İNÖNÜ ÜNİVERSİTESİ
FEN-BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

İZOMANİFOLDLAR VE İZOMANİFOLDLARIN EĞRİLİKLERİ ÜZERİNE

Recep ASLANER

DOKTORA TEZİ
MATEMATİK ANABİLİM DALI

MALATYA
1996

Fen-Bilimleri Enstitüsü Müdürlüğüne

İşbu çalışma jürimiz tarafından Matematik Anabilim Dalında DOKTORA TEZİ olarak kabul edilmiştir.

Başkan: Prof. Dr. Sadık KELEŞ ....

Üye: Doç.Dr. Mahmut ERGÜT ....

Üye: Doç.Dr. A.İhsan SİVRİDAĞ..

ONAY

Yukarıdaki imzaların adı geçen öğretim üyelerine ait olduğunu onaylarım.

29 -11-1996

Prof.Dr. [illegible] YÜKSEL

Enstitü Müdürü

ÖZET

Bu çalışma üç bölümden oluşmaktadır. Birinci bölüm, manifoldlar için temel teşkil eden bazı matematiksel yapıların izotopic liftinglerine ayrılmıştır. İkinci bölümde izomanifoldlara zemin hazırlayan cebirsel ve topolojik kavramların izotopileri verilmiş, reel kartezyen izomanifoldlar üzerinde durulmuştur.

Çalışmanın orijinal kısmını üçüncü bölüm oluşturmaktadır. Bu bölümde D. Loveluck ve H. Rund [4] tarafından, herhangi bir diferensiyellenebilir manifold üzerinde yapılan çalışma temel alınarak orada elde edilen sonuçlar diferensiyellenebilir izomanifoldlar üzerine genişletilmiş ve orijinal sonuçlarla karşılaştırılmıştır. Buna göre bir diferensiyellenebilir izomanifold üzerinde izotensör alanları bileşenleri bazında ele alınarak izodiferensiyelleri, izomutlak diferensiyelleri, izokovaryant türevleri tanımlanmıştır. Bunlardan faydalanarak bir diferensiyellenebilir izomanifold $\hat{M}$ üzerinde izoeğrilik ve izotorsiyon tensör kavramları tanımlanarak özellikleri incelenmiştir. Bu bölümün son paragrafında bir izoriemann metrik tensörü tanımlanarak kısaca Riemann geometrisinin izotopilerinden de bahsedilmiştir.

ABSTRACT

This thesis consists of three chapters. The first chapter contains isotopic generalization of some mathematical structures that are the fundamental notions for manifolds. The second chapter contains isotopies of the algebraic and topologic notions. Also it contains the theory of reel Cartesian manifolds. This is important because each manifold locally behaves like a real Cartesian manifold. The theory of the real Cartesian isomanifolds is studied in the subsections.

The third chapter is the original part of the thesis. In this chapter we gave a generalization of the notions which are studied by D. Loveluck and H. Rund [4] on any differentiable manifold to isomanifolds. We consider the components of an isotensor field instead of it and defined isodifferentials, isoabsolute differentials, and isocovariant derivatives of them. Also we defined the isocurvature and isotorsion tensors by using these and studied the properties of them. The last section of this chapter we defined the isoriemann metric tensor and shortly talk about isotopies of Riemann geometry on a manifold.

TEŞEKKÜR

Bu çalışmanın hazırlanmasında gerekli bütün imkanları sağlayarak bana yardımcı olan, her zaman yakın ilgi ve yardımlarını esirgemeyen çok değerli Hocam Sayın Prof. Dr.Sadık KELEŞ'e ve yaptığımız seminerlerle bana teşvik edip, önerilerini ve eleştirilerini aldığım matematik bölümünün değerli elemanlarına sonsuz teşekkürlerimi sunarım.

İÇİNDEKİLER

0. Giriş

Lie-Teorisinin bir genelleştirilmesi ilk defa 1978 de teorik fizikci R.M.Santilli tarafindan "Lie-İsotopic Theory" olarak ortaya atılmış ve daha sonra bu konuda çalışanlar tarafindan "Lie-Santilli Theory" olarak adlandırılmış ve bu isim ile literatüre girmiştir. " İsotopic" kelimesi Yunanca aynı yer, aynı konfigürasyon anlamına gelen "ισος τοπις " den gelmektedir.

Bu teorinin esas amacı, uygulamada Lie-Teorisinin yetersiz kaldığı bazı fiziksel problemlerin çözümünde orijinal Lie aksiyomlarını koruyarak geleneksel Lie-Teorisini etkili hale getirmektir. Bu teorideki esas düşünce cisim, vektör uzayı, metrik uzay, cebir gibi her bir cebirsel, analitik ve geometrik yapının geleneksel biriminin *izotopik birim* veya *izobirim* adı verilen yeni bir birim $\hat{I}$ ya genelleştirmektir. Bu genelleştirmenin bir izotopi olması için esas birim I nın orijinal topolojik özelliklerinin korunması gerekir. Elde edilen bu yeni matematiksel yapı eskisini bir özel hal olarak ihtiva eder.

Eski birim I nın yerine yeni birim $\hat{I}$ nın alınmasına " *izotopic lifting* " denir. Genelleştirilmiş formülasyon sonucu elde edilen yapılara genel olarak *izotopiler* denir. İzotopilerin esas düşüncesi göz önüne alınan teorinin aksiyomlarını ve geometrik özelliklerini ifade etmek ve onları mümkün olduğunca daha genel non-lineer, non-local ve non-canonical yoldan gerçekleştirmektir. Geleneksel Lie-Teori hem fiziksel hem de matematiksel literatürde enbasit anlamda birim I=*diag(1,1, ... ,1)* ve enbasit çarpma AB-BA ile geliştirilmiştir, burada AB vektör alanları veya matris çarpımıdır. Prof. Santilli daha genel birim $\hat{I}$ ve $A*B-B*A$ çarpımını kullanmıştır. $A*B$ çarpımı birleşimli ve genel olarak $A*B = ATB$ şeklinde tanımlanmıştır, burada T belirlenmiş, non-singülar ve $T^{-1} = \hat{I}$ dır. Bu şekilde tanımlnan T ye *izotopik eleman* denir.

En genel anlamda izobirim $\hat{I}$, lokal koordinatlara ve onların bağımsız bir t değişkenine göre keyfi dereceden türevlerine bağlı, non-lineer, non-lokal olarak

$$\hat{I} = \hat{I}(t, x, \dot{x}, \ddot{x}, \dots) \qquad \dot{x} = \frac{dx}{dt}, \ \dots$$

şeklinde seçilebilir.

I.BÖLÜM

BAZI CEBİRSEL YAPILARIN İZOTOPİLERİ

Bu bölümde bazı cebirsel yapıların izotopileri üzerinde duracağız. İşe en basit ve en temel cebirsel yapı olan grup kavramından başlayalım.

I.1 İzogruplar

(G,o), birim elemanı e olan bir grup ve e nin izotopik liftingi de $\hat{\mathrm{I}}$ ($\hat{\mathrm{I}}$, G ye ait olmak zorunda değildir) olsun.

$$\hat{G} = G\hat{\mathrm{I}} = \{\hat{\alpha} = \alpha\hat{\mathrm{I}},\ \alpha \in G\}$$

olmak üzere $\hat{G}$ cümlesinde bir iç-işlemi $\forall \hat{\alpha}, \hat{\beta} \in \hat{G}$ için

$$\hat{\alpha} * \hat{\beta} = \hat{\alpha}\,\mathrm{T}\hat{\beta}, \qquad \mathrm{T} = \hat{\mathrm{I}}^{-1},$$

şeklinde tanımlayalım, öyleki $(\hat{G}, *)$-ikilisi birim elemanı $\hat{\mathrm{I}}$ olan bir grup oluştursun.

I.1.1 Tanım *(İzogrup):* Yukarıdaki şekilde elde edilen $(\hat{G}, *)$ grubuna *(G,o)*, grubunun izotopik liftingi anlamında *izogrup* denir.

Burada izotopik eleman T keyfi olduğundan G için sonsuz sayıda izotopi bulmak mümkündür. Dolayısıyla belirlenmiş bir T için elde edilen izogruba T-*izogrup* diyeceyiz.

I.2.1 Örnek: $IR^* = IR \setminus \{0\}$ cümlesini göz önüne alalım. Bu cümle, üzerinde tanımlanan adi çarpma işlemine göre bir gruptur. İzobirim olarak imajiner birim i yi seçelim (açık olarak $i \notin IR^*$) ve

$$I\hat{R} = \{\hat{\alpha}\ /\ \hat{\alpha} = \alpha\hat{\mathrm{I}} = \alpha\, i,\ \ \alpha \in IR^*\}$$

cümlesini oluşturalım, bu cümle üzerinde $*$ izoçarpım işlemi, $\hat{\alpha}, \hat{\beta} \in I\hat{R}$ olmak üzere;

$$\hat{\alpha} * \hat{\beta} = (\alpha\,\hat{\mathrm{I}})\mathrm{T}(\beta\,\hat{\mathrm{I}}) = (\alpha\, i)(-i)(\beta\, i) = \alpha\beta\, i = \alpha\beta\,\hat{\mathrm{I}} = \widehat{\alpha\beta}$$

ile tanımlasın. Kolayca gösterilebilir ki bu cümle, üzerinde tanımlnan yeni çarpma işlemi ile birlikte bir gruptur. Bu grubun birim elemanı $\hat{\mathrm{I}} = i$ dir ve $(I\hat{R}, *)$ şeklinde gösterilir.

I.2 İzohalkalar

$(R,\nabla,\circ)$, $\circ$ işlemine göre birim elemanı θ olan bir halka ve θ nın izotopik liftingi $\hat{\mathrm{I}}$ olsun.

$$\hat{R} = R\hat{\mathrm{I}} = \left\{\hat{\alpha} \,/\, \hat{\alpha} = \alpha\hat{\mathrm{I}},\ \ \alpha \in R\right\}$$

olmak üzere $\hat{R}$ cümlesinde bir $\hat{\nabla}$ iç-işlemi, R deki ∇ işlemi yardımıyla

$$\hat{\alpha}\,\hat{\nabla}\hat{\beta} = (\alpha\,\nabla\beta)\hat{\mathrm{I}}\ \ ;\ \ \hat{\alpha},\hat{\beta} \in \hat{R},$$

olarak tanımlanır. Kolayca gösterilebilir ki $(R,\hat{\nabla})$-ikilisi bir abel grubudur. Bundan sonra $\hat{\nabla}$ yerine R deki ∇ notasyonunu kullanacağız.

Ayrıca $\hat{R}$ cümlesinde ikinci bir iç-işlemi:

$$*: \hat{R}\times\hat{R} \to \hat{R}$$
$$(\hat{\alpha},\hat{\beta}) \to \hat{\alpha}*\hat{\beta} = \hat{\alpha}\,\mathrm{T}\hat{\beta},\qquad \mathrm{T} = \hat{\mathrm{I}}^{-1}$$

olarak tanımlayalım, öyle ki $(\hat{R},\nabla,*)$-üçlüsü $(*)$ işlemine göre birim elemanı $\hat{\mathrm{I}}$ olan bir halka oluştursun.

I.2.1 Tanım *(İzohalka):* Yukarıdaki şekilde elde edilen $(\hat{R},\nabla,*)$ halkasına $(R,\nabla,\circ)$ halkasının izotopik liftingi anlamında *izohalka* denir.

I.2.2 Örnek: *IR*, reel sayılar cümlesinin adi toplama (+) ve adi çarpma (.) işlemleri ile oluşturduğu reel sayılar halkası $(IR,+,\cdot)$ olsun. İzobirim olarak

$$\hat{\mathrm{I}} = \begin{bmatrix} \alpha & \beta \\ \beta & -\alpha \end{bmatrix},\quad \alpha,\beta \in IR \text{ alalım. Bu durumda}$$

$$I\hat{R} = \left\{\hat{x} \,/\, \hat{x} = x\hat{\mathrm{I}},\quad x \in IR\right\}$$

cümlesi matris toplamı işlemi ile bir abel grubu oluşturur. $I\hat{R}$ üzerinde bir ikinci iç-işlemi (izoçarpım) $\hat{x},\hat{y} \in I\hat{R}$ olmak üzere;

$$\hat{x}*\hat{y} = \hat{x}\mathrm{T}\hat{y},\qquad \mathrm{T} = \hat{\mathrm{I}}^{-1}$$

olarak tanımlayalım. Kolayca gösterilebilir ki $(*)$ işlemi $\forall\hat{x},\hat{y},\hat{z} \in I\hat{R}$ için

a. $(\hat{x}*\hat{y})*\hat{z} = \hat{x}*(\hat{y}*\hat{z})$,

b. $\quad (\hat{x}+\hat{y})*\hat{z}=\hat{x}*\hat{z}+\hat{y}*\hat{z}, \quad \hat{x}*(\hat{y}+\hat{z})=\hat{x}*\hat{y}+\hat{x}*\hat{z},$

c. $\quad \hat{x}*\hat{y}=\hat{y}*\hat{x}\ ,$ $\qquad$ (2.1)

d. $\quad \hat{x}*\hat{\mathrm{I}}=\hat{\mathrm{I}}*\hat{x}=\hat{x},$

aksiyomlarını sağlar. Dolayısıyla $(I\hat{R},+,*)$-üçlüsü birimi $\hat{\mathrm{I}}$ olan bir değişimli halkadır, yani $(IR,+,\cdot)$ halkasının sonsuz izotopilerinden birisidir.

I.3 İzocisimler

I.3.1 Tanım *(İzocisim):* $(F,+,\cdot)$ sırasıyla, toplama ve çarpmaya göre birim elemanları 0 ve 1 olan bir cisim olsun. Halkaya benzer olarak F cisminin çarpma işlemine göre bir izotopisi $\hat{F}$, yeni bir çarpma işlemi $\hat{\alpha}*\hat{\beta}$ ve bir yeni çarpım birimi $\hat{\mathrm{I}}$ yardımıyla tanımlanır. Öyleki $(\hat{F},+,*,)$-üçlüsü bir cisimdir.

I.3.2 Örnek: $(IR,+,\cdot)$ reel cisim ve $1\Rightarrow\hat{\mathrm{I}}=1\otimes i$ olsun. Bu durumda

$$I\hat{R}=IR\hat{\mathrm{I}}=IR1\otimes IR\,i$$

olup, $I\hat{R}$ cümlesi üzerinde tanımlanan toplama;

$$\left.\begin{array}{l}\hat{\alpha}=\alpha\,(1\otimes i)\\ \hat{\beta}=\beta\,(1\otimes i)\end{array}\right\} \quad +(\hat{\alpha},\hat{\beta})\ \rightarrow\ \hat{\alpha}+\hat{\beta}=(\alpha+\beta)(1\otimes i)$$

işlemiyle bir abel grubudur.

Ayrıca $I\hat{R}$ cümlesinde bir izoçarpım

$$*(\hat{\alpha},\hat{\beta})\ \rightarrow\ \hat{\alpha}*\hat{\beta}=\alpha\ \beta\,(1\otimes i)$$

ile tanımlanırsa $(I\hat{R},+,*)$ bir cisim olur.

$\forall c\in C$, kompleks sayısı için

$$c=\alpha+\beta\ i=\alpha\ \beta\big((1\otimes i)\big)=\hat{\alpha}*\hat{\beta}\ \in I\hat{R}$$

ve tersine $\hat{\gamma}\in I\hat{R}$ için

$$\hat{\gamma}=\hat{\alpha}*\hat{\beta}=\alpha\ \beta\,(1\otimes i)=\alpha+\beta\ i=c\ \in C$$

olduğundan $I\hat{R}=C$ elde edilir. Yani C kompleks sayılar cismi $(IR,+,\cdot)$ cisminin bir izotopisidir.

Buradan aşağıdaki sonucu ifade edebiliriz.

I.3.3 Sonuç: *IR* reel sayılar cisminin izotopileri $I\hat{R}$ ların bir cümlesi, karakteristiği sıfır olan bütün cisimleri ihtiva eder. Diğer bir ifadeyle karakteristiği sıfır olan bütün cisimlere *IR* reel sayılar cisminin bir izotopisi olarak bakılabilir.

Buna göre $I\hat{R}$ temel izocisimler sembolik olarak;

$$I\hat{R}_{\mathrm{T}} = \left\{ \hat{x} / \hat{x} = x\hat{\mathrm{I}}, \quad x \in IR, \quad \mathrm{T} = \hat{\mathrm{I}}^{-1} \right\}$$

ile gösterilir ve elemanlarına *izosayılar* denir. Tanım I.3.1 den kolayca görüle-bileceği gibi iki izosayının toplamı geleneksel toplam, yani

$$\hat{x}_1 + \hat{x}_2 = \left(x_1 + x_2 \right)\hat{\mathrm{I}}$$

ile tanımlanırken, iki izosayının izoçarpımı

$$\hat{x}_1 * \hat{x}_2 = \hat{x}_1 \mathrm{T} \hat{x}_2 \quad , \quad \mathrm{T} = \hat{\mathrm{I}}^{-1}$$

olarak tanımlanır. Buradan

$$\hat{\mathrm{I}} * \hat{x} = \hat{x} * \hat{\mathrm{I}} = \hat{x}; \quad \forall \hat{x} \in I\hat{R},$$

olduğu görülür ki bu da $\hat{\mathrm{I}}$ nın birim elmanı olması için istenen bir sonuçtur.

IR cisminden $I\hat{R}$ izocismine geçişde aşağıdaki noktalara dikkat etmeliyiz:

1. $I\hat{R}$ bir cisim olduğundan isotopic liftinge aksiyom koruyan bir dönüşüm, yani bir homomorfizma gibi bakılabilir. Buna göre,

$$\begin{aligned}
(R,+,.) &\xrightarrow{\theta} (\hat{R},+,*) \\
1 &\longrightarrow \theta(1) = \hat{\mathrm{I}}, \quad \hat{\mathrm{I}} = \mathrm{T}^{-1} \\
\alpha &\longrightarrow \theta(\alpha) = \hat{\alpha} = \alpha\,\hat{\mathrm{I}} \\
\alpha + \beta &\longrightarrow \theta(\alpha+\beta) = (\alpha+\beta)\hat{\mathrm{I}} = \alpha\,\hat{\mathrm{I}} + \beta\,\hat{\mathrm{I}} \\
&\qquad\qquad = \hat{\alpha} + \hat{\beta} = \theta(\alpha) + \theta(\beta) \\
\alpha\,\beta &\longrightarrow \theta(\alpha\,\beta) = (\alpha\,\beta)\hat{\mathrm{I}} = \alpha\,\hat{\mathrm{I}}\mathrm{T}\beta\,\hat{\mathrm{I}} \\
&\qquad\qquad = \hat{\alpha} * \hat{\beta} = \theta(\alpha) * \theta(\beta)
\end{aligned}$$

$\Rightarrow \theta$ bir homomorfizma dır.

2. Burada orijinal cisim IR nin yalnızca ikinci işlemi (çarpma) ele alınmış ve çarpımsal birim 1 in bir isotopic lifting'i yapılmıştır, yani

$$\cdot \Rightarrow * = \cdot T \cdot, \quad 1 \Rightarrow \hat{I} = T^{-1}.$$

IR deki toplama işleminin de

$$+ \Rightarrow \hat{+} = +\hat{K}+, \quad 0 \Rightarrow \hat{0} = -K\hat{I}, \qquad K \rangle 0 \in IR$$

şeklinde bir isotopic lifting'i alınabilir. Fakat bu durumda $(*)$ işlemi $(\hat{+})$ işlemi üzerine dağılma özelliğini sağlamadığından dolayı uygulamada pek rağbet görmemiştir. Onun için yalnızca çarpmaya göre izotopiler üzerinde durulmaktadır.

3. $IR \Rightarrow I\hat{R}$ izotopic lifting'i altında çarpma işlemiyle ilgili bütün kavramlar yeniden tanımlanmalıdır. Örneğin; bir izosayının izoinversi $\hat{x}^{-\hat{I}} = x^{-1}\hat{I}$ ile tanımlanır.

4. Bir Q niceliğinin bir $\hat{x}$ izosayısı ile izoçarpımı

$$\hat{x} * Q = \left(x T^{-1}\right) T Q = x Q \tag{3.1}$$

dır, yani Q nun x reel sayısı ile genel çarpımını verir.

I.4 İzovektör Uzaylar

$(V,+)$, $\alpha, \beta, \gamma, \cdots$ elemanlarının değişimli bir IF cismi üzerinde $x,y,z,...$ elemanlarının bir abel grubu olsun. V cümlesinde

$$\cdot : IF \times V \to V$$

$$(\alpha, x) \to \alpha \cdot x = \alpha x$$

ile tanımlanan $(\cdot)$ işlemi, $\forall \alpha, \beta \in IF$ ve $\forall x, y \in V$ için

a. $\alpha(\beta x) = (\alpha \beta) x,$

b. $\alpha(x + y) = \alpha x + \alpha y,$ (4.1)

c. $(\alpha + \beta) x = \alpha x + \beta x$

d. $1x = x$, burada 1, IF cisminin çarpmaya göre birim elemanıdır,

özelliklerini sağlasın.

I.4.1 Tanım *(Vektör Uzayı): $(V,+)$* abel grubunun yukarıda tanımlanan $(\cdot)$ işlemi ile oluşturduğu cebirsel yapıya IF cismi üzerinde tanımlanan bir ***vektör uzayı*** denir ve $(V,+,IF,\cdot)$ veya kısaca V ile gösterilir.

Yuarıdaki tanımdan görüldüğü gibi V vektör uzayının ikinci işlem $(\cdot)$ ya göre birim elemanı V nin üzerinde tanımlandığı IF cisminin birim elemanıdır. Ohalde IF cisminin bir izotopisi verilmeden V uzayının bir izouzayından bahsedemeyiz. Buna göre bir izovektör uzayını aşağıdaki şekilde tanımlayabiliriz.

I.4.2 Tanım *(İzovektör Uzayı):* V bir IF cismi üzerinde tanımlanan bir vektör uzayı ve $I\hat{F}$ da IF cisminin bir izotopisi olsun. V nin $I\hat{F}$ izocismi üzerinde tanımladığı vektör uzayına ***izovektör uzayı*** denir ve $\hat{V}$ ile gösterilir.

Buna göre bir IF cismi üzerinde tanımlanan bir V vektör uzayının bir izouzayı, IF cisminin bir izotopisi $I\hat{F}$ olmak üzere;

$$\hat{\cdot}: I\hat{F}\times V \to V$$
$$(\hat{\alpha},x) \to \hat{\alpha}\,\hat{\cdot}\,x=\hat{\alpha}\,x$$

işlemi (3.1) yardımıyla

$$\hat{\alpha}\,x=\hat{\alpha}*x=\alpha\,x$$

ile tanımlanır, öyle ki bu işlem $\forall\hat{\alpha},\hat{\beta}\in I\hat{F}$ ve $\forall x,y\in V$ için

a. $\hat{\alpha}(\hat{\beta}\,x)=(\hat{\alpha}*\hat{\beta})x,$

b. $\hat{\alpha}(x+y)=\hat{\alpha}\,x+\hat{\alpha}\,y,$ (4.2)

c. $(\hat{\alpha}+\hat{\beta})x=\hat{\alpha}\,x+\hat{\beta}\,x,$

d. $\hat{1}x=x$, burada $\hat{1}$, $I\hat{F}$ nın izobirim elemanıdır,

özelliklerini sağlar. Buna göre bir izovektör uzayı da $I\hat{F}$ izocismi üzerinde bir vektör uzayı olup $(V,+,I\hat{F},\hat{\cdot})$ veya kısaca $\hat{V}$ ile gösterilir. Burada $\hat{V}$ cümle olarak V ile aynı cümle olup üzerindeki "^" işaretini yalnızca bu uzayın $I\hat{F}$ izocismi üzerinde tanımlandığını belirtmek amacıyla kullanıyoruz.

I.4.3 Örnek: $V=\left\{v \,/\, v=\begin{bmatrix} x & y \\ z & t \end{bmatrix},\ x,y,z,t \in IR\right\}$ olsun. Bilindiği gibi V cümlesi matris toplamı ve bir matrisin bir skalarla çarpımı işlemleri ile IR reel sayılar cismi üzerinde 4-boyutlu bir vektör uzayıdır. IR nin, izobirimi $\hat{\mathrm{I}}=\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -x \end{bmatrix}$ olan bir izotopisi

$$\hat{IR}=\left\{\hat{\alpha} \,/\, \hat{\alpha}=\alpha\hat{\mathrm{I}}=\alpha\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -x \end{bmatrix},\quad \alpha, x \in IR\right\}$$

olsun. V cümlesinde,

$$\begin{aligned} \hat{\cdot}: \hat{IR}\times V &\to V \\ (\hat{\alpha},v) &\to \hat{\alpha}\,\hat{\cdot}\,v=\hat{\alpha}*v \end{aligned}$$

ile tanımlanan dış-işlemin aşağıdaki aksiyomları sağladığı kolayca gösterilebilir. $\forall \hat{\alpha},\hat{\beta} \in \hat{IR}$ ve $v_1, v_2 \in V$ için

a. $\hat{\alpha}*(\hat{\beta}*v)=(\hat{\alpha}*\hat{\beta})*v$,

b. $\hat{\alpha}*(v_1+v_2)=\hat{\alpha}*v_1+\hat{\alpha}*v_2$,

c. $(\hat{\alpha}+\hat{\beta})*v=\hat{\alpha}*v+\hat{\beta}*v$,

d. $\hat{\mathrm{I}}*v=v*\hat{\mathrm{I}}=v$.

Ohalde $\hat{V}=(V,+,\hat{IR},\hat{\cdot})$, $\hat{IR}$ izocismi üzerinde bir vektör uzayıdır.

Buradan aşağıdaki sonucu ifade edebiliriz.

I.4.4 Sonuç: Bir IF cisminden onun izotopisi olan $\hat{IF}$ ya geçmek o cisim üzerinde tanımlanan uzayın elemanlarını değiştirmez. Dolayısıyla V vektör uzayının bir bazı aynı zamanda $\hat{V}$ izouzayının da bir bazıdır [2].

I.5 İzolineer Dönüşümler

I.5.1 Tanım*(Lineer Dönüşüm):* V ve V' aynı bir IF cismi üzerinde tanımlanan iki vektör uzayı (aynı boyuttan olmak zorunluluğu yoktur) olsunlar. Bir $f: V \to V'$

dönüşümü için aşağıdaki aksiyomlar sağlanıyor ise, f dönüşümüne V den V' ye bir *lineer dönüşüm* denir. $\forall \alpha, \beta \in IF$ ve $\forall x, y \in V$ için;

$$\left.\begin{array}{r} f(x+y)=f(x)+f(y) \\ f(\alpha\, x)=\alpha\, f(x) \end{array}\right\} \Leftrightarrow f(\alpha\, x+\beta\, y)=\alpha\, f(x)+\beta\, f(y) \qquad (5.1)$$

dir.

$V=V'$ olması durumunda f dönüşümüne V üzerinde bir *operatör* denir.

Buna paralel olarak bir izolineer dönüşüm de aşağıdaki şekilde tanımlanır.

I.5.2 Tanım *(İzolineer Dönüşüm):* $\hat{V}$ ve $\hat{V}'$ aynı bir $I\hat{F}$ izocismi üzerinde tanımlanan aynı boyuttan iki izovektör uzayı olsun. Bir izolineer dönüşüm bir $\hat{f}:\hat{V} \to \hat{V}'$ dönüşümüdür, öyle ki $\forall \hat{\alpha}, \hat{\beta} \in I\hat{F}$ ve $\forall x, y \in \hat{V}$ için

$$\left.\begin{array}{r} \hat{f}(x+y)=\hat{f}(x)+\hat{f}(y) \\ \hat{f}(\hat{\alpha} \hat{\times} x)=\hat{\alpha} * \hat{f}(x) \end{array}\right\} \Leftrightarrow \hat{f}(\hat{\alpha} \hat{\times} x+\hat{\beta} \hat{\times} y)=\hat{\alpha} * \hat{f}(x)+\hat{\beta} * \hat{f}(y) \qquad (5.2)$$

dir.

Eğer dikkat edilirse bir lineer dönüşüm aynı cisim üzerinde tanımlanan herhangi iki lineer uzay arasında tanımlanırken bir izolineer dönüşümü tanımlamak için bu iki uzayın aynı boyuttan olma şartı getirilmiştir. Bu da izotopik eleman T nin invertible olmasından kaynaklanmaktadır.

Fiziksel uygulamalarda genellikle $V=V'$ kabul edilir, bu durumda f dönüşümü bir endomorfizmdir ve genellikle $x \in V, x' \in V'$ olmak üzere;

$$x' = f(x) = Ax \qquad (5.3)$$

şeklinde sağ-modular, birleşimli bir işlemle ifade edilir, burada A lokal koordinatlardan bağımsızdır.

$$\bar{x} = A(x)x \qquad (5.4)$$

formunda verilen, yani açık olarak lokal koordinatlara bağlı olan bir dönüşüme de *nonlineer dönüşüm* denir. Eğer A nın x e bağımlılığı integral-tipinde bir bağımlılık ise, yani A, x in verilen bir bölge üzerinde integrallenebilir fonksiyonu ise, A nın temsil ettiği f dönüşümüne *nonlokal dönüşüm* denir.

Şimdi $\hat{V}=\hat{V}'$ kabul edelim. Bu taktirde $\hat{V}$ üzerinde bir izolineer döşüm $\hat{f}$ sağ-modular izotopik hareket olarak;

$$\bar{x} = A * x = A\mathrm{T}(t, x, \dot{x}, \ddot{x}, \ldots)x \qquad (\text{ T-sabit }) \tag{5.5}$$

ile karakterize edilebilir, burada $A * x$ çarpımı da birleşimlidir. Burada izotopik eleman T lokal koordinatlara bağlı olduğundan A'nın temsil ettiği dönüşüm orijinal uzay V üzerinde genellikle nonlineer bir dönüşümdür.

Böylece aşağıdaki sonucu ifade edebiliriz.

I.5.3 Sonuç: Bir f lineer dönüşümü bir A matrisi ile ifade edilirken bir $\hat{f}$ izolineer dönüşümü de $A\mathrm{T}$ çarpım matrisi ile ifade edilir, burada $\mathrm{T} = \hat{\mathrm{I}}^{-1}$ dir.

I.5.4 Tanım: (5.5) eştliği ile tanımlanan dönüşümde A matrisi lineer/lokal ise, A nın temsil ettiği $\hat{f}$ dönüşümüne *izolineer/izolokal*dır denir.

I.5.5 Sonuç: Yeterli topolojik şartlar altında bir lineer V uzayı üzerindeki nonlineer dönüşümler, bir izolineer $\hat{V}$ uzayı üzerinde bir izolineer forma eşdeğer yapılabilir. Diğer bir ifadeyle bir V vektör uzayı üzerinde lineerlik/lokallik şartlrını sağlamayan bir f dönüşümü verildiğinde V nin daima bir $\hat{V}$ izouzayı bulunabilir öyle ki f, $\hat{V}$ üerinde izolineer/izolokal dir.

Bir V vektör uzayı üzerinde bir nonlineer dönüşüm daima, (5.4) den,

$$\bar{x} = A(x)x = B\mathrm{T}(x)x = B * x \tag{5.6}$$

formunda ifade edilebilir, yani $A = B\mathrm{T}$ öyleki B lineer dolayısıyla f izolineerdir.

I.5.6 Örnek: Örnek 4.3 de tanımlanan V vektör uzayı üzerinde bir f dönüşümü

$$f : V \to V, \quad v \to f(v) = Av, \qquad A = \begin{bmatrix} x+2 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

ile tanımlansın. Açık olarak A matrisi lokal koordinatlara bağlı olduğundan temsil ettiği f dönüşümü V uzayı üzerinde bir nonlineer dönüşümdür. Fakat f dönüşümünü $\hat{V}$ izouzayı üzerinde ele alırsak

$$A = \begin{bmatrix} x+2 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = B\mathrm{T}$$

olduğundan $f(v) = B\mathrm{T}v = B * v$ yazılabilir. Burada B lineer olduğundan f izolineerdir.

I.6 İzomodüller

Bilindiği gibi vektör uzay kavramını cisim yerine daha genel bir cebirsel yapı olan halka üzerinde düşünmek istediğimiz zaman benzer özelliklere sahip olan ve modül denen yeni bir kavramı tanımlarız.

Vektör uzayı tanımında, $I\!F$ cismi yerine birimli ve değişimli bir R halkası alınır ve tanım kelime kelime tekrar ederek modül kavramı tarif edilir. Biz doğrudan izomodül kavramına geçelim.

I.6.1 Tanım: *(İzomodül): M bir R-modül* ve $\hat{R}$ da R nin izohalkası olsun. Bir $\hat{R}$-modül olan $\hat{M}$ (ki o M ile aynı cümleyi ifade eder) R-modül için gerekli olan (4.2 a-d) aksiyomlarını sağlayan yeni bir dış-işlem ile tanımlanır.

I.7 İzouzaylar

Metrik uzay, Banach uzay ve iç-çarpım uzayı gibi diğer önemli matematiksel yapıların izotopilerini oluşturmak için öncelikle izobilineer formları tanımlayacağız.

I.7.1 Tanım *(Bilineer form): V* bir $I\!F$ cismi üzerinde bir lineer uzay olsun. Eğer

$$f : V \times V \to I\!F$$

dönüşümü $\forall x, y, z \in V$ ve $\forall \alpha, \beta \in I\!F$ için;

$$\begin{aligned} &\text{a. } f(x+y,z) = f(x,z) + f(y,z), \\ &\text{b. } f(x,y+z) = f(x,y) + f(x,z), \\ &\text{c. } f(\alpha\, x,y) = \alpha\, f(x,y), \\ &\text{d. } f(x,\beta\, y) = \bar{\beta}\, f(x,y), \end{aligned} \tag{7.1}$$

özelliklerini sağlıyor ise, yani f dönüşümü birinci değişkene göre lineer ve ikinci değişkene göre konjuge lineer ise, f dönüşümüne *sesquilineer form* (veya *sesqui-lineer fonksiyonel*) denir. Eğer $I\!F = I\!R$ ise (7.1-d) için

$$\text{d}'.\ f(x,\beta\, y) = \beta\, f(x,y)$$

elde edilir ve f dönüşümüne *bilineer form* denir. Eğer f bilineer formu $\forall x, y \in V$ için

e. $f(x,y) = f(y,x)$

özelliğini sağlıyor ise f ye *simetrik*tir denir. Bir simetrik bilineer form f her $x \neq 0 \in V$ için

f. $f(x,x) \rangle 0$

özelliğini de sağlıyor ise f ye *pozitif-tanımlı*dır denir. Bir simetrik, pozitif tanımlı bilineer forma V üzerinde bir *iç-çarpım* denir ve genellikle <.,.> ile gösterilir. Üzerinde bir iç-çarpım tanımlı bir V uzayına da bir *iç-çarpım uzayı* denir.

Buna göre bir izoiç-çarpım uzayıda aşağıdaki şekilde tanımlanır.

I.7.2 Tanım *(izoiç-çarpım uzayı):* V bir IF cismi üzerinde bir vektör uzayı ve $I\hat{F}$ da IF nin bir izotopisi olsun. Bir *izoiç-çarpım fonksiyonu*

$$\langle . ; . \rangle : \hat{V} \times \hat{V} \rightarrow I\hat{F}$$
$$(x,y) \rightarrow \langle x ; y \rangle = \langle x, \mathrm{T}y \rangle \hat{\mathrm{I}} = \langle \mathrm{T}x, y \rangle \hat{\mathrm{I}}$$

ile tanımlanan ve $\forall x, y, z \in \hat{V}$ ve $\forall \hat{\alpha}, \hat{\beta} \in I\hat{F}$ için,

a. $\langle x ; x \rangle \geq 0$ *ve* $\langle x ; x \rangle = 0 \Leftrightarrow x = 0$,

b. $\langle x ; y \rangle = \overline{\langle y ; x \rangle}$, (7.2)

c. $\langle \hat{\alpha}\, x + \hat{\beta}\, y ; z \rangle = \hat{\alpha} * \langle x ; z \rangle + \hat{\beta} * \langle y ; z \rangle$,

aksiyomlarını sağlayan bir dönüşümdür. Üzerinde bir izoiç-çarpım tanımlı izovektör uzayına da bir *izoiç-çarpım uzayı* denir.

Şimdi genel anlamda metrik uzay kavramını tekrar ele alalım.

I.7.3 Tanım *(Metrik uzay):* M boş olmayan bir cümle ve d de

$$d : M \times M \rightarrow IR^{+}$$

aşağıdaki aksiyomları sağlayan bir fonksiyon ise d fonksiyonuna M üzerinde bir *metrik* ve *(M,d)*-ikilisine de bir *metrik uzay* denir. Bu aksiyomlar $\forall x, y, z \in M$ için;

a. $d(x,y) \geq 0$ ve $d(x,y) = 0 \Leftrightarrow x = y$,

b. $d(x,y) = d(y,x)$, (7.3)

c. $d(x,z) \leq d(x,y) + d(y,z)$.

Eğer a. aksiyomu

a'. $d(x,y) \geq 0$ ve $d(x,x) = 0$

aksiyomu ile yerdeğiştirirse d fonksiyonuna *yarı-metrik* (*pseudo-metrik*), M metrik uzayına da *yarı-metrik uzay* denir.

Biz bu çalışmada metrik uzay kavramıyla bir IF cismi üzerinde tanımlı bir n-boyutlu vektör uzayı M ve bir

$$g: M \times M \to IF$$
$$(x,y) \to g(x,y)$$

nonsingular, sesquilineer ve Hermitiyen dönüşümü kastedeceğiz.

$\{v_i\}$,$i = 1,2, \ldots n$, M nin bir bazı olmak üzere g dönüşümü bir bilineer form kabul edilir, genellikle n^2-sabit

$$g_{ij} = g(v_i, v_j), \qquad g = (g_{ij}) \qquad i,j=1,2, \ldots ,n$$

ile tanımlanır ve *metrik tensör* denir. Buna göre $x = x^i v_i$, $y = y^j v_j$, $i,j=1,2, \ldots ,n$ olmak üzere

$$g(x,y) = g(x^i v_i, y^j v_j) = x^i y^j g(v_i, v_j) = x^i g_{ij} y^j, \qquad i,j=1,2, \ldots ,n,$$

dir.

Uygulamada ençok kullanılan metrik uzay örneği $E^n(x,\delta,IR)$ sembolü ile gösterilen n-boyutlu Öklid uzayıdır. E^n öklid uzayı, $x = (x^i)$ lokal koordinatları ile bir vektör uzayı olup δ metrik tensörü, yani $\delta = (\delta_{ij}) = diag(1,1,\ldots 1)$ kroneker deltanın matrisi olmak üzere;

$$\delta(x,y) = x^i \delta_{ij} y^j \ , \qquad \delta(x,x) = \|x\|^2,$$

ile tanımlanır.

Yarı metrik uzay olarak da $M(\bar{x},\eta,IR)$ sembolü ile gösterilen (3+1)-boyutlu Minkowski uzayı verilmektedir. Burada

$\bar{x} = (x^\mu) = (x,x^4)$, $x = (x^i) \in E^3(x,\delta,IR)$, $x^4 = c_o t$, $c_o \in IR$ boşlukdaki ışık hızını ifade eder ve η metriği

$$\eta = diag(1,1,1,-1)$$

ile tanımlıdır.

Ayrıca fizikte $R(x,g,IR)$ sembolü ile gösterilen Rieamann uzayının da önemli uygulama alanları vardır.

Bir genel $M(x,g,IR)$ metrik uzayının $\hat{M}(x,\hat{g},I\hat{R})$ izotopileri ilk defa 1983 de Santilli tarafindan oluşturulmuştur. Bunların da yine fiziksel uygulamalarda giderek önemi artmaktadır.

Bir $M(x,g,IR)$ metrik uzayında g dönüşümünün nonsingular olması daima bir g^{-1} inversinin varlığını garanti eder. Santilli izobirim olarak $\hat{\mathrm{I}} = g^{-1}$ alarak izometrik uzayları tanımlamıştır. Buna göre bir izometrik uzay $\hat{M}(x,\hat{g},I\hat{R})$, $I\hat{R} = IR\,\hat{\mathrm{I}}$,

$$\hat{g}: M \times M \to I\hat{R}, \quad (x,y) \to \hat{g}(x,y) = (x^i \hat{g}_{ij} y^j)\hat{\mathrm{I}}, \qquad \hat{g}_{ij} = \mathrm{T}_i{}^k g_{kj}$$

ile tanımlanır ve $\hat{g}$ ya *izometrik tensör* denir.

Böylece verilen bir $M(x,g,IR)$ metrik veya yarı-metrik uzayın isotopic lifting'ini aşağıdaki gibi ifade edebiliriz.

I.7.4 Önerme: Verilen bir n-boyutlu metrik veya yarı-metrik uzay $M(x,g,IR)$ nin izotopic lifting'i $\hat{M}(x,\hat{g},I\hat{R})$ izotopileri aşağıdaki şekilde karakterize edilir.

a. Orijinal cisim IR, sonsuz sayıda izotopilerinden birisi olan $I\hat{R}_{\mathrm{T}}$ ye lift edilir, burada T izobirim $\hat{\mathrm{I}}$ nın inversini gösterir, yani

$$\hat{\mathrm{I}} = \mathrm{T}^{-1} = g^{-1}, \qquad I\hat{R}_{\mathrm{T}} = IR\hat{\mathrm{I}}.$$

b. Orijinal metrik g, izotopik eleman T ye karşılık gelen izotopisi $\hat{g}_{\mathrm{T}} = \mathrm{T}g$ izometrik tesörüne lift edilir.

Buna göre $\hat{M}(x,\hat{g},I\hat{R})$ izouzaylar orijinal uzay $M(x,g,IR)$ ile aynı lokal koordinatlara ve aynı boyutta sahip bir metrik uzaydır.

Buradan aşağıdaki sonuçları ifade edebiliriz:

1. IR reel sayılar cismi üzerinde tanımlanan (3+1)-boyutlu Minkowski uzayı $M(\bar{x},\eta,IR)$ ye

$$\eta = \mathrm{T}\delta, \quad \delta = \mathrm{I}_4 \qquad ve \quad \hat{\mathrm{I}} = \mathrm{T}^{-1} = \eta^{-1} = \eta$$

konumu ile 4-boyutlu Öklid uzay $E^4(x,\delta,IR)$ ün bir isotopic lifting'i olarak bakabiliriz.

2. IR reel sayılar cismi üzerinde tanımlanan 4-boyutlu Rieamann uzayı $R(x,g,IR)$

$$g(x) = \mathrm{T}(x)\eta, \qquad \hat{\mathrm{I}} = \eta g^{-1}$$

konumu ile birlikte (3+1)-boyutlu Minkowski uzayının bir isotopic lifting'i olarak bakılabilir.

Böylece izotopilerin bir zicirini elde ederiz, yani

$$E^4(x,\delta,IR) \Rightarrow M(\bar{x},\eta,IR) \Rightarrow R(x,g,IR).$$

Buradan aşağıdaki sonucu ifade edebiliriz.

I.7.4 Sonuç: Her bir n-boyutlu metrik uzay $M(x,g,IR)$

$$\hat{\mathrm{I}} = g^{-1}, \quad I\hat{R} = IR\hat{\mathrm{I}}$$

konumu ile aynı boyuttan bir Öklid uzay $E^n(x,\delta,IR)$ nin bir izotopisi olarak alınabilir.

I.8 İzocebirler

I.8.1 Tanım *(Cebir):* Bir A cümlesi bir IF cismi üzerinde bir vektör uzayı ise ve ayrıca

$$\circ : A \times A \to A$$
$$(x,y) \to x \circ y$$

işlemi de $\forall x,y,z \in A$ ve $\forall \alpha \in IF$ için

a. $x \circ (y+z) = x \circ y + x \circ z$,

b. $x \circ (y \circ z) = (x \circ y) \circ z$, (8.1)

c. $(\alpha\, x) \circ y = x \circ (\alpha\, y) = \alpha\,(x \circ y)$,

aksiyomlarını sağlıyor ise bu A cümlesine IF cismi üzerinde bir *cebir*dir denir ve kısaca *(A,IF,∘)* ile gösterilir.

Eğer (8.1) işlemine göre A nın bir birim elemanı mevcut ise A cebirine ***birimli cebir***dir denir. IF cismi yerine özel olarak IR reel sayılar cismi alınmış ise A ya ***reel cebir***, C kompleks sayılar cismi alınmış ise A ya *kompleks cebir* denir [6].

Bir cebirin isotopic lifting'i anlamında izocebir tanımı da aşağıdaki şekilde verilir.

I.8.2 Tanım *(izocebir):* Bir IF cismi üzerinde $x,y,z,\ldots$ elemanlarının $x \circ y$ çarpımı ile bir $(A,IF,\circ)$ cebirinin bir $\hat{A}$ izotopisi (izocebiri) , $\hat{IF}$ izocismi üzerinde A ile aynı vektör uzayı olup izoçarpım denen bir yeni çarpma işlemi $*$ ile tanımlanır öyle ki $*$ işlemi A nın (8.1) ile verilen aksiyomları sağlar.

I.8.2 Örnek: $\left(C^{\infty}\left(IR^{n},IR\right),+,\cdot\right)$ cebirini göz önüne alalım. IR nin izobirimi $\hat{I}$ olan bir izocismi $\hat{IR}$ olmak üzere;

$$C^{\infty}\left(IR^{n},\hat{IR}\right)=\left\{\hat{f} \,/\, \hat{f}:IR^{n} \xrightarrow{C^{\infty}} \hat{IR}\right\}$$

cümlesi $\hat{IR}$ izocismi üzerinde bir izovektör uzayı olup

$$\hat{\circ}:\left(\hat{f},\hat{g}\right) \rightarrow \left(\hat{f} \,\hat{\circ}\, \hat{g}\right)(P)=\hat{f}(P)*\hat{g}(P)$$

işlemiyle bir izocebir oluşturur.

II.Bölüm

Bu bölümde manifoldların izotopileri ve temel özellikleri üzerinde duracağız.

II.1 Reel Kartezyen Manifold

$$IR^n = \{x = (x^1, x^2, \ldots, x^n) / x^i \in IR, \quad i = 1,2,\ldots n\}$$

n-boyutlu reel kartezyen uzayı göstersin. IR^n üzerinde aşağıdaki matematiksel yapılar tanımlıdır.

II.1.1 Vektör Uzayı Yapısı

IR^n cümlesi üzerinde tanımlanan

i. toplama:

$$+ : IR^n \times IR^n \to IR^n$$

$$(x,y) \to x + y = (x^1 + y^1, x^2 + y^2, \ldots, x^n + y^n)$$

ii. skalarla çarpma:

$$\cdot : IR \times IR^n \to IR^n, \quad \cdot : (\lambda, x) \to \lambda \cdot x = (\lambda x^1, \lambda x^2, \ldots, \lambda x^n)$$

işlemleri ile bir n-boyutlu vektör uzayı yapısına sahiptir. Bu uzaya *n-boyutlu reel kartezyen vektör uzayı* denir ve $V^n(IR) = (IR^n, +, \cdot)$ veya kısaca IR^n ile gösterilir. Bu uzayın afin uzay, topolojik uzay ve hatta bir manifold yapısına sahip olduğu bilinmektedir [2].

Şimdi biz esas konumuza dönelim, yani IR^n üzerinde bahsedilen bu cebirsel yapıların izotopilerini inceleyelim. IR reel sayılar cisminin izobirimi $\hat{1}$ olan bir izotopisi $I\hat{R}$, yani

$$I\hat{R} = \{\hat{\alpha} / \hat{\alpha} = \alpha \hat{1}, \quad \alpha \in IR\}$$

olsun. IR^n nin $I\hat{R}$ izocismi üzerinde tanımladığı vektör uzayı, yani IR^n cümlesinde

$$\hat{\cdot} : I\hat{R} \times IR^n \to IR^n, \quad \hat{\cdot} : (\hat{\alpha}, x) \to \hat{\alpha} \,\hat{\cdot}\, x$$

ile tanımlanan $(IR^n, +, \hat{\cdot})$ vektör uzayına *reel izokartezyen uzay* denir ve $I\hat{R}^n$ ile gösterilir, burada $\hat{\alpha} \,\hat{\cdot}\, x = \hat{\alpha} * x = \alpha\, x$ dir.

$I\hat{R}^n$ cümle olarak IR^n ile özdeş olduğundan IR^n üzerinde tanımlanan adi τ topolojisi ile birlikte bir topolojik uzaydır. Ayrıca $I\hat{R}^n$,

$$\hat{f}: I\hat{R}^n \to I\hat{R}^n, \quad f: P \to \hat{f}(P) = P \quad , \forall P \in I\hat{R}^n,$$

özdeşlik dönüşümü ile bir *n-boyutlu reel kartezyen izomanifold*dur [2].

II.2 İzomanifoldlar

II.2.1 Tanım *(Topolojik izomanifold):* M bir Hausdorff uzay olsun. M nin her P noktası için, $I\hat{R}^n$ nın bir açık cümlesine homeomorf olacak şekilde bir U açık komşuluğu bulunabiliyorsa M ye *n-boyutlu topolojik izomanifold* denir [2].

II.2.2 İzokoordinat Komşuluğu (*İsochart*)

n-boyutlu bir topolojik izomanifold M ve U da M nin bir açık altcümlesi olsun. $\varphi: U \to \varphi(U) = V \subset I\hat{R}^n$ bir homeomorfizm olmak üzere (U, φ) -ikilisine M üzerinde bir *izokoordinat komşuluğu* veya *izoharita* denir [2].

Eğer U da bir nokta P ise $\varphi(P)$ de $I\hat{R}^n$ da bir noktadır. Bu durumda $\varphi(P)$ nin i-yinci izokoordinatı $x^i(P)$ olmak üzere;

$$\varphi(P) = \left(x^1(P), x^2(P), \ldots, x^n(P)\right)$$

olarak yazılabilir, burada $x^i: U \to I\hat{R}$ dır.

φ bir homeomorfizm olduğundan U nun P ve Q gibi iki noktası için

$$x^i(P) = x^i(Q), \; i = 1,2, \ldots n, \Rightarrow P = Q$$

dır.

Bu şekilde tanımlanan $\left(x^1, x^2, \ldots, x^n\right)$ n-lisine (U, φ) izokoordinat komşuluğu üzerinde tanımlı bir *lokal izokoordinat sistemi* denir [2].

M üzerindeki bütün izokoordinat komşuluklarının cümlesi $\hat{\Omega} = \left\{\left(U_\alpha, \hat{\varphi}_\alpha\right)_{\alpha \in A}\right\}$ olmak üzere $\hat{\Omega}$ için aşağıdaki özellikler sağlansın:

P1. $\bigcup_{\alpha \in A} U_\alpha = M$.

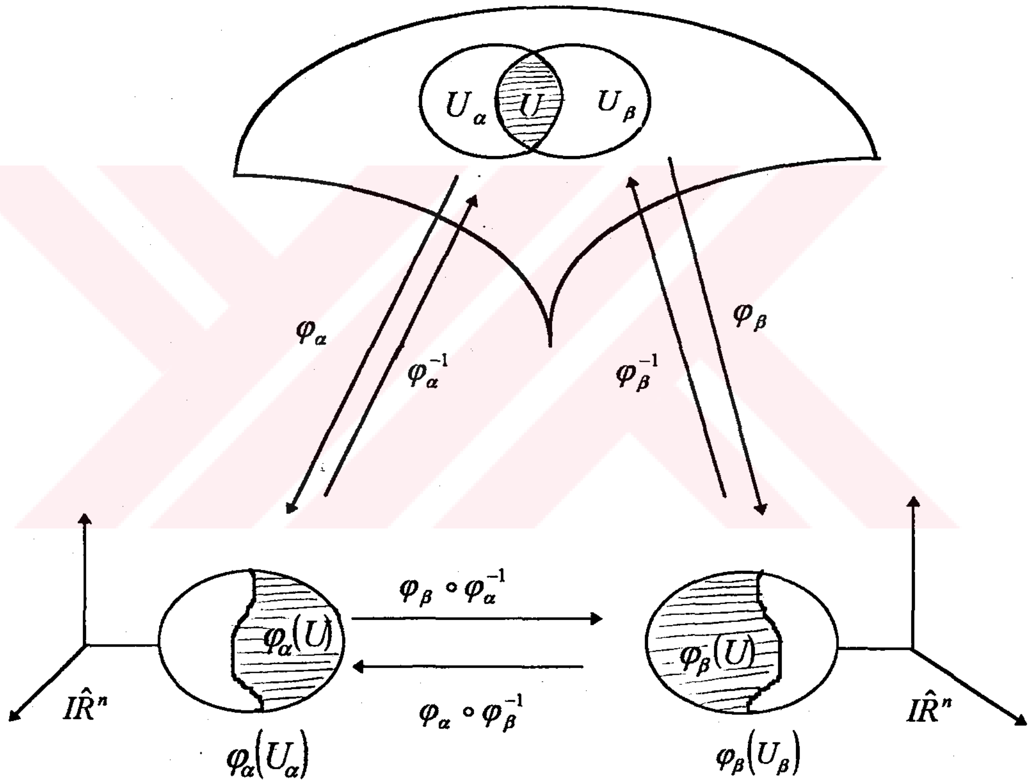
P2. Her $\alpha, \beta \in A$ için $U_\alpha \cap U_\beta \neq \emptyset$ olmak üzere $U_\alpha \cap U_\beta = U$ nun her bir noktasında

$$\left(x_\alpha^1, x_\alpha^2, \ldots, x_\alpha^n\right) \text{ ve } \left(x_\beta^1, x_\beta^2, \ldots, x_\beta^n\right)$$

gibi iki izokoordinat sistemi tanımlıdır. Bu iki koordinat sistemi arasında

$$x_\alpha^i = x_\alpha^i\left(x_\beta^j\right) \quad \text{ve} \quad x_\beta^j = x_\beta^j\left(x_\alpha^i\right), \qquad i,j=1,2,\ldots,n \tag{2.1}$$

şeklinde fonksiyonel bir bağıntı mevcuttur.



(Şekil 2.1)

$\varphi_\alpha(U) \subset \varphi_\alpha(U_\alpha) \subset I\hat{R}^n$ ve $\varphi_\beta(U) \subset \varphi_\beta(U_\beta) \subset I\hat{R}^n$ altcümleleri bir açık cümlenin bir homeomorfizm altında görüntüleri olduklarından açık cümlelerdir. Ayrıca

$$\varphi_\beta \circ \varphi_\alpha^{-1} = \varphi_{\beta\alpha} : \varphi_\alpha(U) \to \varphi_\beta(U)$$

ve (2.2)

$$\varphi_\alpha \circ \varphi_\beta^{-1} = \varphi_{\alpha\beta} : \varphi_\beta(U) \to \varphi_\alpha(U)$$

fonksiyonları ikişer homeomorfizmin birleşimi olduklarından birer homeomorfizm dirler.

P3. $\hat{\Omega}=\{(U_\alpha,\varphi_\alpha)_{\alpha\in A}\}$ kolleksiyonu yukarıdaki şartları sağlayan izokoordinat komşuluklarının maksimum sayısını ihtiva eder, yani (V,ϕ) ikilisi M için bir izokoordinat komşuluğu ve her $\alpha\in A$ için $\phi\circ\varphi_\alpha^{-1}$ ve $\varphi_\alpha\circ\phi^{-1}$ fonksiyonları da birer homeomorfizm ise, bu taktirde $(V,\phi)\in\hat{\Omega}=\{(U_\alpha,\varphi_\alpha)_{\alpha\in A}\}$ dır.

Böylece aşağıdaki tanımı verebiliriz.

II.2.3 İzokoordinat Komşuluğu Sistemi *(İzoatlas)*

Yukarıda verilen P1, P2 ve P3 özelliklerini sağlayan izokoordinat komşulukların bir $\hat{\Omega}=\{(U_\alpha,\hat{\varphi}_\alpha)_{\alpha\in A}\}$ kolleksiyonuna M üzerinde bir *İsokoordinat Komşuluğu Sistemi* veya *İzoatlas* denir [2].

Eğer $\forall\alpha,\beta\in A$ için $\varphi_{\alpha\beta}$ *ve* $\varphi_{\beta\alpha}$ fonksiyonları C^k-sınıfından diferensiyellenebilir ise $\hat{\Omega}=\{(U_\alpha,\hat{\varphi}_\alpha)_{\alpha\in A}\}$ izoatlasına M üzerinde C^k-sınfından *izodiferensiyellenebilir yapı* adı verilir.

II.2.4 Tanım:*(Diferensiyellenebilir izomanifold)*: Eğer n-boyutlu bir M topolojik izomanifoldu C^k-sınıfından bir $\hat{\Omega}=\{(U_\alpha,\hat{\varphi}_\alpha)_{\alpha\in A}\}$ izoatlasa sahip ise, $\{M,\hat{\Omega}\}$-ikilisine bir *C^k-sınıfından n-boyutlu diferensiyellenebilir izomanifold* denir.

Bundan sonraki kısımlarda izomanifold denildiği zaman C^∞-sınıfından diferensiyellenebilir izomanifoldları kastedeceğiz ve $\hat{M}$ sembolü ile göstereceğiz.

$\varphi_\alpha(U)$ ve $\varphi_\beta(U)$ açık cümleleri üzerinde, sırasıyla,

$$(x_1,x_2,\dots,x_n) \text{ ve } (y_1,y_2,\dots,y_n)$$

izokoordinat sistemlerini göz önüne alalım. Bu taktirde $\varphi_\beta\circ\varphi_\alpha^{-1}$ fonksiyonlarını

$$\varphi_{\beta\alpha}=\begin{cases} y_1=y_1(x_1,x_2,\dots,x_n)\\ y_2=y_2(x_1,x_2,\dots,x_n)\\ \vdots\\ y_n=y_n(x_1,x_2,\dots,x_n)\end{cases} \tag{2.3}$$

şeklinde ifade edip

$$\hat{J}_{\alpha\beta}=\frac{D(y_1,y_2,\dots,y_n)}{D(x_1,x_2,\dots,x_n)}=\begin{vmatrix}\frac{\partial y_1}{\partial x_1} & \frac{\partial y_1}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial y_1}{\partial x_n}\\ \frac{\partial y_2}{\partial x_1} & \frac{\partial y_2}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial y_2}{\partial x_n}\\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots\\ \frac{\partial y_n}{\partial x_1} & \frac{\partial y_n}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial y_n}{\partial x_n}\end{vmatrix}$$

Jacobi determinantını elde edriz.

Eğer $\forall(x_1,x_2,\dots,x_n)\in\varphi_\alpha(U)$ ve $\forall\alpha,\beta\in A$ için $\hat{J}_{\alpha\beta}\rangle 0$ ise, $\hat{M}$ izomanifolduna *yönlendirilebilir*dir denir.

$\hat{M}$ bir diferensiyellenebilir izomanifold olsun. $\hat{M}$ üzerinde tanımlı ve değer cümlesi $I\hat{R}$ izocismi olan bir $\hat{f}:\hat{M}\to I\hat{R}$ döşümüne $\hat{M}$ üzerinde bir *izofonksiyon* denir. $P\in\hat{M}$ noktasının

$$\varphi:U\to\varphi(U)=V\subseteq I\hat{R}^n$$

homeomorfizmi ile $I\hat{R}^n$ nin bir açık altcümlesine homeomorf olan her U izokomşuluğu için $\hat{f}\circ\varphi^{-1}$ izofonksiyonu V üzerinde k-defa diferensiyellenebilir ise, $\hat{f}$ fonksiyonuna P noktasında *C^k-sınıfından diferensiyellenebilir*dir denir.

Eğer $\hat{f}$ fonksiyonu $\hat{M}$ nin her noktasında C^k-sınıfından diferensiyellenebilir ise $\hat{f}$ ya $\hat{M}$ üzerinde *C^k-sınıfından diferensiyellenebilir*dir denir.

Notasyon: Bir $\hat{M}$ diferensiyellenebilir izomanifoldu üzerinde bütün C^k-sınıfından diferensiyellenebilir izofonksiyonların cümlesi $D^o(\hat{M}),C^k$ ile gösterilir. Eğer C^∞-sınıfından diferensiyellenebilir izofonksiyonların cümlesi göz önüne alınırsa $D^o(\hat{M}),C^\infty$ gösterimi yerine yalnızca $D^o(\hat{M})$ gösterimini kullanacağız.

II.3 İzofonksiyonların İzocebiri

$\hat{M}$ bir diferensiyellenebilir izomanifold ve $P \in \hat{M}$ verilmiş olsun. $P \in \hat{M}$ noktasının $\hat{M}$ daki komşuluklarının cümlesi $\Im(P)$ olsun.

$$D^o(\hat{M}) = \left\{ \hat{f} \,/\, \hat{f}: U \xrightarrow{C^\infty} I\hat{R},\ \hat{f} \in D^o(U),\ U \in \Im(P) \right\}$$

cümlesinde

$$\hat{+}: D^o(\hat{M}) \times D^o(\hat{M}) \to D^o(\hat{M}), \qquad \hat{+}: (\hat{f}, \hat{g}) \;\to\; \hat{f} \hat{+} \hat{g}$$

işlemi

$$\hat{f}: U \;\to\; I\hat{R} \quad ve \quad \hat{g}: V \;\to\; I\hat{R}, \quad U, V \in \Im(P)$$

olmak üzere

$$\hat{f} \hat{+} \hat{g}: U \cap V \;\to\; I\hat{R}, \qquad Q \;\to\; (\hat{f} \hat{+} \hat{g})(Q) = \hat{f}(Q) \hat{+} \hat{g}(Q)$$

şeklinde tanımlansın. Bu taktirde, $(D^o(\hat{M}), \hat{+})$-ikilisi bir Abel grubudur.

Ayrıca $D^o(\hat{M})$ cümlesinde

$$\hat{\cdot}: I\hat{R} \times D^o(\hat{M}) \to D^o(\hat{M}), \qquad \hat{\cdot}: (\hat{\alpha}, \hat{f}) \;\to\; \hat{\alpha} \,\hat{\cdot}\, \hat{f} = \hat{\alpha}\, \hat{f}$$

dış-işlemi de

$$\hat{\alpha}\, \hat{f}: U \in \Im(P) \;\to\; I\hat{R}, \quad Q \;\to\; (\hat{\alpha}\, \hat{f})(Q) = \hat{\alpha} * \hat{f}(Q)$$

olarak tanımlanırsa $\{D^o(\hat{M}), I\hat{R}, \hat{\cdot}\}$-üçlüsü bir reel izovektör uzayı olur.

Şimdi bu izovektör uzayı üzerinde bir diğer iç-işlemi de şöyle tanımlayalım:

$$\hat{\circ}: D^o(\hat{M}) \times D^o(\hat{M}) \to D^o(\hat{M}), \qquad \hat{\circ}: (\hat{f}, \hat{g}) \;\to \hat{f} \,\hat{\circ}\, \hat{g} = \hat{f}\, \hat{g}$$

işlemi

$$\hat{f}: U \;\to\; I\hat{R} \text{ ve } \hat{g}: V \;\to\; I\hat{R}, \quad U, V \in \Im(P)$$

olmak üzere;

$$\hat{f}\, \hat{g}: U \cap V \;\to\; I\hat{R}, \qquad Q \;\to\; (\hat{f}\, \hat{g})(Q) = \hat{f}(Q) * \hat{g}(Q)$$

dır. Kolayca gösterilebilir ki $\{D^o(\hat{M}), I\hat{R}\, \hat{\circ}\}$-üçlüsü bir izocebir olur. Bu izocebiri, kısalığın hatırı için $D^o(\hat{M})$ ile göstereceğiz [2].

II.4 İzovektör Alanları

$\hat{M}$ bir n-boyutlu diferensiyellenebilir izomanifold ve $D^o(\hat{M})$, $\hat{M}$ üzerindeki bütün izofonksiyonların izocebiri olsun.

$$X: D^o(\hat{M}) \to D^o(\hat{M})$$

dönüşümü $\forall \hat{\alpha}, \hat{\beta} \in I\hat{R}$ ve $\forall \hat{f}, \hat{g} \in D^o(\hat{M})$ için,

a. $X(\hat{\alpha}\,\hat{f} + \hat{\beta}\,\hat{g}) = \hat{\alpha}\,X(\hat{f}) + \hat{\beta}\,X(\hat{g})$,

b. $X(\hat{f}\,\hat{g}) = \hat{f}\,X(\hat{g}) + \hat{g}\,X(\hat{f})$, (4.1)

özelliklerini sağlarsa X dönüşümüne $D^o(\hat{M})$ üzerinde bir *türev* denir.

II.4.1 Tanım *(izovektör alanı):* $D^o(\hat{M})$ üzerindeki her bir türeve $\hat{M}$ üzerinde bir *izovektör alanı* denir. $\hat{M}$ üzerindeki bütün izovektör alanlarının cümlesi $D^1(\hat{M})$ ile gösterilir.

II.4.2 Önerme: $D^1(\hat{M})$ cümlesi $D^o(\hat{M})$ üzerinde bir Lie-cebiridir.

İspat: $D^1(\hat{M})$ cümlesi üzerinde tanımlanan toplma:

$\forall X, Y \in D^1(\hat{M})$ ve $\forall \hat{f} \in D^o(\hat{M})$ için

$$(X+Y)(\hat{f}) = X(\hat{f}) + Y(\hat{f})$$

işlemi ile bir Abel grubu ve

$$\hat{g}\,X: D^o(\hat{M}) \times D^1(\hat{M}) \to D^1(\hat{M})$$

öyle ki $\forall \hat{f} \in D^o(\hat{M})$ için $(\hat{g} \,\hat{\cdot}\, X)(\hat{f}) = \hat{g} \,\hat{\circ}\, X(\hat{f})$

ile tanımlanan dış-işlemi vasıtasıylada $D^o(\hat{M})$ üzerinde bir izomodül oluşturur. Ayrıca $D^1(\hat{M})$ cümlesi üzerinde ikinci bir iç-işlem

$$\begin{aligned} [\,\hat{;}\,]: D^1(\hat{M}) \times D^1(\hat{M}) &\to D^1(\hat{M}) \\ (X, Y) &\to [X \hat{;} Y] = XTY - YTX = X * Y - Y * X \end{aligned}$$

şeklinde tanımlansın, burada $T^{-1} = \hat{I}$ dır. Kolayca gösterilebilir ki $[\,\hat{;}\,]$ operatörü

$$[X;Y]=-[Y;X]$$
$$[X;[Y;Z]]+[Y;[Z;X]]+[Z;[X;Y]]=0$$

bağıntılarını sağlar. Böylece $D^1(\hat{M})$, $D^o(\hat{M})$ üzerinde bir Lie-Cebiri oluşturur.

$\hat{M}$ nın bir izokoordinat komşuluğu (U,φ) olsun. Bu durumda $\varphi:U\to\varphi(U)\subseteq I\hat{R}^n$ dönüşümü $\varphi(P)=\left(x^1(P),x^2(P),\ \ldots\ ,x^n(P)\right)$ şeklinde tanımlıdır. $\hat{M}$ üzerinde bir izofonksiyon $\hat{f}$ olmak üzere $\hat{f}$ nın U açık cümlesine kısıtlanmışını $\tilde{f}$ ile gösterelim, yani $\tilde{f}=\hat{f}\big|_U:U\to I\hat{R}$ olsun. φ homeomorfizmi için $\varphi^{-1}:\varphi(U)\to U$ olduğundan $\tilde{f}$ ve φ^{-1} in birleşiminden

$$f^*=\tilde{f}\circ\varphi^{-1}:\varphi(U)\to I\hat{R}$$

izofonksiyonu elde edilir.

Eğer $\hat{M}$ üzerindeki diferensiyellenebilir izofonksiyonların $U\subset\hat{M}$ ya kısıtlanmışlarını göz önüne alırsak $D^o(U)$ cümlesini elde ederiz. Kolayca gösterilebilir ki $D^o(U)$ da $I\hat{R}$ izocismi üzerinde bir izocebir oluşturur.

$D^o(U)$ üzerinde;

$$\mathrm{I}_j:D^o(\mathrm{U})\to\mathrm{D^o(U)},\qquad \tilde{f}\to\mathrm{I_j}(\tilde{f})=\frac{\partial f^*}{\partial u^j}\circ\varphi,\quad u^j=x^j(P),\quad j=1,2,\ldots,n$$

ile tanımlanan

$$\mathrm{I}_1=\frac{\partial}{\partial x^1},\ \mathrm{I}_2=\frac{\partial}{\partial x^2},\ \ldots\ ,\mathrm{I}_n=\frac{\partial}{\partial x^n}$$

izovektör alanları $D^1(U)$ için bir baz oluşturur. Yani X, U üzerinde herhangi bir izovektör alanı ise;

$$X=\tilde{f}_1\frac{\partial}{\partial x^1}+\tilde{f}_2\frac{\partial}{\partial x^2}+\ldots+\tilde{f}_n\frac{\partial}{\partial x^n}$$

şeklinde tek türlü yazılabilir, burada $\tilde{f}_1,\tilde{f}_2,\ \ldots\ ,\tilde{f}_n\in D^o(U)$ dur.

II.5 İzotanjant Uzay

$\hat{M}$ bir diferensiyellenebilir izomanifold ve bir noktası $P \in \hat{M}$ olsun. $\hat{M}$ nın P noktasını ihtiva eden bir U açık cümlesi üzerinde bir izovektör alanı X olmak üzere;

$$X_P : D^o(U) \to I\hat{R}, \qquad \tilde{f} \to X_P(\tilde{f}) = \{X(\tilde{f})\}_P$$

ile tanımlanan X_P izofonksiyonuna $\hat{M}$ nın P noktasında bir *izotanjant vektörü* denir. $P \in \hat{M}$ noktasındaki bütün izotanjant vektörlerin cümlesi $T_P(\hat{M})$ ile gösterilir. $T_P(\hat{M})$ cümlesi, üzerinde aşağıdaki şekilde tanımlanan iç ve dış-işlem sayesinde, bir reel izovektör uzayı olur.

$$+ : T_P(\hat{M}) \times T_P(\hat{M}) \to T_P(\hat{M}), \quad +:(X_P, Y_P) \to X_P + Y_P$$

iç-işlemi $\forall \tilde{f} \in D^o(U)$ için,

$$(X_P + Y_P)(\tilde{f}) = X_P(\tilde{f}) + Y_P(\tilde{f})$$

olarak ve

$$\hat{\cdot} : I\hat{R} \times T_P(\hat{M}) \to T_P(\hat{M}), \quad \hat{\cdot}(\hat{\alpha}, X_P) \to \hat{\alpha} \,\hat{\cdot}\, X_P = \hat{\alpha}\, X_P$$

dış-işlemi de $\forall \tilde{f} \in D^o(U)$ için,

$$(\hat{\alpha}\, X_P)(\tilde{f}) = \hat{\alpha} * X_P(\tilde{f})$$

şeklinde tanımlanır.

II.5.1 Tanım ***(İzotanjant uzay):*** Yukarıdaki şekilde tanımlanan $T_P(\hat{M})$ izovektör uzayına, $\hat{M}$ nın P noktasındaki *izotanjant uzayı* denir.

II.5.2 Teorem: $\hat{M}$ bir diferensiyellenebilir izomanifold ve $T_P(\hat{M})$ de $\hat{M}$ nın P noktasındaki izotanjant uzayı olsun. Ozaman

$\forall X_P \in T_P(\hat{M})$ ve $\forall \tilde{f}, \tilde{g} \in D^o(U)$ için,

i. $X_P : D^o(U) \to I\hat{R}$ izolineerdir,

ii. $X_P(\tilde{f}\,\tilde{g}) = X_P(\tilde{f}) * \tilde{g}(P) + \tilde{f}(P) * X_P(\tilde{g})$

dır.

İspat: $\forall \hat{\alpha}, \hat{\beta} \in I\hat{R}$ *ve* $\forall \tilde{f}, \tilde{g} \in D^{o}(U)$ için,

i.
$$\begin{aligned} X_P(\hat{\alpha}\,\tilde{f} + \hat{\beta}\,\tilde{g}) &= \{X(\hat{\alpha}\,\tilde{f} + \hat{\beta}\,\tilde{g})\}_P \\ &= \{\hat{\alpha}\,X(\tilde{f}) + \hat{\beta}\,X(\tilde{g})\}_P \\ &= \{\hat{\alpha}\,X(\tilde{f})\}_P + \{\hat{\beta}\,X(\tilde{g})\}_P \\ &= \hat{\alpha} * X_P(\tilde{f}) + \hat{\beta} * X_P(\tilde{g}) \end{aligned}$$

dir.

ii.
$$\begin{aligned} X_P(\tilde{f}\,\tilde{g}) &= \{X(\tilde{f}\,\tilde{g})\}_P \\ &= \{\tilde{f}\,X(\tilde{g}) + \tilde{g}\,X(\tilde{f})\}_P \\ &= \{\tilde{f}\,X(\tilde{g})\}_P + \{\tilde{g}\,X(\tilde{f})\}_P \\ &= \tilde{f}(P) * X_P(\tilde{g}) + \tilde{g}(P) * X_P(\tilde{f}) \end{aligned}$$

elde edilir.

II.5.3 $T_P(\hat{M})$ İzotanjant uzayının bir bazı

Bir diferensiyellenebilir izomanifoldu $\hat{M}$, $\hat{M}$ nın bir izokoordinat komşuluğu (U, φ) ve U üzerindeki lokal izokoordinat sistemi $(x^1, x^2, \ldots, x^n)$ olmak üzere;

$$\partial_j : D^{o}(U) \to D^{o}(U), \qquad \partial_j = \frac{\partial}{\partial x^j}, \qquad j = 1,2, \ldots n,$$

izovektör alanlarının $D^1(U)$ için bir baz oluşturduğunu söylemiştik. $P \in U$ için,

$$\partial_j\big|_P : D^{o}(U) \to I\hat{R}$$

izolineer dönüşümleri, $\forall \tilde{f} \in D(U)$ için,

$$\partial_j\big|_P(\tilde{f}) = \left.\frac{\partial f^*}{\partial u^j}\right|_{\varphi(P)}, \qquad u^j = x^j(P), \quad f^* = \tilde{f} \circ \varphi^{-1}$$

olarak tanımlanırsa $\left\{ \left.\frac{\partial}{\partial x^1}\right|_P, \left.\frac{\partial}{\partial x^2}\right|_P, \ldots, \left.\frac{\partial}{\partial x^n}\right|_P \right\}$ sistemi de $T_P(\hat{M})$ izovektör uzayı için bir baz oluşturur.

Böylece aşağıdaki sonuçları ifade edebiliriz:

1. Eğer $\hat{M}$ 2-boyutlu bir diferensiyellenebilir izomanifold ise, $\hat{M}$ ya *izoyüzey* ve $\hat{M}$ nın P noktasındaki tanjant uzay $T_P(\hat{M})$ ye de P noktasındaki *izotanjant düzlemi* denir.

2. Eğer $\hat{M}$ 1-boyutlu bir diferensiyellenebilir izomanifold ise, $\hat{M}$ ya *izoeğri* denir ve $\hat{\eta}$ ile gösterilir. $\hat{\eta}$ nın P noktasındaki tanjant uzay $T_P(\hat{\eta})$ ye de P noktasındaki *izotanjant vektörü* denir ve $\hat{\eta}'_P$ ile gösterilir ki bu 1-boyutlu bir izovektör uzayı olup $\hat{\eta}'_P \cong I\hat{R}$ dır.

n-boyutlu bir diferensiyellenebilir izomanifold $\hat{M}$ ve $\hat{M}$ nın en az iki izokoordinat komşuluğu ihtiva eden bir izoatlası da $\left\{(U_\alpha,\varphi_\alpha)_{\alpha\in A}\right\}$ olsun. $P\in U_\alpha \cap U_\beta \neq \varnothing$ olmak üzere P noktasının $(U_\alpha,\varphi_\alpha)$ ve (U_β,φ_β) izokoordinat komşuluklarına göre izokoordinatları sırasıyla, $(x^1,x^2,\ldots,x^n)$ ve $(y^1,y^2,\ldots,y^n)$ ise, bu noktasındaki $T_P(\hat{M})$ izotanjant uzayının

$$\left\{\left.\frac{\partial}{\partial x^1}\right|_P,\left.\frac{\partial}{\partial x^2}\right|_P,\ldots,\left.\frac{\partial}{\partial x^n}\right|_P\right\},\left\{\left.\frac{\partial}{\partial y^1}\right|_P,\left.\frac{\partial}{\partial y^2}\right|_P,\ldots,\left.\frac{\partial}{\partial y^n}\right|_P\right\}$$

bazları arasında

$$\begin{aligned}
\left.\frac{\partial}{\partial y^1}\right|_P &= \left.\frac{\partial y^1}{\partial x^1}\frac{\partial}{\partial x^1}\right|_P + \left.\frac{\partial y^1}{\partial x^2}\frac{\partial}{\partial x^2}\right|_P + \cdots + \left.\frac{\partial y^1}{\partial x^n}\frac{\partial}{\partial x^n}\right|_P \\
\left.\frac{\partial}{\partial y^2}\right|_P &= \left.\frac{\partial y^2}{\partial x^1}\frac{\partial}{\partial x^1}\right|_P + \left.\frac{\partial y^2}{\partial x^2}\frac{\partial}{\partial x^2}\right|_P + \cdots + \left.\frac{\partial y^2}{\partial x^n}\frac{\partial}{\partial x^n}\right|_P \\
\vdots \quad & \qquad \vdots \qquad\qquad \vdots \qquad\qquad\qquad \vdots \\
\left.\frac{\partial}{\partial y^n}\right|_P &= \left.\frac{\partial y^n}{\partial x^1}\frac{\partial}{\partial x^1}\right|_P + \left.\frac{\partial y^n}{\partial x^2}\frac{\partial}{\partial x^2}\right|_P + \cdots + \left.\frac{\partial y^n}{\partial x^n}\frac{\partial}{\partial x^n}\right|_P
\end{aligned}$$

bağıntıları mevcuttur, burada $y^j = y^j(x^1,x^2,\ldots,x^n)$ $\quad j=1,2,\ldots,n$ dir.

Eğer bu bağıntı matris formunda yazılırsa, dönüşüm matrisi olarak,

$$A=\begin{bmatrix}\frac{\partial y^1}{\partial x^1} & \frac{\partial y^1}{\partial x^2} & \cdots & \frac{\partial y^1}{\partial x^n}\\ \frac{\partial y^2}{\partial x^1} & \frac{\partial y^2}{\partial x^2} & \cdots & \frac{\partial y^2}{\partial x^n}\\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots\\ \frac{\partial y^n}{\partial x^1} & \frac{\partial y^n}{\partial x^2} & \cdots & \frac{\partial y^n}{\partial x^n}\end{bmatrix}_P = \left(\frac{D(y^1,y^2,\ \dots\ y^n)}{D(x^1,x^2,\ \dots\ x^n)}\right)_P$$

elde edilir.

Bir diferensiyellenebilir izomanifold $\hat{M}$ nın bir P noktasındaki izotanjant uzay $T_P(\hat{M})$ aynı zamanda bir n-boyutlu izovektör uzayı olduğundan bir dual uzaya sahiptir. Bu dual uzay da bir n-boyutlu izovektör uzayıdır ve *izokotanjant uzay* olarak adlandırılır. İzokotanjant uzaylar yardımıyla $\hat{M}$ deki izodış 1-formlardan bahsedebiliriz.

II.6 İzodış 1-formlar

$\hat{M}$ bir n-boyutlu diferensiyellenebilir izomanifold olsun. $\hat{M}$ üzerinde $D^o(\hat{M})$ izocebiri ve $D^o(\hat{M})$ üzerinde de $D^1(\hat{M})$ Lie-cebiri elde edilmişti. $D^1(\hat{M})$ nın izoduali $D^1(\hat{M})^* = D_1(\hat{M})$ ile gösterilirse,

$$D_1(\hat{M}) = \left\{w \,/\, w: D^1(\hat{M}) \xrightarrow{\text{izolineer}} D^o(\hat{M})\right\}$$

yazılır ve $D_1(\hat{M})$ nın her bir elemanına $\hat{M}$ üzerinde bir ***diferensiyellenebilir izodış 1-form*** denir.

$D_1(\hat{M})$ üzerinde

$$\oplus: D_1(\hat{M}) \times D_1(\hat{M}) \to D_1(\hat{M}), \quad \oplus:(\omega^1,\omega^2) \to (\omega^1 \oplus \omega^2)$$

toplama işlemi $\forall X \in D^1(\hat{M})$ için,

$$(\omega^1 \oplus \omega^2)(X) = \omega^1(X) + \omega^2(X)$$

şeklinde ve

$$\bullet: D^o(\hat{M}) \times D_1(\hat{M}) \to D_1(\hat{M}), \quad \bullet:(\hat{f},\omega) \to \hat{f} \bullet \omega = \hat{f}\,\omega$$

izoskalarla izoçarpım işlemi de $\forall X \in D^1(\hat{M})$ için,

$$(\hat{f}\,\omega)(X) = \hat{f}\,\omega(X)$$

biçiminde tanımlanırsa, $D_1(\hat{M})$ cümlesi $D^o(\hat{M})$ üzerinde bir izomodül oluşturur [2].

III.BÖLÜM

III.1 İzotensör Alanları

n-boyutlu diferensiyellenebilir izomanifold $\hat{M}$ ve $\hat{M}$ üzerindeki izofonksiyonların izocebiri de $D^o(\hat{M})$ olsun. $\hat{M}$ üzerindeki izovektör alanlarının $D^o(\hat{M})$ üzerindeki izomodülü $D^1(\hat{M})$ ve izodış 1-formların izomodülü de $D_1(\hat{M})$ olsun.

III.1.1 Kovaryant izotensör alanları

$$D^1_s = \underbrace{D^1 \times D^1 \times \cdots \times D^1}_{s-defa} \quad , \quad D^1 = D^1(\hat{M}),$$

olmak üzere; D^1_s çarpım cümlesi üzerindeki bütün s-izolineer izofonksiyonların cümlesini

$$\hat{L}(D^1_s; D^o) = \{ f \,/\, f : D^1_s \xrightarrow{s-isolineer} D^o \}$$

ile gösterelim. Bu cümlede toplama ve izoskalar ile çarpma işlemlerini aşağıdaki gibi tanımlayalım:

$\forall f, g \in \hat{L}(D^1_s; D^o)$, $\forall \phi \in D^o(\hat{M})$ ve $X_i \in D^1(\hat{M})$, $1 \leq i \leq s$, için;

i. toplama:

$$(f+g)(X_1, X_2, \ldots, X_s) = f(X_1, X_2, \ldots, X_s) + g(X_1, X_2, \ldots, X_s)$$

ii. izoskalarla çarpma:

$$(\phi f)(X_1, X_2, \ldots, X_s) = \phi f(X_1, X_2, \ldots, X_s).$$

Bu iki işleme göre $\hat{L}(D^1_s; D^o)$ cümlesi $D^o(\hat{M})$ üzerinde n^s-boyutlu bir izomodül oluşturur. Bu izomodüle D_1 in kendisiyle s-defa tensörel çarpımı denir ve

$$\hat{L}(D^1_s; D^o) = \otimes^s D_1$$

ile gösterilir. $\otimes^s D_1(\hat{M})$ uzayının herbir elemanına *s.dereceden bir kovaryant izotensör* veya *bir kovaryant s-izotensör* denir.

III.1.2 Kontravaryant izotensör alanları

Kovaryant izotensörler için verilen ifadelerde D^1 yerine D_1 (dual uzay) alınırsa, $(D_1)^* \cong D^1$ olduğundan, D_1 yerine de D^1 almak gerekir. Böylece

$$D_1{}^r = \underbrace{D_1 \times D_1 \times \cdots \times D_1}_{r=defa}$$

olmak üzere; $D_1{}^r$ çarpım cümlesi üzerindeki bütün r-izolineer fonksiyonların cümlesi de

$$\hat{L}(D_1{}^r;\, D^o) = \left\{ \psi \,/\, \psi : D_1{}^r \xrightarrow{r-isolineer} D^o \right\}$$

ile gösterilir. Bu cümlede de toplama ve izoskalar ile çarpma işlemleri aşağıdaki gibi tanımlanır,

$$\forall \psi_1, \psi_2 \in \hat{L}(D_1{}^r; D^o),\ \forall \phi \in D^o(\hat{M})\ \ ve\ \ \omega^i \in D_1(\hat{M}),\ 1 \le i \le r,\ \text{için}$$

i. toplama:

$$(\psi_1 + \psi_2)(\omega^1, \omega^2, \ldots, \omega^r) = \psi_1(\omega^1, \omega^2, \ldots, \omega^r) + \psi_2(\omega^1, \omega^2, \ldots, \omega^r)$$

ii. izoskalarla çarpma:

$$(\phi\, \psi)(\omega^1, \omega^2, \ldots, \omega^r) = \phi\, \psi(\omega^1, \omega^2, \ldots, \omega^r).$$

Bu iki işleme göre $\hat{L}(D_1{}^r; D^o)$ cümlesi $D^o(\hat{M})$ üzerinde n^r-boyutlu bir izomodül oluşturur. Bu izomodüle D^1 in kendisiyle r-defa tensörel çarpımı denir ve

$$\hat{L}(D_1{}^r; D^o) = \otimes^r D^1$$

ile gösterilir. $\otimes^r D^1(\hat{M})$ uzayının herbir elemanına da *r.dereceden bir kontravaryant izotensör veya bir kontravaryant r-izotensör* denir.

Benzer şekilde

$$D^r{}_s = D_1{}^r \times D^1{}_s$$

çarpım cümlesi yardımıyla

$$\hat{L}(D^r{}_s; D^o) = \otimes^r D_1 \otimes^s D^1$$

tensör uzayı tanımlanır ve bu uzayın elemanlarının herbirine de *(r,s)-tipinden bir karışık izotensör alanı* denir.

II.2 İzodiferensiyel

Genel olarak $\hat{M}$ üzerinde bir izolineer fonksiyon, (I.5.5) den

$$\bar{x} = A * x = A\mathrm{T}x \qquad \text{veya} \qquad \bar{x}^i = A^i{}_j \mathrm{T}^j{}_k x^k$$

şeklinde sağ-modüler, birleşimli bir dönüşümdür, burada A lineer ve $\mathrm{T} = \hat{\mathrm{I}}^{-1}(t, x, \dot{x}, \ddot{x}, \ldots)$ dir. Buradan diferensiyel alınırsa,

$$\begin{aligned} d\bar{x}^i &= A^i{}_j d\mathrm{T}^j{}_k x^k + A^i{}_j \mathrm{T}^j{}_k dx^k \\ &= A^i{}_j d\mathrm{T}^j{}_k x^k + A^i{}_j * dx^j \end{aligned}$$

elde edilir. İzotopik eleman T lokal koordinatlara bağlı olduğundan $d\mathrm{T}^j{}_k \neq 0$ dır. Bu sebeple,

$$d\bar{x}^i \neq A^i{}_j * dx^j \quad \text{veya} \quad d\bar{x} \neq A * dx$$

dir. Buradan kolayca görülür ki d operatörünün lineer dönüşümler için sahip olduğu

$$x' = Ax \Rightarrow dx' = Adx$$

özellik izolineer dönüşümler için geçerli değildir. Ohalde yeni bir diferensiyel operatörü tanımlamalıyız. Bu yeni operatör $\hat{d}$ ile gösterilir ve izodiferensiyel operatörü adını alır.

III.2.1 Tanım *(izodiferensiyel operatörü):*

$$\begin{aligned} \hat{d} : D^o(\hat{M}) &\longrightarrow D_1(\hat{M}) \\ \hat{f} &\longrightarrow \hat{d}\hat{f} \end{aligned}$$

fonksiyonu $\forall X \in D^1(\hat{M})$ için $\hat{d}\hat{f}(X) = X[\hat{f}]$ şeklinde tanımlansın. Bu $\hat{d}$ fonksiyonuna *izodiferensiyel operatörü* denir.

İzodiferensiyel operatörünün özelliklerini aşağıdaki şekilde sıralayabiliriz:

i. İzolineer, yani $\forall \hat{\alpha}, \hat{\beta} \in \hat{IR}$ ve $\forall \hat{f}, \hat{g} \in D^o(\hat{M})$ için,

$\hat{d}(\hat{\alpha}\,\hat{f} + \hat{\beta}\,\hat{g}) = \hat{\alpha}\,\hat{d}\hat{f} + \hat{\beta}\,\hat{d}\hat{g}$ dir.

ii. $\hat{d}(\hat{f}\,\hat{g}) = \hat{f}\,\hat{d}\hat{g} + \hat{g}\,\hat{d}\hat{f}$ dir.

iii. $\bar{x} = A * x$ için $\hat{d}\bar{x} = A * \hat{d}x$ veya $\hat{d}\bar{x}^i = A^i{}_j * \hat{d}x^j$ dir.

Kendimizi $\hat{M}$ nın bir (U,φ) izokoordinat komşuluğuna sınırladığımız da, U dan $D^o(U)$ izocebirini ve $D^o(U)$ üzerinde $D^1(U)$ izomodülünü elde ederiz. $D^1(U)$ nun duali $D_1(U)$ olmak üzere $D_1(U)$ nun her bir elemanına U üzerinde bir *diferensiyellenebilir izodış 1-form* denir. Kolayca gösterilebilir ki $D_1(U)$ da $D^o(U)$ üzerinde bir izomodüldür. U üzerinde lokal izokoordinat sistemi $(x^1,x^2,\ \ldots\ ,x^n)$ olmak üzere;

$$\frac{\partial}{\partial x^1},\ \frac{\partial}{\partial x^2},\ \ldots\ ,\frac{\partial}{\partial x^n} \tag{2.1}$$

izovektör alanlarının $D^1(U)$ izomodülü için bir baz olduğunu görmüştük. (2.1) in dual bazı $\{\hat{d}x^1,\hat{d}x^2,\ldots,\hat{d}x^n\}$ olup, bu da $D_1(U)$ için bir bazdır [2].

III.2.1 İzotensör alanlarının bileşenleri

n-boyutlu diferensiyellenebilir bir izomanifold $\hat{M}$ olsun. (U,φ) bir izokoordinat komşuluğu olmak üzere U üzerinde bütün izofonksiyonların izocebiri $D^o(U)$, izovektör alanlarının ve izodış 1-formların izomodülleri de $D^1(U)$ ve $D_1(U)$ olsun. Bir $X\in\otimes^s D_1$ kovaryant s-izotesör alanının bileşenlerini belirtmek için $D^1(U)$ ve $D_1(U)$ nun $\{e_i\}=\left\{\frac{\partial}{\partial x^i}\right\}$ ve $\{\omega^i\}=\{\hat{d}x^i\}$ bazlarını göz önüne alalım.

Bu halde

$$\omega^{j_1}\otimes\omega^{j_2}\otimes\cdots\otimes\omega^{j_s} \tag{2.2}$$

de $\otimes^s D_1$ in bir bazıdır. Buna göre bir $X\in\otimes^s D_1$ için

$$X{:}D^1{}_s \xrightarrow{s-isolineer} D^o$$

olduğundan $\forall u_1,u_2,\ldots u_s\in D^1(U)$ için $u_j=x^{i_j}e_{i_j}$, $1\le j\le s$, $i_j=1,2,\ldots n$, olmak üzere;

$$\begin{aligned}X(u_1,u_2,\ldots,u_s)&=X\left(x^{i_1}e_{i_1},\ x^{i_2}e_{i_2},\ \ldots\ ,x^{i_s}e_{i_s}\right)\\&=x^{i_1}x^{i_2}\ldots x^{i_s}X\left(e_{i_1},e_{i_2},\ \ldots\ e_{i_s}\right)\end{aligned} \tag{2.3}$$

olur. Burada X yerine özel olarak

$$\omega^{j_1} \otimes \omega^{j_2} \otimes \cdots \otimes \omega^{j_s}$$

alınırsa,

$$\begin{aligned}(\omega^{j_1} \otimes \omega^{j_2} \otimes \cdots \otimes \omega^{j_s})\left(u_1, u_2, \ldots, u_s\right) &= x^{i_1} x^{i_2} \ldots x^{i_s} (\omega^{j_1} \otimes \omega^{j_2} \otimes \cdots \otimes \omega^{j_s})\left(e_{i_1}, e_{i_2}, \ldots e_{i_s}\right) \\ &= x^{i_1} x^{i_2} \ldots x^{i_s} \delta_{i_1}^{j_1} \delta_{i_2}^{j_2} \ldots \delta_{i_s}^{j_s} \\ &= x^{j_1} x^{j_1} \ldots x^{j_s}\end{aligned}$$

veya $j_1, j_2, \ldots, j_s$ yerine $i_1, i_2, \ldots, i_s$ yazılırsa

$$x^{i_1} x^{i_2} \ldots x^{i_s} = \left(\omega^{i_1} \otimes \omega^{i_2} \otimes \ldots \otimes \omega^{i_s}\right)\left(u_1, u_2, \ldots, u_s\right)$$

elde edilir. Bu değer (2.3) de yerine yazılırsa

$$\mathrm{X}\left(u_1, u_2, \ldots, u_s\right) = \mathrm{X}\left(e_{i_1}, e_{i_2}, \ldots e_{i_s}\right)\left(\omega^{i_1} \otimes \omega^{i_2} \otimes \ldots \otimes \omega^{i_s}\right)\left(u_1, u_2, \ldots, u_s\right)$$

veya

$$\mathrm{X} = \mathrm{X}\left(e_{i_1}, e_{i_2}, \ldots e_{i_s}\right)\left(\omega^{i_1} \otimes \omega^{i_2} \otimes \ldots \otimes \omega^{i_s}\right)$$

olur. Eğer

$$\mathrm{X}\left(e_{i_1}, e_{i_2}, \ldots e_{i_s}\right) = \mathrm{X}_{i_1 i_2 \ldots i_s} \tag{2.4}$$

denirse,

$$\mathrm{X} = \mathrm{X}_{i_1 i_2 \ldots i_s} \omega^{i_1} \otimes \omega^{i_2} \otimes \ldots \otimes \omega^{i_s}$$

elde edilir, burada $X_{i_1 i_2 \ldots i_s} : U \xrightarrow{s-izolineer} \hat{IR}$ dır.

Bir $\mathrm{X} \in \otimes^s D_1$ kovaryant s-izotensörü verildiğinde, $D^o(U)$ dan alınan n^s-tane $\left\{\mathrm{X}_{i_1 i_2 \ldots i_s}\right\}$ izofonksiyonlarına $D^1(U)$ nun $\left\{e_i\right\}$ bazına göre X in *kovaryant bileşenleri* denir.

Bir kontravaryant r-izotensörün $X^{j_1 j_2 \ldots j_r}$ *kontravaryant bileşenleri* ve (r,s)-tipinden bir karışık izotensörün $X^{h_1 h_2 \ldots h_r}{}_{k_1 k_2 \ldots k_s}$ *bileşenleri* de benzer şekilde tanımlanır.

Bir n-boyutlu diferensiyellenebilir izomanifold $\hat{M}$ üzerinde verilen bir izotensör alanının izotürevlerine geçmeden önce $\hat{M}$ nın bir P noktasını ihtiva eden bir U izokoordinat komşuluğu üzerinde tanımlı n^{r+s}-tane $X^{h_1 h_2 \ldots h_r}{}_{k_1 k_2 \ldots k_s}$ izofonksiyonlarının bir (r,s)-tipinden karışık izotensör alanının bileşenleri olup olmadığını karekterize eden aşağıdaki tanımı verelim.

II.2.1 Tanım: Bir n-boyutlu diferensiyellenebilir izomanifold $\hat{M}$ ve $\hat{M}$ nın bir P noktasını ihtiva eden bir U izokoordinat komşuluğu üzerinde tanımlı n^{r+s}-tane izofonksiyon $X^{h_1h_2...h_r}{}_{k_1k_2...k_s}(x^q)$ olmak üzere P noktasını ihtiva eden diğer bir $\overline{U}$ izokoordinat komşuluğu için $U \cap \overline{U}$ arakesit cümlesi üzerinde;

$$\overline{X}^{j_1j_2...j_r}{}_{l_1l_2...l_s}(\overline{x}^p) = \frac{\partial \overline{x}^{j_1}}{\partial x^{h_1}} * ... * \frac{\partial \overline{x}^{j_r}}{\partial x^{h_r}} * \frac{\partial x^{k_1}}{\partial \overline{x}^{l_1}} * ... * \frac{\partial x^{k_s}}{\partial \overline{x}^{l_s}} * X^{h_1h_2...h_r}{}_{k_1k_2...k_s}(x^q) \tag{2.5}$$

bağıntısı geçerli ise, $X^{h_1h_2...h_r}{}_{k_1k_2...k_s}(x^q)$ izofonksiyonlarına $\hat{M}$ izomanifoldu üzerinde (r,s)-tipinden bir X *karışık izotensör alanının bileşenleri* denir.

$\hat{M}$ nın bir U açık cümlesi üzerinde tanımlı bir izotensör alanının bütün bileşenleri C^k-sınıfından ise, bu taktirde bu izotensör alanına C^k-*sınıfından*dır denir. O halde şimdi bir izotensör alanının bileşenlerinin diferensiyellenebilirliği üzerinde duralım.

İlk olarak bir diferensiyellenebilir izoskalar alanı $\phi(x^l)$ yi göz önüne alalım. Burada ϕ izoskalar alanını bir (0,0)-tipinden izotensör alanı gibi göz önüne alıyoruz. ϕ nin izodiferensiyeli,

$$\hat{d}\phi = \frac{\partial\phi}{\partial x^l} * \hat{d}x^l = \frac{\partial\phi}{\partial x^l} \mathrm{T}^l{}_m \hat{d}x^m \tag{2.6}$$

ile tanımlanır. ϕ nin diğer bir izokoordinat komşuluğuna göre ifadesi $\overline{\phi}(\overline{x}^k)$ olmak üzere;

$$\overline{\phi}(\overline{x}^k) = \phi(x^l) \tag{2.7}$$

dir ve bu ifade $\overline{x}^k$ ya göre izodiferensiyellenebilirdir. Buradan

$$\hat{d}\overline{\phi} = \frac{\partial\overline{\phi}}{\partial\overline{x}^k} * \hat{d}\overline{x}^k = \frac{\partial\phi}{\partial x^l} * \frac{\partial x^l}{\partial \overline{x}^k} * \hat{d}\overline{x}^k = \frac{\partial\phi}{\partial x^l} * \hat{d}x^l = \hat{d}\phi \tag{2.8}$$

elde edilir. Bu da bize gösterir ki ϕ nin izodiferensiyeli $\hat{d}\phi$ de bir izoskalar alandır.

Bununla beraber bir ikinci örnek olarak C^l-sınıfından bir kontravaryant izovektör alanını göz önüne aldığımızda aynı sonucu elde edemeyiz. C^l-sınıfından bir kontravaryant izovektör alanının bileşenleri $X^h(x^k)$, $h=1,2, \dots ,n$ olmak üzere; X^h nın izodiferensiyeli,

$$\hat{d}X^h = \frac{\partial X^h}{\partial x^k} * \hat{d}x^k = \frac{\partial X^h}{\partial x^k} \mathrm{T}^k{}_l \hat{d}x^l \tag{2.9}$$

dir. Aynı izovektör alanının diğer bir izokoordinat komşuluğuna göre ifadesi $\overline{X}^j(\overline{x}^k)$ olmak üzere;

$$\overline{X}^j(\overline{x}^k) = \frac{\partial \overline{x}^j}{\partial x^h} * X^h(x^l) = \frac{\partial \overline{x}^j}{\partial x^h} \mathrm{T}^h{}_i X^i(x^l) \tag{2.10}$$

bağıntısı geçerlidir ve bu ifade $\overline{x}^k$ ya göre diferensiyellenebilirdir. Bunu yaparken eşitliğin sağ tarafindaki $\frac{\partial \overline{x}^j}{\partial x^h}$ katsayılarının ve T izotopik elemanın da x^l izokoordinatlarının bir fonksiyonu olarak verildiğine dikkat etmeliyiz. Böylece zincir kuralını ve fonksiyonların çarpımının diferensiyeli kuralını kullanarak,

$$\begin{aligned}\frac{\partial \overline{X}^j}{\partial \overline{x}^k} &= \frac{\partial^2 \overline{x}^j}{\partial x^h \partial x^l} * \frac{\partial x^l}{\partial \overline{x}^k} \mathrm{T}^h{}_i X^i + \frac{\partial \overline{x}^j}{\partial x^h} \frac{\partial \mathrm{T}^h{}_i}{\partial x^l} * \frac{\partial x^l}{\partial \overline{x}^k} X^i + \frac{\partial \overline{x}^j}{\partial x^h} \mathrm{T}^h{}_i \frac{\partial X^i}{\partial x^l} * \frac{\partial x^l}{\partial \overline{x}^k} \\ &= \frac{\partial^2 \overline{x}^j}{\partial x^h \partial x^l} * \frac{\partial x^l}{\partial \overline{x}^k} * X^h + \frac{\partial \overline{x}^j}{\partial x^h} \frac{\partial \mathrm{T}^h{}_i}{\partial x^l} * \frac{\partial x^l}{\partial \overline{x}^k} X^i + \frac{\partial \overline{x}^j}{\partial x^h} * \frac{\partial X^h}{\partial x^l} * \frac{\partial x^l}{\partial \overline{x}^k}\end{aligned} \tag{2.11}$$

elde edilir. Bu bağıntıdan $\frac{\partial X^h}{\partial x^l}$ kısmi türevlerinin bir izotensör alanının bileşenleri olmadığı kolayca görülür. (2.11) ifadesinin her iki tarafi $\hat{d}\overline{x}^k$ ile izoçarpıma tabi tutulur, k üzerinden toplam alınır ve

$$\frac{\partial x^l}{\partial \overline{x}^k} * \hat{d}\overline{x}^k = \hat{d}x^l \quad (\text{ veya tersi}) \tag{2.12}$$

özdeşliği göz önünde bulundurulursa;

$$\begin{aligned}\frac{\partial \overline{X}^j}{\partial \overline{x}^k} * \hat{d}\overline{x}^k &= \frac{\partial^2 \overline{x}^j}{\partial x^h \partial x^l} * X^h * \hat{d}x^l + \frac{\partial \overline{x}^j}{\partial x^h} \frac{\partial \mathrm{T}^h{}_i}{\partial x^l} X^i * \hat{d}x^l \\ &+ \frac{\partial \overline{x}^j}{\partial x^h} * \frac{\partial X^h}{\partial x^l} * \hat{d}x^l\end{aligned} \tag{2.13}$$

veya

$$\hat{d}\overline{X}^j = \frac{\partial^2 \overline{x}^j}{\partial x^h \partial x^l} * X^h * \hat{d}x^l + \frac{\partial \overline{x}^j}{\partial x^h} \frac{\partial \mathrm{T}^h{}_i}{\partial x^l} X^i * \hat{d}x^l + \frac{\partial \overline{x}^j}{\partial x^h} * \hat{d}X^h \tag{2.14}$$

elde edilir. Bu son ifade de bize gösterirki bir $X^h(x^k)$ kontravaryant izovektör alanının izodiferensiyelleri de bir kontravaryant izovektör alanının bileşenlerini oluşturmaz. Ohalde bu özelliğe sahip olan yeni bir diferensiyel tanımlamalıyız.

III.3 İzomutlak Diferensiyel

Verilen bir kontravaryant izovektör alanının $X^h(x^k)$ bileşenlerinin kısmi türevleri (2.11) ve izodiferensiyelleri (2.14) nin bir kontravaryant izovektör alanının bileşenleri olmaması bir eksikliktir. Dolayısıyla yeni bir diferensiyel tanımlamalıyız ki, hem genel anlamda izodiferensiyel kavramının özelliklerine sahip olsun, hem de bir izotensörel fonksiyon olsun. Bu yeni diferensiyeli de $\hat{D}X^j$ ile gösterelim.

Açık olarak bu yeni diferensiyel

$$\hat{D}X^j = \hat{d}X^j + P^j\left(x^p, X^h, \hat{d}x^k\right) \tag{3.1}$$

formunda ve aşağıdaki özelliklere sahip olmalıdır. Bu özellikler bize $\hat{D}$ nin tanımlanmasında ,yani P^j bileşenlerinin bulunmasında yol gösterecektir.

1. Herhangi iki kontravaryant izovektör alanının X^j ve Y^j bileşenleri için;

$$\hat{D}\left(X^j + Y^j\right) = \hat{D}X^j + \hat{D}Y^j$$

olmalıdır. Bunun sağlanması için gerek ve yeter şart P^j nin X^h ya göre lineer olmasıdır.

Bu (3.1) tanımından hemen görülür.

2. $\hat{D}X^j, \hat{d}x^k$ ya göre lineerdir.

Bunun için (3.1) eşitliğinin sağ tarafindaki P^j bileşenleri X^h ve $\hat{d}x^k$ nın lineer homojen fonksiyonları olmalıdır, yani

$$P^j\left(x^p, X^h, \hat{d}x^k\right) = \hat{\Gamma}_h{}^j{}_k\left(x^p\right) * X^h * \hat{d}x^k = \hat{\Gamma}_h{}^j{}_k \mathrm{T}^h{}_r X^r \mathrm{T}^k{}_s \hat{d}x^s \tag{3.2}$$

formunda ifade edilebilir, buradaki $\hat{\Gamma}_h{}^j{}_k\left(x^p\right)$ katsayıları yalnızca x^p koordinatlarına bağlıdır (bu katsayıların iki alt ve bir üst indisle gösterilmesi onların bir (1,2)-tipinden izotensörün bileşenleri olmasını gerektirmez).

3. $\hat{D}X^j$ bir kontravaryant izovektör alanının bileşenlerini oluşturmalıdır, yani

$$\hat{D}\overline{X}^j = \frac{\partial \overline{x}^j}{\partial x^h} * \hat{D}X^h = \frac{\partial \overline{x}^j}{\partial x^h} \mathrm{T}^h{}_r \hat{D}X^r \tag{3.3}$$

eşitlği sağlanmalıdır. Buradan

$$\begin{aligned} \hat{d}\overline{X}^j + \overline{P}^j &= \frac{\partial \overline{x}^j}{\partial x^h} * \left(\hat{d}X^h + P^h\right) \\ &= \frac{\partial \overline{x}^j}{\partial x^h} \mathrm{T}^h{}_k \hat{d}X^k + \frac{\partial \overline{x}^j}{\partial x^l} \mathrm{T}^l{}_m P^m \end{aligned} \tag{3.4}$$

yazılabilir. Burada $\hat{d}\overline{X}^j$ nin (2.14) deki değeri yerine yazılırsa;

$$\begin{aligned} \overline{P}^j &= \frac{\partial \overline{x}^j}{\partial x^l} * P^l - \frac{\partial^2 \overline{x}^j}{\partial x^h \partial x^l} * X^h * \hat{d}x^l - \frac{\partial \overline{x}^j}{\partial x^h} \frac{\partial \mathrm{T}^h{}_i}{\partial x^l} X^i * \hat{d}x^l \\ &= \frac{\partial \overline{x}^j}{\partial x^l} * \hat{\Gamma}_h{}^l{}_k * X^h * \hat{d}x^k - \frac{\partial^2 \overline{x}^j}{\partial x^\ell \partial x^h} * X^h * \hat{d}x^l - \frac{\partial \overline{x}^j}{\partial x^h} \frac{\partial \mathrm{T}^h{}_i}{\partial x^l} X^i * \hat{d}x^l \end{aligned} \tag{3.5}$$

elde edilir. Ayrıca (3.2) den $\overline{P}^j$ için

$$\overline{P}^j = \hat{\overline{\Gamma}}_m{}^j{}_p * \overline{X}^m * \hat{d}\overline{x}^p = \hat{\overline{\Gamma}}_m{}^j{}_p * \frac{\partial \overline{x}^m}{\partial x^h} * \frac{\partial \overline{x}^p}{\partial x^k} * X^h * \hat{d}x^k \tag{3.6}$$

ifadesi de mevcuttur. (3.5) ifadesinin ikinci ve üçüncü terimlerinde ℓ yerine k yazılır ve ifade $X^h * dx^k$ parentezine alınırsa (3.6) dan

$$\hat{\overline{\Gamma}}_m{}^j{}_p * \frac{\partial \overline{x}^m}{\partial x^h} * \frac{\partial \overline{x}^p}{\partial x^k} = \hat{\Gamma}_h{}^l{}_k * \frac{\partial \overline{x}^j}{\partial x^k} - \frac{\partial^2 \overline{x}^j}{\partial x^k \partial x^h} - \frac{\partial \overline{x}^j}{\partial x^h} \frac{\partial \mathrm{T}^h{}_i}{\partial x^k} \hat{\mathrm{I}}^i{}_h \tag{3.6a}$$

veya

$$\frac{\partial^2 \overline{x}^j}{\partial x^k \partial x^h} = \hat{\Gamma}_h{}^l{}_k * \frac{\partial \overline{x}^j}{\partial x^l} - \hat{\overline{\Gamma}}_m{}^j{}_p * \frac{\partial \overline{x}^m}{\partial x^h} * \frac{\partial \overline{x}^p}{\partial x^k} - \frac{\partial \overline{x}^j}{\partial x^h} \frac{\partial \mathrm{T}^h{}_i}{\partial x^k} \hat{\mathrm{I}}^i{}_h \tag{3.6b}$$

veya

$$\begin{aligned} \hat{\overline{\Gamma}}_m{}^j{}_p &= \hat{\Gamma}_h{}^l{}_k * \frac{\partial \overline{x}^j}{\partial x^l} * \frac{\partial x^h}{\partial \overline{x}^m} * \frac{\partial x^k}{\partial \overline{x}^p} - \frac{\partial^2 \overline{x}^j}{\partial x^k \partial x^h} * \frac{\partial x^h}{\partial \overline{x}^m} * \frac{\partial x^k}{\partial \overline{x}^p} \\ &\quad - \frac{\partial \overline{x}^j}{\partial x^h} \frac{\partial \mathrm{T}^h{}_i}{\partial x^l} \hat{\mathrm{I}}^i{}_h * \frac{\partial x^h}{\partial \overline{x}^m} * \frac{\partial x^k}{\partial \overline{x}^p} \end{aligned} \tag{3.6c}$$

elde edilir. Buradan kolayca söyleyebiliriz ki (3.2) deki $\hat{\Gamma}$ katsayıları (1,2)-tipinden bir izotensör alanı oluşturmazlar.

İzotopik eleman T bir sabit olarak seçildiği zaman (3.6c) de $\dfrac{\partial T^{h}{}_{i}}{\partial x^{l}}$ kısmi türevleri sıfır olup diğer terimlerin izotopileri korunur. Eğer T=I alınırsa Lovelock & Rund tarafından elde edilen sonuçlar elde edilir [4].

III.3.2 Tanım: (3.6c) dönüşüm kuralı ile verilen $\hat{\Gamma}_{h\ k}^{\ l}$ sembollerine diferensiyellenebilir izomanifold $\hat{M}$ üzerinde bir *izoafin konneksiyonunun bileşenleri* veya *konneksiyon katsayıları* denir.

(3.1) ve (3.2) den $\hat{D}X^{j}$ için

$$\hat{D}X^{j} = \hat{d}X^{j} + \hat{\Gamma}_{h\ k}^{\ j} * X^{h} * \hat{d}x^{k} = \hat{d}X^{j} + \hat{\Gamma}_{h\ k}^{\ j} \mathrm{T}^{h}{}_{i} X^{i} \mathrm{T}^{k}{}_{l} \hat{d}x^{l} \tag{3.8}$$

yazılabilir. Bu son ifadeye bir kontravaryant izovektör alanının X^{j} bileşeninin *izomutlak diferensiyeli* denir.

Farklı iki koordinat sistemi $(\bar{x}^{j})$ *ve* (x^{h}) için

$$\bar{x}^{j} = \bar{x}^{j}(x^{h}) \text{ ve } x^{h} = x^{h}(\bar{x}^{m}) \quad j,h,m = 1,2,\ldots n$$

olduğundan

$$\frac{\partial \bar{x}^{j}}{\partial x^{h}} * \frac{\partial x^{h}}{\partial \bar{x}^{m}} = \frac{\partial \bar{x}^{j}}{\partial x^{h}} \mathrm{T}^{h}{}_{l} \frac{\partial x^{l}}{\partial \bar{x}^{m}} = \delta_{m}^{j} \tag{3.9}$$

dir. (3.9) ifadesinin x^{k} ya göre kısmi türevlerini alalım. $\dfrac{\partial x^{l}}{\partial \bar{x}^{m}}$, $\bar{x}^{q}$ koordinatlarının fonksiyonları olduğundan zincir kuralı uygulanırsa,

$$\frac{\partial^{2} \bar{x}^{j}}{\partial x^{h} \partial x^{k}} * \frac{\partial x^{h}}{\partial \bar{x}^{m}} + \frac{\partial \bar{x}^{j}}{\partial x^{h}} \frac{\partial \mathrm{T}^{h}{}_{l}}{\partial x^{k}} \frac{\partial x^{l}}{\partial \bar{x}^{m}} + \frac{\partial \bar{x}^{j}}{\partial x^{h}} * \frac{\partial^{2} x^{h}}{\partial \bar{x}^{m} \partial \bar{x}^{q}} * \frac{\partial \bar{x}^{q}}{\partial x^{k}} = 0$$

veya

$$\frac{\partial^2 \bar{x}^j}{\partial x^h \partial x^k} * \frac{\partial x^h}{\partial \bar{x}^m} = -\frac{\partial^2 x^h}{\partial \bar{x}^q \partial \bar{x}^m} * \frac{\partial \bar{x}^q}{\partial x^k} * \frac{\partial \bar{x}^j}{\partial x^h} - \frac{\partial \bar{x}^j}{\partial x^h} \frac{\partial \mathrm{T}^h{}_l}{\partial x^k} \frac{\partial x^l}{\partial \bar{x}^m}$$

olur. Her iki taraf $\frac{\partial x^k}{\partial \bar{x}^p}$ ile izoçarpıma tabi tutulur ve $\frac{\partial \bar{x}^q}{\partial x^k} * \frac{\partial x^k}{\partial \bar{x}^p} = \delta^q{}_p$ olduğu dikkate alınırsa,

$$\frac{\partial^2 \bar{x}^j}{\partial x^k \partial x^h} * \frac{\partial x^h}{\partial \bar{x}^m} * \frac{\partial x^k}{\partial \bar{x}^p} = -\frac{\partial^2 x^h}{\partial \bar{x}^p \partial \bar{x}^m} * \frac{\partial \bar{x}^j}{\partial x^h} - \frac{\partial \bar{x}^j}{\partial x^h} \frac{\partial T^h{}_l}{\partial x^k} \frac{\partial x^l}{\partial \bar{x}^m} * \frac{\partial x^k}{\partial \bar{x}^p} \tag{3.10}$$

elde edilir. (3.10) değeri (3.6b) de yerine yazılırsa,

$$\frac{\partial^2 x^h}{\partial \bar{x}^p \partial \bar{x}^m} = \frac{\partial x^h}{\partial \bar{x}^j} * \hat{\bar{\Gamma}}_m{}^j{}_p - \frac{\partial x^h}{\partial \bar{x}^m} * \frac{\partial x^k}{\partial \bar{x}^p} * \hat{\Gamma}_h{}^l{}_k \tag{3.11}$$

elde edilir.

Amacımız bir kovaryant izovektör alanı $X_h = X_h(x^k)$ için uygun bir izomutlak diferensiyel tanımlamak olduğundan böyle bir izovektör alanı için dönüşüm kuralı

$$X_h = \frac{\partial \bar{x}^j}{\partial x^h} * \bar{X}_j = \frac{\partial \bar{x}^j}{\partial x^h} \mathrm{T}_h{}^l \bar{X}_l \tag{3.12}$$

ile verilir ve bu ifade x^k ya göre diferensiyellenebilirdir. Sağ tarafdaki $\frac{\partial \bar{x}^j}{\partial x^h}$ katsayıları x^k izokoordinatlarının, $\bar{X}_l$ ise $\bar{x}^p$ izokoordinatlarının fonksiyonlarıdır. Böylece zincir kuralı uygulanılırsa,

$$\frac{\partial X_h}{\partial x^k} = \frac{\partial^2 \bar{x}^j}{\partial x^h \partial x^k} * \bar{X}_j + \frac{\partial \bar{x}^j}{\partial x^h} \frac{\partial \mathrm{T}_h{}^l}{\partial x^k} \bar{X}_l + \frac{\partial \bar{x}^j}{\partial x^h} * \frac{\partial \bar{X}_j}{\partial \bar{x}^p} * \frac{\partial \bar{x}^p}{\partial x^k}$$

eşitliği elde edilir. Her iki tarafın $\hat{d}x^k$ ile izoçarpımı yapılır ve k üzerinden toplam alınırsa,

$$\frac{\partial X_h}{\partial x^k}*\hat{d}x^k=\frac{\partial^2 \bar{x}^j}{\partial x^h \partial x^k}*\overline{X}_j*\hat{d}x^k+\frac{\partial \bar{x}^j}{\partial x^h}\frac{\partial \Gamma_h{}^l}{\partial x^k}\overline{X}_l*\hat{d}x^k$$
$$+\frac{\partial \bar{x}^j}{\partial x^h}*\frac{\partial \overline{X}_j}{\partial \bar{x}^p}*\frac{\partial \bar{x}^p}{\partial x^k}*\hat{d}x^k$$

veya

$$\hat{d}X_h=\frac{\partial^2 \bar{x}^j}{\partial x^h \partial x^k}*\overline{X}_j*\hat{d}x^k+\frac{\partial \bar{x}^j}{\partial x^h}\frac{\partial \Gamma_h{}^l}{\partial x^k}\overline{X}_l*\hat{d}x^k+\frac{\partial \bar{x}^j}{\partial x^h}*\hat{d}\overline{X}_j \tag{3.13}$$

bulunur. (3.6b) ifadesi $\overline{X}_j*\hat{d}x^k$ ile izoçarpıma tabi tutulursa,

$$\frac{\partial^2 \bar{x}^j}{\partial x^h \partial x^k}*\overline{X}_j*\hat{d}x^k=\hat{\Gamma}_h{}^l{}_k*\frac{\partial \bar{x}^j}{\partial x^l}*\overline{X}_j*\hat{d}x^k-\hat{\overline{\Gamma}}_m{}^j{}_p*\frac{\partial \bar{x}^m}{\partial x^h}*\frac{\partial \bar{x}^p}{\partial x^k}*\overline{X}_j*\hat{d}x^k$$
$$-\frac{\partial \bar{x}^j}{\partial x^h}\frac{\partial \Gamma^h{}_i}{\partial x^k}\hat{\Gamma}^i{}_h*\overline{X}_j*\hat{d}x^k$$

elde edilir. Burada $\overline{X}_j=\frac{\partial x^h}{\partial \bar{x}^j}*X_h$ ve $\frac{\partial \bar{x}^j}{\partial x^k}*\hat{d}x^k=\hat{d}\bar{x}^j$ değerleri yerine yazılırsa,

$$\frac{\partial^2 x^j}{\partial x^k \partial x^h}*\overline{X}_j*\hat{d}x^k=\hat{\Gamma}_h{}^l{}_k*X_l*\hat{d}x^k-\hat{\overline{\Gamma}}_m{}^j{}_p*\frac{\partial \bar{x}^m}{\partial x^h}*\overline{X}_j*\hat{d}\bar{x}^p$$
$$-\frac{\partial \bar{x}^j}{\partial x^h}\frac{\partial \Gamma^h{}_i}{\partial x^l}\overline{X}_h*\hat{d}x^k$$

bulunur. Bu eşitlik (3.13) de gözönüne alınır ve j ile m de yer değiştirirse;

$$\hat{d}X_h-\hat{\Gamma}_h{}^l{}_k*X_\ell*\hat{d}x^k=\frac{\partial \bar{x}^m}{\partial x^h}\left(\hat{d}\overline{X}_j-\hat{\overline{\Gamma}}_j{}^m{}_p*\overline{X}_m*\hat{d}\bar{x}^p\right) \tag{3.14}$$

elde edilir ki bu da

$$\hat{D}X_h=\hat{d}X_h-\hat{\Gamma}_h{}^l{}_k*X_\ell*\hat{d}x^k \tag{3.15}$$

ile tanımlanan niceliklerin bir kovaryant izovektör alanının bileşenleri olduğunu gösterir. (3.15) eşitliğine bir kovaryant izovektör alanının X_h bileşeninin *izomutlak diferensiyeli* denir.

Şimdi (r,s)-tipinden herhangi bir izotensör alanının izomutlak diferensiyelini tanımlamadan önce bir izoskalar alanın izomutlak diferensiyelinin onun adi izodiferensiyeli olarak tanımlanmasını biraz daha ayrıntılı olarak inceleyelim. Bilindiği gibi bir izoskalar alan (0,0)-tipinden bir izotensör alanıdır. Dolayısıyla birisi kovaryant ve diğeri kontravaryant iki izovektör alanlarının çarpımı olarak,

$$\phi = X^h * Y_h$$

şeklinde yazabiliriz. Buradan

$$\hat{D}\left(X^h * Y_h\right) = \hat{D}(\phi) = \hat{d}\phi = \hat{d}\left(X^h * Y_h\right) = \hat{d}X^h * Y_h + X^h * \hat{d}Y_h$$

elde edilir. Sağ tarafdaki $\hat{d}X^h$ ve $\hat{d}Y_h$ izodiferensiyelleri yerine bunlara karşılık gelen (3.8) ve (3.15) deki değerleri yerlerine yazılırsa;

$$\begin{aligned}\hat{D}\left(X^h * Y_h\right) &= \left(\hat{D}X^h - \hat{\Gamma}_l{}^h{}_k * X^l * \hat{d}x^k\right) * Y_h + X^h * \left(\hat{D}Y_h + \hat{\Gamma}_h{}^l{}_k * Y_l * \hat{d}x^k\right) \\ &= \hat{D}X^h * Y_h + X^h * \hat{D}Y_h\end{aligned} \tag{3.16}$$

elde edilir. Bu sonuç gösterirki adi anlamda izodiferensiyel için elde edilen çarpım kuralı izomutlak diferensiyel için de geçerlidir.

Şimdi (r,s)-tipinden bir izotensör alanı için izomutlak diferensiyeli tanımlayabiliriz. Eğer üzerinde çalıştığımız diferensiyellenebilir izomanifold bir izoafin konneksiyona haiz ise herhangi bir izotensör alanının izomutlak diferensiyelini oluşturmak mümkündür. Bunun için (1.1) ifadesinin izodiferensiyeli alınır, istenmeyen terimler (3.6c) ve (3.11) eşitlikleri yardımıyla, konneksiyon katsayılarının terimleri içerisinde elimine edilir.

Gereksiz bir karmaşık hesaplamadan kaçınmak maksadıyla (1,1)-tipinden bir izotensör alanı için hesaplamaları vereceğiz. (r,s)-tipinde bir izotensör alanı için de benzer metod uygulanabilir.

(1,1)-tipinde bir $X^p{}_h(x^q)$ izotensör alanını göz önüne alalım. $X^p{}_h$ nın $(\bar{x}^m)$ izokoordinat sistemine göre ifadesi,

$$\bar{X}^j{}_l(\bar{x}^m)=\frac{\partial \bar{x}^j}{\partial x^p}*\frac{\partial x^h}{\partial \bar{x}^l}*X^p{}_h=\frac{\partial \bar{x}^j}{\partial x^p}\mathrm{T}^p{}_q\frac{\partial x^h}{\partial \bar{x}^l}\mathrm{T}_h{}^r X^q{}_r \tag{3.17}$$

dir. Bu ifadenin her iki tarafının $\bar{x}^m$ ye göre kısmi türevi alınır, $\hat{d}\bar{x}^m$ ile izoçarpılır ve gerekli kısaltmalar yapılırsa,

$$\hat{d}\bar{X}^j_l+\hat{\bar{\Gamma}}_m{}^j{}_k*\bar{X}^m_l*\hat{d}\bar{x}^k-\hat{\bar{\Gamma}}_h{}^m{}_k*\bar{X}^j{}_m*\hat{d}\bar{x}^k=$$

$$\frac{\partial \bar{x}^j}{\partial x^k}*\frac{\partial x^h}{\partial \bar{x}^l}\left(\hat{d}X^p_h+\hat{\Gamma}_m{}^p{}_k*X^m_h*\hat{d}x^k-\hat{\Gamma}_h{}^m{}_k*X^p_m*\hat{d}x^k\right)$$

elde edilir. Bu da bize gösterir ki (1,1)-tipinden bir izotensör alanının $X^p{}_h(x^q)$ bileşeninin izomutlak diferensiyeli

$$\hat{D}X^p{}_h=\hat{d}X^p{}_h+\hat{\Gamma}_m{}^p{}_k*X^m{}_h*\hat{d}x^k-\hat{\Gamma}_h{}^m{}_k*X^p{}_m*\hat{d}x^k \tag{3.18}$$

olup yine (1,1)-tipinden bir izotensör alanının bileşenleridir.

Benzer olarak (r,s)-tipinden bir tensör alanının izomutlak diferensiyeli

$$\begin{aligned}\hat{D}X^{j_1j_2\cdots j_r}{}_{\ell_1\ell_2\ldots\ell_s}=\hat{d}X^{j_1j_2\cdots j_r}{}_{\ell_1\ell_2\ldots\ell_s}&+\sum_{\alpha=1}^{r}\hat{\Gamma}_m{}^{j_\alpha}{}_k*X^{j_1j_2\cdots j_{\alpha-1}mj_{\alpha+1}\cdots j_r}{}_{\ell_1\ell_2\ldots\ell_s}*\hat{d}x^k\\&-\sum_{\beta=1}^{s}\hat{\Gamma}_{\ell_\beta}{}^m{}_k*X^{j_1j_2\cdots j_r}{}_{\ell_1\ell_2\ldots\ell_{\beta-1}m\ell_{\beta+1}\ldots\ell_s}*\hat{d}x^k\end{aligned} \tag{3.19}$$

olup, (3.8), (3.15) ve (3.18) ifadeleri bu formülün özel halleridir. İleriki çalışmalarımızda kullanmak maksadıyla aşağıdaki iki özel durumu da açık olarak vermekte yarar vadır. Bunlar

1. (0,2)- tipinden bir izotensör alanı U_{ij} nin izomutlak diferensiyeli

$$\begin{aligned}\hat{D}U_{ij}&=\hat{d}U_{ij}-\hat{\Gamma}_i{}^m{}_k*U_{mj}*\hat{d}x^k-\hat{\Gamma}_j{}^m{}_k*U_{im}*\hat{d}x^k\\&=\hat{d}U_{ij}-\hat{\Gamma}_i{}^m{}_k\mathrm{T}_m{}^pU_{pj}\mathrm{T}^k{}_q\hat{d}x^q-\hat{\Gamma}_j{}^m{}_k\mathrm{T}_m{}^rU_{ir}\mathrm{T}^k{}_s\hat{d}x^s\end{aligned} \tag{3.20}$$

dir.

2. (2,0)-tipinden bir izotensör alanı V^{ij} için de

$$\hat{D}V^{ij} = \hat{d}V^{ij} + \hat{\Gamma}_{m}{}^{i}{}_{k} * V^{mj} * \hat{d}x^{k} + \hat{\Gamma}_{m}{}^{j}{}_{k} * V^{imj} * \hat{d}x^{k}$$
$$= \hat{d}V^{ij} + \hat{\Gamma}_{m}{}^{i}{}_{k} T^{m}{}_{p} V^{pj} T^{k}{}_{q} \hat{d}x^{q} + \hat{\Gamma}_{m}{}^{j}{}_{k} T^{m}{}_{r} V^{ir} T^{k}{}_{s} \hat{d}x^{s} \tag{3.21}$$

şeklindedir.

İsomutlak diferensiyelin temel özelliklerini aşağıdaki şekilde sıralayabiliriz:

1. (r,s)-tipinden bir izotensör alanının izomutlak diferensiyeli (r,s)-tipinden bir izotensör alanıdır.

2. Aynı tipden iki tensör alanının toplamının izomutlak diferensiyeli bu izotensör alanlarının izomutlak diferensiyellerinin toplamına eşittir.

3. Herhangi iki izotensör alanın çarpımının izomutlak diferensiyeli, adi anlamdaki izodiferensiyelin çarpım kuralına benzer formda, bu alanların herbirinin izomutlak diferensiyelinin terimlri içinde verilir. Örneğin (2,0)-tipinden bir V^{ij} izotensör alanının bir kovaryant izovektör alanı Y_h ile çarpımını, yani

$$X^{ij}{}_{h} = V^{ij} * Y_{h} \tag{3.22}$$

çarpımını göz önüne alalım. (3.19) ifadesinden

$$\hat{D}X^{ij}{}_{h} = \hat{d}X^{ij}{}_{h} + \hat{\Gamma}_{m}{}^{i}{}_{k} * X^{mj}{}_{h} * \hat{d}x^{k} + \hat{\Gamma}_{m}{}^{j}{}_{k} * X^{im}{}_{h} * \hat{d}x^{k} - \hat{\Gamma}_{h}{}^{m}{}_{k} * X^{ij}{}_{m} * \hat{d}x^{k}$$

elde edilir. (3.22) eşitliği burada yerine yazılırsa,

$$\hat{D}(V^{ij} * Y_h) = \hat{d}(V^{ij} * Y_h) + \hat{\Gamma}_{m}{}^{i}{}_{k} * V^{mj} * Y_h * \hat{d}x^{k} + \hat{\Gamma}_{m}{}^{j}{}_{k} * V^{im} * Y_h * \hat{d}x^{k} - \hat{\Gamma}_{h}{}^{m}{}_{k} * V^{ij} * Y_m * \hat{d}x^{k}$$
$$= (\hat{d}V^{ij}) * Y_h + V^{ij} * (\hat{d}Y_h) + (\hat{\Gamma}_{m}{}^{i}{}_{k} * V^{mj} + \hat{\Gamma}_{m}{}^{j}{}_{k} * V^{im}) * Y_h * \hat{d}x^{k} - V^{ij} * (\hat{\Gamma}_{h}{}^{m}{}_{k} * Y_m * \hat{d}x^{k})$$
$$= (\hat{d}V^{ij} + \hat{\Gamma}_{m}{}^{i}{}_{k} * V^{mj} * \hat{d}x^{k} + \hat{\Gamma}_{m}{}^{j}{}_{k} * V^{im} * \hat{d}x^{k}) * Y_h + V^{ij} * (\hat{d}Y_h - \hat{\Gamma}_{h}{}^{m}{}_{k} * Y_m * \hat{d}x^{k})$$
$$= \hat{D}V^{ij} * Y_h + V^{ij} * \hat{D}Y_h$$

bulunur.

Bu bölümü sona erdirmeden önce izomutlak diferensiyelin yukarıda verilen tanım ve özelliklerinin $\hat{\Gamma}_{h}{}^{i}{}_{k}(x^{p})$ konneksiyon katsayılarının herhangi bir cümlesi için geçerli olduğunu dikkat etmeliyiz. Yukarıda verilen sonuçlar yalnızca konneksiyon katsayılarının (3.6c) döşüm kuralına bağlıdır. Aynı döşüm kuralını sağlayan diğer bir konneksiyon $\tilde{\Gamma}_h{}^i{}_k(x^p)$ verilmiş, yani

$$\begin{aligned}\tilde{\tilde{\Gamma}}_m{}^j{}_p &= \frac{\partial \bar{x}^j}{\partial x^l} * \frac{\partial x^h}{\partial \bar{x}^m} * \frac{\partial x^k}{\partial \bar{x}^p} * \tilde{\Gamma}_h{}^l{}_k - \frac{\partial^2 \bar{x}^j}{\partial x^k \partial x^h} * \frac{\partial x^h}{\partial \bar{x}^m} * \frac{\partial x^k}{\partial \bar{x}^p} \\ &\quad - \frac{\partial \bar{x}^j}{\partial x^h} \frac{\partial T^h{}_i}{\partial x^k} \hat{I}^i{}_h * \frac{\partial x^h}{\partial \bar{x}^m} * \frac{\partial x^k}{\partial \bar{x}^p}\end{aligned} \tag{3.23}$$

ise, (3.19) genel formülünde bu alternatif katsayıları da kullanabiliriz. Doğal olarak bu izomutlak diferensiyelin bileşenlerinin sayısal değerleri öncekilerden farklı olmakla beraber yine de aynı tipden bir izotensör ifade eder.

(3.23) ün (3.6c) den çıkarılmasıyla elde edilen iki konneksiyon katsayıları arasındaki farklar;

$$\tilde{\tilde{\Gamma}}_m{}^j{}_p - \hat{\Gamma}_m{}^j{}_p = \frac{\partial \bar{x}^j}{\partial x^l} * \frac{\partial x^h}{\partial \bar{x}^m} * \frac{\partial x^k}{\partial \bar{x}^p} \left(\tilde{\Gamma}_h{}^l{}_k - \hat{\Gamma}_h{}^l{}_k \right) \tag{3.24}$$

dir ve (1,2)-tipinden bir izotensör alanının bileşenlerini oluştururlar. Bu bize bazı önemli sonuçlar verir. Örneğin, $\hat{\Gamma}_h{}^l{}_k$ katsayıları bir konneksiyon ifade ediyorsa $\hat{\Gamma}_k{}^l{}_h$ katsayıları da bir konneksiyon ifade eder. Dolayısıyla $\tilde{\Gamma}_h{}^l{}_k = \hat{\Gamma}_h{}^l{}_k$ alınırsa, (3.24) den

$$\hat{\Gamma}_h{}^l{}_k - \hat{\Gamma}_k{}^l{}_h \tag{3.25}$$

farkları da (1,2)-tipinden bir izotensörün bileşenleridir. Buna genellikle konneksiyonun *izotorsiyon tensörü* denir. Açık olarak (3.25) farkı bir izokoordinat sistemine göre sıfır ise herhangi bir izokoordinat sistemine göre de sıfırdır, yani $\hat{\Gamma}_h{}^l{}_k$ katsayıları koordinat sisteminin seçilişinden bağımsızdır.

Verilen bir izoafin konneksiyonun $\hat{\Gamma}_h{}^l{}_k$ katsayıları simetrik ve anti-simetrik kısımlara ayrılabilir, yani

$$\hat{\Gamma}_h{}^l{}_k = \frac{1}{2}\left(\hat{\Gamma}_h{}^l{}_k + \hat{\Gamma}_k{}^l{}_h \right) + \frac{1}{2}\left(\hat{\Gamma}_h{}^l{}_k - \hat{\Gamma}_k{}^l{}_h \right)$$

yazılabilir. Eğer $\hat{\Gamma}_h{}^l{}_k = \hat{\Gamma}_k{}^l{}_h$ ise, konneksiyona *simetrik*tir denir.

III.4 Kısmi İzokovaryant Türev

C^1-sınıfından bir $f(x)$ izofonsiyonun $\hat{d}f$ izodiferensiyeli ile kısmi türevleri arasında

$$\hat{d}f = \frac{\partial f}{\partial x^k} * \hat{d}x^k \tag{4.1}$$

şeklinde bir bağıntı mevcuttur. Hemen aklımıza böyle bir bağıntının izomutlak diferensiyel için de mevcut olup olmadığı sorusu gelmektedir. Böyle bir sorunun cevabını bulmak için kısmi türevlerin tensörel kıyaslamasını oluşturmamız gerekir. Bunu yine bir konneksiyon yardımıyla kolayca yapabiliriz.

Kısalığın hatırı için yine $\hat{M}$ üzerinde C^1-sınıfından kontravaryant izovektör alanının $X^h = X^h(x^p)$ bileşenlerini göz önüne alalım. X^h için dönüşüm kuralı

$$\overline{X}^j(\overline{x}^l) = \frac{\partial \overline{x}^j}{\partial x^h} * X^h(x^p) = \frac{\partial \overline{x}^j}{\partial x^h} \mathrm{T}^h{}_k X^k(x^p) \tag{4.2}$$

ile verilir. Bundan önceki bölümde (2.11) ile gördük ki $X^h(x^p)$ nın kısmi türevleri tensörel nicelikler değildir. Bu ifadenin sağ tarafındaki ilk iki terim (3.6b) yardımıyla yok edilir ve gerekli kısaltmalar yapılırsa;

$$\frac{\partial \overline{X}^j}{\partial \overline{x}^l} + \hat{\overline{\Gamma}}_m{}^j{}_l * \overline{X}^m = \frac{\partial \overline{x}^j}{\partial x^p} * \frac{\partial x^k}{\partial \overline{x}^l} * \left(\frac{\partial X^p}{\partial x^k} + \hat{\Gamma}_h{}^p{}_k * X^h \right) \tag{4.3}$$

elde edilir ve buradan görülür ki

$$X^p{}_{\bullet k} = \frac{\partial X^p}{\partial x^k} + \hat{\Gamma}_h{}^p{}_k * X^h \tag{4.4}$$

ile tanımlanan nicelikler (1,1)-tipinde bir izotensörün bileşenlerini oluştururlar.

III.5.1 Tanım: (4.4) ifadesine, bir kontravaryant izovektör alanının $X^p = X^p(x^k)$ bileşeninin x^k ya göre *izokovaryant türevi* denir.

(4.4) ifadesinin her iki tarafı $\hat{d}x^k$ ile çarpılırsa,

$$X^p{}_{\bullet k} * \hat{d}x^k = \frac{\partial X^p}{\partial x^k} * \hat{d}x^k + \hat{\Gamma}_h{}^p{}_k * X^h * \hat{d}x^k$$

bulunur. $\frac{\partial X^p}{\partial x^k} * \hat{dx}^k = \hat{d}X^p$ olduğundan (3.8) den

$$X^p_{\bullet k} * \hat{dx}^k = \hat{D}X^p \tag{4.5}$$

elde edilir. Bu da bize bir C^l-snfından kontravaryant izotensör alanın $X^p(x^k)$ bileşeninin izokovaryant türevi ile izomutlak diferensiyeli arasındaki bağıntıyı verir.

Benzer şekilde bir C^1-sınıfından kovaryant izotensör alanın $X_h(x^k)$ bileşenlerinin *izokovaryant türevi*

$$X_{h\bullet k} = \frac{\partial X_h}{\partial x^k} - \hat{\Gamma}_{h\ k}^{\ m} * X_m \tag{4.7}$$

ve *izokovaryant diferensiyeli* de

$$\hat{D}X_h = X_{h\bullet k} * \hat{dx}^k \tag{4.8}$$

ile verilir. Yüsek dereceden izotensör alanları için de benzer ifadeler geçerlidir.

Kolayca gösterilebilir ki izokovaryant türev aşağıdaki özelliklere sahiptir:

1. (r,s)-tipinden bir izotensör alanının izokovaryant türevi (r,s+1)-tipinden bir izotensör alanıdır.

2. Aynı tipden iki izotensör alanının toplamının izokovaryant türevi bu alanların izokovaryant türevinin toplamına eşittir.

3. Herhangi iki izotensör alanının çarpımının izokovaryant türevi, klasik anlamda kısmi türevlerin çarpım kuralına benzer formda bir kuralla, bu izotensör alanlarının izokovaryant türevleri cinsinden verilmiştir. Bu çarpım kuralı, izomutlak diferensiyel durumundaki gibi doğrudan bir hesaplamayla gösterilebilir.

III.5 İzoeğrilik ve İzotorsiyon

Şimdi herhangi bir diferensiyellenebilir M manifoldu üzerinde tanımlanan eğrilik ve torsiyon tensörü kavramlarını bir izomanifold üzerinde tanımlamaya çalışalım. Herhangi bir diferensiyellenebilir manifold üzerinde eğrilik ve torsiyon tensörü, M üzerindeki konneksiyon katsayıları $\Gamma_{h\ k}^{\ j}$ olmak üzere, sırasıyla,

$$K_{l\ hk}^{\ j} = \frac{\partial \Gamma_{l\ h}^{\ j}}{\partial x^k} - \frac{\partial \Gamma_{l\ k}^{\ j}}{\partial x^h} + \Gamma_{m\ k}^{\ j}\Gamma_{l\ h}^{\ m} - \Gamma_{m\ h}^{\ j}\Gamma_{l\ k}^{\ m}$$

ve (5.1)

$$\Im_{h\ k}^{\ j} = \Gamma_{h\ k}^{\ j} - \Gamma_{k\ h}^{\ j}$$

olarak tanımlanmıştır [4].

Bu kavramların bir diferensiyellenebilir izomanifold üzerindeki karşılıklarını bakalım. Bundan sonra bu kavramlara genişletilmiş eğrilik ve torsiyon anlamında, sırasıyla, *izoeğrilik* ve *izotorsiyon* diyeceyiz.

Bunun için $\hat{M}$ izomanifoldu üzerinde keyfi bir konneksiyon $\hat{\Gamma}_{h\ k}^{\ j}(x^p)$ yardımıyla tanımlanan izokovaryant türevlerin komutatifliği üzerinde duralım. $\hat{M}$ üzerinde C^2-sınıfından bir kontravaryant izotensör alanının bileşenleri $X^j(x^h)$ olsun. $X^j(x^h)$ nın x^h ya göre izokovaryant türevinin

$$X^j{}_{\bullet h} = \frac{\partial X^j}{\partial x^h} + \hat{\Gamma}_{m\ h}^{\ j} * X^m = \frac{\partial X^j}{\partial x^h} + \hat{\Gamma}_{m\ h}^{\ j} \mathrm{T}^m{}_r X^r \tag{5.2}$$

(1,1)-tipinde bir izotensör alanı olduğunu biliyoruz. (5.2) in tekrar x^k ya göre izokovaryant türevi alınırsa,

$$X^j{}_{\bullet h \bullet k} = \frac{\partial}{\partial x^k}\left(X^j{}_{\bullet h}\right) + \hat{\Gamma}_{m\ h}^{\ j} * \left(X^m{}_{\bullet h}\right) - \hat{\Gamma}_{h\ k}^{\ m} * \left(X^j{}_{\bullet m}\right)$$

bulunur. $X^j{}_{\bullet h}$ nın (5.2) deki değeri burada yerine yazılırsa,

$$\begin{aligned} X^j{}_{\bullet h \bullet k} &= \frac{\partial}{\partial x^k}\left(\frac{\partial X^j}{\partial x^h} + \hat{\Gamma}_{m\ h}^{\ j} * X^m\right) + \hat{\Gamma}_{m\ k}^{\ j} * \left(\frac{\partial X^m}{\partial x^h} + \hat{\Gamma}_{p\ h}^{\ m} * X^p\right) - \hat{\Gamma}_{h\ k}^{\ m} * X^j{}_{\bullet m} \\ &= \frac{\partial^2 X^j}{\partial x^k \partial x^h} + \frac{\partial \hat{\Gamma}_{m\ h}^{\ j}}{\partial x^k} * X^m + \hat{\Gamma}_{m\ h}^{\ j} \frac{\partial \mathrm{T}^m{}_r}{\partial x^k} X^r + \hat{\Gamma}_{m\ h}^{\ j} * \frac{\partial X^m}{\partial x^k} \\ &\quad + \hat{\Gamma}_{m\ k}^{\ j} * \frac{\partial X^m}{\partial x^h} + \hat{\Gamma}_{m\ k}^{\ j} * \hat{\Gamma}_{p\ h}^{\ m} * X^p - \hat{\Gamma}_{h\ k}^{\ m} * X^j{}_{\bullet m} \end{aligned} \tag{5.3}$$

(1,2)-tipinde bir izotensör alanı elde edilir. Eğer bu son ifade de h ve k indisleri yerdeğiştirir ise,

$$X^j{}_{\bullet k \bullet h} = \frac{\partial^2 X^j}{\partial x^h \partial x^k} + \frac{\partial \hat{\Gamma}^{\ j}_{m\ k}}{\partial x^h} * X^m + \hat{\Gamma}^{\ j}_{m\ k} \frac{\partial \mathrm{T}^m{}_r}{\partial x^h} X^r + \hat{\Gamma}^{\ j}_{m\ k} * \frac{\partial X^m}{\partial x^h}$$

$$+ \hat{\Gamma}^{\ j}_{m\ h} * \frac{\partial X^m}{\partial x^k} + \Gamma^{\ j}_{m\ h} * \hat{\Gamma}^{\ m}_{p\ k} * X^p - \hat{\Gamma}^{\ m}_{k\ h} * X^j{}_{\bullet m} \tag{5.4}$$

bulunur. (5.4) ifadesi (5.3) ifadesinden çıkarılır, $\dfrac{\partial^2 X^j}{\partial x^k \partial x^h}$ kısmi türevlerinin simetrik olması göz önüne alınır ve gerekli kısaltmalar yapılırsa;

$$X^j{}_{\bullet h \bullet k} - X^j{}_{\bullet k \bullet h} = \left(\frac{\partial \hat{\Gamma}^{\ j}_{l\ h}}{\partial x^k} - \frac{\partial \hat{\Gamma}^{\ j}_{l\ k}}{\partial x^h} + \hat{\Gamma}^{\ j}_{m\ k} * \hat{\Gamma}^{\ m}_{l\ h} - \hat{\Gamma}^{\ j}_{m\ h} * \hat{\Gamma}^{\ m}_{l\ k} \right) * X^l$$

$$+ \left(\hat{\Gamma}^{\ j}_{m\ h} \frac{\partial \mathrm{T}^m{}_r}{\partial x^k} - \hat{\Gamma}^{\ j}_{m\ k} \frac{\partial \mathrm{T}^m{}_r}{\partial x^h} \right) X^r - \left(\hat{\Gamma}^{\ m}_{h\ k} - \hat{\Gamma}^{\ m}_{k\ h} \right) * X^j{}_{\bullet m} \tag{5.5}$$

eşitliği elde edilir.

Şimdi bir n-boyutlu izomanifold $\hat{M}$ üzerinde C^2-sınıfından bir kontravaryant izovektör alanı için izoeğrilik ve izotorsiyon kavramlarını aşağıdaki şekilde tanımlaya-biliriz.

III.5.1 Tanım: Bir n-boyutlu izomanifold $\hat{M}$ üzerinde C^2-sınıfından bir kontravaryant izovektör alanın *izoeğrilik tensörü*nün bileşenleri;

$$\hat{\mathrm{K}}_{\ell\ hk}^{\ j} = \frac{\partial \hat{\Gamma}^{\ j}_{\ell\ h}}{\partial x^k} - \frac{\partial \hat{\Gamma}^{\ j}_{\ell\ k}}{\partial x^h} + \hat{\Gamma}^{\ j}_{m\ k} * \hat{\Gamma}^{\ m}_{\ell\ h} - \hat{\Gamma}^{\ j}_{m\ h} * \hat{\Gamma}^{\ m}_{\ell\ k}$$

$$+ \hat{\Gamma}^{\ j}_{m\ h} \frac{\partial \mathrm{T}^m{}_r}{\partial x^k} \hat{\mathrm{I}}^r{}_\ell - \hat{\Gamma}^{\ j}_{m\ k} \frac{\partial \mathrm{T}^m{}_r}{\partial x^h} \hat{\mathrm{I}}^r{}_\ell \tag{5.6}$$

ile tanımlanan (1,3)-tipinde bir izotensör alanın bileşenleridir. *İzotorsiyon tensörü* nün bileşenleri de

$$\hat{\Im}_{h\ k}^{\ m} = \hat{\Gamma}^{\ m}_{h\ k} - \hat{\Gamma}^{\ m}_{k\ h} \tag{5.7}$$

ile tanımlanan (1,2)-tipinde bir izotensör alanın bileşenleridir.

(5.5) ve (5.5') ifadeleri (5.4) de yerine yazılırsa;

$$X^{j}{}_{\bullet h \bullet k} - X^{j}{}_{\bullet k \bullet h} = \hat{\mathrm{K}}_{\ell}{}^{j}{}_{hk} * X^{\ell} - \hat{\Im}_{h}{}^{m}{}_{k} * X^{j}{}_{\bullet m} \tag{5.8}$$

elde edilir.

C^2-sınıfından bir kontravayant izovektör alanı için elde edilen bu sonuçlar (2,0)-tipinden bir izotensör alanına genişletilmesi ile

$$X^{ij}{}_{\bullet h \bullet k} - X^{ij}{}_{\bullet k \bullet h} = \hat{\mathrm{K}}_{\ell}{}^{i}{}_{hk} * X^{\ell j} + \hat{\mathrm{K}}_{\ell}{}^{j}{}_{hk} * X^{i\ell} - \hat{\Im}_{h}{}^{m}{}_{k} * X^{ij}{}_{\bullet m}$$

elde edilir.

Benzer olarak C^2-sınıfından bir kovaryant izovektör alanın $X_j(x^k)$ bileşenleri için

$$X_{j \bullet h \bullet k} - X_{j \bullet k \bullet h} = -\hat{\mathrm{K}}_{j}{}^{\ell}{}_{hk} * X_{\ell} - \hat{\Im}_{h}{}^{m}{}_{k} * X_{j \bullet m} \tag{5.9}$$

eşitliği ve (0,2)-tipinden bir izotensör alanı için de

$$X_{ij \bullet h \bullet k} - X_{ij \bullet h \bullet k} = -\hat{\mathrm{K}}_{i}{}^{\ell}{}_{hk} * X_{\ell j} - \hat{\mathrm{K}}_{j}{}^{\ell}{}_{hk} * X_{i\ell} - \hat{\Im}_{h}{}^{m}{}_{k} * X_{ij \bullet m} \tag{5.10}$$

eşitliği elde edilir.

Benzer düşünceyle C^2-sınıfından (r,s)-tipinden herhangi bir izotensör alanın bileşenleri için de

$$\begin{aligned} X^{j_1 j_2 \ldots j_r}{}_{\ell_1 \ell_2 \ldots \ell_s \bullet h \bullet k} - X^{j_1 j_2 \ldots j_r}{}_{\ell_1 \ell_2 \ldots \ell_s \bullet k \bullet h} &= \sum_{\alpha=1}^{r} \mathrm{K}_{m}{}^{j_\alpha}{}_{hk} * X^{j_1 j_2 \ldots j_{\alpha-1} m j_{\alpha+1} \ldots j_r}{}_{\ell_1 \ell_2 \ldots \ell_s} \\ &- \sum_{\beta=1}^{s} \mathrm{K}_{\ell_\beta}{}^{m}{}_{hk} * X^{j_1 j_2 \ldots j_r}{}_{\ell_1 \ell_2 \ldots \ell_{\beta-1} m \ell_{\beta+1} \ldots \ell_s} - \Im_{h}{}^{m}{}_{k} * X^{j_1 j_2 \ldots j_r}{}_{\ell_1 \ell_2 \ldots \ell_s \bullet m} \end{aligned} \tag{5.11}$$

bulunur. (5.11) in özel halleri olan (5.5)-(5.10) bağıntılarına *izoricci özdeşlikleri* adı verilir.

Şimdi Tanım 3.1 ile verilen izoeğrilik tensörünün özelliklerini inceleyelim:

İlk olarak, izoeğrilik tensörü $\mathrm{K}_{\ell}{}^{j}{}_{hk}$, son iki indis h ve k ya göre anti-simetriktir, yani

$$\mathrm{K}_{\ell}{}^{j}{}_{hk} = -\mathrm{K}_{\ell}{}^{j}{}_{kh}. \tag{5.12}$$

Bu özellik Tanım 3.1. den kolayca görülür.

İkinci olarak, (5.6) eşitliğinde ℓ ,h ve k indislerinin bir dairesel permütasyonu göz önüne alındığında buna benzer iki ifade daha elde ederiz. Bu elde edilen ifadeler (5.6) ya eklendiğinde,

$$\begin{aligned}\hat{K}_{l\ hk}^{\ j} + \hat{K}_{h\ kl}^{\ j} + \hat{K}_{k\ lh}^{\ j} &= \frac{\partial \hat{\Im}_{h\ k}^{\ j}}{\partial x^{\ell}} + \frac{\partial \hat{\Im}_{k\ l}^{\ j}}{\partial x^{h}} + \frac{\partial \hat{\Im}_{l\ h}^{\ j}}{\partial x^{k}} \\ &+ \hat{\Gamma}_{m\ l}^{\ j} * \hat{\Im}_{h\ k}^{\ m} + \hat{\Gamma}_{m\ h}^{\ j} * \hat{\Im}_{k\ l}^{\ m} + \hat{\Gamma}_{m\ k}^{\ j} * \hat{\Im}_{l\ h}^{\ m} \\ &+ \hat{\Im}_{m\ l}^{\ j} \frac{\partial T^{m}_{\ r}}{\partial x^{h}} \hat{I}^{r}_{\ k} + \hat{\Im}_{m\ h}^{\ j} \frac{\partial T^{m}_{\ r}}{\partial x^{k}} \hat{I}^{r}_{\ \ell} + \hat{\Im}_{m\ k}^{\ j} \frac{\partial T^{m}_{\ r}}{\partial x^{\ell}} \hat{I}^{r}_{\ h}\end{aligned} \tag{5.13}$$

toplamı bulunur. Bu eşitliğin sol tarafi bir tensörel ifade iken sağ tarafdaki terimler kendi başlarına tensörel değildir. Fakat bu son eşitlikde $\hat{\Im}$ izotorsiyon tensörünün kısmi türevleri izokovaryant türevleriyle yerdeğiştirilirse,

$$\begin{aligned}\hat{K}_{\ell\ hk}^{\ j} + \hat{K}_{h\ k\ell}^{\ j} + \hat{K}_{k\ \ell h}^{\ j} &= \hat{\Im}_{\ell\ h\bullet k}^{\ j} + \hat{\Im}_{h\ k\bullet \ell}^{\ j} + \hat{\Im}_{k\ \ell\bullet h}^{\ j} \\ &+ \hat{\Im}_{\ell\ m}^{\ j} * \hat{\Im}_{h\ k}^{\ m} + \hat{\Im}_{h\ m}^{\ j} * \hat{\Im}_{k\ \ell}^{\ m} + \hat{\Im}_{k\ m}^{\ j} * \hat{\Im}_{\ell\ h}^{\ m} \\ &+ \hat{\Im}_{m\ \ell}^{\ j} \frac{\partial T^{m}_{\ r}}{\partial x^{h}} \hat{I}^{r}_{\ k} + \hat{\Im}_{m\ h}^{\ j} \frac{\partial T^{m}_{\ r}}{\partial x^{k}} \hat{I}^{r}_{\ \ell} + \hat{\Im}_{m\ k}^{\ j} \frac{\partial T^{m}_{\ r}}{\partial x^{\ell}} \hat{I}^{r}_{\ h}\end{aligned}$$

elde edilir. Bir simetrik konneksiyon için izotorsiyon sıfır olduğundan

$$\hat{K}_{\ell\ hk}^{\ j} + \hat{K}_{h\ k\ell}^{\ j} + \hat{K}_{k\ \ell h}^{\ j} = 0 \tag{5.15}$$

elde edilir ki bu da bize klasik anlamda eğrilik tensörünün bileşenleri için geçerli olan bu özeliğin([4] sayfa 92 (8.7)) izoeğrilik tensörü için de korunduğunu gösterir.

Üçüncü özellik, izoeğrilik tensörünün izokovaryant türevi hakkında olup,

$$\begin{aligned}\hat{K}_{j\ hk\bullet p}^{\ \ell} + \hat{K}_{j\ kp\bullet h}^{\ \ell} + \hat{K}_{j\ ph\bullet k}^{\ \ell} &= \hat{\Im}_{h\ k}^{\ m} * \hat{K}_{j\ mp}^{\ \ell} + \hat{\Im}_{k\ p}^{\ m} * \hat{K}_{j\ mh}^{\ \ell} + \hat{\Im}_{p\ h}^{\ m} * \hat{K}_{j\ mk}^{\ \ell} \\ &- \hat{K}_{j\ hk}^{\ \ell} T^{m}_{\ell\bullet p} \hat{I}^{\ell}_{m} - \hat{K}_{j\ kp}^{\ \ell} T^{m}_{\ell\bullet h} \hat{I}^{\ell}_{m} - \hat{K}_{j\ ph}^{\ \ell} T^{m}_{\ell\bullet k} \hat{I}^{\ell}_{m}\end{aligned} \tag{5.21}$$

dir. Bu özdeşliğe *izobianchi özdeşliği* denir. Yine verilen konneksiyonun simetrik olması durumunda

$$\hat{K}_{j\ hk\bullet p}^{\ \ell} + \hat{K}_{j\ kp\bullet h}^{\ \ell} + \hat{K}_{j\ ph\bullet k}^{\ \ell} = 0 \tag{5.22}$$

elde edilir.

III.5.2 Tanım: (r,s)-tipinden bir izotensör alanı verilmiş olsun. Biri kontravaryant diğeri kovaryant olan iki indis seçtikden sonra bunları eşit kılmak ve iki defa tekrarlanan bu eşit indise göre toplamaktan ibaret olan işleme *kontraksiyon* denir.

Kontraksiyon işlemi sonunda (r-1,s-1)-tipinden bir izotensör alanı elde edilir. Kontraksiyon işlemi yardımıyla (5.6) ile tanımlanan izoeğrilik tensöründen yeni tensörler elde edebiliriz. Örneğin, (5.6) de j ve k indislerine kontraksiyon işlemi uygulanırsa (0,2)-tipide bir izotensör alanı elde edilir. Elde edilen bu tensör alanına *izoricci tensörü* denir ve

$$\begin{aligned}\hat{K}_{\ell h} = \hat{K}_{\ell\ hj}^{\ j} &= \frac{\partial \hat{\Gamma}_{\ell\ h}^{\ j}}{\partial x^j} - \frac{\partial \hat{\Gamma}_{\ell\ j}^{\ j}}{\partial x^h} + \hat{\Gamma}_{m\ j}^{\ j} * \hat{\Gamma}_{\ell\ h}^{\ m} - \hat{\Gamma}_{m\ h}^{\ j} * \hat{\Gamma}_{\ell\ j}^{\ m} \\ &+ \hat{\Gamma}_{m\ h}^{\ j} \frac{\partial T_{\ r}^{m}}{\partial x^j} \hat{I}^{r}_{\ \ell} - \hat{\Gamma}_{m\ j}^{\ j} \frac{\partial T_{\ r}^{m}}{\partial x^h} \hat{I}^{r}_{\ \ell}\end{aligned} \tag{5.23}$$

ile gösterilir.

İkinci olarak, eğer (5.6) da j ve h indislerine kontraksiyon işlemi uygulanırsa;

$$\begin{aligned}\hat{K}_{\ell\ jk}^{\ j} &= \frac{\partial \hat{\Gamma}_{\ell\ j}^{\ j}}{\partial x^k} - \frac{\partial \hat{\Gamma}_{\ell\ k}^{\ j}}{\partial x^j} + \hat{\Gamma}_{m\ k}^{\ j} * \hat{\Gamma}_{\ell\ j}^{\ m} - \hat{\Gamma}_{m\ j}^{\ j} * \hat{\Gamma}_{\ell\ k}^{\ m} \\ &+ \hat{\Gamma}_{m\ j}^{\ j} \frac{\partial T_{\ r}^{m}}{\partial x^k} \hat{I}^{r}_{\ \ell} - \hat{\Gamma}_{m\ k}^{\ j} \frac{\partial T_{\ r}^{m}}{\partial x^j} \hat{I}^{r}_{\ \ell} \\ &= -\hat{K}_{\ell\ kj}^{\ j} = -\hat{K}_{\ell k}\end{aligned}$$

bulunur ki, bu da 1. özeliğin bir uygulamasıdır.

Böylece bir izometriğin tanımlanması için izoeğrilik tensörünün sağlaması gereken bütün özelleri tamamlamış olduk.

III.6 İzoriemann Geometri

$\hat{M}$ bir n-boyutlu diferensiyellenebilir izomanifold, $\hat{g}_{hk}(x^l)$ de $\hat{M}$ üzerinde C^1-sınıfından, (0,2)-tipinden bir simetrik izotensör alanı, yani

$$\hat{g}_{hk}(x^l) = \hat{g}_{kh}(x^l)$$

olsun. Ohalde $\hat{g}_{hk}$ için dönüşüm kuralı

$$\hat{g}_{hk}(x^l)=\frac{\partial \bar{x}^p}{\partial x^h}*\bar{g}_{pq}(\bar{x}^m)*\frac{\partial \bar{x}^q}{\partial x^k}=\frac{\partial \bar{x}^p}{\partial x^h}\mathrm{T}_p{}^r\bar{g}_{rs}(\bar{x}^m)\mathrm{T}^s{}_q\frac{\partial \bar{x}^q}{\partial x^k} \tag{6.1}$$

ile verilir. Bu ifadenin x^l ye göre kısmi türevleri alınırsa

$$\begin{aligned}\frac{\partial \hat{g}_{hk}}{\partial x^l}&=\frac{\partial^2 \bar{x}^p}{\partial x^l\partial x^h}*\bar{g}_{pq}*\frac{\partial \bar{x}^q}{\partial x^h}+\frac{\partial \bar{x}^p}{\partial x^h}\frac{\partial \mathrm{T}_p{}^r}{\partial x^l}\bar{g}_{rq}*\frac{\partial \bar{x}^q}{\partial x^k}\\&+\frac{\partial \bar{x}^p}{\partial x^h}*\frac{\partial \bar{g}_{pq}}{\partial \bar{x}^m}*\frac{\partial \bar{x}^m}{\partial x^l}*\frac{\partial \bar{x}^q}{\partial x^k}+\frac{\partial \bar{x}^p}{\partial x^h}*\bar{g}_{ps}(\bar{x}^m)\frac{\partial \mathrm{T}^s{}_q}{\partial x^l}\frac{\partial \bar{x}^q}{\partial x^k}\\&+\frac{\partial \bar{x}^p}{\partial x^h}*\bar{g}_{pq}(\bar{x}^m)*\frac{\partial^2 \bar{x}^q}{\partial x^l\partial x^k}\end{aligned} \tag{6.2}$$

bulunur. Bu son ifadede h,k,l indislerinin bir dairesel permütasyonunu göz önüne alınır ve elde edilen ifadelerin toplamından (6,2) nin çıkarılıp, gerekli sadeleştirmeler yapılırsa,

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\left(\frac{\partial \hat{g}_{kl}}{\partial x^h}+\frac{\partial \hat{g}_{lh}}{\partial x^k}-\frac{\partial \hat{g}_{hk}}{\partial x^l}\right)&=\frac{\partial^2 \bar{x}^p}{\partial x^h\partial x^k}*\bar{g}_{pq}*\frac{\partial \bar{x}^q}{\partial x^l}+\\&+\frac{1}{2}\left(\frac{\partial \bar{g}_{qm}}{\partial \bar{x}^p}+\frac{\partial \bar{g}_{mp}}{\partial \bar{x}^q}-\frac{\partial \bar{g}_{pq}}{\partial \bar{x}^m}\right)*\frac{\partial \bar{x}^p}{\partial x^k}*\frac{\partial \bar{x}^m}{\partial x^h}*\frac{\partial \bar{x}^q}{\partial x^l}\\&+\frac{1}{2}\bar{g}_{rq}\left[\begin{array}{l}\frac{\partial \mathrm{T}^r{}_p}{\partial x^h}\left(\frac{\partial \bar{x}^p}{\partial x^k}*\frac{\partial \bar{x}^q}{\partial x^l}+\frac{\partial \bar{x}^p}{\partial x^l}*\frac{\partial \bar{x}^q}{\partial x^k}\right)+\frac{\partial \mathrm{T}^r{}_q}{\partial x^k}\left(\frac{\partial \bar{x}^p}{\partial x^l}*\frac{\partial \bar{x}^q}{\partial x^h}+\frac{\partial \bar{x}^p}{\partial x^h}*\frac{\partial \bar{x}^q}{\partial x^l}\right)-\\ \frac{\partial \mathrm{T}^r{}_p}{\partial x^l}\left(\frac{\partial \bar{x}^p}{\partial x^k}*\frac{\partial \bar{x}^q}{\partial x^h}+\frac{\partial \bar{x}^p}{\partial x^h}*\frac{\partial \bar{x}^q}{\partial x^k}\right)\end{array}\right]\end{aligned}$$

bulunur.

$$\overset{(\hat{g})}{\Gamma}_{hlk}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial \hat{g}_{kl}}{\partial x^h}+\frac{\partial \hat{g}_{lh}}{\partial x^k}-\frac{\partial \hat{g}_{hk}}{\partial x^l}\right) \tag{6.3}$$

ile tanımlanan $\overset{(\hat{g})}{\Gamma}_{hlk}$ niceliklerine, $\hat{g}_{hk}(x^l)$ ye göre *birinci çeşit christoffol sembolleri* denir.

$$\overset{(\hat{g})}{\Gamma}_{hlk}=\overset{(\hat{g})}{\Gamma}_{klh} \tag{6.4}$$

olduğu (6.3) den kolayca görülür. $\hat{g}_{hk}(x^l)$ izotensör alanı singüler olmadığından heryerde bir inverse sahiptir. Doğal olarak bu invers $\hat{g}^{hl}$ formunda (2,0)-tipinde bir tensör alanıdır.

$$\overset{(\hat{g})}{\Gamma}{}_{h}{}^{j}{}_{k} = \hat{g}^{jl} * \overset{(\hat{g})}{\Gamma}{}_{hlk} \tag{6.7}$$

ile tanımlanan $\overset{(\hat{g})}{\Gamma}{}_{h}{}^{j}{}_{k}$ niceliklerine de $\hat{g}_{hk}\left(x^{l}\right)$ ye göre *ikinci çeşit christoffol sembolleri* denir.

$\hat{g}_{hk}\left(x^{l}\right)$ nin x^{l} ye göre izokovaryant türevi, izokovaryant türevin tanımdan

$$\hat{g}_{hk\bullet l} = \frac{\partial \hat{g}_{hk}}{\partial x^{l}} - \hat{\Gamma}_{h}{}^{j}{}_{l} * \hat{g}_{jk} - \hat{\Gamma}_{k}{}^{j}{}_{l} * \hat{g}_{hj} \tag{6.8}$$

dir. (6.3) eşitliğinden kolayca görülür ki

$$\frac{\partial \hat{g}_{hk}}{\partial x^{l}} = \overset{(\hat{g})}{\Gamma}{}_{hkl} + \overset{(\hat{g})}{\Gamma}{}_{khl} \tag{6.9}$$

dir. Ayrıca (6.5) ve (6.9), (6.8) de yerine yazılırsa,

$$\hat{g}_{hk\bullet l} = 0, \qquad \hat{g}^{hk}{}_{\bullet l} = 0 \tag{6.10}$$

elde edilir.

III.6.1 Tanım: Yukarıda verilen özelliklere sahip olan $\hat{g}_{hk}\left(x^{l}\right)$ izotensör alanına *izoriemann metriği* ve üzerinde böyle bir izometrik tanımlı $\hat{M}$ izomanifolduna da *izoriemann manifoldu* denir.

III.5.1 Lemma: *(İzoricci lemma):* Bir izoriemann manifoldu $\hat{M}$ üzerinde tanımlı bütün izometriklerin izokovaryant türevleri özdeş olarak sıfırdır, yani bir izoriemann manifoldu üzerinde bir izometrik $\hat{g}_{hk}\left(x^{l}\right)$ ise,

$$\hat{g}_{hk\bullet l} = 0, \qquad l = 1,2,\ldots n \tag{6.11}$$

dir.

III.5.1 Sonuç: Eğer $\hat{M}$ bir izoriemann manifoldu ise, $\hat{M}$ için (4,5) ile tanımlanan $\hat{\Im}$ izotorsiyon tensörü özdeş olarak sıfırdır. Gerçekden (6,7) ve (6.5) den

$$\hat{\Gamma}_{h}{}^{j}{}_{k} = \hat{g}^{jl} * \hat{\Gamma}_{hlk} = \hat{g}^{jl} * \hat{\Gamma}_{klh} = \hat{\Gamma}_{k}{}^{j}{}_{h} \quad \text{ve} \quad \hat{\Im}_{h}{}^{j}{}_{k} = \hat{\Gamma}_{h}{}^{j}{}_{k} - \hat{\Gamma}_{k}{}^{j}{}_{h} = 0 \tag{6.12}$$

elde edilir ki bu da klasik geometriden bilinen bir sonuçtur.

KAYNAKLAR

[1] D.S. Sourlas and G.T. Tsagas, *Mathematical Foundations of the Lie-Santilli Theory*, Ukraine Academy of Sciences, Kiev (1993).

[2] D.S. Sourlas and G.T. Tsagas, *Isomanifolds and their isotensor fields,* Algebras Groups and Geometries, 12. 1-65 (1995).

[3] D.S. Sourlas and G.T. Tsagas, *Isomappings between isomanifolds,* Algebras Groups and Geometries, 12. 66-88 (1995).

[4] D.Loveluck and H.Rund, *Tensots, Differential forms and Variational Principles,* Wiley Intern., New York (1975).

[5] J.V. Kadeisvili, *Elements of functional isoanalysis,* Algebras Groups and Gemetries, 9. 283-318 (1992).

[6] H.C.Myung, An isotensor Product of isohilbert spaces, Hadronic J. 7. 931-946 (1984).

[7] H.H.Hacısalihoğlu, *Lineer Cebir,* Dicle Üniversitesi, Diyarbakır (1975).

[8] H.H.Hacısalihoğlu, *Yüksek Diferensiyel Geometriye Giriş,* Fırat Üni. Elazığ (1983).

[9] R.M. Santilli, *Isotopic liftings of conteporary mathematical structure,* Hadronic J. Suppl. 4A 155-266 (1988).

[10] R.M. Santilli, *Isotopies of differential calculus* I, II, III, Invited paper for the proceedings of the Workshopon Differential Geometry... Aristotle University, Thessaloniki, Greece, December 1994 abnsbd.

ÖZGEÇMİŞ

10-12-1963 yılında Kütahya'nın Gediz ilçesine bağlı Yeniköy de doğdu. İlk okulu aynı köyde, orta öğrenimini Uşak da bitirdi ve 1982 yılında İnönü Üniversitesi Fen-Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümüne girmeye hak kazandı. 1986 yılında bu bölümden mezun olduktan sonra 1987 yılında İnönü Üniversitesi Eğitim Fakültesi Fen-Bilimleri Eğitimi Bölümü Matematik Anabilim dalında araştırma görevlisi olarak işe başladı. 1989 yılında " Regle Altmanifoldlar" adlı tezi ile yüksek lisansını bitirdi. 1992-95 yılları arasında ABD deki Unıversıty of Pittsburgh dan ikinci mastır derecesini aldı. Halen Eğitim Fakültesi Matematik Eğitimi bölümünde araştırma görevlisi olup evli ve iki çocuk babasıdır.