=1}^n 2g_k(z_k(t)) d_k a_{kl} g_l(z_l(t)) \\ & + \sum_{l=1}^n 2g_k(z_k(t)) d_k b_{kl} g_l(z_l(t - \tau_{kl}))] \\ & + \kappa_1 \varepsilon d_M \sum_{k=1}^n \sum_{l=1}^n \left[ \left( \frac{1}{\alpha} g_l^2(z_l(t)) - \frac{1}{\alpha} g_l^2(z_l(t - \tau_{kl})) \right) \right. \\ & \left. + \gamma g_l^2(z_l(t)) - \gamma g_l^2(z_l(t - \tau_{kl})) \right) \\ & + \kappa_2 \varepsilon \beta d_M \left( \hat{b}_{kl}^2 g_l^2(z_l(t)) - \hat{b}_{kl}^2 g_l^2(z_l(t - \tau_{kl})) \right) \\ & \left. + \left( \frac{n}{c_k} \hat{b}_{kl}^2 g_l^2(z_l(t)) - \frac{n}{c_k} \hat{b}_{kl}^2 g_l^2(z_l(t - \tau_{kl})) \right) \right] \quad (4.18) \end{aligned}$$



Aşağıdaki eşitsizlikleri yazabiliriz :

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n \sum_{l=1}^n 2a_{kl}z_k(t)g_l(z_l(t)) &\leq \sum_{k=1}^n \sum_{l=1}^n \left[ \frac{c_k}{n} z_k^2(t) + \frac{n}{c_k} a_{kl}^2 g_l^2(z_l(t)) \right] \\ &\leq \sum_{k=1}^n [c_k z_k^2(t) + \sum_{l=1}^n \frac{1}{c_k} n \hat{a}_{kl}^2 g_l^2(z_l(t))] \end{aligned} \quad (4.19)$$

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n \sum_{l=1}^n 2b_{kl}z_k(t)g_l(z_l(t - \tau_{kl})) &\leq \sum_{k=1}^n \sum_{l=1}^n \left[ c_k \frac{1}{n} z_k^2(t) + \frac{n}{c_k} b_{kl}^2 g_l^2(z_l(t - \tau_{kl})) \right] \\ &\leq \sum_{k=1}^n [c_k z_k^2(t) + \sum_{l=1}^n \frac{n}{c_k} \hat{b}_{kl}^2 g_l^2(z_l(t - \tau_{kl}))] \end{aligned} \quad (4.20)$$

$$\begin{aligned} &\sum_{k=1}^n \sum_{l=1}^n 2d_k b_{kl} g_k(z_k(t)) g_l(z_l(t - \tau_{kl})) \\ &\leq \kappa_1 d_M \sum_{k=1}^n \sum_{l=1}^n 2\hat{b}_{kl} |g_k(z_k(t))| |g_l(z_l(t - \tau_{kl}))| \\ &\quad + \kappa_2 d_M \sum_{k=1}^n \sum_{l=1}^n 2\hat{b}_{kl} |g_k(z_k(t))| |g_l(z_l(t - \tau_{kl}))| \\ &\leq \sum_{k=1}^n \sum_{l=1}^n \left[ \kappa_1 d_M (\alpha \hat{b}_{kl}^2 g_k^2(z_k(t)) + \frac{1}{\alpha} g_l^2(z_l(t - \tau_{kl}))) \right. \\ &\quad \left. + \kappa_2 d_M (\frac{1}{\beta} g_l^2(z_l(t)) + \beta \hat{b}_{lk}^2 g_k^2(z_k(t - \tau_{lk}))) \right] \end{aligned} \quad (4.21)$$

(4.19)-(4.21) nolu eşitsizlikleri (4.18) denkleminde kullanıldığında aşağıdaki sonucu verir :

$$\begin{aligned} \dot{V}(z(t)) &\leq \sum_{k=1}^n \sum_{l=1}^n \frac{n}{c_k} \hat{a}_{kl}^2 g_l^2(z_l(t)) + \sum_{k=1}^n \sum_{l=1}^n \frac{n}{c_k} \hat{b}_{kl}^2 g_l^2(z_l(t)) \\ &\quad - 2\varepsilon \sum_{k=1}^n d_k c_k z_k(t) g_k(z_k(t)) + \varepsilon \sum_{k=1}^n \sum_{l=1}^n 2d_k a_{kl} g_k(z_k(t)) g_l(z_l(t)) \\ &\quad + \varepsilon \kappa_1 d_M \sum_{k=1}^n \sum_{l=1}^n \alpha \hat{b}_{kl}^2 g_k^2(z_k(t)) + \varepsilon \kappa_1 d_M \sum_{k=1}^n \sum_{l=1}^n \frac{1}{\alpha} g_l^2(z_l(t)) \\ &\quad + \sum_{k=1}^n \sum_{l=1}^n [\varepsilon \kappa_2 d_M \frac{1}{\beta} g_l^2(z_l(t)) + \varepsilon \kappa_2 d_M \beta \hat{b}_{kl}^2 g_l^2(z_l(t))] \\ &\quad + \gamma \sum_{k=1}^n \sum_{l=1}^n [g_l^2(z_l(t)) - g_l^2(z_l(t - \tau_{kl}))] \end{aligned} \quad (4.22)$$

(2.7) ile verilen koşuldan yararlanılarak aşağıdaki eşitsizlik elde edilir :

$$\begin{aligned} -2 \sum_{k=1}^n d_k c_k z_k(t) g_k(z_k(t)) &\leq -2 \sum_{k=1}^n \frac{d_k c_k}{\psi_k} g_k^2(z_k(t)) \\ &\leq -2 |g^T(z(t))| \underline{C} \Psi^{-1} D |g(z(t))| \end{aligned} \quad (4.23)$$

Kural 3.5 ışığında aşağıdaki eşitsizlik yazılabilir :

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n \sum_{l=1}^n 2d_k a_{kl} g_k(z_k(t)) g_l(z_l(t)) &= g^T(z(t)) (DA + A^T D) g(z(t)) \\ &\leq -|g^T(z(t))| S |g(z(t))| \end{aligned} \quad (4.24)$$

(4.23) ve (4.24) nolu eşitsizlikleri (4.22) denkleminde kullanıldığında aşağıdaki sonucu verir :

$$\begin{aligned} \dot{V}(z(t)) &\leq \sum_{k=1}^n \sum_{l=1}^n \left[ \frac{n}{c_m} \hat{a}_M^2 g_l^2(z_l(t)) + \frac{n}{c_m} \hat{b}_M^2 g_l^2(z_l(t)) \right] \\ &\quad - 2\varepsilon |g^T(z(t))| \underline{C} D \Psi^{-1} |g(z(t))| - \varepsilon |g^T(z(t))| S |g(z(t))| \\ &\quad + \varepsilon \kappa_1 d_M \sum_{k=1}^n \sum_{l=1}^n \alpha p_{kl} g_k^2(z_k(t)) + \varepsilon \kappa_1 d_M \sum_{k=1}^n \sum_{l=1}^n \frac{1}{\alpha} g_l^2(z_l(t)) \\ &\quad + \varepsilon \kappa_2 d_M \sum_{k=1}^n \sum_{l=1}^n \frac{1}{\beta} g_l^2(z_l(t)) + \varepsilon \kappa_2 d_M \sum_{k=1}^n \sum_{l=1}^n \beta r_{lk} g_k^2(z_k(t)) \\ &\quad + \gamma \sum_{k=1}^n \sum_{l=1}^n [g_l^2(z_l(t)) - g_l^2(z_l(t - \tau_{kl}))] \end{aligned} \quad (4.25)$$

(4.25) nolu eşitsizlikte  $c_m = \min\{c_k\}$ ,  $\hat{a}_M = \max\{\hat{a}_{kl}\}$ ,  $\hat{b}_M = \max\{\hat{b}_{kl}\}$ ,  $(k, l = 1, 2, \dots, n)$ , olarak belirlenmiştir. Aşağıdaki norm ifadelerini yazabiliriz :

$$\sum_{k=1}^n \sum_{l=1}^n p_{lk} g_k^2(z_k(t)) \leq \|P\|_1 \sum_{k=1}^n g_k^2(z_k(t)) = |g^T(z(t))| \|P\|_1 |g(z(t))| \quad (4.26)$$

$$\sum_{k=1}^n \sum_{l=1}^n p_{kl} g_k^2(z_k(t)) \leq \|P\|_\infty \sum_{k=1}^n g_k^2(z_k(t)) = |g^T(z(t))| \|P\|_\infty |g(z(t))| \quad (4.27)$$

$$\sum_{k=1}^n \sum_{l=1}^n g_l^2(z_l(t)) = n |g^T(z(t))| |g(z(t))| \quad (4.28)$$

(4.26)-(4.28) eşitsizlikleri (4.25) denkleminde kullanıldığında aşağıdaki sonucu verir :

$$\begin{aligned}
\dot{V}(z(t)) \leq & -2\varepsilon|g^T(z(t))|\underline{CD}\Psi^{-1}|g(z(t))| + \sum_{k=1}^n \sum_{l=1}^n \frac{n}{c_m} \hat{a}_M^2 g_l^2(z_l(t)) \\
& + \sum_{k=1}^n \sum_{l=1}^n \frac{n}{c_m} \hat{b}_M^2 g_l^2(z_l(t)) - \varepsilon|g^T(z(t))|S|g(z(t))| \\
& + |g^T(z(t))|[\varepsilon\kappa_1 d_M \alpha \|P\|_\infty + \varepsilon\kappa_1 d_M \frac{1}{\alpha} n] |g(z(t))| \\
& + |g^T(z(t))|[\varepsilon\kappa_2 d_M \frac{1}{\beta} n + \varepsilon\kappa_2 d_M \beta \|P\|_1] |g(z(t))| \\
& + \gamma \sum_{k=1}^n \sum_{l=1}^n [g_l^2(z_l(t)) - g_l^2(z_l(t - \tau_{kl}))] \tag{4.29}
\end{aligned}$$

(4.29) aşağıdaki şekilde de yazılabilir :

$$\begin{aligned}
\dot{V}(z(t)) \leq & |g^T(z(t))| \frac{n^2}{c_m} (\hat{a}_M^2 + \hat{b}_M^2) |g(z(t))| - \varepsilon|g^T(z(t))|(2\underline{CD}\Psi^{-1} + S)|g(z(t))| \\
& + |g^T(z(t))| \varepsilon\kappa_1 d_M (\alpha \|P\|_\infty + \frac{1}{\alpha} n) |g(z(t))| \\
& + |g^T(z(t))| \varepsilon\kappa_2 d_M (\frac{1}{\beta} n + \beta \|P\|_1 + \gamma n) |g(z(t))| \tag{4.30}
\end{aligned}$$

$\gamma = \frac{n}{c_m} (\hat{a}_M^2 + \hat{b}_M^2)$ ,  $\alpha = \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{\|P\|_\infty}}$  ve  $\beta = \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{\|P\|_1}}$  olacak şekilde seçilsin. Bu durumda, (4.30) aşağıdaki formu alır :

$$\begin{aligned}
\dot{V}(z(t)) \leq & |g^T(z(t))| \left[ \frac{2n^2}{c_m} (\hat{a}_M^2 + \hat{b}_M^2) - 2\varepsilon\underline{CD}\Psi^{-1} + \varepsilon S \right] |g(z(t))| \\
& + 2|g^T(z(t))| [\varepsilon\kappa_1 d_M \sqrt{n} \sqrt{\|P\|_\infty} + \varepsilon\kappa_2 d_M \sqrt{n} \sqrt{\|P\|_1}] |g(z(t))| \\
& - \varepsilon|g^T(z(t))|(2\underline{CD}\Psi^{-1} + S - 2d_M \sqrt{n} (\kappa_1 \sqrt{\|P\|_\infty} + \kappa_2 \sqrt{\|P\|_1}) I) |g(z(t))| \\
= & \frac{2n^2}{c_m} |g^T(z(t))| (\hat{a}_M^2 + \hat{b}_M^2) |g(z(t))| - \varepsilon|g^T(z(t))|Y|g(z(t))| \\
\leq & \frac{2n^2}{c_m} (\hat{a}_M^2 + \hat{b}_M^2) \|g(z(t))\|_2^2 - \varepsilon\lambda_m(Y) \|g(z(t))\|_2^2 \\
= & \left[ \frac{2n^2}{c_m} (\hat{a}_M^2 + \hat{b}_M^2) - \varepsilon\lambda_m(Y) \right] \|g(z(t))\|_2^2 \tag{4.31}
\end{aligned}$$

Eğer  $\varepsilon > \frac{2n^2(\hat{a}_M^2 + \hat{b}_M^2)}{c_m \lambda_m(Y)}$  seçilirse, bu durumda tüm  $g(z(t)) \neq 0$  için, ya da eşdeğer olarak tüm  $z(t) \neq 0$  için, (4.31) ile elde edilen  $\dot{V}(z(t))$  negatif tanımlı olacaktır.  $g(z(t)) = 0$  olsun. Bu

durumda, (4.18) ile elde edilen  $\dot{V}(z(t))$  aşağıdaki eşitsizliği sağlar :

$$\begin{aligned}
\dot{V}(z(t)) &= \sum_{k=1}^n [-2c_k z_k^2(t) + \sum_{l=1}^n 2b_{kl} z_k(t) g_l(z_l(t - \tau_{kl}))] \\
&\quad - \sum_{k=1}^n \sum_{l=1}^n [\varepsilon \kappa_1 d_M \frac{1}{\alpha} g_l^2(z_l(t - \tau_{kl})) - \gamma g_l^2(z_l(t - \tau_{kl}))] \\
&\quad - \sum_{k=1}^n \sum_{l=1}^n [\varepsilon \kappa_2 d_M \beta \hat{b}_{kl}^2 g_l^2(z_l(t - \tau_{kl})) - \frac{n}{c_k} \hat{b}_{kl}^2 g_l^2(z_l(t - \tau_{kl}))] \\
&\leq -2 \sum_{k=1}^n c_k z_k^2(t) + \sum_{k=1}^n \sum_{l=1}^n 2b_{kl} z_k(t) g_l(z_l(t - \tau_{kl})) \\
&\quad - \sum_{k=1}^n \sum_{l=1}^n \frac{n}{c_k} \hat{b}_{kl}^2 g_l^2(z_l(t - \tau_{kl})) \tag{4.32}
\end{aligned}$$

Aşağıdaki eşitsizliği yazabiliriz

$$\sum_{k=1}^n \sum_{l=1}^n 2b_{kl} z_k(t) g_l(z_l(t - \tau_{kl})) \leq \sum_{k=1}^n [c_k z_k^2(t) + \sum_{l=1}^n \frac{n}{c_k} \hat{b}_{kl}^2 g_l^2(z_k(t - \tau_{kl}))] \tag{4.33}$$

(4.33) nolu eşitsizlik (4.32) denkleminde kullanıldığında aşağıdaki sonucu verir :

$$\dot{V}(z(t)) \leq - \sum_{k=1}^n c_k z_k^2(t) \tag{4.34}$$

(4.34) nolu ifadeden,  $z(t) \neq 0$  iken  $\dot{V}(z(t))$  negatif değerli olacaktır.

Şimdi de  $g(z(t)) = z(t) = 0$  olsun. (4.18) ile elde edilen  $\dot{V}(z(t))$  aşağıdaki eşitsizliği sağlar :

$$\begin{aligned}
\dot{V}(z(t)) &= -\varepsilon \kappa_1 d_M \sum_{k=1}^n \sum_{l=1}^n \frac{1}{\alpha} g_l^2(z_l(t - \tau_{kl})) - \gamma \sum_{k=1}^n \sum_{l=1}^n g_l^2(z_l(t - \tau_{kl})) \\
&\quad - \varepsilon \kappa_2 d_M \sum_{k=1}^n \sum_{l=1}^n \beta \hat{b}_{kl}^2 g_l^2(z_l(t - \tau_{kl})) - \sum_{k=1}^n \sum_{l=1}^n \frac{n}{c_k} \hat{b}_{kl}^2 g_l^2(z_l(t - \tau_{kl})) \\
&\leq - \sum_{k=1}^n \sum_{l=1}^n \gamma g_l^2(z_l(t - \tau_{kl})) \tag{4.35}
\end{aligned}$$

(4.35) nolu ifadeden açıkça görüleceği gibi eğer sıfırdan farklı en az bir  $g_l(z_l(t - \tau_{kl}))$  var ise, bu durumda  $\dot{V}(z(t))$  negatif değerlere sahip olacaktır. Böylece, sadece  $g(z(t)) = z(t) = 0$  ve  $g_l(z_l(t - \tau_{kl})) = 0$ , tüm  $k, l$  için,  $\dot{V}(z(t)) = 0$  olacaktır. Diğer tüm durumlarda ise  $\dot{V}(z(t))$  negatif değerli olacaktır. Diğer yandan bu Lyapunov fonksiyonu radyal sınırsızdır çünkü  $\|z(t)\| \rightarrow \infty$  iken  $V(z(t)) \rightarrow \infty$  olur. Böylece, Teorem 3.1 ile verilen sonuca dayanarak, (2.6) nolu sistemin orijini, ya da eşdeğer olarak (2.1) nolu sistemin denge noktası kararlıdır.

**Teorem 4.2** (Faydasicok ve Arik, 2013a).

(2.1) nolu yapay sinir ağı modeli için  $f \in \mathcal{K}$  olsun. Ayrıca,  $\Psi = \text{diag}(\psi_k > 0)$ ,  $d_M = \max\{d_k\}$ ,  $P = (p_{kl})_{n \times n}$ ,  $p_{kl} = \hat{b}_{kl}^2$ ,  $\hat{b}_{kl} = \max\{|\underline{b}_{kl}|, |\bar{b}_{kl}|\}$ ,  $(k, l = 1, 2, \dots, n)$ ,  $\kappa_1 \geq 0$ ,  $\kappa_2 \geq 0$ ,  $\kappa_1 \kappa_2 = 0$  ve  $\kappa_1 + \kappa_2 = 1$   $A^* = \frac{1}{2}(\bar{A} + \underline{A})$  ve  $A_* = \frac{1}{2}(\bar{A} - \underline{A})$  olarak tanımlansın. Eğer

$$\Gamma = 2\underline{C}D\Psi^{-1} - DA^* - A^{*T}D - \|DA_* + A_*^T D\|_2 I - 2\sqrt{nd_M}(\kappa_1 \sqrt{\|P\|_\infty} + \kappa_2 \sqrt{\|P\|_1})I > 0$$

koşulunu sağlayan pozitif bir diagonal  $D = \text{diag}(d_k > 0)$  matrisi mevcut ise, bu durumda (2.1) ile tanımlanan yapay sinir ağı global asimtotik robust karardır.

**İspat :**

Kural 3.6 ışığında aşağıdaki eşitsizlik yazılabilir :

$$\begin{aligned} & (f(x) - f(y))^T (DA + A^T D)(f(x) - f(y)) \\ & \leq (f(x) - f(y))^T (DA^* + A^{*T} D + \|DA_* + A_*^T D\|_2 I)(f(x) - f(y)) \end{aligned} \quad (4.36)$$

(4.6), (4.8) ve (4.36) nolu eşitsizlikler (4.4) denkleminde kullanıldığında aşağıdaki sonucu verir :

$$\begin{aligned} & 2(f(x) - f(y))^T D(H(x) - H(y)) \\ & \leq -(f(x) - f(y))^T \underline{C}D\Psi^{-1} f(x) \\ & \quad - f(y) - (f(x) - f(y))^T (DA^* + A^{*T} D)(f(x) - f(y)) \\ & \quad - (f(x) - f(y))^T \|DA_* + A_*^T D\|_2 (f(x) - f(y)) \\ & \quad + 2\sqrt{nd_M}(f(x) - f(y))^T (\kappa_1 \sqrt{\|P\|_\infty} + \kappa_2 \sqrt{\|P\|_1}) f(x) - f(y) \end{aligned} \quad (4.37)$$

(4.37) ifadesi eşdeğer olarak aşağıdaki formda yazılabilir :

$$2(f(x) - f(y))^T D(H(x) - H(y)) \leq -(f(x) - f(y))^T \Gamma (f(x) - f(y)) \quad (4.38)$$

(4.38) ifadesi (4.11) ifadesi ile eşdeğer formdadır. Sadece  $\Upsilon$ ,  $\Gamma$  ile yer değiştirmiştir. Bu nedenle,  $\Gamma > 0$  doğrudan (2.1) nolu yapay sinir ağı modelinin denge noktasının varlığı ve tekliğini garanti eder.

Şimdi de denge noktasının kararlılığını ispat edeceğiz. Kural 3.6 ışığında aşağıdaki eşitsizlik yazılabilir :

$$g^T(z(t))(DA + A^T D)g(z(t)) \leq g^T(z(t))(DA^* + A^{*T} D + \|DA_* + A_*^T D\|_2)g(z(t)) \quad (4.39)$$

(4.39) denklemi (4.22) ifadesinde yerine yazılırsa, aşağıdaki sonuç elde edilir :

$$\begin{aligned} \dot{V}(z(t)) &\leq \sum_{k=1}^n \sum_{l=1}^n \frac{n}{c_k} \hat{a}_{kl}^2 g_l^2(z_l(t)) + \sum_{k=1}^n \sum_{l=1}^n \frac{n}{c_k} \hat{b}_{kl}^2 g_l^2(z_l(t)) \\ &\quad - 2\varepsilon \sum_{k=1}^n d_k c_k z_k(t) g_k(z_k(t)) \\ &\quad + \varepsilon g^T(z(t))(DA^* + A^{*T} D + \|DA_* + A_*^T D\|_2)g(z(t)) \\ &\quad + \sum_{k=1}^n \sum_{l=1}^n [\varepsilon \kappa_1 d_M \alpha \hat{b}_{kl}^2 g_k^2(z_k(t)) + \varepsilon \kappa_1 d_M \frac{1}{\alpha} g_l^2(z_l(t))] \\ &\quad + \sum_{k=1}^n \sum_{l=1}^n [\varepsilon \kappa_2 d_M \frac{1}{\beta} g_l^2(z_l(t)) + \varepsilon \kappa_2 d_M \beta \hat{b}_{kl}^2 g_l^2(z_l(t))] \\ &\quad + \gamma \sum_{k=1}^n \sum_{l=1}^n [g_l^2(z_l(t)) - g_l^2(z_l(t - \tau_{kl}))] \end{aligned} \quad (4.40)$$

$c_m = \min\{c_k\}$ ,  $\hat{a}_M = \max\{\hat{a}_{kl}\}$ ,  $\hat{b}_M = \max\{\hat{b}_{kl}\}$ ,  $\gamma = \frac{n}{c_m}(\hat{a}_M^2 + \hat{b}_M^2)$ ,  $\alpha = \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{\|P\|_\infty}}$  ve  $\beta = \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{\|P\|_1}}$  olsun. (4.26)-(4.28) eşitsizlikleri (4.40) denkleminde kullanıldığında aşağıdaki eşitsizliği verir :

$$\begin{aligned} \dot{V}(z(t)) &\leq \frac{2n^2}{c_m} (\hat{a}_M^2 + \hat{b}_M^2) \|g(z(t))\|_2^2 \\ &\quad - \varepsilon g^T(z(t))(2CD\Psi^{-1} - (DA^* + A^{*T} D + \|DA_* + A_*^T D\|_2))g(z(t)) \\ &\quad + 2g^T(z(t))[\varepsilon \kappa_1 d_M \sqrt{n} \sqrt{\|P\|_\infty} + \varepsilon \kappa_2 d_M \sqrt{n} \sqrt{\|P\|_1}]g(z(t)) \\ &= g^T(z(t)) \left[ \frac{2n^2}{c_m} (\hat{a}_M^2 + \hat{b}_M^2) - \varepsilon \Gamma \right] g(z(t)) \\ &\leq \frac{2n^2}{c_m} (\hat{a}_M^2 + \hat{b}_M^2) \|g(z(t))\|_2^2 - \varepsilon \lambda_m(\Gamma) \|g(z(t))\|_2^2 \\ &= \left[ \frac{2n^2}{c_m} (\hat{a}_M^2 + \hat{b}_M^2) - \varepsilon \lambda_m(\Gamma) \right] \|g(z(t))\|_2^2 \end{aligned} \quad (4.41)$$

Dikkat edilmelidir ki (4.41) ifadesi (4.31) ile aynı formdadır. Sadece  $\Upsilon$ ,  $\Gamma$  ile yer değiştirmiştir. Bu nedenle  $\Gamma > 0$  için (2.6) nolu sistemin orijini, ya da eşdeğer olarak (2.1) nolu sistemin denge noktası global asimtotik robust kararlıdır.

**Teorem 4.3** (Faydasicok ve Arik, 2012a).

(2.1) nolu yapay sinir ağı modeli için  $f \in \mathcal{K}$  olsun. Ayrıca,  $\Psi = \text{diag}(\psi_k > 0)$ ,  $S = (s_{kl})_{n \times n}$ ,  $s_{kk} = -2d_k \bar{a}_{kk}$ ,  $s_{kl} = -\max\{|d_k \bar{a}_{kl} + d_l \bar{a}_{lk}|, |d_k \underline{a}_{kl} + d_l \underline{a}_{lk}|\}$ ,  $k \neq l$ ,  $\hat{B} = (\hat{b}_{kl})_{n \times n}$ ,  $\hat{b}_{kl} = \max\{|\underline{b}_{kl}|, |\bar{b}_{kl}|\}$ ,  $(k, l = 1, 2, \dots, n)$ , olarak tanımlansın. Eğer

$$\Theta = 2\underline{C}D\Psi^{-1} + S - 2\|D\|_2 \sqrt{\|\hat{B}\|_1 \|\hat{B}\|_\infty} I > 0$$

koşulunu sağlayan pozitif bir diagonal  $D = \text{diag}(d_k > 0)$  matrisi mevcut ise, bu durumda (2.1) ile tanımlanan yapay sinir ağı global asimtotik robust kararlıdır.

**İspat :**

İlk olarak denge noktasının varlığı ve tekliğini ispat edeceğiz. Aşağıdaki eşitsizliği yazabiliriz :

$$\begin{aligned} & 2 \sum_{k=1}^n \sum_{l=1}^n d_k b_{kl} (f_k(x_k) - f_k(y_k))(f_l(x_l) - f_l(y_l)) \\ & \leq 2 \sum_{k=1}^n \sum_{l=1}^n d_k |b_{kl}| |f_k(x_k) - f_k(y_k)| |f_l(x_l) - f_l(y_l)| \\ & \leq \sum_{k=1}^n \sum_{l=1}^n d_k |b_{kl}| (\alpha (f_k(x_k) - f_k(y_k))^2 + \frac{1}{\alpha} (f_l(x_l) - f_l(y_l))^2) \\ & = \alpha \sum_{k=1}^n \sum_{l=1}^n d_k |b_{kl}| (f_k(x_k) - f_k(y_k))^2 + \frac{1}{\alpha} \sum_{k=1}^n \sum_{l=1}^n d_l |b_{lk}| (f_k(x_k) - f_k(y_k))^2 \\ & \leq \alpha \sum_{k=1}^n \sum_{l=1}^n d_k \hat{b}_{kl} (f_k(x_k) - f_k(y_k))^2 + \frac{1}{\alpha} \sum_{k=1}^n \sum_{l=1}^n d_l \hat{b}_{lk} (f_k(x_k) - f_k(y_k))^2 \\ & \leq |(f(x) - f(y))^T |D|_2 (\|\hat{B}\|_\infty \alpha + \frac{1}{\alpha} \|\hat{B}\|_1) |f(x) - f(y)| \end{aligned} \quad (4.42)$$

Eğer  $\alpha = \sqrt{\frac{\|\hat{B}\|_\infty}{\|\hat{B}\|_1}}$  seçilirse, (4.42) eşitsizliği aşağıdaki formda yazılabilir :

$$\begin{aligned} & 2 \sum_{k=1}^n \sum_{l=1}^n d_k b_{kl} (f_k(x_k) - f_k(y_k))(f_l(x_l) - f_l(y_l)) \\ & \leq 2\|D\|_2 |(f(x) - f(y))^T | \sqrt{\|\hat{B}\|_1 \|\hat{B}\|_\infty} |f(x) - f(y)| \end{aligned} \quad (4.43)$$

(4.5), (4.6) ve (4.43) nolu eşitsizlikler (4.4) denkleminde kullanıldığında aşağıdaki sonucu

verir :

$$2(f(x) - f(y))^T D(H(x) - H(y)) \leq -|(f(x) - f(y))^T \Theta (f(x) - f(y))| \quad (4.44)$$

(4.44) ifadesi (4.11) ifadesi ile eşdeğer formdadır. Sadece  $\Upsilon$ ,  $\Theta$  ile yer değiştirmiştir. Bu nedenle,  $\Theta > 0$  doğrudan (2.1) nolu yapay sinir ağı modelinin denge noktasının varlığı ve tekliğini garanti eder.

(2.6) nolu sisteminin denge noktasının kararlılık analizi için aşağıdaki pozitif tanımlı Lyapunov fonksiyonunu kullanacağız :

$$\begin{aligned} V(z(t)) = & \sum_{k=1}^n z_k^2(t) + 2\alpha \sum_{k=1}^n \int_0^{z_k(t)} d_k g_k(s) ds \\ & + \sum_{k=1}^n \sum_{l=1}^n \left( \gamma + \frac{\alpha}{\beta} d_k \hat{b}_{kl} + \frac{n}{c_k} (\hat{b}_{kl})^2 \right) \int_{t-\tau_{kl}}^t g_l^2(z_l(\xi)) d\xi \end{aligned} \quad (4.45)$$

burada  $d_k$ ,  $\alpha$ ,  $\beta$  and  $\gamma$  sayısal değerleri sonradan belirlenecek pozitif sabitlerdir. (4.45) ile tanımlanan Lyapunov fonksiyonunun zamana göre türevi aşağıdaki şekildedir :

$$\begin{aligned} \dot{V}(z(t)) = & \sum_{k=1}^n [-2c_k z_k^2(t) + \sum_{l=1}^n 2a_{kl} z_k(t) g_l(z_l(t)) + \sum_{l=1}^n 2b_{kl} z_k(t) g_l(z_l(t - \tau_{kl}))] \\ & \sum_{k=1}^n [-2\alpha d_k c_k z_k(t) g_k(z_k(t)) + \alpha \sum_{l=1}^n 2d_k a_{kl} g_k(z_k(t)) g_l(z_l(t))] \\ & + \alpha \sum_{k=1}^n \sum_{l=1}^n 2d_k b_{kl} g_k(z_k(t)) g_l(z_l(t - \tau_{kl})) \\ & + \sum_{k=1}^n \sum_{l=1}^n \left[ \frac{\alpha}{\beta} d_k \hat{b}_{kl} g_l^2(z_l(t)) - \frac{\alpha}{\beta} d_k \hat{b}_{kl} g_l^2(z_l(t - \tau_{kl})) \right] \\ & + \gamma \sum_{k=1}^n \sum_{l=1}^n [g_l^2(z_l(t)) - g_l^2(z_l(t - \tau_{kl}))] \\ & + \sum_{k=1}^n \sum_{l=1}^n \left[ \frac{n}{c_k} (\hat{b}_{kl})^2 g_l^2(z_l(t)) - \frac{n}{c_k} (\hat{b}_{kl})^2 g_l^2(z_l(t - \tau_{kl})) \right] \end{aligned} \quad (4.46)$$

Aşağıdaki eşitsizlikleri yazabiliriz :

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n \sum_{l=1}^n 2a_{kl} z_k(t) g_l(z_l(t)) & \leq \sum_{k=1}^n \sum_{l=1}^n \left[ \frac{1}{n} c_k z_k^2(t) + \frac{n}{c_k} (a_{kl})^2 g_l^2(z_l(t)) \right] \\ & \leq \sum_{k=1}^n [c_k z_k^2(t) + \sum_{l=1}^n \frac{n}{c_k} (\hat{a}_{kl})^2 g_l^2(z_l(t))] \end{aligned} \quad (4.47)$$



$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^n \sum_{l=1}^n 2b_{kl}z_k(t)g_l(z_l(t - \tau_{kl})) &\leq \sum_{k=1}^n \sum_{l=1}^n \left[ \frac{1}{n}c_k z_k^2(t) + \frac{n}{c_k}(b_{kl})^2 g_l^2(z_l(t - \tau_{kl})) \right] \\
&\leq \sum_{k=1}^n [c_k z_k^2(t) + \sum_{l=1}^n \frac{n}{c_k} (\hat{b}_{kl})^2 g_l^2(z_l(t - \tau_{kl}))] \quad (4.48)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\sum_{k=1}^n \sum_{l=1}^n 2d_k b_{kl} g_k(z_k(t)) g_l(z_l(t - \tau_{kl})) \\
&\leq \sum_{k=1}^n \sum_{l=1}^n [d_k |b_{kl}| g_k^2(z_k(t)) + d_k |b_{kl}| g_l^2(z_l(t - \tau_{kl}))] \\
&\leq \sum_{k=1}^n \sum_{l=1}^n [\beta d_k \hat{b}_{kl} g_k^2(z_k(t)) + \frac{1}{\beta} d_k \hat{b}_{kl} g_l^2(z_l(t - \tau_{kl}))] \quad (4.49)
\end{aligned}$$

(4.47)-(4.49) nolu eşitsizlikler (4.46) denkleminde kullanıldığında aşağıdaki sonucu verir :

$$\begin{aligned}
\dot{V}(z(t)) &\leq \sum_{k=1}^n \sum_{l=1}^n \frac{n}{c_k} [(\hat{a}_{kl})^2 g_l^2(z_l(t)) + \frac{n}{c_k} (\hat{b}_{kl})^2 g_l^2(z_l(t))] \\
&\quad - 2\alpha \sum_{k=1}^n d_k c_k z_k(t) g_k(z_k(t)) + \alpha \sum_{k=1}^n \sum_{l=1}^n 2d_k a_{kl} g_k(z_k(t)) g_l(z_l(t)) \\
&\quad + \sum_{k=1}^n \sum_{l=1}^n [\alpha \beta d_k \hat{b}_{kl} g_l^2(z_l(t)) + \frac{\alpha}{\beta} d_k \hat{b}_{kl} g_k^2(z_k(t)) + \sum_{l=1}^n \gamma g_k^2(z_k(t))] \\
&= \sum_{k=1}^n \sum_{l=1}^n \frac{n}{c_k} [(\hat{a}_{lk})^2 + (\hat{b}_{lk})^2] g_k^2(z_k(t)) + \sum_{k=1}^n \sum_{l=1}^n \gamma g_k^2(z_k(t)) \\
&\quad - 2\alpha \sum_{k=1}^n d_k c_k z_k(t) g_k(z_k(t)) + \alpha \sum_{k=1}^n \sum_{l=1}^n 2d_k a_{kl} g_k(z_k(t)) g_l(z_l(t)) \\
&\quad + \sum_{k=1}^n \sum_{l=1}^n [\alpha \beta d_l \hat{b}_{lk} g_k^2(z_k(t)) + \frac{\alpha}{\beta} d_k \hat{b}_{kl} g_k^2(z_k(t))] \quad (4.50)
\end{aligned}$$

Aşağıdaki eşitsizlikleri yazabiliriz :

$$\sum_{k=1}^n \sum_{l=1}^n d_l \hat{b}_{lk} g_k^2(z_k(t)) \leq \|D\|_2 \|\hat{B}\|_1 \sum_{k=1}^n g_k^2(z_k(t)) = |g^T(z(t))| \|D\|_2 \|\hat{B}\|_1 |g(z(t))| \quad (4.51)$$

$$\sum_{k=1}^n \sum_{l=1}^n d_k \hat{b}_{kl} g_k^2(z_k(t)) \leq \|D\|_2 \|\hat{B}\|_\infty \sum_{k=1}^n g_k^2(z_k(t)) = |g^T(z(t))| \|D\|_2 \|\hat{B}\|_\infty |g(z(t))| \quad (4.52)$$

(4.23), (4.24), (4.51) ve (4.52) nolu eşitsizlikler, (4.50) denkleminde kullanıldığında

aşağıdaki sonucu verir :

$$\begin{aligned} \dot{V}(z(t)) &\leq \sum_{k=1}^n \sum_{l=1}^n \frac{n}{c_k} ((\hat{a}_{lk})^2 + (\hat{b}_{lk})^2) g_k^2(z_k(t)) + \sum_{k=1}^n \sum_{l=1}^n \gamma g_k^2(z_k(t)) \\ &\quad - 2\alpha |g^T(z(t))| \underline{C} D \Psi^{-1} |g(z(t))| - \alpha |g^T(z(t))| S |g(z(t))| \\ &\quad + \alpha \|g(z(t))\|_2^2 \end{aligned} \quad (4.53)$$

$c_m = \min\{c_k\}$ ,  $\hat{a}_M = \max\{(\hat{a}_{lk})^2\}$ ,  $\hat{b}_M = \max\{(\hat{b}_{lk})^2\}$ ,  $\gamma = \frac{n^2}{c_m} [(\hat{a}_M)^2 + (\hat{b}_M)^2]$  ve  $\beta = \sqrt{\frac{\|\hat{B}\|_\infty}{\|\hat{B}\|_1}}$  olarak belirlensin. Bu durumda, (4.53) aşağıdaki formu alır :

$$\begin{aligned} \dot{V}(z(t)) &\leq \frac{2n^2}{c_m} (\hat{a}_M + \hat{b}_M) |g^T(z(t))| |g(z(t))| \\ &\quad - 2\alpha |g^T(z(t))| \underline{C} D \Psi^{-1} |g(z(t))| - \alpha |g^T(z(t))| S |g(z(t))| \\ &\quad + 2\alpha \|D\|_2 \sqrt{\|\hat{B}\|_1 \|\hat{B}\|_\infty} |g^T(z(t))| |g(z(t))| \\ &= \frac{2n^2}{c_m} |g^T(z(t))| (\hat{a}_M + \hat{b}_M) |g(z(t))| \\ &\quad - \alpha |g^T(z(t))| (2\underline{C} D \Psi^{-1} - 2\|D\|_2 \sqrt{\|\hat{B}\|_1 \|\hat{B}\|_\infty} I + S) |g(z(t))| \\ &= \frac{2n^2}{c_m} |g^T(z(t))| (\hat{a}_M + \hat{b}_M) |g(z(t))| - \alpha |g^T(z(t))| \Theta |g(z(t))| \\ &\leq \frac{2n^2}{c_m} (\hat{a}_M + \hat{b}_M) \|g(z(t))\|_2^2 - \alpha \lambda_m(\Theta) \|g(z(t))\|_2^2 \\ &= \left[ \frac{2n^2}{c_m} (\hat{a}_M + \hat{b}_M) - \alpha \lambda_m(\Theta) \right] \|g(z(t))\|_2^2 \end{aligned} \quad (4.54)$$

Dikkat edilmelidir ki (4.54) ifadesi (4.31) ile aynı formdadır. Sadece  $\Upsilon$ ,  $\Theta$  ile,  $\varepsilon$  ise  $\alpha$  ile yer değiştirmiştir. Bu nedenle,  $\alpha > \frac{2n^2(\hat{a}_M + \hat{b}_M)}{c_m \lambda_m(\Theta)}$  seçildiğinde,  $\Theta > 0$  için (2.6) nolu sistemin orijini ya da eşdeğer olarak (2.1) nolu sistemin denge noktası global asimtotik robust kararlıdır.

**Teorem 4.4** (Faydasicok ve Arik, 2012a).

(2.1) nolu yapay sinir ağı modeli için  $f \in \mathcal{H}$  olsun. Ayrıca,  $\Psi = \text{diag}(\psi_k > 0)$ ,  $A^* = \frac{1}{2}(\bar{A} + \underline{A})$ ,  $A_* = \frac{1}{2}(\bar{A} - \underline{A})$  ve  $\hat{B} = (\hat{b}_{kl})_{n \times n}$ ,  $\hat{b}_{kl} = \max\{|\underline{b}_{kl}|, |\bar{b}_{kl}|\}$ ,  $(k, l = 1, 2, \dots, n)$ , olarak tanımlansın. Eğer

$$\Phi = 2\underline{C} D \Psi^{-1} - (D A^* + A_*^T D + \|D A_* + A_*^T D\|_2 I) - 2\|D\|_2 \sqrt{\|\hat{B}\|_1 \|\hat{B}\|_\infty} I > 0$$

koşulunu sağlayan pozitif bir diagonal  $D = \text{diag}(d_k > 0)$  matrisi mevcut ise, bu durumda (2.1) ile tanımlanan yapay sinir ağı global asimtotik robust kararlıdır.

**İspat :**

(4.6), (4.36) ve (4.43) nolu eşitsizlikler, (4.4) denkleminde kullanıldığında aşağıdaki sonucu verir :

$$2(f(x) - f(y))^T D(H(x) - H(y)) \leq -(f(x) - f(y))^T \Phi (f(x) - f(y)) \quad (4.55)$$

(4.55) ifadesi (4.44) ifadesi ile eşdeğer formdadır. Sadece  $\Theta$ ,  $\Phi$  ile yer değiştirmiştir. Bu nedenle,  $\Phi > 0$  doğrudan (2.1) nolu yapay sinir ağı modelinin denge noktasının varlığı ve tekliğini garanti eder.

Şimdi ise denge noktasının kararlılığını ispat edeceğiz. Eğer, (4.23), (4.39), (4.51) ve (4.52) nolu eşitsizlikleri, (4.50) denkleminde kullanırsak aşağıdaki sonucu elde ederiz :

$$\begin{aligned} \dot{V}(z(t)) &\leq 2 \frac{n^2}{c_m} (\hat{a}_M + \hat{b}_M) \|g(z(t))\|_2^2 \\ &\quad - 2\alpha |g^T(z(t))| \underline{C} D \Psi^{-1} |g(z(t))| \\ &\quad - \alpha |g^T(z(t))| (DA^* + A^{*T} D + \|DA_* + A_*^T D\|_2 I) |g(z(t))| \\ &\quad + 2 |g^T(z(t))| \alpha \|D\|_2 \sqrt{\|\hat{B}\|_1 \|\hat{B}\|_\infty} |g(z(t))| \\ &\leq \frac{2n^2}{c_m} (\hat{a}_M + \hat{b}_M) \|g(z(t))\|_2^2 - \alpha \lambda_m(\Phi) \|g(z(t))\|_2^2 \\ &= \left[ \frac{2n^2}{c_m} (\hat{a}_M + \hat{b}_M) - \alpha \lambda_m(\Phi) \right] \|g(z(t))\|_2^2 \end{aligned} \quad (4.56)$$

Dikkat edilmelidir ki (4.56) ifadesi (4.54) ile aynı formdadır. Sadece  $\Theta$ ,  $\Phi$  ile yer değiştirmiştir. Bu nedenle,  $\alpha > \frac{2n^2(\hat{a}_M + \hat{b}_M)}{c_m \lambda_m(\Phi)}$  seçildiğinde,  $\Phi > 0$  için (2.6) nolu sistemin orijini ya da eşdeğer olarak (2.1) nolu sistemin denge noktası global asimtotik robust kararlıdır.

**Teorem 4.5** (Faydasicok ve Arik, 2012b).

(2.1) nolu yapay sinir ağı modeli için  $f \in \mathcal{L}$  olsun. Ayrıca,  $\ell_M = \max\{\ell_k\}$  ve  $c_m = \min\{c_k\}$ ,  $A^* = \frac{1}{2}(\bar{A} + \underline{A})$ ,  $A_* = \frac{1}{2}(\bar{A} - \underline{A})$  ve  $\hat{B} = (\hat{b}_{kl})_{n \times n}$ ,  $\hat{b}_{kl} = \max\{|\underline{b}_{kl}|, |\bar{b}_{kl}|\}$ , ( $k, l = 1, 2, \dots, n$ ), olarak tanımlansın. Eğer bu yapay sinir ağı modelinin parametreleri için

$$\delta = c_m - \ell_M \sqrt{\|A^*\|_2^2 + 2\|A_*^T A^*\|_2 + \|A_*\|_2^2} - \ell_M \sqrt{\|\hat{B}\|_1 \|\hat{B}\|_\infty} > 0$$

koşulu sağlanırsa, (2.1) ile tanımlanan yapay sinir ağı global asimtotik robust kararlıdır.

**İspat :**

(4.2) nolu denklemin her iki tarafını  $(x - y)^T$  ile çarparsak, aşağıdaki ifadeyi elde ederiz :

$$\begin{aligned}
 (x - y)^T (H(x) - H(y)) &= -(x - y)^T C(x - y) + (x - y)^T (A + B)(f(x) - f(y)) \\
 &= -\sum_{k=1}^n c_k (x_k - y_k)^2 + (x - y)^T A(f(x) - f(y)) \\
 &\quad + \sum_{k=1}^n \sum_{l=1}^n b_{kl} (x_k - y_k)(f_l(x_l) - f_l(y_l))
 \end{aligned} \tag{4.57}$$

Aşağıdaki eşitsizliği yazabiliriz :

$$\begin{aligned}
 \sum_{k=1}^n \sum_{l=1}^n b_{kl} (x_k - y_k)(f_l(x_l) - f_l(y_l)) &\leq \sum_{k=1}^n \sum_{l=1}^n |b_{kl}| |x_k - y_k| |f_l(x_l) - f_l(y_l)| \\
 &\leq \sum_{k=1}^n \sum_{l=1}^n |b_{kl}| \ell_l |x_k - y_k| |x_l - y_l| \\
 &\leq \ell_M \sum_{k=1}^n \sum_{l=1}^n |b_{kl}| |x_k - y_k| |x_l - y_l| \\
 &\leq \frac{1}{2} \ell_M \sum_{k=1}^n \sum_{l=1}^n |b_{kl}| (\alpha (x_k - y_k)^2 + \frac{1}{\alpha} (x_l - y_l)^2) \\
 &= \frac{1}{2} \ell_M \sum_{k=1}^n \sum_{l=1}^n (\alpha |b_{kl}| + \frac{1}{\alpha} |b_{lk}|) (x_k - y_k)^2 \\
 &= \frac{1}{2} \ell_M (\alpha \|B\|_{\infty} + \frac{1}{\alpha} \|B\|_1) \|x - y\|_2^2
 \end{aligned} \tag{4.58}$$

Eğer  $\alpha = \sqrt{\frac{\|B\|_1}{\|B\|_{\infty}}}$  seçilirse, (4.58) eşitsizliği aşağıdaki formda yazılabilir :

$$\begin{aligned}
 \sum_{k=1}^n \sum_{l=1}^n b_{kl} (x_k - y_k)(f_l(x_l) - f_l(y_l)) &\leq \frac{1}{2} \ell_M (\sqrt{\frac{\|B\|_1}{\|B\|_{\infty}}} \|B\|_{\infty} + \sqrt{\frac{\|B\|_{\infty}}{\|B\|_1}} \|B\|_1) \|x - y\|_2^2 \\
 &= \ell_M \sqrt{\|B\|_1 \|B\|_{\infty}} \|x - y\|_2^2
 \end{aligned} \tag{4.59}$$

Aşağıdaki iki eşitsizliği de yazabiliriz :

$$-\sum_{k=1}^n c_k (x_k - y_k)^2 \leq -\sum_{k=1}^n c_k (x_k - y_k)^2 \leq -\sum_{k=1}^n c_m (x_k - y_k)^2 = -c_m \|x - y\|_2^2 \tag{4.60}$$

$$(x - y)^T A(f(x) - f(y)) \leq \|A\|_2 \|x - y\|_2 \|f(x) - f(y)\|_2 \leq \ell_M \|A\|_2 \|x - y\|_2^2 \tag{4.61}$$

(4.59)-(4.61) eşitsizlikleri (4.57) denkleminde kullanıldıklarında aşağıdaki ifadeyi elde

ederiz :

$$(x-y)^T(H(x)-H(y)) \leq -c_m\|x-y\|_2^2 + \ell_M\|A\|_2\|x-y\|_2^2 + \ell_M\sqrt{\|B\|_1\|B\|_\infty}\|x-y\|_2^2 \quad (4.62)$$

Kural 3.3 ışığında,  $A$  matrisi için  $\|A\|_2 \leq \sqrt{\|A^*\|_2^2 + \|A_*\|_2^2 + 2\|A_*^T A^*\|_2}$  ifadesini yazabiliriz. Ayrıca,  $B$  matrisi için de  $\|B\|_1 \leq \|\hat{B}\|_1$  ve  $\|B\|_\infty \leq \|\hat{B}\|_\infty$  eşitsizliklerinin sağlandığını biliyoruz.  $A$  ve  $B$  matrisleri için sağlanan bu üç eşitsizlik, (4.62) denkleminde kullanıldığında doğrudan aşağıdaki sonucu verir :

$$\begin{aligned} (x-y)^T(H(x)-H(y)) &\leq (-c_m + \ell_M\sqrt{\|A^*\|_2^2 + \|A_*\|_2^2 + 2\|A_*^T A^*\|_2})\|x-y\|_2^2 \\ &\quad + \ell_M\sqrt{\|\hat{B}\|_1\|\hat{B}\|_\infty}\|x-y\|_2^2 \\ &= -\delta\|x-y\|_2^2 \end{aligned} \quad (4.63)$$

(4.63) ile verilen ifadede,  $x-y \neq 0$  durumu için,  $\delta > 0$  olduğunda, aşağıdaki sonuç elde edilir :

$$(x-y)^T(H(x)-H(y)) < 0 \quad (4.64)$$

(4.64) eşitsizliğinden görülebilir ki bütün  $x \neq y$  durumları için  $H(x) \neq H(y)$  olacaktır. Şimdi de  $\delta > 0$  için  $\|x\| \rightarrow \infty$  iken  $\|H(x)\| \rightarrow \infty$  olduğunu göstereceğiz.  $y = 0$  için, (4.63) nolu eşitsizlik aşağıdaki formu alır :

$$x^T(H(x)-H(0)) \leq -\delta\|x\|_2^2 \quad (4.65)$$

(4.65) eşitsizliğinin her iki tarafının mutlak değerini aldığımızda şu ifadeyi elde ederiz :

$$|x^T(H(x)-H(0))| \geq \delta\|x\|_2^2 \quad (4.66)$$

Standart norm özelliklerinden yararlanarak, (4.66) ifadesini aşağıdaki şekilde yazabiliriz :

$$\|H(x)-H(0)\|_1\|x\|_\infty \geq \delta\|x\|_2^2 \quad (4.67)$$

$\|x\|_\infty \leq \|x\|_2$  ve  $\|H(x)-H(0)\|_1 \leq \|H(x)\|_1 + \|H(0)\|_1$  norm özellikleri kullanılarak, (4.67)

aşağıdaki şekilde yazılabilir :

$$\|H(x)\|_1 \geq \delta \|x\|_2 - \|H(0)\|_1 \quad (4.68)$$

(4.68) ifadesinde yer alan  $\|H(0)\|_1$  sonlu bir değer ve  $\delta > 0$  olduğundan, (4.68) eşitsizliği gereği  $\|x\| \rightarrow \infty$  iken  $\|H(x)\| \rightarrow \infty$  olacaktır. Böylece, (2.1) nolu yapay sinir ağının denge noktasının varlığı ve tekliği ispatlanmış oldu.

(2.6) nolu sisteminin denge noktasının kararlılık analizi için aşağıdaki pozitif tanımlı Lyapunov fonksiyonunu kullanacağız :

$$V(z(t)) = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n z_k^2(t) + \sum_{k=1}^n \sum_{l=1}^n \left( \beta + \frac{1}{2\alpha} \ell_M \hat{b}_{kl} \right) \int_{t-\tau_{kl}}^t z_l^2(\xi) d\xi \quad (4.69)$$

burada  $\alpha$  and  $\beta$ , sayısal değerleri sonradan belirlenecek pozitif sabitlerdir. (4.69) ile verilen Lyapunov fonksiyonunun zamana göre türevi aşağıdaki şekildedir :

$$\begin{aligned} \dot{V}(z(t)) &= \sum_{k=1}^n [-c_k z_k^2(t) + \sum_{l=1}^n a_{kl} z_k(t) g_l(z_l(t)) + \sum_{l=1}^n b_{kl} z_k(t) g_l(z_l(t - \tau_{kl}))] \\ &\quad + \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n \sum_{l=1}^n \left[ \frac{1}{\alpha} \ell_M \hat{b}_{kl} z_l^2(t) - \frac{1}{\alpha} \ell_M \hat{b}_{kl} z_l^2(t - \tau_{kl}) \right] \\ &\quad + \beta \sum_{k=1}^n \sum_{l=1}^n [z_l^2(t) - z_l^2(t - \tau_{kl})] \end{aligned} \quad (4.70)$$

Aşağıdaki eşitsizlikleri yazabiliriz :

$$-\sum_{k=1}^n c_k z_k^2(t) \leq -\sum_{k=1}^n c_k z_k^2(t) \leq -\sum_{k=1}^n c_m z_k^2(t) = -c_m \|z(t)\|_2^2 \quad (4.71)$$

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n \sum_{l=1}^n a_{kl} z_k(t) g_l(z_l(t)) &= z^T(t) A g(z(t)) \leq \|A\|_2 \|z(t)\|_2 \|g(z(t))\|_2 \\ &\leq \ell_M \|A\|_2 \|z(t)\|_2^2 \\ &\leq \ell_M \sqrt{\|A^*\|_2^2 + \|A_*\|_2^2 + 2\|A_*^T A^*\|_2} \|z(t)\|_2^2 \end{aligned} \quad (4.72)$$

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^n \sum_{l=1}^n b_{kl} z_k(t) g_l(z_l(t - \tau_{kl})) &\leq \sum_{k=1}^n \sum_{l=1}^n |b_{kl}| |z_k(t)| |g_l(z_l(t - \tau_{kl}))| \\
&\leq \sum_{k=1}^n \sum_{l=1}^n \ell_M |b_{kl}| |z_k(t)| |z_l(t - \tau_{kl})| \\
&\leq \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n \sum_{l=1}^n \ell_M |b_{kl}| (\alpha z_k^2(t) + \frac{1}{\alpha} z_l^2(t - \tau_{kl})) \\
&\leq \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n \sum_{l=1}^n \ell_M \hat{b}_{kl} (\alpha z_k^2(t) + \frac{1}{\alpha} z_l^2(t - \tau_{kl})) \quad (4.73)
\end{aligned}$$

(4.71)-(4.73) eşitsizliklerini (4.70) denkleminde kullanırsak şu ifadeyi elde ederiz :

$$\begin{aligned}
\dot{V}(z(t)) &\leq -c_m \|z(t)\|_2^2 + \ell_M \sqrt{\|A^*\|_2^2 + \|A_*\|_2^2 + 2\|A_*^T A^*\|_2} \|z(t)\|_2^2 \\
&\quad + \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n \sum_{l=1}^n \ell_M \hat{b}_{kl} (\alpha z_k^2(t) + \frac{1}{\alpha} z_l^2(t - \tau_{kl})) + \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n \sum_{l=1}^n \frac{1}{\alpha} \ell_M \hat{b}_{kl} z_l^2(t) \\
&\quad - \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n \sum_{l=1}^n \frac{1}{\alpha} \ell_M \hat{b}_{kl} z_l^2(t - \tau_{kl}) + \beta \sum_{k=1}^n \sum_{l=1}^n [z_l^2(t) - z_l^2(t - \tau_{kl})] \\
&= -c_m \|z(t)\|_2^2 + \ell_M \sqrt{\|A^*\|_2^2 + \|A_*\|_2^2 + 2\|A_*^T A^*\|_2} \|z(t)\|_2^2 \\
&\quad + \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n \sum_{l=1}^n \alpha \ell_M \hat{b}_{kl} z_k^2(t) + \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n \sum_{l=1}^n \frac{1}{\alpha} \ell_M \hat{b}_{lk} z_k^2(t) \\
&\quad + \beta \sum_{k=1}^n \sum_{l=1}^n [z_l^2(t) - z_l^2(t - \tau_{kl})] \\
&\leq -c_m \|z(t)\|_2^2 + \ell_M \sqrt{\|A^*\|_2^2 + \|A_*\|_2^2 + 2\|A_*^T A^*\|_2} \|z(t)\|_2^2 \\
&\quad + \frac{1}{2} \ell_M (\alpha \|\hat{B}\|_\infty + \frac{1}{\alpha} \|\hat{B}\|_1) \|z(t)\|_2^2 + \sum_{k=1}^n \sum_{l=1}^n \beta z_l^2(t) \quad (4.74)
\end{aligned}$$

$\alpha = \sqrt{\frac{\|\hat{B}\|_1}{\|\hat{B}\|_\infty}}$  için  $\frac{1}{2}(\alpha \|\hat{B}\|_\infty + \frac{1}{\alpha} \|\hat{B}\|_1) = \sqrt{\|\hat{B}\|_1 \|\hat{B}\|_\infty}$  elde edilir. Böylece, (4.74) ile ifade edilen  $\dot{V}(z(t))$  aşağıdaki formu alır :

$$\begin{aligned}
\dot{V}(z(t)) &\leq -c_m \|z(t)\|_2^2 + \ell_M \sqrt{\|A^*\|_2^2 + \|A_*\|_2^2 + 2\|A_*^T A^*\|_2} \|z(t)\|_2^2 \\
&\quad + \ell_M \sqrt{\|\hat{B}\|_\infty \|\hat{B}\|_1} \|z(t)\|_2^2 + \sum_{k=1}^n \sum_{l=1}^n \beta z_j^2(t) \\
&= -\delta \|z(t)\|_2^2 + n\beta \|z(t)\|_2^2 \\
&= -(\delta - n\beta) \|z(t)\|_2^2 \quad (4.75)
\end{aligned}$$

Eğer  $\beta < \frac{\delta}{n}$  seçilirse, bütün sıfırdan farklı  $z(t)$  için  $\dot{V}(z(t))$  negatif olacaktır.  $z(t) = 0$  olması

durumunda ise, (4.70) ile ifade edilen  $\dot{V}(z(t))$  aşığıdaki formu alır :

$$\dot{V}(z(t)) = - \sum_{k=1}^n \sum_{l=1}^n \left[ \frac{\ell_M}{2\alpha} \hat{b}_{kl} z_l^2(t - \tau_{kl}) - \beta z_l^2(t - \tau_{kl}) \right] \leq - \sum_{k=1}^n \sum_{l=1}^n \beta z_l^2(t - \tau_{kl}) \quad (4.76)$$

(4.76) nolu ifadeden açıkça görüleceğı gibi eğer sıfırdan farklı en az bir  $z_l(t - \tau_{kl})$  var ise, bu durumda, bu teoremin ispatı için kullanılan Lyapunov fonksiyonunun türevi  $\dot{V}(z(t))$  negatif tanımlı olacaktır. Böylece, sadece  $g(z(t)) = z(t) = 0$  and  $z_l(t - \tau_{kl}) = 0$ , tüm  $k, l$  için,  $\dot{V}(z(t)) = 0$  olacaktır. Diğer tüm durumlarda ise  $\dot{V}(z(t)) < 0$  olacaktır. Diğer yandan  $V(z(t))$  radyal sınırsızdır çünkü  $\|z(t)\| \rightarrow \infty$  iken  $V(z(t)) \rightarrow \infty$  olur. Böylece, (2.6) nolu sistemin orijini, ya da eşdeğer olarak (2.1) nolu sistemin denge noktası robust kararlıdır.

**Teorem 4.6** (Faydasicok ve Arık, 2013b).

(2.1) nolu yapay sinir ağı modeli için  $f \in \mathcal{L}$  olsun. Ayrıca,  $\ell_M = \max\{\ell_k\}$  ve  $c_m = \min\{c_k\}$ ,  $A^* = \frac{1}{2}(\bar{A} + \underline{A})$ ,  $A_* = \frac{1}{2}(\bar{A} - \underline{A})$  ve  $\hat{A} = (\hat{a}_{kl})_{n \times n}$ ,  $\hat{a}_{kl} = \max\{|\underline{a}_{kl}|, |\bar{a}_{kl}|\}$ ,  $P = (p_{kl})_{n \times n}$ ,  $p_{kl} = \hat{b}_{kl}^2$  and  $\hat{b}_{kl} = \max\{|\underline{b}_{kl}|, |\bar{b}_{kl}|\}$ , ( $k, l = 1, 2, \dots, n$ ),  $\|Q\|_2 = \min\{\sigma_2(A), \sigma_3(A), \sigma_4(A)\}$  olarak tanımlansın. Eğer,  $0 \leq \rho \leq 1$  için, bu yapay sinir ağı modelinin parametreleri

$$\varepsilon = c_m - \ell_M \|Q\|_2 - \ell_M \sqrt{n} ((1 - \rho) \sqrt{\|P\|_\infty} - \rho \sqrt{\|P\|_1}) > 0$$

koşulunu sağlar ise, (2.1) ile tanımlanan yapay sinir ağı global asimtotik robust kararlıdır.

**İspat :**

Aşığıdaki eşitsizliğı yazabiliriz :

$$\begin{aligned} & \sum_{k=1}^n \sum_{l=1}^n b_{kl} (x_k - y_k) (f_l(x_l) - f_l(y_l)) \\ & \leq \ell_M (1 - \rho) \sum_{k=1}^n \sum_{l=1}^n \frac{1}{2} (\nu \hat{b}_{kl}^2 (x_k - y_k)^2 + \frac{1}{\nu} (x_l - y_l)^2) \\ & \quad + \ell_M \rho \sum_{k=1}^n \sum_{l=1}^n \frac{1}{2} (\omega \hat{b}_{lk}^2 (x_k - y_k)^2 + \frac{1}{\omega} (x_l - y_l)^2) \\ & \leq \frac{1}{2} \ell_M (1 - \rho) (\nu \|P\|_\infty \|x - y\|_2^2 + \frac{1}{\nu} n \|x - y\|_2^2) \\ & \quad + \frac{1}{2} \ell_M \rho (\omega \|P\|_1 \|x - y\|_2^2 + \frac{1}{\omega} n \|x - y\|_2^2) \\ & = \frac{1}{2} \ell_M (1 - \rho) (\nu \|P\|_\infty + \frac{1}{\nu} n) \|x - y\|_2^2 + \frac{1}{2} \ell_M \rho (\omega \|P\|_1 + \frac{1}{\omega} n) \|x - y\|_2^2 \quad (4.77) \end{aligned}$$



Burada  $0 \leq p \leq 1$ ,  $\nu$  ve  $\omega$  pozitif sabitlerdir. Eğer  $\nu = \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{\|P\|_\infty}}$  ve  $\omega = \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{\|P\|_1}}$  olarak seçilirse, bu durumda, (4.77) aşağıdaki şekilde yazılabilir :

$$\begin{aligned}
& \sum_{k=1}^n \sum_{l=1}^n b_{kl}(x_k - y_k)(f_l(x_l) - f_l(y_l)) \\
& \leq \frac{1}{2} \ell_M (1 - \rho) \left( \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{\|P\|_\infty}} \|P\|_\infty + \frac{\sqrt{\|P\|_\infty}}{\sqrt{n}} n \right) \|x - y\|_2^2 \\
& \quad + \frac{1}{2} \ell_M \rho \left( \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{\|P\|_1}} \|P\|_1 + \frac{\sqrt{\|P\|_1}}{\sqrt{n}} n \right) \|x - y\|_2^2 \\
& = \ell_M \sqrt{n} \left( (1 - \rho) \sqrt{\|P\|_\infty} + \rho \sqrt{\|P\|_1} \right) \|x - y\|_2^2 \tag{4.78}
\end{aligned}$$

Kural 3.2-3.4 ile verilen koşullardan yararlanarak, aşağıdaki eşitsizliği yazabiliriz :

$$\begin{aligned}
(x - y)^T A (f(x) - f(y)) & \leq \|A\|_2 \|x - y\|_2 \|f(x) - f(y)\|_2 \\
& \leq \ell_M \|A\|_2 \|x - y\|_2^2 \leq \ell_M \|Q\|_2 \|x - y\|_2^2 \tag{4.79}
\end{aligned}$$

(4.60), (4.78) ve (4.79) nolu eşitsizlikler, (4.57) denkleminde kullanıldığında aşağıdaki sonucu verir :

$$\begin{aligned}
(x - y)^T (H(x) - H(y)) & \leq (-c_m + \ell_M \|Q\|_2) \|x - y\|_2^2 \\
& \quad + \ell_M \sqrt{n} \left( (1 - \rho) \sqrt{\|P\|_\infty} + \rho \sqrt{\|P\|_1} \right) \|x - y\|_2^2 \\
& = -(c_m - \ell_M \|Q\|_2 - \ell_M \sqrt{n} \left( (1 - \rho) \sqrt{\|P\|_\infty} + \rho \sqrt{\|P\|_1} \right)) \|x - y\|_2^2 \\
& = -\varepsilon \|x - y\|_2^2 \tag{4.80}
\end{aligned}$$

Dikkat edilmelidir ki (4.80) ifadesi (4.63) ifadesi ile eşdeğer formdadır. Sadece  $\delta$ ,  $\varepsilon$  ile yer değiştirmiştir. Bu nedenle,  $\varepsilon > 0$  doğrudan (2.1) nolu yapay sinir ağı modelinin denge noktasının varlığı ve tekliğini garanti eder.

(2.6) nolu sisteminin denge noktasının kararlılık analizi için aşağıda verilen pozitif tanımlı Lyapunov fonksiyonunu kullanacağız :

$$\begin{aligned}
V(z(t)) & = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n z_k^2(t) + \ell_M (1 - \rho) \sum_{k=1}^n \sum_{l=1}^n \frac{1}{2\alpha} \int_{t-\tau_{kl}}^t z_l^2(\xi) d\xi \\
& \quad + \ell_M \rho \sum_{k=1}^n \sum_{l=1}^n \frac{1}{2} \beta \hat{b}_{lk}^2 \int_{t-\tau_{lk}}^t z_k^2(\xi) d\xi + \gamma \sum_{k=1}^n \sum_{l=1}^n \int_{t-\tau_{kl}}^t z_l^2(\xi) d\xi \tag{4.81}
\end{aligned}$$

burada  $\alpha$ ,  $\beta$  ve  $\gamma$  sayısal değerleri sonradan belirlenecek pozitif sabitlerdir. (4.81) ile verilen Lyapunov fonksiyonunun zamana göre türevi aşağıdaki şekildedir :

$$\begin{aligned}
\dot{V}(z(t)) &= - \sum_{k=1}^n c_k z_k^2(t) + \sum_{k=1}^n \sum_{l=1}^n a_{kl} z_k(t) g_l(z_l(t)) + \sum_{k=1}^n \sum_{l=1}^n b_{kl} z_k(t) g_l(z_k(t - \tau_{kl})) \\
&+ \frac{1}{2\alpha} \ell_M (1 - \rho) \sum_{k=1}^n \sum_{l=1}^n [z_l^2(t) - z_k^2(t - \tau_{kl})] \\
&+ \frac{1}{2} \beta \ell_M \rho \sum_{k=1}^n \sum_{l=1}^n [\hat{b}_{lk}^2 z_k^2(t) - \hat{b}_{lk}^2 z_k^2(t - \tau_{lk})] \\
&+ \gamma \sum_{k=1}^n \sum_{l=1}^n [z_l^2(t) - z_l^2(t - \tau_{kl})] \tag{4.82}
\end{aligned}$$

Aşağıdaki eşitsizliği yazabiliriz :

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^n \sum_{l=1}^n b_{kl} z_k(t) g_l(z_l(t - \tau_{kl})) &\leq \sum_{k=1}^n \sum_{l=1}^n |b_{kl}| |z_k(t)| |g_l(z_l(t - \tau_{kl}))| \\
&\leq \sum_{k=1}^n \sum_{l=1}^n \ell_M |b_{kl}| |z_k(t)| |z_l(t - \tau_{kl})| \\
&\leq \ell_M \sum_{k=1}^n \sum_{l=1}^n \hat{b}_{kl} |z_k(t)| |z_l(t - \tau_{kl})| \\
&= \ell_M (1 - \rho) \sum_{k=1}^n \sum_{l=1}^n \hat{b}_{kl} |z_k(t)| |z_l(t - \tau_{kl})| \\
&\quad + \ell_M \rho \sum_{k=1}^n \sum_{l=1}^n \hat{b}_{kl} |z_k(t)| |z_l(t - \tau_{kl})| \\
&= \ell_M (1 - \rho) \sum_{k=1}^n \sum_{l=1}^n \hat{b}_{kl} |z_k(t)| |z_l(t - \tau_{kl})| \\
&\quad + \ell_M \rho \sum_{k=1}^n \sum_{l=1}^n \hat{b}_{lk} |z_l(t)| |z_k(t - \tau_{lk})| \\
&\leq \ell_M (1 - \rho) \sum_{k=1}^n \sum_{l=1}^n \frac{1}{2} (\alpha \hat{b}_{kl}^2 z_k^2(t) + \frac{1}{\alpha} z_l^2(t - \tau_{kl})) \\
&\quad + \ell_M \rho \sum_{k=1}^n \sum_{l=1}^n \frac{1}{2} (\frac{1}{\beta} z_l^2(t) + \beta \hat{b}_{lk}^2 z_k^2(t - \tau_{lk})) \tag{4.83}
\end{aligned}$$

(4.60), (4.72) ve (4.83) nolu eşitsizlikler, (4.82) denkleminde kullanıldığında aşağıdaki

sonucu verir :

$$\begin{aligned}
\dot{V}(z(t)) &\leq (-c_m + \ell_M \|Q\|_2) \|z(t)\|_2^2 + \ell_M (1 - \rho) \sum_{k=1}^n \sum_{l=1}^n \frac{1}{2} \alpha \hat{b}_{kl}^2 z_k^2(t) \\
&\quad + \ell_M (1 - \rho) \sum_{k=1}^n \sum_{l=1}^n \frac{1}{2\alpha} z_l^2(t) + \ell_M \rho \sum_{k=1}^n \sum_{l=1}^n \frac{1}{2} \beta \hat{b}_{lk}^2 z_k^2(t) \\
&\quad + \ell_M \rho \sum_{k=1}^n \sum_{l=1}^n \frac{1}{2} \frac{1}{\beta} z_l^2(t) + \gamma \sum_{k=1}^n \sum_{l=1}^n z_l^2(t) \\
&\leq -c_m \|z(t)\|_2^2 + \ell_M \|Q\|_2 \|z(t)\|_2^2 + \ell_M (1 - \rho) \frac{1}{2} \alpha \|R\|_\infty \|z(t)\|_2^2 \\
&\quad + \ell_M (1 - \rho) \frac{1}{2\alpha} n \|z(t)\|_2^2 + \ell_M \rho \frac{1}{2} \beta \|P\|_1 \|z(t)\|_2^2 \\
&\quad + \ell_M \rho \frac{1}{2} \frac{1}{\beta} n \|z(t)\|_2^2 + \gamma n \|z(t)\|_2^2
\end{aligned} \tag{4.84}$$

$\alpha = \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{\|P\|_\infty}}$  ve  $\beta = \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{\|P\|_1}}$  olarak seçilirse, bu durumda (4.84) aşağıdaki formu alır :

$$\begin{aligned}
\dot{V}(z(t)) &\leq (-c_m + \ell_M \|Q\|_2) \|z(t)\|_2^2 + \ell_M (1 - \rho) \frac{1}{2} \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{\|P\|_\infty}} \|P\|_\infty \|z(t)\|_2^2 \\
&\quad + \ell_M (1 - \rho) \frac{1}{2} \frac{\sqrt{\|P\|_\infty}}{\sqrt{n}} n \|z(t)\|_2^2 + \ell_M \rho \frac{1}{2} \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{\|P\|_1}} \|P\|_1 \|z(t)\|_2^2 \\
&\quad + \ell_M \rho \frac{1}{2} \frac{\sqrt{\|P\|_1}}{\sqrt{n}} n \|z(t)\|_2^2 + \gamma n \|z(t)\|_2^2 \\
&= (-c_m + \ell_M \|Q\|_2 + \ell_M (1 - \rho) \sqrt{n} \sqrt{\|P\|_\infty}) \|z(t)\|_2^2 \\
&\quad + (\ell_M \rho \sqrt{n} \sqrt{\|P\|_1} + \gamma n) \|z(t)\|_2^2 \\
&= -(c_m - \ell_M \|Q\|_2 - \ell_M \sqrt{n} ((1 - \rho) \sqrt{\|P\|_\infty})) \|z(t)\|_2^2 \\
&\quad - (-\rho \sqrt{\|P\|_1} + \gamma n) \|z(t)\|_2^2 \\
&= -\varepsilon \|z(t)\|_2^2 + \gamma n \|z(t)\|_2^2 \\
&= -(\varepsilon - \gamma n) \|z(t)\|_2^2
\end{aligned} \tag{4.85}$$

Eğer  $\gamma < \frac{\varepsilon}{n}$  seçilirse, bütün  $z(t) \neq 0$  için bu teoremden kullanılan Lyapunov fonksiyonunun zamana göre türevi negatif olacaktır.  $z(t) = 0$  olması durumunda ise, (4.82) ile ifade edilen

$\dot{V}(z(t))$  aşağıdaki formu alır :

$$\begin{aligned}
\dot{V}(z(t)) &= -\ell_M(1-\rho) \sum_{k=1}^n \sum_{l=1}^n \frac{1}{2\alpha} z_l^2(t - \tau_{kl}) \\
&\quad -\ell_M \rho \sum_{k=1}^n \sum_{l=1}^n \frac{1}{2} \beta \hat{b}_{lk}^2 z_k^2(t - \tau_{lk}) \\
&\quad -\gamma \sum_{k=1}^n \sum_{l=1}^n z_l^2(t - \tau_{kl}) \\
&\leq -\gamma \sum_{k=1}^n \sum_{l=1}^n z_l^2(t - \tau_{kl}) \tag{4.86}
\end{aligned}$$

(4.86) nolu ifadeden açıkça görüleceği gibi eğer sıfırdan farklı en az bir  $z_l(t - \tau_{kl})$  var ise, bu durumda  $\dot{V}(z(t))$  negatif olur. Böylece, sadece  $g(z(t)) = z(t) = 0$  ve  $z_l(t - \tau_{kl}) = 0$ , tüm  $k, l$  için,  $\dot{V}(z(t)) = 0$  olacaktır. Diğer tüm durumlarda ise  $\dot{V}(z(t)) < 0$  olacaktır. Diğer yandan  $V(z(t))$  radyal sınırsızdır çünkü  $\|z(t)\| \rightarrow \infty$  iken  $V(z(t)) \rightarrow \infty$  olur. Böylece, Teorem 3.1 ile verilen sonuca dayanarak, (2.6) nolu sistemin orijini, ya da eşdeğer olarak (2.1) nolu sistemin denge noktası global asimtotik robust kararlıdır.

**Teorem 4.7** (Faydasicok ve diğ., 2018b)

(2.1) nolu yapay sinir ağı modeli için  $f \in \mathcal{L}$  olsun. Ayrıca,  $\ell_M = \max\{\ell_k\}$ ,  $c_m = \min\{c_k\}$ ,  $\hat{A} = (\hat{a}_{kl})_{n \times n}$ ,  $\hat{a}_{kl} = \max\{|\underline{a}_{kl}|, |\bar{a}_{kl}|\}$  ve  $\hat{B} = (\hat{b}_{kl})_{n \times n}$ ,  $\hat{b}_{kl} = \max\{|\underline{b}_{kl}|, |\bar{b}_{kl}|\}$ ,  $(k, l = 1, 2, \dots, n)$ , olarak tanımlansın. Eğer

$$\xi = c_m - \ell_M \|\hat{A}\|_2 - \ell_M \sqrt{\|\hat{B}\|_1 \|\hat{B}\|_\infty} > 0$$

koşulu sağlanır ise, bu durumda (2.1) ile tanımlanan yapay sinir ağı global asimtotik robust kararlıdır.

Teroem 4.7'nin ispatı Teorem 4.5'in ispatı ile benzer olduğundan, Teroem 4.7'nin ispatı verilmeyecektir.

## 5. AYRIK ZAMAN GECİKMELİ VE BELİRSİZ YAPAY SİNİR AĞI MODELİNİN KARARLILIK ANALİZİ

$n$  adet nöron içeren bir yapay sinir ağı modelinde eğer gecikme parametrelerinin sayısı  $n$  ise, bu yapay sinir ağı ayrik zaman gecikmeli yapay sinir ağı olarak isimlendirilir ve aşağıdaki diferansiyel denklemler ile tanımlanır :

$$\frac{dx_k(t)}{dt} = -c_k x_k(t) + \sum_{l=1}^n a_{kl} f_l(x_l(t)) + \sum_{l=1}^n b_{kl} f_l(x_l(t - \tau_l)) + u_k, \quad k = 1, 2, \dots, n \quad (5.1)$$

(5.1) nolu yapay sinir ağı modeli matris-vektor formunda aşağıdaki şekilde yazılabilir :

$$\dot{x}(t) = -Cx(t) + Af(x(t)) + Bf(x(t - \tau)) + u \quad (5.2)$$

burada  $x(t) = (x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t))^T$ ,  $A = (a_{kl})$ ,  $B = (b_{kl})$ ,  $C = \text{diag}(c_k > 0)$ ,  $u = (u_1, u_2, \dots, u_n)^T$ ,  $f(x(t)) = (f_1(x_1(t)), f_2(x_2(t)), \dots, f_n(x_n(t)))^T$  ve  $f(x(t - \tau)) = (f_1(x_1(t - \tau_1)), f_2(x_2(t - \tau_2)), \dots, f_n(x_n(t - \tau_n)))^T$ .

$z_k(t) = x_k(t) - x_k^*$ ,  $k = 1, 2, \dots, n$ , dönüşümü kullanılarak (5.1) ile tanımlanan yapay sinir ağı modelinin dönüştürülmüş ifadesi aşağıdaki şekilde elde edilir :

$$\dot{z}_k(t) = -c_k z_k(t) + \sum_{l=1}^n a_{kl} g_l(z_l(t)) + \sum_{l=1}^n b_{kl} g_l(z_l(t - \tau_l)), \quad \forall k \quad (5.3)$$

burada  $g_k(z_k(t)) = f_k(z_k(t) + x_k^*) - f_k(x_k^*)$ ,  $k = 1, 2, \dots, n$ .

(5.3) aşağıdaki formda yazılabilir :

$$\dot{z}(t) = -Cz(t) + Ag(z(t)) + Bg(z(t - \tau)) \quad (5.4)$$

burada  $z(t) = (z_1(t), z_2(t), \dots, z_n(t))^T$ ,  $g(z(t)) = (g_1(z_1(t)), g_2(z_2(t)), \dots, g_n(z_n(t)))^T$  ve  $g(z(t - \tau)) = (g_1(z_1(t - \tau_1)), g_2(z_2(t - \tau_2)), \dots, g_n(z_n(t - \tau_n)))^T$ .

Şimdi de (5.2) ile tanımlanan yapay sinir ağı modelinin kararlılık analizi gerçekleştirilecektir.

**Teorem 5.1** (Faydasicok ve Arik, 2013c).

(5.2) nolu sistem için  $f \in \mathcal{H}$  olsun. Ayrıca,  $\Psi = \text{diag}(\psi_k > 0)$ ,  $A^* = \frac{1}{2}(\bar{A} + \underline{A})$ ,  $A_* = \frac{1}{2}(\bar{A} - \underline{A})$ ,  $B_* = \frac{1}{2}(\bar{B} - \underline{B})$ ,  $B^* = \frac{1}{2}(\bar{B} + \underline{B})$  ve  $\sigma_1(B) = \sqrt{\|B^{*T}B^*\| + 2\|B^{*T}B_* + B_*^TB^*\|_2}$  olarak tanımlansın. Eğer

$$\Omega_1 = 2\underline{C}D\Psi^{-1} - (DA^* + A^{*T}D + \|DA_* + A_*^TD\|_2I) - 2\sigma_1(B)\|D\|_2I > 0$$

koşulunu sağlayan pozitif bir diagonal  $D = \text{diag}(d_k > 0)$  matrisi mevcut ise, bu durumda (5.2) ile tanımlanan yapay sinir ağı global asimtotik robust kararlıdır.

**İspat :**

İlk olarak denge noktasının varlığı ve tekliğini ispat edeceğiz.  $\|DB\|_2 \leq \|D\|_2\|B\|_2$  kuralından yararlanarak, aşağıdaki ifadeyi yazabiliriz :

$$\begin{aligned} 2(f(x) - f(y))^T DB(f(x) - f(y)) &\leq 2\|DB\|_2\|f(x) - f(y)\|_2^2 \\ &\leq 2(f(x) - f(y))^T \|D\|_2\|B\|_2(f(x) - f(y)) \end{aligned} \quad (5.5)$$

Kural 3.1 ışığında, (5.5) aşağıdaki şekilde yazılabilir :

$$\begin{aligned} &2(f(x) - f(y))^T DB(f(x) - f(y)) \\ &\leq 2\|D\|_2\sqrt{\|B^{*T}B^*\| + 2\|B^{*T}B_* + B_*^TB^*\|_2}\|f(x) - f(y)\|_2^2 \end{aligned} \quad (5.6)$$

(4.6), (4.36) ve (5.6) nolu eşitsizlikler, (4.4) denkleminde kullanıldığında şu sonucu verir :

$$\begin{aligned} &2(f(x) - f(y))^T D(H(x) - H(y)) \\ &\leq -2(f(x) - f(y))^T \underline{C}D\Psi^{-1}(f(x) - f(y)) \\ &\quad + (f(x) - f(y))^T (DA^* + A^{*T}D\|DA_* + A_*^TD\|_2I)(f(x) - f(y)) \\ &\quad + 2\|D\|_2\sqrt{\|B^{*T}B^*\| + 2\|B^{*T}B_* + B_*^TB^*\|_2}\|f(x) - f(y)\|_2^2 \\ &= -(f(x) - f(y))^T \Omega_1(f(x) - f(y)) \end{aligned} \quad (5.7)$$

Dikkat edilmelidir ki (5.7) ifadesi (4.38) ifadesi ile eşdeğer formdadır. Sadece  $\Gamma$ ,  $\Omega_1$  ile yer değiştirmiştir. Bu nedenle,  $\Omega_1 > 0$  doğrudan (5.2) nolu yapay sinir ağı modelinin denge noktasının varlığı ve tekliğini garanti eder.

(5.2) nolu sisteminin denge noktasının kararlılık analizi için aşağıda verilen pozitif tanımlı Lyapunov fonksiyonunu kullanacağız :

$$V(z(t)) = z^T(t)z(t) + 2\alpha \sum_{k=1}^n \int_0^{z_k(t)} d_k g_k(s) ds + (\alpha\gamma + \beta) \sum_{k=1}^n \int_{t-\tau}^t g_k^2(z_k(\zeta)) d\zeta \quad (5.8)$$

burada  $d_k$ ,  $\alpha$ ,  $\beta$  ve  $\gamma$  sayısal değerleri sonradan belirlenecek pozitif sabitlerdir. (5.8) ile verilen Lyapunov fonksiyonunun zamana göre türevi aşağıdaki şekildedir :

$$\begin{aligned} \dot{V}(z(t)) &= z^T(t)[-2C + 2Ag(z(t)) + 2Bg(z(t-\tau))] \\ &\quad - 2\alpha g^T(z(t))DCz(t) + 2\alpha g^T(z(t))DAg(z(t)) + 2\alpha g^T(z(t))DBg(z(t-\tau)) \\ &\quad + (\alpha\gamma + \beta)[\|g(z(t))\|_2^2 - \|g(z(t-\tau))\|_2^2] \end{aligned} \quad (5.9)$$

Aşağıdaki eşitsizlikleri yazabiliriz :

$$-z^T(t)(-Cz(t) + 2Ag(z(t))) \leq \|C^{-1}\|_2 \|A\|_2^2 \|g(z(t))\|_2^2 \quad (5.10)$$

$$z^T(t)(-Cz(t) + 2Bg(z(t-\tau))) \leq \|C^{-1}\|_2 \|B\|_2^2 \|g(z(t-\tau))\|_2^2 \quad (5.11)$$

$$\begin{aligned} 2g^T(z(t))DBg(z(t-\tau)) &\leq 2\|DB\|_2 \|g(z(t))\|_2 \|g(z(t-\tau))\|_2 \\ &\leq \|DB\|_2 \|g(z(t))\|_2^2 + \alpha \|DB\|_2 \|g(z(t-\tau))\|_2^2 \\ &\leq \|D\|_2 \|B\|_2 (\|g(z(t))\|_2^2 + \|g(z(t-\tau))\|_2^2) \\ &\leq \|D\|_2 \sigma_1(B) (\|g(z(t-\tau))\|_2^2 + \|g(z(t))\|_2^2) \end{aligned} \quad (5.12)$$

$$-g^T(z(t))DCz(t) \leq -g^T(z(t))DC\Psi^{-1}g(z(t)) \quad (5.13)$$

(5.10)-(5.13) nolu eşitsizlikler, (5.9) denkleminde kullanıldığında aşağıdaki sonucu verir :

$$\begin{aligned} \dot{V}(z(t)) &\leq [\beta + \alpha\gamma + \|A\|_2^2 \|C^{-1}\|_2 \alpha \|D\|_2 \sigma_1(B)] \|g(z(t))\|_2^2 \\ &\quad + g^T(z(t))[-2\alpha DC\Psi^{-1} + \alpha(DA + A^T D)]g(z(t)) \\ &\quad + [-\alpha\gamma - \beta + \|B\|_2^2 \|C^{-1}\|_2 + \alpha \|D\|_2 \sigma_1(B)] \|g(z(t-\tau))\|_2^2 \end{aligned} \quad (5.14)$$

Kural 3.1 sonucuna dayanarak  $\|A\|_2 \leq \sigma_1(A)$  ve  $\|B\|_2 \leq \sigma_1(B)$  olduğunu dikkate aldığımızda, (5.14) ile edilen  $\dot{V}(z(t))$  aşağıdaki şekilde yazılabilir :

$$\begin{aligned} \dot{V}(z(t)) \leq & [\beta + \alpha\gamma + \sigma_1^2(A)\|C^{-1}\|_2\alpha\|D\|_2\sigma_1(B)]\|g(z(t))\|_2^2 \\ & + g^T(z(t))[-2\alpha DC\Psi^{-1} + \alpha(DA + A^T D)]g(z(t)) \\ & + [-\alpha\gamma - \beta + \sigma_1^2(B)\|C^{-1}\|_2 + \alpha\|D\|_2\sigma_1(B)]\|g(z(t-\tau))\|_2^2 \end{aligned} \quad (5.15)$$

$\beta = \sigma_1^2(B)\|C^{-1}\|_2$  ve  $\gamma = \|D\|_2\sigma_1(B)$  seçildiğinde, (5.15) aşağıdaki formu alır :

$$\begin{aligned} \dot{V}(z(t)) \leq & [(\sigma_1^2(A) + \sigma_1^2(B))\|C^{-1}\|_2 + 2\alpha\|D\|_2\sigma_1(B)]\|g(z(t))\|_2^2 \\ & + g^T(z(t))[-2\alpha DC\Psi^{-1} + \alpha g^T(z(t))(DA + A^T D)]g(z(t)) \end{aligned} \quad (5.16)$$

(4.39) eşitsizliği (5.16) nolu denklemde kullanıldığında aşağıdaki sonuç elde edilir :

$$\begin{aligned} \dot{V}(z(t)) \leq & \|C^{-1}\|_2(\sigma_1^2(A) + \sigma_1^2(B) + 2\alpha\|D\|_2\sigma_1(B))\|g(z(t))\|_2^2 \\ & - 2\alpha g^T(z(t))DC\Psi^{-1}g(z(t)) + \alpha g^T(z(t))(DA^* + A^{*T}D)g(z(t)) \\ & + \alpha g^T(z(t))\|DA_* + A_*^T D\|_2 g(z(t)) \\ = & -\alpha g^T(z(t))\Omega_1 g(z(t)) + \|C^{-1}\|_2(\sigma_1^2(A) + \sigma_1^2(B))\|g(z(t))\|_2^2 \end{aligned} \quad (5.17)$$

$\Omega_1 > 0$  olduğu için, (5.17) aşağıdaki sonucu verir :

$$\dot{V}(z(t)) \leq \|C^{-1}\|_2((\sigma_1^2(A) + \sigma_1^2(B)) - \alpha\lambda_m(\Omega_1))\|g(z(t))\|_2^2 \quad (5.18)$$

(5.19) ifadesinde, eğer

$$\alpha > \frac{(\sigma_1^2(A) + \sigma_1^2(B))\|C^{-1}\|_2}{\lambda_m(\Omega_1)}$$

seçilirse, bu durumda, tüm  $g(z(t)) \neq 0$  veya eşdeğer olarak tüm  $z(t) \neq 0$  için, bu teoremin ispatında kullanılan Lyapunov fonksiyonunun zaman göre türevi  $\dot{V}(z(t))$  negatif tanımlı olacaktır.  $g(z(t)) = 0$  ve  $z(t) \neq 0$  iken Lyapunov fonksiyonunun türevi aşağıdaki formdadır :

$$\begin{aligned} \dot{V}(z(t)) & = z^T(t)(-2Cz(t) + 2Bg(z(t-\tau))) - (\alpha\gamma + \beta)g^T(z(t-\tau))g(z(t-\tau)) \\ & \leq -z^T(t)(-2Cz(t) + 2Bg(z(t-\tau))) - \beta g^T(z(t-\tau))g(z(t-\tau)) \end{aligned} \quad (5.19)$$



Burada,

$$z^T(t)(-2Cz(t) + 2Bg(z(t - \tau))) \leq \beta g^T(z(t - \tau))g(z(t - \tau)) \leq 0$$

olduğundan, (5.19) ifadesinden aşağıdaki sonucu elde ederiz :

$$\dot{V}(z(t)) \leq -z^T(t)Cz(t) \quad (5.20)$$

$C$  pozitif diagonal bir matris olduğundan, (5.20) ifadesinde, tüm  $z(t) \neq 0$  için, bu teoremin ispatı için tanımlanan Lyapunov fonksiyonunun zamana göre türevi  $\dot{V}(z(t))$  negatif tanımlı olacaktır. Eğer aktivasyon fonksiyonları için  $g(z(t)) = 0$  ve nöron durumları için  $z(t) = 0$  koşullarının sağlandığı durumu incelersek,  $\dot{V}(z(t))$  için aşağıdaki ifadeyi elde ederiz :

$$\dot{V}(z(t)) = -(\alpha\gamma + \beta)g^T(z(t - \tau))g(z(t - \tau)) \quad (5.21)$$

(5.21) denkleminde açıkça görüleceği gibi tüm  $g(z(t - \tau)) \neq 0$  için  $\dot{V}(z(t)) < 0$  olacaktır. Böylece, ancak ve ancak  $z(t) = 0$ ,  $g(z(t)) = 0$  ve  $g(z(t - \tau)) = 0$  olduğunda bu teoremin ispatı için tanımlanan Lyapunov fonksiyonunun zamana göre türevi  $\dot{V}(z(t)) = 0$  olacaktır. Diğer tüm durumlarda ise  $\dot{V}(z(t))$  negatif tanımlı olacaktır. olur. Diğer yandan  $V(z(t))$  fonksiyonunun radyal sınırsız olduğu kolayca ispatlanabilir. Böylece, (5.4) nolu sistemin orijini, ya da eşdeğer olarak (5.2) nolu sistemin denge noktası global asimtotik kararlıdır.

**Teorem 5.2** (Faydasicok ve Arik, 2013c).

(5.2) nolu sistem için  $f \in \mathcal{H}$  olsun. Ayrıca,  $\Psi = \text{diag}(\psi_k > 0)$ ,  $S = (s_{kl})_{n \times n}$ ,  $s_{kk} = -2d_k \bar{a}_{kk}$ ,  $s_{kl} = -\max\{|d_k \bar{a}_{kl} + d_l \bar{a}_{lk}|, |d_k \underline{a}_{kl} + d_l \underline{a}_{lk}|\}$ ,  $k \neq l$ ,  $(k, l = 1, 2, \dots, n)$ ,  $B_* = \frac{1}{2}(\bar{B} - \underline{B})$ ,  $B^* = \frac{1}{2}(\bar{B} + \underline{B})$  ve  $\sigma_1(B) = \sqrt{\|B^{*T} B^*\| + 2\|B^{*T} B_* + B_*^T B^*\|_2}$  olarak tanımlansın. Eğer

$$\Pi_1 = 2\underline{C}D\Psi^{-1} + S - 2\sigma_1(B)\|D\|_2 I > 0$$

koşulunu sağlayan pozitif bir diagonal  $D = \text{diag}(d_k > 0)$  matrisi mevcut ise, bu durumda (5.2) ile tanımlanan yapay sinir ağı global asimtotik robust kararlıdır.

**İspat :**

(4.5),(4.6) ve (5.6) eşitsizlikleri (4.4) nolu denklemde kullanıldığında şu sonucu elde ederiz :

$$\begin{aligned}
& 2(f(x) - f(y))^T D(H(x) - H(y)) \\
& \leq |(f(x) - f(y))^T|[-2\underline{C}D\Psi^{-1} + S \\
& \quad + 2\sqrt{\|B^{*T}B^*\| + 2\|B^{*T}B_* + B_*^T B_*\|_2}\|P\|_2](f(x) - f(y)) \\
& = -|(f(x) - f(y))^T|\Pi_1|(f(x) - f(y))| \tag{5.22}
\end{aligned}$$

Dikkat edilmelidir ki (5.22) ifadesi (4.11) ifadesi ile eşdeğer formdadır. Sadece  $\Upsilon$ ,  $\Pi_1$  ile yer değiştirmiştir. Bu nedenle,  $\Pi_1 > 0$  doğrudan (5.2) nolu yapay sinir ağı modelinin denge noktasının varlığı ve tekliğini garanti eder.

(4.24) eşitsizliği (5.16) nolu denklemde kullanıldığında aşağıdaki şu elde ederiz :

$$\begin{aligned}
\dot{V}(z(t)) & \leq (\sigma_1^2(A) + \sigma_1^2(B))\|\underline{C}^{-1}\|_2\|g(z(t))\|_2^2 \\
& \quad + \alpha g^T(z(t))(-2DC\Psi^{-1} - S)|g^T(z(t))| \\
& \quad + 2\alpha\|D\|_2\sqrt{\|B^{*T}B^*\| + 2\|B^{*T}B_* + B_*^T B_*\|_2}\|g(z(t))\|_2^2 \\
& = (\sigma_1^2(A) + \sigma_1^2(B))\|\underline{C}^{-1}\|_2\|g(z(t))\|_2^2 - \alpha|g^T(z(t))|\Pi_1|g(z(t))| \tag{5.23}
\end{aligned}$$

Dikkat edilmelidir ki (5.23) ifadesi (5.17) ile aynı formdadır. Sadece  $\Omega$ ,  $\Pi_1$  ile yer değiştirmiştir. Bu durumda  $\alpha > \frac{(\sigma_1^2(A) + \sigma_1^2(B))\|\underline{C}^{-1}\|_2}{\lambda_m(\Pi)}$  seçilirse,  $\Pi_1 > 0$  için (5.4) nolu sistemin orijini ya da eşdeğer olarak (5.2) nolu sistemin denge noktası global asimtotik robust kararlıdır.

**Teorem 5.3** (Faydasicok ve Arik, 2012c).

(5.2) nolu sistem için  $f \in \mathcal{H}$  olsun. Ayrıca,  $\Psi = \text{diag}(\psi_k > 0)$ ,  $A^* = \frac{1}{2}(\bar{A} + \underline{A})$ ,  $A_* = \frac{1}{2}(\bar{A} - \underline{A})$ ,  $\|Q\|_2 = \min\{\sigma_2(B), \sigma_3(B), \sigma_4(B)\}$  olarak tanımlansın. Eğer

$$\Delta = 2\underline{C}D\Psi^{-1} - (DA^* + A^{*T}D + \|DA_* + A_*^T D\|_2 I) - 2\|D\|_2\|Q\|_2 I > 0$$

koşulunu sağlayan pozitif bir diagonal  $D = \text{diag}(d_k > 0)$  matrisi mevcut ise, bu durumda (5.2) ile tanımlanan yapay sinir ağı global asimtotik robust kararlıdır.

**İspat :**

$\|DB\|_2 \leq \|D\|_2 \|B\|_2 \leq \|D\|_2 \|Q\|_2$  koşulundan yararlanarak şu eşitsizliği yazabiliriz :

$$\begin{aligned}
& 2(f(x) - f(y))^T DB(f(x) - f(y)) \\
& \leq 2\|DB\|_2 \|f(x) - f(y)\|_2^2 \\
& \leq 2(f(x) - f(y))^T \|D\|_2 \|Q\|_2 (f(x) - f(y)) \quad (5.24)
\end{aligned}$$

(4.6), (4.36) ve (5.24) nolu eşitsizlikler, (4.4) denkleminde kullanıldığında şu sonucu verir :

$$\begin{aligned}
2(f(x) - f(y))^T D(H(x) - H(y)) & \leq -2(f(x) - f(y))^T \underline{CD}\Psi^{-1}(f(x) - f(y)) \\
& + (f(x) - f(y))^T (DA^* + A^{*T}D)(f(x) - f(y)) \\
& + (f(x) - f(y))^T (\|DA_* + A_*^T D\|_2 I)(f(x) - f(y)) \\
& + 2(f(x) - f(y))^T \|D\|_2 \|Q\|_2 (f(x) - f(y)) \\
& = -(f(x) - f(y))^T \Delta (f(x) - f(y)) \quad (5.25)
\end{aligned}$$

(5.25) ifadesi (4.38) ifadesi ile eşdeğer formdadır. Sadece  $\Gamma$ ,  $\Delta$  ile yer değiştirmiştir. Bu nedenle,  $\Delta > 0$  doğrudan (5.2) nolu yapay sinir ağı modelinin denge noktasının varlığı ve tekliğini garanti eder.

Şimdi de denge noktasının kararlılığını ispat edeceğiz. Bu amaçla, ilk olarak aşağıdaki eşitsizliği yazabiliriz :

$$\begin{aligned}
2\alpha g^T(z(t)) DB g(z(t - \tau)) & \leq 2\alpha \|DB\|_2 \|g(z(t))\|_2 \|g(z(t - \tau))\|_2 \\
& \leq \alpha \|DB\|_2 \|g(z(t))\|_2^2 + \alpha \|DB\|_2 \|g(z(t - \tau))\|_2^2 \quad (5.26)
\end{aligned}$$

(5.10), (5.11), (5.13) ve (5.26) nolu eşitsizlikler, (5.9) denkleminde kullanıldığında aşağıdaki sonucu verir :

$$\begin{aligned}
\dot{V}(z(t)) & \leq (\|A\|_2^2 + \|B\|_2^2 \|C^{-1}\|_2 \|g(z(t - \tau))\|_2^2) \\
& - 2\alpha g^T(z(t)) DC\Psi^{-1} g(z(t)) + \alpha g^T(z(t)) (DA + A^T D) g(z(t)) \\
& + \alpha \|DB\|_2 \|g(z(t))\|_2^2 + \alpha \|DB\|_2 \|g(z(t - \tau))\|_2^2 \\
& + (\alpha\gamma + \beta) (\|g(z(t))\|_2^2 - \|g(z(t - \tau))\|_2^2) \quad (5.27)
\end{aligned}$$

$A$  matrisi için  $\|A\|_2 \leq \sigma_2(A)$ ,  $B$  matrisi için  $\|B\|_2 \leq \sigma_2(B)$  ve  $C$  matrisi için  $\|C^{-1}\|_2 \leq \|\underline{C}^{-1}\|_2$  koşulları sağlanır. Diğer yandan  $\|DB\|_2 \leq \|D\|_2\|Q\|_2$  ve olduğundan, (5.27) ile elde edilen  $\dot{V}(z(t))$  aşağıdaki şekilde yazılabilir :

$$\begin{aligned}
\dot{V}(z(t)) \leq & \sigma_2^2(A)\|\underline{C}^{-1}\|_2\|g(z(t))\|_2^2 + \sigma_2^2(B)\|\underline{C}^{-1}\|_2\|g(z(t-\tau))\|_2^2 \\
& - 2\alpha g^T(z(t))DC\Psi^{-1}g(z(t)) \\
& + \alpha g^T(z(t))(DA + A^TD)g(z(t)) \\
& + \alpha\|D\|_2\|Q\|_2\|g(z(t))\|_2^2 \\
& + \alpha\|D\|_2\|Q\|_2\|g(z(t-\tau))\|_2^2 \\
& + (\alpha\gamma + \beta)(\|g(z(t))\|_2^2 - \|g(z(t-\tau))\|_2^2)
\end{aligned} \tag{5.28}$$

(5.28) ile verilen eşitsizlikte  $\beta = \sigma_2^2(B)\|\underline{C}^{-1}\|_2$  ve  $\gamma = \|D\|_2\|Q\|_2$  olarak seçilirse, bu durumda (5.28) ile verilen  $\dot{V}(z(t))$  aşağıdaki formu alır :

$$\begin{aligned}
\dot{V}(z(t)) \leq & (\sigma_2^2(A) + \sigma_2^2(B))\|\underline{C}^{-1}\|_2\|g(z(t))\|_2^2 - 2\alpha g^T(z(t))DC\Psi^{-1}g(z(t)) \\
& + \alpha g^T(z(t))(DA + A^TD)g(z(t)) + 2\alpha\|D\|_2\|Q\|_2\|g(z(t))\|_2^2
\end{aligned} \tag{5.29}$$

(4.39) eşitsizliği (5.29) nolu denklemde kullanıldığında aşağıdaki sonucu elde ederiz :

$$\begin{aligned}
\dot{V}(z(t)) \leq & (\sigma_2^2(A) + \sigma_2^2(B))\|\underline{C}^{-1}\|_2\|g(z(t))\|_2^2 - 2\alpha g^T(z(t))DC\Psi^{-1}g(z(t)) \\
& + \alpha g^T(z(t))(DA^* + A^{*T}D + \|DA_* + A_*^TD\|_2I)g(z(t)) \\
& + 2\alpha\|D\|_2\|Q\|_2\|g(z(t))\|_2^2 \\
= & (\sigma_2^2(A) + \sigma_2^2(B))\|\underline{C}^{-1}\|_2\|g(z(t))\|_2^2 - \alpha g^T(z(t))\Delta g(z(t))
\end{aligned} \tag{5.30}$$

Dikkat edilmelidir ki (5.30) ifadesi (5.17) ile aynı formdadır. Sadece  $\Omega_1$ ,  $\Delta$  ile yer değiştirmiştir. Bu durumda

$$\alpha > \frac{(\sigma_1^2(A) + \sigma_1^2(B))\|\underline{C}^{-1}\|_2}{\lambda_m(\Delta)}$$

seçilirse,  $\Delta > 0$  için (5.4) nolu sistemin orijini ya da eşdeğer olarak (5.2) nolu sistemin denge noktası global asimtotik robust kararlıdır.

**Teorem 5.4** (Faydasicok ve Arik, 2012c).

(5.2) nolu sistem için  $f \in \mathcal{K}$  olsun. Ayrıca,  $\Psi = \text{diag}(\psi_k > 0)$ ,  $S = (s_{kl})_{n \times n}$ ,  $s_{kk} = -2d_k \bar{a}_{kk}$ ,  $s_{kl} = -\max\{|d_k \bar{a}_{kl} + d_l \bar{a}_{lk}|, |d_k \underline{a}_{kl} + d_l \underline{a}_{lk}|\}$   $k \neq l$ ,  $(k, l = 1, 2, \dots, n)$ ,  $\|Q\|_2 = \min\{\sigma_2(B), \sigma_3(B), \sigma_4(B)\}$  olarak tanımlansın. Eğer

$$\Lambda = 2\underline{C}D\Psi^{-1} + S - 2\|D\|_2\|Q\|_2I > 0$$

koşulunu sağlayan pozitif bir diagonal  $D = \text{diag}(d_k > 0)$  matrisi mevcut ise, bu durumda (5.2) ile tanımlanan yapay sinir ağı global asimtotik robust kararlıdır.

**İspat :**

(4.5), (4.6) ve (5.24) nolu eşitsizlikler, (4.4) denkleminde kullanıldığında aşağıdaki sonucu verir :

$$\begin{aligned} & 2(f(x) - f(y))^T D(H(x) - H(y)) \\ & \leq 2|(f(x) - f(y))^T|(-\underline{C}DK^{-1} + \|D\|_2\|Q\|_2)|(f(x) - f(y))| \\ & \quad - |(f(x) - f(y))^T|S|(f(x) - f(y))| \\ & = -|(f(x) - f(y))^T|\Lambda|(f(x) - f(y)) \end{aligned} \quad (5.31)$$

Dikkat edilmelidir ki (5.31) ifadesi (4.11) ifadesi ile eşdeğer formdadır. Sadece  $\Upsilon$ ,  $\Lambda$  ile yer değiştirmiştir. Bu nedenle,  $\Lambda > 0$  doğrudan (5.2) nolu yapay sinir ağı modelinin denge noktasının varlığı ve tekliğini garanti eder.

Denge noktasının kararlılığını ispat etmek için ise (4.24) eşitsizliğini (5.29) nolu denklemde kullanacağız. Bu durumda aşağıdaki sonucu elde ederiz :

$$\begin{aligned} \dot{V}(z(t)) & \leq (\sigma_2^2(A) + \sigma_2^2(B))\|\underline{C}^{-1}\|_2\|g(z(t))\|_2^2 - 2\alpha|g^T(z(t))|DC\Psi^{-1}|g(z(t))| \\ & \quad - \alpha|g^T(z(t))|S|g(z(t))| + 2\alpha\|D\|_2\|Q\|_2\|g(z(t))\|_2^2 \\ & = (\sigma_2^2(A) + \sigma_2^2(B))\|\underline{C}^{-1}\|_2\|g(z(t))\|_2^2 - \alpha|g^T(z(t))|\Lambda|g(z(t))| \end{aligned} \quad (5.32)$$

Dikkat edilmelidir ki (5.32) ifadesi (5.17) ile aynı formdadır. Sadece  $\Omega_1$ ,  $\Lambda$  ile yer

değiştirmiştir. Bu durumda

$$\alpha > \frac{(\sigma_1^2(A) + \sigma_1^2(B))\|C^{-1}\|_2}{\lambda_m(\Lambda)}$$

seçilirse,  $\Lambda > 0$  için (5.4) nolu sistemin orijini ya da eşdeğer olarak (5.2) nolu sistemin denge noktası global asimtotik robust kararlıdır.



## 6. BULGULAR

Bu bölümde, bazı sayısal örnekler vererek, (2.1) ve (5.2) nolu denklemler ile tanımlanan gecikmeli yapay sinir ağlarının robust kararlılığı için bu tez çalışmasında elde edilen koşulların kendi aralarındaki farklılıklarını göstereceğiz. Ayrıca, yine bu sayısal örnekler yardımıyla, bu tezde elde edilen sonuçların daha önce literatürde yayınlanmış sonuçlara göre avantajlarını göstermek için sonuçlar arasında detaylı bir karşılaştırma yapacağız. Bunun için, öncelikle literatürde daha önce yapay sinir ağlarının robust kararlılığı ile ilgili yayınlanmış bazı önemli çalışmaları aşağıdaki teoremler ile yeniden ifade edeceğiz :

**Teorem 6.1** (Ozcan ve Arik, 2016).

(2.1) nolu yapay sinir ağı modeli için  $f \in \mathcal{H}$  olsun. Ayrıca,  $r = \min(\frac{d_k c_k}{\psi_k})$ ,  $s_{kk} = -2d_k \bar{a}_{kk}$ ,  $s_{kl} = -\max\{|d_k \bar{a}_{kl} + d_l \bar{a}_{lk}|, |d_k \underline{a}_{kl} + d_l \underline{a}_{lk}|\}$ ,  $k \neq l$ ,  $\hat{B} = (\hat{b}_{kl})_{n \times n}$ ,  $\hat{b}_{kl} = \max\{|\underline{b}_{kl}|, |\bar{b}_{kl}|\}$ ,  $(k, l = 1, 2, \dots, n)$ , olarak tanımlansın. Eğer

$$\Theta_1 = 2rI + S - \|D\|_2(\|\hat{B}\|_1 + \|\hat{B}\|_\infty)I > 0$$

koşulunu sağlayan bir pozitif diagonal  $D = \text{diag}(d_k > 0)$  matrisi mevcut ise, bu durumda (2.1) ile tanımlanan yapay sinir ağı global asimtotik robust kararlıdır.

**Teorem 6.2** (Sun ve Feng, 2003).

(2.1) nolu yapay sinir ağı modeli için  $f \in \mathcal{H}$  olsun. Ayrıca,  $\hat{a}_{kl} = \max\{|\underline{a}_{kl}|, |\bar{a}_{kl}|\}$  ve  $\hat{b}_{kl} = \max\{|\underline{b}_{kl}|, |\bar{b}_{kl}|\}$ ,  $(k, l = 1, 2, \dots, n)$ , olarak tanımlansın. Eğer

$$\gamma_k \left( \frac{c_k}{\psi_k} - \bar{a}_{kk} \right) - \sum_{\substack{l=1 \\ l \neq k}}^n \gamma_l \hat{a}_{lk} - \sum_{l=1}^n \gamma_l \hat{b}_{lk} > 0, \quad k = 1, 2, \dots, n$$

koşulunu sağlayan pozitif sabitler  $\gamma_k$ ,  $k = 1, 2, \dots, n$  mevcut ise, bu durumda (2.1) ile tanımlanan yapay sinir ağı global asimtotik robust kararlıdır.

**Teorem 6.3** (Ozcan ve Arik, 2016).

(2.1) nolu yapay sinir ağı modeli için  $f \in \mathcal{L}$  olsun. Ayrıca,  $\ell_M = \max\{\ell_k\}$  ve  $c_m = \min\{c_k\}$ ,  $\hat{B} = (\hat{b}_{kl})_{n \times n}$ ,  $\hat{b}_{kl} = \max\{|\underline{b}_{kl}|, |\bar{b}_{kl}|\}$ ,  $(k, l = 1, 2, \dots, n)$ ,  $A^* = \frac{1}{2}(\bar{A} + \underline{A})$ ,  $A_* = \frac{1}{2}(\bar{A} - \underline{A})$  ve olarak tanımlansın. Eğer bu yapay sinir ağı modelinin parametreleri için

$$\delta_1 = c_m - \ell_M(\|A^*\|_2 + \|A_*\|_2) - \frac{1}{2}\ell_M(\|\hat{B}\|_1 + \|\hat{B}\|_\infty) > 0$$

koşulu sağlanırsa, (2.1) ile tanımlanan yapay sinir ağı global asimtotik robust kararlıdır.

**Teorem 6.4** (Ozcan, 2011).

(2.1) nolu yapay sinir ağı modeli için  $f \in \mathcal{L}$  olsun. Ayrıca,  $\ell_M = \max\{\ell_k\}$  ve  $c_m = \min\{c_k\}$ ,  $\hat{B} = (\hat{b}_{kl})_{n \times n}$ ,  $\hat{b}_{kl} = \max\{|\underline{b}_{kl}|, |\bar{b}_{kl}|\}$ ,  $(k, l = 1, 2, \dots, n)$ ,  $A^* = \frac{1}{2}(\bar{A} + \underline{A})$ ,  $A_* = \frac{1}{2}(\bar{A} - \underline{A})$  ve olarak tanımlansın. Eğer bu yapay sinir ağı modelinin parametreleri için

$$\delta_2 = c_m - \ell_M \sqrt{\|A^*\|_2^2 + \|A_*\|_2^2 + 2\|A_*^T A^*\|_2} - \frac{1}{2}\ell_M(\|\hat{B}\|_1 + \|\hat{B}\|_\infty) > 0$$

koşulu sağlanırsa, (2.1) ile tanımlanan yapay sinir ağı global asimtotik robust kararlıdır.

**Teorem 6.5** (Liao ve Yu, 1998).

(2.1) nolu yapay sinir ağı modeli için  $f \in \mathcal{L}$  olsun. Ayrıca,  $\hat{a}_{kl} = \max\{|\underline{a}_{kl}|, |\bar{a}_{kl}|\}$  ve  $\hat{b}_{kl} = \max\{|\underline{b}_{kl}|, |\bar{b}_{kl}|\}$ ,  $(k, l = 1, 2, \dots, n)$ , olarak tanımlansın. Eğer

$$\gamma_k \frac{c_k}{\ell_k} - \sum_{l=1}^n \gamma_l (\hat{a}_{lk} + \hat{b}_{lk}) > 0, \quad k = 1, 2, \dots, n$$

koşulunu sağlayan pozitif sabitler  $\gamma_k$ ,  $k = 1, 2, \dots, n$  mevcut ise, bu durumda (2.1) ile tanımlanan yapay sinir ağı global asimtotik robust kararlıdır.

**Teorem 6.6** (Liao ve diğ., 2001).

(2.1) nolu yapay sinir ağı modeli için  $f \in \mathcal{L}$  olsun. Ayrıca,  $\hat{a}_{kl} = \max\{|\underline{a}_{kl}|, |\bar{a}_{kl}|\}$ ,  $\hat{b}_{kl} = \max\{|\underline{b}_{kl}|, |\bar{b}_{kl}|\}$ ,  $(k, l = 1, 2, \dots, n)$ ,  $r_1 \in [0, 1]$  ve  $r_2 \in [0, 1]$  olarak tanımlansın. Eğer

$$2\gamma_k c_k - \sum_{l=1}^n (\gamma_l \ell_l^{2r_1} \hat{a}_{kl} + \gamma_l \ell_k^{2(1-r_1)} \hat{a}_{lk} + \gamma_l \ell_l^{2r_2} \hat{b}_{kl} + \gamma_l \ell_k^{2(1-r_2)} \hat{b}_{lk}) > 0, \quad k = 1, 2, \dots, n$$



koşulunu sağlayan pozitif sabitler  $\gamma_k$ ,  $k = 1, 2, \dots, n$  mevcut ise, bu durumda (2.1) ile tanımlanan yapay sinir ağı global asimtotik robust kararlıdır.

**Teorem 6.7** (Chen ve Cao, 2005).

(2.1) nolu yapay sinir ağı modeli için  $f \in \mathcal{L}$  olsun. Ayrıca,  $\hat{a}_{kl} = \max\{|\underline{a}_{kl}|, |\bar{a}_{kl}|\}$ ,  $\hat{b}_{kl} = \max\{|\underline{b}_{kl}|, |\bar{b}_{kl}|\}$ ,  $(k, l = 1, 2, \dots, n)$ , olarak tanımlansın. Eğer

$$\sum_{l=1}^n [\gamma_k (\hat{b}_{kl})^{2-q_{kl}^*} (\ell_l)^{2-r_{kl}^*} + \gamma_l (\hat{a}_{lk})^{q_{lk}^*} (\ell_k)^{r_{lk}^*}] + \sum_{l=1}^n [\gamma_k (\hat{a}_{kl})^{2-q_{kl}^*} (\ell_l)^{2-r_{kl}^*} + \gamma_l (\hat{b}_{lk})^{q_{lk}^*} (\ell_k)^{r_{lk}^*}] < 2\gamma_k \underline{c}_k$$

koşulunu sağlayan pozitif sabitler  $\gamma_k$ ,  $k = 1, 2, \dots, n$  ve  $q_{kl}^*$ ,  $r_{kl}^*$ ,  $r_{kl}^*$ ,  $r_{kl}^*$ ,  $k, l = 1, 2, \dots, n$  mevcut ise, bu durumda (2.1) ile tanımlanan yapay sinir ağı global asimtotik robust kararlıdır.

**Teorem 6.8** (Li ve Cao, 2004).

(2.1) nolu yapay sinir ağı modeli için  $f \in \mathcal{L}$  olsun. Ayrıca,  $\hat{a}_{kl} = \max\{|\underline{a}_{kl}|, |\bar{a}_{kl}|\}$ ,  $\hat{b}_{kl} = \max\{|\underline{b}_{kl}|, |\bar{b}_{kl}|\}$ ,  $(k, l = 1, 2, \dots, n)$ , olarak tanımlansın. Eğer

$$\sum_{l=1}^n [\gamma_k (\hat{a}_{kl})^{2-r_{kl}^*} (\ell_l)^{2-q_{kl}^*} + \gamma_j (\ell_k)^{q_{kl}^*} (\hat{a}_{kl})^{r_{kl}^*} + \gamma_k (\ell_l)^{2-q_{kl}^*} (\hat{b}_{kl})^{2-r_{kl}^*} + \gamma_l (\ell_k)^{q_{lk}^*} (\hat{b}_{lk})^{r_{lk}^*}] < 2\gamma_k \underline{c}_k$$

koşulunu sağlayan pozitif sabitler  $\gamma_k$ ,  $k = 1, 2, \dots, n$  ve  $q_{kl}^*$ ,  $r_{kl}^*$ ,  $r_{kl}^*$ ,  $r_{kl}^*$ ,  $k, l = 1, 2, \dots, n$  mevcut ise, bu durumda (2.1) ile tanımlanan yapay sinir ağı global asimtotik robust kararlıdır.

**Teorem 6.9** (Shao ve diğ., 2010).

(5.2) nolu sistem için  $f \in \mathcal{K}$  olsun. Ayrıca,  $\Psi = \text{diag}(\psi_k > 0)$ ,  $A^* = \frac{1}{2}(\bar{A} + \underline{A})$ ,  $A_* = \frac{1}{2}(\bar{A} - \underline{A})$ ,  $\|R\|_2 = \min\{\sigma_2(B), \sigma_4(B)\}$  olarak tanımlansın. Eğer

$$\Delta_1 = 2\underline{C}D\Psi^{-1} - (DA^* + A^{*T}D + \|DA_* + A_*^T D\|_2 I) - 2\|D\|_2 \|R\|_2 I > 0$$

koşulunu sağlayan pozitif bir diagonal  $D = \text{diag}(d_k > 0)$  matrisi mevcut ise, bu durumda (5.2) ile tanımlanan yapay sinir ağı global asimtotik robust kararlıdır.

**Teorem 6.10** (Qi, 2007).

(5.2) nolu sistem için  $f \in \mathcal{K}$  olsun. Ayrıca,  $\Psi = \text{diag}(\psi_k > 0)$ ,  $A^* = \frac{1}{2}(\bar{A} + \underline{A})$ ,  $A_* = \frac{1}{2}(\bar{A} - \underline{A})$  ve  $\sigma_2(B) = \|B^*\|_2 + \|B_*\|_2$  olarak tanımlansın. Eğer

$$\Delta_2 = 2\underline{C}D\Psi^{-1} - (DA^* + A_*^T D + 2\|D\|_2\|A_*\|_2 I) - 2\sigma_2(B)\|D\|_2 I > 0$$

koşulunu sağlayan pozitif bir diagonal  $D = \text{diag}(d_k > 0)$  matrisi mevcut ise, bu durumda (5.2) ile tanımlanan yapay sinir ağı global asimtotik robust kararlıdır.

**Teorem 6.11** (Cao ve diğ., 2005).

(5.2) nolu sistem için  $f \in \mathcal{K}$  olsun. Ayrıca  $S = (s_{kl})_{n \times n}$ ,  $s_{kk} = -2\bar{a}_{kk}$ ,  $s_{kl} = -\max\{|\bar{a}_{kl} + \bar{a}_{lk}|, |\underline{a}_{kl} + \underline{a}_{lk}|\}$ ,  $k \neq l$ ,  $(k, l = 1, 2, \dots, n)$ ,  $\sigma_2(B) = \|B^*\|_2 + \|B_*\|_2$  ve  $r = \min(\frac{c_k}{\Psi_k})$  olarak tanımlansın. Eğer

$$(i) S = (s_{kl})_{n \times n} > 0$$

$$(ii) \sigma_2(B) \leq r$$

koşulları sağlanırsa, bu durumda (5.2) ile tanımlanan yapay sinir ağı global asimtotik robust kararlıdır.

**Teorem 6.12** (Arik, 2005).

(5.2) nolu sistem için  $f \in \mathcal{K}$  olsun. Ayrıca  $S = (s_{kl})_{n \times n}$ ,  $s_{kk} = -2\bar{a}_{kk}$ ,  $s_{kl} = -\max\{|\bar{a}_{kl} + \bar{a}_{lk}|, |\underline{a}_{kl} + \underline{a}_{lk}|\}$ ,  $k \neq l$ ,  $(k, l = 1, 2, \dots, n)$ ,  $\sigma_2(B) = \|B^*\|_2 + \|B_*\|_2$  ve  $r = \min(\frac{c_k}{\Psi_k})$  olarak tanımlansın. Eğer

$$(i) S = (s_{ij})_{n \times n} > 0$$

$$(ii) \sigma_2(B) \leq \sqrt{2r-1}$$

koşulları sağlanırsa, bu durumda (5.2) ile tanımlanan yapay sinir ağı global asimtotik robust kararlıdır.

Burada, Teorem 6.10-6.12 ile verilen sonuçların, Teorem 6.9 ile verilen sonucun özel durumları olduğunu vurgulamamız gerekir.

**Teorem 6.13** (Ozcan ve Arik, 2016).

(5.2) nolu sistem için  $f \in \mathcal{K}$  olsun. Ayrıca  $S = (s_{kl})_{n \times n}$ ,  $s_{kk} = -2\bar{a}_{kk}$ ,  $s_{kl} = -\max\{|\bar{a}_{kl} + \bar{a}_{lk}|, |\underline{a}_{kl} + \underline{a}_{lk}|\}$ ,  $k \neq l$ ,  $(k, l = 1, 2, \dots, n)$ ,  $\sigma_2(B) = \|B^*\|_2 + \|B_*\|_2$  ve  $r = \min(\frac{c_k}{\Psi_k})$  olarak tanımlansın. Eğer

$$\Lambda_1 = 2rI + S - 2\sigma_2(B)\|D\|_2I > 0$$

koşulunu sağlayan pozitif bir diagonal  $D = \text{diag}(d_k > 0)$  matrisi mevcut ise, bu durumda (5.2) ile tanımlanan yapay sinir ağı global asimtotik robust kararlıdır.

**Teorem 6.14** (Ensari ve Arik, 2010).

(5.2) nolu sistem için  $f \in \mathcal{K}$  olsun. Ayrıca  $S = (s_{kl})_{n \times n}$ ,  $s_{kk} = -2\bar{a}_{kk}$ ,  $s_{kl} = -\max\{|\bar{a}_{kl} + \bar{a}_{lk}|, |\underline{a}_{kl} + \underline{a}_{lk}|\}$ ,  $k \neq l$ ,  $(k, l = 1, 2, \dots, n)$ ,  $\sigma_3(B) = \sqrt{\|B^*\|_2^2 + \|B_*\|_2^2 + 2\|B_*^T|B^*|\|_2}$  ve  $r = \min(\frac{c_k}{\Psi_k})$  olarak tanımlansın. Eğer

$$\Lambda_2 = 2\underline{C}D\Psi^{-1} + S - 2\sigma_3(B)\|D\|_2I > 0$$

koşulunu sağlayan pozitif bir diagonal  $D = \text{diag}(d_k > 0)$  matrisi mevcut ise, bu durumda (5.2) ile tanımlanan yapay sinir ağı global asimtotik robust kararlıdır.

**Teorem 6.15** (Singh, 2007).

(5.2) nolu sistem için  $f \in \mathcal{K}$  olsun. Ayrıca  $S = (s_{kl})_{n \times n}$ ,  $s_{kk} = -2\bar{a}_{kk}$ ,  $s_{kl} = -\max\{|\bar{a}_{kl} + \bar{a}_{lk}|, |\underline{a}_{kl} + \underline{a}_{lk}|\}$ ,  $k \neq l$ ,  $(k, l = 1, 2, \dots, n)$ ,  $\sigma_4(B) = \|\hat{B}\|_2$  ve  $r = \min(\frac{c_k}{\Psi_k})$  olarak tanımlansın. Eğer

$$\Lambda_3 = 2\underline{C}D\Psi^{-1} - S - 2\sigma_4(B)\|D\|_2I > 0$$

koşulunu sağlayan pozitif bir diagonal  $D = \text{diag}(d_k > 0)$  matrisi mevcut ise, bu durumda (5.2) ile tanımlanan yapay sinir ağı global asimtotik robust kararlıdır.

**Teorem 6.16** (Shao ve diğ., 2010).

(5.2) nolu sistem için  $f \in \mathcal{K}$  olsun. Ayrıca,  $\Psi = \text{diag}(\psi_k > 0)$ ,  $A^* = \frac{1}{2}(\bar{A} + \underline{A})$ ,  $A_* = \frac{1}{2}(\bar{A} - \underline{A})$  ve  $\sigma_2(B) = \|B^*\|_2 + \|B_*\|_2$  olarak tanımlansın. Eğer

$$\Omega_2 = 2\underline{C}D\Psi^{-1} - (DA^* + A_*^T D + \|DA_* + A_*^T D\|_2I) - 2\sigma_2(B)\|D\|_2I > 0$$

koşulunu sağlayan pozitif bir diagonal  $D = \text{diag}(d_k > 0)$  matrisi mevcut ise, bu durumda (5.2) ile tanımlanan yapay sinir ağı global asimtotik robust kararlıdır.

**Teorem 6.17** (Faydasicok ve Arik, 2013c).

(5.2) nolu sistem için  $f \in \mathcal{K}$  olsun. Ayrıca,  $\Psi = \text{diag}(\psi_k > 0)$ ,  $A^* = \frac{1}{2}(\bar{A} + \underline{A})$ ,  $A_* = \frac{1}{2}(\bar{A} - \underline{A})$  ve  $\sigma_3(B) = \sqrt{\|B^*\|_2^2 + \|B_*\|_2^2 + 2\|B_*^T |B^*|\|_2}$  olarak tanımlansın. Eğer

$$\Omega_3 = 2\underline{C}D\Psi^{-1} - (DA^* + A^{*T}D + \|DA_* + A_*^T D\|_2 I) - 2\sigma_3(B)\|D\|_2 I > 0$$

koşulunu sağlayan pozitif bir diagonal  $D = \text{diag}(d_k > 0)$  matrisi mevcut ise, bu durumda (5.2) ile tanımlanan yapay sinir ağı global asimtotik robust kararlıdır.

**Teorem 6.18** (Shao ve diğ., 2010).

(5.2) nolu sistem için  $f \in \mathcal{K}$  olsun. Ayrıca,  $\Psi = \text{diag}(\psi_k > 0)$ ,  $A^* = \frac{1}{2}(\bar{A} + \underline{A})$ ,  $A_* = \frac{1}{2}(\bar{A} - \underline{A})$  ve  $\sigma_4(B) = \|\hat{B}\|_2$  olarak tanımlansın. Eğer

$$\Omega_4 = 2\underline{C}D\Psi^{-1} - (DA^* + A^{*T}D + \|DA_* + A_*^T D\|_2 I) - 2\sigma_4(B)\|D\|_2 I > 0$$

koşulunu sağlayan pozitif bir diagonal  $D = \text{diag}(d_k > 0)$  matrisi mevcut ise, bu durumda (5.2) ile tanımlanan yapay sinir ağı global asimtotik robust kararlıdır.

**Teorem 6.19** (Shao ve diğ., 2010).

(5.2) nolu yapay sinir ağı modeli için  $f \in \mathcal{K}$  olsun. Ayrıca,  $\Psi = \text{diag}(\psi_k > 0)$ ,  $S = (s_{kl})_{n \times n}$ ,  $s_{kk} = -2\bar{a}_{kk}$ ,  $s_{kl} = -\max\{|\bar{a}_{kl} + \bar{a}_{lk}|, |\underline{a}_{kl} + \underline{a}_{lk}|\}$ ,  $k \neq l, (k, l = 1, 2, \dots, n)$ , ve  $\sigma_2(B) = \|B^*\|_2 + \|B_*\|_2$  olarak tanımlansın. Eğer

$$\Pi_2 = 2\underline{C}D\Psi^{-1} + S - 2\sigma_2(B)\|D\|_2 I > 0$$

koşulunu sağlayan pozitif bir diagonal  $D = \text{diag}(d_k > 0)$  matrisi mevcut ise, bu durumda (5.2) ile tanımlanan yapay sinir ağı global asimtotik robust kararlıdır.

**Teorem 6.20** (Faydasicok ve Arik, 2013c).

(5.2) nolu yapay sinir ağı modeli için  $f \in \mathcal{H}$  olsun. Ayrıca,  $\Psi = \text{diag}(\psi_k > 0)$ ,  $S = (s_{kl})_{n \times n}$ ,  $s_{kk} = -2\bar{a}_{kk}$ ,  $s_{kl} = -\max\{|\bar{a}_{kl} + \bar{a}_{lk}|, |\underline{a}_{kl} + \underline{a}_{lk}|\}$ ,  $k \neq l, (k, l = 1, 2, \dots, n)$ , ve  $\sigma_3(B) = \sqrt{\|B^*\|_2^2 + \|B_*\|_2^2 + 2\|B_*^T |B^*|\|_2}$  olarak tanımlansın. Eğer

$$\Pi_3 = 2\underline{C}D\Psi^{-1} + S - 2\sigma_3(B)\|D\|_2 I > 0$$

koşulunu sağlayan pozitif bir diagonal  $D = \text{diag}(d_k > 0)$  matrisi mevcut ise, bu durumda (5.2) ile tanımlanan yapay sinir ağı global asimtotik robust kararlıdır.

**Teorem 6.21** (Shao ve diğ., 2010).

(5.2) nolu yapay sinir ağı modeli için  $f \in \mathcal{H}$  olsun. Ayrıca,  $\Psi = \text{diag}(\psi_k > 0)$ ,  $S = (s_{kl})_{n \times n}$ ,  $s_{kk} = -2\bar{a}_{kk}$ ,  $s_{kl} = -\max\{|\bar{a}_{kl} + \bar{a}_{lk}|, |\underline{a}_{kl} + \underline{a}_{lk}|\}$ ,  $k \neq l, (k, l = 1, 2, \dots, n)$ , ve  $\sigma_4(B) = \|\hat{B}\|_2$  olarak tanımlansın. Eğer

$$\Pi_4 = 2\underline{C}D\Psi^{-1} + S - 2\sigma_4(B)\|D\|_2 I > 0$$

koşulunu sağlayan pozitif bir diagonal  $D = \text{diag}(d_k > 0)$  matrisi mevcut ise, bu durumda (5.2) ile tanımlanan yapay sinir ağı global asimtotik robust kararlıdır.

Şimdi aşağıdaki örnekleri vereceğiz :

**Örnek 6.1 :**

(2.1) ile tanımlanan gecikmeli yapay sinir ağına ait sistem parametreleri aşağıdaki şekilde seçilmiş olsun :

$$\underline{A} = \begin{bmatrix} -1 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & -1 \end{bmatrix}, \bar{A} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix},$$

$$\underline{B} = \begin{bmatrix} -1 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \bar{B} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$\psi_1 = \psi_2 = \psi_3 = \psi_4 = 1 \text{ ve } c_1 = c_2 = c_3 = c_4 = c$$

Yukarıda verilen matrislerden,  $A^*$ ,  $A_*$  ve  $\hat{B}$  matrislerini aşağıdaki şekilde elde ederiz :

$$A^* = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, A_* = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}, \hat{B} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Bu matrisler için  $\|A^*\|_2 = 0$ ,  $\|A_*\|_2 = 4$ ,  $\|\hat{B}\|_1 = 1$  ve  $\|\hat{B}\|_\infty = 4$  olarak elde edilir.

Bu örnekteki sistem parametreleri ve  $D = I$  için, Teorem 4.3 ile verilen  $\Theta$  matrisi aşağıdaki şekildedir :

$$\Theta = 2 \begin{bmatrix} c-3 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & c-3 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & c-3 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & c-3 \end{bmatrix}$$

Teorem 4.3 gereğince  $\Theta$  matrisinin pozitif tanımlı,  $\Theta > 0$ , olması için  $c > 6$  seçilmesi gerekli ve yeterlidir. Bu nedenle, bu örnekte verilen yapay sinir ağı modeli için robust kararlılık koşulu  $c > 6$  olacaktır.

Bu örnekteki sistem parametreleri ve  $D = I$  için, Teorem 4.4 ile verilen  $\Phi$  matrisi aşağıdaki şekildedir :

$$\Phi = 2 \begin{bmatrix} c-6 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & c-6 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & c-6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & c-6 \end{bmatrix}$$

Teorem 4.4 gereğince  $\Phi$  matrisinin pozitif tanımlı,  $\Phi > 0$ , olması için  $c > 6$  seçilmesi gerekli ve yeterlidir. Bu nedenle, bu örnekte verilen yapay sinir ağı modeli için robust kararlılık koşulu yine  $c > 6$  olacaktır.

Bu örnekteki sistem parametreleri ve  $D = I$  için, Teorem 6.1 ile verilen  $\Theta_1$  matrisi aşağıdaki şekildedir :

$$\Theta_1 = 2 \begin{bmatrix} c-6.5 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & c-6.5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & c-6.5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & c-6.5 \end{bmatrix}$$

Teorem 6.1 gereğince  $\Theta_1$  matrisinin pozitif tanımlı,  $\Theta_1 > 0$ , olması için  $c > 6.5$  seçilmesi gerekli ve yeterlidir. Bu nedenle, bu örnekte verilen yapay sinir ağı modeli için robust kararlılık koşulu  $c > 6.5$  olacaktır. Böylece, bu örnekteki sistem parametreleri için,  $6 < c \leq 6.5$  olarak seçildiğinde, Teorem 6.1 ile verilen  $\Theta_1 > 0$  koşulu sağlanmadığı halde, Teorem 4.3 ile verilen  $\Theta > 0$  ve Teorem 4.4 ile verilen  $\Phi > 0$  koşulları sağlanmaktadır.

### Örnek 6. 2 :

(2.1) ile tanımlanan gecikmeli yapay sinir ağına ait sistem parametreleri aşağıdaki şekilde seçilmiş olsun :

$$\underline{A} = \begin{bmatrix} -1 & -1 & -1 & -1 \\ -3 & -1 & -1 & -1 \\ -3 & -3 & -1 & -1 \\ -3 & -3 & -3 & -1 \end{bmatrix}, \bar{A} = \begin{bmatrix} 3 & 3 & 3 & 3 \\ 1 & 3 & 3 & 3 \\ 1 & 1 & 3 & 3 \\ 1 & 1 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

$$\underline{B} = \begin{bmatrix} -1 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & -1 \end{bmatrix}, \bar{B} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix},$$

$$\psi_1 = \psi_2 = \psi_3 = \psi_4 = 1 \text{ ve } \underline{c}_1 = \underline{c}_2 = \underline{c}_3 = \underline{c}_4 = c$$

Yukarıda verilen matrislerden,  $A^*$ ,  $A_*$  ve  $\hat{B}$  matrislerini aşağıdaki şekilde elde ederiz :

$$A^* = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & -1 & 1 \end{bmatrix}, A_* = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 2 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\hat{A} = \begin{bmatrix} 3 & 3 & 3 & 3 \\ 3 & 3 & 3 & 3 \\ 3 & 3 & 3 & 3 \\ 3 & 3 & 3 & 3 \end{bmatrix}, \hat{B} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Bu matrisler için  $\|A_*\|_2 = 8$ ,  $\|\hat{B}\|_1 = 4$  ve  $\|\hat{B}\|_\infty = 4$  olarak elde edilir.

Bu örnekteki sistem parametreleri ve  $D = I$  için, Teorem 4.3 ile verilen  $\Theta$  matrisi aşağıdaki şekildedir :

$$\Theta = 2 \begin{bmatrix} c-7 & -2 & -2 & -2 \\ -2 & c-7 & -2 & -2 \\ -2 & -2 & c-7 & -2 \\ -2 & -2 & -2 & c-7 \end{bmatrix}$$

Teorem 4.3 gereğince  $\Theta$  matrisinin pozitif tanımlı,  $\Theta > 0$ , olması için  $c > 13$  seçilmesi gerekli ve yeterlidir. Bu nedenle, bu örnekte verilen yapay sinir ağı modeli için robust kararlılık koşulu  $c > 13$  olacaktır.

Bu örnekteki sistem parametreleri ve  $D = I$  için, Teorem 4.4 ile verilen  $\Phi$  matrisi aşağıdaki şekildedir :

$$\Phi = 2 \begin{bmatrix} c-13 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & c-13 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & c-13 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & c-13 \end{bmatrix}$$

Teorem 4.4 gereğince  $\Phi$  matrisinin pozitif tanımlı,  $\Phi > 0$ , olması için  $c > 13$  seçilmesi gerekli ve yeterlidir. Bu nedenle, bu örnekte verilen yapay sinir ağı modeli için robust kararlılık koşulu  $c > 13$  olacaktır.

Teorem 6.2 gereğince bu örnekteki sistem parametreleri için  $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$  ve  $\gamma_4$  pozitif sabitleri mevcut ise aşağıdaki koşul sağlanır:

$$\begin{aligned} c\gamma_1 - 4\gamma_1 - 4\gamma_2 - 4\gamma_3 - 4\gamma_4 &> 0 \\ -4\gamma_1 + c\gamma_2 - 4\gamma_2 - 4\gamma_3 - 4\gamma_4 &> 0 \\ -4\gamma_1 - 4\gamma_2 + c\gamma_3 - 4\gamma_3 - 4\gamma_4 &> 0 \\ -4\gamma_1 - 4\gamma_2 - 4\gamma_3 + c\gamma_4 - 4\gamma_4 &> 0 \end{aligned}$$



veya eşdeğer olarak

$$\begin{bmatrix} c-4 & -4 & -4 & -4 \\ -4 & c-4 & -4 & -4 \\ -4 & -4 & c-4 & -4 \\ -4 & -4 & -4 & c-4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \gamma_1 \\ \gamma_2 \\ \gamma_3 \\ \gamma_4 \end{bmatrix} > 0$$

yazılabilir. Yukarıdaki koşulu sağlayan  $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$  ve  $\gamma_4$  parametrelerinin varlığını garanti etmek için eşitsizliğin sol tarafında yer alan matrisin tekil olmayan M-matris olması gerekir, bunun sağlanması için ise  $c > 16$  seçilmesi gerekli ve yeterlidir. Bu nedenle, bu örnekte verilen yapay sinir ağı modeli için robust kararlılık koşulu  $c > 16$  olacaktır. Böylece, bu örnekteki sistem parametreleri için,  $13 < c \leq 16$  olarak seçildiğinde, Teorem 6.2 ile verilen robust kararlılık koşulu sağlanmadığı halde, Teorem 4.3 ile verilen  $\Theta > 0$  ve Teorem 4.4 ile verilen  $\Phi > 0$  koşulları sağlanmaktadır.

### Örnek 6.3 :

(2.1) ile tanımlanan gecikmeli yapay sinir ağına ait sistem parametreleri aşağıdaki şekilde seçilmiş olsun :

$$\underline{A} = \begin{bmatrix} -1 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & -1 \end{bmatrix}, \bar{A} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\underline{B} = \begin{bmatrix} -1 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \bar{B} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\ell_1 = \ell_2 = \ell_3 = \ell_4 = 1 \text{ ve } \underline{c}_1 = \underline{c}_2 = \underline{c}_3 = \underline{c}_4 = c$$

Yukarıda verilen matrislerden,  $A^*$ ,  $A_*$  ve  $\hat{B}$  matrislerini aşağıdaki şekilde elde ederiz :

$$A^* = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, A_* = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}, \hat{B} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Bu matrisler için  $\|A^*\|_2 = 0$ ,  $\|A_*\|_2 = 4$ ,  $\|A_*^T A^*\|_2 = 0$ ,  $\|\hat{B}\|_1 = 1$  ve  $\|\hat{B}\|_\infty = 4$  olarak elde edilir. Teorem 4.5 ile elde edilen sonucu bu örneğe uygularsak aşağıdaki sonucu elde ederiz.

$$\begin{aligned} \delta &= c - \ell_M \sqrt{\|A^*\|_2^2 + \|A_*\|_2^2 + 2\|A_*^T A^*\|_2} - \ell_M \sqrt{\|\hat{B}\|_1 \|\hat{B}\|_\infty} \\ &= c - 4 - 2 = c - 6 \end{aligned}$$

Teorem 4.5 gereğince  $\delta$  değerinin pozitif olması için  $c_m > 6$  seçilmesi gerekli ve yeterlidir. Bu nedenle, bu örnekte verilen yapay sinir ağı modeli için robust kararlılık koşulu  $c > 6$  olacaktır.

Şimdi Teorem 6.3 ile verilen robust kararlılık koşulunu test edelim. Teorem 6.3 ile elde edilen kararlılık koşulunu bu örneğe uygularsak aşağıdaki sonucu elde ederiz.

$$\begin{aligned} \delta_1 &= c - \ell_M (\|A^*\|_2 + \|A_*\|_2) - \frac{1}{2} \ell_M (\|\hat{B}\|_1 + \|\hat{B}\|_\infty) \\ &= c - 4 - 2.5 = c - 6.5 \end{aligned}$$

Teorem 6.3 gereğince  $\delta_1$  değerinin pozitif olması için  $c > 6.5$  seçilmesi gerekli ve yeterlidir. Bu nedenle, bu örnekte verilen yapay sinir ağı modeli için robust kararlılık koşulu  $c > 6.5$  olacaktır. Bu nedenle, Teorem 4.5, Teorem 6.3 ile karşılaştırıldığında, bu örnek için, sistem parametreleri üzerine daha esnek bir kararlılık koşulu empoze etmektedir.

Şimdi de Teorem 6.4 ile verilen robust kararlılık koşulunu test edelim. Teorem 6.4 ile elde edilen kararlılık koşulunu bu örneğe uygularsak aşağıdaki sonucu elde ederiz :

$$\begin{aligned} \delta_2 &= c - \sqrt{\|A^*\|_2^2 + \|A_*\|_2^2 + 2\|A_*^T A^*\|_2} - \frac{1}{2} \ell_M (\|\hat{B}\|_1 + \|\hat{B}\|_\infty) \\ &= c - 4 - 2.5 = c - 6.5 \end{aligned}$$

Teorem 6.4 gereğince  $\delta_2$  değerinin pozitif olması için  $c > 6.5$  seçilmesi gerekli ve yeterlidir.

Bu nedenle, bu örnekte verilen yapay sinir ağı modeli için robust kararlılık koşulu  $c > 6.5$  olacaktır. Bu nedenle, Teorem 4.5, Teorem 6.4 ile karşılaştırıldığında, bu örnek için, sistem parametreleri üzerine daha esnek bir kararlılık koşulu empoze etmektedir.

#### Örnek 6.4 :

(2.1) ile tanımlanan gecikmeli yapay sinir ağına ait sistem parametreleri aşağıdaki şekilde seçilmiş olsun :

$$\underline{A} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & 0 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & -1 \end{bmatrix}, \bar{A} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\underline{B} = \begin{bmatrix} -1 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & -1 \end{bmatrix}, \bar{B} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$l_1 = l_2 = l_3 = l_4 = 1 \text{ ve } \underline{c}_1 = \underline{c}_2 = \underline{c}_3 = \underline{c}_4 = c$$

Yukarıda verilen matrislerden,  $A^*$ ,  $A_*$ ,  $\hat{A}$  ve  $\hat{B}$  matrislerini aşağıdaki şekilde elde ederiz :

$$A^* = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & -1 \end{bmatrix}, A_* = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\hat{A} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}, \hat{B} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Bu matrislerden  $\|A^*\|_2 = 1$ ,  $\|A_*\|_2 = 2$ ,  $\|A_*^T A^*\|_2 = 4$ ,  $\|\hat{B}\|_1 = 4$  ve  $\|\hat{B}\|_\infty = 4$  değerlerini elde ederiz.

Teorem 4.5 ile elde edilen sonucu bu örneğe uygularsak aşağıdaki sonucu elde ederiz.

$$\begin{aligned}\delta &= c - \ell_M \sqrt{\|A^*\|_2^2 + \|A_*\|_2^2 + 2\|A_*^T A^*\|_2} - \ell_M \sqrt{\|\hat{B}\|_1 \|\hat{B}\|_\infty} \\ &= c - \sqrt{13} - 4 = c - 3.6 - 4 = c - 7.6\end{aligned}$$

Teorem 4.5 gereğince  $\delta$  değerinin pozitif olması için  $c > 7.6$  seçilmesi gerekli ve yeterlidir. Bu nedenle, bu örnekte verilen yapay sinir ağı modeli için robust kararlılık koşulu  $c > 7.6$  olacaktır.

Şimdi Teorem 6.5 ile verilen robust kararlılık koşulunu test edelim. Teorem 6.5,  $\underline{C}L^{-1} - \hat{A} - \hat{B}$  matrisinin bir tekil olmayan M-matris olmasını gerektirir. Bu örnekteki sistem parametreleri için  $\underline{C}L^{-1} - \hat{A} - \hat{B}$  matrisi aşağıdaki formda elde edilir :

$$cI - \hat{A} - \hat{B} = \begin{bmatrix} c-2 & -2 & -2 & -2 \\ -2 & c-2 & -2 & -2 \\ -2 & -2 & c-2 & -2 \\ -2 & -2 & -2 & c-2 \end{bmatrix}$$

Buradan da  $\underline{C}L^{-1} - \hat{A} - \hat{B}$  matrisinin bir tekil olmayan M-matris olması için gerekli ve yeterli koşul  $c > 8$  olarak elde edilir. Bu nedenle, Teorem 4.5, Teorem 6.5 ile karşılaştırıldığında, bu örnek için, sistem parametreleri üzerine daha esnek bir kararlılık koşulu empoze etmektedir.

Teorem 6.6-6.8 gereğince bu örnekteki sistem parametreleri için  $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$  ve  $\gamma_4$  pozitif sabitleri mevcut ise aşağıdaki koşul sağlanır:

$$\begin{aligned}c\gamma_1 - 5\gamma_1 - \gamma_2 - \gamma_3 - \gamma_4 &> 0 \\ -\gamma_1 + c\gamma_2 - 5\gamma_2 - \gamma_3 - \gamma_4 &> 0 \\ -\gamma_1 - \gamma_2 + c\gamma_3 - 5\gamma_3 - \gamma_4 &> 0 \\ -\gamma_1 - \gamma_2 - \gamma_3 + c\gamma_4 - 5\gamma_4 &> 0\end{aligned}$$

veya eşdeğer olarak

$$\begin{bmatrix} c-5 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & c-5 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & c-5 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & c-5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \gamma_1 \\ \gamma_2 \\ \gamma_3 \\ \gamma_4 \end{bmatrix} > 0$$

yazılabilir. Yukarıdaki koşulu sağlayan  $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$  ve  $\gamma_4$  parametrelerinin varlığını garanti etmek için eşitsizliğin sol tarafında yer alan matrisin tekil olmayan M-matris olması gerekir, bunun sağlanması için ise  $c > 8$  seçilmesi gerekli ve yeterlidir. Bu nedenle, bu örnekte verilen yapay sinir ağı modeli için robust kararlılık koşulu  $c > 8$  olacaktır. Böylece, bu örnekteki sistem parametreleri için,  $7.6 < c \leq 8$  olarak seçildiğinde, Teorem 6.6-6.8 ile verilen robust kararlılık koşulları sağlanmadığı halde, Teorem 4.5 ile verilen  $\delta > 0$  koşulu sağlanmaktadır.

### Örnek 6.5 :

(2.1) ile tanımlanan gecikmeli yapay sinir ağına ait sistem parametreleri aşağıdaki şekilde seçilmiş olsun :

$$\underline{A} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \bar{A} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\underline{B} = \begin{bmatrix} -1 & -1 & -1 & -1 \\ -2 & -2 & -2 & -2 \\ -2 & -2 & -2 & -2 \\ -4 & -4 & -4 & -4 \end{bmatrix}, \bar{B} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 2 & 2 \\ 4 & 4 & 4 & 4 \end{bmatrix}$$

$$\psi_1 = \psi_2 = \psi_3 = \psi_4 = 1 \text{ ve } \underline{c}_1 = \underline{c}_2 = \underline{c}_3 = \underline{c}_4 = c$$

Yukarıda verilen matrislerden,  $\hat{A}$ ,  $\hat{B}$  ve  $R$  matrislerini aşağıdaki şekilde elde ederiz :

$$\hat{A} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}, \hat{B} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 2 & 2 \\ 4 & 4 & 4 & 4 \end{bmatrix}, R = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 4 & 4 & 4 & 4 \\ 4 & 4 & 4 & 4 \\ 16 & 16 & 16 & 16 \end{bmatrix}$$

Bu matrislerden  $\|\hat{B}\|_1 = 9$ ,  $\|\hat{B}\|_\infty = 16$ ,  $\|P\|_1 = 25$  ve  $\|P\|_\infty = 64$  norm değerlerini elde ederiz. Karşılaştırma ve analizlerde kolaylık sağlaması için  $D = I$  durumunu göz önüne alacağız. Bu durumda Teorem 4.1 ifadesinde yer alan  $S$  matrisi aşağıdaki formdadır :

$$S = \begin{bmatrix} -2 & -2 & -2 & -2 \\ -2 & -2 & -2 & -2 \\ -2 & -2 & -2 & -2 \\ -2 & -2 & -2 & -2 \end{bmatrix}$$

Böylece,  $\kappa_1 = 0$  ve  $\kappa_2 = 1$  seçimi Teorem 4.1 ifadesinde yer alan  $\Upsilon$  matrisi aşağıdaki şekilde elde edilir :

$$\Upsilon = 2cI + S - 2\sqrt{n}\sqrt{\|P\|_1}I = 2 \begin{bmatrix} c-11 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & c-11 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & c-11 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & c-11 \end{bmatrix}$$

Tekil olmayan M-matris koşulundan biliyoruz ki, yukarıdaki ifadede ancak ve ancak  $c > 14$  olduğunda  $\Upsilon > 0$  koşulu sağlanır. Bu nedenle, bu örnek ile verilen sistem parametreleri için Teorem 4.1 sonucundan global robust kararlılık koşulu  $c > 14$  olarak elde edilir.

Eğer Teorem 4.3 sonucunu aynı sistem parametrelerine uygulayacak olursak Teorem 4.3 ile ifade edilen  $\Theta$  matrisi aşağıdaki şekilde elde edilir :

$$\Theta = 2cI + S - 2\sqrt{\|\hat{B}\|_1\|\hat{B}\|_\infty}I = 2 \begin{bmatrix} c-13 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & c-13 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & c-13 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & c-13 \end{bmatrix}$$

Tekil olmayan M-matris koşulundan biliyoruz ki, yukarıdaki ifadede ancak ve ancak  $c > 16$  olduğunda  $\Theta > 0$  koşulu sağlanır. Bu nedenle, bu örnek ile verilen sistem parametreleri için Teorem 4.3 sonucundan global robust kararlılık koşulu  $c > 16$  olarak elde edilir.

Eğer Teorem 6.1 sonucunu aynı sistem parametrelerine uygulayacak olursak Teorem 6.1 ile

ifade edilen  $\Theta$  matrisi aşağıdaki şekilde elde edilir :

$$\Theta_1 = 2cI + S - (\|\hat{B}\|_1 + \|\hat{B}\|_\infty)I = \begin{bmatrix} 2c-27 & -2 & -2 & -2 \\ -2 & 2c-27 & -2 & -2 \\ -2 & -2 & 2c-27 & -2 \\ -2 & -2 & -2 & 2c-27 \end{bmatrix}$$

Yukarıdaki ifadede ancak ve ancak  $c > 16.5$  olduğunda  $\Theta_1 > 0$  koşulu sağlanır. Bu nedenle, bu örnek ile verilen sistem parametreleri için Teorem 6.1 sonucundan global robust kararlılık koşulu  $c > 16.5$  olarak elde edilir. Böylece, bu örnekteki sistem parametreleri için,  $13 < c \leq 16$  olarak seçildiğinde, Teorem 4.3 ve Teorem 6.1 ile verilen robust kararlılık koşulları sağlanmadığı halde, Teorem 4.1 ile verilen  $\Theta > 0$  koşulu sağlanmaktadır.

### Örnek 6.6 :

(2.1) ile tanımlanan gecikmeli yapay sinir ağına ait sistem parametreleri aşağıdaki şekilde seçilmiş olsun :

$$\underline{A} = \begin{bmatrix} -1 & -1 & -1 & -1 \\ -3 & -1 & -1 & -1 \\ -3 & -3 & -1 & -1 \\ -3 & -3 & -3 & -1 \end{bmatrix}, \bar{A} = \begin{bmatrix} 3 & 3 & 3 & 3 \\ 1 & 3 & 3 & 3 \\ 1 & 1 & 3 & 3 \\ 1 & 1 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

$$\underline{B} = \begin{bmatrix} -1 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & -1 \end{bmatrix}, \bar{B} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix},$$

$$\psi_1 = \psi_2 = \psi_3 = \psi_4 = 1 \text{ ve } \underline{c}_1 = \underline{c}_2 = \underline{c}_3 = \underline{c}_4 = c$$

Yukarıda verilen matrislerden,  $A^*$ ,  $A_*$ ,  $\hat{A}$ ,  $\hat{B}$  ve  $R$  matrislerini aşağıdaki şekilde elde ederiz :

$$A^* = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & -1 & 1 \end{bmatrix}, A_* = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 2 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\hat{A} = \begin{bmatrix} 3 & 3 & 3 & 3 \\ 3 & 3 & 3 & 3 \\ 3 & 3 & 3 & 3 \\ 3 & 3 & 3 & 3 \end{bmatrix}, \hat{B} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}, R = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Bu matrislerden  $\|A_*\|_2 = 8$ ,  $\|\hat{B}\|_1 = 4$ ,  $\|\hat{B}\|_\infty = 4$ ,  $\|P\|_1 = 4$  ve  $\|P\|_\infty = 4$  norm değerlerini elde ederiz. Karşılaştırma ve analizlerde kolaylık sağlaması için  $D = I$  durumunu göz önüne alacağız. Bu durumda  $D = I$ ,  $\kappa_1 = 0$  için  $\kappa_2 = 1$  Teorem 4.2 ifadesinde yer alan  $\Gamma$  matrisi aşağıdaki formdadır :

$$\Gamma = 2 \begin{bmatrix} c-13 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & c-13 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & c-13 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & c-13 \end{bmatrix}$$

Yukarıdaki ifadede ancak ve ancak  $c > 13$  olduğunda  $\Gamma > 0$  koşulu sağlanır. Bu nedenle, bu örnek ile verilen sistem parametreleri için Teorem 4.2 sonucundan global robust kararlılık koşulu  $c > 13$  olarak elde edilir.

Teorem 6.3 gereğince bu örnekteki sistem parametreleri için  $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$  ve  $\gamma_4$  pozitif sabitleri mevcut ise aşağıdaki koşul sağlanır:

$$\begin{aligned} c\gamma_1 - 4\gamma_1 - 4\gamma_2 - 4\gamma_3 - 4\gamma_4 &> 0 \\ -4\gamma_1 + c\gamma_2 - 4\gamma_2 - 4\gamma_3 - 4\gamma_4 &> 0 \\ -4\gamma_1 - 4\gamma_2 + c\gamma_3 - 4\gamma_3 - 4\gamma_4 &> 0 \\ -4\gamma_1 - 4\gamma_2 - 4\gamma_3 + c\gamma_4 - 4\gamma_4 &> 0 \end{aligned}$$

Yukarıdaki ifade aşağıdaki formda da yazılabilir :

$$\begin{bmatrix} c-4 & -4 & -4 & -4 \\ -4 & c-4 & -4 & -4 \\ -4 & -4 & c-4 & -4 \\ -4 & -4 & -4 & c-4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \gamma_1 \\ \gamma_2 \\ \gamma_3 \\ \gamma_4 \end{bmatrix} > 0$$

Yukarıdaki koşulu sağlayan  $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$  ve  $\gamma_4$  parametrelerinin varlığını garanti etmek için



eşitsizliğin sol tarafında yer alan matrisin tekil olmayan M-matris olması gerekir, bunun sağlanması için ise  $c > 16$  seçilmesi gerekli ve yeterlidir. Bu nedenle, bu örnekte verilen yapay sinir ağı modeli için robust kararlılık koşulu  $c > 16$  olacaktır. Böylece, bu örnekteki sistem parametreleri için,  $13 < c \leq 16$  olarak seçildiğinde, Teorem 6.3 ile verilen robust kararlılık koşulları sağlanmadığı halde, Teorem 4.2 ile verilen  $\Gamma > 0$  koşulu sağlanmaktadır.

### Örnek 6.7 :

(2.1) ile tanımlanan gecikmeli yapay sinir ağına ait sistem parametreleri aşağıdaki şekilde seçilmiş olsun :

$$\underline{A} = \begin{bmatrix} -1 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & -1 \end{bmatrix}, \bar{A} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\underline{B} = \begin{bmatrix} -1 & -1 & -1 & -1 \\ -2 & -2 & -2 & -2 \\ -2 & -2 & -2 & -2 \\ -4 & -4 & -4 & -4 \end{bmatrix}, \bar{B} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 2 & 2 \\ 4 & 4 & 4 & 4 \end{bmatrix}$$

$$\psi_1 = \psi_2 = \psi_3 = \psi_4 = 1 \text{ ve } c_1 = c_2 = c_3 = c_4 = c$$

Yukarıda verilen matrislerden,  $A^*$ ,  $A_*$ ,  $\hat{B}$  ve  $R$  matrislerini aşağıdaki şekilde elde ederiz :

$$A^* = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, A_* = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\hat{B} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 2 & 2 \\ 4 & 4 & 4 & 4 \end{bmatrix}, R = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 4 & 4 & 4 & 4 \\ 4 & 4 & 4 & 4 \\ 16 & 16 & 16 & 16 \end{bmatrix}$$

Bu matrislerden  $\|A^*\|_2 = 0$ ,  $\|A_*\|_2 = 4$ ,  $\|\hat{B}\|_1 = 9$ ,  $\|\hat{B}\|_\infty = 16$ ,  $\|P\|_1 = 25$  ve  $\|P\|_\infty = 64$  norm değerlerini elde ederiz.

$D = I$ ,  $\kappa_1 = 0$  ve  $\kappa_2 = 1$  için, Teorem 4.2 ifadesinde yer alan  $\Gamma$  matrisi aşağıdaki formdadır :

$$\Gamma = 2 \begin{bmatrix} c-14 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & c-14 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & c-14 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & c-14 \end{bmatrix}$$

Yukarıdaki ifadede ancak ve ancak  $c_m > 14$  olduğunda  $\Gamma > 0$  koşulu sağlanır. Bu nedenle, bu örnek ile verilen sistem parametreleri için Teorem 4.2 sonucundan global robust kararlılık koşulu  $c_m > 14$  olarak elde edilir.

Eğer Teorem 4.4 sonucunu aynı sistem parametrelerine uygulayacak olursak, Teorem 4.4 ile ifade edilen  $\Phi$  matrisi aşağıdaki şekilde elde edilir :

$$\Phi = 2 \begin{bmatrix} c-16 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & c-16 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & c-16 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & c-16 \end{bmatrix}$$

Yukarıdaki ifadede ancak ve ancak  $c > 16$  olduğunda  $\Phi > 0$  koşulu sağlanır. Bu nedenle, bu örnek ile verilen sistem parametreleri için Teorem 4.4 sonucundan global robust kararlılık koşulu  $c > 16$  olarak elde edilir. Böylece, bu örnekteki sistem parametreleri için,  $14 < c \leq 16$  olarak seçildiğinde, Teorem 4.4 ile verilen robust kararlılık koşulu sağlanmadığı halde, Teorem 4.2 ile verilen  $\Phi > 0$  koşulu sağlanmaktadır.

### Örnek 6.8.

(2.1) ile tanımlanan gecikmeli yapay sinir ağına ait sistem parametreleri aşağıdaki şekilde seçilmiş olsun :

$$\underline{A} = \begin{bmatrix} -1 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & -1 \end{bmatrix}, \bar{A} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\underline{B} = \begin{bmatrix} -1 & -2 & -2 & -4 \\ -1 & -2 & -2 & -4 \\ -1 & -2 & -2 & -4 \\ -1 & -2 & -2 & -4 \end{bmatrix}, \bar{B} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 & 4 \\ 1 & 2 & 2 & 4 \\ 1 & 2 & 2 & 4 \\ 1 & 2 & 2 & 4 \end{bmatrix}$$

$$\ell_1 = \ell_2 = \ell_3 = \ell_4 = 1 \text{ ve } c_1 = c_2 = c_3 = c_4 = c$$

Yukarıda verilen matrislerden,  $A^*$ ,  $A_*$ ,  $\hat{A}$ ,  $\hat{B}$  ve  $R$  matrislerini aşağıdaki şekilde elde ederiz :

$$A^* = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, A_* = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\hat{A} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}, \hat{B} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 & 4 \\ 1 & 2 & 2 & 4 \\ 1 & 2 & 2 & 4 \\ 1 & 2 & 2 & 4 \end{bmatrix}, R = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 4 & 16 \\ 1 & 4 & 4 & 16 \\ 1 & 4 & 4 & 16 \\ 1 & 4 & 4 & 16 \end{bmatrix}$$

Bu matrislerden  $\sigma_1(A) = 4$ ,  $\sigma_2(A) = 4$ ,  $\sigma_3(A) = 4$ ,  $\|\hat{B}\|_1 = 16$ ,  $\|\hat{B}\|_\infty = 9$ ,  $\|P\|_1 = 64$  ve  $\|P\|_\infty = 25$  norm değerlerini elde ederiz.  $\|Q\|_2 = \min\{\sigma_1(A), \sigma_2(A), \sigma_3(A)\} = 4$  olduğundan  $\|Q\|_2 = 4$  olarak belirlenir.

$\rho = 0$  için, Teorem 4.6 ifadesinde yer alan  $\varepsilon$  değeri aşağıdaki şekilde elde edilir :

$$\varepsilon = c - \ell_M \|Q\|_2 - \ell_M \sqrt{n} \sqrt{\|P\|_\infty} = c - 14 > 0$$

Böylece, Teorem 4.6 için robust kararlılık koşulu  $c > 14$  olarak elde edilir.

Aynı sistem parametreleri için, Teorem 4.5 aşağıdaki sonucu verir :

$$\begin{aligned} \delta &= c - \ell_M \sqrt{\|A^*\|_2^2 + \|A_*\|_2^2 + 2\|A_*^T A^*\|_2} - \ell_M \sqrt{\|\hat{B}\|_1 \|\hat{B}\|_\infty} \\ &= c - 16 \end{aligned}$$

Böylece, Teorem 4.5 için robust kararlılık koşulu  $c > 16$  olarak elde edilir.

Aynı sistem parametreleri için, Teorem 6.3 aşağıdaki sonucu verir :

$$\begin{aligned}\delta_1 &= c - \ell_M(\|A^*\|_2 + \|A_*\|_2) - \frac{1}{2}\ell_M(\|\hat{B}\|_1 + \|\hat{B}\|_\infty) \\ &= c - 16.5\end{aligned}$$

Böylece, Teorem 6.3 için robust kararlılık koşulu  $c > 16.5$  olarak elde edilir.

Aynı sistem parametreleri için, Teorem 6.4 aşağıdaki sonucu verir :

$$\begin{aligned}\delta_2 &= c - \sqrt{\|A^*\|_2^2 + \|A_*\|_2^2 + 2\|A_*^T A^*\|_2} \\ &\quad - \frac{1}{2}\ell_M(\|\hat{B}\|_1 + \|\hat{B}\|_\infty) \\ &= c - 16.5\end{aligned}$$

Böylece, Teorem 6.4 için robust kararlılık koşulu  $c > 16.5$  olarak elde edilir. Bu sonuçlardan, bu örnek ile, Teorem 4.6 ile verilen kararlılık koşulunun Teorem 4.5, Teorem 6.3 ve Teorem 6.4 ile verilen kararlılık koşullarından daha az kısıtlayıcı olduğu gösterilmiş oldu.

### Örnek 6.9 :

(2.1) ile tanımlanan gecikmeli yapay sinir ağına ait sistem parametreleri aşağıdaki şekilde seçilmiş olsun :

$$\underline{A} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & -2 \\ -2 & 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}, \bar{A} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 2 & 2 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 2 \\ 2 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\underline{B} = \begin{bmatrix} -1 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & -1 \end{bmatrix}, \bar{B} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\ell_1 = \ell_2 = \ell_3 = \ell_4 = 1 \text{ ve } \underline{c}_1 = \underline{c}_2 = \underline{c}_3 = \underline{c}_4 = c$$

Yukarıda verilen matrislerden,  $A^*$ ,  $A_*$ ,  $\hat{A}$ ,  $\hat{B}$  ve  $R$  matrislerini aşağıdaki şekilde elde ederiz :

$$A^* = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 & -1 \end{bmatrix}, A_* = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\hat{A} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}, \hat{B} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}, R = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Bu matrislerden  $\sigma_1(A) = 3$ ,  $\sigma_2(A) = 3.6$ ,  $\sigma_3(A) = 4$ ,  $\|\hat{B}\|_1 = 4$ ,  $\|\hat{B}\|_\infty = 4$  ve  $\|P\|_1 = 4$  ve  $\|P\|_\infty = 4$  norm değerlerini elde ederiz.  $\|Q\|_2 = \min\{\sigma_1(A), \sigma_2(A), \sigma_3(A)\} = 3$  olarak belirlenir..

$\rho = 0$  için, Teorem 4.6 ifadesinde yer alan  $\varepsilon$  değeri aşağıdaki şekilde elde edilir :

$$\varepsilon = c - \ell_M \|Q\|_2 - \ell_M \sqrt{n} \sqrt{\|P\|_\infty} = c - 7 > 0$$

Böylece, Teorem 4.6 için robust kararlılık koşulu  $c > 7$  olarak elde edilir.

Aynı sistem parametreleri için, Teorem 6.5 aşağıdaki sonucu verir :

$$cI - \hat{A} - \hat{B} = \begin{bmatrix} c-2 & -2 & -2 & -2 \\ -2 & c-2 & -2 & -2 \\ -2 & -2 & c-2 & -2 \\ -2 & -2 & -2 & c-2 \end{bmatrix} > 0$$

Burada  $cI - \hat{A} - \hat{B}$  matrisinin tekil olmayan M-matris olması için  $c > 8$  olmalıdır. Böylece, Teorem 6.5 için robust kararlılık koşulu  $c > 8$  olarak elde edilir.

Aynı sistem parametreleri için, Teorem 6.6-6.8 aşağıdaki sonucu verir :

$$\begin{bmatrix} c-5 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & c-5 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & c-5 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & c-5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \gamma_1 \\ \gamma_2 \\ \gamma_3 \\ \gamma_4 \end{bmatrix} > 0$$

Buradan, robust kararlılık koşulu  $c > 8$  olarak elde edilir. Bu sonuçlardan, bu örnek ile, Teorem 4.6 ile verilen kararlılık koşulunun Teorem 6.5-6.8 ile verilen kararlılık koşullarından daha az kısıtlayıcı olduğu gösterilmiş oldu.

### Örnek 6.10.

(5.2) ile tanımlanan gecikmeli yapay sinir ağına ait sistem parametreleri aşağıdaki şekilde seçilmiş olsun :

$$\underline{A} = \begin{bmatrix} -1 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \\ -2 & 0 & -1 \end{bmatrix}, \bar{A} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\underline{B} = \begin{bmatrix} -1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 \end{bmatrix}, \bar{B} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix},$$

$$\psi_1 = \psi_2 = \psi_3 = 1 \text{ ve } c_1 = c_2 = c_3 = c$$

Yukarıda verilen matrislerden,  $A^*$ ,  $A_*$ ,  $B^*$ ,  $B_*$  ve  $\hat{B}$  matrislerini aşağıdaki şekilde elde ederiz :

$$A^* = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{bmatrix}, A_* = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$B^* = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, B_* = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}, \hat{B} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Bu matrislerden  $\sigma_1(B) = 3$ ,  $\sigma_2(B) = 3$  ve  $\sigma_3(B) = 3$  norm değerlerini elde ederiz.  $\|Q\|_2 = \min\{\sigma_1(B), \sigma_2(B), \sigma_3(B)\}$  olduğu için  $\|Q\|_2 = 3$  olarak elde edilir. Böylece  $D = I$  için

Teorem 5.3 ile verilen  $\Delta$  aşağıdaki formdadır :

$$\Delta = \begin{bmatrix} 2c-12 & -1 & 1 \\ -1 & 2c-12 & -2 \\ 1 & -2 & 2c-12 \end{bmatrix}$$

Yukarıdaki ifadede ancak ve ancak  $c > 7$  olduğunda  $\Delta > 0$  koşulu sağlanır. Bu nedenle, bu örnek ile verilen sistem parametreleri için Teorem 5.3 sonucundan global robust kararlılık koşulu  $c > 7$  olarak elde edilir. Aynı sistem parametreleri için Teorem 5.4 ile verilen  $\Lambda$  aşağıdaki formdadır :

$$\Lambda = \begin{bmatrix} 2c-8 & -3 & -3 \\ -3 & 2c-8 & -4 \\ -3 & -4 & 2c-8 \end{bmatrix}$$

Yukarıdaki ifadede ancak ve ancak  $c > 7.35$  olduğunda  $\Lambda > 0$  koşulu sağlanır. Bu nedenle, Teorem 5.4 sonucundan global robust kararlılık koşulu  $c > 7.35$  olarak elde edilir. Bu nedenle, Teorem 5.3 ile verilen kararlılık koşulunun Teorem 5.4 ile verilen kararlılık koşulundan daha az kısıtlayıcı olduğu gösterilmiş oldu.

### Örnek 6.11 :

(5.2) ile tanımlanan gecikmeli yapay sinir ağına ait sistem parametreleri aşağıdaki şekilde seçilmiş olsun :

$$\underline{A} = \begin{bmatrix} -2 & -2 & 2 \\ 2 & -2 & -2 \\ -6 & 2 & -2 \end{bmatrix}, \bar{A} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\underline{B} = \begin{bmatrix} -1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 \end{bmatrix}, \bar{B} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix},$$

$$\psi_1 = \psi_2 = \psi_3 = 1 \text{ ve } c_1 = c_2 = c_3 = c$$

Yukarıda verilen matrislerden,  $A^*$ ,  $A_*$ ,  $B^*$ ,  $B_*$  ve  $\hat{B}$  matrislerini aşağıdaki şekilde elde ederiz :

$$A^* = \begin{bmatrix} -1 & -1 & 2 \\ 2 & 0 & 0 \\ -2 & 2 & 0 \end{bmatrix}, A_* = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 2 \\ 4 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

$$B^* = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, B_* = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}, \hat{B} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Bu matrislerden  $\sigma_1(B) = 3$ ,  $\sigma_2(B) = 3$  ve  $\sigma_3(B) = 3$  norm değerlerini elde ederiz.  $\|Q\|_2 = \min\{\sigma_1(B), \sigma_2(B), \sigma_3(B)\}$  olduğu için  $\|Q\|_2 = 3$  olarak elde edilir. Böylece  $D = I$  için Teorem 5.3 ile verilen  $\Delta$  aşağıdaki formdadır :

$$\Delta = \begin{bmatrix} 2c - 12.257 & -1 & 0 \\ -1 & 2c - 14.257 & 2 \\ 0 & 2 & 2c - 14.257 \end{bmatrix}$$

Yukarıdaki ifadede ancak ve ancak  $c > 8.19$  olduğunda  $\Delta > 0$  koşulu sağlanır. Bu nedenle, bu örnek ile verilen sistem parametreleri için Teorem 5.3 sonucundan global robust kararlılık koşulu  $c > 8.19$  olarak elde edilir. Aynı sistem parametreleri için Teorem 5.4 ile verilen  $\Lambda$  aşağıdaki formdadır :

$$\Lambda = \begin{bmatrix} 2c - 6 & -1 & -2 \\ -1 & 2c - 8 & -2 \\ -2 & -2 & 2c - 8 \end{bmatrix}$$

Yukarıdaki ifadede ancak ve ancak  $c > 5.47$  olduğunda  $\Lambda > 0$  koşulu sağlanır. Bu nedenle, Teorem 5.4 sonucundan global robust kararlılık koşulu  $c > 5.47$  olarak elde edilir. Bu nedenle, Teorem 5.4 ile verilen kararlılık koşulunun Teorem 5.3 ile verilen kararlılık koşulundan daha az kısıtlayıcı olduğu gösterilmiş oldu.

### Örnek 6.12 :

(5.2) ile tanımlanan gecikmeli yapay sinir ağına ait sistem parametreleri aşağıdaki şekilde seçilmiş olsun :

$$\underline{A} = \mathbf{v} \begin{bmatrix} -1 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & -1 \end{bmatrix}, \bar{A} = \mathbf{v} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$



$$\underline{B} = v \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -3 \end{bmatrix}, \bar{B} = v \begin{bmatrix} 3 & 2 & 3 & 2 \\ 2 & 3 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 3 & 2 \\ 2 & 3 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\psi_1 = \psi_2 = \psi_3 = \psi_4 = 1 \text{ ve } \underline{c}_1 = \underline{c}_2 = \underline{c}_3 = \underline{c}_4 = 13.76$$

Burada  $v$  pozitif bir sabittir. Aşağıdaki matrisleri yazabiliriz :

$$A^* = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, A_* = v \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$B^* = \frac{1}{2}v \begin{bmatrix} 4 & 3 & 4 & 3 \\ 3 & 4 & 3 & 4 \\ 4 & 3 & 4 & 3 \\ 3 & 4 & 3 & -2 \end{bmatrix}, B_* = \frac{1}{2}v \begin{bmatrix} 2 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 4 \end{bmatrix}$$

$$\hat{B} = v \begin{bmatrix} 3 & 2 & 3 & 2 \\ 2 & 3 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 3 & 2 \\ 2 & 3 & 2 & 3 \end{bmatrix}$$

Yukarıdaki matrisler için  $\sigma_1(B) = 9.76v$ ,  $\sigma_2(B) = 9.79v$ ,  $\sigma_3(B) = 9.83v$  ve  $\sigma_4(B) = 10v$  değerleri elde edilir.

$D = I$  için Teorem 5.1 ile verilen  $\Omega_1$  matrisi aşağıdaki formdadır :

$$\begin{aligned} \Omega_1 &= 2\underline{C}K^{-1} - (A^* + A^{*T} + \|A_* + A_*^T\|_2 I) - 2\sigma_1(B)I \\ &= (27.52 - 27.52v)I \end{aligned}$$

$v < 1$  için  $\Omega_1 > 0$  olacaktır. Bu nedenle, robust kararlılık koşulu  $v < 1$  olarak elde edilir.

$D = I$  için Teorem 6.16 ile verilen  $\Omega_2$  matrisi aşağıdaki formdadır :

$$\begin{aligned}\Omega_2 &= 2\underline{C}K^{-1} - (A^* + A^{*T} + \|A_* + A_*^T\|_2 I) - 2\sigma_2(B)I \\ &= (27.52 - 27.58v)I\end{aligned}$$

$v < 0.9978$  için  $\Omega_2 > 0$  olacaktır. Bu nedenle, robust kararlılık koşulu  $v < 0.9978$  olarak elde edilir.

$D = I$  için Teorem 6.17 ile verilen  $\Omega_3$  matrisi aşağıdaki formdadır :

$$\begin{aligned}\Omega_3 &= 2\underline{C}K^{-1} - (A^* + A^{*T} + \|A_* + A_*^T\|_2 I) - 2\sigma_3(B)I \\ &= (27.52 - 27.66v)I\end{aligned}$$

$v < 0.9949$  için  $\Omega_3 > 0$  olacaktır. Bu nedenle, robust kararlılık koşulu  $v < 0.9949$  olarak elde edilir.

$D = I$  için Teorem 6.18 ile verilen  $\Omega_4$  matrisi aşağıdaki formdadır :

$$\begin{aligned}\Omega_4 &= 2\underline{C}K^{-1} - (A^* + A^{*T} + \|A_* + A_*^T\|_2 I) - 2\sigma_4(B)I \\ &= (27.52 - 28v)I\end{aligned}$$

$v < 0.9829$  için  $\Omega_4 > 0$  olacaktır. Bu nedenle, robust kararlılık koşulu  $a < 0.9829$  olarak elde edilir.

Bu örnekte,  $D = I$  için Teorem 5.2 ifadesinde yer alan  $S$  matrisi aşağıdaki şekilde elde edilir :

$$S = v \begin{bmatrix} -2 & -2 & -2 & -2 \\ -2 & -2 & -2 & -2 \\ -2 & -2 & -2 & -2 \\ -2 & -2 & -2 & -2 \end{bmatrix}$$

$D = I$  için Teorem 5.2 ile verilen  $\Pi_1$  matrisi aşağıdaki formdadır :

$$\Pi_1 = 2\underline{C}K^{-1} + S - 2\sigma_1(B)I = (27.52 - 19.52v)I - v \begin{bmatrix} 2 & 2 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 2 & 2 \end{bmatrix}$$

$v < 1$  için  $\Pi_1 > 0$  olacaktır. Bu nedenle, robust kararlılık koşulu  $v < 1$  olarak elde edilir.

$D = I$  için Teorem 6.19 ile verilen  $\Pi_2$  matrisi aşağıdaki formdadır :

$$\Pi_2 = 2\underline{C}K^{-1} + S - 2\sigma_2(B)I = (27.52 - 19.58v)I - v \begin{bmatrix} 2 & 2 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 2 & 2 \end{bmatrix}$$

$v < 0.9978$  için  $\Pi_2 > 0$  olacaktır. Bu nedenle, robust kararlılık koşulu  $v < 0.9978$  olarak elde edilir.

$D = I$  için Teorem 6.20 ile verilen  $\Pi_3$  matrisi aşağıdaki formdadır :

$$\Pi_3 = 2\underline{C}K^{-1} + S - 2\sigma_3(B)I = (27.52 - 19.66v)I - v \begin{bmatrix} 2 & 2 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 2 & 2 \end{bmatrix}$$

$v < 0.9949$  için  $\Pi_3 > 0$  olacaktır. Bu nedenle, robust kararlılık koşulu  $v < 0.9949$  olarak elde edilir.

$D = I$  için Teorem 6.21 ile verilen  $\Pi_4$  matrisi aşağıdaki formdadır :

$$\Pi_4 = 2\underline{C}K^{-1} + S - 2\sigma_4(B)I = (27.52 - 20v)I - v \begin{bmatrix} 2 & 2 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 2 & 2 \end{bmatrix}$$

$v < 0.9829$  için  $\Pi_4 > 0$  olacaktır. Bu nedenle, kararlılık koşulu  $v < 0.9829$  olarak elde edilir.

## 7. TARTIŞMA VE SONUÇ

Bu doktora tezinde, çoklu zaman gecikmeli ve ayrık zaman gecikmeli yapay sinir ağlarının denge noktalarının varlığı, tekliği ve global asimtotik kararlılık koşullarını analiz eden bir çalışma gerçekleştirilmiştir. Lyapunov kararlılık ve Homeomorfizm teoremlerinden yararlanılarak, farklı modellerdeki gecikmeli yapay sinir ağlarının denge noktalarının varlığı, tekliği ve global asimtotik kararlılığını garanti eden yeni ve özgün sonuçlar elde edilmiştir. Bu kararlılık sonuçlarının elde edilmesinde, yapay sinir ağlarına ait ağ parametrelerinin belirsiz olduğu, ancak alt ve üst sınırları bilinen belirli bir aralıkta tanımlanmış olduğu varsayılmıştır. Böylece, yapay sinir ağı modelleri için robust kararlılık analizleri gerçekleştirilmiştir. Bu analizlerin sonucunda elde edilen robust kararlılık koşulları, yapay sinir ağlarının matematiksel modellerinde yer alan sistem matrislerinin eleman değerleri ile sayısal değerleri, elde edilen kararlılık koşulundan üretilecek olan bazı sabit parametreler arasında kurulan koşullu matematiksel ilişkilere dayandırılmıştır. Robust kararlılık koşullarının bu formlarda elde edilmiş olmasının en büyük avantajı, bilinmeyen sabit parametrelerin birim değerler olarak seçilmesi halinde, bu kararlılık koşullarının tamamıyla sistem matrislerinin eleman değerlerine bağlı olarak ifade edilebilmeleridir. Bu durum, elde edilen robust kararlılık koşullarının geçerliliğini ve uygulanabilirliğini kolay bir şekilde test edilebilmesine olanak sağlar. Elde edilen kararlılık sonuçlarının diğer bir avantajı ise zaman gecikme parametrelerinden bağımsız olmalarıdır. Bu durum, zaman gecikmesi parametrelerinin yapay sinir ağının dinamik davranışı üzerinde oluşturabileceği sınırlamaları engellemektedir. Burada vurgulanması gereken bir husus ise yapay sinir ağlarının kararlılık analizleri için seçilmiş olan Lipschitz ve monoton artan aktivasyon fonksiyonlarıdır. Bu tür aktivasyon fonksiyonlarının kullanımı yapay sinir ağlarının daha geniş uygulama alanlarında kullanımına olanak sağlar.

Bu doktora tezinin en önemli katkılardan bir tanesi Kural 3.1 ile verilen ve yapay sinir ağına ait sistem matrisleri için yeni bir üst sınır norm değeri elde edilen sonuçtur. Çünkü, dinamik yapay sinir ağlarında robust kararlılık analiz yapılabilmesi için belirsizlik içeren sistem matrisleri için matematiksel olarak tanımlanmış üst sınır norm değerinin mutlaka bilinmesi gerekir. Literatürde daha önce belirsizlik içeren sistem matrisleri için başka

araştırmacılar tarafından matematiksel olarak tanımlanmış üç farklı üst sınır norm değeri elde edilmişti. Kural 3.1 ise belirsiz matrisler için dördüncü ve yeni bir üst sınır norm değeri tanımlanmaktadır. Kural 3.1 ile elde edilen sonuç sayesinde, bu doktora tezi kapsamında çalışılan gecikmeli yapay sinir ağlarının robust kararlılığını sağlayan önemli ve özgün sonuçlar elde edilmiştir.

Bu doktora tezinin diğeri önemli bir katkısı ise yapay sinir ağlarının kararlılık analizi için gerekli uygun Lyapunov fonksiyonlarının geliştirilebilmiş olmasıdır. Çünkü, kararlılık analizindeki en önemli sorunlardan bir tanesi de yapay sinir ağı modelinin türüne ve aktivasyon fonksiyonunun seçimine bağı olarak kararlılık analizine olanak verebilecek yeni ve uygun Lyapunov fonksiyonlarının belirlenebilmesidir. Bu doktora tezinde, bu görev uygun bir şekilde gerçekleştirilmiş ve farklı gecikme parametreleri ve farklı aktivasyon fonksiyonları için yapay sinir ağlarının kararlılık analizinin gerçekleştirilebileceği uygun yeni Lyapunov fonksiyonları geliştirilmiştir.

Bu doktora tezinin son bölümünde gecikmeli yapay sinir ağları için elde edilmiş olan yeni robust kararlılık koşulları, daha önce başka araştırmacılar tarafından yayınlanmış denk robust kararlılık sonuçları ile sayısal örnekler kullanılarak kapsamlı bir karşılaştırılması yapılmıştır. Bu karşılaştırmaların sonucunda, bu tezde elde edilen sonuçların daha önce literatürde yayınlanmış sonuçlara göre bazı durumlarda daha avantajlı olduğu gösterilmiştir.

Bu doktora tezinde elde edilen tüm robust kararlılık koşulları yeterli koşullardır. Bu nedenle, gecikmeli yapay sinir ağlarının robust kararlılığı için yeni yeterli koşullar elde etmek her zaman mümkündür. Bu tezde geliştirilen teknik ve yöntemler gecikmeli yapay sinir ağlarının robust kararlılık analizi için yeni çalışmalar yapılmasına katkıda bulunacak nitelikler taşımaktadır. Özellikle belirsiz matrisler için geliştirilmiş olan yeni sınır norm değeri ve doğrusal olmayan dinamik sistemlerin kararlılık analizinde kullanılacak yeni Lyapunov fonksiyonlarının tanımlanmış olması bu alanda yeni çalışmalar yapılmasına önemli katkılar yapabilecek niteliktedir.

## KAYNAKLAR

- Arik, S., 2014, New Criteria for Global robust stability of delayed neural networks with norm-bounded uncertainties, *IEEE Transactions on Neural Networks and Learning Systems*, 25, 1045–1052.
- Arik, S., 2005, Global robust stability analysis of neural networks with discrete time delays, *Chaos, Solitons and Fractals*, 26, 1407-1414.
- Arik, S., 2016, Dynamical analysis of uncertain neural networks with multiple time delays, *Journal of Systems Science*, 47, 730-739.
- Cao, J. ve Chen, T., 2004, Global exponentially robust stability and periodicity of delayed neural networks, *Chaos, Solitons and Fractals*, 22, 957-963.
- Cao, J., L., Huang, D. S. ve Qu , Y., 2005, Global robust stability of recurrent neural networks, *Solitons and Fractals*, 23, 221-229.
- Chen, A. ve Cao, J., 2005, Global robust stability of interval cellular neural networks with time-varying delays, *Chaos, Solitons and Fractals*, 23, 787-799.
- Chen, X., Li, Z., Song, Q., Hu, J. ve Tan, Y., 2017, Robust stability analysis of quaternion-valued neural networks with time delays and parameter uncertainties, *Neural Networks*, 91, 55-65.
- Chua, L. O. ve Yang, L., 1988, Cellular Neural Networks : Theory, *IEEE Transactions on Circuits and Systems-I*, 35, 1257-1272.
- Ensari, T. ve Arik, S., 2010, New results for robust stability of dynamical neural networks with discrete time delays, *Expert Systems with Applications*, 37, 5925-5930.
- Faydasicok, O. ve Arik, S., 2012a, Equilibrium and stability analysis of delayed neural networks under parameter uncertainties, *Applied Mathematics and Computation*, 218, 6716-6726.
- Faydasicok, O. ve Arik, S., 2012b, Further analysis of global robust stability of neural networks with multiple time delays, *Journal of the Franklin Institute*, 349, 813-825.

- Faydasıcok, O. ve Arik, S., 2012c, Robust stability analysis of a class of neural networks with discrete time delays, *Neural Networks* ,29-30, 52-59.
- Faydasıcok, O. ve Arik, S., 2013a, An analysis of stability of uncertain neural networks with multiple time delays, *Journal of the Franklin Institute*, 350, 1808-1826.
- Faydasıcok, O. ve Arik, S., 2013b, A new robust stability criterion for dynamical neural networks with multiple time delays, *Neurocomputing* ,99, 290-297.
- Faydasıcok, O. ve Arik, S., 2013c, A new upper bound for the norm of interval matrices with application to robust stability analysis of delayed neural networks, *Neural Networks* ,44, 64-71.
- Faydasıcok, O., Cicek, C. ve Arik, S., 2018a, A New robust stability result for delayed neural networks, *Cheng L., Leung A., Ozawa S. (eds) Neural Information Processing. ICONIP 2018. Lecture Notes in Computer Science, vol 11302. Springer, Cham.*
- Faydasıcok, O., Cicek, C. ve Arik, S., 2018b, A New sufficient condition for robust stability of delayed neural networks, *Proceedings of The 33rd International technical conference on circuits systems, computers and communications ITC-CSCC2018*, 248-251.
- Feng, W., Yang, S., X. ve Wu, H., 2014, Improved robust stability criteria for bidirectional associative memory neural networks under parameter uncertainties, *Neural Computing and Applications*, 25,1205–1214.
- Forti, M. ve Tesi, A., 1995, New conditions for global stability of neural networks with applications to linear and quadratic programming problems, *IEEE Transactions on Circuits and Systems-I*, 42, 354-365.
- Grossberg, S., 1969, Learning and energy-entropy dependence in some nonlinear functional-differential systems, *Bulletin of the American Mathematical Society*, 75, 1238–1242.
- Guo, Z., Wang, J. ve Yan, Z., 2014, A systematic method for analyzing robust stability of interval neural networks with time-delays based on stability criteria, *Neural Networks*, 54, 112-122.
- Hopfield, J. J., 1982, Neural networks and physical systems with emergent collective computational abilities, *Proc. Nat. Acad. Sci.*, 79, 2554–2558.

- Horn, R. A. ve Johnson, C. R., 1991, Topics in Matrix Analysis, Cambridge University Press, New York.
- Hu, B., Guan, Z., Qian, T. ve Chen, G., 2018, Dynamic analysis of hybrid impulsive delayed neural networks with uncertainties, *IEEE Transactions on Neural Networks and Learning Systems*, 29, 4370 – 4384.
- Huang, C., Shu, Y., Chang, K., Shou, H., ve Lu, C., 2015, Robust passivity analysis for discrete-time recurrent neural networks with mixed delays, *International Journal of Electronics*, 102, 216-232.
- Khalil, H. K., 1996, Nonlinear Systems, Prentice Hall, New Jersey.
- Li, A. ve Cao, J., 2005, ‘Global exponential robust stability of delayed neural networks, *International Journal of Bifurcation and Chaos*, 14, 2925-29313.
- Li, D., Cheng, P., Hua, M. ve Yao, F., 2018, Robust exponential stability of uncertain impulsive stochastic neural networks with delayed impulses , *Journal of the Franklin Institute*, 355, 8597-8618.
- Liao, X. F. ve Yu, J., 1998, Robust stability for interval Hopfield neural networks with time delay, *IEEE Transactions on Neural Networks*, 9, 1042-1045.
- Liao, X. F., Wong, K. W., Wu, Z. ve Chen, G., 2001, Novel robust stability for interval-delayed hopfield neural, *IEEE Transactions on Circuits and Systems-I*, 48, 1355-1359.
- Liu, P., 2015, Further results on robust delay-range-dependent stability criteria for uncertain neural networks with interval time-varying delays, *International Journal of Control, Automation and Systems*, 13, 1140–1149.
- Liu, Y., Lee, S., M. ve Lee, H., G., 2015, Robust delay-depent stability criteria for uncertain neural networks with two additive time-varying delay components, *Neurocomputing*, 151, 770-775.
- Liu, P., 2018, Further Improvement on Delay-Dependent Global robust exponential stability for delayed cellular neural networks with time-varying delays, *Neural Processing Letters*, 47, 1177–1195.



- Luo, W., Zhong, K., Zhu, S. ve Shen, Y., 2014, Further results on robustness analysis of global exponential stability of recurrent neural networks with time delays and random disturbances, *Neural Networks*, 53, 127-133.
- Muralisankar, S. ve Gopalakrishnan, N., 2014, Robust stability criteria for Takagi–Sugeno fuzzy Cohen–Grossberg neural networks of neutral type, *Neurocomputing*, 144, 516-525.
- Ozcan, N., 2011, A New Sufficient Condition for Global robust stability of delayed neural networks, *Neural Processing Letters*, 34, 305-316.
- Ozcan, N. ve Arik, S., 2016, Global robust stability analysis of neural networks with multiple time delays, *IEEE Transactions on Circuits and Systems-I*, 53, 166-176.
- Qi, H., 2007, New sufficient conditions for global robust stability of delayed neural networks, *IEEE Transactions on Circuits and Systems-Regular Papers*, 54, 1131-1141.
- Samli, R., 2015, A new delay-independent condition for global robust stability of neural networks with time delays, *Neural Networks*, 66, 131-137.
- Samli, R. ve Yucel, E., 2015, Global robust stability analysis of uncertain neural networks with time varying delays, *Neurocomputing*, 167, 371-377.
- Shan, Q., Zhang, H., Wang, Z. ve Wang, J., 2017, Adjustable delay interval method based stochastic robust stability analysis of delayed neural networks, *Neurocomputing*, 219, 389-395.
- Shao, J., L., Huang, T. ve Zhou, S., 2010, Some improved criteria for global robust exponential stability of neural networks with time-varying delays, *Communications in Nonlinear Science Numerical Simulations*, 15, 3782-3794.
- Sing, V., 2007, Global robust stability of delayed neural networks: Estimating upper limit of norm of delayed connection weight matrix, *Chaos, Solitons and Fractals*, 32, 259-263.
- Song, Q., Yu, Q., Zhao, Z., Liu, Y. ve Alsaadi, F., E., 2018, Boundedness and global robust stability analysis of delayed complex-valued neural networks with interval parameter uncertainties, *Neural Networks*, 103, 55-62.
- Sun, C. ve Feng, C. B., 2003, Global robust exponential stability of interval neural networks with delays, *Neural Processing Letters*, 17, 107-115.

- Syed Ali, M., Gunasekaran, M. ve Esther, R., 2017, Robust stability of hopfield delayed neural networks via an augmented L-K functional, *Neurocomputing*, 234, 198-204.
- Takagi, T. ve Sugeno, M., 1983, Fuzzy identification of systems and its applications to modeling and control, *IEEE Transactions on Systems, Man and Cybernetics*, 15, 116–132.
- Tian, X.,Liang, J. ve Cao, Y., 2010, Robust observer for discrete-time Markovian jumping neural networks with mixed mode-dependent delays, *Nonlinear Dynamics*, 67, 47–61.
- Wan, Y., Cao, J.,Wen, G. ve Yu, W., 2016, Robust fixed-time synchronization of delayed Cohen–Grossberg neural networks , *Neural Networks*, 73, 86-94.
- Wang, D., Liu, D., Mu, C. ve Zhang, Y., 2018, Neural Network Learning and robust stabilization of nonlinear systems with dynamic uncertainties , *IEEE Transactions on Neural Networks and Learning Systems*, 29, 1342 – 1351.
- Wu, X.,Wang , Y.,Huang , L. ve Zuo, Y., 2010, Robust stability analysis of delayed Takagi-Sugeno fuzzy Hopfield neural networks with discontinuous activation functions, *Cognitive Neurodynamics*, 4, 347–354.
- Wu, H., Tao, F., Qin, L., Shi, R. ve He, L., 2011, Robust exponential stability for interval neural networks with delays and non-Lipschitz activation functions , *Nonlinear Dynamics*, 66, 479–487.
- Yue, D.,Zhang, Y. ve Tian , E., 2010, Improved global robust delay-dependent stability criteria for delayed cellular neural networks, *International Journal of Computer Mathematics*, 85, 1265-1277.
- Xue, H., Xu, X., Zhang, J. ve Yang, X., 2019, Robust stability of impulsive switched neural networks with multiple time delays , *Applied Mathematics and Computation*, 359, 456-475.
- Zhang, Y., 2012, Robust exponential stability of discrete-time uncertain impulsive neural networks with time-varying delay, *Mathematical Methods in the Applied Sciences*, 35, 1287-1299.

## ÖZGEÇMİŞ

Kişisel Bilgiler	
Adı Soyadı	ÖZLEM FAYDASIÇOK
Doğum Yeri	Konya
Doğum Tarihi	14.07.1985
Uyruğu	<input checked="" type="checkbox"/> T.C. <input type="checkbox"/> Diğer:
Telefon	0532 276 67 66
E-Posta Adresi	kozlem@istanbul.edu.tr
Web Adresi	http://aves.istanbul.edu.tr/kozlem/

Eğitim Bilgileri	
Lisans	
Üniversite	İstanbul Üniversitesi
Fakülte	Fen Fakültesi
Bölümü	Matematik Bölümü
Mezuniyet Yılı	2007

Yüksek Lisans	
Üniversite	İstanbul Üniversitesi
Enstitü Adı	Fen Bilimleri
Anabilim Dalı	Matematik Anabilim Dalı
Programı	Matematik Programı
Mezuniyet Tarihi	2010

Doktora	
Üniversite	İstanbul Üniversitesi
Enstitü Adı	Fen Bilimleri
Anabilim Dalı	Matematik Anabilim Dalı
Programı	Matematik Programı
Mezuniyet Tarihi	2019

Makale ve Bildiriler	
<b>Makaleler</b>	
Faydasicok, O. ve Arik, S., 2012, Further analysis of global robust stability of neural networks with multiple time delays, <i>Journal of the Franklin Institute</i> , 349, 813-825.	
Faydasicok, O. ve Arik, S., 2013, A new upper bound for the norm of interval matrices with application to robust stability analysis of delayed neural networks, <i>Neural</i>	

*Networks* ,44, 64-71.

Faydasıcok, O. ve Arik, S., 2012, Robust stability analysis of a class of neural networks with discrete time delays, *Neural Networks* ,29-30, 52-59.

Faydasıcok, O. ve Arik, S., 2013, A new robust stability criterion for dynamical neural networks with multiple time delays, *Neurocomputing* ,99, 290-297.

Faydasıcok, O. ve Arik, S., 2013, An analysis of stability of uncertain neural networks with multiple time delays, *Journal of the Franklin Institute*, 350, 1808-1826.

Faydasıcok, O. ve Arik, S., 2012, Equilibrium and stability analysis of delayed neural networks under parameter uncertainties, *Applied Mathematics and Computation*, 218, 6716-6726.

#### ***Bildiriler***

Faydasıcok, O., Cicek, C. ve Arik, S., 2018a, A New Sufficient Condition for Robust Stability of Delayed Neural Networks, *Cheng L., Leung A., Ozawa S. (eds) The 33rd International technical conference on circuits systems, computers and communications ITC-CSCC*, 248-251.

Faydasıcok, O., Cicek, C. ve Arik, S., 2018a, A New Robust Stability Result for Delayed Neural Networks, *Cheng L., Leung A., Ozawa S. (eds) Neural Information Processing. ICONIP 2018. Lecture Notes in Computer Science, vol 11302. Springer, Cham.*