İNÖNÜ ÜNİVERSİTESİ

FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

25

DİZİNİN ÇEKİRDEĞİ HAKKINDA

Hüsamettin COŞKUN

YÜKSEK LİSANS TEZİ

MATEMATİK ANABİLİM DALI

1986

MALATYA

Bu çalışmayı bana vererek çalışmalarım süresince yakın ilgi ve yardımlarını esirgemeyen Hocam; Sayın Doç. Dr. Ekrem ÖZTÜRK'e ve konunun ihtiyaç duyduğum kısımlarını kendisiyle konuşup - tartışma imkânını veren Sayın Yrd. Doç. Dr. İhsan SOLAK'a teşekkür ve şükranlarımı sunmayı bir borç bilirim.

H. COŞKUN

İÇİNDEKİLER

ÖZET

Bu çalışma üç bölümden ibaret olup, İlk bölümde toplama metodları hakkında genel bilgi verilmiş ve iki metodun mutlak denkliği tanıtılmıştır. İkinci bölümde bir dizinin çekirdeğini tanıtıp bununla ilgili temel teoremler verilmiştir. Üçüncü bölümde ise sınırlı dizilerin çekirdeğine ait problemler verilmiştir.

SİMGELER

$\in$: Eleman

$\cap$: Kesişim

$\supset$: İhtiva eder

$\mathbb{N}$: Pozitif tamsayılar cümlesi

$\mathbb{R}$: Reel sayılar cümlesi

$\mathbb{R}(a_{nk})$: Kompleks elemanlı (a_{nk}) $(n,k=1,2,\ldots)$ matrisinin reel kısmı

$I(a_{nk})$: Kompleks elemanlı (a_{nk}) $(n,k=1,2,\ldots)$ matrisinin imajiner kısmı

$A_n(s)$: $\left(\sum_{k=1}^{\infty} a_{nk}s_k\right)$ kompleks elemanlı dizisinin n. terimi

1. TEMEL TANIM VE TEOREMLER

1. 1. Matris Dönüşümleri ve Regüler Matrisler

$A=(a_{nk})$ $(n,k=1,2,\dots)$ kompleks terimli sonsuz bir matris olsun. Kompleks sayıların bir $s=(s_n)$ dizisinin As matris dönüşümü, her $n\in\mathbb{N}$ için $\sum_{k=1}^{\infty} a_{nk}s_k$ mevcut olmak üzere

$$A_n(s)=\sum_{k=1}^{\infty} a_{nk}s_k$$

şeklinde tanımlanır.

Burada $\left(A_n(s)\right)$ dizisine (s_n) dizisinin $A=(a_{nk})$ matrisi ile yapılan dönüşüm dizisi denir.

TANIM 1.1.1

Bir $A=(a_{nk})$ $(n,k=1,2,\dots)$ kompleks terimli sonsuz matrisi verilmiş olsun. Her $n\in\mathbb{N}$ için $A_n(s)=\sum_{k=1}^{\infty} a_{nk}s_k$ mevcut ve

$$\lim_{n\to\infty} A_n(s)=a$$

ise, (s_n) dizisi a-ya A-toplanabilir veya A-limitlenebilirdir denir ve $A\text{-}\lim s_n=a$ şeklinde gösterilir.

TANIM 1.1.2

Yakınsak her diziyi, limitini koruyarak yine yakınsak bir diziye dönüştüren $A=(a_{nk})$ $(n,k=1,2,\dots)$ matrisine " regüler matris " denir [5].

Regüler matrislerle ilgili en önemli teorem Silverman - Toeplitz teoremidir.

TEOREM 1.1.1

$A=(a_{nk})$ $(n,k=1,2,\ldots)$ matrisinin regüler olması için gerek ve yeter şartlar;

(i) Her n için öyle bir K sabiti vardır ki ,

$$\sum_{k=1}^{\infty} |a_{nk}| \leqslant K$$

(ii) Her bir sabit k için $\lim_{n\to\infty} a_{nk}=0$

(iii) $$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{\infty} a_{nk} = 1$$

dir [5].

Bu teoremin şatlarını sağlayan matrislere T - matrisleri denir.

1.2. Mutlak Denklik

TANIM 1.2.1

$A=(a_{nk})$ ve $B=(b_{nk})$ iki regüler matris ve

$$z'_n=\sum_{k=1}^{\infty} a_{nk}z_k \quad , \quad z''_n=\sum_{k=1}^{\infty} b_{nk}z_k \qquad ; \; n=1,2,\ldots$$

olsun. Eğer (z_k) dizilerinin verilen bir sınıfı için

$$\lim_{n\to\infty} (z'_n-z''_n)=0$$

ise (yani; ya z'_n ve z''_n nün herikisi ayni limite gitsin yada onların farkı sıfıra gitsin); " A ve B matrisleri mutlak denktir" denir [3].

Şimdi çalışmamızda gerekli olan, mutlak denklik ile ilgili iki teoremi ispatsız olarak verelim.

TEOREM 1.2.1

A ve B regüler matrislerinin, sınırlı diziler cümlesi üzerinde mutlak denk olabilmesi için gerek ve yeter şart ;

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{\infty} |a_{nk}-b_{nk}|=0$$

olmasıdır [3].

TEOREM 1.2.2

Her $n\in N$ için $\sum_{k=1}^{\infty} a_{nk}\vartheta_k$, $\sum_{k=1}^{\infty} b_{nk}\vartheta_k$ ve $\sum_{k=1}^{\infty} |(a_{nk}-b_{nk})\vartheta_k|$ serileri mevcut olacak şekilde sınırsız bir dizi (ϑ_k) olsun. Bu takdirde A ve B regüler matrisleri $|s_k| \leq |\vartheta_k|$ olacak şekildeki bütün sınırsız (s_k) dizilerinin cümlesi üzerinde mutlak denk olması için gerek ve yeter şart

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{\infty} |(a_{nk}-b_{nk})\vartheta_k| =0$$

olmasıdır [3].

2. BİR DİZİNİN ÇEKİRDEĞİ

Çalışmamızın bu bölümünde bir dizinin çekirdeğini tanıtacağız.

2.1 İlk Tanımlar ve K. Knopp ' un Çekirdek Teoremi

İlk önce bu bölümde çok kullandığımız konveks cümle tanımını ve onunla ilgili bir teorem verelim.

TANIM 2.1.1

E bir nokta cümlesi ve $\lambda \geq 0$, $\mu \geq 0$, $\lambda+\mu=1$ olmak üzere E nin konveks olması için gerek ve yeter şart herbir $x,y \in E$ için $\lambda x+\mu y \in E$ olmasıdır[4].

TEOREM 2.1.1

Konveks cümlelerin herhangi sayıda kesişimleri konveks dir[6].

TANIM 2.1.2

(s_n) kompleks sayıların bir dizisi ve C_n her $n \in \mathbb{N}$ için $s_n, s_{n+1}, s_{n+2}, \ldots$ noktalarını ihtiva eden sonlu kompleks düzlemin en küçük kapalı konveks bir cümlesi olsun. Açık olarak $C_1 \supset C_2 \supset C_3 \supset, \ldots$ dir. Bu takdirde $\bigcap_{n=1}^{\infty} C_n = C$ cümlesine (s_n) dizisinin çekirdeği denir[3].

(s_n) dizisinin limit noktalarının cümlesi D ise, bu takdirde $D \subset C$ dir.

Bunun için $s \in D$ ve $\lim_{i\to\infty} s_{n_i} = s$ olsun. Herhangi p pozitif tamsayısı aldığımızda daima $n_r > p$ olacak şekilde r belirtebiliriz. Bu takdirde $s_{n_r}, s_{n_{r+1}}, s_{n_{r+2}}, \ldots \subset C_p$ dir.

C_p kapalı olduğundan kendisindeki her dizinin limit noktasını ihtiva eder. Dolayısıyla $s \in C_p$ ve p keyfi olduğundan $s \in C$ dir

O halde C dizinin limit noktalarını ihtiva eden en küçük kapalı konveks bir cümledir.

Eğer C tek noktadan ibaret ise, (s_n) yakınsaktır. C boş ise (yani; sonlu nokta ihtiva etmez), (s_n) dizisine belirli ıraksak denir ve $s_n \sim \infty$ şeklinde gösterilir.

Şimdi bununla ilgili örnekler verelim. Eğer

$$s_n = \begin{cases} n \quad , & n \text{ çift} \\ ni \quad , & n \text{ tek} \end{cases}$$

şeklinde tanımlanmış ise, herbir C_n kompleks düzlemin birinci bölgesinin orijinle dik açılı üçgensel kısmı kaldırıldıktan sonra kalan kısmı olduğundan C boş, yani; $s_n \sim \infty$ dır. $s_n = n + (-1)^n in^2$ ise, yine $s_n \sim \infty$ dır. Fakat $s_n = ni^n$ veya $s_n = (-1)^n$ ise, bu takdirde her C_n kompleks düzlemin tamamı veya -1'den $+1$' e reel eksenden ibaret olduğundan bu dizilerin çekirdekleri boş değildir. Dolayısıyla söz konusu diziler belirli ıraksak değildir.

Son örnekten de görüldüğü gibi reel bir (x_n) dizisinin çekirdeği, a ve b sırasıyla (x_n)' in sol ve sağ limitleri olmak üzere $[a,b]$ aralığıdır.

Eğer $A=(a_{nk})$ $(n,k=1,2,\ldots)$ regüler bir matris ise, her yakınsak (s_n) dizisinin A-dönüşümünün çekirdeği, (s_n)' in çekirdeği ile aynıdır. her iki çekirdekte (s_n)' in limit noktası olan tek noktadan ibarettir.

Şimdi K. Knopp' un temel teoremini verelim.

TEOREM 2.1.2

$A=(a_{nk})$ non- negatif bir T - matris ise, bu takdirde her (s_n) dizisinin çekirdeği, $t_n=\sum_{k=1}^{\infty} a_{nk}s_k$ dizisinin çekirdeğini ihtiva eder.

İSPAT:

İspatı önce reel diziler için daha sonra kompleks diziler için vereceğiz.

Reel bir (x_n) dizisinin çekirdeği $[a,b]$ ve $x'_n=\sum_{k=1}^{\infty} a_{nk}x_k$' nin çekirdeği $[a',b']$ olsun. $[a',b']\subset[a,b]$ olduğunu göstermek için $b\geqslant b'$ ve $a\leqslant a'$ olduğunu göstermek zorundayız. Eğer $b=\infty$ ise, $b\geqslant b'$ olduğu açıktır. Aksi takdirde, yani; b sonlu ise, (x_n)'in sadece sonlu sayıda terimi $b+\varepsilon$ $(\varepsilon>0)$ dan daha büyük kaldığından, $k>m$ oldukca $x_k<b+\varepsilon$ olacak şekilde bir m pozitif sayısı vardır.

Şimdi

$$x'_n=\sum_{k=1}^{m} a_{nk}x_k+\sum_{k=m+1}^{\infty} a_{nk}x_k \text{ , ve her } k \text{ için } \lim_{n\to\infty} a_{nk}=0$$

olduğundan, x'_n ve $x''_n=\sum_{k=m+1}^{\infty} a_{nk}x_k$ dizileri aynı limit noktasına sahiptir. (a_{nk}) non - negatif bir T - matris olduğundan

$$x''_n<(b+\varepsilon)\sum_{k=1}^{\infty} a_{nk}\to(b+\varepsilon) \qquad (n\to\infty)$$

dur.

Böylece x''_n ' nün herbir limit noktası $b+\varepsilon$ dan küçüktür. ε keyfi olduğundan $b'\leqslant b$ dir.

a'nın alt limit olma özelliğini kullanarak, benzer şekilde $a\leqslant a'$ olduğu gösterilebilir.

İkinci kısmın ispatı için kompleks terimli dizilere karşılık yeni bir çekirdek tanımına ihtiyaç vardır.

TANIM 2.1.3

Her L doğrusu düzlemi iki yarı - düzleme böler. Eğer S nokta cümlesi böyle bir yarı - düzlemde kalır ise (noktaların hepsi veya bazısı L üzerinde kalabilir), L ye S için bir " sınır doğrusu " denir [3].

Bu tanımın ışığı altında kompleks diziler için çekirdek tanımını şöyle verebiliriz.

Kompleks terimli bir (s_n) dizisi verilmiş olsun. Eğer (s_n) sınır doğrusuna sahip değil ise, çekirdeği düzlemin tamamıdır. Sınır doğrusuna sahip ise, çekirdeği limit noktalarını ihtiva eden yarı - düzlemlerin arakesitidir.

Şimdi çekirdek için yukarıda verdiğimiz tanımların denk olduğunu gösterelim.

(s_n) dizisinin birinci tanıma göre çekirdeği E , limit noktalarının cümlesi D , D yi ihtiva eden yarı - düzlemlerin arakesiti F olsun. Açık olarak $F \supset D$ ve $E \supset D$ dir. $E = F$ olduğunu göstermek için,

(i) Farzedelimki $a \notin E$ olsun. Bu takdirde bazı n ler için $a \notin C_n$ dir. C_n konveks olduğundan a ile C_n'i ayıran bir L sınır doğrusu çizebiliriz. $D \subset C_n$ olduğundan L, a ile D yi ayırır. Böylece $a \notin F$ ve dolayısıyla $F \subset E$ dir.

(ii) (s_n) için bir sınır doğrusu L ve D yi ihtiva eden herhangi bir yarı - düzlem P olsun. Bu takdirde (s_n)'nin sonlu sonlu sayıda terimi hariç hepsi L nin D ile aynı tarafında kalır.

Aksi takdirde D den uzak L nin tarafında en az bir limit noktası olabilir. yani; $s_m, s_{m+1}, \ldots \subset P$ olacak şekilde bir m pozitif tamsayısı vardır. Dolayısıyla $C_m \subset P$ ve $E \subset P$ dir. P keyfi olduğundan $E \subset F$ dir. (i) ve (ii) den $E = F$ dir

Şimdi Teorem 2.1.2 nin kompleks diziler için ispatını verelim.

Kompleks terimli bir (s_n) dizisinin çekirdeği C ve $s_n' = \sum_{k=1}^{\infty} a_{nk} s_k$ 'nın çekirdeği C' olsun. Eğer C düzlemin tamamı ise, ispat açıktır. Eğer (s_n), $x=a$ şeklinde bir sınır doğrusuna sahip ise, örneğin $\lim_{k\to\infty} x_k = a$ ise, reel dizilerden biliyoruz ki;

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{\infty} a_{nk} x_k \geq a$$ dır. Böylece $x=a$ aynı zamanda (s_n') için de bir sınır doğrusudur. Eğer imajıner eksenle pozitif yönde θ açısı yapan herhangi bir L doğrusu (s_n) için bir sınır doğrusu ise, bu takdirde $(e^{-i\theta} s_n)$dizisi de $x=a$ tipinde bir sınır doğrusuna sahiptir. dolayısıyla $x=a$ ayni zamanda $(e^{-i\theta} s_n')$ için bir sınır doğrusudur.Böylece L , (s_n') için bir sınır doğrusudur.

Böylece (s_n)'in limit noktalarını ihtiva eden her yarı- düzlem aynı zamanda (s_n') nün limit noktalarını ihtiva eder. Dolayısıyla $C' \subset C$ ve teorem tam olarak ispatlanmış olur.

Çekirdeğin ikinci tanımından dolayı şunu ifade edebiliriz. Eğer iki dizinin limit noktalarının cümlesi ayni ise, bunların çekirdekleri aynıdır. Fakat tersi doğru değildir. Yani; aynı çekirdeğe sahip iki dizinin limit noktaları aynı olmak zorunda değildir. Örneğin

$$(1,0,1,0,1,0,\ldots) \text{ ve } (1,0,1/2,1,0,1/2,\ldots)$$

dizilerinin limit noktaları farklı olduğu halde çekirdekleri $[0,1]$ aralığıdır.

Şimdi aynı çekirdeğe sahip iki dizinin limit noktaları arasında nasıl bir ilişkinin olabileceğini görelim.

SONUÇ 2.1.1

İki dizinin aynı çekirdeğe sahip olabilmesi için gerek ve yeter şart, bunlardan birinin limit noktalarının cümlesini ihtiva eden her yarı-düzlem, aynı zamanda diğerinin limit noktalarının cümlesini ihtiva etmesidir.

(i) Şart gerektir. Çünkü, aynı E çekirdeğine sahip iki dizi (x_n) ve (y_n), bunların limit noktalarının cümlesi D ve D' olsun. Farzedelimki D yi ihtiva eden bir yarı-düzlem P olsun. Bu takdirde ikinci tanımdan $E \subset P$ ve $D' \subset E$ olduğundan $D' \subset P$ dir.

(ii) Şart yeterdir. (x_n) ve (y_n) dizilerinin çekidekleri sırasıyla E ve E' olsun. Eğer $a \in E$ ise, a, D yi ihtiva eden yarı-düzlemlerin arakesitindedir. Hipotezden dolayı a, D' yü ihtiva eden yarı-düzlemlerin arakesitindedir. Yani; $a \in E'$ ve dolayısıyla $E \subset E'$ dür. Benzer şekilde $E' \subset E$ ve böylece $E = E'$ dür.

SONUÇ 2.1.2

İki dizinin aynı çekirdeğe sahip olabilmesi için gerek ve yeter şart, bunlardan birinin limit noktalarını ihtiva eden her kapalı konveks bölge, aynı zamanda diğerinin limit noktalarını ihtiva etmesidir.

(i) Şart gerektir. Çünkü D yi ihtiva eden kapalı konveks bir P bölgesi D' yü ihtiva etmez ise, $a \notin P$ olacak şekilde en az bir $a \in D'$ ve a yı D den ayıran bir sınır doğrusu vardır. Yani; D yi ihtiva eden D' yü etmeyen bir yarı-düzlem vardır. Önceki sonuçtan dolayı bir çelişki teşkil eder.

(ii) Şart yeterdir. (x_n) ve (y_n) dizileri aynı çekirdeğe sahip değil ise, bu takdirde D yi ihtiva eden D' yü etmeyen bir yarı-düzlem vardır. Bu ise hipoteze aykırıdır. Böylece (x_n) ve

(y_n) dizileri aynı çekirdeğe sahiptir.

2. 2 Belirli Iraksak Diziler

Bu bölümde bir dizinin veya onun $A=(a_{nk})$ $(n,k=1,2,...)$ T-matrisi ile yapılan dönüşümünün çekirdeğinin boş olabilmesi için gerek ve yeter şartlar vereceğiz.

İlk önce şunu ifade edebiliriz. Eğer $s_n \sim \infty$ ise, $|s_n| \to \infty$ dur. Çünkü $s_n \sim \infty$ ise, (s_n) nin C çekirdeği boştur. C kapalı cümlelerin monoton azalan dizisinin ortak kısmı olduğundan her $r>0$ için C_N, $|s|\leq r$ çemberinin hiçbir noktasını ihtiva etmiyecek şekilde N seçebiliriz. Bu takdirde $n \geq N$ için $|s_n| > r$ ve dolayısıyla $|s_n| \to \infty$ dur. $s_n=(-1)^n n$ dizisinden görüldüğü gibi tersini söyleyemiyoruz. Eğer s_n noktalarının tamamı π den daha küçük bir açıda kalır ve $|s_n| \to \infty$ ise, bu takdirde $s_n \sim \infty$ dır. Fakat bunun da tersi doğru değildir. Örneğin $s_n = n+(-1)^n in^2$ dizisi $s_n \sim \infty$ dır Fakat $|s_n| \to \infty$ olduğu halde s_n noktaları π den daha küçük bir açıda kalmaz.

Şimdi bir dizinin belirli ıraksak olabilmesi için daha anlamlı bir teorem verelim.

TEOREM 2.2.1

Kompleks terimli bir (s_n) dizisi verildiği takdirde $s_n \sim \infty$ olabilmesi için gerek ve yeter şart,

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} \ \mathbb{R}(s_n e^{i\phi}) = +\infty \qquad (2.2.1)$$

olacak şekilde bir ϕ açısının mevcut olmasıdır.

İSPAT:

(i). (2.2.1) şartı sağlandığı takdirde her $M>0$ için

$n \geqslant N$ oldukca $R(s_n e^{i\emptyset}) > M$ olacak şekilde bir N seçebiliriz. Böylece $(s_n e^{i\emptyset})$ nin çekirdeği reel kısmı M den daha küçük hiçbir nokta ihtiva edemez. Dolayısıyla $(s_n e^{i\emptyset})$' nin çekirdeği boştur. (s_n) dizisi $(s_n e^{i\emptyset})$ nin döndürülmesi ile elde edildiğinden (s_n)' in çekirdeği boştur.

(ii) $s_n \sim \infty$ olsun. Bu takdirde C_n konveks olduğundan, orijine en yakın bir tek R_n noktası vardır. Eğer $r_n \geqslant 0$ ve $-\pi < \emptyset_n \leqslant \pi$ olmak üzere $R_n = r_n e^{i\emptyset_n}$ ise, $\lim\limits_{n\to\infty} r_n = +\infty$ dur. Şimdi $n \geqslant N$ için $r_n > 0$ olacak şekilde N seçelim. Bu takdirde $n \geqslant N$ için OR_n doğrusunu dik ortalayan L_n doğrusu C_n bölgesini kesemez. Aksi takdirde C_n in konveksliği R_n in orijine en yakın nokta olmamasını gerektirir. Bu nedenle orijin ve C_n, L_n nin zıt taraflarında kalırlar.

Eğer $n > n' \geqslant N$ olacak şekildeki her n, n' için $\emptyset_n = \emptyset_{n'}$ ise, $n > n' \geqslant N$ şartını sağlıyan her n için $\emptyset = -\emptyset_n$ alırız. Bu takdirde düzlemin noktaları, R_n ler r_n noktaları üzerine gelecek şekilde dönmüş olur. Böylece

$$\lim_{n\to\infty} R(s_n e^{i\emptyset}) = +\infty$$

dur.

Eğer $n > n' \geqslant N$ için $\emptyset_n \neq \emptyset_{n'}$ ise, Bu durumda L_n ve $L_{n'}$ doğruları düzlemi dört üçgensel bölgeye ayırır ve C_n orijini ihtiva eden üçgensel bölgenin dik olarak karşısındaki W bölgesinde kalır. Fakat C_n konveks cümlelerin monoton azalan bir dizisi olduğundan, yeteri kadar büyük n den sonra, R_n ler, W' yı açısal olarak ortalayan doğru üzerinde kalır. Böylece aynı sonucu elde ederiz.

Şimdi daha sonra kullanmak üzere oldukca önemli bir lemma verelim.

LEMMA 2.2.1

(s_n) ve (s'_n) dizilerinin çekirdekleri sırasıyla C ve C' olsun. Eğer

$$\lim_{n\to\infty} |s_n - s'_n| = 0 \qquad (2.2.2)$$

ise, bu takdirde $C = C'$ dür.

İSPAT:

$C' \subset C$ olduğunu göstermek için C de olmayan C' nün bir z' noktasını alalım. Bu takdirde $z' \not\subset C_p$ olacak şekilde bir p indisi mevcuttur. C_p nin z' ye en yakın tek noktası z'' ve $|z'-z''| = 3d$ olsun. $z'z''$ doğrusu üzerinde $\alpha = z'+(z''-z')/3$ ve $\beta = z'+2(z''-z')/3$ noktalarını seçelim. Böylece

$$|\alpha - z| = |\beta - \alpha| = |z - \beta| = d$$

dir. α ve β noktalarında $z'z''$ doğrusuna dik doğrular sırasıyla L_α ve L_β olsun.

Diğer taraftan $n \geq q$ için $|s_n - s'_n| < d$ olacak şekilde $q > p$ seçelim. Bu takdirde C_p nin noktaları ve aynı zamanda $s_q, s_{q+1}, s_{q+2}, \ldots$ noktaları z' den L_β doğrusuyla ayrılır. Dolayısıyla $s'_q, s'_{q+1}, s'_{q+2}, \ldots$ noktaları z' den L_α ile ayrılır. Böylece $z' \not\subset C'_q$, ve buradan $z' \not\subset C'$ dür. Bu ise bir çelişkidir. O halde $C' \subset C$ ve benzer şekilde $C \subset C'$ dür. Böylece ispat tamamlanmış olur.

Fakat lemmanın tersi doğru değildir. Örneğin $s_n = (-1)^n$ ve $s'_n = -(-1)^n$ dizileri aynı çekirdeğe sahip oldukları halde (2.2.2) şartını sağlamazlar.

TEOREM 2.2.2

$A=(a_{nk})$ kompleks elemanlı bir alt yarı- T - matris, (s_n) belirli ıraksak bir dizi ve $t_n=\sum_{k=1}^{\infty} a_{nk}s_k$ olsun. Bu takdirde (t_n) belirli ıraksak olabilmesi için gerek ve yeter şart, her $n,k \geq K$ için

$$a_{nk}=\mathbb{R}(a_{nk}) \geq 0 \qquad (2.2.3)$$

olacak şekilde bir K indisinin mevcut olmasıdır.

(2.2.3) şartı (a_{nk}) matrisinin ilk $K-1$ kolonu üzerinde hiç bir kısıtlama getirmez. Fakat $k \geq K$ kolonlarındaki elemanların reel ve non- negatif olmasını gerektirir.

İSPAT:

(i) Şartın yeterliliği için aşağıdaki lemmayı verelim.

LEMMA 2.2.2

$A=(a_{nk})$ (2.2.3) şartını sağlıyan bir alt yarı- T -matris ise, bu takdirde her (s_n) dizisinin C çekirdeği, onun A-dönüşüm dizisinin Γ çekirdeğini ihtiva eder [1].

İSPAT:

$A=(a_{nk})$ alt yarı- T-matrisi (2.2.3) şartını sağlasın. (s_n) verilen bir dizi ve $t_n=\sum_{k=1}^{\infty} a_{nk}s_k$ olsun. Eğer

$$a'_{nk}=\begin{cases} 0 \ , & k<K \\ a_{nk}, & k \geq K \end{cases}$$

ile tanımlanır ise,

$$t'_n=\sum_{k=1}^{\infty} a'_{nk}s_k$$

dönüşümü non-negatif ve regülerdir. Dolayısıyla t'_n nün çekirdeği Γ' ise, teorem 2.1.1 den $\Gamma' \subset C$ dir. Fakat (a_{nk}) regüler olduğundan,

$$\lim_{n\to\infty} (t_n - t'_n) = 0$$

ve aynı zamanda lemma 2.2.1 den $\Gamma = \Gamma'$ dur. O halde $\Gamma \subset C$ dir

(ii) Şartın gerekliliğini aşağıdaki lemmalar yardımıyla ispatlıyacağız.

LEMMA 2.2.3

$A=(a_{nk})$ $(n,k=1,2,\dots)$ kompleks elemanlı bir alt yarı- T-matris ve (s_n) belirli ıraksak bir dizi olsun. Eğer $t_n = \sum_{k=1}^{\infty} a_{nk}s_k$ belirli ıraksak ise, bu takdirde her $n, k \geq K_1$ için

$$I(a_{nk}) \geq 0 \qquad (2.2.4)$$

olacak şekilde bir K_1 indisi mevcuttur.

İSPAT:

Farzedelimki (a_{nk}) alt yarı- T-matrisi (2.2.4)'ü sağlamasın. Bu takdirde $t_n \sim \infty$ değil iken, $x_n \to +\infty$ dolayısıyla $s_n \sim \infty$ olacak şekilde bir $(s_n)=(x_n + iy_n)$ dizisi teşkil edeceğiz.

Bu dizinin elemanlarını belirlemek için indisler

$$1=n_0 < v_1 < n_1 < \dots \quad v_{p-1} < n_{p-1}$$

şeklinde ve $1 \leq k \leq n_{p-1}$ için s_k tanımlanmış olsun.

$$\left| \sum_{k=1}^{n_{p-1}} a_{v_p,k}s_k \right| < 1/2p \quad , \quad \left| 1 - \sum_{k=n_{p-1}+1}^{v_p} a_{v_p,k} \right| < 1/\ 2p|p+ip^2|$$

olacak şekilde $v_p > n_{p-1}$ indisi seçelim ve $n_{p-1} < k \leq v_p$ için $s_k = p+ip^2$ olsun. Bu takdirde

$$t_{v_p} = \sum_{k=1}^{n_{p-1}} a_{v_p,k} s_k + (p+ip^2) \sum_{k=n_{p-1}+1}^{v_p} a_{v_p,k}$$

dır. Buradan

$$\left|t_{v_p} - (p+ip^2)\right| \leq \left|\sum_{k=1}^{n_{p-1}} a_{v_p,k} s_k\right| + \left|p+ip^2\right| \left|1 - \sum_{k=n_{p-1}+1}^{v_p} a_{v_p,k}\right| < \frac{1}{2p} + \frac{1}{2p} = \frac{1}{p}$$

dir Şimdi $v_p < k_p \leq n_p$ ve $c < 0$ için $a_{n_p,k_p} = b+ic$ (b reel) olacak şekilde k_p ve n_p seçelim. Bu takdirde $v_p < k \leq n_p$ için

$$\begin{aligned} s_k &= p \,, \quad k \neq k_p \\ &= p+x+iy \,, \quad k = k_p \end{aligned}$$

olsun. Burada x ve y ilerde belirlenecek olan reel sayılardır.

$$\alpha + i\beta = \sum_{k=1}^{v_p} a_{n_p,k} s_k + p \sum_{k=v_{p+1}}^{n_p} a_{n_p,k} \qquad (\alpha, \beta \text{ reel})$$

dersek,

$$t_{n_p} = (\alpha + i\beta) + (b+ic)(x+iy) = (\alpha + bx - cy) + i(\beta + by + cx)$$

dir. $V_p \leq -p$ ve $cV_p - b\alpha - c\beta \geq 0$ olacak şekilde en küçük reel sayı V_p olsun ve x, y reel sayıları

$$t_{n_p} = (\alpha + bx - cy) + i(\beta + by + cx) \equiv iV_p$$

denklemiyle belirlenmiş olsun. Bu takdirde

$$\alpha + bx - cy = 0 \,, \quad \beta + by + cx = V_p$$

ve

$$cx=V_p-\beta-b\left(\frac{\alpha+bx}{c}\right) \quad \text{veya} \quad (b^2+c^2)x = cV_p-b\alpha-c\beta \geqslant 0$$

dır. Böylece $x \geqslant 0$ ve dolayısıyla $\mathbb{R}(s_{k_p}) \geqslant p$ dir.

Bu işlemi devam ettirirsek indislerin

$1=n_0 < v_1 < n_1 < v_2 < n_2 \ldots$

dizisini ve

$$n_{p-1} < k \leqslant n_p \quad \text{için} \quad R(s_k) \geqslant p \qquad (2.2.5)$$

olacak şekilde bir (s_k) dizisini teşkil ederiz. (s_k) nın A matrisi ile dönüşümü ise, $\varepsilon_p \to 0$ ve $V_p \leqslant -p$ olmak üzere

$$t_{n_p}=iV_p, \qquad t_{v_p}=p+ip^2+\varepsilon_p \qquad (p=1,2,\ldots) \qquad (2.2.6)$$

dir. Şimdi (2.2.5) den $s_n \sim \infty$ dır. (2.2.6) den ve bir dizinin çekirdeği herbir alt dizisinin çekirdeğini ihtiva ettiğinden (t_n)'nin Γ çekirdeği

$$\tau_p = p+ip^2 \qquad (p=1,3,5,\ldots)$$
$$= iV_p \qquad (p=2,4,6,\ldots)$$

ile tanımlanan (τ_p) dizisinin çekirdeğini ihtiva eder. $|\tau_p| \to \infty$ ve (τ_p), $z=x+ix^2$ $(x \geqslant 0)$ yarı-parabolu ve imajiner eksen üzerinde sonsuz noktaya sahip olduğundan (τ_p) nin çekirdeği $\mathbb{R}(z) \geqslant 0$ kapalı yarı-düzlemidir. Böylece Γ bu yarı-düzlemi ihtiva eder. Dolayısıyla $t_n \sim \infty$ değildir.

Eğer (a_{nk}), $s_n \sim \infty$ dizisi verildiğinde $t_n = \sum_{k=1}^{\infty} a_{nk}s_k$, nın da belirli ıraksak olmasını gerektiren bir alt yarı- $T_\tau$matris ise $(\bar{a}_{nk})$ eşlenik matris de aynı özelliğe sahiptir. Böylece lemma 2.2.3 den dolayı her $n,k \geqslant K_2$ için $I(\bar{a}_{nk}) \geqslant 0$ olacak şekilde $K_2 > K_1$ indisi vardır. yani; her $n,k \geqslant K_2$ için $I(a_{nk}) \leqslant 0$ dır.

Şimdi bu sonuç ile lemma 2.2.3'ü birleştirirsek

LEMMA 2.2.4

Eğer (a_{nk}) alt yarı- T-matrisi, $s_n \sim \infty$ olduğunda $t_n \sim \infty$ olmasını gerektiriyor ise, bu takdirde her $n,k \geq K_2$ için

$$I(a_{nk}) = 0 \tag{2.2.7}$$

olacak şekilde bir K_2 indisi mevcuttur.

Teorem 2.2.2 nin ispatını tamamlamak için aşağıdaki lemmayı ispatlıyacağız.

LEMMA 2.2.5

Eğer (a_{nk}) alt yarı- T-matrisi (2.2.7) yi sağlar fakat (2.2.3)'ü sağlamaz ise, (t_n) nin çekirdeği reel eksenin tamamı iken, $s_n \to +\infty$ olacak şekilde non-negatif elemanların reel bir (s_n) dizisi vardır.

İSPAT:

(2.2.7)'yi sağlıyan bir K_2 indisi seçelim ve $1 \leq k \leq K_2$ için $s_k = 0$ olsun. Farzedelimki indisler

$$K_2 = n_0 < v_1 < n_1 < \dots \quad v_{p-1} < n_{p-1}$$

şeklinde ve $1 \leq k \leq n_{p-1}$ için s_k tanımlanmış olsun.

$$\left| \sum_{k=1}^{n_{p-1}} a_{v_p,k} s_k \right| < \frac{1}{2p} \, , \quad \left| 1 - \sum_{k=n_{p-1}+1}^{v_p} a_{v_p,k} \right| < \frac{1}{2p^2}$$

olacak şekilde $v_p > n_{p-1}$ seçelim ve $n_{p-1} < k \leq v_p$ için $s_k = p$ olsun. Bu takdirde

$$t_{v_p} = \sum_{k=1}^{n_{p-1}} a_{v_p,k} s_k + p \sum_{k=n_{p-1}+1}^{v_p} a_{v_p,k}$$

dır. Buradan

$$\left|t_{v_p} - p\right| \leq \left|\sum_{k=1}^{n_{p-1}} a_{v_p,k} s_k\right| + p\left|1 - \sum_{k=n_{p-1}+1}^{v_p} a_{v_p,k}\right| < \frac{1}{2p} + \frac{1}{2p} = \frac{1}{p}$$

dir. Şimdi $v_p < k_p \leq n_p$ ve $a_{n_p,k_p} < 0$ olacak şekilde k_p ve n_p indislerini seçelim. $v_p < k \leq n_p$ için $k \neq k_p$ ise $s_k = p$ ve $s_{k_p} = p+x$ olsun. Burada x, $x \geq 0$ ve

$$t_{n_p} = \sum_{k=1}^{v_p} a_{n_p,k} s_k + p \sum_{k=v_p+1}^{n_p} a_{n_p,k_p} x < -p$$

olacak şekilde seçilmiştir. Bu işlem

$$K_2 = n_0 < v_1 < n_1 < v_2 < n_2 < \cdots$$

indislerini ve

$$s_k \geq p \ (n_{p-1} < k \leq n_p), \ t_{v_p} > p - \frac{1}{p}, \ t_{n_p} < -p \ (p=1,2,\ldots) \quad (2.2.8)$$

olacakşekilde non-negatif elemanlı reel bir (s_n) dizisini teşkil eder. (2.2.8) den görüldüğü gibi (t_n) in Γ çekirdeği reel eksenin tamamıolduğu halde $s_n \to +\infty$ dur. Böylece hem lemmanın hem de teoremin ispatı tamamlanmış olur.

Sonuç olarak teorem 2.2.2 nin ispatında göstermiş olduk ki Eğer (a_{nk}) alt yarı-T-matrisi (2.2.3) şartını sağlamaz ise, (t_n) belirli ıraksak değil iken $\mathbb{R}(s_n) \to +\infty$ olacak şekilde bir (s_n) dizisi mevcuttur. Bu sonuç ile teorem 2.2.1 'i birleştirirsek aşağıdaki teoremi elde ederiz.

TEOREM 2.2.3

$A=(a_{nk})$ kompleks elemanlı bir alt yarı- T-matris ve $\mathbb{R}(s_n)\rightarrow+\infty$ olacak şekilde bir dizi (s_n) olsun. Bu takdirde $t_n=A_n(s)$' in de belirli ıraksak olabilmesi için gerek ve yeter şart, her $n,\ k\geqslant K$ için

$$a_{nk}=\mathbb{R}(a_{nk})\geqslant 0 \tag{2.2.9}$$

olacak şekilde pozitif bir K sayısının mevcut olmasıdır.

(2.2.2) ve (2.2.3) nolu teoremlerden görüyoruz ki, $R(s_n)\rightarrow+\infty$ iken $t_n\sim\infty$ olmasını gerektiren alt yarı- T-matrislerin sınıfı ile, $s_n\sim\infty$ iken $t_n\sim\infty$ olmasını gerektiren alt yarı- T-matrislerin sınıfı aynıdır.

Fakat (s_n) reel dizilere kısıtlandığında (2.2.9) şartı gerek değildir. Örneğin

$$t_n=\left(1+\frac{i}{n}\right)s_n \tag{2.2.10}$$

dönüşümü regüler ve diyagonal bir matrise sahiptir. Eğer $s_n=R(s_n)\rightarrow+\infty$ ise, bu takdirde $R(t_n)=\rightarrow+\infty$ ve teorem 2.2.1 den $t_n\sim\infty$ dır. Fakat (2.2.9)'u sağlamaz.

2. 3 Sınırlı Diziler İçin Çekirdek Teoremi.

K. Knopp'un 2.1.2 deki çekirdek teoreminin ispatında (s_n)'in A- dönüşümünün çekirdeği (s_n)'in çekirdeğinde ihtiva edilmesi için sadece yeter şart verilmişti. Bu bölümde gerek ve yeter şartları vereceğiz.

İlk önce alt yarı-matrisler için bir sonuç verelim.

SONUÇ 2.3.1

$A=(a_{nk})$ $(n,k=1,2,\ldots)$ kompleks elemanlı bir alt yarı-T-matris ise, bu takdirde her (s_n) dizisinin C çekirdeği, $t_n=A(s_n)$' nin Γ çekirdeğini ihtiva etmesi için gerek ve yeter şart; her $n,\ k \geqslant K$ için

$$a_{nk}=\mathbb{R}(a_{nk}) \geqslant 0 \qquad (2.3.1)$$

olacak şekilde bir K indisinin mevcut olmasıdır.

İSPAT:

(i) Şartın yeterliği lemma 2.2.2 den açıktır.

(ii) şartın gerekliği için farzedelimki (2.3.1) sağlanmasın bu takdirde teorem 2.2.2' nin ispatından Γ en az bir nokta ihtiva ederken C boş olacak şekilde bir (s_n) dizisi vardır. Bu çelişki ispatı tamamlar.

Bu sonuçta elde edilen (s_n) dizisi sınırsızdır. (2.3.1) şartının sağlanmayışı, A-dönüşümünün çekirdeğini ihtiva etmeyen sınırlı bir (s_n) dizisinin mevcudiyetini gerektirmez. Örneğin (2.2.10) dönüşümü (2.3.1) şartını sağlamaz. Fakat lemma 2.2.1 den dolayı, her sınırlı dizinin çekirdeği (2.2.10) dönüşümünün çekirdeği ile aynıdır.

Bu nedenle sınırlı diziler için ayrı bir teoreme ihtiyaç vardır.

TEOREM 2.3.1

$A=(a_{nk})$ $(n,k=1,2,\ldots)$ komples terimli bir T-matris ise, bu takdirde her sınırlı (s_n) dizisinin çekirdeği $t_n=A_n(s)$ nin çekirdeğini ihtiva etmesi için gerek ve yeter şart

$$\lim_{n \to \infty} \sum_{k=1}^{\infty} |a_{nk}| = 1 \qquad (2.3.2)$$

dir.

Teoremin ispatına geçmeden önce aşağıdaki lemmaları ispatlıyalım.

LEMMA 2.3.1

Kompleks düzlemde kapalı konveks bir S cümlesi ~~verilmiş~~ olsun. Eğer S yi ihtiva eden her çembersel bölge, ayni zamanda verilen diğer bir ~~konveks~~ F cümlesini ihtiva eder ise, bu takdirde $F \subset S$

İSPAT:

Farzedelimki $F \not\subset S$ olsun. yani; $a \not\in S$ olacak şekilde en az bir $a \in F$ olsun. Bu takdirde konveks cümlenin özelliğinden a yı S den ayıran bir L doğrusu vardır. yani; a noktası L ile belirlenen yarı-düzlemlerin birinde S ise diğerinde kalır ve L ile S ~~nin ortak~~ elemanı yoktur. Göstereceğiz ki, L ye değen S yi ihtiva eden bir $\bar{C}$ çemberi ~~vardır~~. a yı ihtiva edemiyen bu $\bar{C}$ çemberinin varlığı lemmayı ispatlar.

S kapalı olduğundan, L den $\delta > 0$ uzaklığına sahiptir. L'nin S tarafında ve $\delta/2$ uzaklıkta L ye paralel bir doğru L_1 olsun. S sınırlı olduğundan, kenarlarından biri, örneğin; AD kenarı, L_1 üzerinde olan bir $ABCD$ karesi içinde kuşatılmış olabilir. Bu takdirde AD ye dik olan kenar AB ve AB üzerinde $AE=d > (4a^2-\delta^2)/4\delta$ olacak şekilde bir E noktası seçelim. Burada a karenin bir kenarıdır. E merkezli $r=d+\delta/2$ yarıçaplı $\bar{C}$ çemberi istenen çemberdir. Karenin A ve B köşeleri açık olarak çemberin içinde ve $DE=\sqrt{a^2+d^2}$ dir. Fakat $d\delta > a^2-\delta^2/4$ olduğundan $r^2=(d+\delta/2)^2 > a^2+d^2$, yani; $r^2 > DE^2$ dir.

O halde D (ve aynı zamanda C) $\bar{C}$ çemberinin içinde dir. Böyleee $\bar{C}$, L ye değer ve S yi ihtiva eder.

LEMMA 2.3.2

$X=\left\{x_k^{(n)}\right\}$ sınırlı dizilerin dizisi, (yani; her n,k için $|x_k^{(n)}| < M$) (a_{nk}) bir T-matris ve $y_n=\sum_{k=1}^{\infty} a_{nk}x_k^{(n)}$ nin keyfi bir limit noktası y olsun. Butakdirde elemanları X' in dizilerinden alınan bir $(\bar{x}_k)$ dizisi vardır, öyeki $\bar{y}_n=A_n(\bar{x})$'nin bir limit noktası y dir.

İSPAT:

Hipotezden pozitif tamsayıların bir (n_r) $(r=1,2,\ldots)$ alt dizsi vardır, öyleki $\lim_{r\to\infty} y_{n_r}=y$ dir. $(\bar{x}_k)$ dizisini tanımlamak için

$$\sum_{k=k_1+1}^{\infty} |a_{n_1,k}| < \frac{1}{2M}$$

olacak şekilde sabit bir k_1 seçelim ve $1\leqslant k\leqslant k_1$ için $x_k=x_k^{(n_1)}$ olsun. Daha sonra $1\leqslant k\leqslant k_1$ için

$$|a_{n_{r_2},k}| < 1/4Mk_1$$

olacak şekilde r_2 seçelim. Ve

$$\sum_{k=k_2+1}^{\infty} |a_{n_{r_2},k}| < 1/4M$$

olacak şekilde $k_2 > k_1$ tespit edelim. Bu takdirde $\bar{x}_k$ yı $k_1 < k\leqslant k_2$ için $\bar{x}_k=x_k^{(n_{r_2})}$ ile tanımlıyalım.

Şimdi $1\leqslant k\leqslant k_2$ için $|a_{n_{r_3},k}| < 1/8Mk_2$ olacak şekilde $r_3 > r_2$ seçelim ve

$$\sum_{k=k_3+1}^{\infty} \left| a_{n_{r_3},k} \right| < 1/8M$$

olacak şekilde $k_3 > k_2$ tespit edelim. Bu takdirde $\bar{x}_k$ yı $k_2 < k \leq k_3$ için $\bar{x}_k = x_k^{(n_{r_3})}$ ile tanımlıyalım. Bu işlemi sürdürürsek $(\bar{x}_k)$ dizisi X'in dizilerinden alınan elemanlardan ibarettir. Ve

$$\bar{y}_{n_{r_p}} = \sum_{k=1}^{\infty} a_{n_{r_p},k}\bar{x}_k = \left(\sum_{k=1}^{k_{p-1}} + \sum_{k=k_{p-1}+1}^{k_p} + \sum_{k=k_p+1}^{\infty} \right) a_{n_{r_p},k}\bar{x}_k$$

dir. Fakat $\bar{x}_k$ nin tanımından dolayı $k_0=0$, $r_1=1$ olmak üzere

$k_{p-1}+1 \leq k \leq k_p$ için $\bar{x}_k = x_k^{(n_{r_p})}$ olduğundan

$$\left| \bar{y}_{n_{r_p}} - y_{n_{r_p}} \right| = \left| \sum_{k=1}^{\infty} a_{n_{r_p},k} (\bar{x}_k - x_k^{(n_{r_p})}) \right| = \left| \left(\sum_{k=1}^{k_{p-1}} + \sum_{k=k_p+1}^{\infty} \right) a_{n_{r_p},k} (\bar{x}_k - x_k^{(n_{r_p})}) \right|$$

ve

$$\left| \bar{y}_{n_{r_p}} - y_{n_{r_p}} \right| \leq \sum_{k=1}^{k_{p-1}} \left| a_{n_{r_p},k} \right| \left| \bar{x}_k - x_k^{(n_{r_p})} \right| + \sum_{k=k_p+1}^{\infty} \left| a_{n_{r_p},k} \right| \left| \bar{x}_k - x_k^{(n_{r_p})} \right|$$

dır. Buradan

$$\left| \bar{y}_{n_{r_p}} - y_{n_{r_p}} \right| \leq k_{p-1} \cdot \frac{2M}{2^p M k_{p-1}} + \frac{2M}{2^p M} = \frac{1}{2^{p-2}} \longrightarrow 0 \quad (p \to \infty)$$

ve böylece

$$\lim_{p\to\infty} \bar{y}_{n_{r_p}} = \lim_{p\to\infty} y_{n_{r_p}} = y$$

dir.

Şimdi teorem 2.3.1' in ispatına geçelim.

İSPAT:

(i) Şart yeterdir. (s_n)' in çekirdeği $|z|=R$ çeberinde ihtiva edilmiş olsun. Yani; her $\varepsilon>0$ sayısı verildiğinde $k>k(\varepsilon)$ için $|s_k|<R+\varepsilon$ olsun. (a_{nk}) T- matris olduğundan verilen her $\delta>0$ için, her $k\leqslant k(\varepsilon)$ ve $n>n(\delta,\varepsilon)$ için

$$|a_{nk}|\leqslant \frac{\delta}{k(\varepsilon)\max\limits_{k\leqslant k(\varepsilon)} s_k} \tag{2.3.3}$$

olacak şekilde bir $n(\delta,\varepsilon)$ sayısı seçebiliriz.

Şimdi (2.3.2) sağlandığından $n>n_0$ için

$$\sum_{k=1}^{\infty}|a_{nk}|\leqslant 1+\delta \tag{2.3.4}$$

olacak şekilde en az bir n_0 sayısı vardır.

Böylece her $n>\max[n_0,\ n(\delta,\varepsilon)]$ için (2.3.3) ve (2.3.4) den dolayı

$$|t_n|=\left|\sum_{k=1}^{\infty}a_{nk}s_k\right|\leqslant\left|\sum_{k=1}^{k(\varepsilon)}a_{nk}s_k\right|+\left|\sum_{k=k(\varepsilon)+1}^{\infty}a_{nk}s_k\right|$$

$$\leqslant\delta+(1+\delta)(R+\varepsilon)=(R+\varepsilon)+\delta(1+R+\varepsilon)$$

olur.

Fakat aynı ε için δ ile $\delta(1+R+\varepsilon)\to 0$ dır. Bu nedenle ε keyfi olduğundan (t_n) nin her limit noktası, dolayısıyla çekirdeği $|z|=R$ çemberindedir.

Şimdi z_0 düzlemde keyfi bir nokta olmak üzere $|z-z_0|=R$ çemberi (s_n)'in çekirdeğini ihtiva etsin. Bu takdirde $\bar{s}_n=s_n-z_0$ ile tanımlanan $(\bar{s}_n)$ dizisinin çekirdeği $|z|=R$ çemberinde ihtiva edilir.

Böylece $\bar{t}_n = A_n(\bar{s})$ dizisinin çekirdeğide aynı zamanda, $|z| = R$ çemberindedir. Fakat

$$t_n = \sum_{k=1}^{\infty} a_{nk}\bar{s}_k + z_o \sum_{k=1}^{\infty} a_{nk} = \bar{t}_n + z_o \sum_{k=1}^{\infty} a_{nk}$$

ve A bir T-matris olduğundan $t_n - (\bar{t}_n + z_o) \to 0$ $(n \to \infty)$ dır. O halde (t_n) ve $(\bar{t}_n + z_o)$ dizileri aynı çekirdeğe sahiptir. $(\bar{t}_n)$ nin çekirdeği $|z| = R$ çemberinde ihtiva edildiğinden $(\bar{t}_n + z_o)$' ın çekirdeği $|z - z_o| = R$ çemberindedir. Böylece (t_n) dizisinin çekirdeği $|z - z_o| = R$ de ihtiva edilir.

Şimdi göstermiş olduk ki kompleks düzlemde (s_n) dizisinin çekirdeğini ihtiva eden her çember aynı zamanda, (t_n)' nin çekirdeğini ihtiva eder. Böylece lemma 2.3.1 den dolayı (s_n)' in çekirdeği (t_n) nin çekirdeğini ihtiva eder.

(ii) Şart gerektir. $\left(x_k^{(n)}\right)$ dizisi

$$x_k^{(n)} = \begin{cases} e^{-i \arg a_{nk}} & , \quad a_{nk} \neq 0 \\ 1 & , \quad a_{nk} = 0 \end{cases}$$

şeklinde tanımlanmış olsun. Bu takdirde

$$y_n = \sum_{k=1}^{\infty} a_{nk} x_k^{(n)} = \sum_{k=1}^{\infty} |a_{nk}|$$

dir.

Eğer (2.3.2) sağlanmaz ise (y_n)' in bir $y > 1$ limit noktası vardır. Diğer taraftan lemma 2.3.2 den dolayı $x_k^{(n)}$ nın elemanlarından ibaret bir $\bar{x}_k$ dizisi vardır ve bunun A-dönüşümü yani; $\bar{y}_n = A_n(\bar{x})$ nin bir limiti y dir. Fakat her n, k için $|x_k^{(n)}| = 1$

olduğundan $(\bar{x}_k)$ nın her elemanı orijin merkezli birim çembere ait olduğundan çekirdeği de $|z|=1$ çemberinde olmak zorundadır.

Sınırlı bir dizinin A-dönüşümü olan $(\bar{y}_n)$ dizisi, birim çemberin dışında bir limit noktasına sahip olduğundan çekirdeği birim çemberde ihtiva edilemez. Bu ise hipotez ile çelişir ve teorem tam olarak ispatlanmış olur.

2. 4. Çekirdek ve Mutlak Denklik

Bu bölümde çekirdek ve mutlak denklik ile ilgili iki teorem vereceğiz. Söz konusu teoremler Knopp' un temel teoremiyle olduğu gibi teorem 2.3.1 ile de yakından ilgilidir.

TEOREM 2.4.1

Her sınırlı (s_n) dizisinin A-dönüşümünün çekirdeği, (s_n) nin çekirdeğinde ihtiva edilmesi için gerek ve yeter şart, $A=(a_{nk})$ T-matrisinin bütün sınırlı diziler için non-negatif bir $B=(b_{nk})$ matrisine mutlak denk olmasıdır.

İSPAT:

(i) Şart yeterdir. $t_n=\sum_{k=1}^{\infty} a_{nk}s_k$ ve $t'_n=\sum_{k=1}^{\infty} b_{nk}s_k$ dizilerinin çekirdekleri sırasıyla Γ ve Γ' olsun. Eğer her k için $|s_k|\leqslant M$ ve (a_{nk}) ve (b_{nk}) matrisleri bütün sınırlı diziler için mutlak denk ise, bu takdirde teorem 1.2.1 gereğince

$$|t_n-t'_n|\leqslant M\sum_{k=1}^{\infty}|a_{nk}-b_{nk}|\to 0 \qquad (n\to\infty)$$

dir. O halde lemma 2.2.1 den $\Gamma=\Gamma'$ dür. Fakat (b_{nk}) non-negatif bir T-matris olduğundan teorem 2.1.2 gereğice (s_n)'in çekirdeği Γ' yü dolayısıyla Γ yı ihtiva eder.

(ii) Şart gerektir. Önce

$$\mathbb{R}_p(z) = \mathbb{R}(z) \quad , \quad \mathbb{R}(z) \geq 0$$
$$\qquad\quad = 0 \qquad , \quad \mathbb{R}(z) < 0$$

ve $\bar{\mathbb{R}}(z) = \mathbb{R}(z) - \mathbb{R}_p(z)$ olsun.

Eğer $b_{nk} = \mathbb{R}(a_{nk})$ ise, ki bu bir T-matrisdir. Bu durumda A ve B bütün sınırlı diziler için mutlak denktir. Eğer böyle değil ise,

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} \sum_{k=1}^{\infty} |I(a_{nk})| > 0 \tag{2.4.1}$$

dır. Şimdi

$$x_k^{(n)} = 1 \quad , \quad I(a_{nk}) \geq 0$$
$$\quad = -1 \quad , \quad I(a_{nk}) < 0$$

olacak şekilde bir $(x_k^{(n)})$ dizisi tanımlıyalım. Bu takdirde

$$y_n = \sum_{k=1}^{\infty} a_{nk} x_k^{(n)} \quad \text{ve} \quad I(y_n) = \sum_{k=1}^{\infty} |I(a_{nk})|$$

dır. (2.4.1) den (y_n) imajiner kısmı sıfır olmayan bir limit noktasına sahiptir. Diğer taraftan lemma 2.3.2 den elemanları ∓ 1 olan bir $\bar{x}_k$ dizisi vardır, öyleki $\bar{x}_k$ nın çekirdeği açık olarak sadece reel noktalardan ibaret olduğu halde, A-dönüşümü reel olmayan bir limit noktasına sahiptir. Bu ise hipoteze aykırıdır. O halde (a_{nk}) ve $b_{nk} = \mathbb{R}(a_{nk})$ matrisleri bütün sınırlı diziler için mutlak denktir.

Şimdi (b_{nk}) ve $c_{nk} = \mathbb{R}_p(a_{nk})$ matrislerinin bütün sınırlı diziler için mutlak denk olduğunu gösterelim. Eğer böyle değil ise,

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} \sum_{k=1}^{\infty} |\bar{\mathbb{R}}(a_{nk})| > 0 \qquad (2.4.2)$$

dır. Şimdi

$$x_k^{(n)} = 1 \quad , \quad \bar{\mathbb{R}}(a_{nk}) < 0$$
$$= 0 \quad , \quad \bar{\mathbb{R}}(a_{nk}) = 0$$

şeklinde tanımlanmış olsun. Bu takdirde

$$u_n = \sum_{k=1}^{\infty} b_{nk} x_k^{(n)} = -\sum_{k=1}^{\infty} |\bar{\mathbb{R}}(a_{nk})|$$

ve (2.4.2) den (u_n) negatif bir limit noktasına sahiptir. Yine lemma 2.3.2 den elemanları 0 veya 1 olan bir $(\bar{x}_k)$ dizisi vardır. Öyleki; $(\bar{x}_k)$ nın çekirdeği açık olarak sadece non-negatif elemanlardan ibaret olduğu halde, B-dönüşümü negatif bir limit noktasına sahiptir. O halde $(\bar{x}_k)$ nın çekirdeği, B-dönüşümünün çekirdeğini ihtiva etmez. Bu çelişkiden dolayı B ve C dolayısıyla C ve A bütün sınırlı diziler için mutlak denktir. Üstelik C non-negatif bir T-matrisidir.

TEOREM 2.4.2

(ϑ_k) teorem 1.2.2 nin şartlarını sağlıyan pozitif terimli sınırsız bir dizi, $|s_k| \leqslant \vartheta_k$ olmak üzere (s_k) nın A-dönüşümünün çekideği (s_k) nın çekirdeğinde ihtiva edilebilmesi için gerek ve yeter şart, (a_{nk}) reel T-matrisinin $|s_k| \leqslant \vartheta_k$ olacak şekildeki dizilerin cümlesi için non-negatif bir (b_{nk}) matrisine mutlak denk olmasıdır.

İSPAT:

(i) Şartın yeterliliği teorem 1.2.2 yi kullandığımız takdirde teorem 2.4.1'in (i) kısmına benzer şekilde gösterilebilir.

Şimdi şartın gerekliliğinde kullanacağımız aşağıdaki lemmayı ispatlıyalım.

LEMMA 2.4.1

(ϑ_k) sınırsız pozitif terimli bir dizi olmak üzere her n için $|x_k^{(n)}| \leqslant \vartheta_k$ olacak şekildeki dizilerin dizisi $X = (x_k^{(n)})$ $(n,k=1,2,\dots)$ olsun ve her n için $\sum_{k=1}^{\infty} |a_{nk}| \vartheta_k$ mevcut ve her k için $\lim_{n\to\infty} a_{nk} = 0$ olacak şekilde bir matris A olsun. Eğer $y_n = \sum_{k=1}^{\infty} a_{nk} x_k^{(n)}$ nın keyfi bir limit noktası y ise, bu taktirde elemanları X' in dizilerinden alınan bir $(\bar{x}_k)$ dizisi vardır, öyleki; $\bar{y}_n = A_n(\bar{x})$' nin bir limit noktası y dir.

İSPAT:

İlk önce hatırlatalım ki $(\bar{x}_k)$ nın elemanları $x_k^{(n)}$ $(n=1,2,\dots)$ dan alındığından ve $|x_k^{(n)}| \leqslant \vartheta_k$ olduğundan $(\bar{y}_n)$ dizisi mevcuttur.

Hipotezden $\lim_{n\to\infty} y_{p_n} = y$ olacak şekilde pozitif tamsayıların artan bir (p_n) dizisi vardır. $1 \leqslant k \leqslant N$ için ϑ_k nın üst sınırı M_N olsun.

$(\bar{x}_k)$ yı tanımlamak için, $\sum_{k=k_1+1}^{\infty} |a_{p_1,k}| < \frac{1}{2}$ olacak şekilde sabit bir k_1 seçelim ve $\bar{x}_k$ yı $1 \leqslant k \leqslant k_1$ için $\bar{x}_k = x_k^{(p_1)}$ ile tanımlıyalım. Her sabit k için $\lim_{n\to\infty} a_{nk} = 0$ olduğundan $1 \leqslant k \leqslant k_1$ için $|a_{p_{r_2},k}| < 1/(4k_1 M_{k_1})$ olacak şekilde $r_2 > 1$ seçebiliriz.

Şimdi

$$\sum_{k=k_2+1}^{\infty} |a_{p_{r_2},k}| \vartheta_k < \frac{1}{4}$$

olacak şekilde $k_2 > k_1$ belirtebiliriz ve $\bar{x}_k$ yı $k_1 < k \leqslant k_2$

$\bar{x}_k = x_k^{(p_{r_2})}$ ile tanımlıyalım.

Yine $1 \leqslant k \leqslant k_2$ için $|a_{p_{r_3},k}| < 1/(8k_2 M_{k_2})$ olacak şekilde

$r_3 > r_2$ seçelim ve

$$\sum_{k=k_3+1}^{\infty} |a_{p_{r_3},k}| \vartheta_k < \frac{1}{8}$$

olacak şekilde $k_3 > k_2$ belirtelim. Bu takdirde $k_2 < k \leqslant k_3$ için

$\bar{x}_k = x_k^{(p_{r_3})}$ olsun. Böylece $(\bar{x}_k)$ nin herbir elemanı için $\bar{x}_k = x_k^{(n)}$ olacak şekilde bir n vardır. Yani; $(\bar{x}_k)$ nin her elemanı X' in dizilerinden alınmıştır. Şimdi

$$\bar{y}_{p_{r_m}} = \sum_{k=1}^{\infty} a_{p_{r_m},k}\bar{x}_k = \left(\sum_{k=1}^{k_{m-1}} + \sum_{k=k_{m-1}+1}^{k_m} + \sum_{k=k_m+1}^{\infty}\right) a_{p_{r_m},k}\,\bar{x}_k$$

yazabiliriz. Fakat $\bar{x}_k$ nin tanımından $k_{m-1}+1 \leqslant k \leqslant k_m$ için

$\bar{x}_k = x_k^{(p_{r_m})}$ olduğundan

$$|\bar{y}_{p_{r_m}} - y_{p_{r_m}}| = \left|\sum_{k=1}^{\infty} a_{p_{r_m},k}(\bar{x}_k - x_k^{(p_{r_m})})\right| = \left|\left(\sum_{k=1}^{k_{m-1}} + \sum_{k=k_{m-1}+1}^{\infty}\right) a_{p_{r_m},k}(\bar{x}_k - x_k^{(p_{r_m})})\right|$$

$$\leqslant \frac{k_{m-1}.2M_{k_{m-1}}}{2^m.k_{m-1}M_{k_{m-1}}} + \frac{2}{2^m} = \frac{1}{2^{m-2}} \longrightarrow 0 \quad (n\to\infty)$$

dır. O halde $\lim\limits_{m\to\infty} \bar{y}_{p_{r_m}} = \lim\limits_{m\to\infty} y_{p_{r_m}} = y$ dir.

Böylece lemmanın ispatı tamamlanmış olur.

(ii) Şart gerektir. Teorem 2.4.1 in ispatının ikinci kısmında tanımladığımız notasyonları kullanalım. (a_{nk}) reel farzedildiğinden $a_{nk} \equiv b_{nk}$ dır.

Şimdi (a_{nk}) ve (c_{nk}) matrislerinin $|s_k| \leqslant \vartheta_k$ olacak şekildeki bütün (s_k) dizileri için mutlak denk olduğunu gösterelim Eğer değil ise,

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} \sum_{k=1}^{\infty} |\bar{\mathbb{R}}(a_{nk})| \vartheta_k > 0 \qquad (2.4.4)$$

dir. Şimdi

$$\begin{aligned} x_k^{(n)} &= \vartheta_k \quad , \quad \bar{\mathbb{R}}(a_{nk}) < 0 \\ &= 0 \quad , \quad \bar{\mathbb{R}}(a_{nk}) = 0 \end{aligned}$$

olsun. Bu takdide

$$y_n = \sum_{k=1}^{\infty} b_{nk} x_k^{(n)} = -\sum_{k=1}^{\infty} |\bar{\mathbb{R}}(a_{nk})| \vartheta_k \qquad (2.4.5)$$

dır.

(a) Farzedelimki $\alpha_n \equiv \sum\limits_{k=1}^{\infty} |\bar{\mathbb{R}}(a_{nk})| \vartheta_k$ dizisi sonlu pozitif bir limit noktasına sahip olsun. Bu takdide (2.4.5) den (y_n) sonlu negatif bir limit noktasına sahiptir.

lemma 2.4.1 den dolayı elemanları ϑ_k veya 0 olan bir $(\bar{x}_k)$ dizisi vardır ki; $(\bar{x}_k)$ nın çekirdeği açık olarak non-negatif elemandan ibaret olduğu halde, bunun A-dönüşümü negatif bir limit noktasına sahiptir. Bu ise hipoteze aykırıdır.

Böylece A ve C matrisleri $|s_k| \leqslant \vartheta_k$ olacak şekildeki (s_k) lar için mutlak denktir ve C non-negatif bir T-matristir.

(b) Farzedelimki (α_n) dizisinin limit noktaları sadece $+\infty$ ve 0 olsun. Eğer sadece 0 limitine sahip ise, teorem ispatlanmış olur. Değil ise hipotezden $\lim\limits_{r} \alpha_{n_r} = +\infty$ olacak şekilde $n_1 < n_2 < n_3 < \ldots$ pozitif tamsayıların bir dizisi vardır. Şimdi $(x_k^{(n)})$ dizisini şöyle tanımlıyalım. Eğer n, (n_r) $(r=1,2,\ldots)$ dizisine ait değil ise, her k için $x_k^{(n)}=0$, aksi takdirde

$$x_k^{(n)} = \vartheta_k / \alpha_{n_r} \quad , \quad \bar{\mathbb{R}}(a_{n_r,k}) < 0$$

$$= 0 \quad , \quad \bar{\mathbb{R}}(a_{n_r,k}) = 0$$

olsun. Bu takdirde

$$y_{n_r} = \sum_{k=1}^{\infty} a_{n_r,k} x_k^{(n_r)} = - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{|\bar{\mathbb{R}}(a_{n_r,k})| \vartheta_k}{\alpha_{n_r}} = -1$$

dır. Böylece $x_k^{(n)}$ nin bütün terimleri non-negatif olduğu halde $y_n = \sum\limits_{k=1}^{\infty} a_{nk} x_k^{(n)}$ -1 limitine sahiptir. lemma 2.4.1 den yine hipotez ile çelişkiye düşeriz. Böylece teorem ispatlanmış olur.

Burada (a_{nk}) matrisi kompleks elemanlı alındığında teoremin şartı gerekmez. Bunun için (a_{nk}) ve (b_{nk}) matrisleri $|s_k| \leqslant \vartheta_k$ olacak şekildeki bütün (s_k) lar için mutlak denk değil ise,

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} \sum_{k=1}^{\infty} |I(a_{nk})| \vartheta_k > 0 \qquad (2.4.6)$$

dır. Şimdi

$$\begin{aligned} \bar{x}_k &= \vartheta_k \quad , \quad I(a_{nk}) \geqslant 0 \\ &= -\vartheta_k \quad , \quad I(a_{nk}) < 0 \end{aligned}$$

olsun. Bu takdirde

$$I(y_n) = \sum_{k=1}^{\infty} |I(a_{nk})| \vartheta_k$$

ve (2.4.6) dan (y_n) imajiner kısmı sıfır olmayan bir limit noktasına sahiptir.

Fakat $R(y_n) \to +\infty$ olabilir. Bu durumda (y_n) in çekirdeği boştur. lema 2.4.1 den $\bar{x}_k = \mp\vartheta_k$ olan bir $(\bar{x}_k)$ vardır ki; bunun A-dönüşümünün çekirdeği boştur. Dolayısıyla hipotez ile çelişkiye düşmeyiz.

2. 5. Çekirdek Hakkında Agnew Teoremleri

Bu bölümde çekideğin bazı uygulamalarını vereceğiz.

(a) $$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{\infty} |a_{nk}| = 1$$

(b) Herbir k için, hemen hemen her n için $a_{nk}=0$ (yani; sonlu sayıda n ler hariç $a_{nk}=0$ dır.)

(c) Her n için $\sum_{k=1}^{\infty} a_{nk} = 1$

Şartları toplanabilmede bazen kullanılır, ayrıca reel dönüşümler için

(d) Her n, k için $a_{nk} \geqslant 0$

şartı önemlidir.

Şimdi (b), (c) ve (d) şartlarını sağlıyan reel T-dönüşümlerinin ne yapabileceği sorusuna aşağıdaki teoremle cevap verelim.

TEOREM 2.5.1

Her (s_n) ve (s_n)'in çekirdeğindeki her (z_n) dizisine karşılık

$$|z_n - \sigma_n| < \frac{1}{n} \quad (n=1,2,\ldots) \tag{2.5.1}$$

olacak şekilde (s_n)'ni (σ_n)'e dönüştüren (b), (c) ve (d) şartlarını sağlıyan reel bir T-dönüşümü vardır.

İSPAT:

$s_n, s_{n+1}, \ldots, s_{n+p}$ noktalarını ihtiva eden en küçük kapalı konveks bölge $C_{n,p}$ ve $C_{n,1}, C_{n,2}, \ldots$ cümlelerinin birleşimi $C_{n,\infty}$ olsun. Bu takdirde her p için $C_{n,p} \subset C_{n,p+1} \subset C_{n,\infty}$ dur.

$C_{n,\infty}$'un kapanışı $\bar{C}_{n,\infty}$ ve C_n tanım 2.1.2 de tanımlanan cümle olmak üzere $C_{n,\infty} \subset C_n$ ve $C_n \subset \bar{C}_{n,\infty}$ dur. C_n kapalı olduğundan

$$C_n = \bar{C}_{n,\infty} \tag{2.5.2}$$

dur. Eğer $(z_n) \subset C$ ise, her n için $(z_n) \subset C_n$ ve (2.5.2) den $(z_n) \subset \bar{C}_{n,\infty}$ dir. Bu takdirde her n için $|z_n - \sigma_n| < \frac{1}{n}$ ve $\sigma_n \subset C_{n,p_n}$ olacak şekilde bir σ_n noktası ve bir p_n indisi vardır.

Diğer taraftan C_{n,p_n} köşelerinin hepsi veya bazısı $s_n, s_{n+1}, \ldots, s_{n+p_n}$ noktaları olan bir çokgen olduğundan, bu noktalardan

σ_n'i iç veya sınır noktası olarak bırakacak şekilde bir üçgen oluşturabiliriz. Bu üçgenin köşeleri $s_{n+\mu_n}$, $s_{n+\gamma_n}$, $s_{n+\pi_n}$ olsun. Bu takdirde $0 \leqslant \alpha_n \leqslant 1$, $0 \leqslant \beta_n \leqslant 1$ ve

$$\sigma_n = (1-\beta_n)s_{n+\mu_n} + \alpha_n \beta_n s_{n+\gamma_n} + \beta_n(1-\alpha_n)s_{n+\pi_n}$$

olacak şekilde α_n ve β_n seçebiliriz.

$$t_n = (1-\beta_n)s_{n+\mu_n} + \alpha_n \beta_n s_{n+\gamma_n} + \beta_n(1-\alpha_n)s_{n+\pi_n}$$

dönüşümü istenen bütün özellikleri sağlar. Böylece teorem ispatlanmış olur.

Eğer bu teoremdeki (z_n) dizisi yerine kapalı bir A cümlesi alınır ise, aşağıdaki teoremi elde ederiz.

TEOREM 2.5.2

Her (s_n) ve (s_n)'in çekirdeğindeki her kapalı A cümlecümlesine karşılık, (s_n)'i limit noktaları A ya ait olacak şekilde bir diziye dönüştüren ve (b), (c) ve (d) şartlarını sağlıyan reel bir T-dönüşümü vardır.

İSPAT:

A kapalı bir cümle olduğundan, $\overline{B}=A$ olacak şekilde sayılabilir bir $B=\{b_1, b_2, \dots\}$ alt cümlesi vardır.

$$b_1 ;\ b_1, b_2 ;\ b_1, b_2, b_3 ; \dots ;\ b_1, b_2, \dots, b_n ;\ \dots$$

ardışık elemanlarını z_1 , $z_2, \dots$ ile gösterelim. Yani;

$$z_1=b_1,\ z_2=b_1,\ z_3=b_2,\ z_4=b_1,\ z_5=b_2,\ z_6=b_3, \dots$$

olsun. Bu takdirde (z_n) nin limit noktaları $\overline{B}$ dolayısıyla A ile aynıdır.

Bir önceki teoremden dolayı (s_n) dizisini $|z_n - \sigma_n| < \frac{1}{n}$ $(n=1,2,\ldots)$ olacak şekilde (σ_n)'e dönüştüren (b), (c) ve (d) şartlarını sağlıyan reel bir T-dönüşümü vardır. (2.5.1) den dolayı (σ_n) nin limit noktaları A ya aittir.

Herhangi bir dizinin çekirdeği kapalı olduğundan, A cümlesi dizinin çekirdeği olabilir. A cümlesi yerine tek bir a noktası alınır ise, aşağıdaki teoremi elde ederiz.

TEOREM 2.5.3

Her (s_n) ve (s_n)'in çekirdeğindeki her a noktasına karşılık (s_n)'i limit noktası a olan bir diziye dönüştüren (b), (c) ve (d) şartlarını sağlıyan reel bir T-dönüşümü vardır.

İSPAT:

Her n için $z_n = a$ alınır ise, önceki teoremden elde edilir.

2. 6. Steinhaus Teoremi ve Çekirdek

Bu bölümde Steinhaus teoremi ile ilgili iki sonuç vereceğiz Steinhaus teoremini çekirdeğe uygun biçimde şöyle ifade edebiliriz.

Her A regüler dönüşümüne karşılık, $\sigma_n = \sum_{k=1}^{\infty} a_{nk} s_k$ nın çekirdeği birden fazla nokta ihtiva edecek şekilde en az bir sınırlı (s_n) dizisi vardır.

SONUÇ 2.6.1

Eğer $A=(a_{nk})$ bir alt yarı- T-matris ve E kompleks düzlemde boş olmayan kapalı bir cümle ise, E nin noktalarının bir (s_n) dizisi vardır, öyleki (s_n) nin limit noktalarının D cümlesi E ile çakışır ve $\sigma_n = A_n(s)$ nin limit noktalarının D' cümlesi E yi ihtiva eder. Yani; $D' \supset D = E$ dir.

İSPAT:

E de her yerde yoğun E nin bir alt cümlesi $\{\alpha_1, \alpha_2, \dots\}$ olsun.

$$\alpha_1 ; \alpha_1, \alpha_2 ; \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 ; \dots ; \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n ; \dots$$

dizisinin elemanları $\beta_1, \beta_2, \dots$ ile gösterilmiş olsun. Bu takdirde $\beta_1, \beta_2, \dots$ 'nın limit noktalarının cümlesi $\{\alpha_1, \alpha_2, \dots\}$ ve onun limit noktalarından ibaret ve aynı zamanda (α_n), E de her yerde yoğun olduğundan, E ile aynıdır.

$$\left| \beta_1 - \sum_{k=1}^{n_1} a_{n_1,k} \beta_1 \right| < \frac{1}{2}$$

olacak şekilde n_1 seçebiliriz. Bu takdirde $1 \leq k \leq n_1$ için $s_k = \beta_1$ olsun. Genelde $n_1 < n_2 < \dots < n_{p-1}$ ve $1 \leq k \leq n_{p-1}$ için s_k tanımlandığında,

$$\left| \beta_p - \sum_{k=1}^{n_{p-1}} a_{n_p,k} s_k - \sum_{k=n_{p-1}+1}^{n_p} a_{n_p,k} \beta_p \right| < \frac{1}{2p}$$

olacak şekilde $n_p > n_{p-1}$ seçeriz ve $n_{p-1} < k \leq n_p$ için $s_k = \beta_p$ koyarız. Böylece teşkil edilen (s_n) dizisi için $\left| \beta_p - \sigma_{n_p} \right| < 2^{-p}$ dir. Böylece (s_n) ve (σ_n) istenen özelliklere sahiptir.

Eğer yukarıdaki E cümlesi boş cümleden farklı ve kapalı olduğu gibi aynı zamanda konveks ise, ispatta teşkil edilen (s_n) dizisinin C çekirdeği E cümlesidir. Yani; $C' \supset D' \supset D = C = E$ dir.

Buna ilaveten $A = (a_{nk})$ alt yarı- T-matrisi (2.3.1) şartını sağlar ise, bu takdirde $C' \supset C$ den başka $C \supset C'$ dür. Böylece aşağıdaki sonucu verebiliriz.

SONUÇ 2.6.2

Eğer $A=(a_{nk})$ $(n,k=1,2,\dots)$, (2.3.1) şartını sağlıyan bir alt yarı-T-matris ise, bu takdirde kompleks düzlemde her kapalı konveks boş olmayan E cümlesine karşılık, bir (s_n) dizisi vardır ki; (s_n) nin C ve $\sigma_n=A_n(s)$ nın C' çekirdekleri E ile çakışır. Yani; $C' = C = E$ dir.

A alt yarı- T-matrisi (2.3.1) yerine (2.3.2) şartını sağlar ve E cümlesi kapalı konveks ve boş cümleden farklı olmasına ilaveten sınırlı ise, Sonuç 2.6.2 yine geçerlidir.

3. SINIRLI DİZİLERİN ÇEKİRDEĞİ İLE İLGİLİ PROBLEMLER

Bu bölümde sınırlı dizilerin çekirdeğine ait iki problem vereceğiz.

PROBLEM 3.1

$A=(a_{nk})$ $(n,k=1,2,\ldots)$ bir T-matris olmak üzere (s_n) ve (s'_n) sınırlı dizileri için

$$\lim_{n\to\infty} |s_n - s'_n| = 0$$

ise, Bunların A-dönüşümleri aynı çekirdeğe sahiptir.

ÇÖZÜM:

(s_n) ve (s'_n) sınırlı dizilerinin A-dönüşümleri sırasıyla σ_n ve σ'_n olsun. Bu takdirde $m \geqslant 1$ için

$$|\sigma_n - \sigma'_n| = \left|\sum_{k=1}^{\infty} a_{nk}(s_k - s'_k)\right| \leqslant \sum_{k=1}^{m} |a_{nk}||s_k - s'_k| + \sum_{k=m+1}^{\infty} |a_{nk}||s_k - s'_k|$$

dır. Diğer taraftan $(s_n - s'_n) \to 0$ $(n\to\infty)$ ve herbir n için

$$\sum_{k=1}^{\infty} |a_{nk}| < \infty$$

olduğundan,

$$|\sigma_n - \sigma'_n| \leqslant \operatorname*{Max}_{k\leqslant m} |s_k - s'_k| \sum_{k=1}^{m} |a_{nk}| + M. \operatorname*{Max}_{k\geqslant m+1} |s_k - s'_k|$$

dır. Yine $(s_n - s'_n) \to 0$ $(n\to\infty)$ olduğundan, yeteri kadar büyük m için

$\operatorname*{Max}_{k\geqslant m+1} |s_k - s'_k| < \frac{\varepsilon}{2M}$ ve $a_{nk} \to 0$ $(n\to\infty$, k sabit$)$ olduğundan, yeteri kadar büyük n için

$$\sum_{k=1}^{m} |a_{nk}| < \frac{\varepsilon}{2 \max\limits_{k \leq m} |s_k - s'_k|}$$

yapılabilir. O halde m şartlara uygun seçildiği takdirde yeteri kadar büyük n için $|\sigma_n - \sigma'_n| < \varepsilon$ dur. Böylece lemma 2.2.1 den dolayı (σ_n) ve (σ'_n) dizileri aynı çekirdeğe sahiptir.

PROBLEM 3.2

Bir $A=(a_{nk})$ $(n,k=1,2,\ldots)$ regüler matrisinin, her sınırlı dizinin çekirdeğini koruyabilmesi için gerek ve yeter şartlar;

a) $$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{\infty} |a_{nk}| = 1$$

b) Her sonsuz $p_i (i=1,2,\ldots)$ indis dizisi için $u_n = \sum_{i=1}^{\infty} a_{n,p_i}$ dizisinin bir limiti 1 dir [2].

ÇÖZÜM:

(i) Şart gerektir. Çünkü (a) nın gerekliliği teorem 2.3.1 den açıktır. (b) nin gerekliliği için, herhangi bir indis dizisi $p_i (i=1,2,\ldots)$ ve her i için $x_{p_i}=1$, diğer bütün terimleri 0 olan bir dizi (x_n) olsun. Bu takdirde (x_n) sonsuz sayıda 0 terimine sahip ise, çekirdeği $[0,1]$ aralığıdır. Aksi takdirde 1 noktasıdır. $u_n = \sum_i a_{n,p_i}$ nin çekirdeği (x_n) nin çekirdeği olduğundan (b) sağlanır.

(ii) Şartlar yeterdir. Farzedelimki (x_n) sınırlı bir dizi ve $\lim\limits_{i\to\infty} x_{p_i} = a$ olsun. $(1,2,3,\ldots)$ dizisinden p_i sayılarını atarak elde edilen dizi $q_j (j=1,2,\ldots)$ olsun. Bu takdirde (x_n)'in A-dönüşümü,

$$y_n=\sum_{i=1}^{\infty} a_{n,p_i}x_{p_i}+\sum_{j=1}^{\infty} a_{n,q_j}x_{q_j}$$

dir. (b) dan dolayı $\sum_{i=1}^{\infty} a_{m_r,p_i}=u_{m_r}\longrightarrow 1\ (r\to\infty)$ ve

$$y_{m_r}=\sum_{i=1}^{\infty} a_{m_r,p_i}x_{p_i}+\sum_{j=1}^{\infty} a_{m_r,q_j}x_{q_j}$$

dir. Şimdi her $\varepsilon>0$ sayısı için enaz bir N sayısı vardır ki; $i\geqslant N$ için $|\varepsilon_{p_i}|<1/8\varepsilon$ olmak üzere $x_{p_i}=a+\varepsilon_{p_i}$ yazabiliriz. Bu takdirde

$$y_{m_r}-a=\sum_{k=1}^{N} a_{m_r,p_i}x_{p_i}+a\left(\sum_{i=N+1}^{\infty} a_{m_r,p_i}-1\right)+\sum_{i=N+1}^{\infty} a_{m_r,p_i}\varepsilon_{p_i}+\sum_{j} a_{m_r,q_j}x_{q_j}$$

dir. Eğer her k için $|x_k|\leqslant M$ ise, bu takdirde

$$|y_{m_r}-a|\leqslant M\sum_{i}^{N}|a_{m_r,p_i}|+|a|\left|\left(\sum_{i=N+1}^{\infty} a_{m_r,p_i}-1\right)\right|+\frac{\varepsilon}{8}\sum_{i=N+1}^{\infty}|a_{m_r,p_i}|+M\sum_{j}|a_{m_r,q_j}| \qquad (3.1)$$

ve $a_{nk}\longrightarrow 0$ ($n\to\infty$, k sabit) olduğundan yukarıdaki N sayısına karşılık $r\geqslant N_1$ için

$$\sum_{i=1}^{N}|a_{m_r,p_i}|\leqslant \min\left(\frac{\varepsilon}{4M},\frac{\varepsilon}{8|a|}\right)\quad,\quad a\neq 0$$

$$\leqslant \frac{\varepsilon}{4M}\quad,\quad a=0$$

olacak şekilde N_1 belirtebiliriz. Diğer taraftan

$$u_{m_r}=\sum_{i=1}^{N} a_{m_r,p_i}+\sum_{i=N+1}^{\infty} a_{m_r,p_i}$$

olduğundan, $a \neq 0$ ise, $r \geqslant N$ için $|u_{m_r}-1| \leqslant \frac{\varepsilon}{8|a|}$ olacak şekilde $N_2 \geqslant N_1$ belirtebiliriz. Bu takdirde $r \geqslant N_2$ için

$$\left|\left(\sum_{i=N+1}^{\infty} a_{m_r,p_i}-1\right)\right| \leqslant |(u_{m_r}-1)| + \sum_{i=1}^{N} |a_{m_r,p_i}| \leqslant \frac{\varepsilon}{8|a|} + \frac{\varepsilon}{8|a|} = \frac{\varepsilon}{4|a|}$$

dır. (a) dan dolayı $a \neq 0$ ise, N_2 den $a = 0$ ise, N_1 den daha büyük bir N_3 tamsayısı vardır ki; $r \geqslant N_3$ için

$$\sum_{i=N+1}^{\infty} |a_{m_r,p_i}| \leqslant \overset{o}{2}$$

olsun. Eğer $a \neq 0$ ise, (3.1) den $r \geqslant N_3$ için

$$|y_{m_r}-a| \leqslant \frac{\varepsilon}{4} + \frac{\varepsilon}{4} + \frac{\varepsilon}{4} + M \sum_j |a_{m_r,q_j}| \tag{3.2}$$

ve $a = 0$ ise,

$$|y_{m_r}| \leqslant \frac{\varepsilon}{4} + \frac{\varepsilon}{4} + M \sum_j |a_{m_r,q_j}| \tag{3.3}$$

elde ederiz. $u_n = \sum_i a_{n,p_i}$ olduğunu biliyoruz. Şimdi $s_n = z_n + v_n$ olacak şekilde $s_n = \sum_{k=1}^{\infty} |a_{nk}|$, $z_n = \sum_i |a_{n,p_i}|$ ve $v_n = \sum_i |a_{n,q_i}|$ olsun. (a) dolayı $r \geqslant n_1$ için $s_{m_r} \leqslant 1+\varepsilon$ olacak şekilde bir n_1 vardır. Bu nedenle $r \geqslant n_1$ için $z_{m_r} \leqslant 1+\varepsilon$ dur. $u_{m_r} \longrightarrow 1$ olduğundan $r \geqslant n_2$ için $1-\varepsilon \leqslant |u_{m_r}|$ olacak şekilde $n_2 \geqslant n_1$ belirtebiliriz. Böylece $r \geqslant n_2$ için $1-\varepsilon \leqslant z_{m_r} \leqslant 1+\varepsilon$ dolayısıyla $\lim_r z_{m_r} = 1$ dir. $s_{m_r} = z_{m_r} + v_{m_r}$ ve $s_{m_r} \longrightarrow 1$ olduğundan, $\lim_r v_{m_r} = 0$ dır. Bu nedenle $r \geqslant N_4$ için

$$|v_{m_r}| = \sum |a_{m_r},q_i| \leqslant \frac{\varepsilon}{4M} \quad , \quad a \neq 0$$

$$\leqslant 2M \quad , \quad a = 0$$

olacak şekilde $N_4 \geqslant N_3$ belirtebiliriz.

Böylece (3.2) ve (3.3) den dolayı $r \geqslant N_4$ için $|y_{m_r} - a| \leqslant \varepsilon$ dur. O halde a (y_n)' nin limit noktasıdır. Böylece (y_n)' nin limit noktalarının cümlesi (x_n)' in limit noktalarının cümlesini ihtiva eder. Fakat (x_n) sınırlı olduğundan, çekirdeği limit noktalarının cümlesinin konveks örtüsüdür. Bu nedenle (y_n)' nin çekirdeği (x_n)'in çekirdeğini ihtiva eder. (a) dan dolayı (x_n)' in çekirdeği (y_n)' nin çekirdeğini ihtiva ettiğinden, problemin çözümü tamamlanmış olur.

KAYNAKLAR

[1] AGNEW , R. P., Cores of Complex sequences and of their transforms, Amer, J. M. 61. (1939) 178 - 186

[2] ALLEN , H. S., T-transformations which leave the core of every bounded sequence invariant, J.L.M.S, 19, (1944) 42-46

[3] COOK , R. G., İnfinite Matrices and Sequence Spaces, Macmıl Macmıllan and co. limited, (London-1950)

[4] MADDOX , I. J., Elements of Functional Analysis, Cambridge University Press, (1970)

[5] PETERSEN , G. M., Reqular Matrix Transformations, Mc.Graw-Hill, New-York - Toronto-Sydney, 1966

[6] PROTTER , M. H. ve MORREY , C. M., A First Course in Reel Analysis, Berlin, (1977)