23

İNÖNÜ ÜNİVERSİTESİ

FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

BANACH LİMİTLERİ

VE

KUVVETLİ REGÜLER MATRİSLER HAKKINDA

A.Refik BAHADIR

YÜKSEK LİSANS TEZİ

MATEMATİK ANABİLİM DALI

1986

MALATYA

Bu çalışmayı bana vererek çalışmalarım süresince yakın ilgi ve yardımlarını esirgemeyen Sayın Hocam Ydr. Doç. Dr. İhsan SOLAK'a teşekkür ve şükranlarımı sunmayı bir borç bilirim.

A.Refik BAHADIR

İÇİNDEKİLER

ÖZET

Bu çalışma dört bölümden oluşmaktadır. Birinci bölümde lineer fonksiyoneller, Banach Limitleri ve regüler matrisler hakkında ilk tanım ve teoremlere yer verilmiştir.

İkinci bölümde hemen hemen yakınsaklık, hemen hemen peryodik diziler ve bu dizilerin hemen hemen yakınsama özelliği incelenmiştir.

Üçüncü bölüm, kuvvetli regüler matrisler ve hemen hemen yakınsak dizilerle bunlar arasındaki ilginin araştırılmasına ayrılmıştır.

Dördüncü bölümde, kuvvetli regüler matrisler ve bunlara karşılık gelen toplanabilme fonksiyonları, ayrıca bu ilgiden hareketle Tauber şartları değişik bir yorumla incelenmiştir.

GÖSTERİMLER

$\mathbb{R}$	:Reel sayılar cümlesi
$\mathbb{C}$	:Kompleks sayılar cümlesi
$x=(x_n)$	:Reel sayı dizisi
$A=(a_{mn})$	:Reel terimli sonsuz matris
$A_m(x)$	:$(\sum_{n=1}^{\infty} a_{mn}x_n)$ reel terimli dizisinin m. terimi
$\mathcal{A}$	:A nın yakınsaklık alanı
ℓ_∞	:Sınırlı diziler uzayı
$(\ell_\infty)^*$	:Sınırlı diziler uzayının cebirsel duali
c	:Yakınsak diziler uzayı
c_o	:Sıfır dizileri uzayı
m_o	: $\left\{x\in \ell_\infty : \sup_n \left\|\sum_{i=1}^{n} x_i\right\| < \infty\right\}$
$q(x)$	: $\inf_{p,n_1,n_2,\ldots,n_p} \overline{\lim_k} \frac{1}{p}\sum_{i=1}^{p} x_{k+n_i}$
L	:Banach Limiti
β	:Banach Limitleri cümlesi
$\|\|A\|\|$	: $\sup_m \sum_{n=0}^{\infty} \|a_{mn}\|$
$\|A\|$	:$(\|a_{mn}\|)$
Δa_{mn}	: $a_{mn} - a_{m,n+1}$
$\mathcal{K}$	:Terimleri pozitif olan kuvvetli regüler matrisler cümlesi
$k(n)$	:(x_n) dizisinin karakteristik fonksiyonu
$F(n),F(v)$	:Toplanabilme fonksiyonu

1. LİNEER FONKSİYONELLER VE BANACH LİMİTLERİ

1.1. Lineer Uzay ve Lineer Dönüşüm

TANIM 1.1.1

X boş olmayan bir cümle ve IR reel sayılar cismi verilmiş olsun.

$+ : X \times X \longrightarrow X$

$. : \mathbb{R} \times X \longrightarrow X$

fonksiyonları aşağıdaki şartları sağladıkları takdirde X cümlesine IR cismi üzerinde bir reel lineer uzay denir.

Her $a,b \in \mathbb{R}$ ve $x,y,z \in X$ için

i) $x+y=y+x$

ii) $(x+y)+z=x+(y+z)$

iii) Her $x \in X$ için $x+\theta=x$ olacak şekilde bir $\theta \in X$ vardır

iv) Her $x \in X$ için $x+(-x)=\theta$ olacak şekilde bir $(-x) \in X$ vardır

v) $1.x=x$

vi) $a(x+y)=ax+ay$

vii) $(a+b)x=ax+bx$

viii) $a(bx)=(ab)x$

Bütün $x=(x_n)$ reel dizilerinin cümlesi S olsun. S üzerinde toplama ve skaler ile çarpma operasyonlarını, $y=(y_n)$ bir reel dizi ve a herhangi bir reel sayı olmak üzere $x+y=(x_n+y_n)$ ve $ax=(ax_n)$ şeklinde tanımlarsak, S cümlesinin IR cismi üzerinde bir lineer uzay teşkil edeceği açıktır.

Bundan böyle X,Y lineer uzaylarını $\mathbb{R}$ cismi üzerinde alacağız.

TANIM 1.1.2

X ve Y lineer uzaylar olsunlar. $f:X\longrightarrow Y$ fonksiyonuna, her $x,y\in X$ ve bütün a,b skalerleri için

$$f(ax+by)=af(x)+bf(y)$$

eşitliğini sağlaması halinde bir lineer dönüşüm adı verilir.

TANIM 1.1.3

X bir lineer uzay olmak üzere $f:X\longrightarrow \mathbb{C}$ dönüşümü aşağıdaki şartları sağlıyorsa, f ye bir lineer fonksiyonel adı verilir.

i) Her $x,y\in X$ için $f(x+y)=f(x)+f(y)$

ii) Her $x\in X$ ve her a skaleri için $f(ax)=af(x)$.

TANIM 1.1.4

$f:X\longrightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonelini gözönüne alalım. Her $x,y\in X$ için

$$f(x+y)\leqslant f(x)+f(y)$$

ise f ye alttoplamsal, her $x\in X$ ve $a\in\mathbb{R}$ $(a\geqslant 0)$ için

$$f(ax)=af(x)$$

ise f ye homogendir denir.

Hem alttoplamsal ve hem de homogen olan bir f fonksiyoneline, altlineer fonksiyonel denir[7].

$A=(a_{mn})$ $(m,n=1,2,\dots)$ reel terimli sonsuz bir matris olsun. Reel sayıların bir $x=(x_n)$ dizisinin Ax matris dönüşümü her $m\in N$ için $\sum_{n=1}^{\infty} a_{mn}x_n$ mevcut olmak üzere

$$A_m(x)=\sum_{n=1}^{\infty} a_{mn}x_n$$

şeklinde tanımlıdır.

Burada $(A_m(x))$ dizisine (x_n) dizisinin $A=(a_{mn})$ matrisi ile yapılan dönüşümü denir.

TANIM 1.1.5

Bir $A=(a_{mn})$ $(m,n=1,2,\dots)$ reel terimli sonsuz matrisi verilmiş olsun. Her $m\in N$ için $A_m(x)=\sum_{n=1}^{\infty} a_{mn}x_n$ mevcut ve

$$\lim_{m\to\infty} A_m(x)=a$$

ise (x_n) dizisi a-ya A toplanabilirdir veya A-limitlenebilirdir denir ve A-lim $x_n=a$ şeklinde gösterilir.

TANIM 1.1.6

Yakınsak her diziyi, limitini koruyarak yine yakınsak bir diziye dönüştüren $A=(a_{mn})$, $(m,n=1,2,\dots)$ matrisine regüler bir matris denir[7].

Regüler matrislerle ilgili en önemli teorem Silverman-Toeplitz teoremidir.

TEOREM 1.1.7

$A=(a_{mn})$ $(m,n=1,2,\dots)$ matrisinin regüler olması için gerek ve yeter şartlar:

i) Her m için öyle bir K sabiti vardır ki,

$$\sum_{n=1}^{\infty} |a_{mn}|\leqslant K$$

ii) Her bir sabit n için $\lim_{m\to\infty} a_{mn}=0$

iii) $\lim_{m\to\infty} \sum_{n=1}^{\infty} a_{mn}=1$

dir[7;sh8].

TANIM 1.1.8

A bir regüler matris olmak üzere, A-limitlenebilen bütün dizilerin cümlesine A nın yakınsaklık alanı denir ve $\mathcal{A}$ ile gösterilir. Yani,

$$\mathcal{A} = \{x=(x_n) \mid (A_m(x)) \text{ yakınsak}\}$$

dır.

Regüler bir $A=(a_{mn})$ matrisinin yakınsaklık alanının bir lineer uzay olduğu açıktır. A-lim x_n bu lineer uzay üzerinde bir lineer fonksiyoneldir.

Aynı şekilde sınırlı dizilerin oluşturduğu lineer uzay üzerinde tanımladığımız $\limsup\limits_{n\to\infty} x_n$ altlineer bir fonksiyoneldir.

TANIM 1.1.9

$f: X \longrightarrow Y$ bir fonksiyon ve $A \subset X$ olsun. Bu takdirde f fonksiyonu, A nın her elemanına Y nin bir elemanını karşılık getirir. Bu fonksiyonu g ile gösterelim. Yani, $g: A \longrightarrow Y$ olsun. Bu takdirde f fonksiyonuna g nin X e genişletmesi denir[9;sh66].

Şimdi sonuçlarını ileride kullanacağımız şu iki teoremi ispatsız olarak verelim.

TEOREM 1.1.10 (Hahn-Banach Genişletme Teoremi)

X bir lineer uzay ve M bir altuzay olsun. $a \geq 0$ ve $x \in X$ olduğunda farzedelim ki p, X üzerinde alttoplamsal ve $p(ax)=ap(x)$ olsun.

Eğer f, M üzerinde bir lineer fonksiyonel ve $f(x) \leq p(x)$ ise bu takdirde X de $g(x) \leq p(x)$ olacak şekilde f nin X e bir g lineer genişletmesi vardır[6;sh121].

TEOREM 1.1.11

Eğer $p(x)$ $\forall x\in X$ için tanımlı bir altlineer fonksiyonel ise bu takdirde $\forall x\in X$ için,

$f(x)\leqslant p(x)$

olacak şekilde bir f lineer fonksiyoneli vardır.

Ayrıca her $x\in X$ için

$p(-x)=-p(x)$

ise f, $f(x_0)=a$ olacak şekilde seçilebilir. Burada $x_0\in X$ ve a da $p(x_0)>0$ olmak üzere $0\leqslant a\leqslant p(x_0)$ şartını sağlayan herhangi bir sayıdır[7;sh56].

TANIM 1.1.12

X bir lineer uzay olsun. X üzerinde tanımlanan bütün lineer fonksiyonellerin cümlesine X in cebirsel duali denir ve X^* şeklinde gösterilir[6;sh105].

1.2. Banach Limitleri

$x=(x_n)$ reel sayı dizilerinin S cümlesini gözönüne alalım. Sınırlı, yakınsak ve sıfır dizilerinin oluşturdukları lineer uzayları sırasıyla ℓ_∞, C ve C_0 ile gösterelim.

ℓ_∞ sınırlı diziler uzayının cebirsel dualini de $(\ell_\infty)^*$ ile tanımlıyalım.

$$m_0=\left\{x\in \ell_\infty \ : \ \sup_n \left|\sum_{i=1}^{n} x_i\right| < \infty\right\}$$

ve $h:\ell_\infty \longrightarrow \mathbb{R}$ fonksiyoneli $h(x)=\overline{\lim_n}\, x_n$ şeklinde tanımlansın.

TANIM 1.2.1

Aşağıdaki şartları sağlayan bir $L \in (\ell_\infty)^*$ fonksiyoneline Banach Limiti diyeceğiz;

i) $x \geq 0 \Rightarrow L(x) \geq 0$

ii) $L(e)=1$, $e=(1,1,\ldots)$

iii) $L(\sigma x)=L(x)$

Burada $\sigma : \ell_\infty \longrightarrow \ell_\infty$, $(\sigma x)_n = x_{n+1}$ şeklinde tanımlıdır. σ değiştirme operatörü, (iii) şartı L, ℓ_∞ üzerinde σ-invaryanttır şeklinde ifade edilir[2].

ℓ_∞ üzerindeki bütün Banach Limitleri nin cümlesini β ile göstereceğiz.

TANIM 1.2.2

p, ℓ_∞ üzerinde altlineer bir fonksiyonel olsun.

a) Eğer, $L \in (\ell_\infty)^*$ ve $L \leq p$ ($\forall x \in \ell_\infty$ için $L(x) \leq P(x)$) iken $L \in \beta$ ise Banach Limitleri p tarafından oluşturulur, diyeceğiz.

b) Eğer, $L \in \beta$ iken $L \leq p$ ise p Banach Limitleri ni ihtiva eder diyeceğiz[2].

p, ℓ_∞ üzerinde altlineer bir fonksiyonel olsun. ℓ_∞ üzerinde tanımlı olan ve $Q \leq p$ şartını sağlayan bütün Q lineer fonksiyonellerinin cümlesini $\{\ell_\infty, p\}$ ile tanımlıyacağız.

p, tanım 1.2.2 deki iki şartıda sağlıyorsa $\beta = \{\ell_\infty, p\}$ diyeceğiz.

X bir lineer uzay, Y de X in bir altuzayı olsun. p, X üzerinde altlineer fonksiyonel olmak üzere

$q_Y : X \longrightarrow \mathbb{R}$

dönüşümünü,

$$q_Y(x) = \inf_{z\in Y} p(x+z) \qquad (1.2.1)$$

şeklinde tanımlıyalım. Öte yandan,

$\gamma : X \longrightarrow X$

bir lineer operatör olmak üzere $E=\{z:\ z=\gamma x - x\ ,\ x\in X\}$ cümlesini alalım. Bu durumda E nin X in bir altuzayı olduğu açıktır.

q_Y nin bazı özelliklerine geçmeden önce şu lemmayı ispatsız olarak verelim:

LEMMA 1.2.3

$p:\ X \longrightarrow \mathbb{R}$ ve $Q:\ X \longrightarrow \mathbb{R}$ altlineer fonksiyoneller olsun. $\{X,p\} \subset \{X,Q\}$ olması için gerek ve yeter şart $P \leqslant Q$ olmasıdır[2].

UYARI 1.2.4

$\{X,p\} = \{X,Q\} \iff p=Q$ dır.

TEOREM 1.2.5

Her $z\in Y$ için $p(z)\geqslant 0$ olsun. Bu takdirde,

i) q_Y, X üzerinde altlineerdir ve $\forall x\in Y$ için $q_Y(x)=0$ dır.

ii) $\{X,q_E\} \neq \emptyset$ ve $\{X,q_E\}$, γ-invaryant fonksiyonellerinin cümlesidir. Burada q_E (1.2.1) de Y yerine E alınarak elde edilir.

iii) $q_E(x)=p(x)$ $(\forall x\in X)$ olabilmesi için gerek ve yeter şart $\{X,p\}$ nin her elemanının γ-invaryant olmasıdır[2].

İSPAT:

i) $\forall x_1, x_2 \in X$ için $\varepsilon > 0$ verildiğinde,

$p(x_1+z_1) < q_Y(x_1)+\varepsilon$,

$p(x_2+z_2) < q_Y(x_2)+\varepsilon$

olacak şekilde sırasıyla $z_1, z_2 \in Y$ vardır.

$z_1+z_2 \in Y$ olduğundan yukarıdaki eşitsizliklerden,

$$q_Y(x_1+x_2) \leqslant p(x_1+x_2+z_1+z_2) < q_Y(x_1)+q_Y(x_2)+2\varepsilon$$

yazılabilir. ε keyfi olduğundan q_Y nin alttoplamsal olduğu açıkça görülür.

Aynı zamanda $a>0$ için

$$q_Y(ax)=a \inf_{z \in Y} p(x+(\frac{z}{a}))=aq_Y(x)$$

dir.

Dolayısıyle q_Y , X üzerinde altlineerdir ve $\forall x \in X$ için $-q_Y(-x) \leqslant q_Y(x)$ dir.

Her $x \in Y$ için $q_Y(x) \leqslant p(x-x)=0$ ve aynı zamanda $q_Y(-x) \leqslant 0$ olduğundan $q_Y(x)=0$ dır.

ii) (i) den dolayı q_E , X üzerinde altlineer olduğundan Hahn-Banach genişletme teoremi gereğince $\{X,q_E\} \neq \emptyset$ dir. Şimdi de $\{X,q_E\}$ nin elemanlarının γ-invaryant olduğunu gösterelim: $y \in X$ ve $Q \in \{X,q_E\}$ olsun. $\gamma y-y \in E$ olduğundan (i) den dolayı $q_E(\gamma y-y)=0$ dır. Böylece $Q(\gamma y-y) \leqslant 0$ olur. Q lineer olduğundan $\forall y \in X$ için $Q(\gamma y)=Q(y)$ olur ki, bu da (ii) nin ispatıdır.

iii) Farzedelim ki, $\{X,p\}$ γ-invaryant ve $Q \in \{X,P\}$ olsun. Bu takdirde her $x,y \in X$ için

$$Q(x)=Q(x+\gamma y-y) \leqslant p(x+\gamma y-y)$$

dir. $y \in X \iff \gamma y-y \in E$ olduğundan yukarıdaki eşitsizlikte $z=\gamma y-y$ üzerinden infimum alındığında $Q \leqslant q_E$ ve buradan da $\{X,p\} \subset \{X,q_E\}$ elde edilir. Son olarak her $x\in \ell_\infty$ için $q_E(x) \leqslant p(x)$ olduğundan $\{X,q_E\} \subset \{X,p\}$ dir. Böylece $\{X,q_E\}=\{X,p\}$ olur. Lemma 1.2.3 den dolayı $q_E(x)=p(x)$ dir.

Şartın gerekliliği için (ii) de $q_E=p$ almak yeterlidir.

UYARILAR

Daha önce tanımladığımız gibi σ, ℓ_∞ üzerinde değiştirme operatörü olsun. Burada $x\in \ell_\infty$ için gerek ve yeter şartın $\sigma x-x\in m_o$ olduğunu belirtelim. E yerine m_o, γ yerine σ ve q_E yerine W alındığında teorem 1.2.5 deki bütün sonuçlar ℓ_∞ için de geçerlidir. Burada $W:\ell_\infty \longrightarrow \mathbb{R}$ olup

$$W(x)=\inf_{z\in m_o} \overline{\lim_n}\,(x_n+z_n)$$

şeklinde tanımlıdır.

W nın tanımından, $z\in m_o$ olduğunda $\limsup z_n \geqslant 0$ dır. $\{\ell_\infty,W\}$, σ-değişmez olduğundan $\{\ell_\infty,W\} \subset \beta$ olduğu kolaylıkla görülebilir.

Tersine $Q\in\beta \Rightarrow Q\leqslant h$ ve Q, σ-invaryant olduğundan

$$Q(x)=Q(\sigma y-y+x) \leqslant h(x+z)$$

burada $z=\sigma y-y$, $y\in \ell_\infty$ dır. z üzerinden infimum alındığında $Q\leqslant W$ olur ve bu durumda $\beta=\{\ell_\infty,W\}$ olduğu açıktır.

Bu sonucu $\beta=\{\ell_\infty,V\}$ şeklinde de yazabiliriz. Burada,

$$V(x)=\inf_{z\in m_o}\sup_n (x_n+z_n)$$

olup $V(x)=W(x)$ olduğu kolaylıkla görülebilir. Ayrıca

$$q(x)=\inf_{p,n_1,\ldots,n_p} \overline{\lim_k}\,\frac{1}{p}\sum_{i=1}^{p} x_{k+n_i}$$

olmak üzere $\beta=\{\ell_{\infty},q\}$ yazabiliriz[2].

Bu durumda yukarıdaki sonuçları şu teoremle açık olarak verebiliriz;

TEOREM 1.2.6

i) $\beta=\{\ell_{\infty},q\}=\{\ell_{\infty},V\}=\{\ell_{\infty},W\}$

ii) $q(x)=V(x)=W(x)$, $\forall x\in \ell_{\infty}$ [2].

2. HEMEN HEMEN YAKINSAKLIK

2.1. Hemen Hemen Yakınsak Diziler

TANIM 2.1.1

$x=(x_n)\in \ell_\infty$ olsun. Her L Banach Limiti için $L(x)=a$ $(a\in \mathbb{R})$ ise (x_n) dizisine a-ya hemen hemen yakınsaktır denir ve $F\text{-}\lim x_n=a$ şeklinde gösterilir[4].

$x=(x_n)\in \ell_\infty$ olmak üzere,

$$L(x_n)\leqslant q(x_n)\leqslant \limsup_{n\to\infty} x_n$$

olduğunu biliyoruz. Buradan

$$L(x_n)=-L(-x_n)\geqslant -q(-x_n)\geqslant \liminf_{n\to\infty} x_n$$

dir. Dolayısıyle sıfıra yakınsayan her dizi sıfıra hemen hemen yakınsaktır. Aynı şekilde a-ya yakınsayan her dizi a-ya hemen hemen yakınsaktır. Bunun yanında, âdi anlamda yakınsak olmayan fakat hemen hemen yakınsak olan diziler de vardır. Örneğin,

$x=\{(-1)^n\}$ dizisini alalım.Tanım 1.2.1 (iii) den dolayı

$$L\{(-1)^n\}=L\{(-1)^{n+1}\} \qquad (2.1.1)$$

dir. L lineer olduğundan,

$$L\{(-1)^n\}=-L\{(-1)^{n+1}\} \qquad (2.1.2)$$

dir. (2.1.1) ve (2.1.2) gereğince bütün Banach Limitleri için

$$L\{(-1)^n\}=0$$

dır. Yani $\{(-1)^n\}$ sıfıra hemen hemen yakınsaktır.

Şimdi şu teoremi verelim:

TEOREM 2.1.2

Bir (x_n) dizisinin hemen hemen yakınsak olabilmesi için gerek ve yeter şart,

$$q(x_n)=-q(-x_n)$$

olmasıdır[7].

İSPAT:

Yeterlilik,

$$q(x_n) \geqslant L(x_n)=-L(-x_n) \geqslant -q(-x_n)$$

ifadesinden elde edilir.

Gereklilik, ispatı Banach`a ait olan teorem 1.1.11 den dolayı açıktır.

NOT:

$$q'(x_n)=-q(-x_n)= \sup_{p,n_1,\dots,n_p} \liminf_{k\to\infty} \frac{1}{p}\sum_{i=1}^{p} x_{k+n_i}$$

ve $0=q(x_n-x_n) \leqslant q(x_n)+q(-x_n)$ den $q(x_n) \geqslant q'(x_n)$ dir.

TEOREM 2.1.3

Bir (x_n) dizisinin hemen hemen yakınsak olabilmesi için gerek ve yeter şart n` ye göre düzgün olarak

$$\lim_{p\to\infty} \frac{x_n+x_{n+1}+\dots+x_{n+p-1}}{p} = a$$

olmasıdır[7;sh60].

İSPAT:

i) Yeterlilik. Eğer teoremin hipotezi sağlanıyorsa bu takdirde her $\varepsilon>0$ için enaz bir p_0 vardır öyleki her $p>p_0$ ve her n için

$$\frac{x_n+x_{n+1}+\dots+x_{n+p-1}}{p} < a+\varepsilon$$

böylece $q(x_n) \leqslant a+\varepsilon$ dur. Benzer şekilde her $\varepsilon > 0$ için $q'(x_n) \geqslant a-\varepsilon$ olduğuda gösterilebilir. Buradan,

$$q(x_n)=q'(x_n)$$

olup (x_n) a-ya hemen hemen yakınsaktır.

ii) Gereklilik. Tersine $q(x_n)=q'(x_n)= a$ olduğunu farzedelim. Eğer $\varepsilon > 0$ ise

$$\limsup_{k\to\infty} \frac{1}{p} \sum_{i=1}^{p} x_{k+n_i} < a+\varepsilon$$

olacak şekilde p ve $n_1,n_2,\ldots,n_p$ sayıları mevcuttur.

Bu durumda her $\delta > 0$ ve yeteri kadar büyük her r ve n için

$$\frac{1}{r} \sum_{m=0}^{r-1} x_{n+m} < a+\delta$$

olmasını gerektirdiğini göstermeliyiz.

k ile $k-k_o$ ve n_i ile n_i+k_o $(i=1,2,\ldots,p)$ yer değiştirirse bu durumda,

$$\frac{1}{p} \sum_{i=1}^{p} x_{n_i+k} < a+\varepsilon$$

ifadesi her k için sağlanır.Şimdi her n ve r için

$$\sum_{k=1}^{r} \frac{1}{p} \sum_{i=1}^{p} x_{n_i+k+n} = \frac{1}{p} \sum_{i=1}^{p} \sum_{m=n_i+1}^{m=n_i+r} x_{m+n}$$

$$= \frac{1}{p} \Big[x_{n+(n_1+1)} + x_{n+(n_1+2)} + \ldots + x_{n+(n_1+r)}$$

$$+ x_{n+(n_2+1)} + x_{n+(n_2+2)} + \ldots + x_{n+(n_2+r)}$$

$$+ \ldots$$

$$+ x_{n+(n_p+1)} + x_{n+(n_p+2)} + \ldots + x_{n+(n_p+r)} \Big]$$

dir. Yukarıdaki satırlarda birbirinden farklı olan terimlerin sayısı n nin sınırlı bir fonksiyonudur. Böylece

$$\frac{1}{p}\sum_{i=1}^{p}\sum_{m=n_i+1}^{m=n_i+r} x_{m+n} = \sum_{m=n_p+1}^{n_1+r} x_{m+n} + O(1) = \sum_{m=0}^{r-1} x_{m+n} + O(1)$$

dir. Her n için

$$\frac{1}{p}\sum_{i=1}^{p} x_{n_i+k+n} < a+\varepsilon$$

olduğundan yeterince büyük r ler ve her n için

$$\frac{1}{r}\sum_{m=0}^{r-1} x_{m+n} < a+2\varepsilon$$

dir. Benzer şekilde yeterince büyük r ler ve her n için

$$\frac{1}{r}\sum_{m=0}^{r-1} x_{m+n} > a-2\varepsilon$$

dir. Böylece (x_n) teoremin şartını sağlar.

TANIM 2.1.4

Bir (x_n) dizisi verilmiş olsun. Eğer $n \geqslant N$ için $x_{n+p} = x_n$ olacak şekilde N ve p doğal sayıları mevcut ise (x_n) dizisine p-peryotlu bir peryodik dizi denir[7].

TANIM 2.1.5

IR de sürekli bir f(x) fonksiyonu verilmiş olsun. Her $\varepsilon > 0$ için bir $L=L(\varepsilon) > 0$ sayısı bulunsun. Öyle ki, $-\infty < a < \infty$ olmak üzere L uzunluğundaki her $a \leqslant x \leqslant a+L$ aralığı ve bütün x ler için

$$|f(x+T(\varepsilon))-f(x)| < \varepsilon$$

olacak şekilde en az bir $T=T(\varepsilon)$ varsa, f(x) fonksiyonuna hemen hemen peryodik bir fonksiyon denir[1;sh478].

Hemen hemen peryodik fonksiyon tanımının ışığı altında hemen hemen peryodik dizi tanımını da yapabiliriz.

TANIM 2.1.6

Eğer her $\varepsilon > 0$ için öyle $N, r \in \mathbb{N}$ vardır ki, $k > 0$ olmak üzere her $(k, k+r)$ aralığında en az bir tane ε peryot mevcut ise, yani $n \geqslant N$ ve p için

$$|x_{n+p} - x_n| < \varepsilon$$

ise (x_n) dizisine hemen hemen peryodik dizi denir[7].

Hemen hemen yakınsak dizilere örnekler;

ÖRNEK 1

Tanım 2.1.4 te aldığımız (x_n) peryodik dizisi

$$L(x_n) = \frac{x_n + x_{n+1} + \ldots + x_{n+p-1}}{p}$$

değerine hemen hemen yakınsaktır.

Örneğin 1,0,0,1,0,0,... dizisi $\frac{1}{3}$ değerine hemen hemen yakınsaktır[7].

ÖRNEK 2

Tanım 2.1.6 gözönüne alındığında hemen hemen peryodik her dizinin, hemen hemen yakınsak olduğu kolaylıkla ispat edilebilir[7].

3. KUVVETLİ REGÜLER MATRİSLER

3.1. Temel Tanım ve Teoremler

TANIM 3.1.1

Hemen hemen yakınsak her (x_n) dizisini bu dizinin hemen hemen yakınsadığı değere limitleyen $A=(a_{mn})$ matrisine kuvvetli regüler matris denir[7].

Şimdi kuvvetli regüler matrislerle ilgili şu önemli teoremi verelim:

TEOREM 3.1.2

Regüler bir $A=(a_{mn})$ matrisinin kuvvetli regüler olabilmesi için gerek ve yeter şart translative, yani

$$\lim_{m\to\infty} \sum_{n=1}^{\infty} |a_{mn} - a_{mn+1}| = 0 \qquad (3.1.1)$$

olmasıdır[7].

İSPAT:

i) Yeterlilik. İlk olarak her p için

$$t_m = A_m(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_{mn}x_n \quad \text{ile} \quad \frac{1}{p}\sum_{n=p}^{\infty} (a_{mn}+a_{m,n-1}+\dots+a_{m,n-p+1})x_n$$

ifadelerini karşılaştıralım. Bu iki ifade arasındaki farka bakacak olursak,

$$\left|\frac{1}{p}\sum_{n=p}^{\infty} x_n(a_{mn}+a_{m,n-1}+\dots+a_{m,n-p+1}-pa_{mn}) - \sum_{n=1}^{p-1} a_{mn}x_n\right|$$

$$\leqslant \frac{\sup|x_n|}{p}\sum_{n=p}^{\infty} |a_{mn}+a_{m,n-1}+\dots+a_{m,n-p+1}-pa_{mn}| + \sum_{n=1}^{p-1} |a_{mn}||x_n|$$

$$\leqslant \frac{\sup|x_n|}{p} \sum_{k=1}^{p-1} \sum_{n=p}^{\infty} |a_{m,n-k}-a_{mn}| + \sum_{n=1}^{p-1} |a_{mn}||x_n|$$

dir.

Fakat $a_{mo}=0$ olmak üzere her k için

$$\sum_{n=p}^{\infty} |a_{m,n-k}-a_{mn}| \leqslant k \sum_{n=1}^{\infty} |a_{m,n-1}-a_{mn}|$$

dir.Buradan,

$$|t_m - \frac{1}{p} \sum_{n=p}^{\infty} (a_{mn}+a_{m,n-1}+\ldots+a_{m,n-p+1})x_n| \leqslant A \sum_{n=1}^{\infty} |a_{m,n-1}-a_{mn}|$$

$$+ \sum_{n=1}^{p-1} |a_{mn}||x_n|$$

A sabit olduğundan

$$\lim_{m\to\infty} |t_m - \frac{1}{p} \sum_{n=p}^{\infty} (a_{mn}+a_{m,n-1}+\ldots+a_{m,n-p+1})x_n| = 0$$

dir.

Her n için

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_{mn}(x_n+x_{n+1}+\ldots+x_{n+p-1}) - \sum_{n=p}^{\infty} x_n(a_{mn}+a_{m,n-1}+\ldots+a_{m,n-p+1})$$

$$=a_{m1}x_1+(a_{m1}+a_{m2})x_2+\ldots+(a_{m1}+a_{m2}+\ldots+a_{m,p-1})x_{p-1}$$

A regüler olduğundan, m artarken bu fark sıfıra gider ve her p için

$$\lim_{m\to\infty} |t_m - \frac{1}{p} \sum_{n=1}^{\infty} a_{mn}(x_n+x_{n+1}+\ldots+x_{n+p-1})| = 0$$

dır.

Şimdi (x_n) in a-ya hemen hemen yakınsak olduğunu kabul edelim. Bu takdirde her $\varepsilon>0$ için bir p vardır. Öyle ki her n için,

$$|\frac{1}{p} (x_n+x_{n-1}+\ldots+x_{n+p-1}) - a| < \varepsilon$$

dir. Her m için $\sum_{n=1}^{\infty} |a_{mn}| < M$ olduğundan,

$$\left| \frac{1}{p} \sum_{n=1}^{\infty} a_{mn}(x_n+x_{n+1}+\ldots+x_{n+p-1}) - \sum_{n=1}^{\infty} a_{mn}\, a \right| < M\varepsilon$$

dir. Ayrıca $\lim_{m\to\infty} \sum_{n=1}^{\infty} a_{mn} = 1$ olduğundan,

$$\limsup_{m} |t_m - a| < M\varepsilon$$

ve ε keyfi olduğundan $\lim_{m\to\infty} t_m = a$ dır.

ii) Gereklilik. (x_n), toplamı $y_n=x_1+x_2+\ldots+x_n$ şeklinde sınırlı bir dizi oluşturan keyfi bir dizi olsun. (x_n) in sıfıra hemen hemen yakınsadığını göstermek kolaydır.

Şimdi farzedelim ki A kuvvetli regülerdir.Bu takdirde ,

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_{mn}x_n = \sum_{n=1}^{\infty} a_{mn}(y_n-y_{n-1}) = \sum_{n=1}^{\infty} (a_{mn}-a_{m,n+1})y_n$$

dir. Burada $y_o=0$ olarak tanımlıdır. Böylece $B=(b_{mn})$ matrisi

$$b_{mn}=a_{mn}-a_{m,n+1} \qquad (m,n=1,2,\ldots)$$

şeklinde olup bir Schur matrisidir ve

$$\sum_{n=1}^{\infty} |a_{mn}-a_{m,n+1}|$$

düzgün olarak yakınsar. $(0,0,\ldots,0,1,0,\ldots)$ şeklinde özel diziler gözönüne alındığında, her n için

$$\lim_{m\to\infty} (a_{mn}-a_{m,n+1}) = 0$$

olduğu açıktır. $\sum_{n=1}^{\infty} |a_{mn}-a_{m,n+1}|$ düzgün yakınsak olduğundan

$$\lim_{m\to\infty} \sum_{n=1}^{\infty} |a_{mn}-a_{m,n+1}| = 0.$$

dır.

İspat böylece tamamlanmış olur.

Şimdi ispatsız olarak şu teoremi verelim;

TEOREM 3.1.3

Sonsuz bir $A=(a_{mn})$ matrisinin hemen hemen peryodik her diziyi toplayabilmesi için gerek ve yeter şartlar;

i) $\|A\| = \sup_m \sum_{n=0}^{\infty} |a_{mn}| < \infty$

ii) Her t için $\lim_{m\to\infty} \sum_{n=0}^{\infty} a_{mn} \exp(2\pi int)$ mevcut olmasıdır[8].

Teorem 3.1.3 deki şartları sağlayan $A=(a_{mn})$ matrisine hemen hemen peryodik matris denir.

TANIM 3.1.4

$A=(a_{mn})$ hemen hemen peryodik bir matris olsun. A, aşağıdaki şartları sağlaması halinde normal hemen hemen peryodik matris adını alır.

i) $\lim_{m\to\infty} \sum_{n=0}^{\infty} a_{mn} = 1$

ii) Her $t \in (0,1)$ için $\lim_{m\to\infty} \sum_{n=0}^{\infty} a_{mn} \exp(2\pi int)=0$ dır[8].

Birinci bölümde $A=(a_{mn})$ matrisi ile toplanabilen dizilerin cümlesine A nın yakınsaklık alanı demiş ve $\mathcal{A}$ ile göstermiştik. Eğer $\mathcal{A}$ bütün yakınsak dizileri ihtiva ediyorsa A matrisine konservativ matris denir.

Bunu şöyle de ifade edebiliriz;

TANIM 3.1.5

$A=(a_{mn})$ matrisi aşağıdaki şartları sağlıyorsa A ya konservativ matris denir.

i) $\|A\| = \sup\limits_{m} \sum\limits_{n=0}^{\infty} |a_{mn}| < \infty$

ii) $\lim\limits_{m\to\infty} \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_{mn} = \alpha$ mevcut

iii) Her n için $\lim\limits_{m\to\infty} a_{mn} = \alpha_n$ mevcut [8].

$A=(a_{mn})$ matrisi ve bir $x=(x_n)$ dizisi verilmiş olsun. p $(p=0,1,2,\ldots)$ de düzgün olarak

$$\lim_{m\to\infty} \sum_{n=0}^{\infty} a_{mn} x_{n+p}$$

mevcut ise $x=(x_n)$ dizisine $\mathcal{F}_A$ toplanabilirdir denir.

Şimdi şu teoremi ispatsız olarak verelim:

TEOREM 3.1.6

Bir $A=(a_{mn})$ matrisi verilsin. Hemen hemen peryodik her dizinin $\mathcal{F}_A$ toplanabilmesi için gerek ve yeter şart A nın hemen hemen peryodik bir matris olmasıdır [8].

Buradan şu sonucu çıkarabiliriz. Hemen hemen peryodik her dizi hemen hemen yakınsaktır, fakat tersi doğru değildir.

TEOREM 3.1.7

Bir $A=(a_{mn})$ matrisinin hemen hemen yakınsak her diziyi toplayabilmesi için gerek ve yeter şart

i) A konservativ

ii) $\lim\limits_{m\to\infty} \sum\limits_{n=0}^{\infty} |\Delta(a_{mn}-\alpha_n)| = 0$

olmlasıdır. Burada $\alpha_n = \lim\limits_{m\to\infty} a_{mn}$ ve $\Delta a_{mn} = a_{mn} - a_{m,n+1}$ dir[8].

TEOREM 3.1.8

Normal hemen hemen peryodik bir $A=(a_{mn})$ matrisi vardır. Öyle ki, $|A|=(|a_{mn}|)$ hemen hemen peryodik fakat A kuvvetli regüler değildir[8].

İSPAT:

$A=(a_{mn})$ matrisini

$a_{mo} = 0$

$a_{mn} = \frac{1}{m}$, $\quad 1 \leqslant n \leqslant m$ için

$a_{mn} = \frac{\exp\{i\pi(n-m)\ \log(n-m)\}}{m}$, $\quad m < n \leqslant 2m$ için

$a_{mn} = 0$, $\quad n > 2m$ için

şeklinde tanımlıyalım.

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_{mn} = 1+\left(\frac{1}{m}\right)\sum_{n=m+1}^{2m} \exp\{i\pi(n-m)\ \log(n-m)\}$$

ve

$$\sum \exp\{i\pi n\ \log n + inx\}$$

serisinin $s_m(x)$ kısmi toplamı x e göre düzgün olarak $O((m)^{1/2})$ olduğundan, açık olarak

$$\lim_{m\to\infty} \sum_{n=0}^{\infty} a_{mn} = 1$$

dir.

Aynı zamanda her $t \in (0,1)$ için

$$\lim_{m\to\infty} \sum_{n=0}^{\infty} a_{mn} \exp(2\pi int) = 0$$

olduğundan yukarıda bahsedilen sonuca karşılık

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_{mn} \exp(2\pi int) = \frac{1}{m} \frac{e^{i2\pi t}(1-e^{i2\pi mt})}{1-e^{i2\pi t}} + O\left(\frac{\sqrt{m}}{m}\right) \qquad (m \to \infty)$$

dir.

Diğer taraftan $||A|| = 2$ olduğundan A normal hemen hemen peryodiktir. $t \in (0,1)$ için,

$$\sum_{n=0}^{\infty} |a_{mn}| \exp(2\pi int) = \frac{1}{m} e^{2\pi it} \frac{(1-e^{4\pi imt})}{1-e^{2\pi it}} = o(1) \quad (m \to \infty)$$

ve

$$\sum_{n=0}^{\infty} |a_{mn}| \longrightarrow 2 \qquad (m \longrightarrow \infty)$$

böylece $|A|$ aynı zamanda hemen hemen peryodiktir. Bununla beraber A kuvvetli regüler değildir. Gerçekten

$$\sum_{n=0}^{\infty} |a_{mn} - a_{m,n+1}| = \frac{2}{m} \sum_{n=1}^{m-1} \left|\sin\frac{\pi}{2}\left\{\log(1+\frac{1}{n})^n + \log(n+1)\right\}\right| + o(1)$$

dir. $n \longrightarrow \infty$ iken $n\log(1+\frac{1}{n}) \longrightarrow 1$

olduğundan,

$$\sin\frac{\pi}{2}\left\{n\log(1+\frac{1}{n}) + \log(n+1)\right\} = \cos\frac{\pi}{2}\log(n+1) + o(1)$$

böylece

$$\frac{2}{m} \sum_{n=1}^{m-1} \left|\sin\frac{\pi}{2}\left\{n\log(1+\frac{1}{n}) + \log(n+1)\right\}\right|$$

$$= \frac{2}{m} \sum_{n=1}^{m-1} \left|\cos\frac{\pi}{2}\log(n+1)\right| + o(1) \qquad (m \longrightarrow \infty)$$

dır. İddia ediyoruz ki,

$$\frac{1}{m} \sum_{n=1}^{m-1} \left|\cos\frac{\pi}{2}\log(n+1)\right|$$

ifadesi kesinlikle sıfıra gitmez. Gerçekten

$$U_n = |\cos\frac{\pi}{2}\log(n+1)| - |\cos\frac{\pi}{2}\log n|$$

dersek,

$$|U_n| \leqslant 2|\sin\frac{\pi}{4}\log(n^2+n)||\sin\frac{\pi}{4}\log(1+\frac{1}{n})| = O(\frac{1}{n}) \qquad (n \longrightarrow \infty)$$

elde ederiz.

Daha önceden bilindiği gibi, eğer $\sum U_n$ serisi (C,1) toplanabilir ve $U_n = O(\frac{1}{n})$ ise, bu takdirde $\sum U_n$ yakınsak idi. Böylece eğer, $\sum U_n$ serisi sıfıra (C,1) toplanabiliyorsa, yani

$$\frac{1}{m}\sum_{n=1}^{m-1} |\cos\frac{\pi}{2}\log(n+1)|$$

$m \longrightarrow \infty$ iken sıfıra gidiyorsa, $\sum U_n$ serisinin yakınsak olmasını istiyoruz. Fakat,

$$\sum_{n=1}^{m} U_n = |\cos\frac{\pi}{2}\log(m+1)|$$

olup $m \longrightarrow \infty$ iken bir limite gitmeyeceğinden bu mümkün değildir.

Bu teoremden şu sonucu çıkarabiliriz. Hemen hemen peryodik olmayan fakat hemen hemen yakınsak diziler de mevcuttur.

Kuvvetli regüler matrislerin bir alt sınıfını, terimleri pozitif olan matrisler teşkil eder. Bu matrislerin sınıfını $\mathcal{K}$-ile göstereceğiz.

Şimdi $\mathcal{K}$-matrisleri ile ilgili şu önemli teoremi verelim:

TEOREM 3.1.9

$x=(x_n)$ sınırlı bir dizi olsun. Bu takdirde

$$\sup_{L\in\beta} L(x) = \lim_m A_m(x)$$

ve

$$\inf_{L\in\beta} L(x) = \lim_m B_m(x)$$

olacak şekilde bir $A\in\mathcal{K}$ ve bir $B\in\mathcal{K}$ vardır[3].

İSPAT:

Biz sadece supremumla ilgili olan ifadeyi ispat edeceğiz.

$$q_m = \sup \frac{1}{m+1} \sum_{i=0}^{m} x_{k+i}$$

olsun. Bu takdirde $\lim_m q_m$ mevcuttur ve $\sup_{L\in\beta} L(x)$ e eşittir.

A matrisini aşağıdaki gibi oluşturalım. Her bir $m=0,1,2,...$ için k_m ler seçelim ki,

$$\left| \frac{1}{m+1} \sum_{i=0}^{m} x_{k_m+i} - q_m \right| < \frac{1}{m+1}$$

olsun. Şimdi

$$a_{mn} = \begin{cases} \dfrac{1}{m+1} & , \text{ eğer } n=k_m,...,k_m+m \text{ ise} \\ 0 & , \text{ diğer durumlarda} \end{cases}$$

şeklinde tanımlansın. Bu takdirde,

$$A_m(x) = \frac{1}{m+1} \sum_{i=0}^{m} x_{k_m+i}$$

ve böylece

$$\lim_m A_m(x) = \sup_{L\in\beta} L(x)$$

dir. Açık olarak A regülerdir. Aynı zamanda,

$$\sum_{n=0}^{\infty} |a_{mn} - a_{m,n+1}| \leqslant \frac{2}{m+1}$$

olduğundan $A\in\mathcal{K}$ dır.

4. KUVVETLİ REGÜLER MATRİSLER VE TOPLANABİLME FONKSİYONLARI

Bu bölümde kuvvetli regüler matrislerle toplanabilme fonksiyonları arasındaki ilişki araştırılmış, daha sonra bu ilişki Tauber şartları doğrultusunda incelenmiştir.

4.1. Tanımlar

n_v sayısı $n_v \leqslant n$ özelliğini sağlamak üzere pozitif tamsayıların (sonlu veya sonsuz) $n_1 < n_2 < \dots$ dizisinin karakteristik fonksiyonunu her $n \geqslant 0$ için $k(n)$ şeklinde tanımlıyalım.

$F(n)$ ise her $n \geqslant 0$ için tanımlı azalmayan ve $F(n) \longrightarrow +\infty$ $(n \longrightarrow +\infty)$ şeklinde bir pozitif fonksiyon olsun.

TANIM 4.1.1

$n_1 < n_2 < \dots$ indis cümlesi olmak üzere (x_n) sınırlı dizisi sıfır olmayan ve $k(n) \leqslant F(n)$ şartını sağlayan bir karakteristik fonksiyona sahip olsun. Bu şekildeki sınırlı reel (x_n) dizilerinin cümlesini $D_1(F)$ ile gösterelim.

Eğer $D_1(F)$ in her elemanı A-toplanabiliyorsa bu takdirde $F(n)$ fonksiyonuna A metodu için birinci tür bir toplanabilme fonksiyonu denir [5].

Bu tanımı şöylede yapabiliriz: $F(v)$ sonsuza monoton artan bir fonksiyon, n_v de $x_1, x_2, \dots, x_v$ terimlerinden sıfırdan farklı olanların sayısını göstersin. $n_v \leqslant F(v)$, $(v=1,2,\dots)$ şartını sağlayan her sınırlı (x_n) dizisi için

A-lim $x_n = 0$ ise F(v) ye A matrisi için birinci tür toplanabilme fonksiyonu denir[7].

TANIM 4.1.2

(x_n) bir reel sayı dizisi ve $X_n = x_0 + x_1 + \ldots + x_n$ olsun. $X_n = O(F(n))$ özelliğini sağlayan (x_n) dizilerinin cümlesini $D_2(F)$ ile gösterelim. $D_2(F)$ in her elemanı A-toplanabiliyorsa F(n) fonksiyonun A metodu için ikinci tür toplanabilme fonksiyonu denir[5].

m=0,1,... olmak üzere $k(n) \leq F(n)$ özelliğine sahip her n_v dizisi için $\sum_{v=1}^{\infty} |a_{mn_v}|$ nin en küçük üst sınırını A(m;F) ile göstereceğiz.

Şimdi karakteristik fonksiyonlar için bazı uyarılarda bulunacağız;

Eğer n_v ve n_v' dizilerinin karakteristik fonksiyonları sırasıyla k(n) ve k'(n) ise bu dizilerin toplamının oluşturduğu dizinin karakteristik fonksiyonu $\leq k(n) + k'(n)$ dir.

Ayrıca her v için $n_v \leq n_v'$ ise $k(n) \geq k'(n)$ dir.

k(n) karakteristik fonksiyonu ile verilen her n_v dizisi ve pozitif her r tamsayısı için n_v, (r+1) tane alt diziye ayrılır. Öyle ki, bir dizi sonlu, diğerlerinin karakteristik fonksiyonu $\leq \frac{k(n)}{r}$ dir. Gerçekten $n_1, n_2, \ldots, n_{r-1}$ ve n_{s^r+i} (s=1,2,... , i=0,1,2,...,r-1) alt dizileri istenilen ayrışımı gerçekleştirirler.

Bir A metodu için ikinci tür toplanabilme fonksiyonu aynı zamanda A için birinci tür bir toplanabilme fonksiyonudur.

$F(n)$ bir toplanabilme fonksiyonu ve c de bir sabit olmak üzere her $n \geqslant 0$ için, $F'(n) \leqslant cF(n)$ ise $F'(n)$ de aynı türden bir toplanabilme fonksiyonudur.

A ve B iki metod olsun. Eğer her A-limitlenebilen dizi aynı değere B-limitlenebiliyorsa, bu takdirde B metodu A dan daha kuvvetlidir, denir ve $B \supset A$ şeklinde gösterilir.

Bu durumda, açık olarak A metodunun bütün toplanabilme fonksiyonları aynı zamanda B metodunun da toplanabilme fonksiyonudur.

Birinci türden bir $F(n)$ toplanabilme fonksiyonu için, biz daima

$$F(n+1) - F(n) \leqslant 1 , \quad n \geqslant 0 \qquad (4.1.1)$$

kabul edeceğiz.

Eğer $F'(n)$, $0 \leqslant x < 1$ için $F'(x) = F(0)$ olarak tanımlanırsa bu takdirde

$$F'(x) = \min\left[F'(n-1)+1 , F(n)\right] , \quad n \leqslant x < n+1$$

$n=1,2,\ldots$ fonksiyonunun da (4.1.1) özelliğini sağladığı tümevarımla görülebilir. Eğer F toplanabilme fonksiyonu (değil) ise F' de toplanabilme fonksiyonudur (değildir).

4.2 Toplanabilme Fonksiyonları ve Kuvvetli Regülerlik

Şimdi bir $F(n)$ fonksiyonu verildiğinde $F(n)$ in regüler bir matris metodu olan A nın toplanabilme fonksiyonu olabilmesi için gerek ve yeter şartları vereceğiz:

TEOREM 4.2.1

Regüler bir $A=(a_{mn})$ matrisinin bir birinci tür toplanabilme fonksiyonuna sahip olabilmesi için gerek ve yeter şart

$$\lim_{m\to\infty} \max_{n} |a_{mn}| = 0 \quad \text{veya} \quad \lim_{m\to\infty} A(m;F) = 0$$

olmasıdır [7].

İSPAT:

İ) Gereklilik. $F(v)$ sonsuz olarak monoton artan herhangi bir fonksiyon ve farzedelim ki,

$$\lim_{m\to\infty} \max_{n} |a_{mn}| \neq 0$$

olsun. Bazı $k > 0$ için bu ifade

$$\max_{n} |a_{m_v n}| > k \qquad (v=1,2,\ldots)$$

şeklindedir. Eğer m_v inci satırda bu eşitsizliği sağlayan ilk eleman $a_{m_v n_v}$ ise o zaman teorem 1.1.7 (ii) den dolayı

$$\lim_{v\to\infty} n_v = \infty$$

dir.

Böylece (m_v) dizisi birinci yerde seçilmiş olabilir. Şöyle ki,

$$n_v > n_{v-1} \quad , \quad (v=2,3,\ldots)$$

dir. Gerçekten seçme yapılabildiğinde

$$v \leqslant F(n_v) \quad , \quad (v=1,2,\ldots) \qquad (4.2.1)$$

dir.

$B=(a_{mn_v})$ matrisini gözönüne alalım. Herbir kolondaki elemanlar sıfıra yakınsadığından, bir Schur matrisi değildir. Schur matrisi olsaydı,

$$\lim_{m\to\infty} \sum_{v=1}^{\infty} |a_{mn_v}| = 0$$

şartını sağlaması gerekirdi.

Böylece B-limitlenemeyen sınırlı bir (μ_n) dizisi vardır.

$$x_n = \begin{cases} \mu_n & , n=n_v \\ 0 & , n \neq n_v \end{cases} \qquad (v=1,2,\ldots)$$

şeklinde tanımlanan (x_n) dizisi A-limitlenemez. (4.2.1) den dolayı $x_1, x_2, \ldots, x_n$ de sıfır olmayan terimlerin sayısının $F(n)$ üzerinden alınmadığı açıktır ve $F(n)$ A için birinci tür bir toplanabilme fonksiyonu değildir. Bu her monoton artan $F(v)$ fonksiyonu için benzer şekilde gösterilebileceğinden şartımızın gerekliliği ispatlanmış olur.

ii) Yeterlilik. Eğer $\epsilon_m = \max_n |a_{mn}|$ ise $\lim_{m\to\infty} \epsilon_m = 0$ dır. Şimdi her m için

$$\sum_{n=q_m+1}^{\infty} |a_{mn}| < Y_m \quad \text{ve} \quad \lim_{m\to\infty} Y_m = 0$$

olacak şekilde bir q_m vardır.

Burada (q_m) dizisi $q_1 < q_2 < \ldots < q_m < \ldots$ olacak şekilde seçilmelidir. Ayrıca (p_m),

$$\lim_{m\to\infty} p_m = \infty \quad , \quad (p_1 \leqslant p_2 \leqslant \ldots \leqslant p_m \leqslant \ldots)$$

olacak şekilde herhangibir dizi olup

$$\lim_{m\to\infty} \epsilon_m p_m = 0$$

dir.

$F(m)$, her m için $F(q_m) = p_m$ olacak şekilde artan bir fonksiyon olsun. (x_m) ler her m için sınırlı bir dizi

n_m, $x_1, x_2, \ldots, x_m$ arasındaki sıfır olmayan terimlerin sayısı ve $n_m \leqslant F(m)$, yani $n_{q_m} \leqslant F(q_m) \leqslant p_m$ ise, bu takdirde,

$$|t_m| = |\sum_{n=1}^{\infty} a_{mn} x_n| \leqslant |\sum_{n=1}^{q_m} a_{mn} x_n| + |\sum_{n=q_m+1}^{\infty} a_{mn} x_n|$$

$$\leqslant \sup_n |x_n| (\epsilon_m p_m + \gamma_m)$$

ve dolayısıyla

$$\lim_{m \to \infty} t_m = 0$$

dır.

TEOREM 4.2.2

$F(n)$ fonksiyonunun regüler bir $A=(a_{mn})$ metodunun ikinci tür toplanabilme fonksiyonu olabilmesi için gerek ve yeter şart

$$\lim_{m \to \infty} \sum_{n=0}^{\infty} F(n) |a_{mn} - a_{m,n+1}| = 0 \qquad (4.2.2)$$

olmasıdır.

Eğer bu şart sağlanıyorsa her $(x_n) \in D_2(F)$ dizisi sıfıra A-toplanabilirdir [5].

İSPAT:

İlk olarak kabul edelim ki $F(n)$ ikinci tür bir toplanabilme fonksiyonu, ayrıca ξ_n sınırlı bir dizi olmak üzere

$$X_n = F(n)\xi_n \ , \quad n=0,1,\ldots \quad , \quad X_{-1} = 0 \quad \text{ve} \quad x_n = X_n - X_{n-1}$$

olsun. Bu durumda,

$$t_m = \sum_{n=0}^{\infty} a_{mn} x_n = \sum_{n=0}^{\infty} a_{mn} \left[F(n)\xi_n - F(n-1)\xi_{n-1}\right]$$

yakınsaktır. Ve $m \longrightarrow \infty$ için bir limiti vardır.

şimdi $\xi_{2n} = s_n$, $\xi_{2n+1} = 0$ seçelim. Bu durumda t_m

$$t_m = \sum_{n=0}^{\infty} F(2n)\,(a_{m,2n} - a_{m,2n+1})\, s_n = \sum b_{mn}\, s_n$$

dir.

Bu, bütün (x_n) sınırlı dizilerine uygulanabilen bir toplama metodudur. $n=0,1,\ldots$ olmak üzere $m \longrightarrow \infty$ için $b_{mn} \longrightarrow 0$ olduğundan,

$$\lim_{m\to\infty} \sum_{n=0}^{\infty} F(2n)\,|a_{m,2n} - a_{m,2n+1}| = 0$$

bulunur.

(2n+1) tek indisi için de bu benzer şekilde görülebilir. Böylece (4.2.2) şartını elde ederiz.

Tersine (4.2.2) şartının sağlandığını kabul edelim. Eğer (x_n) dizisi için $X_n = O(F(n))$ ise $n \longrightarrow \infty$ ve her $m=0,1,\ldots$ sabiti için $a_{m,n+1}F(n) \longrightarrow 0$ olarak elde ederiz. Buradan $a_{m,n+1}\, X_n \longrightarrow 0$ dır. Sonlu Abel dönüşümünde n` i sonsuz alırsak

$$t_m = \sum_{n=0}^{\infty} a_{mn}\, x_n = \sum_{n=0}^{\infty} (a_{mn} - a_{m,n+1})\, X_n$$

(4.2.2) den ve $\lim_m a_{mn} = 0$ olduğundan $t_m \longrightarrow 0$ dır. Bu ise, ispatı tamamlar.

Bu teorem, teorem 3.1 2 ile birlikte gözönüne alındığında şu sonucu ifade edebiliriz:

TEOREM 4.2.3

Bir regüler A metodunun kuvvetli regüler olabilmesi için gerek ve yeter şart A nın ikinci türden bir toplanabilme fonksiyonuna sahip olmasıdır[5].

Yine (3.1.1) ifadesinden şu lemmayı elde ederiz:

LEMMA 4.2.4

$a_{mn} \geqslant 0$ ve $\eta_m = \sum_{n=0}^{\infty} a_{mn} \longrightarrow 0$ ise

$\sum_n F(n)\, a_{mn} \longrightarrow 0$ olacak şekilde bir $F(n)$ fonksiyonu vardır[5].

İSPAT:

Her $m=0,1,\ldots$ olmak üzere $\sum_n F_m(n)\, a_{mn} \leqslant 2\eta_m$ olacak şekilde istenen türden bir $F_m(n)$ fonksiyonunun mevcut olduğu açıktır. Üstelik pozitif sayıların azalmayan ve $b_m \longrightarrow +\infty$ iken $b_m \eta_m \longrightarrow 0$ şartını sağlayan bir dizisini seçebiliriz.

$$F(n) = \min_{m=0,1,\ldots} \{b_m + F_m(n)\} \quad , \quad n=0,1,\ldots$$

olsun.

Bu fonksiyon azalmayan ve pozitiftir. Ayrıca $F(n) \longrightarrow +\infty$ olduğu kolayca görülebilir. Sonuç olarak,

$$\sum_n F(n)\, a_{mn} \leqslant b_m \eta_m + 2\eta_m \longrightarrow 0$$

dır. Bu ise lemmayı ispatlar.

Lemmanın diğer bir sonucu olarak aşağıdaki teorem verilebilir;

TEOREM 4.2.5

Bir A metodu için mevcut olan ikinci türden her

$F(n)$ toplanabilme fonksiyonu için $\dfrac{F_1(n)}{F(n)} \longrightarrow +\infty$ olacak şekilde bir $F_1(n)$ fonksiyonu vardır[5].

TEOREM 4.2.6

Bir A metodu için mevcut olan birinci türden her $F(n)$ toplanabilme fonksiyonu için $\dfrac{F_1(n)}{F(n)} \longrightarrow +\infty$ olacak şekilde diğer bir $F_1(n)$ fonksiyonu vardır[5].

İSPAT:

Teorem 4.2.1 den dolayı $A(m;F) \longrightarrow 0$ yani,

$$\delta_m = \max_n |a_{mn}| \longrightarrow 0$$

dir. Pozitif tamsayıların azalmayan ve

$$b_m A(m;F) \longrightarrow 0 \quad , \quad b_m \delta_m \longrightarrow 0$$

şartını sağlayan bir $b_m \longrightarrow +\infty$ dizisini seçelim. Bu takdirde

$$A(m;b_m F) \longrightarrow 0 \qquad (4.2.3)$$

dir.

Bu bölümün girişinde, karakteristik fonksiyonlar için verilen özellikler gözönüne alındığında karakteristik fonksiyonu $\leqslant b_m F(n)$ olan n_v tamsayılarının her dizisi b_m elemanlarından oluşan sonlu bir dizi ile karakteristik fonksiyonları $\leqslant F(n)$ olan b_m sonsuz dizilerinin toplamıdır. Bundan dolayı,

$$\sum_v |a_{mn_v}| \leqslant b_m \delta_m + b_m A(m;F)$$

ve $A(m;b_m F)$ nin tanımından (4.2.3) elde edilir.

$$\epsilon_m = \sum_{n > N_m} |a_{mn}| \longrightarrow 0$$

olacak şekilde $N_m \longrightarrow +\infty$ tamsayılarını seçebiliriz.

Şimdi, $F_1(n) = b_m F(n)$, $N_m \leqslant n < N_{m+1}$, $n=1,2,..$

diyelim. Bu takdirde $\dfrac{F_1(n)}{F(n)} \longrightarrow +\infty$ ve

$$A(m;F) \leqslant \epsilon_m + \sup_{(n_v)} \sum_{n_v \leqslant N_m} |a_{mn_v}|$$

dir.

Burada (n_v), karkteristik fonksiyonları $\leqslant F_1(n)$ olan her dizi için aynıdır. $n \leqslant N_m$ için $F_1(n) \leqslant b_m F(n)$ olduğundan

$$A(m;F_1) \leqslant \epsilon_m + A(m;b_m F)$$

dir. Bu da ispatı tamamlar.

4.3. Toplanabilme Fonksiyonları ve Tauber Şartları Arasındaki İlişki

A regüler bir metod ve (x_n) A-limitlenebilen bir dizi olsun. Eğer (x_n) dizisi üzerine konulacak bir ek şartla dizinin yakınsaklığı bulunabiliyorsa, bu şarta A metodu için bir Tauber şartı denir.

Şimdi bu bölümde son olarak bir A metodunun toplanabilme fonksiyonları ve o metodun Tauber şartları arasındaki ilişkiye ait bir teorem vereceğiz;

TEOREM 4.3.1

Eğer $F(n)$, $A=(a_{mn})$ matrisi için birinci tür bir toplanabilme fonksiyonu ve

$$x_k = \sum_{n=1}^{k} u_n$$

ise bu takdirde,

$$|u_n| \leqslant \frac{1}{o[F(n)]}$$

A için bir Tauber şartı değildir[7].

İSPAT:

Her bir g(n), $g(n)=o[F(n)]$ için

$$|x_n - x_{n-1}| = |u_n| \leqslant \frac{1}{O[g(n)]}$$

şartını sağlayan, yakınsak olmayan (x_n) dizisini A-limitliyeceğiz. Alınan v_n $(n=1,2,...)$ tamsayıları için aşağıdaki şartları sağlayan herhangi bir sınırlı (x_n) dizisini

$$x_k \neq 0 \quad , \quad v_n \leqslant k \leqslant v_n + g(v_n) \quad , \quad (n=1,2,...)$$

$$x_k = 0 \quad , \quad \text{diğer durumlarda}$$

şeklinde alalım.

$g(n)=o[F(n)]$ olduğundan bu dizinin sıfır noktasına A-limitleneceği açıktır. Farzedelim ki, $g(v_n)$ bir çift tamsayı olsun. Ayrıca

$$x_{v_n+r} = \frac{2r}{g(v_n)} \quad , \quad 1 \leqslant r \leqslant \frac{g(v_n)}{2}$$

$$x_{v_n+r} = 2 - \frac{2r}{g(v_n)} \quad , \quad \frac{g(v_n)}{2} \leqslant r \leqslant g(v_n)$$

$(n=1,2,...)$ aksi halde $x_k=0$ olsun. (Burada eğer $g(v_n)$ çift değil ise yukarıdaki ifadede $g(v_n)+1$ ile yer değiştirir.)

Bu durumda açık olarak

$$x_{v_n + \frac{1}{2} g(v_n)} = 1$$

olup, (x_k) sınırlı ve ıraksaktır. Öte yandan v_n indisi (x_k) sıfıra A-limitlenecek şekilde seçilebilir. Dolayısıyla

$$|u_n| \leqslant \frac{1}{O[g(n)]} \quad , \quad (n=1,2,\ldots)$$

dır.

Teorem böylece ispatlanmış olur.

KAYNAKLAR

[1] BUDAK, B.M. — FOMİN, S.V., Multiple Integrals, Field Theory and Series, Moscow, 1973.

[2] DEVİ, S.L., Banach Limits and Infinite Matrices, Journal London Math. Soc., (2), 12(1976), 397-401.

[3] DURAN, J.P., Strongly Regular Matrices, Almost Convergence and Banach Limits, Duke Math. Jor., 39(1972), 429-502.

[4] DURAN, J.P., Infinite Matrices and Almost Convergence, Math. z., 128(1972), 75-83.

[5] LORENTZ, G.G., Direct Theorems on Methods of Summability, Canadian J. Math., 1(1949), 305-319.

[6] MADDOX, I.J., Elements of Functional Analysis, Cambridge University Press, 1970.

[7] PETERSEN, G.M., Regular Matrix Transformations, McGraw-Hill, New York-Toronto-Sydney, 1966.

[8] SIDDIQI, J.A., Infinite Matrices Summing Every Almost Periodic Sequence, Pacific Jor. of Math. Vol.39, No.1, 1971, 235-251.

[9] YURTSEVER, B., Matematik Analiz Dersleri, Cilt.1, İstanbul, 1978.