İNÖNÜ ÜNİVERSİTESİ

FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

KUATERNİYON DEĞERLİ FONKSİYONLARIN SERRET-FRENET VEKTÖRLERİ VE EĞİLİM ÇİZGİLERİ

Müge KARADAĞ

YÜKSEK LİSANS TEZİ

MATEMATİK ANABİLİM DALI

MALATYA

1992

"Fen Bilimleri Enstitüsü Müdürlüğüne "

İş bu çalışma, jürimiz tarafından Matematik Anabilim Dalında YÜKSEK LİSANS TEZİ olarak kabul edilmiştir.

Başkan Doç. Dr. Sadık Keleş

Üye Doç. Dr. İhsan Solak

Üye Doç. Dr. A. İhsan SİVRİDAĞ

Onay

Yukarıdaki imzaların , adı geçen öğretim üyelerine ait olduğunu onaylarım.

....../....../1992

Prof.Dr. Bekir Çetinkaya

Enstitü Müdürü

ÖZET

Bu çalışma üç bölümden oluşmuştur. Birinci bölüm bazı temel tanım ve teoremlere ayrılmıştır.

İkinci bölümde kuaterniyonlarla ilgili tanımlar verilerek,daha sonra IR^3 ve IR^4 deki kuaterniyon eğrileri için Serret-Frenet vektörleri hesaplanmıştır.

Çalışmanın orjinal kısmı olan Üçüncü bölümde ise İkinci bölümdeki hesaplamalar temel alınarak yine IR^3 ve IR^4 deki kuaterniyon eğrileri için eğilim çizgisi tanımı verilmiş ve reel anlamdaki eğilim çizgisi ile aralarındaki bağıntılar elde edilmiştir. Ayrıca, bu kuaterniyon eğrileri için harmonik eğrilik tanımları ifade edilerek birer karakterizasyon sunulmuştur.

ABSTRACT

This study consists of three chapters. In the first chapter; some basic definitions and theorems were stated.

In the second chapter; the definitions conserning with quaternions were given furthermore Serret-Frenet vectors were calculated for the curves of quaternion in IR^3 and IR^4.

In the third chapter including the original part of this study definition of helis for the curves of quaternion in IR^3 and IR^4 was given using the calculations obtained in the second chapter and the relations between the known helis in IR and the quaternion helis were obtained. Furthermore; a caracterization was presented using the harmonic curvature for mentioned quaternion curve.

TEŞEKKÜR

Bu çalışmanın hazırlanmasında gerekli bütün imkanları sağlayarak bana yardımcı olan,ilgi ve yardımlarını esirgemeyen saygıdeğer Hocam Sayın Yrd.Doç.Dr. Ali İhsan SİVRİDAĞ' a sonsuz teşekkürlerimi sunarım.

İÇİNDEKİLER

GİRİŞ

Üç Bölüm halinde düzenlenen bu çalışmanın Birinci Bölümünde daha sonraki bölümlere hazırlık olması bakımından Cebir ve Diferensiyel Geometrinin bazı temel tanım ve teoremleri verilmiştir.

İkinci Bölümün birinci kısmında kuaterniyonlar cebiri sunulmuştur. İkinci Bölümün ikinci kısmında IR^3 de bir reel değişkenin uzay-kuaterniyon değerli dönüşümü (uzay-kuaterniyon eğrisi) için Serret-Frenet vektörleri ve eğrilikler hesaplanmıştır. Bu bölümün son kısmında ise ikinci kısımda verilen formüller temel alınarak IR^4 deki kuaterniyon eğrilerinin Serret-Frenet vektörleri ve eğrilikler bulunmuştur. Ayrıca IR^3 deki uzay-kuaterniyon eğrisinin eğrilikleri ile IR^4 deki kuaterniyon eğrilerinin eğrilikleri arasındaki bağıntılar elde edilmiştir. İkinci Bölümde bulmuş olduğumuz formülleri bu çalışmanın son kısmı olan Üçüncü Bölümde kullanıyoruz. Üçüncü Bölümün ilk kısmında IR^3 ile uzay-kuaterniyonlarının kümesini özdeşleyerek kuaterniyon eğrileri için uzay-kuaterniyon eğilim çizgilerinin tanımı verilip, reel anlamdaki eğilim çizgileri ile aralarındaki ilişki belirtilmiştir. Benzer şekilde IR^4 ile Q_{IR} kuaterniyonlar kümesi özdeşlenerek IR^4 deki eğilim çizgileri kuaterniyon eğilim çizgilerine genelleştirilmiştir. Bu bölümün son kısmında ise kuaterniyon eğilim çizgileri için harmonik eğrilikler hesaplanarak IR^3 ve IR^4 deki kuaterniyon eğrileri için birer karakterizasyon verilmiştir.

I.BÖLÜM

TEMEL TANIM VE TEOREMLER

Bu kısımda sonraki bölümlerde kullanılacak olan temel tanım ve teoremleri ifade edeceğiz.

I.1 İÇ ÇARPIM UZAYLARI

I.1.1 Tanım: V bir reel vektör uzayı olsun. V üzerinde bir iç çarpım diye aşağıdaki aksiyomları sağlayan;

$$V \times V \longrightarrow IR$$

$$(u,v) \longrightarrow \langle u,v \rangle$$

dönüşümüne denir [1].

i) Simetri aksiyomu,

$$\langle u,v \rangle = \langle v,u \rangle$$

ii) Bilineerlik aksiyomu,

$$\langle cu,v \rangle = c\,\langle u,v \rangle = \langle u,cv \rangle,\ \forall\, c \in IR,\ \forall u,v \in V$$

$$\langle u_1+u_2,v \rangle = \langle u_1,v \rangle + \langle u_2,v \rangle,\ \forall\ v,u_1,u_2 \in V$$

$$\langle u,v_1+v_2 \rangle = \langle u,v_1 \rangle + \langle u,v_2 \rangle,\ \forall\ u,v_1,v_2 \in V$$

iii) Pozitif tanımlılık aksiyomu,

$$\langle u,u \rangle \geq 0$$

$$\langle u,u \rangle = 0 \Longleftrightarrow u=0$$

Özel olarak, IR^n reel vektör uzayı için

$$\langle\ ,\ \rangle : IR^n \times IR^n \longrightarrow IR$$

dönüşümü $\forall\ \vec{X},\vec{Y}\ IR^n$ için

$$\langle \vec{X},\vec{Y} \rangle = \|\vec{X}\|\,\|\vec{Y}\|\cos\theta,\ 0 \leq \theta \leq \pi$$

şeklinde tanımlanırsa bu dönüşüm IR^n de bir iç çarpımdır [1].

I.1.2 Tanım: Bir reel veya kompleks vektör uzayı üzerinde belli bir iç çarpım tanımlanırsa bu vektör uzayına bir iç çarpım uzayı denir [1].

I.1.3 Tanım: V iç çarpım uzayında bir u vektörünün normu veya uzunluğu $\|u\| = \sqrt{\langle u,u \rangle}$ olarak tanımlanır. $\|u\| = 1$ ise u ya birim vektör denir [1].

I.1.4 Tanım: V bir vektör uzayı ve $x \in V$ olsun. x vektörünün normu $\|x\|$ olmak üzere x vektörünün $\frac{1}{\|x\|}$ skaları ile çarpılmışına x in normlanmışı denir ve

$$x_0 = \frac{x}{\|x\|}$$

ile gösterilir [1].

I.1.5 Tanım: Eğer $x \neq 0$ ve $y \neq 0$ iken $\langle x,y \rangle = 0$ ise bu iki vektöre ortogonaldirler denir. Sıfırdan farklı vektörlerin bir S cümlesinde herhangi iki vektör birbirine dik ise bu S cümlesine ortogonaldir denir. S ortogonal iken S deki her bir vektör birer birim vektör ise S ye ortonormaldir denir [1].

I.1.6 Tanım: V, F cismi üzerinde bir vektör uzayı olsun. V 'nin elemanlarının bir $\{x_1, x_2, \ldots, x_k\}$ cümlesi için

$$\sum_{i=1}^{k} c_i x_i = 0,\ (1 \leq i \leq k) \Rightarrow \forall c_i = 0$$

ise bu cümleye lineer bağımsızdır denir. Aksi halde lineer bağımlıdır [1].

I.1.7 Tanım: V vektör uzayının bir S alt cümlesi aşağıdaki iki özelliğe sahipse V nin bir bazı adını alır:

i) S lineer bağımsızdır.

ii) $\forall x \in V$ elemanı S'deki sonlu sayıda elemanın bir lineer birleşimidir. Bu özellik $V = Sp\{S\}$ olarak ifade edilir (Germe) [1].

I.1.8 Tanım: V vektör uzayının bir bazı S olsun. S'deki vektörlerin sayısına V'nin boyutu denir ve boyV ile gösterilir [1].

V ,n boyutlu bir iç çarpım uzayı olsun. V uzayının r sayıda vektörden oluşan $\{x_1, x_2, \ldots, x_r\}$ sistemi lineer bağımsız ise bu sisteme aşağıdaki yöntemi uygulayarak V'de r vektörden oluşan bir ortonormal sistem elde edebiliriz. Bu yönteme Gram-Schmidt Ortonormalleştirme Yöntemi denir.

Aşağıda tanımlanan y_i vektörlerinin dizisini ele alalım:

$$\begin{aligned} y_1 &= x_1 \,, \\ y_2 &= \lambda_2^1 y_1 + x_2 \,, \\ y_3 &= \lambda_3^1 y_1 + \lambda_3^2 y_2 + x_3 \,, \\ &\vdots \\ y_r &= \lambda_r^1\, y_1 + \lambda_r^2\, y_2 + \ldots + \lambda_r^{r-1}\, y_{r-1} + x_r \end{aligned} \qquad \ldots(\text{I.1.1})$$

Bu dizide kullanılan λ_i^j bileşenlerini o şekilde belirteceğiz ki, her y_i vektörü kendisinden önce gelen bütün y_j vektörlerine ortogonal olsun. Buna göre,

$$\begin{aligned} \lambda_2^1 &= -\frac{\langle y_1, x_2\rangle}{\langle y_1, y_1\rangle} \\ \lambda_3^1 &= -\frac{\langle y_1, x_3\rangle}{\langle y_1, y_1\rangle} \,, \quad \lambda_3^2 = -\frac{\langle y_2, x_3\rangle}{\langle y_2, y_2\rangle} \\ &\vdots \\ \lambda_r^j &= -\sum_{j=1}^{r-1} \frac{\langle y_j, x_r\rangle}{\langle y_j, y_j\rangle} \end{aligned} \qquad \ldots(\text{I.1.2})$$

dir. (I.1.2) ifadesi (I.1.1) de yerine yazılırsa

$$\begin{aligned} y_1 &= x_1 \\ y_2 &= -\frac{\langle y_1, x_2\rangle}{\langle y_1, y_1\rangle}\, y_1 + x_2 \\ y_3 &= -\frac{\langle y_1, x_3\rangle}{\langle y_1, y_1\rangle}\, y_1 - \frac{\langle y_2, x_3\rangle}{\langle y_2, y_2\rangle}\, y_2 + x_3 \\ &\vdots \\ y_r &= -\sum_{j=1}^{r-1} \frac{\langle y_j, x_r\rangle}{\langle y_j, y_j\rangle}\, y_j + x_r \end{aligned} \qquad \ldots(\text{I.1.3})$$

olmak üzere $\{x_1, x_2, \ldots, x_r\}$ sisteminden $\{y_1, y_2, \ldots, y_r\}$ ortogonal sistemine geçilmiş olur. Bu y_i vektörlerinden herbirini kendi boyuna bölmek suretiyle,

$$v_i = \frac{y_i}{\|y_i\|} \,, \quad 1 \leq i \leq r \qquad \ldots(\text{I.1.4})$$

vektörlerinden oluşan $\{v_1, v_2, \ldots, v_r\}$ ortonormal sistemi elde edilir. Burada

$$\langle v_i, v_j \rangle = \delta_{ij} = \begin{cases} 1, & i=j \\ 0, & i \neq j \end{cases}$$

dır [1].

I.2 ÖKLİD UZAYLARI

I.2.1 Tanım: $A \neq \emptyset$ bir cümle ve V de F cismi üzerinde bir vektör uzayı olsun. Eğer bir

$$f : A \times A \longrightarrow V$$

dönüşümü $P,Q \in A$ noktaları için $f(P,Q) = \vec{PQ}$ şeklinde tanımlanmış ve aşağıdaki iki aksiyomu sağlıyor ise A cümlesine V ile birleştirilmiş bir afin uzay adı verilir.

A1. $\forall\ P,Q,R \in A$ için $f(P,Q) + f(Q,R) = f(P,R)$

A2. $\forall\ P \in A$ ve $\forall\ \vec{\alpha} \in V$ için $f(P,Q) = \vec{\alpha}$ olacak biçimde bir tek $Q \in A$ noktası vardır.

$\vec{PQ}$ vektöründe P noktasına başlangıç ve Q noktasına da bitim noktası denir. Ayrıca A nın boyutu boy A = boy V olarak tanımlanır [2]. A bir reel afin uzay ve A ile birleşen vektör uzayı da V olsun Eğer V de bir

$$\langle\ ,\ \rangle : V \times V \longrightarrow IR$$

iç çarpım işlemi tanımlanırsa bu işlem yardımı ile A da açı, diklik ve uzunluk gibi metrik özellikler tanımlanabilir. Böylece A afin uzayı bir Öklid uzayı adını alır.

I.2.2 Tanım: E^n, n-boyutlu Öklid uzayında bir nokta X olsun. E^n de bir afin koordinat sistemine göre X noktasının koordinatları $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ olsun.

$$x_i : E^n \longrightarrow IR$$

bileşenlerine E^n in i-yinci koordinat fonksiyonu ve $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ reel sayılar n-lisine de bir Öklid koordinat sistemi denir [2]. Bundan sonra $V = IR^n$ ve $A = IR^n$ alacağız.

IR^n standard reel afin uzay olmak üzere IR^n de bir

$$\langle\ ,\ \rangle : IR^n x IR^n \longrightarrow IR$$

iç çarpımı $\forall\ \vec{X},\vec{Y} \in IR$, $\vec{X}=(x_1,x_2,\ldots,x_n)$, $\vec{Y}=(y_1,y_2,\ldots,y_n)$ için

$$\langle\ ,\ \rangle(\vec{X},\vec{Y}) = \langle\vec{X},\vec{Y}\rangle = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i$$

biçiminde tanımlıyalım. Bu iç çarpıma IR^n de standard iç çarpım veya Öklid iç çarpımı denir. Standard iç çarpımın tanımlı olduğu IR^n vektör uzayı ile birleşen IR^n afin uzayına n-boyutlu standard Öklid uzayı denir ve E^n ile gösterilir[2].

I.2.3 Tanım (IR^n de uzaklık fonksiyonu): n-boyutlu bir reel iç çarpım uzayı V ile birleşen bir Öklid uzayı E^n olsun. Bir

$$d: E^n x E^n \longrightarrow IR$$

fonksiyonu $\forall\ X,Y \in E^n$ için, V deki norm $\|\ ,\|$ olmak üzere,

$$d: (X,Y) \longrightarrow d(X,Y) = \|\vec{XY}\|$$

biçiminde tanımlanan d ye E^n Öklit uzayında uzaklık fonksiyonu ve d(X,Y) reel sayısına $X,Y \in E^n$ noktaları arasındaki uzaklık denir[3].

E^n n-boyutlu Öklid uzayında tanımlanan uzaklık fonksiyonuna E^n de Öklid metriği denir [3].

I.2.1 Teorem: E^n n-boyutlu Öklid uzayında uzaklık fonksiyonu bir metriktir [3].

İspat: $\forall\ X,Y,Z \in E^n$ için,

i) E^n ile birleşen IR^n reel iç çarpım uzayında, iç çarpım pozitif tanımlı olduğundan $\forall\ \vec{\alpha} \in IR^n$ için $\|\vec{\alpha}\| \geq 0$ dır. $\vec{XY} = \vec{\alpha}$ ve $d(X,Y) = \|\vec{XY}\| \geq 0$ ve $\|\vec{\alpha}\| = 0$ ise $d(X,Y) = \|\vec{XY}\| = 0$ veya $\vec{XY} = 0$ ya da X=Y elde edilir. Tersine, X=Y ise $\vec{XY} = 0 \Longrightarrow \|\vec{XY}\| = 0 \Longrightarrow$ d(X,Y) = 0 olur.

ii) $d(X,Y) = \|\vec{XY}\| = \|\vec{YX}\| = d(Y,X)$.

iii) İç çarpım uzayında norm'un özelliklerinde

$$\|\vec{XZ}\| = \|\vec{XY}+\vec{YZ}\| \leq \|\vec{XY}\| + \|\vec{YZ}\|$$

veya

$$d(X,Z) \leq d(X,Y) + d(Y,Z)$$

dir.

I.3 E^n ÖKLİD UZAYINDA EĞRİLER

I.3.1 Tanım: Bir

$$\alpha : E^n \longrightarrow E^m$$

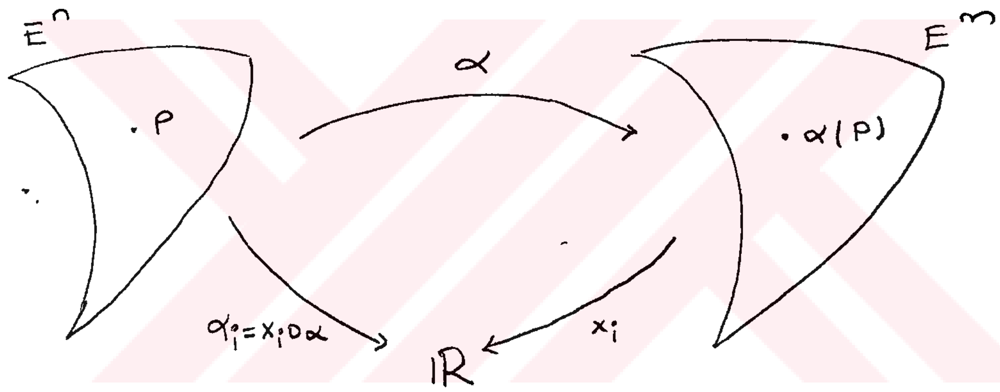
fonksiyonu verilmiş olsun. $\forall P \varepsilon E^n$ için

$$\alpha(P) = (\alpha_1(P), \ldots, \alpha_m(P))$$

olacak şekildeki $\alpha_1, \ldots, \alpha_m : E^n \longrightarrow IR$ reel değerli fonksiyonlarına α nın Öklid koordinat fonksiyonları denir ve

$$\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_m)$$

şeklinde gösterilir.



şekil (I.3.1)

α fonksiyonunun koordinat fonksiyonları olan α_i ler diferensiyellenebilir iseler α fonksiyonuna da diferensiyellenebilirdir denir.

Eğer $\alpha : E^n \longrightarrow E^m$ diferensiyellenebilir bir fonksiyon ise dönüşüm adını alır. E^m deki $\{x_1, \ldots, x_m\}$ koordinat sistemi için

$$\alpha_i = x_i \circ \alpha : E^n \longrightarrow IR, \quad 1 \leq i \leq m$$

şeklindedir [3].

I.3.2 Tanım: $I \subset IR$ bir açık aralık olmak üzere

$$\alpha : I \longrightarrow E^n$$

$$t \longrightarrow \alpha(t) = (\alpha_1(t), \ldots, \alpha_n(t))$$

diferensiyellenebilir dönüşümü altında I'nın resmi olan cümleye E^n de bir eğri denir. Burada $I \subset IR$ aralığına α eğrisinin parametre aralığı ve $t \in I$ değişkenine de α eğrisinin parametresi denir [3].

Bundan sonra $\alpha(I)$ eğrisi yerine sadece α eğrisi demekle yetineceğiz.

I.3.3 Tanım: $\alpha : I \longrightarrow E^n$ bir eğri olsun. $\forall t \in I$ için α nın $\alpha(t)$ noktasındaki hız vektörü diye

$$\dot{\alpha}(t) = \left(\frac{d\alpha_1}{dt}(t), \ldots, \frac{d\alpha_n}{dt}(t)\right)_{(t)} \qquad \ldots(I.3.1)$$

olmak üzere $\dot{\alpha}(t) \in T_{E^n}(\alpha(t))$ tanjant vektörüne denir [3].

I.3.4 Tanım: $\alpha : I \longrightarrow E^n$ bir parametrik eğri olsun. $\forall s \in I$ için

$$\|\dot{\alpha}(s)\| = 1$$

ise α eğrisine birim hızlı eğri denir. s parametresine de eğrinin yay parametresi adı verilir [3].

I.3.5 Tanım: Her noktasındaki hız vektörü sıfırdan farklı olan eğriye regüler eğri denir [3].

I.3.2 Teorem: Her parametrik regüler eğri daima yay parametresi cinsinden ifade edilebilir [3].

I.4 SERRET FRENET VEKTÖRLERİ VE EĞRİLİKLER

I.4.1 Tanım: $M \subset E^n$ eğrisi (I, α) koordinat komşuluğu ile verilsin. Bu durumda $\psi = \{\dot{\alpha}, \ddot{\alpha}, \ldots, \alpha^{(r)}\}$ sistemi lineer bağımsız ve

$$\forall \alpha^{(k)}, \ k > r \text{ için; } \alpha^{(r)} \in Sp\{\psi\}$$

olmak üzere, ψ'den Gramm-Schmidt Ortonormalleştirme Yöntemi ile elde edilen $\{v_1, \ldots v_r\}$ ortonormal sistemine M eğrisinin Serret-Frenet r-ayaklı alanı ve $m \in M$ için $\{v_1(m), \ldots, v_r(m)\}$ ye ise $m \in M$ noktasındaki Serret-Frenet r-ayaklısı denir. Her bir v_i, $1 \leq i \leq r$ vektörleri ise Serret-Frenet Vektörleri adını alır [3].

Özel olarak n=3 için E^3 uzayında $s \in I$ yay parametresi ile verilen bir α eğrisi için $t(s) = v_1(s)$, $n(s) = v_2(s)$, $b(s) = v_3(s)$ olup; bu eğrinin Frenet vektörlerinin

$$t(s) = \dot{\alpha}(s)$$
$$n(s) = \frac{1}{\|\ddot{\alpha}(s)\|}\ddot{\alpha}(s)$$
$$b(s) = t(s) \wedge n(s)$$

olduğu görülür. Bu vektörlere sırası ile, α eğrisinin $\alpha(s)$ noktasındaki teğet vektörü, asli normal vektörü ve binormal vektörü denir. Böylece $\{t(s), n(s), b(s)\}$ sistemi α eğrisinin $\alpha(s)$ noktasındaki Frenet 3-ayaklısıdır [3].

Benzer olarak eğer $t \in I$ keyfi bir parametre ise eğrinin Frenet vektörleri aşağıda ispatsız olarak vereceğimiz teorem yardımıyla hesaplanabilir.

I.4.1 Teorem: 3 boyutlu Öklid uzayı E^3 de keyfi bir t parametresine göre verilen α eğrisinin $\alpha(t)$ noktasındaki Frenet 3-ayaklısı $\{t, n, b\}$ ise,

$$t = \frac{1}{\|\dot{\alpha}\|}\dot{\alpha}$$
$$n = b \wedge t$$
$$b = \frac{1}{\|\dot{\alpha} \wedge \ddot{\alpha}\|}(\dot{\alpha} \wedge \ddot{\alpha})$$

dır. Burada türevler t ye göre alınmıştır [3].

I.4.2 Tanım: α, E^n de bir eğri ve $s \in I$ olmak üzere, $\alpha(s)$ noktasındaki Frenet r-ayaklısı $\{v_1(s), \ldots, v_r(s)\}$ olsun. Bu durumda

$$k_i : I \longrightarrow IR$$
$$s \longrightarrow k_i(s) = \langle \dot{v}_i(s), v_{i+1}(s) \rangle$$

biçiminde tanımlanan fonksiyona α eğrisinin i-yinci eğrilik fonksiyonu ve $k_i(s)$ reel sayısına da α nın $\alpha(s)$ noktasındaki i-yinci eğriliği denir [3].

n=3 özel halinde E^3 eğrisinin iki tane eğriliği mevcut olup birinci eğrilik κ ve ikinci eğrilik τ ile gösterilir. Buna göre s yay-parametresi ile verilmiş bir eğri olmak üzere

$$\mathcal{K} = \|\dot{t}(s)\| = \|\ddot{\alpha}(s)\|$$

$$\tau = \pm\|\dot{b}(s)\| = \frac{\det(\dot{\alpha}(s),\ddot{\alpha}(s),\dddot{\alpha}(s))}{\|\ddot{\alpha}(s)\|^2} \qquad \ldots(I.4.2)$$

dır. α eğrisi herhangi bir t parametresi ile verildiği taktirde;

$$\mathcal{K} = \frac{\|\dot{\alpha}\wedge\ddot{\alpha}\|}{\|\dot{\alpha}\|^3}$$

$$\tau = \frac{\det(\dot{\alpha},\ddot{\alpha},\dddot{\alpha})}{\|\dot{\alpha}\wedge\ddot{\alpha}\|^2}$$

dır. Burada türevler t ye göre alınmıştır.

I.4.2 Teorem: Bir $\alpha: I \longrightarrow E^n$ eğrisi verilmiş olsun. Öyleki $s \in I$ yay-parametresi olmak üzere $\alpha(s)$ noktasındaki i-yinci eğrilik $k_i(s)$ ve Frenet r-ayaklısı $\{v_1(s),\ldots,v_r(s)\}$ ise;

$$\text{i) } \dot{v}_1(s) = k_1(s)v_2(s), \qquad \ldots(I.4.3)$$

$$\text{ii) } \dot{v}_i(s) = -k_{i-1}(s)v_{i-1}(s) + k_i(s)v_{i+1}(s),\ 1 \leq i \leq r$$

$$\text{iii) } \dot{v}_r(s) = -k_{r-1}(s)v_{r-1}(s)$$

dir [3].

İspat:

i) $v_1(s) = \dot{\alpha}(s) \Rightarrow \dot{v}_1(s) \in S_p\{\dot{\alpha}(s),\ddot{\alpha}(s)\} = S_p\{v_1(s),v_2(s)\}$

dir. Buna göre,

$$\dot{v}_1(s) = a_1v_1(s) + a_2v_2(s);\ a_1,a_2 \in IR$$

veya $\langle v_1(s),v_1(s)\rangle = 1$

olduğundan

$$a_1 = \langle\dot{v}_1(s),v_1(s)\rangle = 0$$

ve

$$\langle v_1(s),v_2(s)\rangle = 0 \text{ dan } \langle\dot{v}_1(s),v_2(s)\rangle = -\langle\dot{v}_2(s),v_1(s)\rangle$$

dir. Buradan

$$a_2 = \langle\dot{v}_1(s),v_2(s)\rangle$$

olur. Buradan (I.4.2) tanımı gereğince

$$a_2(s) = k_1(s)$$

yazabileceğimizden $\forall s \in I$ için,

$$\dot{v}_1(s) = k_1(s)v_2(s)$$

elde edilir. ii şıkkının ispatına geçmeden önce şu yardımcı bağıntı ları verelim.

a) $\langle \dot{v}_i, v_i \rangle = 0, \ 1 \leq i \leq r$
b) $\langle \dot{v}_i, v_j \rangle = -\langle \dot{v}_j, v_i \rangle, \ 1 \leq i \neq j \leq r$

dir. Gerçekten,

a) $\langle v_i, v_i \rangle = 1$ olduğundan s'ye göre türev alarak

$$2\langle \dot{v}_i, v_i \rangle = 0$$

veya IR reel sayılar cisminin karakteristiği 2'den farklı olduğundan

$$\langle \dot{v}_i(s), v_i(s) \rangle = 0, \ \forall s \in I$$

olur.

b) $\langle v_i, v_j \rangle = 0, \ i \neq j$

olduğundan s'ye göre türev alınarak

$$\langle \dot{v}_i, v_j \rangle + \langle v_i, \dot{v}_j \rangle = 0$$

veya

$$\langle \dot{v}_i, v_j \rangle = -\langle \dot{v}_j, v_i \rangle$$

bulunur.

Şimdi teoremin ii şıkkının ispatını verelim.

ii) i üzerinde tümevarım metodunu uygulayacağız.

1.Adım: i=2 için teoremin doğru olduğunu gösterelim.

$$v_2(s) = \frac{1}{\|\ddot{\alpha}(s)\|}\ddot{\alpha}(s)$$

olduğundan

$$\dot{v}_2(s) = Sp\{\dot{\alpha}(s), \ddot{\alpha}(s), \dddot{\alpha}(s)\}$$

veya aynı şey olan

$$\dot{v}_2(s) \in Sp\{v_1(s), v_2(s), v_3(s)\}$$

dir. O halde;

$$\dot{v}_2(s) = a_1(s)v_1(s)+a_2(s)v_2(s)+a_3(s)v_3(s),$$

$a_1(s),a_2(s),a_3(s)\varepsilon IR$ dir. Buradan

$$a_1(s)= \langle\dot{v}_2(s),v_1(s)\rangle = -\langle v_2(s),\dot{v}_1(s)\rangle = -k_1(s)$$

$$a_2(s)= \langle\dot{v}_2(s),v_2(s)\rangle = 0$$

$$a_3(s)= \langle\dot{v}_2(s),v_3(s)\rangle =k_2(s)$$

olacağından

$$\dot{v}_2(s) = -k_1(s)v_1(s) + k_2(s)v_2(s)$$

bulunur. Böylece i=2 için teorem doğrulanır.

2. Adım: i=m için teoremin doğru olduğunu kabul edelim ve i=m+1 için doğruluğunu ispatlıyalım.

$$v_{m+1}(s)\varepsilon\ S_p\{\alpha^{\cdot}(s),\alpha^{\cdot\cdot}(s),\ldots,\alpha^{m+1}(s),\alpha^{m+2}(s)\}$$

ve

$$S_p\{\alpha^{\cdot},\alpha^{\cdot\cdot},\ldots,\alpha^{m+2}\} = S_p\{v_1,v_2,\ldots,v_{m+2}\}$$

dir. Diğer taraftan i=m için teoremin doğruluğunu kabul etmekle m'den küçük bütün i ler için doğruluğunu kabul etmiş olduk. Bu da

$$\dot{v}_3(s) = -k_2(s)v_2(s) + k_3(s)v_4(s)$$

$$\dot{v}_4(s) = -k_3(s)v_3(s) + k_4(s)v_5(s)$$

$$\vdots$$

$$\dot{v}_{m-1}(s) = -k_{m-2}(s)v_{m-2}(s) + k_{m-1}(s)v_m(s)$$

olduğu demektir. Ohalde i=m+1 için

$$\dot{v}_{m+1}(s)\varepsilon\ S_p\{v_1,v_2,\ldots,v_{m+1},v_{m+2}\}$$

dan

$$\dot{v}_{m+1} = a^1_{m+1}\,v_1 + a^2_{m+1}\,v_2 +\ldots+ a^m_{m+1}\,v_m + a^{m+1}_{m+1}\,v_{m+1}+a^{m+2}_{m+1}v_{m+2}$$

yazabiliriz. Buradan a^j_{m+1} kat sayılarını hesaplayalım.

$$a^1_{m+1} = \langle\dot{v}_{m+1},v_1\rangle = -\langle\dot{v}_1,v_{m+1}\rangle$$

dir. Teoremin birinci şıkkında görülebileceği gibi $\dot{v}_1$'nın v_{m+1}

üzerinde bileşeni yoktur. Yani;

$$a^1_{m+1} = 0$$

dır.

$$a^2_{m+1} = \langle \dot{v}_{m+1}, v_2 \rangle = -\langle \dot{v}_2, v_{m+1} \rangle$$

dir. $\dot{v}_2$ nın yukarıdaki ifadesine bakılırsa görülür ki $\dot{v}_2$ nın v_{m+1}

üzerindeki bileşeni sıfırdır. Yani;

$$a^2_{m+1} = 0$$

olur. Böyle devam edilirse $\dot{v}_{m+1}$ ifadesinde sıfır olmak zorunda olmayan a^m_{m+1} ile a^{m+2}_{m+1} bileşenleri kalır. Bu bileşenler de,

$$a^m_{m+1} = \langle \dot{v}_{m+1}, v_m \rangle = -\langle \dot{v}_m, v_{m+1} \rangle$$

veya tanım (I.4.2) den

$$a^{m+2}_{m+1} = k_{m+1}$$

dir. Ohalde

$$\dot{v}_{m+1} = -k_m v_m + k_{m+1} v_{m+2}, \quad 1 \leq m+1 < r$$

olur. Böylece, $1 \leq i < r$ için

$$\dot{v}_i(s) = -k_i(s) v_{i-1}(s) + k_i(s) v_{i+1}(s)$$

elde edilir.

iii) α eğrisinin türev vektörleri arasında en fazla r tanesi lineer bağımsız olacağından

$$\dot{v}_r \in S_p\{\dot{\alpha}, \ddot{\alpha}, \dddot{\alpha}, \ldots, \alpha^{(r)}\}$$

$$S_p\{\dot{\alpha}, \ddot{\alpha}, \dddot{\alpha}, \ldots, \alpha^{(r)}\} = S_p\{v_1, v_2, \ldots, v_r\}$$

olduğundan

$$\dot{v}_r \in S_p\{v_1, v_2, \ldots, v_r\}$$

ve dolayısıyla

$$\dot{v}_r = \sum_{i=1}^{r} a_i v_i \; , \; a_i \in IR$$

olur. Buradan da

$$a_i = \langle \dot{v}_r, v_i \rangle - \langle \dot{v}_i, v_r \rangle \; , \; 1 \leq i \leq r$$

dir.Burada vermiş olduğumuz (b) denklemi kullanılırsa

$$a_i = \langle \dot{v}_r , v_i \rangle = -\langle \dot{v}_i , v_r \rangle \ , \ 1 \leq i \leq r$$

$$a_r = \langle \dot{v}_r , v_r \rangle = 0$$

$$a_i = -k_i \langle v_{i+1} , v_r \rangle \ , \quad 1 \leq i \leq r$$

ve $i=r-1$ için a_i den $\langle v_r , v_r \rangle = 1$ nin kullanılmasıyla

$$a_{r-1}(s) = -\ k_{r-1}(s)$$

ve $i=r$ için $a_r = 0$ ve $1 \leq i \leq r-1$ için $a_i = 0$ olduğundan

$$\dot{v}_r(s) = -\ k_{r-1}(s) v_{r-1}(s)$$

bulunur. Böylece ispat tamamlanır. Elde edilen bu formüllere Frenet formülleri denir. Matris formunda aşağıdaki gibi ifade edilir.

$$\begin{bmatrix} \dot{v}_1 \\ \dot{v}_2 \\ \dot{v}_3 \\ \vdots \\ \dot{v}_{r-2} \\ \dot{v}_{r-1} \\ \dot{v}_r \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & k_1 & 0 \ldots & 0 & 0 & 0 \\ -k_1 & 0 & k_2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -k_2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & k_{r-2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -k_{r-2} & 0 & k_{r-1} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -k_{r-1} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ \vdots \\ v_{r-2} \\ v_{r-1} \\ v_r \end{bmatrix} \qquad (I.4.4)$$

$n=3$ özel halinde (I.4.4) ifadesi

$$\begin{bmatrix} \dot{v}_1 \\ \dot{v}_2 \\ \dot{v}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & k_1 & 0 \\ -k_1 & 0 & k_2 \\ 0 & -k_2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{bmatrix}$$

veya ...(I.4.5)

$$\begin{bmatrix} \dot{t} \\ \dot{n} \\ \dot{b} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \kappa & 0 \\ -\kappa & 0 & \tau \\ 0 & -\tau & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} t \\ n \\ b \end{bmatrix}$$

şeklindedir.

I.5 IR^n DE EĞİLİM ÇİZGİLERİ VE HARMONİK EĞRİLİKLER

I.5.1 Tanım: $\alpha : I \longrightarrow IR^n$ s yay-parametresi ile verilen regüler bir eğri olsun. u, IR^n nin birim ve sabit bir vektörü olmak üzere, $\forall s \in I$ için

$$\langle \dot{\alpha}(s), u \rangle = \cos\psi = st. \ , \quad \psi \neq \frac{\pi}{2} \qquad \text{...(I.5.1)}$$

ise α eğrisine IR^n de bir eğilim çizgisidir denir. ψ açısına eğilim açısı $S_p\{ u \}$ uzayına da α nın eğilim ekseni adı verilir.

Bu tanımdan $\psi \neq \frac{\pi}{2}$ şartı kaldırıldığı taktirde IR^n deki her eğri IR^{n+1} de bir eğilim çizgisi olurdu. Bu nedenle daima $\psi \neq \frac{\pi}{2}$ olduğunu göz önüne alacağız [4].

IR^3 deki bir eğrinin harmonik eğriliği

$$H = \frac{k_1}{k_2} = \frac{\text{birinci eğrilik}}{\text{ikinci egrilik}}$$

şeklinde tanımlanır. IR^n deki eğriler için bu tanımın genelleştirilmişi olan harmonik eğrilik tanımı ise aşağıdaki şekilde verilir.

I.5.2 Tanım: $\alpha : I \longrightarrow IR^n$ regüler eğrisi s yay-parametresi ile verilmiş olsun. IR^n nin birim ve sabit bir vektörü u ve $\{ v_1(s), v_2(s), \ldots, v_r(s) \}$ α eğrisinin α (s) noktasındaki Frenet r-ayaklısı olarak verilsin. Bu taktirde $\dot{\alpha}$ (s) ve u arasındaki açı $\psi = \psi(s)$ olmak üzere,

$$H_i : I \longrightarrow IR \ , \quad 1 \leq i \leq r-2$$

$$\langle v_{i+2}(s), u \rangle = H_i(s) \cos\psi$$

şeklinde tanımlanan H_i fonksiyonuna α eğrisinin α (s) noktasındaki u ya göre i-yinci harmonik eğriliği denir. $H_0 = 0$ olarak tanımlanır [4].

Şimdi IR^n deki eğrilerin harmonik eğriliklerini eğrilikler cinsinden ifade eden teoremi verelim.

I.5.1 Teorem: $\alpha : I \longrightarrow IR^n$ s yay-parametresi ile verilen bir eğilim çizgisi olsun. α (s) noktasındaki i-yinci eğrilik $k_i(s)$, i-yinci eğrilik yarıçapı $\sigma_i(s) = 1/k_i(s)$, $1 \leq i < n$ ve j-yinci harmonik eğriliği H_j olmak üzere

$$H_1(s) = \frac{k_1(s)}{k_2(s)} \qquad \ldots(I.5.3)$$

$$H_j(s) = [\dot{H}_{j-1}(s) + H_{j-2}(s)k_j]\,\sigma_{j+1}(s), \quad 2 \leq j \leq n-2 \qquad (I.5.4)$$

dir [4].

İspat: $\alpha : I \longrightarrow IR^n$ eğilim çizgisi olsun. u birim ve sabit bir vektör ve α eğrisinin α (s) noktasındaki Frenet n-ayaklısı $\{v_1(s), \ldots, v_n(s)\}$ olmak üzere

$$\langle \dot{\alpha}(s), u \rangle = \langle v_1(s), u \rangle = \cos\psi = st. \;, \; \forall s \in I \qquad \ldots(I.5.5)$$

yazabiliriz. Buradan s ye göre türev alınırsa

$$\langle \dot{v}_1(s), u \rangle + \langle v_1(s), \dot{u} \rangle = 0$$

veya

$$\langle \dot{v}_1(s), u \rangle = 0 \qquad \ldots(I.5.6)$$

(I.4.3) bağıntılarından

$$k_1(s) \langle v_2(s), u \rangle = 0$$

elde edilir. Burada $k_1(s) \neq 0$ dır. Aksi halde diğer eğriliklerin hepsi sıfır olur. Zira bu halde $k_1(s) = 0$ olacağından ve Serret-Frenet bağıntılarından $\dot{v}_1(s) = \ddot{\alpha}(s)$ den $\ddot{\alpha}(s) = 0$ olur. Bu ifadenin her iki tarafının integralini alırsak $\dot{\alpha}(s) = c$ bulunur. Bu şekilde işleme devam edilirse $\alpha(s) = cs + e$ ifadesi elde edilir. Bu halde eğri bir doğru olur. Öyleyse

$$\langle v_2(s), u \rangle = 0 \qquad \ldots(I.5.7)$$

dır. Tekrar s ye göre türev alırsak

$$\langle \dot{v}_2(s), u \rangle + \langle v_2(s), \dot{u} \rangle = 0$$

veya

$$\langle \dot{v}_2(s), u \rangle = 0 \qquad \ldots(I.5.8)$$

olur. (I.4.3) bağıntısı yardımıyla

$$<-k_1(s)v_1(s)+k_2(s)v_3(s),u> = 0$$

veya

$$-k_1(s)<v_1(s),u>+k_2(s)<v_3(s),u> = 0 \qquad \text{...(I.5.9)}$$

bulunur. Ayrıca (I.5.2) ifadesinden i=1 için elde edilen

$$<v_3(s),u> = H_1(s)\cos\psi$$

denklemi ve (I.5.1)ifadesinin kullanılmasıyla

$$-k_1(s)\cos\psi + k_2(s)H_1(s)\cos\psi = 0$$

buradan

$$H_1(s) = \frac{k_1(s)}{k_2(s)}$$

denklemi bulunur. Bu IR^3 de harmonik eğrilik olup IR^n de birinci harmonik eğriliktir. Daha yüksek mertebeden harmonik eğrilikleri elde etmek için ;

$$<v_{i+2}(s),u> = H_i(s)\cos\psi$$

ifadesinde i=j-1 dönüşümü uygulanırsa,

$$<v_{j+1}(s),u> = H_{j-1}(s)\cos\psi \qquad \text{...(I.5.10)}$$

bulunur. Buradan s ye göre türev alınırsa

$$<\dot{v}_{j+1}(s),u> + <v_{j+1}(s),0> = \dot{H}_{j-1}(s)\cos\psi + 0$$

veya

$$<\dot{v}_{j+1}(s),u> = \dot{H}_{j-1}(s)\cos\psi \qquad \text{...(I.5.11)}$$

olur. (I,5,11) den (I.4.3) bağıntısı yardımıyla

$$<-k_j(s)v_j(s)+k_{j+1}(s)v_{j+2}(s),u> = \dot{H}_{j-1}(s)\cos\psi \qquad \text{...(I.5.12)}$$

$$-k_j(s)<v_j(s),u> + k_{j+1}(s)<v_{j+2}(s),u> = \dot{H}_{j-1}(s)\cos\psi$$

elde edilir. Bu ifadenin her iki tarafını $\cos\psi$ ile bölüp, (I.5.2) denkleminden i=j için elde edilen $H_j(s)$ ve i=j-2 için elde edilen $H_{j-2}(s)$ ifadeleri kullanılırsa

$$-k_j(s)H_{j-2}(s)\,\sigma_{j+1}(s) + H_j(s) = \dot{H}_{j-1}(s)\,\sigma_{j+1}(s)$$

veya

$$H_j(s) = \sigma_{j+1}(s)\dot{H}_{j-1}+k_j(s)H_{j-2}(s)\,\sigma_{j+1}(s),\quad 2\leq j\leq n-2$$

$$\dot{H}_j(s) = [H_{j-1}(s) + k_j(s)H_{j-2}(s)]\,\sigma_{j+1}(s)\ ,\quad 2\leq j\leq n-2$$

elde edilir. Böylece ispat tamamlanır.

I.6 IR^n DE EĞİLİM ÇİZGİLERİ İÇİN BİR KARAKTERİZASYON

Şimdi IR^n deki eğilim çizgileri için harmonik eğrilikler yardımıyla bir karakterizasyon vereceğiz.

I.6.1 Teorem: $\alpha : I \longrightarrow IR^n$ eğrisi $\forall\alpha(s)$ noktasında bir Frenet n-ayaklısına sahip olmak üzere α eğrisinin yay parametresi s ve $\alpha(s)$ noktasındaki harmonik eğrilikleri $H_j(s)$, $1\leq j\leq n-2$ olsun. Bu taktirde

$$\alpha \text{ bir eğilim çizgisidir } \Longleftrightarrow \sum_{j=1}^{n-2} H_j^2(s) = \text{st.}$$

dir [4].

İspat: $\Longrightarrow$): Kabul edelim ki $\alpha : I \longrightarrow IR^n$ bir eğilim çizgisi olsun. Bu taktirde α eğrisi için

$$\langle\dot{\alpha}(s),u\rangle = \cos\psi = \text{st.}\quad \forall s\in I$$

olacak şekilde birim ve sabit bir u vektörü vardır. Bu vektör α eğrisinin $\alpha(s)$ noktasındaki $\{v_1(s),\ldots,v_n(s)\}$ bazı cinsinden

$$u = \sum_{i=1}^{n} \langle v_i(s),u\rangle v_i(s) \qquad \ldots(I.6.1)$$

şeklinde ifade edilebilir. (I.5.1), (I.5.2) ve (I.5.7) değerleri bu ifadede yerine yazılır ve

$$\|u\| = 1 \qquad \ldots(I.6.2)$$

olduğu göz önüne alınırsa

$$\|u\| = \sqrt{\langle u,u\rangle}$$

$$1 = \sqrt{\langle \sum_{i=1}^{n} \langle v_i(s),u\rangle v_i(s),\ \sum_{j=1}^{n} \langle v_j(s),u\rangle v_j(s)\rangle}$$

$$1 = \sqrt{\sum_{i=1}^{n}(\langle v_i(s),u\rangle)^2}\ ,\quad \langle v_i(s),v_i(s)\rangle=1,\ \langle v_i(s),v_j(s)\rangle=0$$

$$1^2 = \left(\sqrt{\sum_{i=1}^{n}(\langle v_i(s),u\rangle)^2}\right)^2$$

$$1 = \sum_{i=1}^{n}(\langle v_i(s),u\rangle)^2,\quad \langle v_2(s),u\rangle = 0$$

$$1 = (\langle v_1(s),u\rangle)^2 + (\langle v_3(s),u\rangle)^2 + \ldots + (\langle v_n(s),u\rangle)^2$$

$$1 = \cos^2\psi + H_1^2(s)\cos^2\psi + \ldots + H_{n-2}^2(s)\cos^2\psi$$

$$1 = \cos^2\psi + \sum_{i=1}^{n-2} H_i^2(s)\cos^2\psi$$

$$\sum_{i=1}^{n-2} H_i^2(s)\cos^2\psi = 1-\cos^2\psi = \sin^2\psi$$

$$\sum_{i=1}^{n-2} H_i^2(s) = tg^2\psi = st. \qquad \ldots(I.6.3)$$

elde edilir.

$(\Leftarrow:)$ $\alpha : I \longrightarrow IR^n$ eğrisi için $\sum_{i=1}^{n-2} H_i^2(s) = a(st.)$ özelliğinin var olduğunu kabul edelim. Bu taktirde $tg^2\psi = a$ olacak şekilde bir ψ açısı vardır. O halde,

$$u = \cos\psi\, v_1 + \sum_{i=3}^{n} H_{i-2}(s)\cos\psi\, v_i(s) \qquad \ldots(I.6.4)$$

olarak bir u vektörü tanımlıyoruz.

1- Gösterelim ki u vektörü sabit bir vektördür: (I.6.4) den s'ye göre türev alarak

$$\frac{1}{\cos\psi}\frac{du}{ds} = \dot v_1(s) + \sum_{i=3}^{n} \dot H_{i-2}(s)v_i(s) + \sum_{i=3}^{n} H_{i-2}(s)\dot v_i(s)$$

$$\ldots(I.6.5)$$

elde edilir. Ayrıca (I.4.3) ifadesinden j=i-2 nin kullanılmasıyla bulunan

$$\dot v_{j+2}(s) = -k_{j+1}(s)v_{j+1}(s) + k_{j+2}(s)v_{j+3}(s) \quad \ldots(I.6.6)$$

yazılır ve (I.5.4) bağıntısından

$$\dot H_j(s) = -k_{j+1}(s)H_{j-1}(s) + k_{j+2}(s)H_{j+1}(s) \qquad \ldots(I.6.7)$$

elde edilir. Bu son denklemin (I.6.5) de yerine konulmasıyla ve j=i-2 için

$$\frac{1}{\cos\psi}\frac{du}{ds} = k_1(s)v_2(s) + \sum_{j=1}^{n-2}[-k_{j+1}(s)H_{j-1}(s) +$$

$$k_{j+2}(s)H_{j+1}(s)]v_{j+2}(s) + \sum_{j=1}^{n-2} H_j(s)$$

$$[-k_{j+1}(s)v_{j+1}(s) + k_{j+2}(s)v_{j+3}(s)] \qquad (I.6.8)$$

bulunur. Diğer taraftan;

$$H_1 = \frac{k_1}{k_2}\ ,\ H_0=0,\ H_1k_2v_2=k_1v_2 \text{ ve } H_{n-1} = 0$$

dır. Ohalde

$$\frac{1}{\cos\psi}\ \frac{du}{ds} = 0 \qquad \text{...(I.6.9)}$$

elde edilir. Buradan u'nun sabit olduğu görülür.

2- Gösterelim ki u bir birim vektördür:

$$\begin{aligned}\|u\|^2 &= \langle \cos\psi\, v_1(s)+H_1(s)\cos\psi\, v_3(s)+\ldots+H_{n-2}(s)\cos\psi\, v_n(s),\\ &\quad \cos\psi\, v_1(s)+H_1(s)\cos\psi\, v_3(s)+\ldots+H_{n-2}(s)\cos\psi\, v_n(s)\rangle\\ &= \cos^2\psi + H_1^2(s)\cos^2\psi+\ldots+H_{n-2}^2(s)\cos^2\psi\\ &= \cos^2\psi\,(1+\sum_{i=1}^{n-2} H_i^2(s))\\ &= \cos^2\psi\,(1+tg^2\psi) = 1\end{aligned}$$

buradan

$$\|u\| = 1$$

bulunur. Diğer taraftan

$$\begin{aligned}\langle v_1(s),u\rangle &= \langle v_1(s),\cos\psi\, v_1(s)+\sum_{i=3}^{n} H_{i-2}(s)\cos\psi\, v_i(s)\rangle\\ &= \cos\psi\,\langle v_1(s),v_1(s)\rangle+H_1(s)\cos\psi\,\langle v_1(s),v_3(s)\rangle\\ &\quad +\ldots+H_{n-2}(s)\cos\psi\,\langle v_1(s),v_n(s)\rangle\\ &= \cos\psi = st.\ ,\ \langle v_i(s),v_i(s)\rangle = 1,\ \langle v_i(s),v_j(s)\rangle=0\end{aligned}$$

dır. Bu ise α eğrisinin bir eğilim çizgisi olduğunu gösterir.

Özel olarak n=3 için $H_1(s) = \frac{k_1(s)}{k_2(s)}$ biçiminde tanımlıdır. Böylece

$$H_1^2(s) = \left[\frac{k_1(s)}{k_2(s)}\right]^2 = tg^2\psi = st.$$

yazılabilir. Buradan da

$$\frac{k_1(s)}{k_2(s)} = tg\,\psi = st.$$

bulunur. Bu ifade, IR^3 3-boyutlu Öklid uzayında $k_1(s) = \kappa$ ve $k_2(s) = \tau$ notasyonları ile $H = \frac{\kappa}{\tau}$ =st. şeklinde olur.

II. BÖLÜM

KUATERNİYONLAR CEBİRİ VE KUATERNİYON DEĞERLİ FONKSİYONLARIN SERRET-FRENET VEKTÖRLERİ

Bu bölüm iki kısımdan oluşmaktadır. Birinci kısımda kuaterniyonlarla ilgili temel kavramlar verilmiştir. İkinci kısım da ise önce IR^3 deki bir eğri için Serret-Frenet vektörleri kuaterniyonlar yardımıyla hesaplanmıştır. Daha sonra da elde edilen bu bağıntılardan yararlanarak IR^4 deki bir eğrinin Serret-Frenet vektör leri verilmiştir.

II.1 KUATERNİYONLAR CEBİRİ

Kuaterniyonlar 1843 yıllarında William Rowan Hamilton (1805-1865) tarafından tanımlanmıştır. Reel bir kuaterniyon, q^1,q^2 q^3,q^4 gibi sıralı dört sayının e_1,e_2,e_3,e_4 şeklindeki dört birime eşlik etmesiyle tanımlanır. Burada e_4 birimi +1 bir reel sayıdır, diğer üç birim ise;

$$\begin{aligned} &1)\quad e_i \times e_j = e_k = -e_j \times e_i \\ &2)\quad e_A \times e_4 = e_4 \times e_A = e_A \\ &3)\quad e_i \times e_i = -e_4 = -1 \end{aligned} \qquad \ldots(\text{II.1.1})$$

özelliklerine sahiptir. Ayrıca (i j k) lar (1 2 3) ün çift permütasyonları ve $A=\{1,2,3,4\}$ indis cümlesidir. Böylece bir kuaterniyon;

$$q = q^1 e_1 + q^2 e_2 + q^3 e_3 + q^4 e_4$$

biçiminde ifade edilebilir. Burada $q^1,q^2,q^3,q^4 \in IR$ reel sayılarına q kuaterniyonunun bileşenleri denir. e_1,e_2,e_3 birimleri 3-boyutlu reel vektör uzayının bir dik koordinat sisteminin baz vektörleri olarak alınır. Dolayısıyla bir q kuaterniyonu v_q ile gösterilen vektörel kısım ve s_q ile gösterilen skalar kısım olmak üzere iki kısma ayrılabilir. Yani; $q=v_q+s_q$ dur.

Reel kuaterniyonlar cümlesini Q_{IR} ile gösterelim.

II.1.1 Tanım: $q_1,q_2 \in Q_{IR}$ herhangi iki kuaterniyon olmak üzere bu iki kuaterniyonun toplamı,

$$\oplus: Q_{IR}\times Q_{IR} \longrightarrow Q_{IR}$$

$$(q_1,q_2) \longrightarrow q_1\oplus q_2 = s_{q_1+q_2} + v_{q_1\oplus q_2} \qquad \ldots(II.1.1)$$

$$s_{q_1+q_2} = s_{q_1} + s_{q_2} \quad \text{ve} \quad v_{q_1\oplus q_2} = v_{q_1} \oplus v_{q_2}$$

biçiminde tanımlanır. Burada $s_{q_1}, s_{q_2} \in IR$ ve + işlemi IR deki toplama işlemidir. v_{q_1}, v_{q_2} birer reel vektör olup, $\oplus$ işlemi vektör uzayındaki toplama işlemidir. Birim eleman (0,0,0,0) kuaterniyonudur [5].

II.1.2 Tanım: Bir skalar ile bir kuaterniyonun çarpımı,

$$\odot : IR\times Q_{IR} \longrightarrow Q_{IR}$$

$$(\lambda,q) \longrightarrow \lambda \odot q = \lambda q = \lambda s_q + \lambda v_q \qquad \ldots(II.1.3)$$

şeklinde tanımlanır ve aşağıdaki özellikler sağlanır.

i) $\lambda \odot (q_1\oplus q_2) = \lambda \odot q_1 \oplus \lambda \odot q_2$, $\forall \lambda \in IR$ ve $\forall q_1,q_2 \in IR$

ii) $(\lambda_1+\lambda_2) \odot q = (\lambda_1\odot q) \oplus (\lambda_2 \odot q)$, $\forall \lambda_1,\lambda_2 \in IR$ ve $\forall q \in Q_{IR}$

iii) $(\lambda_1 . \lambda_2)\odot q = \lambda_1 \odot (\lambda_2 \odot q)$

iv) $1\odot q = q$

O halde tanımlanan işlemlerle beraber $\{ Q_{IR}, \oplus, IR, +, ., \odot \}$ sistemi bir reel vektör uzayıdır [5].

II.1.3 Tanım: Q_{IR} nin herhangi iki elemanı $q_1 = q_1^4 e_4 + q_1^1 e_1 + q_1^2 e_2 + q_1^3 e_3$, $q_2 = q_2^4 e_4 + q_2^1 e_1 + q_2^2 e_2 + q_2^3 e_3$ olmak üzere, bu iki kuaterniyonun çarpımı,

$$\times : Q_{IR}\times Q_{IR} \longrightarrow Q_{IR}$$

$$(q_1,q_2) \longrightarrow q_1\times q_2 = s_{q_1} s_{q_2} + s_{q_1} v_{q_2} + s_{q_2} v_{q_1} - \langle v_{q_1}, v_{q_2} \rangle + v_{q_1} \wedge v_{q_2} \qquad (II.1.4)$$

biçiminde tanımlanır [5].

Kuaterniyon çarpımı aşağıdaki özelliklere sahiptir:

i) İki kuaterniyonun çarpımı da bir kuaterniyondur.

ii) Kuaterniyon çarpımı birleşimlidir.

iii) Kuaterniyon çarpımı dağılımlıdır.

Ancak kuaterniyon çarpımı değişimli değildir. Bu özellikler ve tanımlanan işlemlerle birlikte $\{ Q_{IR}, \oplus, IR, +, ., \odot, x \}$ sistemi bir birleşimli cebirdir. Bu cebire kuaterniyon cebiri adı verilir. Kuaterniyon cebirinin boyutu 4 dür[5].

II.1.4 Tanım: İki kuaterniyonun eşitliği; $\forall\, q_1, q_2 \in Q_{IR}$ için

$$q_1 = q_2 \iff s_{q_1} = s_{q_2} \text{ ve } v_{q_1} = v_{q_2} \qquad \text{...(II.1.5)}$$

şeklinde tanımlanır [5].

II.1.5 Tanım: İki kuaterniyonun farkı; $\forall q_1, q_2 \in Q_{IR}$ için

$$q_1 - q_2 = (s_{q_1} - s_{q_2}) + (v_{q_1} - v_{q_2}) \qquad \text{...(II.1.6)}$$

yani

$$s_{q_1} - s_{q_2} = s_{q_1 - q_2} \text{ ve } v_{q_1} - v_{q_2} = v_{q_1 - q_2}$$

olarak tanımlanır [5].

II.1.6 Tanım: Bir $q = s_q + v_q$ kuaterniyonunun eşleniği

$$q = s_q - \alpha v_q \qquad \text{...(II.1.7)}$$

olarak tanımlanır [6].

Eşlenik işlemi aşağıdaki özelliklere sahiptir:

i-) $\alpha(aq_1 + bq_2) = a\alpha q_1 + b\alpha q_2$, $q_1, q_2 \in Q_{IR}$ ve $a, b \in IR$

ii-) $\alpha(q_1 x q_2) = \alpha q_2 \times \alpha q_1$

iii-) $\alpha(\alpha q) = q$

II.1.7 Tanım: (Kuaterniyon İç Çarpımı)

$$h : Q_{IR} \times Q_{IR} \longrightarrow IR$$

$$(p,q) \longrightarrow h(p,q) = \frac{1}{2}[\, p x \alpha q + q x \alpha p \,] \qquad \text{...(II.1.8)}$$

olarak tanımlanan h-formu kuaterniyon iç çarpımı adını alır[6].

Simetrik, bilineer , IR değerli h-formu iç çarpım aksiyomlarını sağlar:

i-) Simetri aksiyomu,

$$h(p,q) = h(q,p)$$

ii-) Bilineerlik aksiyomu, $\forall c \in IR$ ve $\forall\, p_1, p_2, q_1, q_2 \in Q_{IR}$

$$h(cp,q) = c\, h(p,q) = h(p,cq)$$

$$h(p_1+p_2,q) = h(p_1,q) + h(p_2,q)$$

$$h(p,q_1+q_2) = h(p,q_1) + h(p,q_2)$$

iii-) Pozitif tanımlılık aksiyomu,

$$\|q\|^2 = q x \alpha q = h(q,q) \geq 0$$

$$h(q,q) = 0 \iff q = 0$$

II.1.8 Tanım: Bir $q \in Q_{IR}$ kuaterniyonunun normu,

$$\| \ \| = Q_{IR} \longrightarrow IR$$

$$q \longrightarrow \|q\|$$

olmak üzere ,

$$h(q,q) = \|q\|^2 = q x \alpha q = \alpha\, q x q \qquad \ldots (II.1.9)$$

eşitliğini sağlayan $\|q\|$ reelsayısına denir [5].Norm fonksiyonu pozitif tanımlıdır.

II.1.9 Tanım: Bir kuaterniyonun inversi,

$$(\ )^{-1} : Q_{IR} - 0 \longrightarrow Q_{IR} - 0$$

$$q \longrightarrow q^{-1} = \frac{q}{\|q\|} \qquad \ldots . (II.1.10)$$

şeklinde tanımlanır. Böylece,

$$q x q^{-1} = q^{-1} x q$$

elde edilir. $q \neq 0$ olmak üzere $\forall q \in Q_{IR}$ elemanının bir q^{-1} inversine sahip olması Q_{IR} cebirini bir bölüm cebiri yapar [5].

II.1.10 Tanım: $q \neq 0$ olmak üzere bir p kuaterniyonunun q kuaterniyonuna bölümü ,

$$r_1 = pxq^{-1}$$
$$r_2 = q^{-1}xp \qquad ...(II.1.11)$$

eşitliğini sağlayan r_1 ve r_2 kuaterniyonları olarak tanımlanır. Burada r_1 kuaterniyonuna p'nin q ile sağdan bölümü, r_2 kuaterniyonuna da p'nin q ile soldan bölümü denir. Kuaterniyon çarpımı değişimli olmadığından genel olarak $r_1 \neq r_2$ dir [5].

II.1.11 Tanım: Normu bir olan kuaterniyona birim kuaterniyon denir[5]

Şimdi sonraki kısımda çok kullanılacak olan uzay kuaterniyonu tanımını verelim.

II.1.12 Tanım: $q \in Q_{IR}$ olmak üzere eğer

$$q + \alpha q = 0 \qquad ...(II.1.12)$$

ise q ya bir uzay kuaterniyonu denir. Bu durumda q nun skalar kısmı sıfırdır. Uzay kuaterniyonlarının cümlesi IR^3'e izomorftur.[5] .

II.1.13 Tanım: $q \in Q_{IR}$ olmak üzere eğer

$$q - \alpha q = 0 \qquad ...(II.1.13)$$

oluyorsa q bir temporal kuaterniyon adını alır. Burada q kuaterniyonunun sadece skalar kısmı sıfırdan farklı diğer bileşenleri sıfırdır [6].

II.1.1 Sonuç: Genel olarak bir q kuaterniyonu

$$q = \frac{1}{2}(q + \alpha q) + \frac{1}{2}(q - \alpha q) \qquad ...(II.1.14)$$

şeklinde yazılabilir. Burada q'nun uzay kısmı $1/2(q - {}_{\alpha}q)$ dur ve bir uzay kuaterniyonudur. q'nun temporal kısmı ise $1/2(q + {}_{\alpha}q)$ olup bir temporal kuaterniyondur [6] .

II.1.14 Tanım: $I \subset IR$ bir açık aralık olmak üzere;

$$\alpha : I \longrightarrow Q_{IR}$$
$$t \longrightarrow \alpha(t) = (\alpha_1(t), \ldots, \alpha_n(t))$$

diferensiyellenebilir dönüşümü altında I nın resmi olan cümleye Q_{IR} de bir kuaterniyon eğrisi denir.

II.2 KUATERNİYON DEĞERLİ FONKSİYONLARIN SERRET-FRENET VEKTÖRLERİ

II.2.1 IR^3 deki bir eğrinin Serret-Frenet formüllerinin Uzay Kuaterniyonları yardımıyla hesaplanması

$W=\{ q \in Q_{IR} \mid q + \alpha q = 0 \}$ uzay-kuaterniyonlarının uzayı ile IR^3 (3-boyutlu reel Öklidyen uzay) izomorftur. Dolayısıyla IR^3 deki eğrilerin Frenet formüllerini ve eğriliklerini uzay-kuaterniyonları yardımıyla elde edebiliriz. Daha sonra bu kısımda bulunacak olan formüllerden yararlanarak IR^4 deki eğrilerin Frenet formüllerini ve eğriliklerini kuatreniyonlar cebiri yardımıyla elde edeceğiz.

$I \subset IR$ ve $s \in I$ yay-parametresi olmak üzere

$$\mathbb{C}: s \longrightarrow q(s) = \sum_{i=1}^{3} q^i(s) e_i$$

analitik regüler eğrisinin teğet vektörü

$$t(s) = \sum_{i=1}^{3} \dot{q}^i(s) e_i , \quad \|t(s)\| = 1$$

dir. t birim olduğundan

$$\|t\|^2 = t \times \alpha\, t = 1$$

dir. Bu ifadeden s ye göre türev alarak

$$\dot{t} \times \alpha\, t + t \times \alpha\, \dot{t} = 0 \qquad \ldots(II.2.1)$$

elde edilir. Buradan şu sonuçlara ulaşılır:

II.2.1 Sonuç:

i) $\dot{t}$, t ye h-ortogonaldir. Gösterelim;

$$h(\dot{t},t) = \frac{1}{2} (\dot{t} \times \alpha t + t \times \alpha \dot{t}) = 0$$

ii) $\dot{t} \times \alpha t$ bir uzay-kuaterniyonudur.

$$(\dot{t} \times \alpha t) + \alpha (\dot{t} \times \alpha t) = \dot{t} \times \alpha\, t + t \times \alpha \dot{t} = 0$$

bulunur.

$\dot{t}$ bir uzay- kuaterniyonu olduğundan, n_1 birim bir uzay-kuaterniyonu olmak üzere

$$\dot{t} = k n_1 , \quad k = \|\dot{t}\| , \quad \|n\| = 1 \qquad \ldots(II.2.2)$$

denklemi vasıtasıyla skalar k fonksiyonunu tanımlıyalım. Bu taktirde (II.1.1) sonuçtan n_1, t ye h-ortogonaldir. Gerçekten de

$$h(n_1,t) = \frac{1}{2}(n_1 x\alpha\, t + tx\, \alpha n_1)\ ,\quad \dot{t}=kn_1 \text{ ise } n_1=\frac{1}{k}\dot{t}$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{k}\dot{t}x\,\alpha t + tx\alpha\frac{1}{k}\dot{t}\right)$$

$$= \frac{1}{2k}(\dot{t}x\alpha t + tx\alpha\dot{t})$$

$$h(n_1,t) = 0$$

bulunur. Bir n_2 birim uzay-kuaterniyonunu

$$txn_1 = n_2 = -n_1xt \qquad \ldots(II.2.3)$$

olacak şekilde tanımlayalım. Ayrıca, kolayca görülebilir ki,

$$txn_2 = -n_1 = -n_2xt$$

ve

$$n_2xn_1 = -t = -n_1xn_2$$

dir. Öyleyse t, n_1 ve n_2 IR^3 de karşılıklı olarak h-ortogonal olan birim uzay-kuaterniyonlardır. Yani;

$$h(n_1,n_2) = \frac{1}{2}(n_1x\alpha\, n_2 + n_2x\,\alpha n_1)$$

$$= \frac{1}{2}(n_1x\alpha\,(txn_1)+(txn_1)x\alpha\, n_1)$$

$$= \frac{1}{2}(n_1x\alpha\, n_1x\,\alpha t + txn_1x\alpha\, n_1)$$

$$= \frac{1}{2}(\alpha t + t) = 0, \text{ t uzay-kuaterniyonudur.}$$

$$h(t,n_1) = \frac{1}{2}(tx\alpha\, n_1 + n_1x\,\alpha t)$$

$$= \frac{1}{2}((-n_2xn_1)x\,\alpha n_1 + n_1x\alpha\,(-n_2xn_1))$$

$$= \frac{1}{2}(-n_2xn_1x\,\alpha n_1 - n_1x\,\alpha n_1x\,\alpha n_2)$$

$$= \frac{1}{2}(-(n_2 + \alpha\, n_2)) = 0, \ n_2 \text{ uzay-kuaterniyonudur.}$$

$$h(t,n_2) = \frac{1}{2}(tx\,\alpha n_2 + n_2x\,\alpha t)$$

$$= \frac{1}{2}(tx\alpha\,(-n_1xt) + (-n_1xt)x\alpha\, t)$$

$$= \frac{1}{2}(-tx\alpha\, tx\,\alpha n_1 - n_1xtx\,\alpha t)$$

$$= \frac{1}{2}(-(\alpha\, n_1 + n_1)) = 0, \ n_1 \text{ uzay-kuaterniyonudur.}$$

(II.2.3) eşitliğinin türevini alarak

$$\dot{n}_2 = \dot{t}xn_1+tx\dot{n}_1$$

elde ederiz. Burada (II.2.2), $txt = -e_4$ ve $n_1xn_1 = -e_4$ ifadeleri kullanılırsa

$$\dot{n}_2 = tx(kt+\dot{n}_1) \qquad ...(II.2.4)$$

elde edilir. n_2 birim uzay-kuaterniyon olduğundan

$$n_2x\,{}^{\alpha}n_2 = 1$$

dir. Buradan türev alarak

$$\dot{n}_2x\,{}^{\alpha}n_2 + n_2x\,{}^{\alpha}\dot{n}_2 = 0$$

elde edilir. Böylece

$$h(\dot{n}_2,n_2) = \frac{1}{2}(\dot{n}_2x\,{}^{\alpha}n_2 + n_2x\,{}^{\alpha}\dot{n}_2) = 0$$

bulunur. Bu ise $\dot{n}_2$ nın n_2 ye ortogonal olduğunu verir. Böylece; $\dot{n}_1+kt$, t ve n_1'e h ortogonaldir. Yani;

$$\begin{aligned} h(\dot{n}_1+kt,n_1) &= \frac{1}{2}((\dot{n}_1+kt)x\,{}^{\alpha}n_1 + n_1x\,{}^{\alpha}(\dot{n}_1+kt)) \\ &= \frac{1}{2}(\dot{n}_1x{}^{\alpha}n_1 + ktx{}^{\alpha}n_1+n_1x\,{}^{\alpha}kt + n_1x{}^{\alpha}\dot{n}_1\ ) \\ &= \frac{1}{2}(\dot{n}_1x{}^{\alpha}\ n_1 + \dot{n}_1x\,{}^{\alpha}n_1) \\ &= 0,\ n_1 \text{ birim uzay-kuaterniyon} \end{aligned}$$

ve;

$$n_1x\,{}^{\alpha}n_1 = 1$$

$$\dot{n}_1x\,{}^{\alpha}n_1 + n_1x\,{}^{\alpha}\dot{n}_1 = 0$$

dir.

$$\begin{aligned} h((\dot{n}_1+kt),t) &= \frac{1}{2}\,[\,(\dot{n}_1+kt)x\,{}^{\alpha}t + tx\,{}^{\alpha}(\dot{n}_1+kt)] \\ &= \frac{1}{2}[\ \ (\dot{n}_1+kt)x\,{}^{\alpha}t + tx\,{}^{\alpha}kt + tx\,{}^{\alpha}\dot{n}_1] \\ &= \frac{1}{2}\,[(-kt+rn_2)x\,{}^{\alpha}t + ktx\,{}^{\alpha}t + ktx\,{}^{\alpha}t \\ &\quad + tx\,{}^{\alpha}(-kt + rn_2)\ ] \\ &= \frac{1}{2}[-k\,\|t\|^2 - rn_2xt + k\,\|t\|^2 + k\,\|t\|^2 \\ &\quad -k\,\|t\|^2 - rtxn_2] \\ &= 0 \end{aligned}$$

Bunların sonucu olarak;

$$\dot{n}_1 = -kt + rn_2 \qquad \ldots(II.2.5)$$

bulunur.

n_2 bir uzay-kuaterniyonu olduğundan $\dot{n}_2$ da bir uzay-kuaterniyonudur. (II.2.4) ve (II.2.5) göz önüne alınırsa;

$$\begin{aligned}\dot{n}_2 &= t\times(kt+\dot{n}_1)\\ &= t\times(kt-kt+rn_2)\\ &= t\times rn_2 = r(t\times n_2)\\ &= -rn_1 \qquad \ldots(II.2.6)\end{aligned}$$

(II.2.2), (II.2.5) ve (II.2.6) eşitlikleri IR^3 de $\mathbb{C}$ eğrisi için Serret-Frenet formülleri olup (t,n_1,n_2,k,r) $\mathbb{C}$ eğrisi için Frenet takımıdır. Burada $\{t,n_1,n_2\}$ sırasıyla, teğet, asli normal ve binormal vektörler, k eğrinin birinci eğriliği ve r ise burulmasıdır.

Görüldüğü gibi IR^3 deki $\mathbb{C}$ eğrisinin Serret-Frenet formülleri uzay-kuaterniyonları yardımıyla elde edilerek, bu formüller matrisel formda aşağıdaki şekilde verilmiştir.

$$\begin{bmatrix}\dot{t}\\ \dot{n}_1\\ \dot{n}_2\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0 & k & 0\\ -k & 0 & r\\ 0 & -r & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}t\\ n_1\\ n_2\end{bmatrix}$$

II.2.2 IR^4 Deki Bir Eğrinin Serret-Frenet Formüllerinin Kuaterniyonlar Yardımıyla İfade Edilmesi

Bundan önceki kısımda olduğu gibi IR^4 ile Q_{IR} kuaterniyonlar cümlesini eşleyerek, IR^4 deki eğrilerin Serret-Frenet formüllerini kuaterniyonlar yardımıyla elde edelim: $I\subset IR$ bir aralık ve $s\in I$ yay-parametresi olmak üzere; IR^4 deki bir

$$\mathbb{C}^{(4)}: s \longrightarrow Q(s) = \sum_{i=1}^{4} q^i(s)e_i$$

eğrisini göz önüne alalım. Bu eğrinin teğet vektörü

$$T(s) = \dot{q}(s) = \sum_{i=1}^{4} \dot{q}^i(s)e_i, \quad \|T\| = 1$$

dir. N_1 birim kuaterniyonunu

$$\dot{T} = KN_1 \ , \ K = \|\dot{T}\| \ , \ \|N_1\| = 1 \qquad \text{...(II.2.7)}$$

olacak şekilde tanımlayalım. T nin bir birim kuaterniyon oluşundan yararlanarak (II.2.7) nin de kullanılmasıyla

$$T x \alpha T = 1$$

$$\dot{T} x \alpha T + T x \alpha \dot{T} = 0$$

$$KN_1 x \ \alpha T + T x \ \alpha(KN_1) = 0$$

$$K(N_1 x \ \alpha T + T x \ \alpha N_1) = 0 \qquad \text{...(II.2.8)}$$

elde edilir. $K \neq 0$ olduğundan

$$(N_1 x \alpha \ T + T x \alpha \ N_1) = 0$$

dır. Buradan aşağıdaki sonuç verilebilir:

II.2.2 Sonuç:

i-) N_1, T ye h-ortogonaldir. Gerçekten,

$$h(T,N_1) = \frac{1}{2}(T x \alpha \ N_1 + N_1 x \alpha \ T) = 0$$

ii-) $t = N_1 x \alpha \ T$ olup bir uzay-kuaterniyonudur. Çünki,

$$\begin{aligned} N_1 x \alpha \ T + \alpha \ (N_1 x \alpha \ T) &= N_1 x \ \alpha T + T x \ \alpha N_1 \\ &= h(N_1, T) \\ &= 0 \end{aligned}$$

O halde N_1' in T 'ye ortogonal oluşu $N_1 x \alpha$ T'nin bir uzay-kuaterniyonu oluşunu gerektirir. $\mathbb{C}^{(4)}$ eğrisi boyunca, $t = N_1 x \alpha \ T$ eşitliğinin her iki tarafını T ile kuaterniyon çarpımına tabi tutarak;

$$t x T = N_1 x \alpha \ T x T$$

$$N_1 = t x T \qquad \text{...(II.2.9)}$$

elde ederiz. Böylece $\mathbb{C}^{(4)}$ eğrisi boyunca N_1 vektörünü (II.2.9) ile verebiliriz. $t = N_1 x \alpha \ T$ birim kuaterniyondur. Şimdi(II.2.9) un s'ye göre türevini alarak elde edilen denklemde (II.2.2), (II.2.7) ve $t = N_1 x \alpha \ T$ bağıntılarının kullanılmasıyla;

$$\dot{N}_1 = \dot{t}xT + tx\dot{T}$$
$$= kn_1xT + txKN_1$$
$$= kN_2 + tx(KtxT)$$
$$= kN_2 + KtxtxT$$
$$\dot{N}_1 = kN_2 - KT,\ N_2 = n_1xT \qquad \ldots(II.2.10)$$

elde edilir. Böylece aşağıdaki sonuç verilebilir:

II.2.3 Sonuç:

i-) $\|N_2\| = 1$, N_2 birim kuaterniyondur.

ii-) N_2,T ve N_1 ile karşılıklı olarak ortogonaldir. Yani;

$$h(N_2,T) = \frac{1}{2}(N_2x\ \alpha T + Tx\alpha\ N_2)$$
$$= \frac{1}{2}((n_1xT)x\ \alpha T + Tx\alpha\ (n_1xT))$$
$$= \frac{1}{2}(n_1xTx\alpha\ T + Tx\alpha\ Tx\ \alpha n_1)$$
$$= \frac{1}{2}(n_1x\alpha\ n_1)$$
$$= 0,\ n_1 \text{ bir uzay-kuaterniyonudur.}$$

ve

$$h(N_2,N_1) = \frac{1}{2}(N_2x\alpha\ N_1 + N_1x\alpha\ N_2)$$
$$= \frac{1}{2}((n_1xT)x\ \alpha(txT) + (txTx\alpha\ (n_1xT))$$
$$= \frac{1}{2}(n_1x(Tx\ \alpha\ T)x\alpha\ t + tx(Tx\alpha\ T)x\alpha\ n_1)$$
$$= \frac{1}{2}(n_1x\alpha\ t + tx\alpha\ n_1)$$
$$= 0\ ,\quad t \text{ ile } n_1 \text{ ortogonaldir.}$$

Şimdi (II.2.10) denkleminin s ye göre türevini alarak elde edeceğimiz denklemde (II.2.5), (II.2.7) ve $N_1=txT$ değerlerinin kullanılmasıyla,

$$\dot{N}_2 = \dot{n}_1xT + n_1x\dot{T}$$
$$= (-kt+rn_2)xT + n_1xKN_1$$
$$= -kN_1 + rN_3 - KN_3$$
$$\dot{N}_2 = -kN_1+(r-K)N_3,\ N_3 = n_2xT = -n_1xN_1 \qquad \ldots(II.2.11)$$

bulunur. Şimdi (II.2.11) ile verilen N_3 kuaterniyonu bir birim kuaterniyon olup T,N_1,N_2,N_3 karşılıklı olarak h-ortogonaldirler.

Gerçekten de

$$h(T,N_1) = 0$$
$$h(T,N_2) = 0$$
$$h(N_1,N_2) = 0$$

olduğunu önceden ispatlamıştık.

$$\begin{aligned} h(T,N_3) &= \frac{1}{2}(Tx\ \alpha N_3 + N_3 x\ \alpha T) \\ &= \frac{1}{2}(Tx\ \alpha(n_2 xT) + (n_2 xT)x\ \alpha T)\ ,\ N_3 = n_2 xT \\ &= \frac{1}{2}(Tx\ \alpha Tx\ \alpha n_2 + n_2 xTx\ \alpha T) \\ &= \frac{1}{2}(\ \alpha n_2 + n_2) \\ &= 0\ ,\ n_2 \text{ bir uzay-kuaterniyonudur.} \end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned} h(N_1,N_3) &= \frac{1}{2}(N_1 x\ \alpha N_3 + N_3 x\ \alpha N_1) \\ &= \frac{1}{2}((txT)x\ \alpha(n_2 xT) + (n_2 xT)x\ \alpha(txT)) \\ &= \frac{1}{2}(tx(Tx\ \alpha T)x\ \alpha n_2 + n_2 x(Tx\ \alpha T)x\ \alpha t) \\ &= \frac{1}{2}(tx\ \alpha n_2 + n_2 x\ \alpha t)\ ,\ N_1 = txT \text{ ve } N_3 = n_2 xT \\ &= 0\ ,\ t \text{ ile } n_2 \text{ ortogonaldir.} \end{aligned}$$

Sonuç olarak; (II.2.11) den s ye göre türev alınarak (II.2.6), (II.2.7) ve (II.2.10) ifadelerinin de kullanılmasıyla,

$$\begin{aligned} \dot{N}_3 &= \dot{n}_2 xT + n_2 x\dot{T} \\ &= -rn_1 xT + n_2 xKN_1 \\ &= -rn_1 xT + Kn_2 xN_1 \\ &= -rN_2 + KN_2 \end{aligned}$$

$$\dot{N}_3 = -(r-K)N_2,\ N_2 = n_2 xN_1 = n_1 xT \qquad \ldots(II.2.12)$$

elde edilir. (II.2.7), (II.2.10), (II.2.11) ve (II.2.12) ile verilen denklemler bize Serret-Frenet vektörlerini ve $(T,N_1,N_2,N_3,K,k,r-K)$ da $\mathbb{C}^{(4)}$ eğrisi için Frenet takımını verir.

Sonuç olarak; IR^4 deki $\mathbb{C}^{(4)}$ eğrisinin Serret-Frenet vektörleri ni ve Frenet takımını $IR^{(3)}$ deki $\mathbb{C}$ eğrisinin Frenet takımından faydalanılarak kuaterniyonlar yardımıyla elde edilmiş oldu. Ayrıca bu eğrilerin eğrilikleri arasında şu bağıntılar vardır:

i) $\mathbb{C}^4$ ün torsiyonu $\mathbb{C}$ eğrisinin asli eğriliğidir.

ii) $\mathbb{C}^4$ ün asli eğriliği K ve $\mathbb{C}$ nin torsiyonu r olmak üzere, $\mathbb{C}^4$ ün bitorsiyonu (r-K) dır. Kuaterniyonları kullanarak elde etmiş olduğumuz Serret-Frenet formüllerinin matrisel ifadesi aşağıdaki şekildedir:

$$\begin{bmatrix} \dot{T} \\ \dot{N}_1 \\ \dot{N}_2 \\ \dot{N}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & K & 0 & 0 \\ -K & 0 & k & 0 \\ 0 & -k & 0 & (r-K) \\ 0 & 0 & -(r-K) & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T \\ N_1 \\ N_2 \\ N_3 \end{bmatrix} \qquad \ldots(\text{II}.2.13)$$

III. BÖLÜM

KUATERNİYON EĞİLİM ÇİZGİLERİ VE KARAKTERİZASYONLAR

III.1 KUATERNİYON EĞİLİM ÇİZGİLERİ VE HARMONİK EĞRİLİKLER

III.1.1 IR^3 deki Bir Uzay-Kuaterniyon Eğrisi için Eğilim Çizgisi Ve Harmonik Eğrilik

IR^3 ile uzay-kuaterniyonlarının cümlesini özdeşleyerek IR^3 deki bir kuaterniyon eğrisinin eğilim çizgilerini ve harmonik eğriliğini ifade edeceğiz.

III.1.1 Tanım: $\alpha : I \longrightarrow IR^3$ regüler kuaterniyon eğrisi s yay-parametresi ile verilmiş olsun. IR^3 ün birim ve sabit bir vektörü u olmak üzere, $\forall\ s \in I$ için

$$h(\alpha'(s),u) = \cos\psi = st. \ , \ \psi \neq \frac{\pi}{2} \qquad \ldots(III.1.1)$$

ise α eğrisine IR^3 de bir uzay-kuaterniyon eğilim çizgisidir denir.

IR^3 ün birim ve sabit bir vektörü u ve α eğrisinin $\alpha(s)$ noktasındaki Frenet 3-ayaklısı $\{t(s), n_1(s), n_2(s)\}$ olmak üzere;

$$\begin{aligned} h(\alpha'(s),u) &= h(t(s),u) \\ &= \frac{1}{2}(t(s) \times \alpha\, u + u \times \alpha\, t(s)) \\ &= \frac{1}{2}(-t(s)xu - uxt(s)) \\ &= \frac{1}{2}\left[-(-\langle t(s),u\rangle + t(s)\wedge u) - (-\langle u,t(s)\rangle + u\wedge t(s))\right] \\ &= \frac{1}{2}\left[\langle t(s),u\rangle - t(s)\wedge u + \langle u,t(s)\rangle - u\wedge t(s)\right] \\ &= \langle t(s),u\rangle \end{aligned}$$

$$h(t(s),u) = \cos\psi = st. \ , \ \psi \neq \frac{\pi}{2} \qquad \ldots(III.1.2)$$

Böylece aşağıdaki sonucu verebiliriz:

III.1.1 Sonuç: IR^3 deki bir eğri reel anlamda eğilim çizgisi ise bu eğri ile eşlenen uzay-kuaterniyon eğrisi de eğilim çizgisidir. Bunun karşıtı da doğrudur.

Bir uzay-kuaterniyon eğrisinin harmonik eğriliği aşağıdaki şekilde tanımlanır:

III.1.2 Tanım: $\alpha : I \longrightarrow IR^3$ bir regüler kuaterniyon eğrisi olup s yay-parametresi ile verilsin. IR^3 ün birim ve sabit bir vektörü u ve $\{t(s), n_1(s), n_2(s)\}$ α eğrisinin $\alpha(s)$ noktasındaki Frenet 3-ayaklısı olsun. Bu taktirde $\dot{\alpha}(s)$ ve u arasındaki açı $\psi = \psi(s)$ olup,

$$H : I \longrightarrow IR$$

$$h(n_2(s), u) = H(s) \cos \psi \qquad \text{...(III.1.3)}$$

biçimin de tanımlanan H fonksiyonuna α eğrisinin $\alpha(s)$ noktasındaki u ya göre harmonik eğriliği denir.

Şimdi harmonik eğriliği eğrilikler türünden ifade eden teoremi verelim:

III.1.1 Teorem: $\alpha : I \longrightarrow IR^3$ s yay-parametresi ile verilen bir uzay-kuaterniyon eğilim çizgisi olsun. α eğrisinin $\alpha(s)$ noktasındaki eğrilikleri k(s), r(s) ve harmonik eğriliği H(s) olmak üzere

$$H(s) = \frac{k(s)}{r(s)}$$

dir.

İspat: $\alpha : I \longrightarrow IR^3$ uzay-kuaterniyon eğilim çizgisinin teğet vektörünün u vektörü ile yapmış olduğu açı ψ olsun. $\alpha(s)$ noktasındaki Frenet 3-ayaklısı $\{t(s), n_1(s), n_2(s)\}$ olmak üzere

$$h(t(s), u) = \cos \psi = st.$$

yazabiliriz. Buradan s ye göre türev alınırsa,

$$h(\dot{t}(s), u) + h(t(s), \dot{u}) = 0$$

veya

$$h(\dot{t}(s), u) = 0 \qquad \text{...(III.1.4)}$$

elde edilir. (III.1.4) de (II.2.2) nin kullanılmasıyla

$$h(k(s) n_1(s), u) = 0$$

$$k(s)\, h(n_1(s), u) = 0$$

bulunur. Burada $k(s) \neq 0$ dır. Öyleyse;

$$h(n_1(s),u) = 0 \qquad \ldots(III.1.5)$$

dir. (III.1.5) in s ye göre türevi alınırsa

$$h(\dot{n}_1(s),u) + h(n_1(s),\dot{u}) = 0$$

veya

$$h(\dot{n}_1(s),u) = 0 \qquad \ldots(III.1.6)$$

elde edilir. (II.2.5) denkleminin burada yerine konulmasıyla

$$h(-k(s)t(s)+r(s)n_2(s),u) = 0$$

$$-k(s)\, h(t(s),u) + r(s)\, h(n_2(s),u) = 0 \qquad \ldots(III.1.7)$$

bulunur. Bu denklemde (III.1.2) ve (III.1.3) ifadelerinin kullanılmasıyla,

$$-k(s) \cos\psi + r(s)\, H(s) \cos\psi = 0 \qquad \ldots(III.1.8)$$

elde edilir. Buradan,

$$H(s) = \frac{k(s)}{r(s)} = \frac{1.\text{eğrilik}}{2.\text{eğrilik}} \qquad \ldots(III.1.9)$$

denklemine ulaşılır. Böylece IR^3 de bir kuaterniyon eğrisi için harmonik eğriliği eğrilikler cinsinden elde etmiş olduk.

III.1.2 IR^4 deki Bir Kuaterniyon Eğrisi İçin Eğilim Çizgileri Ve Harmonik Eğrilikler

Bu kısımda IR^4 ile kuaterniyonlar kümesi Q_{IR} yi özdeşleyerek IR^4 deki kuaterniyon eğrileri için eğilim çizgisi ve harmonik eğrilik tanımlarını vereceğiz.

III.1.3 Tanım: $\alpha : I \longrightarrow IR^4$ regüler kuaterniyon eğrisi s yay-parametresi ile verilsin. Birim ve sabit bir uzay kuaterniyonu u olmak üzere $\forall\, s \in I$ için

$$h(\dot{\alpha}(s),u) = \cos\psi = st. \;,\quad \psi \neq \frac{\pi}{2} \qquad \ldots(III.1.10)$$

ise α eğrisine IR^4 de bir kuaterniyon eğilim çizgisidir denir.

III.1.2 Teorem: $\alpha : I \longrightarrow IR^3$ bir uzay-kuaterniyon eğilim çizgisi olsun. $\beta(s) = \beta_1(s)e_1 + \beta_2(s)e_2 + \beta_3(s)e_3$ olmak üzere β dan türetilen her $\alpha(s) = \beta_1(s)e_1 + \beta_2(s)e_2 + \beta_3(s)e_3 + \alpha_4(s)e_4$ kuaterniyon eğrisi de bir kuaterniyon eğilim çizgisidir.

İspat: $\alpha : I \longrightarrow IR^4$ s yay-parametresi ile verilen bir eğri olsun. u birim ve sabit bir uzay-kuaterniyonu ve α nın $\alpha(s)$ noktasındaki Frenet 4-ayaklısı $\{T(s), N_1(s), N_2(s), N_3(s)\}$ olmak üzere,

$$
\begin{aligned}
h(\alpha'(s),u) &= h(T(s),u), \quad T(s) = s_{T(s)} + v_{T(s)} \\
&= \frac{1}{2}(T(s) \times \alpha\, u + u \times \alpha\, T(s)) \\
&= \frac{1}{2}[(s_{T(s)} + v_{T(s)}) \times \alpha\, u + u \times \alpha\,(s_{T(s)} + v_{T(s)})] \\
&= \frac{1}{2}\{ -s_{T(s)}.u + \langle v_{T(s)}, u\rangle - v_{T(s)}\, u + \\
&\quad s_{T(s)}.u + \langle v_{T(s)}, u\rangle - u\, v_{T(s)} \} \\
&= \frac{1}{2}(2\langle v_{T(s)}, u\rangle) \\
h(T(s),u) &= \langle v_{T(s)}, u\rangle = \cos\psi = st. \qquad \ldots(III.1.11)
\end{aligned}
$$

bulunur. Böylece teoremin ispatı tamamlanır.

III.1.4 Tanım: $\alpha : I \longrightarrow IR^4$ regüler kuaterniyon eğrisi s yay-parametresi ile verilsin. u, birim ve sabit bir uzay-kuaterniyonu ve $\{T(s), N_1(s), N_2(s), N_3(s)\}$ de α eğrisinin $\alpha(s)$ noktasındaki Frenet 4 ayaklısı olsun. Bu taktirde, T(s) ve u arasındaki açı ψ olmak üzere,

$$H_i : I \longrightarrow IR, \quad i=1,2$$

$$h(N_{i+1}(s),u) = H_1(s)\cos\psi \qquad \ldots(III.1.12)$$

şeklinde tanımlı H_i fonksiyonuna α kuaterniyon eğrisinin u'ya göre $\alpha(s)$ noktasındaki i-yinci harmonik eğriliği denir. $H_0 = 0$ olarak tanımlanır.

Kuaterniyon eğrisinin eğrilikleri ile harmonik eğrilikleri arasındaki ilişki aşağıdaki teorem ile ifade edilebilir:

III.1.3 Teorem: $\alpha : I \longrightarrow IR^4$ s yay-parametresi ile verilen bir kuaterniyon eğilim çizgisi olsun. $\alpha(s)$ noktasındaki i-yinci eğrilik $k_i(s)$, i-yinci eğrilik yarıçapı $\sigma_i(s) = 1/k_i(s)$, $1 \le i \le 3$ ve 1. harmonik eğrilik $H_1(s)$, 2. harmonik eğrilik $H_2(s)$ olarak verilsin. Bu takdirde;

$$H_1(s) = \frac{1.\text{eğrilik}}{2.\text{eğrilik}}$$

$$H_2(s) = \dot{H}_1(s)\,\sigma_3(s) \qquad \ldots(\text{III}.1.13)$$

dir.

İspat: $\alpha : I \longrightarrow IR^4$ regüler kuaterniyon eğrisi verilsin. u birim ve sabit bir uzay-kuaterniyonu ve $\alpha(s)$ noktasındaki Frenet 4-ayaklısı $\{T(s), N_1(s), N_2(s), N_3(s)\}$ olmak üzere;

$$h(T(s),u) = \cos\psi = st.$$

yazabiliriz. Bu ifadenin s'ye göre türevi alınırsa,

$$h(\dot{T}(s),u) + h(T(s),\dot{u}) = 0$$

ya da

$$h(\dot{T}(s),u) = 0 \qquad \ldots(\text{III}.1.14)$$

elde edilir. (III.1.14) de (II.2.7) yerine konulursa, $s\varepsilon I$ için

$$h(K(s)N_1(s),u) = 0$$

bulunur. Burada $K(s) \neq 0$ olacağından

$$h(N_1(s),u) = 0 \qquad \ldots(\text{III}.1.15)$$

bulunur. Bu ifadenin tekrar s'ye göre türevi alınırsa,

$$h(\dot{N}_1(s),u) + h(N_1(s),\dot{u}) = 0$$

$$h(\dot{N}_1(s),u) = 0 \qquad \ldots(\text{III}.1.16)$$

dır. (III.1.16) da (II.2.10) un kullanılmasıyla

$$h(-K(s)T(s) + k(s)N_2(s),u) = 0$$

$$-K(s)h(T(s),u) + k(s)h(N_2(s),u) = 0$$

bulunur. Ayrıca (III.1.12) eşitliğinden i=1 için elde edilen

$$h(N_2(s),u) = H_1(s)\cos\psi \qquad \ldots(\text{III}.1.17)$$

nin (III.1.11) ile beraber gözönüne alınmasıyla

$$-K(s)\cos\psi + k(s)H_1(s)\cos\psi = 0$$

ve buradan da

$$H_1(s) = \frac{K(s)}{k(s)} = \frac{1.\text{eğrilik}}{2.\text{eğrilik}} \qquad \ldots(\text{III}.1.18)$$

elde edilir. İkinci harmonik eğriliği elde etmek için ise (III.1.17) ifadesinden s'ye göre türev alarak

$$h(\dot{N}_2(s),u) + h(N_2(s),\dot{u}) = \dot{H}_1(s)\cos\psi + 0$$

veya

$$h(\dot{N}_2(s),u) = \dot{H}_1(s)\cos\psi \qquad \ldots(III.1.19)$$

bulunur. (III.1.19) da (II.2.11) in kullanılmasıyla

$$h(-k(s)N_1(s) + (r-K)(s)N_3(s),u) = \dot{H}_1(s)\cos\psi$$

$$-k(s)h(N_1(s),u) + (r-K)(s)h(N_3(s),u) = \dot{H}_1(s)\cos\psi \qquad \ldots(III.1.20)$$

denklemine ulaşılır. Burada her iki tarafı $\cos\psi$ ile bölüp (III.1.12) denkleminden $i=0$ için elde edilen $H_0(s)$ ve $i=2$ için elde edilen $H_2(s)$ ifadelerinin kullanılmasıyla,

$$-k(s)H_0(s) + (r-K)(s)H_2(s) = \dot{H}_1(s)$$

ve buradan

$$H_2(s) = \dot{H}_1(s)\frac{1}{(r-K)(s)} \qquad \ldots(III.1.21)$$

$$H_2(s) = \dot{H}_1(s)\,\sigma_3(s)$$

denklemine ulaşılır. Böylece kuaterniyon eğilim çizgileri için harmonik eğrilikler eğrilikler cinsinden elde edilmiş oldu.

III.2 KUATERNİYON EĞİLİM ÇİZGİLERİ İÇİN KARAKTERİZASYONLAR

Bu kısımda IR^3 deki uzay-kuaterniyon eğilim çizgileri ve IR^4 deki kuaterniyon eğilim çizgileri için birer karakterizasyon verilmektedir

III.2.1 Uzay-Kuaterniyon Eğilim Çizgileri İçin Bir Karakterizasyon:

III.2.1 Teorem: $\alpha : I \longrightarrow IR^3$ s yay-parametresi ile verilen bir uzay-kuaterniyon eğrisi olsun. $\alpha(s)$ noktasındaki harmonik eğrilik $H(s)$ ve Frenet 3-ayaklısı $\{t(s),n_1(s),n_2(s)\}$ olmak üzere

α bir uzay-kuaterniyon eğilim çizgisidir $\Longleftrightarrow$ $H^2(s) = st.$ dir.

İspat: $\Longrightarrow$) α uzay-kuaterniyon bir eğilim çizgisi ise,

$$h(\dot{\alpha}(s),u) = \cos\psi = st. \ , \ \forall s \in I$$

olacakşekilde birim ve sabit bir u vektörü vardır. Bu vektör uzay-kuaterniyon eğrisinin $\alpha(s)$ noktasındaki $\{t(s),n_1(s),n_2(s)\}$

bazı cinsinden

$$u = h(t(s),u)t(s) + \sum_{i=1}^{2} h(n_i(s),u)n_i(s) \qquad ...(III.2.1)$$

biçiminde ifade edilebilir. (III.1.1), (III.1.3) ve (III.1.4) bağıntıları ile

$$||t(s)|| = ||n_1(s)|| = ||n_2(s)|| = 1\,, \quad ||u|| = 1$$

olduğu göz önüne alınırsa

$$||u||^2 = h(u,u) = u \times \alpha u$$

$$1 = (h(t(s),u)t(s) + \sum_{i=1}^{2} h(n_i(s),u)n_i(s)) \times$$

$$\alpha\, (h(t(s),u)t(s) + \sum_{i=1}^{2} h(n_i(s),u)n_i(s))$$

$$= (h(t(s),u)t(s) + h(n_2(s),u)n_2(s)) \times \alpha\, (h(t(s),u)t(s)$$

$$+ h(n_2(s),u)n_2(s))$$

$$= (\cos\psi\, t(s) + H(s)\cos\psi\, n_2(s)) \times \alpha\, (\cos\psi\, t(s) +$$

$$H(s)\cos\psi\, n_2(s))$$

$$= (\cos^2\psi\, ||t(s)||^2 + H(s)\cos^2\psi\, t(s) \times \alpha\, n_2(s)$$

$$+ H(s)\cos^2\psi\, n_2(s) \times \alpha\, t(s) + H^2(s)\cos^2\psi ||n_2(s)||^2)$$

$$1 = (\cos^2\psi - H(s)\cos^2\psi\, t(s) \times n_2(s) - H(s)\cos^2\psi\, n_2(s) \times t(s)$$

$$+ H(s)\cos^2\psi\ )$$

Burada $t(s) \times n_2(s) = -n_1(s)$ ve $n_2(s) \times t(s) = n_1(s)$ olduğu gözönüne alınırsa

$$H^2(s)\cos^2\psi = 1 - \cos^2\psi$$

$$H^2(s) = \frac{\sin^2\psi}{\cos^2\psi} = tg^2\psi = st. \qquad ...(III.2.2)$$

bulunur.

<=) Karşıt olarak, α uzay-kuaterniyon eğrisi için $H^2(s) = a(st.)$ olduğunu kabul edelim. Bu takdirde $tg^2\psi = a$ olacak şekildebir ψ açısı vardır. O halde,

$$u = \cos\psi\, t(s) + H(s)n_2(s)\cos\psi \qquad ...(III.2.3)$$

olacak şekilde u uzay-kuaterniyonu tanımlayalım.

1) u uzay-kuaterniyonunun sabit olduğunu görelim: (III.2.3) ün s'ye

göre türevini alarak,

$$\frac{1}{\cos\psi}\ \frac{du}{ds} = \dot{t}(s) + \dot{H}(s)n_2(s) + H(s)\dot{n}_2(s) \qquad \ldots(III.2.4)$$

eşitliği elde edilir. Burada (II.2.2), (II.2.6) ve n=3 özel hali için $\dot{H}(s) = 0$ olduğu göz önüne alınırsa

$$\frac{1}{\cos\psi}\ \frac{du}{ds} = k(s)n_1(s) + \dot{H}(s)n_2(s) + H(s)\ (-r(s)n_1(s))$$

$$= k(s)n_1(s) + \frac{k(s)}{r(s)}\ (-r(s)n_1(s))$$

$$\frac{1}{\cos\psi}\ \frac{du}{ds} = 0 \qquad \ldots(III.2.5)$$

elde edilir. Ohalde u sabit bir uzay-kuaterniyonudur.

2) u uzay-kuaterniyonunun birim olduğunu görelim.

$$\begin{aligned}
\|u\|^2 &= h(u,u) = u \times \alpha u \\
&= (\cos\psi t(s) + H(s)\cos\psi n_2(s)) \times \\
&\quad \alpha(\cos\psi t(s) + H(s)\cos\psi\ n_2(s)) \\
&= \cos^2\psi + H^2(s)\cos\psi \\
&= \cos^2\psi\ (1+H^2(s)) \\
&= \cos^2\psi(1+tg^2\psi) \\
&= 1
\end{aligned}$$

buradan

$$\|u\| = 1$$

eşitliğine ulaşılır. Ayrıca,

$$\begin{aligned}
h(t(s),u) &= \frac{1}{2}\ (t(s)\times\alpha u + u\times\alpha t(s)) \\
&= \frac{1}{2}\ [t(s)\times\alpha(\cos\psi\ t(s) + H(s)n_2(s)\cos\psi) \\
&\quad + (\cos\psi\ t(s) + H(s)n_2(s)\cos\psi)\times\alpha\ t(s)] \\
&= \frac{1}{2}[\cos\psi\ \|t(s)\|^2 + H(s)\cos\psi\ t(s)\times\alpha n_2(s) \\
&\quad + \cos\psi\ \|t(s)\|^2 + H(s)\cos\psi\ n_2(s)\times\alpha t(s)] \\
&= \frac{1}{2}[2\cos\psi - H(s)\cos\psi\ t(s)\times n_2(s) - \\
&\quad H(s)\cos\psi\ n_2(s)\times t(s)]
\end{aligned}$$

burada $t(s) \times n_2(s) = -n_1(s)$ ve $n_2(s) \times t(s) = n_1(s)$ olduğu gözönüne alınırsa,

$$h(t(s),u) = \cos\psi = st.$$

dir. Bu ise bize nın bir eğilim çizgisi olduğunu verir.

III.2.2 Kuaterniyon Eğilim Çizgileri İçin Bir Karakterizasyon:

III.2.2 Teorem: $\alpha : I \longrightarrow IR^4$ s yay-parametresi ile verilen bir kuaterniyon eğrisi olsun. $\alpha(s)$ noktasındaki Frenet 3-yaklısı $\{T(s), N_1(s), N_2(s), N_3(s)\}$ ve i.yinci harmonik eğriliği $H_i(s)$, $i=1,2$ olmak üzere;

$$\alpha \text{ bir eğilim çizgisidir} \Longleftrightarrow \sum_{i=1}^{2} H_i^2(s) = st.$$

İspat: $\Longrightarrow$ $\alpha : I \longrightarrow IR^4$ kuaterniyon eğrisinin bir eğilim çizgisi olduğunu kabul edelim. Öyleyse α eğrisi için

$$h(\dot{\alpha}(s),u) = \cos\psi = st., \ \forall s \in I$$

olacak şekilde birim ve sabit bir u uzay-kuaterniyonu vardır. Bu uzay-kuaterniyonu α eğrisinin $\alpha(s)$ noktasındaki bazı cinsinden

$$u = h(T(s),u)T(s) + \sum_{i=1}^{3} h(N_i(s),u)N_i(s) \qquad \ldots(III.2.5)$$

biçiminde ifade edilebilir. Burada (III.1.2) denkleminden i=1 için elde edilen $H_1(s)$ ve i=2 için elde edilen $H_2(s)$ ifadeleri ile (III.1.11), (III.1.15) ,(II.2.10),(II.2.11) ayrıca, $\|T(s)\| = \|N_1(s)\| = \|N_2(s)\| = \|N_3(s)\| = \|u\| = 1$ olduğu gözönüne alınırsa;

$$\begin{aligned}
\|u\|^2 &= h(u,u) = u \times \alpha u \\
&= [\, h(T(s),u)T(s) + \sum_{i=1}^{3} h(N_i(s),u)N_i(s)\,] \times \\
&\quad \alpha\, [h(T(s),u)T(s) + \sum_{i=1}^{3} h(N_i(s),u)N_i(s)] \\
&= [\cos\psi\, T(s) + H_1(s)\cos\psi\, N_2(s) + H_2(s)\cos\psi\, N_3(s)] \\
&\quad \alpha\, [\cos\psi\, T(s) + H_1(s)\cos\psi\, N_2(s) + H_2(s)\cos\psi\, N_3(s)\,] \\
&= \cos^2\psi \|T(s)\|^2 + H_1^2(s)\cos^2\psi\, T(s) \times \alpha\, N_2(s) \\
&\quad + H_2(s)\, \cos^2\psi\, T(s) \times \alpha\, N_3(s)
\end{aligned}$$

$$+H_1(s)\cos^2\psi\, N_2(s)\times\alpha T(s) + H_1^2(s)\cos^2\psi\|N_2(s)\|^2$$

$$+H_1(s)H_2(s)\cos^2\psi\, N_2(s)\times\alpha N_3(s) + H_2(s)\cos^2\psi\, N_3(s)\times\alpha T(s)$$

$$+H_2(s)H_1(s)\cos^2\psi\, N_3(s)\times\alpha N_2(s) + H_2^2(s)\cos^2\psi\,\|N_3(s)\|^2$$

$$= \cos^2\psi + H_1^2(s)\cos^2\psi + H_2^2(s)\cos^2\psi - H_1(s)\cos^2\psi\, n_1(s)$$

$$-H_2(s)\cos^2\psi\, n_2(s) + H_1(s)\cos^2\psi\, n_1(s)$$

$$-H_1(s)H_2(s)\cos^2\psi\, t(s) + H_2(s)\cos^2\psi\, n_2(s)$$

$$+H_2(s)H_1(s)\cos^2\psi\, t(s)$$

$$1 = \cos^2\psi + H_1^2(s)\cos^2\psi + H_2^2(s)\cos^2\psi$$

$$1 = \cos^2\psi + (H_1^2(s) + H_2^2(s))\cos^2\psi$$

$$1 - \cos^2\psi = (H_1^2(s) + H_2^2(s))\cos^2\psi$$

$$\frac{\sin^2\psi}{\cos^2\psi} = \sum_{i=1}^{2} H_i^2(s)$$

buradan,

$$\sum_{i=1}^{2} H_i^2(s) = tg^2\psi = st. \qquad \ldots(III.2.6)$$

elde edilir.

$(\Leftarrow)$ $\alpha : I \longrightarrow IR^4$ kuaterniyon eğrisi için $\sum_{i=1}^{2} H_i^2(s) = a$ (st.) olduğunu kabul edelim. Bu taktirde $tg^2\psi = a$ olacak şekilde bir ψ açısı vardır. Buna göre,

$$u = \cos\psi\, T(s) + \sum_{i=2}^{3} H_{i-1}(s)\cos\psi\, N_i(s) \qquad \ldots(III.2.7)$$

biçiminde bir u uzay-kuaterniyonunu tanımlayalım.

1) Gösterelim ki u sabittir: (III.2.7) denkleminin s ye göre türevini alarak;

$$\frac{1}{\cos\psi}\frac{du}{ds} = \dot{T}(s) + \sum_{i=2}^{3}\dot{H}_{i-1}(s)N_i(s) + \sum_{i=2}^{3} H_{i-1}(s)\dot{N}_i(s) \qquad \ldots(III.2.8)$$

$$= \dot{T}(s) + \dot{H}_1(s)N_2(s) + \dot{H}_2(s)N_3(s) + H_1(s)\dot{N}_2(s)$$

$$+H_2(s)\dot{N}_3(s)$$

buluruz.

Diğer yandan (III.1.12) de i=2 için

$$h(N_3(s),u) = H_2(s)\cos\psi$$

yazılıp bu eşitliğin s ye göre türevinin alınmasıyla

$$h(\dot{N}_3(s),u) + h(N_3(s),\dot{u}) = \dot{H}_2(s)\cos\psi + 0$$

$$h(\dot{N}_3(s),u) = \dot{H}_2(s)\cos\psi$$

$$h(-(r-K)(s)N_2(s),u) = \dot{H}_2(s)\cos\psi$$

$$-(r-K)(s)\, h(N_2(s),u) = \dot{H}_2(s)\cos\psi$$

$$\dot{H}_2(s) = -(r-K)(s)H_1(s)\cos\psi \qquad \text{...(III.2.9)}$$

elde edilir.

(III.2.8) ifadesinde önceden bulunan (II.2.7), (II.2.11), (II.2.12), (III.2.9) ve

$$\dot{H}_1(s) = (r-K)(s)\,H_2(s)$$

değerlerinin kullanılmasıyla;

$$\frac{1}{\cos\psi}\frac{du}{ds} = K(s)N_1(s) + (r-K)(s)H_2(s)N_2(s) - (r-K)(s)$$

$$-(r-K)(s)H_1(s)N_3(s) + \frac{K(s)}{k(s)}(-k(s)N_1(s) + (r-K)(s)N_3(s))$$

$$+\dot{H}_1(s)\frac{1}{(r-K)(s)}(-(r-K)(s)N_2(s))$$

$$\frac{1}{\cos\psi}\frac{du}{ds} = 0$$

bulunur. O hâlde u sabittir.

2) u'nun birim olduğunu gösterelim:

$$||u||^2 = h(u,u) = u \times \alpha\, u$$

$$= [\cos\psi\, T(s) + \sum_{i=1}^{3} H_{i-1}(s)\cos\psi\, N_i(s)] \times$$

$$\alpha[\cos\psi\, T(s) + \sum_{i=1}^{3} H_{i-1}(s)\cos\psi\, N_i(s)]$$

$$= [\cos\psi\, T(s) + H_1(s)\cos\psi\, N_2(s) + H_2(s)\cos\psi\, N_3(s)]$$

$$\times\ \alpha[\cos\psi\, T(s) + H_1(s)\cos\psi\, N_2(s) + H_2(s)\cos\psi\, N_3(s)]$$

$$= \cos^2\psi + H_1^2(s)\cos^2\psi + H_2^2(s)\cos^2\psi$$

$$= \cos^2\psi\,(1+\sum_{i=1}^{3} H_i^2(s))$$

$$= \cos^2\psi\,(1+tg^2\psi)$$

$$= 1$$

bulunur. Öyleyse

$$||u|| = 1$$

dir. Diğer taraftan

$$h(T(s),u) = \frac{1}{2}\,(T(s)\times_\alpha u + u\times_\alpha T(s))$$

$$= \frac{1}{2}\,(T(s)\times_\alpha (\cos\psi\, T(s)+\sum_{i=1}^{3} H_{i-1}(s)\cos\psi\, N_i(s))$$

$$+ (\cos\psi\, T(s) + \sum_{i=1}^{3} H_{i-1}(s)\cos\psi\, N_i(s))\times_\alpha T(s)$$

$$= \frac{1}{2}\,(T(s)\times_\alpha (\cos\psi\, T(s)+H_1(s)\cos\psi\, N_2(s)$$

$$+ H_2(s)\cos\psi\, N_3(s))) + (\cos\psi\, T(s)+H_1(s)\cos\psi N_2(s)$$

$$+ H_2(s)\cos\psi\, N_3(s))\times_\alpha T(s)$$

$$= \frac{1}{2}\,(\cos\psi\, ||T(s)||^2 + H_1(s)\cos\psi\, T(s)\times_\alpha N_2(s)$$

$$+H_2(s)\cos\psi\, T(s)\times_\alpha N_3(s) + \cos\psi ||T(s)||^2$$

$$+ H_1(s)\cos\psi N_2(s)\times_\alpha T(s) + H_2(s)\cos\psi N_3(s)\times_\alpha T(s))$$

$$= \frac{1}{2}[2\cos\psi + H_1(s)\cos\psi T(s)\times_\alpha (n_1(s)\times T(s))$$

$$+H_2(s)\cos\psi T(s)\times_\alpha (n_2(s)\times T(s))$$

$$+H_1(s)\cos\psi (n_1(s)\times T(s))\times_\alpha T(s)$$

$$+H_2(s)\cos\psi (n_2(s)\times T(s))\times_\alpha T(s)]$$

$$= \frac{1}{2}\,[2\cos\psi - H_1(s)\cos\psi\, n_1(s) - H_2(s)\cos\psi\, n_2(s)$$

$$+ H_1(s)\cos\psi n_1(s) + H_2(s)\cos\psi n_2(s)]$$

$$h(T(s),u) = \cos\psi = st.$$

bulunur. Bu ise α eğrisinin bir eğilim çizgisi olduğunu verir.

Böylece IR^4 de kuaterniyon eğilim çizgileri için bir karakterizasyon verilmiş olur.

Not: Kuaterniyon eğrileri için elde edilen harmonik eğriliklerin türev denklemleri (III.1.21) ve (III.2.9) ifadeleri ile verilip matrisel ifadesi aşağıdaki şekildedir.

$$\begin{bmatrix} \dot{H}_1 \\ \dot{H}_2 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 0 & (r-K) \\ -(r-K) & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} H_1 \\ H_2 \end{bmatrix}$$

ÖZGEÇMİŞ

04.11.1968 yılında Malatya'da doğdu. İlk ve orta öğrenimini Malatya'da tamamlayarak 1985 yılında İnönü Üniversitesi Fen-Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümü'ne girmeye hak kazandı. 1989 da yüksek öğrenimini tamamladı. İki yıl öğretmen olarak görev yaptıktan sonra 1992 de İnönü Üniversitesi Fen-Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümünde Araştırma Görevlisi olarak işe başladı. Halen bu görevi yürütmekte olup evlidir.

KAYNAKLAR

[1] Hacısalihoğlu, H.H.,Lineer Cebir, D.Ü., Fen Fakültesi Yayınları, Mat. 1, Diyarbakır (1978)

[2]Hacısalihoğlu, H.H., Yüksek Boyutlu uzaylarda Dönüşümler Ve Geometriler, İ.Ü., Temel Bilimler Fakültesi Yayınları, Mat., No= 1,Malatya (1980)

[3]Hacısalihoğlu,H.H.,Diferensiyel Geometri, İ.Ü.,Fen-Edebiyat Fakültesi Yayınları , Mat.No = 2,Malatya (1983)

[4]Hacısalihoğlu,H.H.,Yüksek Diferensiyel Geometriye Giriş, F.Ü., Fen Fakültesi Yayınları, Mat.No=2,Elazığ (1980)

[5]Hacısalihoğlu, H.H.,Hareket Geometrisi Ve Kuaterniyonlar Teorisi G.Ü., Fen-Edebiyat Fakültesi Yayınları, Mat. No=2 ,Ankara (1983)

[6]K.Bharathi and M.Nagaraj, Quaternion Valued function of a real variable Serret-Frenet Formulae , İnd. J. P.App.Math.18(6),507-511 (1987)