İNÖNÜ ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

CR-ALTMANİFOLDLARIN GEOMETRİSİ

BAYRAM ŞAHİN

YÜKSEK LİSANS TEZİ
MATEMATİK ANABİLİM DALI

MALATYA
1996

"Fen Bilimleri Enstitüsü Müdürlüğüne"

İş bu çalışma, jürimiz tarafından Matematik Anabilim Dalında YÜKSEK LİSANS TEZİ olarak kabul edilmiştir.

Başkan Prof.Dr Sadık Keleş

Üye Doç.Dr A. İhsan Sivridağ

Üye Yrd.Doç.Dr Rifat Güneş

Onay

Yukarıdaki imzaların adı geçen öğretim üyelerine ait olduğunu onaylarım.

...../...../1996

Prof.Dr. Eşref YÜKSEL

Enstitü Müdürü

ÖZET

Dört bölümden oluşan bu çalışmanın birinci bölümü diğer bölümlerin daha kolay anlaşılması için diferensiyel geometrideki bazı temel kavramlara ayrılmıştır.

İkinci bölümde önce hemen hemen kompleks manifoldların inşaasında kullanılacak cebirsel kavramlar ve holomorfik fonksiyonlar verildikten sonra kompleks ve hemen hemen kompleks manifoldlar, Hermityen manifoldlar ve Kaehler manifoldlar verilmiştir. Daha sonra Kaehler manifoldlar için elde edilen kavramlar lokal koordinatlarda formülüze edilmiştir. Bundan sonra ise nearly Kaehler manifoldlar kısaca tanıtılmış ve bu bölümde ele alınan manifoldlara çeşitli örnekler verilmiştir.

Üçüncü bölüm CR-yapılara ayrılmıştır. Bu bölümde CR-manifoldlar tanıtılmış, keyfi bir manifoldun CR-manifold olması tartışılmıştır. Ayrıca bu bölümde kompleks manifoldların genel, anti-holomorfik ve CR-altmanifoldları tanımlanarak onlara ait karakteristik özellikleri incelenmiştir.

Dördüncü bölümde Kaehler manifoldların Kaehler, total reel ve CR-altmanifoldları ele alınmıştır. Daha sonra CR-altmanifold üzerinde invaryant ve anti-invaryant distribüsyonların integrallenebilirliği verilmiştir. Bundan sonra CR-altmanifoldların, umbilik, pseudo umbilik ve normal sınıfları ele alınarak bunlara ait genel özellikler incelenmiştir.

ABSTRACT

This thesis covers four chapters in such a way that in the first chapter to make it ~~to~~ easily understood we give the basic concepts in differential geometry.

In the second chapter we prepare some algebraic results on real and complex vector spaces and we give fundamental properties of holomorfic functions that will be applied to structures of almost complex and complex manifolds. In this chapter it's also given almost complex and complex manifolds, Hermitian manifolds and Kaehler manifolds. Then the results obtained in Kaehler manifolds are expressed in terms of local character. In addition the nearly Kaehler manifolds are introduced and various examples are given including almost complex, complex manifolds, Hermitian manifolds, Kaehler manifolds and nearly Kaehler manifolds.

In the third chapter CR-structures is given. Especially the general theory of CR-manifolds is studied. It is also discussed being CR-manifold of any manifold. In addition, the definitions of generic, anti-holomorfic and CR-submanifolds of complex manifold were given. Moreover, some characteristic of these submanifolds were investigated.

The fourth chapter is focuses on the study of submanifolds of Kaehler manifolds. We also studied complex submanifolds, anti-invariant submanifolds and CR-submanifolds of Kaehler manifolds. The integrability of both of invariant and anti-invariant distributions on a CR-submanifold are studied. After then we have given results on some special classes of CR-submanifolds of Kaehler manifolds; umbilical CR-submanifolds, pseudo-umbilical CR-submanifolds and normal CR-submanifolds. Finally we investigated some characteristic properties of these submanifolds.

TEŞEKKÜR

Tez konumu veren ve çalışmalarımın her adımında bana yardımcı olan Sayın Hocam Yrd.Doç.Dr. Rıfat Güneş e teşekkürlerimi sunarım. Değerli mesailerini bana ayırarak çalışmamın daha iyiye gitmesi için önerilerde bulunan Sayın Hocam Prof. Dr. Sadık Keleş e müteşekkirim. Ayrıca çalışmam boyunca bana tartışma imkanı veren Dr. Erol Kılıç a teşekkür ederim.

İÇİNDEKİLER

GİRİŞ

Kompleks manifoldlara ait çalışmalar , 1930 yılında J.A.Schouten ve D.Van Dantzng ın Riemann metriği ve afin konneksiyona sahip manifoldların diferensiyel geometrisinde ki sonuçları bu uzaylara taşımalarıyla başlar. Bu çalışmada simetrik konneksiyon ile birlikte Hermit adı verilen uzay elde edilir. 1933 yılında bunlardan bağımsız olarak E.Kaehler tarafından bu gün Kaehler manifoldlar adı verilen aynı konneksiyonlu manifoldlar ortaya konur. Daha sonra S.Bergman iki değişkenli kompleks fonsiyonlar teorisine ve 1941 yılında W.V.D Hodge harmonik integrallerin teorisine uygular.

Kaehler manifoldların diferensiyel geometrisi üzerine S.Bochner , H.Guggenheimer , A.Licherowicz vb. matematikçiler çalışmalarda bulunurlar.

A.Weil 1947 ve 1950 yıllarında yayınlanan çalışmalarında bu konuya farklı bir noktadan yaklaşır. A.Weil kompleks manifoldda karesi eksi birime eşit olan (1,1) mertebeli tensörün varlığını ortaya koyar.

C.Ehresman 1947 ve 1950 yıllarındaki çalışmalarında bu tensörü kullanarak çift boyutlu diferensiyellenebilir manifold olan hemen hemen kompleks manifoldları tanımlar. Bir kompleks manifoldun hemen hemen kompleks manifold olduğu fakat bunun tersinin doğru olmadığı görülür.

Buradan hareketle C.Ehresman ve P.Liberman bir hemen hemen kompleks yapının kompleks yapı olması üzerine çalışmalarda bulunurlar. B. Eckman ve A.Frölicher ,E. Calabi ve D.C. Spencer hemen hemen kompleks yapının C^{w} sınıfından olması , 1957 yılında A.Newllander ve L. Nirenberg hemen hemen kompleks yapının diferensiyellenebilmesi üzerine çalışmalarda bulunurlar. Bu problemin çözümünde A.Nijenhuis tarafından tanımlanan Nijenhuis tensör alanı önemli bir rol oynar.

Hemen hemen kompleks ve kompleks manifoldların diferensiyel geometrisi üzerine W.M. Bootby, S.S. Chern, S.I. Goldberg, S. İshahara, S. Kobayashi,Y. Matsushima, K.Nomizu, K.Yano vb. matematikçiler çalışmalar yaptılar.

CR-yapılara giriş ise 1950 yılında Hans Levy nın çalışması başlangıç sayılır. Bu alanda A.Bogges, H.Jacobowitz vb. matematikçilerin çalışmaları sayılabilir.

Kaehler manifoldların altmanifoldları esas olarak, manifold üzerinde tanımlı (1,1) mertebeli tensörün hareketine bağlı olarak tanımlanır. Bu altmanifoldlardan Kaehler altmanifoldlar üzerine temel çalışma Koichi Ogiue aittir. Total reel altmanifoldlar üzerine temel çalışmalarda ise K.Yano ve M.Kon a aittir.

1978 yılında A.Bejancu tarafından aşağıdaki şekilde yeni bir altmanifold tanımlandı." $\overline{M}$ bir Kaehler manifold ,J $\overline{M}$ nin hemen hemen kompleks yapısı ve M $\overline{M}$ nin altmanifoldu olsun. Eğer M üzerinde aşağıdaki iki şartı sağlayan D ve $D^{\perp}$ distribüsyonları varsa M ye CR-altmanifold denir.

i) $J(D_p) = D_p$

ii) $J(D_p^{\perp}) \subset T_M^{\perp}(p)$

Böylece CR-altmanifold daha önce tanımlanan iki altmanifoldu içeriyordu. CR-altmanifoldların diferensiyel geometrisi üzerine A.Bejancu, B.Y.Chen K.Yano ve M.Kon vb. matematikçilerin çalışmaları oldukça temel sayılır.

Biz bu çalışmada diferensiyel geometrinin yeni ve ilginç bir alanı olan CR-altmanifoldların anlaşılmasına yönelik olarak hazırlık yaptık. Amacımız bu alanda çalışacak matematikçilerin de yararlanabilecekleri ve daha fazla kaynağa gereksinim duymayacakları bir kaynak oluşturmaktı. Bu nedenle temel çalışmaları ve bu çalışmaların anlaşılmasında kullanılacak genel kavramları verdik.

I. BÖLÜM

TEMEL KAVRAMLAR

Temel kavramlara ayırdığımız bu bölüm yedi kısım olarak düzenlenmiştir. Birinci kısım topolojik kavramlara, ikinci kısım tensör ve tensör uzaylarına, üçüncü kısım ise manifold ve manifold üzerindeki yapılara ayrılmıştır. Dördüncü ve beşinci kısımlarda sırasıyla Riemann metriği ve vektör demetleri verilmiştir. Altıncı bölümde Riemann altmanifoldları , yedinci bölümde ise manifold üzerinde distribüsyon kavramı tanıtılmıştır.

I.1. Topolojik Kavramlar

I.1.1.Tanım. X bir cümle ve τ da X in kuvvet cümlesinin bir altailesi olsun. Eğer aşağıdaki aksiyomlar sağlanıyorsa τ ya X üzerinde bir topoloji denir [1].

i) $X, \varnothing \in \tau$

ii) $\{A_i\}_{i \in I}$, $A_i \in \tau$ ise $\bigcup_{i \in I} A_i \in \tau$

iii) $\{A_i\}_{i \in J}$ (j sonlu indis kümesi) için , $A_i \in \tau$ $\bigcap_{i \in j} A_i \in \tau$

I.1.2.Tanım. (X,τ) ikilisine bir topolojik uzay denir [1]. Biz topolojik uzayı X veya (X,τ) ikilisi ile göstereceğiz.

I.1.3.Tanım. τ nun her elamanına X üzerinde τ tarafından tanımlanan topolojiye göre bir açık cümle denir ve tümleyeni açık olan cümleye de kapalı cümle denir [1].

I.1.4.Tanım. (X,τ) bir topolojik uzay ve X ın bazı açık cümlelerinin sınıfı B olsun. Eğer X ın her açık altcümlesi B nın elamanlarının bir birleşimi olarak yazılabiliyorsa B ya bir topolojik taban denir [1].

I.1.5.Tanım. (X,τ) bir topolojik uzay, $Y\subseteq X$ olsun.

$$\tau_A = \{A\bigcap Y : A\in\tau\}$$

ailesi Y üzerinde bir topolojidir. τ_A, ya indirgenmiş topoloji ve (Y,τ_A) ya (X,τ) nun altuzayı denir [1].

I.1.6.Tanım. X boştan farklı bir cümle ve $d{:}X\text{x}X\to IR$ bir fonksiyon olsun. Eğer $\forall$ x,y,z$\in X$ için

m_1) x$\neq$y için d(x,y)> o

m_2) d(x,y)=o$\Leftrightarrow$ x=y

m_3) d(x,y)=d(y,x)

m_4) d(x,y)$\leq$ d(x,z)+d(z,y)

aksiyomları sağlanıyor ise d fonksiyonuna X üzerinde bir metrik denir [1].

I.1.7.Tanım. Bir X cümlesi üzerinde d metriği verildiği zaman (X,d) ikilisine metrik uzay denir [1].

I.1.8.Tanım. X bir topolojik uzay, $x\in X$ olsun. x noktasını içeren bir U açık altcümlesinin her N üst kümesine x noktasının bir komşuluğu denir [1].

I.1.9.Tanım. (X,τ) ve (X',τ') iki topolojik uzay $f{:}X\to X'$ bir fonksiyon ve $x_0\in X$ olsun. $f(x_0)$ ın her U' açık komşuluğunun f altındaki ters görüntüsü x_0 ın bir açık komşuluğu ise f fonksiyonuna x_0 noktasında süreklidir denir [1].

I.1.10.Tanım. (X, τ) bir topolojik uzay ve $x \neq y \in X$ olsun. x ve y noktalarının açık komşulukları sırasıyla U ve V olmak üzere $U \cap V = \varnothing$ ise (X, τ) topolojik uzayına Hausdoff uzayı denir [1].

I.1.11.Tanım. (X, τ) topolojik uzayının açık alt cümlelerinin sınıfı g olsun. Eğer

$$X = \bigcup_{G \in g} G$$

ise g sınıfına (X, τ) uzayının bir açık örtüsü denir. Eğer g nın bir alt cümlesi X uzayını örterse bu alt cümleye (X, τ) ın bir açık alt örtüsü denir [1].

I.1.12.Tanım. (X, τ) topolojik uzayının her g açık örtüsünün sonlu bir alt örtüsü varsa (X, τ) uzayına kompakt uzay denir [1].

I.1.13.Tanım. (X, τ) topolojik uzayı boş olmayan ayrık açık iki cümlenin birleşimi olarak yazılamıyorsa (X, τ) uzayına bağlantılıdır aksi halde bağlantısızdır denir [1].

I.1.14. Tanım. (X, τ) bir topolojik uzay ve (X, τ) topolojik uzayının bir açık örtüsü $U = \{u_\alpha\}_{\alpha \in I}$ olsun. Eğer X in her bir noktasının bir açık komşuluğu U ya ait sonlu sayıda u_α ları kesiyorsa U ya lokal sonludur denir [16].

I.1.15. Tanım. (X, τ) bir topolojik uzay ve (X, τ) topolojik uzayının açık örtüleri sırasıyla $U = \{u_\alpha\}_{\alpha \in I}$ ve $V = \{v_\beta\}_{\beta \in j}$ olsun. Eğer V nin her bir açık cümlesi U nun bir açık cümlesi içinde bulunuyorsa V ye U nun inceltilmişidir denir [16].

I.1.16. Tanım. Bir (X, τ) topolojik uzayı Hausdorff ve her açık örtüsünün bir lokal sonlu incelmesi varsa topolojik uzaya parakompakttır denir [16].

I.2. Tensörler ve Tensör Uzayları

I.2.1.Tanım. Reel sayılar cismi üzerinde r-tane vektör uzayı V_1 , V_2 ,,... V_r olsun.

$$f: V_1 \times V_2 \times ... \times V_r \to IR$$

fonksiyonu $1 \le i \le r$ için $u_i, v_i \in V_i$ ve $a, b \in IR$ olmak üzere

$$f(v_1 ... v_{i-1}, av_i + bv_i, v_{i+1} ... v_r) = af(v_1 ... v_{i-1}, v_i ... v_r) + bf(v_1 ... v_{i-1}, v_i ... v_r)$$

şeklinde tanımlı ise f ye r-lineer fonksiyon denir [6].

I.2.2.Tanım. $V_1 \times V_2 \times ... \times V_r$ den IR ye bütün r-lineer fonksiyonların cümlesini

$$L(V_1 ... V_r : IR)$$

ile gösterelim. Bu cümlede toplama ve skalerle çarpma işlemleri sırasıyla $\forall (u_1 ... u_r) \in V_1 \times V_2 \times ... V_r$ için

$$(f_1 + f_2)(u_1, ..., u_r) = f_1(u_1, ..., u_r) + f_2(u_1, .., u_r)$$

ve $\lambda \in IR$ için

$$(\lambda f)(u_1, ..., u_r) = \lambda f(u_1, ..., u_r)$$

şeklinde tanımlanırsa bu iki işleme göre $L(V_1 ... V_r : IR)$ IR üzerinde bir vektör uzayı olur. Bu vektör uzayına $V_1^*, V_2^*, ..., V_r^*$ dual vektör uzaylarının tensörel çarpımı denir ve

$$L(V_1, ..., V_r) = V_1^* \otimes V_2^* \otimes ... \otimes V_r^*$$

ile gösterilir. $V_1^* \otimes V_2^* \otimes ... \otimes V_r^*$ tensör uzayının her bir elemanına r.dereceden bir tensör denir.

$$V_1 = V_2 = ... = V_r$$

ise $V^* \otimes V^* \otimes ... \otimes V^*$ uzayına bir kovaryant tensör uzayı ve bu uzayın her bir elemanına da r.mertebeden bir kovaryant tensör denir. $T^r(V)$ veya $\otimes^r V^*$ ile gösterilir [6].

I.2.3.Tanım. Kovaryant tensörler için verilen tanımda V yerine V^* alınırsa $(V^*)^*$ uzayı V ye izomorf olduğundan V^* üzerinde s-lineer fonksiyonların vektör uzayını elde ederiz. Bu uzaya kontravaryant uzay denir. $T_s(V^*)$ veya $\otimes^s V$ ile gösterilir ve bu uzayın elemanlarına s.mertebeden kontravaryant tensörler denir [6].

I.2.4.Tanım. IR reel sayılar cismi üzerinde tanımlı bir vektör uzayı V ve V^*, V nın duali olsun.

$$L(V^r, V^{*s} : IR) = \{ f \mid f : V^r \times V^{*s} \xrightarrow{(r+s)\ lineer} IR \}$$

cümlesi yukarıda verilen toplama ve skalerle çarpma işlemlerine göre bir vektör uzayıdır. Buna r. mertebeden kovaryant ve s. mertebeden kontravaryant tensör uzayı denir. Bu uzayın elemanlarına da (r,s) mertebeli tensör denir. Bu uzay

$$T^r(V) \otimes T_s(V^*) = \otimes^r(V^*) \otimes \otimes^s(V) \text{ veya } T_s^r(V)$$

ile gösterilir [6].

I.2.5.Tanım. V bir vektör uzayı ϕ r.mertebeden kovaryant tensör olsun. S_n permütasyonların cümlesini göstermek üzere $\sigma \in S_n$ ve $v_1, v_2, \dots, v_n \in V$ için

i) Eğer

$$\phi(v_{\sigma(1)}, \dots, v_{\sigma(n)}) = \phi(v_1, \dots, v_n)$$

ise $\phi \in T^r(V)$ kovaryant tensöre simetriktir denir.

ii) Eğer

$$\phi(v_{\sigma(1)}, \dots, v_{\sigma(n)}) = (sgn\sigma)\phi(v_1, \dots, v_n)$$

ise $\phi \in T^r(V)$ ye antisimetrik (alterne) tir denir. Simetrik ve antisimetrik tensörlerin cümlesi sırasıyla $\sum^r(V)$ ve $\Lambda^r(V)$ ile gösterilir [13].

I.2.6.Tanım. V sonlu boyutlu bir vektör uzayı, $\phi \in T^r(V)$ olsun.

$$A\phi = \frac{1}{r!}\sum_{\sigma\in S_r}(sgn\sigma)\phi^{\sigma}(v_1,...,v_r)$$
$$= \frac{1}{r!}\sum_{\sigma\in S_r}(sgn\sigma)\phi(v_{\sigma(1)},...,v_{\sigma(r)})$$

ile tanımlı $A\phi$ ye ϕ nın anti-simetriklenmesi denir [13].

I.2.7.Tanım. $\vartheta \in T_s^r(V)$ ve $\varphi \in T_s^r(V)$ olsun. Bu durumda ϑ ve φ nın tensör çarpımı

$$(\vartheta\otimes\varphi)(v_1,...,v_r,v_{r+1},...v_{r+r'},w^1,...w^s,w^{s+1},...w^{s+s'}) = \vartheta(v_1,...,v_r,w^1,...,w^s).$$
$$\varphi(v_{r+1},...,v_{r+r'},w^{s+1},...,w^{s+s'}) \in T_{r+r'}^{s+s'}$$

olarak tanımlanır [13].

I.2.8.Tanım. V bir vektör uzayı $\vartheta \in \Lambda^r(V), \varphi \in \Lambda^s(V)$ olsun.

$$\vartheta\wedge\varphi = \frac{(r+s)!}{r!s!}A(\vartheta\otimes\varphi)$$

ile tanımlanan çarpıma alterne tensörlerin dış (alterne) çarpımı denir [13].

Dış çarpım için aşağıdaki teorem verilebilir.

I.2.1.Teorem. $\vartheta, \vartheta_1, \vartheta_2, \varphi, \varphi_1, \varphi_2$ V üzerinde alterne tensörler olmak üzere

1) $\vartheta\wedge(\varphi_1+\varphi_2) = \vartheta\wedge\varphi_1 + \vartheta\wedge\varphi_2, (\vartheta_1+\vartheta_2)\wedge\varphi = \vartheta_1\wedge\varphi + \vartheta_2\wedge\varphi$

2) $a \in R, (a\vartheta)\wedge\varphi = a(\vartheta\wedge\varphi) = \vartheta\wedge(a\varphi)$

3) $\vartheta\wedge(\varphi\wedge\varphi_1) = (\vartheta\wedge\varphi)\wedge\varphi_1$

4) $\vartheta \in \Lambda^r(V), \varphi \in \Lambda^s(V) \Rightarrow \vartheta\wedge\varphi = (-1)^{rs}\varphi\wedge\vartheta$

dır [13].

I.2.1.Önerme. V bir vektör uzayı ve $T_r^1(V)$ tensör uzayı olsun. Bu durumda T_r^1 tensörü

$$\underbrace{V\times V\times...\times V}_{r} \to V$$

bütün r-lineer dönüşümlerin vektör uzayına izomorfiktir [8].

I.3. Diferensiyellenebilir Manifold ve Diferensiyellenebilir Manifold Üzerinde Yapılar.

I.3.1. Tanım. M bir Hausdoff uzay olsun. $\forall p \in M$ için M de $E^n (n \geq 0)$ ye homeomorf olan bir U açık komşuluğu bulunabilirse M ye n-boyutlu topolojik manifold denir [7].

I.3.2.Tanım. M n-boyutlu topolojik manifold ve U M nın açık bir altcümlesi olsun. Eğer U bir ψ homeomorfizmi ile E^n nın bir W alt cümlesine eşlenebiliyorsa (U,ψ) ikilisine M de bir koordinat komşuluğu denir [7].

$$p \in U \text{ için } \psi(p) = (x_1(p),...,x_n(p)) \quad x_i(p) \in IR \quad 1 \leq i \leq n$$

dır. Burada $x_i(p)$ reel sayısına $\psi(p)$ noktasının i. koordinat denir.

$$x_i : U \subset M \rightarrow IR$$

fonksiyonuna da i.koordinat fonksiyonu denir. ψ fonksiyonu bir homeomorfizm olduğundan koordinat fonksiyonları da süreklidir. Hatta ψ birebir olduğundan $p,q \in U$ noktaları için $x_i(p) = x_i(q) \Rightarrow p = q$ dır. Bu demektir ki $p \in U$ noktası $(x_1(p),...,x_n(p))$ reel sayı n-lisi ile belli olur.$(x_1(p),...,x_n(p))$ reel sayılarına $p \in U$ noktasının (U,ψ) koordinat komşuluğuna göre lokal koordinatları ve U üzerinde tanımlı olan ($x_1,...,x_n$) reel değerli fonksiyon n-lisine de (U,ψ) üzerindeki lokal koordinat sistemi denir [7].

I.3.3.Tanım. M bir n-boyutlu topolojik manifold ve M nın bir açık örtüsü $\{U_\alpha\}$olsun. U_α açık cümlelerinin α indislerinin cümlesi A olmak üzere $\{U_\alpha\}$ örtüsü için $\{U_\alpha\}$ $\alpha \in A$ yazalım. E^n de U_α ya homeomorf olan bir açık cümle E_α ve

$$\psi_\alpha : U_\alpha \rightarrow E_\alpha$$

olsun. Koordinat komşuluklarının $\{(U_\alpha, \psi_\alpha)\}_{\alpha\in A}$ koleksiyonuna bir atlas (veya koordinat komşuluğu sistemi) denir [7].

I.3.4.Tanım. M bir n-boyutlu manifold ve $S=\{(U_\alpha, \psi_\alpha)\}_{\alpha\in A}$ M nin bir atlası olsun. Eğer S atlası aşağıdaki özelliğe sahip ise S ye $c^r, r\geq 1$ sınıfındandır denir.

$U_\alpha \cap U_\beta \neq \emptyset$ olmak üzere $\forall \alpha,\beta \in A$ için

$$\Phi_{\alpha\beta} = \psi_\alpha o \psi_\beta^{-1} : \psi_\beta(U_\alpha \cap U_\beta) \to \psi_\alpha(U_\alpha \cap U_\beta)$$

$$\Phi_{\beta\alpha} = \psi_\beta o \psi_\alpha^{-1} : \psi_\alpha(U_\alpha \cap U_\beta) \to \psi_\beta(U_\alpha \cap U_\beta)$$

fonksiyonları C^r sınıfındandır. Eğer S atlası M üzerinde C^r sınıfından ise S ye C^r sınıfından bir diferensiyel yapı denir. Buna göre S atlasının C^r sınıfından olması $(\Phi_{\alpha\beta})_i, (\Phi_{\beta\alpha})_i, 1\leq i\leq n$ fonksiyonlarının C^r sınıfından olması ile tanımlanır.

Bir $f: E^n \to IR$ fonksiyonunun $p\in E^n$ noktasında analitik olması demek f nin $(x\text{-}p)$ nin bir kuvvet serisiyle ifade edilebilmesidir. Bu durumda f C^w sınıfındandır denir [7].

I.3.5. Tanım. M n-boyutlu bir topolojik manifold ve M nin C^r sınıfından atlası S olsun. Bu durumda M ye diferensiyellenebilir manifold denir. Eğer S , C^w sınıfından ise M ye n-boyutlu analitik manifold denir [7].

I.3.6. Tanım. M bir manifold olsun.

$$C^\infty(M, IR) = \{f \mid f: U \to R, f\in C^\infty(U)\}$$

cümlesini ele alalım. Bir

$$V_p: C^\infty(M, IR) \to IR$$

$$f \to V_p[f] = \sum_{i=1}^{n} v_i\big|_p \frac{\partial f}{\partial x_i}\Big|_p \qquad \text{(I.3.1)}$$

dönüşümü için $\lambda, \mu \in IR, \forall f, g \in C^\infty(M, IR)$ olmak üzere

$$i)\ \vec{V}_p(\lambda f+\mu g)=\lambda\vec{V}_p[f]+\mu\vec{V}_p[g] \tag{I.3.2}$$

$$ii)\ \vec{V}_p(fg)=\vec{V}_p[f]g(p)+f(p)\vec{V}_p[g] \tag{I.3.3}$$

aksiyomları sağlanıyorsa $\vec{V}_p$ fonksiyonuna M nın p noktasındaki tanjant vektörü denir [7].

M manifoldunun bir $p \in M$ noktasındaki tanjant vektörlerinin cümlesini

$$T_M(p)=\left\{\vec{V}_p \,\middle|\, \vec{V}_p : C^{\infty}(M,IR)\to IR\right\}$$

ile gösterelim. Bu cümle

$$(+):T_M(p)\times T_M(p)\to T_M(p)$$

$$(\vec{V}_p,\vec{W}_p)\to\vec{V}_p+\vec{W}_p : C^{\infty}(M,R)\to R$$

$$(\vec{V}_p+\vec{W}_p)[f]=\vec{V}_p[f]+\vec{W}_p[f]$$

ve

$$(.):IR\times T_M(p)\to T_M(p)$$

$$(\lambda,\vec{V}_p)\to\lambda\vec{V}_p : C^{\infty}(M,IR)\to IR$$

$$(\lambda\vec{V}_p)[f]=\lambda\vec{V}_p[f], \forall f\in C^{\infty}(M,IR)$$

işlemlerine göre IR üzerinde bir vektör uzayı olur. Bu uzaya M nin p noktasındaki tanjant uzayı denir [7].

I.3.7. Tanım. Bir $\vec{V}_p \in T_M(p)$ tanjant vektörü için

$$V_p[x_i]=v_i \tag{I.3.4}$$

olmak üzere

$$(v_i,\ldots,v_n)$$

n-lisine $\vec{V}_p \in T_M(p)$ tanjant vektörünün ($x_1,\ldots,x_n$) koordinat sistemine göre bileşenleri denir. Buna göre

$$V_p : C^{\infty}(M,IR)\to IR$$

dönüşümü

$$V_p=\sum_{i=1}^{n} v_i \frac{\partial}{\partial x_i}\Big|_p, v_i=v_p[x_i] \tag{I.3.5}$$

yazılabilir [7].

$p \in M$ noktasında tanımlı lokal koordinat sistemi $(x_1,...,x_n)$ olsun. Bu durumda

$$\left\{\frac{\partial}{x_1}\Big|_p,...,\frac{\partial}{x_n}\Big|_p\right\} \tag{I.3.6}$$

sistemi $T_M(p)$ için bir baz olur [7].

I.3.1. Teorem. M bir manifold ve M nın tanjant uzayı $T_M(p)$ olsun. $T_M(p)$ nın $\left\{\frac{\partial}{x_i}\Big|_p\right\}$ ve $\left\{\frac{\partial}{\overline{x}_i}\Big|_p\right\}$ iki bazı arasında

$$\frac{\partial}{\partial x_i}\Big|_p=\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{\partial \overline{x}_k}{\partial x_i}\right)\frac{\partial}{\partial \overline{x}_k}\Big|_p \quad , \quad \frac{\partial}{\partial \overline{x}_j}=\sum_{l=1}^{m}\left(\frac{\partial x_l}{\partial \overline{x}_j}\right)\frac{\partial}{\partial x_l}\Big|_p \tag{I:3.7}$$

veya

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial \overline{x}_1}\Big|_p \\ . \\ . \\ . \\ \frac{\partial}{\partial \overline{x}_n}\Big|_p \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial x_1}{\partial \overline{x}_1}\Big|_p \cdots \frac{\partial x_n}{\partial \overline{x}_1}\Big|_p \\ . \\ . \\ . \\ \frac{\partial x_1}{\partial \overline{x}_n}\Big|_p \cdots \frac{\partial x_n}{\partial \overline{x}_n}\Big|_p \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x_1}\Big|_p \\ . \\ . \\ . \\ \frac{\partial}{\partial x_n}\Big|_p \end{bmatrix} \quad , \quad \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x_1}\Big|_p \\ . \\ . \\ . \\ \frac{\partial}{\partial x_n}\Big|_p \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial \overline{x}_1}{\partial x_1}\Big|_p \cdots \frac{\partial \overline{x}_n}{\partial x_1}\Big|_p \\ . \\ . \\ . \\ \frac{\partial \overline{x}_1}{\partial x_n}\Big|_p \cdots \frac{\partial \overline{x}_n}{\partial x_n}\Big|_p \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial \overline{x}_1}\Big|_p \\ . \\ . \\ . \\ \frac{\partial}{\partial \overline{x}_n}\Big|_p \end{bmatrix} \tag{I.3.8}$$

dönüşümü vardır [7].

I.3.8. Tanım. M diferensiyellenebilir bir manifold olsun. M manifoldu üzerinde diferensiyellenebilir bir eğri; IR nın $[a,b]$ aralığından M ye diferensiyellenebilir dönüşüm olarak tanımlanır [7].

I.3.9. Tanım. M n-boyutlu bir manifold ve M üzerinde diferensiyellenebilir bir eğri

$$\varphi:(a,b)\rightarrow M$$

olsun.

$$\vec{V}_p=\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial \varphi_i}{\partial t}\Big|_{t=0}\frac{\partial}{\partial x_i}\Big|_{\varphi(t_0)}$$

tanjant vektörüne diferensiyellenebilir φ eğrisinin $\varphi(t_0)$ noktasındaki tanjant vektörü denir. Eğer φ nın her bir noktasındaki tanjant vektörü sıfırdan farklı ise φ eğrisine regüler eğri adı verilir [7].

I.3.10. Tanım. M bir manifold ve M de bir komşuluk V olsun. Bir $p \in V$ noktasındaki tanjant uzay $T_V(p)$ olsun. V de bütün p noktaları üzerindeki tanjant uzayların birleşimi $\bigcup_{p \in V} T_V(p)$ ile gösterilsin. Bir

$$\pi : \bigcup_{P \in V} T_V(P) \to V$$

dönüşümü $\forall t_p \in T_V(p)$ tanjant vektörü için

$$\pi(t_p) = p$$

ile tanımlansın. Bu durumda $V \subseteq M$ üzerinde vektör alanı operatörü

$$X : V \to \bigcup_{p \in V} T_V(p) \tag{I.3.9}$$

biçiminde bir fonksiyondur öyleki

$$\pi o X = I : V \to V$$

dönüşümü özdeşlik fonksiyonudur [6]. M üzerinde vektör alanlarının cümlesini $\chi(M)$ ile göstereceğiz.

I.3.11. Tanım. M bir n-boyutlu manifold ve P noktasındaki tanjant uzay $T_M(p)$ olsun.

$$T_M^*(P) = \{ f \mid f : T_M(p) \to R \}$$

uzayına $T_M(p)$ nın dual uzayı veya kotanjant uzay denir [6].

I.3.12. Tanım. M n-boyutlu bir manifold ve M manifoldunun kotanjant uzayı $T_M^*(P)$ olsun. $\omega(p) \in T_M^*(P)$ elemanına bir kovektör denir. Her bir ω kovektörü; U M nin bir koordinat komşuluğu olmak üzere

$$\omega : U \to \bigcup_{p \in U} T_M^*(p)$$

$$p \to \omega(p) : T_M(p) \to R$$

şeklinde tanımlı bir fonksiyon olup M üzerinde bir 1- form adını alır [9].

I.3.13. Tanım. M bir manifold ve $f \in C^\infty(M, IR)$ olsun. Bu durumda f nın total diferensiyeli

$$\begin{aligned} df\big|_p : T_M(p) &\to IR \\ X_p &\to df_p(X_p) = X_p[f] \end{aligned} \tag{I.3.10}$$

ile tanımlanır. $(x^1, ..., x^n)$ P noktasında lokal koordinat sistemi ise $dx^1\big|_p, ..., dx^n\big|_p$ $T_M^*(P)$ için bir bazdır [9].

I.3.14. Tanım. M C^∞ sınıfından bir manifold olsun. M üzerinde C^∞ sınıfından r. mertebeden kovaryant s.mertebeden kontravaryant tensör alanı; M nın her P noktasına bir ϕ_P tensörü karşılık getiren fonksiyondur. M üzerindeki r. mertebeden kovaryant, s. mertebeden kontravaryant tensör alanlarının cümlesini $T_s^r(T_M(P))$ ile göstereceğiz. M üzerinde bir p noktasındaki tanjant uzay $T_M(p)$ ve kotanjant uzay $T_M^*(p)$ ile gösterilirse ϕ tensörü

$$\begin{aligned} \phi : U \subset M &\to \bigcup T_s^r(T_M(P)) \\ P \quad &\to \phi_P : \underbrace{T_M^*(p) \times ... \times T_M^*(p)}_{r-\text{tane}} \times \underbrace{T_M(p) \times ... \times T_M(p)}_{s-\text{tane}} \to IR \end{aligned}$$

biçiminde tanımlanabilir

Bir manifold üzerindeki antisimetrik tensör alanlarının cümlesi bir vektör uzayıdır. Bunu $\Lambda^r(M)$ ile göstereceğiz [9].

I.3.15. Tanım. M n-boyutlu bir manifold olsun. $U \subset M$ olmak üzere

$$\begin{aligned} \omega : U \subset M &\to \bigcup \Lambda^r T_M^*(P) \\ P \quad &\to \omega(P) : T_M(P) \times ... \times T_M(P) \to IR \end{aligned}$$

r-lineer ve antisimetrik ω dönüşümüne U üzerinde r-form denir. Eğer r=1 alınırsa (I.3.12) tanımı elde edilir.

$X_1, ..., X_r, \omega_1, ..., \omega_r$ sırasıyla vektör alanları ve 1-formları için

$$\omega(X_1,...,X_r)=\sum w_{i_1...i_r}dx_{i_1}\wedge...\wedge dx_{i_r}$$
$$(\omega_1\wedge...\wedge\omega_r)(X_1,...,X_r)=\frac{1}{r!}\det[\omega_j(X_k)] \tag{I.3.11}$$

eşitlikleri vardır [9].

$D^r=D^r(M)$ M üzerindeki r-formların cümlesi olsun. Bu durumda $D^0=C^\infty(M,IR)$ olur.

I.3.16. Tanım. M bir manifold ve $D=D(M)=\sum_{r=0}^{\infty}D^r(M)$ olsun. Bu durumda

$$d{:}D(M)\rightarrow D(M)$$

ile tanımlanan ve aşağıdaki aksiyomları sağlayan operatöre dış diferensiyel denir [8].

1) d, $D(M)$ nın kendisi üzerine r-lineer dönüşüm ve

$$d(D^r)\subset D^{r+1}$$

dır.

2) $f\in D^0\Rightarrow df$ total diferensiyeldir.

3) $\omega_1\in D^r,\omega_2\in D^s\Rightarrow d(\omega_1\wedge\omega_2)=d\omega_1\wedge\omega_2+(-1)^r\omega_1\wedge d\omega_2$ (I.3.12)

4) $d^2=0$

13.17. Tanım. M bir manifold ve $X,Y\in\chi(M), f\in C^\infty(M,IR)$ olsun.

$$[,]:\chi(M)\times\chi(M)\rightarrow\chi(M)$$

$\forall P\in M$ için

$$[X,Y]_P=X_P(Yf)-Y_P(Xf) \tag{I.3.13}$$

ile tanımlanan fonksiyona X ve Y nın Lie (bracket) operatörü denir ve aşağıdaki özellikleri sağlar [6]. $f,g\in C^\infty(M,R), X,Y,Z\in\chi(M)$ olmak üzere

i) $[X,Y]\in C^\infty(M,IR)$

ii) $[fx,gY]=fg[X,Y]+f(X[g])Y-g(Y[f])X$

iii) $[X,Y]=-[Y,X]$

iv) $[[X,Y],Z]+[[Y,Z],X]+[[X,Z],Y]=o$

I.3.1. Önerme. M bir manifold ve ω M üzerinde bir r-form olsun. Bu durumda

$$d\omega(X_0,X_1,...,X_r)=\frac{1}{r+1}\sum_{i=0}^{r}(-1)^i X_i(\omega(X_0,...,\hat{X}_i,...,X_r)) + \frac{1}{r+1}\sum_{0\le i\le j\le r}(-1)^{i+j}\omega([X_i,X_j],X_0,...,\hat{X}_i,...,\hat{X}_j,...,X_r) \quad \text{(I.3.14)}$$

dır.

Lokal koordinatlar gözönüne alındığında, eğer

$$\omega=\frac{1}{r!}\omega_{i_1}..._{i_r}\, dx^{i_1}\wedge...\wedge dx^{i_r}$$

ise

$$d\omega=\frac{1}{(r+1)!}(\partial_j\omega_{i_1}..._{i_r}-\partial_{i_1}\omega_{j i_2}..._{i_r}-...\partial_{i_r}\omega_{i_1}..._j)dx^j\wedge dx^{i_1}\wedge...\wedge dx^{i_r} \quad \text{(I.3.15)}$$

olur. ω 2-form ise $X,Y,Z\in\chi(M)$ olmak üzere

$$d\omega(X,Y,Z)=\frac{1}{3}\{X(\omega(Y,Z))+Y(\omega(X,Z))+Z(\omega(X,Z))- \omega([X,Y],Z)-\omega([Y,Z],X)-\omega([Z,X],Y)\ \} \quad \text{(I.3.16)}$$

elde edilir [8].

I.3.18.Tanım. ϕ,ψ $(1,1)$ mertebeli tensör alanı olsunlar.

$$S:\chi(M)\times\chi(M)\to\chi(M)$$

fonksiyonu için

$$1)S(X,Y)=[\phi X,\psi Y]+[\psi X,\phi Y]+\phi\psi[X,Y]+\psi\phi[X,Y]- \phi[X,\psi Y]-\phi[\psi X,Y]-\psi[X,\phi Y]-\psi[\phi X,Y] \quad \text{(I.3.17)}$$

$$2)S(X,Y)=-S(Y,X)$$

şartları sağlanıyorsa S dönüşümüne ϕ ile ψ nın torsiyonu (Nijenhuis tensör alanı) denir [8] .

I.3.19. Tanım. M n-boyutlu manifold , φ(t) a<t<b C^k sınıfından bir eğri ve

$$\eta_t:T_M(\varphi(t_0))\to T_M(\varphi(t))$$

olmak üzere $\varphi(t_0)$ noktasında bir eğri boyunca ϕ tensörünün türevi

$$(\frac{D\phi}{dt})_{t_0}=\lim_{t\to t_0}\frac{1}{t-t_0}(\eta_t^{*}\phi_{\varphi(t)}-\phi_{\varphi(t_0)}) \quad \text{(I.3.18)}$$

dır. Böylece $\frac{D\phi}{dt}, T_M(\varphi(t_0))$ tanjant uzayı üzerinde r. mertebeden kovaryant tensördür.

Herhangi $x^1_{\varphi(t_0)},\ldots,x^r_{\varphi(t_0)} \in T_M(\varphi(t_0))$ vektörlerin r-li cümlesi verilsin. Bu durumda $\varphi(t_0)$ noktasında

$$\left(\frac{D\phi}{dt}\right)_{t_0} = \lim_{t\to t_0}\frac{1}{t-t_0}\left(\eta_t^*\phi_{\varphi(t)}(x^1_{\varphi(t_0)},\ldots,x^r_{\varphi(t_0)}) - \phi_{\varphi(t_0)}(x^1_{\varphi(t_0)},\ldots,x^r_{\varphi(t_0)})\right) \tag{I.3.19}$$

dır [13].

I.3.1. Lemma. ϕ M üzerinde r. mertebeden kovaryant tensör alanı ve $\varphi(t)$ $a<t<b$ C^k sınıfından bir eğri olsun. M üzerinde $x^1_t,\ldots,x^r_t \in T_M(\varphi(t))$ eğri boyunca C^k sınıfından vektör alanları ise, (a,b) aralığında ϕ nın türevi

$$\begin{aligned}\left(\frac{D\phi}{dt}\right)_{t_0}(x^1_{t_0},\ldots,x^r_{t_0}) = &\left(\frac{d}{dt}\left[\phi_{\varphi(t)}(x^1_t,\ldots,x^r_t)\right] - \right.\\ &\sum_{i=1}^{r}\phi_{\varphi(t_0)}\left(x^1_{t_0},\ldots,\left(\frac{Dx_i}{dt}\right),\ldots,x^r_{t_0}\right)\end{aligned} \tag{I.3.20}$$

dır [13].

İspat. (I.3.19) dan

$$\begin{aligned}\left(\frac{D\phi}{dt}\right)_{t_0} &= \lim_{t\to t_0}\frac{1}{t-t_0}\left(\eta_t^*\phi_{\varphi(t)}(x^1_{\varphi(t_0)},\ldots,x^r_{\varphi(t_0)}) - \phi_{\varphi(t_0)}(x^1_{\varphi(t_0)},\ldots,x^r_{\varphi(t_0)})\right)\\ &= \lim_{t\to t_0}\frac{1}{t-t_0}\left(\phi_{\varphi(t)}(\eta_t(x^1_{t_0}),\ldots,\eta_t(x^r_{t_0})) - \phi_{\varphi(t_0)}(x^1_{t_0},\ldots,x^r_{t_0}\right)\end{aligned}$$

yazılabilir. Bu durumda her i için toplama ve çıkarma yapılırsa

$$\begin{aligned}\left(\frac{D\phi}{dt}\right)_{t_0} = \lim_{t\to t_0}\frac{1}{t-t_0}\Big[&\phi_{\varphi(t)}(\eta_t(x^1_{t_0}),\ldots,\eta_t(x^r_{t_0})) - \phi_{\varphi(t)}(x^1_t,\eta(x^2_{t_0}),\ldots,\eta(x^r_{t_0}))\\ &+\phi_{\varphi(t)}(x^1_t,\eta(x^2_{t_0}),\ldots,\eta(x^r_{t_0})) - \phi_{\varphi(t)}(x^1_t,x^2_t,\eta(x^3_{t_0}),\ldots,\eta(x^r_{t_0}))\\ &+\phi_{\varphi(t)}(x^1_t,x^2_t,\eta(x^3_{t_0}),\ldots,\eta(x^r_{t_0}))\ldots-\phi_{\varphi(t)}(x^1_t,\ldots,x^{r-1}_t,\eta_t(x^r_{t_0}))\\ &+\phi_{\varphi(t)}(x^1_t,\ldots,x^{r-1}_t,\eta_t(x^r_{t_0})) - \phi_{\varphi(t)}(x^1_t,\ldots,x^r_t)\\ &+\phi_{\varphi(t)}(x^1_t,\ldots,x^r_t) - \phi_{\varphi(t_0)}(x^1_{t_0},\ldots,x^r_{t_0})\Big]\end{aligned}$$

$$= \lim_{t\to t_0}\frac{1}{t-t_0}\Big[\phi_{\varphi(t)}(\eta_t(x^1_{t_0})-x^1_t,\eta(x^2_{t_0}),,\ldots,\eta_t(x^r_{t_0}))-\phi_{\varphi(t)}(x^1_t,\eta(x^2_{t_0})$$
$$-x^2_t,\ldots,\eta(x^r_{t_0}))\ldots+\phi_{\varphi(t)}(x^1_t,\ldots,x^{r-1}_t,\eta_t(x^r_{t_0})-x^r_t)+\phi_{\varphi(t)}(x^1_t,\ldots,x^r_t)$$
$$-\phi_{\varphi(t_0)}(x^1_{t_0},\ldots,x^r_{t_0})\Big]$$
$$=\Big[\phi_{\varphi(t)}(\lim_{t\to t_0}\frac{1}{t-t_0}\eta(x^1_{t_0})-x^1_t,\ldots,\eta(x^r_{t_0}))+\phi_{\varphi(t)}(x^1_t,\lim_{t\to t_0}\frac{1}{t-t_0}\eta(x^2_{t_0})$$
$$-x^2_t,\ldots\eta(x^r_{t_0}))\ldots+\phi_{\varphi(t)}(x^1_t,\ldots,x^{r-1}_t\lim_{t\to t_0}\frac{1}{t-t_0}\eta(x^r_{t_0})-x^r_t)+$$
$$\lim_{t\to t_0}\frac{1}{t-t_0}\phi_{\varphi(t)}(x^1_t,\ldots,x^r_t)-\phi_{\varphi(t_0)}(x^1_{t_0},\ldots,x^r_{t_0})\Big]$$

olur. Böylece

$$(\frac{D\phi}{dt})_{t_0}=\Big[\sum_{i=1}^{r}\phi_{\varphi(t)}(x^1_t,\lim_{t\to t_0}\frac{1}{t-t_0}\eta_t(x^i_{t_0})-x^i_t,\ldots\eta_t(x^r_{t_0}))+\lim_{t\to t_0}\frac{1}{t-t_0}\phi_{\varphi(t)}(x^1_t,\ldots,x^r_t)$$
$$-\phi_{\varphi(t_0)}(x^1_{t_0},\ldots,x^r_{t_0})\Big]$$

elde edilir. x_t, $\varphi(t)$ boyunca C^k sınıfından bir vektör alanı olduğundan

$$\lim_{t\to t_0}\frac{\eta_t(x_{t_0})-x_t}{t-t_0}=-\lim_{t\to t_0}\eta_t(\frac{\eta_{-t}(x_t)-x_{t_0}}{t-t_0})=-\eta_{t_0}(\frac{Dx_t}{dt})_{t_0}=-\frac{Dx_t}{dt}$$

dır. Buna göre r. mertebeden kovaryant tensörün türevi

$$(\frac{D\phi}{dt})_{t_0}(x^1_{t_0},\ldots,x^r_{t_0})=(\frac{d}{dt}\big[\phi_{\varphi(t)}(x^1_t,\ldots,x^r_t)\ \big]-$$
$$\sum_{i=1}^{r}\phi_{\varphi(t_0)}(x^1_{t_0},\ldots,(\frac{Dx_i}{dt}),\ldots,x^r_{t_0})$$

dır.

I.3.20. Tanım. M, M' m ve n boyutlu C^∞ manifoldlar ve $f: M\to M'$ bir dönüşüm olsun. Bu durumda

$$f_*: T_M(p)\to T_{M'}(p)$$
$$V_p\to f_*\big|_p(V_p)=(\vec{V}_p[f_1]\big|_{f(p)},\ldots,\vec{V}_p[f_m]\big|_{f(p)}) \tag{I.3.21}$$

ile tanımlı f_* dönüşümüne f nın diferensiyeli (türev dönüşümü) denir. Eğer g $f(p)$ nın komşuluğunda diferensiyellenebilir bir fonksiyon ise

$$(f_*(x))g=x(gof) \tag{I.3.22}$$

dır [7].

I.3.21. Tanım. $f: M \to M'$ bir C^{∞} dönüşüm olsun. Eğer $f_{*}(T_M(p))$ nın boyutu r ise f dönüşümünün rankı r dir denir [9].

I.3.2. Önerme. Eğer $\forall P \in M$ için rank$f$=boy$M$=n ise $(f_{*})_p$ birebirdir [9].

I.3.22. Tanım. M, M' m ve n boyutlu C^{∞} manifoldlar ve $f: M \to M'$ bir dönüşüm olsun. Eğer $\forall P \in M$ $(f_{*})_p$ birebir ise f ye immersiyon denir Bu durumda M ye immersed altmanifold denir [9].

I.3.23. Tanım. $f: M \to M'$ bir immersiyon olsun. Eğer f birebir ise f ye imbedding denir. Bu durumda M ye imbedded altmanifold denir [9].

I.3.24. Tanım. M n-boyutlu manifold ve f bir C^{∞} dönüşüm olsun. Eğer $\forall P \in M$ için

$$(f_{*})_p X_p = X'\big|_{f(p)}$$

ise X vektör alanına f-bağlıdır denir [9].

I.3.25. Tanım. M bir C^{∞} manifold olsun. Eğer

$$\begin{aligned} \kappa: IR \times M &\to M \\ (t,p) &\to \kappa(t,p) = \kappa_t(p) \end{aligned}$$

dönüşümü

1) $\forall t \in IR$ için κ_t, M nın bir transformasyonu

2) $\forall t,s \in IR$ $\forall p \in M$ için

$$\kappa(t+s,p) = \kappa(t,\kappa(S,P))$$
$$\kappa_{t+s}(p) = \kappa_t(\kappa_s(p))$$

ise κ ye M nın 1-parametreli dönüşümlerinin grubu denir [9].

I.3.27. Tanım. $I_\varepsilon \subset IR$ açık aralık olmak üzere

$$\kappa I_\varepsilon \times M \to M$$

$1)\forall t \in I_\varepsilon, \kappa_t, M$ nın transformasyonu

$2)\forall t,s \in I_\varepsilon, t+s \in I_\varepsilon, \forall p \in M$ için

$$\kappa(t+s,p) = \kappa(t,\kappa(s,p))$$

ise κ ye M nın 1-parametreli lokal dönüşüm grubu denir [8].

I.3.3. Önerme. M bir manifold ve X M üzerinde bir vektör alanı olsun. κ_t:$I_\varepsilon \times U \to M$ grubu

$$X_p : C^\infty(M, IR) \to IR$$

$$f \to X_p f = \lim_{t \to 0} \frac{1}{t}\left[f\kappa_t(p) - f(p)\right]$$

ile tanımlı C^∞ X vektör alanını verir. Bu durumda X e p_0 ın bir U komşuluğunda lokal bir parametreli grubu ile belirlenir denir. Eğer $I_\varepsilon = (-\infty,\infty)$ ise X vektör alanına tamdır denir [8].

I.3.2. Lemma. M n-boyutlu manifold ve $I_\varepsilon \subset IR$ olsun. Bu durumda

$$f : I_\epsilon \times M \to M$$

$$(t,p) \to f(t,p) = f_t(p), f(0,p) = 0$$

ise $f(t,p) = tg(t,p), g(0,p) = f'(0,p)$ şartını sağlayan bir $g(t,p)$ fonksiyonu vardır [8].

İspat. Bunun için $g(t,p) = \int_0^1 f'(ts,p)ds$ tanımlamak yeterlidir.

I.3.3. Lemma. M n- boyutlu manifold, κ_t 1-parametreli dönüşümlerin grubu, X κ_t, ile belirlenen bir vektör alanı olsun. Bu durumda $g_t(p) = g(t,p)$ ile belirlenen $fo\kappa_t = f + tg_t$ ve $g_0 = Xf$ şartını sağlayan fonksiyon vardır [8].

İspat. $f(t,p) = f(\kappa_t(p)) - f(p)$ ve Lemma I.3.2 yi gözönüne alalım. Buradan

$$fo\varphi_t = f + tg_t$$

ve

$$\lim_{t\to 0}\frac{1}{t}[f(\kappa_t(p)-f(p)] = \lim_{t\to 0}\frac{1}{t}f(t,p) = \lim_{t\to 0} g_t(p) = g_0(p)$$

elde edilir.

I.3.4. Önerme. M bir manifold ve $X, Y\in\chi(M)$ olsun. Eğer X lokal 1-parametre grubu ile belirlenen bir vektör alanı ise

$$[X,Y] = \lim_{t\to t_0}\frac{1}{t}[Y-(\kappa_t)_* Y] \tag{I.3.23}$$

dır [8].

İspat. $p(t)=\kappa_t^{-1}(p)$ alalım. Buradan

$$((\kappa_t)_* Y)_p f = (Y(f o \kappa_t))_{p(t)} = (Yf)_{p(t)} + (Yg_t)_{p(t)}$$

dır.

$$\begin{aligned}\lim_{t\to t_0}\frac{1}{t}[Y-(\kappa_t)_* Y]_p f &= \lim_{t\to t_0}\frac{1}{t}[(Yf)_p - (Yf)_{p(t)}] - \lim_{t\to t_0}(Yg_t)_{p(t)}\\ &= X_p(Yf) - Y_p g_0\\ &= [X,Y]_p f\end{aligned}$$

olur.

I.3.27. Tanım. M bir manifold, X M üzerinde bir vektör alanı, κ_t lokal 1-parametreli grup ve ϕ M üzerinde bir tensör alanı olsun. Bu durumda

$$(L_X\phi)_p = \lim_{t\to 0}\frac{1}{t}[\phi_p - (\kappa_t^*\phi)_p]$$

dönüşümüne ϕ nın X e göre Lie türevi denir [9] .

I.3.5. Önerme L_X, X e göre Lie türevi olsun. Bu durumda L_X aşağıdaki özelliklere sahiptir.

a) L_X, ϕ nin türevidir. Yani L_X lineer ve

$$L_X(\phi\otimes\phi') = (L_X\phi)\otimes\phi' + \phi\otimes(L_X\phi')$$

$$b) L_X(T_s^r) \subset T_s^r$$

$$c) (L_X \phi)(X_1,\ldots,X_n) = X(\phi(X_1,\ldots,X_n)) - \sum_{k=1}^{n} \phi(X_1,\ldots,[X,X_k],\ldots,X_n) \qquad (I.3.24)$$

$$d) f \in C^\infty(M,IR) \Rightarrow L_X(f) = X(f)$$

$$e) Y \in \mathrm{X}(M) \Rightarrow L_X Y = [X,Y] \qquad (I.3.25)$$

İspat. *a)* L_X. ın lineerliği açıktır. Şimdi Lie türevin tanımından

$$\begin{aligned}
L_X(\phi\otimes\phi') &= \lim_{t\to 0}\frac{1}{t}\left[\ (\phi\otimes\phi')_p - (\kappa_t^*(\phi\otimes\phi'))_p\ \right] \\
&= \lim_{t\to 0}\frac{1}{t}\left[\ \phi\otimes\phi' - (\kappa_t^*\phi)\otimes(\kappa_t^*\phi')\ \right] \\
&= \lim_{t\to 0}\frac{1}{t}\left[\ \phi\otimes\phi' - (\kappa_t^*\phi)\otimes\phi'\ \right] + \lim_{t\to 0}\frac{1}{t}\left[(\kappa_t^*\phi)\otimes\phi' - (\kappa_t^*\phi)\otimes(\kappa_t^*\phi')\ \right] \\
&= \lim_{t\to 0}\frac{1}{t}\left[\phi - (\kappa_t^*\phi)\ \right]\otimes\phi' + \lim_{t\to 0}(\kappa_t^*\phi)\otimes(\frac{1}{t}\left[\phi' - (\kappa_t^*\phi')\ \right] \\
&= (L_X\phi)\otimes\phi' + \phi\otimes(L_X\phi')
\end{aligned}$$

dır

c) İspatı sadece *n=2* için yapacağız

$$\begin{aligned}
L_X\phi(X_1,X_2) &= \lim_{t\to 0}\frac{1}{t}\left[(\kappa_t^*(\phi((\kappa_t)_*X_1,(\kappa_t)_*X_2)) - \phi(X_1,X_2)\ \right] \\
&= \lim_{t\to 0}\left\{\frac{1}{t}\left[\left[(\kappa_t^*(\phi((\kappa_t)_*X_1,(\kappa_t)_*X_2)) - \kappa_t^*(\phi(X_1,X_2)) + \frac{1}{t}\left[\kappa_t^*(\phi(X_1,X_2)) - \phi(X_1,X_2)\ \right]\ \right\}\right.\right.
\end{aligned}$$

elde edilir. Burada ikinci terim $X(\phi(X_1,X_2))$ ye denktir. Birinci terimin M nin

bir p noktasındaki değeri

$$\begin{aligned}
&\lim_{t\to 0}\frac{1}{t}\left[\phi_{\kappa_t(p)}((\kappa_t)_*(X_1)_p,(\kappa_t)_*(X_2)_p) - \phi_{\kappa_t(p)}((X_1)_{\kappa_t(p)},(X_2)_{\kappa_t(p)})\ \right] \\
&= \lim_{t\to 0}\phi_{\kappa_t(p)}(\frac{1}{t}\left[(\kappa_t)_*(X_1)_p - (X_1)_{\kappa_t(p)},(\kappa_t)_*(X_2)_p\ \right]) + \lim_{t\to 0}\phi_{\kappa_t(p)}\left[(X_1)_{\kappa_t(p)},\frac{1}{t}((\kappa_t)_*(X_2)_p - (X_2)_{\kappa_t(p)})\ \right] \\
&= -\phi_p([X,X_1]_p,(X_2)_p) - \phi_p((X_1)_p,[X,X_2]_p)
\end{aligned}$$

dır. Böylece her p için

$$L_X\phi(X_1,X_2) = X(\phi(X_1,X_2)) - \phi([X,X_1],X_2) - \phi(X_1,[X,X_2])$$

elde edilir.

$$d)(L_X f)(p) = \lim_{t\to 0}\frac{1}{t}\left[f(p) - f(\kappa_t^{-1}p)\ \right]$$

$$= -\lim_{t\to 0}\frac{1}{t}\left[f(\kappa_t^{-1}p) - f(p)\ \right]$$

dır. Bu ise $-X$ ın meydana getirdiği 1-parametreli lokal grup olduğundan

$$= -(-X)f$$

$$= Xf$$

olur.

$$e)L_X Y = \lim_{t\to 0}\frac{1}{t}\left[Y - (\kappa_t)_* Y\ \right]$$

olduğundan, Önerme I.3.3 den

$$L_X Y = \left[X, Y\right]$$

elde edilir.

I.4. Riemann Metriği ve Riemann Konneksiyonu

I.4.1 Tanım. M bir manifold ve g, M üzerinde (0,2) mertebeli tensör alanı olsun. Eğer g tensör alanı $X, Y \in \chi(M)$ için

i) $g(X,Y) = g(Y,X)$

ii) $g(X,X) \geq 0$ ve $g(X,X) = 0 \Leftrightarrow X = 0$

sağlanıyorsa g ye Riemann metriği denir.

g Riemann metriği ile tanımlı bir manifolda Riemann manifoldu denir. $T_M(p)$ üzerinde Riemann metriği standart iç çarpım ile tanımlanır.

$\{x_1, \ldots, x_n\}$ M de lokal koordinat sistemi olsun. g nin bu lokal koordinat sistemine göre bileşenleri

$$g_{ij} = g\left(\frac{\partial}{\partial x_i}, \frac{\partial}{\partial x_j}\right)$$

ile verilir. Buna g Riemann metriğinin kovaryant bileşeni denir ve g nin kontravaryant bileşeni

$$g^{ij} = g(dx_i, dx_j)$$

ile tanımlanır. Bu durumda

$$g_{ij}g^{kj} = \delta_i^k$$

dır [9].

I.4.1. Teorem. M n-boyutlu bir Riemann manifoldu olsun. Bu durumda M üzerinde metrik tensörün ifadesi

$$\langle , \rangle = \sum_{i,j=1}^{n} g_{ij} dx_i \otimes dx_j \qquad (I.4.1)$$

veya

$$(\frac{ds}{dt})^2 = \sum_{i,j=1}^{n} g_{ij} \frac{d(x_i o\varphi)}{dt} \frac{d(x_j o\varphi)}{dt}$$

dır. Burada $x_1,...,x_n$ ile M nin bir koordinat komşuluğundaki koordinat fonksiyonları gösterilmektedir [6].

İspat. M nin bir U açık cümlesinde koordinat fonksiyonları $x_1,...,x_n$ ise $\forall\, Y,Z \in \chi(M)$ için

$$Y = \sum_{i=1}^{n} y_i \frac{\partial}{\partial x_i}, Z = \sum_{j=1}^{n} z_j \frac{\partial}{\partial x_j}$$

yazılabilir.

$$\langle \frac{\partial}{\partial x_i}, \frac{\partial}{\partial x_j} \rangle = g_{ij}$$

denilirse

$$\langle Y,Z \rangle = \sum_{i,j=1}^{n} g_{ij} y_i z_i$$

elde edilir. $x_1,...,x_n \in C^{\infty}(M,R)$ olduğundan

$$dx_i(Y) = \sum_{k=1}^{n} y_k \frac{\partial}{\partial x_k}(x_i) = y_i$$

ve benzer olarak

$$dx_j(Z) = z_j$$

dır. Böylece

$$\langle Y,Z \rangle = \sum_{i,j=1}^{n} g_{ij} dx_i(Y) dy_j(Z)$$

olur. Buradan

$$\langle , \rangle = \sum_{i,j=}^{n} g_{ij} dx_i \otimes dx_j$$

elde edilir. Burada özel olarak $\{([a,b],\varphi)\}$ atlası ile verilen eğrinin teğet vektör alanı $T=Y=Z$ alınırsa eğrinin (a) dan t ye kadar yay uzunluğu

$$s(t) = |\varphi|_a^t = \int_a^t \sqrt{\langle T_{\varphi(t)}, T_{\varphi(t)} \rangle}\, dt$$

olmak üzere

$$(\frac{ds}{dt})^2 = \langle T_{\varphi(t)}, T_{\varphi(t)} \rangle$$

veya

$$T = (\frac{d(x_1 o\varphi)}{dt}, \ldots, \frac{d(x_n o\varphi)}{dt})$$

olduğundan

$$(\frac{ds}{dt})^2 = \sum_{i,j=1}^{n} g_{ij} \frac{d(x_i o\varphi)}{dt} \frac{d(x_j o\varphi)}{dt}$$

elde edilir. Riemann metriğini (I.4.1) anlamında olmak üzere

$$ds^2 = \sum_{i,j=1}^{n} g_{ij} dx_i dx_j \qquad (I.4.2)$$

şeklinde yazacağız.

M bağlantılı diferensiyellenebilir manifold olsun. Eğer M parakompakt ise M üzerinde bir Riemann metriği vardır [8]. Bundan sonra aksi söylenmedikçe M manifoldunu bağlantılı , diferensiyellenebilir ve parakompakt olarak kabul edeceğiz..

I.4.2. Tanım. M bir manifold ve M üzerinde vektör alanlarının uzayı $\chi(M)$ olmak üzere

$$\begin{aligned} \nabla : \chi(M) \times \chi(M) &\to \chi(M) \\ (X,Y) &\to \nabla_X Y \end{aligned}$$

fonksiyonu aşağıdaki özellikleri sağlıyorsa ∇ ya M manifoldu üzerinde bir lineer konneksiyon denir [2]. $\forall\, X,Y,Z \in \chi(M)$ ve $\forall f,g \in C^\infty(M,IR)$ için

$1)\ \nabla_{fX+gY}Z = f\nabla_X Z + g\nabla_Y Z$

$2)\ \nabla_X(fY+gZ) = f\nabla_X Y + g\nabla_X Z + (Xf)Y + (Xg)Z$

I.4.3. Tanım. M bir manifold ve ∇ M üzerinde lineer konneksiyon olsun. Eğer ∇ konneksiyonu aşağıdaki iki özelliğe sahipse Riemann konneksiyonu adını alır [2]. $\forall X,Y,Z \in \chi(M)$ için

$1)\ [X,Y] = \nabla_X Y - \nabla_Y X$

$2)\ Xg(Y,Z) = g(\nabla_X Y, Z) + g(Y, \nabla_X Z)$

I.4.2. Teorem. Bir Riemann manifoldu üzerinde bir tek Riemann konneksiyonu vardır [6].

İspat. M nin bir koordinat komşuluğu U olsun. U üzerinde lokal koordinat fonksiyonları ile tanımlanan vektör alanlarının cümlesi $x_i = \dfrac{\partial}{\partial x_i}$ olmak üzere

$$\Psi = \{x_1, \ldots, x_n\}$$

ve

$$g(x_i, x_j) = g_{ij}$$

olsun. g metrik tensörünün Ψ bazına göre matrisi g_{ij} olup g bir iç çarpım fonksiyonu olduğundan regülerdir.

Simetrik bir matris pozitif tanımlı ise bu matrisin determinantı karakteristik değerlerinin çarpımına eşittir. Ayrıca karakteristik değerleri de pozitiftir. O halde g^{-1} vardır. g^{-1} ın bileşenlerini $(g^{-1})_{ij}$ ile gösterelim. Bu durumda M üzerinde konneksiyon ∇ olsun.

$$\nabla_{x_k} x_j = \sum_{i=1}^{n} \Gamma_{jk}^{i} x_i$$

olmak üzere

$$\Gamma_{jk}^{i} : U \xrightarrow{c^\infty} IR$$

fonksiyonlarını tanımlayalım. Bu fonksiyonlara Christoffel sembolleri denir. Buradan U üzerinde ∇ vermek Γ_{jk}^{i} fonksiyonlarını Riemann konneksiyon şartlarını sağlayacak şekilde vermektir. Tanım I.4.3 ün (2) sinden

$$\begin{aligned}
&x_i[g(x_r,x_j)]+x_j[g(x_r,x_i)]-x_r[g(x_i,x_j)]\\
&=g(\nabla_{x_i}x_r,x_j)+g(x_r,\nabla_{x_i}x_j)+g(\nabla_{x_j}x_r,x_i)\\
&+g(x_r,\nabla_{x_j}x_i)-g(\nabla_{x_r}x_i,x_j)-g(x_i,\nabla_{x_r}x_j)\\
&=\sum_{k=1}^{n}\Gamma_{ri}^{k}g(x_k,x_j)+\sum_{k=1}^{n}\Gamma_{ji}^{k}g(x_r,x_k)+\sum_{k=1}^{n}\Gamma_{rj}^{k}g(x_k,x_i)\\
&+\sum_{k=1}^{n}\Gamma_{ij}^{k}g(x_r,x_k)-\sum_{k=1}^{n}\Gamma_{ir}^{k}g(x_k,x_j)-\sum_{k=1}^{n}\Gamma_{jr}^{k}g(x_i,x_k)\\
&=\sum_{k=1}^{n}\{(\Gamma_{ri}^{k}-\Gamma_{ir}^{k})g(x_k,x_j)+(\Gamma_{rj}^{k}-\Gamma_{jr}^{k})g(x_k,x_i)\\
&+(\Gamma_{ij}^{k}+\Gamma_{ji}^{k})g(x_r,x_k)\}
\end{aligned}$$

olur. Diğer taraftan $\forall f\in C^{\infty}(M,IR)$ için

$$\begin{aligned}
[x_k,x_s](f)&=x_s[x_s(f)]-x_s[x_s(f)]\\
&=x_k(\frac{\partial f}{\partial x_s})-x_s(\frac{\partial f}{\partial x_k})\\
&=\frac{\partial^2 f}{\partial x_k\partial x_s}-\frac{\partial^2 f}{\partial x_s\partial x_k}\\
&=0
\end{aligned}$$

dır. Buradan

$$[x_k,x_s]=0$$

bulunur. Böylece

$$\begin{aligned}
[x_k,x_s]&=\nabla_{x_k}x_s-\nabla_{x_s}x_k\\
&=\sum_{t=1}^{n}\Gamma_{sk}^{t}x_t-\sum_{t=1}^{n}\Gamma_{ks}^{t}x_t\\
&=\sum_{t=1}^{n}(\Gamma_{sk}^{t}{}_{t}-\sum_{t=1}^{n}\Gamma_{ks}^{t})x_t
\end{aligned}$$

ve $\{x_1,\ldots,x_n\}$ liner bağımsız olduğundan

$$\begin{aligned}
\Gamma_{sk}^{t}-\Gamma_{ks}^{t}&=0\\
\Gamma_{sk}^{t}&=\Gamma_{ks}^{t}
\end{aligned}\tag{I.4.4}$$

bulunur. Buna göre

$$x_i\left[g(x_r,x_j)\right]+x_j\left[g(x_r,x_i)\right]-x_r\left[g(x_i,x_j)\right]=2\sum_{k=1}^{n}\Gamma_{ji}^{k}g_{kr}$$

$$x_i\left[g_{rj}\right]+x_j\left[g_{ri}\right]-x_r\left[g_{ij}\right]=2\sum_{k=1}^{n}\Gamma_{ji}^{k}g_{kr}$$

$$1\le i,j,k,r\le n$$

dır. Bu eşitliği matris formunda yazarsak

$$\begin{aligned}[\ \Gamma_{ji}^{k}\ ] &= \frac{1}{2}\left(g^{-1}\right)_{kr}\left[x_i\left[g_{rj}\right]+x_j\left[g_{ri}\right]-x_r\left[g_{ij}\right]\right] \\ &= \frac{1}{2}\left(g^{-1}\right)_{kr}\left[\frac{\partial g_{rj}}{\partial x_i}+\frac{\partial g_{ri}}{\partial x_j}-\frac{\partial g_{ij}}{\partial x_r}\right] \\ &= \frac{1}{2}\left[\ \sum_{r=1}^{n}\ (g^{-1})_{kr}\left[\frac{\partial g_{rj}}{\partial x_i}+\frac{\partial g_{ri}}{\partial x_j}-\frac{\partial g_{ij}}{\partial x_r}\right]\ \right]\end{aligned}$$

veya matrislerin eşitliğinden

$$\Gamma_{ji}^{k}=\frac{1}{2}\sum_{r=1}^{n}(g^{-1})_{kr}\left(\frac{\partial g_{rj}}{\partial x_i}+\frac{\partial g_{ri}}{\partial x_j}\right)-\sum_{i=1}^{n}(g^{-1})_{ki}\frac{\partial g_{ij}}{\partial x_r} \tag{I.4.5}$$

olur. Böylece M üzerindeki metrik tensör cinsinden Christoffel sembollerinin ifadesi elde edilmiş olur. U üzerinde ∇ yı tanımlamak için (I.4.5) ifadesini kullanabiliriz. Ayrıca bu şekilde tanımlanan ∇, Riemann konneksiyonu şartlarını sağlar. O halde (I.4.5) ile tanımlanan ∇ bir Riemann konneksiyonudur ve tektir.

I.4.4. Tanım. M n-boyutlu bir manifold ve M üzerindeki konneksiyon ∇ olsun. Bu taktirde

$$\begin{aligned}&T:\chi(M)\times\chi(M)\to\chi(M)\\ &(X,Y)\qquad\to T(X,Y)=\nabla_X Y-\nabla_Y X-[X,Y]\end{aligned} \tag{I.4.6}$$

olarak tanımlanan vektör değerli tensöre M üzerinde tanımlı ∇ konneksiyonun torsiyon tensörü denir [6].

I.4.5. Tanım. M n-boyutlu bir manifold ve M üzerindeki ∇ konneksiyonun torsiyon tensörü T olsun. Eğer T=0 ise ∇ konneksiyonuna simetriktir veya sıfır torsiyonludur denir [6].

I.4.6. Tanım. M n-boyutlu bir manifold olsun. M üzerinde

$$R:\chi(M)\times\chi(M)\times\chi(M)\to\chi(M)$$
$$(X,Y,Z)\to R(X,Y,Z)=R(X,Y)Z$$
$$R(X,Y)Z=\nabla_X\nabla_Y Z-\nabla_Y\nabla_X Z-\nabla_{[X,Y]}Z \qquad (I.4.7)$$

olarak tanımlanan tensöre ∇ konneksiyonunun eğrilik tensörü denir [6].

Önerme I.2.1 den R ve T tensör alanlarını sırasıyla

$$\chi^*(M)\times\chi(M)\times\chi(M)\to C^\infty(M,IR)$$
$$(\omega,X,Y)\to\omega(T(X,Y))$$
$$\chi^*(M)\times\chi(M)\times\chi(M)\times\chi(M)\to C^\infty(M,IR)$$
$$(\omega,X,Y,Z)\to\omega(R(X,Y)Z)$$

çok lineer dönüşümleri olarak ifade edebiliriz [9].

I.4.7. Tanım. M bir Riemann manifoldu olsun. Bu durumda

$$K:\chi(M)\times\chi(M)\times\chi(M)\times\chi(M)\to C^\infty(M,IR)$$
$$(X,Y,Z,W)\to K(X,Y,Z,W)=g(R(X,Y)Z,W)$$

olarak tanımlanan 4.mertebeden kovaryant tensöre M üzerinde Riemann Christoffel eğrilik tensörü denir [6].

I.4.3. Teorem. M bir Riemann manifoldu ve ∇ M üzerinde bir Riemann konneksiyon olsun. Bu taktirde K aşağıdaki bağıntılara sahiptir [6].

$a)$ $K(X,Y,Z,W)=-K(Y,X,Z,W)$

$b)$ $K(X,Y,Z,W)+K(Y,Z,X,W)+K(Z,X,Y,W)=0$

$c)$ $K(X,Y,Z,W)=-K(X,Y,W,Z)$

$d)$ $K(X,Y,Z,W)=K(Z,W,X,Y)$

İspat.

a) $R(X,Y)=-R(Y,X)$ olduğundan açıktır.

b) Bu durumda

$$R(X,Y)Z+R(Y,Z)X+R(Z,X)Y=0$$

olduğunu göstermek yeterlidir. Riemann konneksiyonu için

$$\nabla_Y Z - \nabla_Z Y - [Y,Z] = 0 \tag{I.4.8}$$

olduğundan

$$\nabla_X(\nabla_Y Z) - \nabla_X(\nabla_Z Y) - \nabla_X[Y,Z] = 0 \tag{I.4.9}$$

elde edilir. (I.4.9) denklemi düzenlenirse

$$R(X,Y)Z + \nabla_{[X,Y]}Z - \nabla_X[Y,Z] + \nabla_Y(\nabla_X Z) - \nabla_X(\nabla_Z Y) = 0$$

dır. X, Y, Z için dairesel permütasyonla benzer eşitlikler elde edilip toplanılırsa

$$\begin{aligned}
&R(X,Y)Z + R(Y,Z)X + R(Z,X)Y + \nabla_{[X,Y]}Z + \nabla_{[Y,Z]}X \\
&+ \nabla_{[Z,X]}Y - \nabla_X[Y,Z] - \nabla_Y[Z,X] - \nabla_Z[X,Y] = 0 \\
&R(X,Y)Z + R(Y,Z)X + R(Z,X)Y + [Z,[X,Y]] - [X,[Y,Z]] \\
&-[Y,[Z,X]] = 0
\end{aligned}$$

olur. Böylece Tanım (I.3.17) deki *iv)* özelliğinden

$$R(X,Y)Z + R(Y,Z)X + R(Z,X)Y = 0$$

elde edilir.

c)

$$\begin{aligned}
K(X,Y,Z,W) &= g(R(X,Y)Z,W) \\
&= g(\nabla_X \nabla_Y Z - \nabla_Y \nabla_X Z - \nabla_{[X,Y]}Z, W)
\end{aligned} \tag{I.4.10}$$

dır.

$$X\left[g(\nabla_Y Z,W)\right] = g(\nabla_X \nabla_Y Z,W) + g(\nabla_X Z, \nabla_X W)$$

olduğundan

$$\begin{aligned}
g(\nabla_X \nabla_Y Z,W) &= Xg(\nabla_Y Z,W) - g(\nabla_Y Z, \nabla_X W) \\
&= X\left[Yg(Z,W) - g(Z,\nabla_Y W)\right] - g(\nabla_Y Z, \nabla_X W) \\
&= X[Yg(Z,W)] - g(\nabla_X Z, \nabla_Y W) - g(Z, \nabla_X \nabla_Y W) \\
&\quad - g(\nabla_Y Z, \nabla_X W)
\end{aligned} \tag{I.4.11}$$

$$\begin{aligned}
g(\nabla_Y \nabla_X Z,W) &= Y[Xg(W,Z)] - g(\nabla_Y \nabla_X W, Z) - g(\nabla_X W, \nabla_Y Z) \\
&\quad - g(\nabla_Y W, \nabla_X Z)
\end{aligned} \tag{I.4.12}$$

ve

$$\begin{aligned}
g(\nabla_{[X,Y]}Z,W) &= [X,Y](g(Z,W)) - g(\nabla_{[X,Y]}W,Z) \\
&= X(Yg(Z,W)) - Y(Xg(W,Z)) - g(\nabla_{[X,Y]}W,Z)
\end{aligned} \tag{I.4.13}$$

elde edilir. (I.4.11), (I.4.12), (I.4.13) değerleri (I.4.10) da yerlerine yazılır ve uygun sadeleştirmeler yapılırsa

$$K(X,Y,Z,W) = -g(\nabla_X \nabla_Y W - \nabla_Y \nabla_X W - \nabla_{[X,Y]} W, Z)$$
$$= -K(X,Y,W,Z)$$

elde edilir.

d) *(b)* nin ispatından

$$R(X,Y)Z + R(Y,Z)X + R(Z,X)Y = 0$$

dır. Eşitliğin her iki yanını W ile skaler çarparsak

$$g(R(X,Y)Z,W) + g(R(Z,X)Y,W) + g(R(Y,Z)X,W) = 0$$

veya

$$K(X,Y,Z,W) + K(Z,X,Y,W) + K(Y,Z,X,W) = 0$$

bulunur. Buradan

$$K(W,X,Y,Z) + K(Y,W,X,Z) + K(X,Y,W,Z) = 0$$
$$K(Y,Z,W,X) + K(Z,W,Y,X) + K(W,Y,Z,X) = 0$$
$$K(Z,W,X,Y) + K(Z,W,Y,X) + K(X,Z,W,Y) = 0$$

olur, Bu eşitliklerin taraf tarafa toplanması ve *(a)* ile *(c)* nin de kullanılması ile eşitlik elde edilir.

I.4.4. Teorem. M bir Riemann manifoldu ve K ∇ lineer konneksiyonunun Riemann Christoffel eğrilik tensörü olsun. Bu durumda $i = \dfrac{\partial}{\partial x_i} \in \chi(M)$ olmak üzere

$$\partial i(K_{jklp}) + \partial j(K_{kilp}) + \partial k(K_{ijlp}) = 0$$

dır [5].

I.4.8. Tanım. M bir n-boyutlu Riemann manifoldu ve M nin bir p noktasındaki tanjant uzayının 2-boyutlu bir altuzayı P olsun. P yi geren birim vektörler X_p, Y_p ve M üzerindeki Riemann Christoffel eğrilik tensörü K olmak üzere

$$K(X_p, Y_p, X_p, Y_p)$$

değerine M nin p noktasındaki P düzlemine göre kesit eğriliği denir. K simetrik ve antisimetrik olduğundan bu eğriliğin değeri sadece P altuzayına bağlıdır [2].

M üzerinde metrik tensör g X_p, Y_p üzerine kurulan parelel kenarın alanı $\|X_p \wedge Y_p\|$ olmak üzere

$$\mathrm{K}(P) = \frac{g(K(X_p, Y_p)X_p, Y_p)}{\|X_p \wedge Y_p\|} \tag{I.4.15}$$

dır [9].

I.4.9. Tanım. M bir n-boyutlu Riemann manifoldu ve $\{e_1, \ldots, e_n\}$ lokal ortonormal vektör alanları olsun. Bu durumda $X, Y \in \chi(M)$ $\forall X_p \in T_M(p)$ için

$$S(X,Y) = \sum_{i=1}^{n} g(R(e_i, X)Y, e_i) \tag{I.4.16}$$

ile tanımlı olan $(0,2)$ mertebeli tensör alanına Ricci tensör alanı denir.

$T_M(p)$ nin bir $\{e_1, \ldots, e_n\}$ ortonormal bazını alalım. Bu durumda P_i ye göre kesit eğrilikleri

$$K(e_i, X, e_i, X) = g(R(e_i, X)e_i, X)$$

olmak üzere, M nin p noktasında X_p doğrultusundaki Ricci eğriliği

$$k(X) = \frac{S(X,X)}{g(X,X)} \tag{I.4.17}$$

ile tanımlanır [2].

I.4.9. Tanım. M n-boyutlu bir Riemann manifoldu olsun. $p \in M$ olmak üzere $T_M(p)$ nin 2-boyutlu altuzaylarına göre kesit eğriliklerinin toplamına skaler eğrilik denir ve

$$r = \sum_{i=1}^{n} S(e_i, e_i) \tag{I.4.18}$$

ile ifade edilir [2].

Şimdi lokal koordinatlarda eğrilik tensör alanı ,torsiyon tensör alanı , Ricci tensör alanı ve skaler eğriliğin ifadelerini elde edelim. M n-boyutlu bir manifold ve $p \in M$ olsun. p nin bir U açık komşuluğunda standart bazı $\{e_1, \ldots, e_n\}$ olarak seçelim. Böylece U da her X vektör alanı

$$X = \sum_i f_i e_i$$

olarak yazılabilir. U üzerinde $\Gamma_{ij}^k, T_{ij}^k, R_{ijk}^h$ C^∞-fonksiyonlar olmak üzere

$$\nabla_{e_i} e_j = \sum_k \Gamma_{ij}^k e_k \tag{I.4.19}$$

$$T(e_i, e_j) = \sum_k T_{ij}^k e_k \tag{I.4.20}$$

$$R(e_i, e_j)e_k = \sum_h R_{ijk}^h e_h \tag{I.4.21}$$

diyelim. Burada

$$\begin{aligned} R_{ijk}^h &= R(\omega^h, e_i, e_j, e_k) \\ &= \omega^h(R(e_j, e_k)e_i) \\ &= \omega^h(\nabla_{e_j}\nabla_{e_k} e_i - \nabla_{e_k}\nabla_{e_j} e_i - \nabla_{[e_j, e_k]} e_i) \\ &= \omega^h(\nabla_{e_j}(\Gamma_{ki}^l e_l) - \nabla_{e_k}(\Gamma_{ji}^l e_l) - c_{jk}^l \nabla_{e_l} e_i) \\ &= \omega^h(\Gamma_{ki}^l \Gamma_{jl}^m e_m + e_j(\Gamma_{ki}^l)e_l - \Gamma_{ji}^l \Gamma_{kl}^m e_m - e_k(\Gamma_{ji}^l)e_l \\ &\quad - c_{jk}^l \Gamma_{li}^m e_m) \end{aligned}$$

dır. Standart bazlar alındığından

$$c_{jk}^l = 0$$

olur. Böylece

$$R_{ijk}^h = \frac{\partial \Gamma_{ki}^h}{\partial x_j} - \frac{\partial \Gamma_{ji}^h}{\partial x_k} + \Gamma_{jl}^h \Gamma_{ki}^l - \Gamma_{kl}^h \Gamma_{ji}^l \tag{I.4.22}$$

bulunur. Benzer olarak

$$\begin{aligned} T_{ij}^k &= T(\omega^k, e_i, e_j) \\ &= \omega^k(T(e_i, e_j)) \\ &= \omega^k(\nabla_{e_i} e_j - \nabla_{e_j} e_i - [e_i, e_j]) \\ &= \omega^k(\Gamma_{ij}^l e_l - \Gamma_{ji}^l e_l - c_{ij}^l e_l) \\ &= \Gamma_{ij}^l - \Gamma_{ji}^l \end{aligned} \tag{I.4.23}$$

dır. (I.4.22) ve (I.4.23) e benzer olarak Ricci tensörü S

$$S_{ij} = R_{hij}^h = \frac{\Gamma_{jk}^k}{\partial x_i} - \frac{\Gamma_{ik}^k}{\partial x_j} \tag{I.4.24}$$

elde edilir. Böylece (I.4.18) den skaler eğrilik

$$r = g^{ij} R_{ij} \tag{I.4.25}$$

dır. Burada $R_{ij} = R_{ihj}^h$ dır [5].

Eğrilik tensörü ve metrik tensörünün lokal koordinat sistemine göre bileşenleri

$$R^{h}_{jkl}, g_{im}$$

ise (0,4) mertebeli Riemann Christoffel eğrilik tensörünün bileşenleri

$$K_{ijkl} = g_{im} R^{m}_{jkl} \tag{I.4.26}$$

ile verilir [9].

I.4.1. Önerme. B teorem I.4.3 *(a), (b),(c)* şartlarını sağlayan bir 4-lineer dönüşüm ise

$$B = cR_1$$

dır. Burada $c = K(p), R_1(X,Y,Z,W) = g(X,Z)g(Y,W) - g(Y,Z)g(W,X)$ dır [9].

$n=2$ durumunda $G = \frac{1}{2}r$ eğriliğine Gauss eğriliği denir. Eğer $S=ag$ formunda ise M ye Einstein manifoldu denir. Burada a=a(x) dır [9].

I.4.10. Tanım. M bir manifold ve $K(P)$ M üzerinde kesit eğriliği olsun. Eğer $T_M(p)$ de bütün P düzlemleri ve bütün p noktaları için $K(P)$ sabit ise bu durumda M ye sabit eğrilikli uzay denir. Sabit eğrilikli Riemann manifolduna da uzay form denir [2].

Eğer M sabit c eğrilikli uzay ise bu durumda (I.4.15) den

$$K_{ijkl} = c(g_{ik}g_{jl} - g_{il}g_{jk})$$

veya

$$R^{i}_{jkl} = c(\delta^{i}_{k} g_{jl} - \delta^{i}_{l} g_{jk})$$

dır [9].

I.4.5. Teorem(Shur). M, $n \geq 3$ boyutlu bağlantılı Riemann manifoldu olsun. Eğer $K(P)$ sadece p noktasına bağlı ise bu durumda M reel uzay formdur [5]

İspat. (I.4.15) den Riemann Christoffel eğrilik tensörünün her iki yanının kovaryant türevini alalım Yani $i = \frac{\partial}{\partial x_i}$ olmak üzere

$$\partial m(K_{ijkl}) = \nabla_{\frac{\partial}{\partial x_m}} (c(g_{ik}g_{jl} - g_{il}g_{jk}))$$

uygulayalım. M bir Riemann manifoldu olduğundan ∇g=0 dır. Bu nedenle

$$\partial m(K_{ijkl}) = c_m(g_{ik}g_{jl} - g_{il}g_{jk})$$

dır. Benzer olarak l için aynı işlemler yapılırsa (I.4.14)den

$$c_m(g_{ik}g_{jl} - g_{il}g_{jk}) + c_k(g_{il}g_{jm} - g_{im}g_{jl}) + c_l(g_{im}g_{jk} - g_{ik}g_{jm}) = 0$$

elde edilir. Şimdi her iki taraf g^{ik} ile çarpılırsa

$$c_m(ng_{jl} - g_{jl}) + c_k(\delta_k^l g_{jm} - \delta_m^k g_{jl}) + c_l(g_{jm} - ng_{jm}) = 0$$

$$c_m(n-1)g_{jl} + c_l g_{jm} - c_m g_{jl} + c_l g_{jm} - ng_{jm} = 0$$

$$(n-2)(c_m g_{jl} - c_l g_{jm}) = 0$$

elde edilir. $n \geq 3$ olduğundan

$$c_m g_{jl} = c_l g_{jm}$$

olur. $j=l \neq m$ için $c_m = 0$. $\forall m$ için doğru olduğundan c sabittir.

I.4.6. Teorem. M sabit c eğrilikli uzay olsun. Bu durumda $X, Y, Z \in \chi(M)$ için

$$R(X,Y)Z = c[g(Y,Z)X - g(X,Z)Y] \qquad \text{(I.4.27)}$$

dır [9].

I.5 Vektör Demetleri

I.5.1. Tanım. *E,B,F* C^{∞}-manifoldlar ve π :*E*→*B* bir C^{∞}-dönüşüm olsun. B nin bir açık örtüsü $\{U_\alpha\}_{\alpha\in I}$ olmak üzere eğer

$$(\pi o \psi_\alpha)(x,y)=x \quad x\in U_\alpha, y\in F$$

olacak biçimde

$$\psi_\alpha : U_\alpha \times F \to \pi^{-1}(U_\alpha)$$

diffeomorfizmlerinin bir $\{\psi_\alpha\}_{\alpha\in I}$ ailesi varsa π F ye göre lokal çarpım özelliğine sahiptir denir ve $D=\{(U_\alpha, \psi_\alpha\}_{\alpha\in I}$ sistemine de π nin lokal ayrışması denir [4].

Eğer$C^{\infty}(E,B)=\{\pi | \pi.E\to B\}$modülünün herhangi bir elemanı lokal çarpım özelliğine sahipse o zaman bu dönüşüm örten ve açık bir dönüşümdür [4].

I.5.2. Tanım. π :*E*→*B* dönüşümü lokal çarpım özelliğine sahip olsun. Bu durumda $\zeta=(E,\pi,B,F)$ dörtlüsüne bir diferensiyellenebilir lif demeti adı verilir [4].

Bir lif demetinde *E* ye total uzay, *B* ye baz (taban) uzay, *F* ye lif modeli ve π ye de projeksiyon (fibrasyon) adı verilir. Ayrıca rankζ=boy*F* olarak tanımlanır. Biz lif demetini *E* veya π ile göstereceğiz [4].

I.5.3. Tanım. π :*E*→*B* bir lif demeti olsun. ∀x∈*B* için

$$\pi^{-1}(x)=F_x=\{u\in E | \pi(u)=x\}$$

cümlesine *x* üzerinde bir lif denir.

Tüm F_x liflerinin ayrık birleşimi *E* total uzayını verir. Yani

$$E=\bigcup_{x\in B} F_x$$

dır [4].

I.5.1. Örnek. Bir C^{∞}-manifoldunun herhangi bir tanjant uzayı $T_M(p)$ ile gösterilecek olursa ve M nin tüm p noktalarındaki $T_M(p)$ tanjant uzaylarının ayrık birleşimine TM denirse

$$TM = \bigcup_{p \in M} T_M(p)$$

dır. Bu durumda

$$\begin{aligned} \pi_M &: TM \to M \\ Z &\to \pi_M(Z) \quad \equiv \forall Z \in TM, \exists p \in M \\ & \qquad\qquad\qquad Z_p \in T_M(p) \Rightarrow Z = Z_p \end{aligned}$$

ile tanımlı dönüşüm sürekli örten dönüşümdür. π_M dönüşümüne kanonik projeksiyon denir. π_M kanonik projeksiyon olmak üzere

$$\zeta_M = (TM, \pi_M, M, IR^n)$$

dörtlüsü bir lif demetidir buna manifoldun tanjant demeti denir [4].

I.5.4. Tanım. $\zeta = (E, \pi, B, F)$ bir diferensiyellenebilir lif demeti olsun. πnin D lokal ayrışmasına ζ-lif demetinin lokal koordinat temsilcisi denir.

$\zeta = (E, \pi, B, F)$ lif demetinin $D = \{(U_\alpha, \psi_\alpha\}_{\alpha \in I}$ lokal koordinat temsilcisini gözönüne alalım. $\forall x \in U_\alpha$ için

$$\psi_{\alpha,x} : F \to F_x$$

dönüşümünü $y \in F$ için

$$\psi_{\alpha,x}(y) = \psi_\alpha(x, y)$$

şeklinde tanımlarsak ψ_α lar difeomorfizm olduklarından , $\psi_{\alpha,x}$ ler de birebir, örten ve diffeomorfizmdir [4].

I.5.5. Tanım. $\zeta = (E, \pi, B, F)$ bir diferensiyellenebilir lif demeti olsun. Eğer aşağıdaki iki özelik sağlanıyor ise ζ ya vektör demeti denir.

i) $\forall x \in B$ için F ve F_x bir K cismi üzerinde vektör uzayıdır.

ii) $\forall x \in B$ için $\psi_{\alpha,x}: F \to F_x$ dönüşümleri lineer izomorfizm olacak şekilde ζ nın bir $D = \{(U_\alpha, \psi_\alpha\}_{\alpha\in I}$ lokal koordinat temsilcisi vardır. Buna göre Örnek I.5.1 bir vektör demetidir [4].

I.5.6. Tanım. $\zeta = (E, \pi, B, F)$, $\zeta' = (E', \pi', B', F')$ iki vektör demeti olsun. Eğer

i) $B=B'$

ii) $\forall x \in B'$ için F_x' lifi , F_x lifinin bir alt vektör uzayı

iii) $\ell: E' \to E$ inclusion dönüşümü diferensiyellenebilir

şartları sağlanıyor ise ζ' vektör demetine ζ vektör demetinin bir alt vektör demeti denir [4].

I.5.7. Tanım. $\overline{M}$ m-boyutlu manifold ve $\overline{M}$ nin n-boyutlu altmanifoldu M olsun. $\overline{M}$ ve M nin tanjant demetlerini sırasıyla $T\overline{M}$, TM ile gösterelim. Bu taktirde $\forall p \in M$ noktasını $L_p(T_M(p))$ altuzayına taşıyan dönüşüme $T\overline{M}$ nin altdemeti denir [3].

I.5.8. Tanım. $\pi: E \to B$ bir C^∞-lif demeti olsun. Bu durumda

$$\pi o S = I \text{ (I,} B \text{ nin birim dönüşümü)}$$

olacak şekilde

$$S: B \to E$$

C^∞- dönüşümüne lif demetinin kesiti denir ve $\Gamma(E)$ ile gösterilir [11].

I.5.9. Tanım. E bir vektör demeti olsun. $\forall p \in B$ için $T_E(p)$ tanjant uzayına bir X_p vektörü taşıyan dönüşüme vektör demetinin kesiti denir. E nin $\Gamma(E)$ kesitlerinin uzayı K cismi üzerinde bir vektör uzayıdır [11].

Vektör demetinin kesitine M üzerinde bir alan denir. TM tanjant demetinin kesitine M üzerinde bir vektör alanı denir ve $\Gamma(E)$ vektör uzayı $\chi(M)$ ile gösterilir [11].

I.5.10. Tanım. E_1, E_2 birer vektör demeti ve $f: E_1 \to E_2$ C^∞- dönüşüm olsun. π_1, π_2 sırasıyla E_1 ve E_2 nin projeksiyonu olmak üzere $f; \pi_2 o f = \pi_1$ ve E_1 in her lifinde f lineer, şartlarını sağlıyor ise f ye bir vektör demeti homomorfizmi denir. Eğer $\forall p \in M$ için $f: E_1\big|_p \to E_2\big|_p$ izomorfik ise f ye vektör demeti izomorfizmi denir [11].

I.6. Riemann Manifoldların Altmanifoldları

I.6.1. Tanım. $\overline{M}$ m-boyutlu bir Riemann manifoldu ve M $\overline{M}$ ye immersed n-boyutlu bir başka Riemann manifoldu olsun. Bu durumda M ye $\overline{M}$ nin Riemann altmanifoldu denir [9].

$\overline{M}$ ve M n ve m $(n<m)$ boyutlu diferensiyellenebilir manifoldlar olsun. M nin $\overline{M}$ ye bir immersiyonu

$$f: M \to \overline{M}$$

ve $\overline{M}$ üzerindeki Riemann metriği $\overline{g}$ olsun. O zaman f-immersiyonu M ye bir g Riemann metriği indirger. $\forall X_p, Y_p \in T_M(p)$ için f lokal olarak birebir olduğundan

$$g(X_p, Y_p) = \overline{g}_{f(p)}(f_* X_p, f_* Y_p)$$

olacak şekilde g metriği bellidir. Bu durumda $f(T_M(p))$ uzayı $T_{\overline{M}}(f(p))$ uzayının bir altuzayıdır.

Eğer $\forall X_p \in T_M(p)$ için

$$\overline{g}\big|_{f(p)}(f_* X_p, \xi) = 0 \tag{I.6.1}$$

ise ξ vektörü $f(p)$ noktasında normaldir denir. Her bir $f(p)$ noktasında $\overline{M}$ ye nomal olan bu cins $\xi_{f(p)}$ vektörlerinin cümlesine $\overline{M}$ üzerindeki normal vektör alanı denir. $\overline{M}$ de M nin birim normal vektörüne normal kesit denir.

M üzerindeki bütün normal vektörlerinin vektör demetini $T^{\perp}M$ ile göstereceğiz. Buna göre $\overline{M}$nin *f(M)* ye kısıtlanmış olan $T\overline{M}$ tanjant demeti ; *TM* tanjant demeti ile $T^{\perp}M$ normal demetin direkt toplamına izomorfiktir. Böylece $\overline{M}$ ve M üzerindeki konneksiyonlar sırasıyla $\overline{\nabla}, \nabla$ olmak üzere $\forall X, Y \in \chi(M)$ için

$$\overline{\nabla}_X Y = \nabla_X Y + h(X,Y) \tag{I.6.2}$$

dır. Bu şekilde tanımlanan ∇ bir Riemann konneksiyonudur. Burada h

$$h \ : \ \chi(M) \times \chi(M) \rightarrow \chi^{\perp}(M)$$

ile tanımlı normal demet değerli simetrik bilineer formdur. (I.6.2) denklemine Gauss formülü ve h ya M nin ikinci temel formu denir. Şimdi $X \in \chi(M), V \in \chi^{\perp}(M)$ için $-A_V X, \nabla^{\perp}_X V$ ile $\overline{\nabla}_X V$ nin sırasıyla teğet ve nomal kısımlarını gösterelim. Bu durumda

$$\overline{\nabla}_X V = -A_V X + \nabla^{\perp}_X V \tag{I.6.3}$$

yazabiliriz. Burada A_V lineer operatörüne normal kesite göre Weingarten temel tensörü ve (I.6.3) denklemine de Weingarten formülü denir [17].

M de $T^{\perp}M$ üzerinde tanımlı $\nabla^{\perp}$ diferensiyel operatörüne normal konneksiyon denir. (I.6.2) ve (I.6.3) denklemleri kullanılarak $X, Y \in \chi(M), V \in \chi^{\perp}(M)$ için

$$g(Y,V) = 0$$
$$Xg(Y,V) = 0$$
$$g(\overline{\nabla}_X Y, V) + g(Y, \overline{\nabla}_X V) = 0$$
$$g(\nabla_X Y + h(X,Y), V) + g(Y, -A_V X + \nabla^{\perp}_X V) = 0$$
$$g(\nabla_X Y, V) + g(h(X,Y), V) + g(Y, -A_V X) + g(Y, \nabla^{\perp}_X V) = 0$$
$$g(h(X,Y), V) - g(Y, A_V X) = 0$$
$$g(h(X,Y), V) = g(Y, A_V X) \tag{I.6.4}$$

elde edilir. Böylece h simetrik ve lineer olduğundan A_V simetrik ve lineer dir. h tensörünün kovaryant türevi (I.3.20) den

$$(\nabla_X h)(Y,Z) = \nabla^{\perp}_X h(Y,Z) - h(\nabla_X Y, Z) - h(Y, \nabla_X Z) \tag{I.6.5}$$

dır. (I.6.2) ve (I.6.3) denklemleri kullanıldığında $\forall X, Y, Z \in \chi(M)$ için

$$\overline{R}(X,Y)Z = \overline{\nabla}_X \overline{\nabla}_Y Z - \overline{\nabla}_Y \overline{\nabla}_X Z - \overline{\nabla}_{[X,Y]} Z$$
$$= \overline{\nabla}_X (\nabla_Y Z + h(Y,Z)) - \overline{\nabla}_Y (\nabla_X Z + h(X,Z))$$
$$-(\nabla_{[X,Y]} Z + h([X,Y],Z))$$
$$= \nabla_X \nabla_Y Z + h(X,\nabla_Y Z) + (\nabla_X h)(Y,Z) + h(\nabla_X Y,Z)$$
$$-h(\nabla_Y X,Z) - h(X,\nabla_Y Z) - \nabla_{[X,Y]} Z - h\big([X,Y],Z\big)$$
$$-A_{h(Y,Z)} X + A_{h(X,Z)} Y$$

$$= R(X,Y)Z - A_{h(Y,Z)} X + A_{h(X,Z)} Y + (\nabla_X h)(Y,Z)$$
$$-(\nabla_Y h)(X,Z) \qquad (I.6.6)$$

olur. (I.6.6) denkleminin her iki tarafı $W \in \chi(M)$ ile çarpıma tabi tutulursa

$$g(\overline{R}(X,Y)Z,W) = g(R(X,Y)Z,W) - g(h(X,W),h(Y,Z)) + g(h(Y,W),h(X,Z)) \quad (I.6.7)$$

elde edilir. (I.6.7) denklemine Gauss denklemi denir. (I.6.6) denkleminin normal bileşeni alınırsa $X,Y,Z \in \chi(M)$ için

$$(\overline{R}(X,Y)Z)^{\perp} = (\nabla_X h)(Y,Z) - (\nabla_Y h)(X,Z) \qquad (I.6.8)$$

elde edilir. (I.6.8) denklemine Codazzi denklemi denir. M nin normal demetinin eğrilik tensörü $X,Y \in \chi(M), V \in \chi(M)^{\perp}$ olmak üzere

$$R^{\perp}(X,Y)V = \nabla^{\perp}{}_X \nabla^{\perp}{}_Y V - \nabla^{\perp}{}_Y \nabla^{\perp}{}_X V - \nabla^{\perp}{}_{[X,Y]} V \qquad (I.6.9)$$

ile tanımlanır. Buradan (I.6.2), (I.6.3) denklemleri kullanılırsa

$$\overline{R}(X,Y)V = \overline{\nabla}_X \overline{\nabla}_Y V - \overline{\nabla}_Y \overline{\nabla}_X V - \overline{\nabla}_{[X,Y]} V$$
$$= \overline{\nabla}_X (-A_V Y + \nabla^{\perp}{}_Y V) - \overline{\nabla}_Y (-A_V X + \nabla^{\perp}{}_X V)$$
$$-(-A_V [X,Y] + \nabla^{\perp}{}_{[X,Y]} V)$$
$$= -\nabla_X A_V Y - h(X, A_V Y) - A_{\nabla^{\perp}{}_Y V} X + \nabla^{\perp}{}_X \nabla^{\perp}{}_Y V$$
$$+\nabla_Y (A_V X) + h(Y, A_V X) + A_{\nabla^{\perp}{}_X V} Y$$
$$-\nabla^{\perp}{}_Y \nabla^{\perp}{}_X V + A_V [X,Y] - \nabla^{\perp}{}_{[X,Y]} V$$
$$= R^{\perp}(X,Y)V - h(X, A_V Y) + h(Y, A_V X) - (\nabla_X A)_V Y$$
$$+(\nabla_Y A)_V X \qquad (I.6.10)$$

olur. U, M de birim normal vektör alanı olmak üzere

$$-g(h(X,A_V Y),U)+g(h(Y,A_V X),U)=-g(A_U X,A_V Y)+g(A_U Y,A_V X)$$
$$=g(\left[A_U,A_V\right]X,Y)$$

dır. Burada $\left[A_U,A_V\right]=A_U A_V-A_V A_U$ olduğundan

$$g(\overline{R}(X,Y)V,U)=g(R^{\perp}(X,Y)V,U)+g(\left[A_U,A_V\right]X,Y) \qquad \text{(I.6.11)}$$

elde edilir. (I.6.11)denklemine Ricci denklemi denir [9].

I.6.2. Tanım. $\overline{M}$ m-boyutlu bir manifold ve M de $\overline{M}$ nin n-boyutlu altmanifoldu olsun. h ikinci temel form $X,Y\in\chi(M),V\in\chi(M)^{\perp}$ olmak üzere

$$\nabla^{\perp}{}_X V=0$$

ise V ye paralel ve

$$\nabla_X h=0$$

ise ikinci temel form pareleldir denir [9].

I.6.3. Tanım. Eğer h=0 ise M ye $\overline{M}$ nin total jeodezik altmanifoldu denir [9].

I.6.4. Tanım. $\overline{M}$ m-boyutlu bir manifold ve M de $\overline{M}$ nin n-boyutlu altmanifoldu olsun. A_V Weingarten temel tensörü olmak üzere

$$A_V=\alpha\mathrm{I}$$

ise V ye M nin umbilik kesiti denir. Burada α bir fonksiyon ve I birim dönüşümdür. V M nin umbilik kesiti ise M, V ye göre umbiliktir denir. Eğer $\forall V\in\chi(M)^{\perp}$ için umbilik ise M ye $\overline{M}$ nin umbilik altmanifoldu denir.

I.6.5. Tanım. $\overline{M}$ m-boyutlu bir manifold ve M de $\overline{M}$ nin n-boyutlu altmanifoldu olsun. $T_M(x)$ in bir bazı $\{e_1,\dots,e_n\}$ olmak üzere

$$H_x=\frac{1}{n}iz(h_x)=\sum_{i=1}^{n}h(e_i,e_i) \qquad \text{(I.6.12)}$$

vektörüne $x\in M$ de M nin ortalama eğrilik vektörü denir. Eğer H=0 ise M ye minimal altmanifold denir [9].

I.6.1. Teorem. $\overline{M}$ m-boyutlu bir manifold ve M de $\overline{M}$ nin n-boyutlu altmanifoldu olsun. Eğer $\{e_{n+1},...,e_m\}, T^{\perp}{}_M(x)$ in bir bazı ise

$$H_x = \frac{1}{n}\sum_{j=n+1}^{m}(izA_{e_j})e_j \tag{I.6.13}$$

dır [9].

İspat. Tanım (I.6.5) den

$$\begin{aligned} H_x = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} h(e_i,e_i) &= \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=n+1}^{m} g(h(e_i,e_i),e_j)e_j \\ &= \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=n+1}^{m} g(A_{e_j}e_i,e_i)e_j \\ &= \frac{1}{n}\sum_{j=n+1}^{m}\sum_{i=1}^{n} g(A_{e_j}e_i,e_i)e_j \\ &= \frac{1}{n}\sum_{j=n+1}^{m} iz(A_{e_j})e_j \end{aligned}$$

olur.

I.6.6. Tanım. $\overline{M}$ m-boyutlu bir manifold ve M de $\overline{M}$ nin n-boyutlu altmanifoldu olsun. Eğer $R^{\perp}=0$ ise M nin normal konneksiyonuna flattir denir. [9]

I.6.2. Teorem. M, $\overline{M}$ nin n-boyutlu altmanifoldu ve $(\overline{R}(X,Y)V)^{\perp}=0$ olsun. Bu takdirde $\left[A_U,A_V\right]=0$ olması için gerek ve yeter şart normal konneksiyonun flat olmasıdır [9].

İspat. ($\Rightarrow$) $\left[A_U,A_V\right]=0$ olsun Bu durumda

$$g(\overline{R}(X,Y)V,U) = g(R^{\perp}(X,Y)V,U) \Rightarrow \overline{R}(X,Y)V = 0$$

olur. Böylece (I.6.11) den $R^{\perp}(X,Y)V=0$ elde edilir.

($\Leftarrow$) Benzer olarak yapılır.

I.6.3. Teorem. $\overline{M}$ sabit eğrilikli Riemann manifoldu *ve* M, $\overline{M}$nin altmanifoldu olsun. M nin normal konneksiyonunun flat olması için gerek ve yeter şart M nin ikinci temel formunun sıfır olmasıdır [9].

İspat. $\overline{M}$ sabit eğrilikli uzay olsun. Bu durumda

$$\overline{R}(X,Y)V = c[g(Y,V)X - g(X,V)Y]$$

dır. $\nabla^{\perp}$ konneksiyonu flat olduğundan $R^{\perp} = 0$ dır. Bu ise $\overline{R}(X,Y)V=0$ olması demektir. Buradan

$$R^{\perp} = 0 \Leftrightarrow A = 0 \Leftrightarrow h = 0$$

olur. #

Eğer $\overline{M}$ sabit c eğrilikli ise

$$\overline{R}(X,Y)Z = c[g(Y,Z)X - g(X,Z)Y)] \in \chi(M)$$

olduğundan

$$(\overline{R}(X,Y)Z)^{\perp} = (\nabla_X h)(Y,Z) - (\nabla_Y h)(X,Z) = 0 \qquad \text{(I.6.14)}$$

dır. Bu ise

$$(\nabla_X A)_V Y = (\nabla_Y A)_V X \qquad \text{(I.6.15)}$$

olması ile eşdeğerdir. Sabit eğrilikli $\overline{M}$ için (I.6.7) denklemi gözönüne alınırsa

$$g(c[g(Y,Z)X - g(X,Z)Y],W) = g(R(X,Y)Z,W) - g(h(X,W),h(Y,Z))$$
$$+ g(h(Y,W),h(X,Z)) \qquad \text{(I.6.16)}$$

olur. Bu denklem düzenlenirse

$$g(R(X,Y)Z,W) = c[g(Y,Z)g(X,W) - g(X,Z)g(Y,W)]$$
$$+g(h(X,W),h(Y,Z))-g(h(Y,W),h(X,Z)) \qquad \text{(I.6.17)}$$

elde edilir. Diğer taraftan $\{e_{n+1},\ldots,e_m\}$, $T^{\perp}{}_M(x)$ için bir baz olmak üzere

$$h(X,W) = \sum_{j=n+1}^{m} g(h(X,W),e_j)e_j$$

$$h(Y,Z) = \sum_{j=n+1}^{m} g(h(Y,Z),e_j)e_j$$

$$h(X,Z) = \sum_{j=n+1}^{m} g(h(X,Z),e_j)e_j$$

olduğundan

$$-g(h(Y,W),h(X,Z))+g(h(X,W),h(Y,Z))=\sum_{j=n+1}^{m}-g(h(Y,W),e_j)g(h(X,Z),e_j)$$

$$+g(h(X,W),e_j)g(h(Y,Z),e_j)$$

$$=\sum_j g(A_jX,W)g(A_jY,Z)-g(A_jY,W)g(A_jX,Z)$$

dır. Böylece (I.6.17) denkleminden

$$g(R(X,Y)Z,W)=c[g(Y,Z)g(X,W)-g(X,Z)g(Y,W)] \qquad (I.6.18)$$
$$+\sum_j g(A_jX,W)g(A_jY,Z)-g(A_jY,W)g(A_jX,Z)$$

Gauss denklemi elde edilir [9].

I.6.4. Teorem. $\overline{M}$ m-boyutlu bir manifold ve M de $\overline{M}$ nin n-boyutlu altmanifoldu olsun. $\{e_{n+1},\dots,e_m\}, T^{\perp}{}_M(x)$in bir bazı ve $\overline{M}$ sabit eğrilikli olmak üzere

$$S(X,Y)=c(n-1)g(X,Y)+\sum_j(izA_{e_j})g(A_{e_j}X,Y)$$
$$-\sum_j g(A_{e_j}X,A_{e_j}Y) \qquad (I.6.19)$$

dır [9].

İspat. $S(X,Y)=\sum_i g(R(e_i,X)Y,e_i)$

dır. (I.6.18) den

$$g(R(e_i,X)Y,e_i)=c[g(X,Y)g(e_i,e_i)-g(e_i,Y)g(X,e_i)]+$$
$$\sum_j(g(A_{e_j}e_i,e_i)g(A_{e_j}X,Y)-g(A_{e_j}X,e_i)g(A_{e_j}e_i,Y))$$

olur. Böylece

$$\sum_i g(R(e_i,X)Y,e_i)=\sum_i c[g(X,Y)g(e_i,e_i)-g(e_i,Y)g(X,e_i)]$$
$$+\sum_j\sum_i g(A_{e_j}e_i,e_i)g(A_{e_j}X,Y)$$
$$-\sum_j\sum_i g(A_{e_j}X,e_i)g(A_{e_j}e_i,Y)$$
$$=cng(X,Y)-g(X,\sum_i(g(e_i,Y))e_i)+\sum_j g(A_{e_j}X,Y)$$
$$\sum_i g(A_{e_j}e_i,e_i)-\sum_i g(A_{e_j}X,\sum_i g(A_{e_j}e_i,Y_i)e_i)$$

$$
\begin{aligned}
&= cng(X,Y) - g(X,Y) + \sum_i izA_{e_j} g(A_{e_i} X, Y) \\
&\quad - \sum_j g(A_{e_j} X, A_{e_j} Y) \\
&= c(n-1) g(X,Y) + \sum_i izA_{e_j} g(A_{e_i} X, Y) \\
&\quad - \sum_j g(A_{e_j} X, A_{e_j} Y)
\end{aligned}
$$

elde edilir.

I.6.5. Teorem. $\overline{M}$ m-boyutlu bir manifold ve M de $\overline{M}$ nin n-boyutlu altmanifoldu olsun. $\overline{M}$ sabit eğrilikli olmak üzere

$$r = n(n-1)c + \sum_j (izA_{e_j})^2 - \sum_j iz(A_{e_j})^2 \tag{I.6.20}$$

dır [9].

İspat. $r = \sum_{i=1}^{n} S(e_i, e_i)$

ve

$$S(e_i,e_i) = c(n-1)g(e_i,e_i) + \sum_j (izA_{e_j}) g(A_{e_j} e_i, e_i) - \sum_j g(A_{e_j} e_i, A_{e_j} e_i)$$

olduğundan

$$r = c(n-1)g(e_i,e_i) + \sum_j (izA_{e_j}) g(A_{e_j} e_i, e_i) - \sum_j \sum_i g(A_{e_j}{}^2 e_i, e_i)$$

$$r = c(n-1)n + \sum_j (izA_{e_j})^2 - \sum_j iz(A_{e_j})^2$$

elde edilir.

I.6.7. Tanım. M bir manifold, ∇ M üzerinde bir lineer konneksiyon ve (U,φ) bir koordinat komşuluğu olsun. U üzerinde C^∞ – vektör alanlarının bir bazı $\{e_1,\dots,e_n\}$ ve bu bazın duali $\{w_1,\dots,w_n\}$ olmak üzere

$$
\begin{aligned}
&\omega_{ij} : \chi(U) \to C^\infty(U, IR) \\
&X \quad \to \omega_{ij}(X) = w_i(\nabla_X e_j)
\end{aligned}
\tag{I.6.21}
$$

ile tanımlı ω_{ij} fonksiyonlarına U üzerinde $\{e_1,\dots,e_n\}$ bazına göre ∇ konneksiyonun konneksiyon 1-formları denir [13].

I.6.6. Teorem. M bir Riemann manifoldu, M üzerinde C^{∞} −vektör alanlarının bir bazı $\{e_1,...,e_n\}$ ve bu bazın duali $\{w_1,...,w_n\}$ olmak üzere

i) $dw^i - \sum_j w^j \wedge \omega_j^i = 0$

ii) $\omega_j^k + \omega_k^j = 0$

dır [13].

I.6.8. Tanım. M bir manifold, ∇, M üzerinde bir lineer konneksiyon ve (U,φ) bir koordinat komşuluğu olsun. U üzerinde C^{∞} −vektör alanlarının bir bazı $\{e_1,...,e_n\}$ ve bu bazın duali $\{w_1,...,w_n\}$ olmak üzere

$$\begin{aligned} \Omega_{ij} &: \chi(U) \times \chi(U) \to C^{\infty}(U, IR) \\ (X,Y) &\to \Omega_{ij}(X,Y) = w_j(R(X,Y)e_i) \end{aligned} \tag{I.6.22}$$

şeklinde tanımlı Ω_{ij} fonksiyonlarına eğrilik form denir. Bu durumda

$$R(e_k, e_l)e_i = \sum_j R_{ikl}^j e_j$$

olmak üzere

$$\Omega_{ij} = \sum_{i \le k \le l \le n} R_{ikl}^j w^k \wedge w^l \tag{I.6.23}$$

ile tanımlanır ve

$$\sum_{j=1}^n \Omega_{ij}(e_k, e_l)e_j = \sum_{j=1}^n R_{ikl}^j e_j = R((e_k, e_l)e_i \tag{I.6.24}$$

elde edilir [13]. Eğrilik form ve konneksiyon 1-formlarla ilgili olarak aşağıdaki teorem verilebilir.

I.6.7. Teorem. M n-boyutlu manifold ve $T_M(p), T_M^*(p)$ nin bazları sırasıyla $\{e_1,...,e_n\}$, $\{w_1,...,w_n\}$ olsun. Eğrilik ve konneksiyon 1-formlar sırasıyla Ω_{ij} ve ω_{ij} olmak üzere

$$dw^i = -\sum_{i=1}^n \omega_{ij} \wedge w_j + T_i \tag{I.6.25}$$

$$d\omega_{ij} = -\sum_{k=1}^n \omega_{ik} \wedge \omega_{kj} + \Omega_{ij} \tag{I.6.26}$$

dır. Burada T_i torsiyon tensörün bileşenidir [6].

İspat. $\forall X,Y \in \chi(M)$ için

$$
\begin{aligned}
T_i(X,Y) &= \langle T(X,Y), e_i\rangle \\
&= \langle \nabla_X Y - \nabla_Y X - [X,Y], e_i\rangle \\
&= \langle \nabla_X (\sum_{j=1}^{n} w_j(Y)e_j) - \nabla_Y (\sum_{j=1}^{n} w_j(X)e_j) - \sum_{j=1}^{n} w_j([X,Y])e_j, e_i\rangle \\
&= \langle \sum_{j=1}^{n} \{X[w_j(Y)] - Y[w_j(X)] - w_j([X,Y])\}e_j, e_i\rangle + \\
&\qquad \langle \sum_{j=1}^{n} \{w_j(Y)\nabla_X e_j - w_j(X)\nabla_Y e_j\}, e_i\rangle \\
&= X[w_i(Y)] - Y[w_i(X)] - w_i([X,Y]) + \\
&\qquad \langle \sum_{j=1}^{n} \{w_j(Y)\sum_{k=1}^{n}\omega_{kj}(X)e_k - w_j(X)\sum_{k=1}^{n}\omega_{kj}(Y)e_k \}, e_i\rangle \\
&= X[w_i(Y)] - Y[w_i(X)] - w_i([X,Y]) + \\
&\qquad \langle \sum_{k,j=1}^{n} \{w_j(Y)\omega_{kj}(X) - w_j(X)\omega_{kj}(Y) \}e_k, e_i\rangle \\
&= X[w_i(Y)] - Y[w_i(X)] - w_i([X,Y]) + \\
&\qquad \sum_{j=1}^{n} \{w_j(Y)\omega_{ij}(X) - w_j(X)\omega_{ij}(Y) \}
\end{aligned}
$$

dır. Buradan

$$T_i(X,Y) - \sum_{j=1}^{n} \{w_j(Y)\omega_{ij}(X) - w_j(X)\omega_{ij}(Y) \} = X[w_i(Y)] - Y[w_i(X)] - w_i([X,Y])$$

$$T_i(X,Y) - \sum_{j=1}^{n} (\omega_{ij} \wedge w_j)(X,Y) = dw_i(X,Y)$$

yazılabilir. Buradan da

$$dw^i = -\sum_{i=1}^{n} \omega_{ij} \wedge w_j + T_i$$

olur. Diğer taraftan

$$
\begin{aligned}
R_{ij}(X,Y) &= \langle R(X,Y)e_j, e_i\rangle \\
&= \langle \nabla_X \nabla_Y e_j - \nabla_Y \nabla_X e_j - \nabla_{[X,Y]} e_j, e_i\rangle \\
&= \langle \nabla_X (\sum_{k=1}^{n} \omega_{kj}(Y)e_k) - \nabla_Y (\sum_{k=1}^{n} \omega_{kj}(X)e_k) - \omega_{kj}[X,Y]e_k, e_j\rangle \\
&= \langle \sum_{k=1}^{n} \{X[\omega_{kj}(Y)] - Y[\omega_{kj}(X)] - \omega_{kj}[X,Y]\}e_k, e_i\rangle
\end{aligned}
$$

$$+\langle\sum_{k=1}^{n}\{\omega_{kj}(Y)\nabla_X e_k-\omega_{kj}(X)\nabla_Y e_k\},e_i\rangle$$
$$=\langle\sum_{k=1}^{n}\{X[\omega_{kj}(Y)]-Y[\omega_{kj}(X)]-\omega_{kj}[X,Y]\}e_k,e_i\rangle$$
$$+\langle\sum_{k=1}^{n}\left\{\omega_{kj}(Y)\sum_{s=1}^{n}\omega_{sk}(X)e_s-\omega_{kj}(X)\sum_{s=1}^{n}\omega_{sk}(Y)e_s\right\},e_i\rangle$$
$$=\langle\sum_{k=1}^{n}\{X[\omega_{kj}(Y)]-Y[\omega_{kj}(X)]-\omega_{kj}[X,Y]\}e_k,e_i\rangle$$
$$+\sum_{k=1}^{n}\{\omega_{kj}(Y)\omega_{ik}(X)-\omega_{kj}(X)\omega_{ik}(Y)\}$$

dır. Böylece

$$\Omega_{ij}=d\omega_{ij}(X,Y)+\sum_{k=1}^{n}(\omega_{ik}\wedge\omega_{kj})(X,Y)$$

olur. Buradan da

$$d\omega_{ij}=-\sum_{k=1}^{n}\omega_{ik}\wedge\omega_{kj}+\Omega_{ij}$$

bulunur.

I.7. Manifoldlar Üzerinde Distribüsyon

I.7.1. Tanım. $\overline{M}$ m-boyutlu bir manifold olsun. $\overline{M}$ üzerinde

$$D:\overline{M}\to T_{\overline{M}}(p)$$
$$p\to D_p\subset T_{\overline{M}}(p)$$

ile tanımlı D dönüşümüne r-boyutlu distribüsyon denir [2]. $X\in\chi(\overline{M})$için $X_p\in D_p$ ise X vektör alanı D ye aittir denir. Eğer her p noktası için D ye ait r-tane diferensiyellenebilir lineer bağımsız vektör alanı var ise D ye diferensiyellenebilirdir denir [2]. Biz aksi söylenmedikçe bütün distribüsyonları diferensiyellenebilir kabul edeceğiz.

I.7.2. Tanım. $\overline{M}$ bir C^∞manifold ve $D,\overline{M}$ üzerinde r-boyutlu bir distribüsyon olsun. Eğer $X,Y\in\Gamma(D)$ için $[X,Y]\in\Gamma(D)$ ise D ye involutive dir denir [2].

I.7.3. Tanım. $\overline{M}$ bir C^{∞}manifold ve D, $\overline{M}$ üzerinde r-boyutlu bir distribüsyon, M, $\overline{M}$nin altmanifoldu olsun. Eğer M nin her p noktasında, M nin tanjant uzayı ile D_p aynı ise M ye D nin integral manifoldu denir [2]. Yani

$$f : M \to \overline{M}$$

bir imbeddig olmak üzere $\forall p \in M$ için

$$f_*(T_M(p)) = D_p$$

dır. Eğer D nin M yi kapsayan bir başka integral manifoldu yoksa M ye D nin bir maksimal integral manifoldu (veya leaf) denir [2].

I.7.4. Tanım. $\overline{M}$ bir C^{∞}manifold ve M, $\overline{M}$ nin bir altmanifoldu olsun. Eğer $\forall p \in M$ için D nin p yi kapsayan bir maksimal integral manifoldu varsa D ye integrallenebilirdir denir [2].

I.7.1. Teorem. $\overline{M}$ bir C^{∞}manifold ve D, $\overline{M}$ üzerinde r-boyutlu bir distribüsyon olsun. Bu durumda her involutive distribüsyon integrallenebilirdir. Üstelik D nin $\forall p \in \overline{M}$ noktasından geçen bir tek maksimal integral manifoldu vardır ve p yi ihtiva eden diğer tüm integral manifoldlar bu maksimalin bir açık altmanifoldudur [2].

I.7.4. Tanım. M bir manifold ve ∇, M üzerinde lineer konneksiyon olsun. Eğer $X \in \Gamma(TM), Y \in \Gamma(D)$ için

$$\nabla_X Y \in \Gamma(D)$$

ise D distribüsyonuna paraleldir denir [2].

I.7.2. Teorem. $\overline{M}$, D ve $D^{\perp}$ ortogonal distribüsyonlarına sahip bir manifold olsun. Bu taktirde ∇, $\overline{M}$ üzerinde bir Riemann konneksiyonu olmak üzere D ve $D^{\perp}$ in her ikisinin paralel olması için gerek ve yeter şart D ve $D^{\perp}$ in integrallenebilir ve onların maksimal integral manifoldlarının total jeodezik olmasıdır [2].

İspat. Kabul edelim ki D ve $D^{\perp}$ in her ikisi ∇ ya göre paralel olsun. ∇ simetrik konneksiyon olduğundan $X,Y \in \Gamma(D), U,V \in \Gamma(D^{\perp})$ için,

$$[X,Y] = \nabla_X Y - \nabla_Y X \in \Gamma(D)$$

$$[U,V] = \nabla_U V - \nabla_V U \in \Gamma(D^{\perp})$$

dır. Böylece Teorem I.7.1 den D ve $D^{\perp}$ integrallenebilirdir.

Şimdi M, D nin leaf ı ve h, $\overline{M}$ de M immersiyonunun ikinci temel formu olsun Bu durumda (I.6.2) den $X,Y \in \Gamma(TM)$ için

$$h(X,Y) = \nabla'_X Y - \nabla_X Y$$

dır. Burada ∇ M üzerindeki konneksiyondur. $\nabla_X Y \in \Gamma(TM), h(X,Y) \in \Gamma(D^{\perp})$ olduğundan $h=0$ elde edilir. Böylece M, $\overline{M}$ de total jeodeziktir. Benzer olarak gösterilebilir ki $D^{\perp}$ nin leaf ı total jeodeziktir.

($\Leftarrow$) Kabul edelim ki D ve $D^{\perp}$ integrallenebilir ve onların maksimal integral altmanifoldları total jeodezik olsun. Bu durumda $X,Y \in \Gamma(D), U,V \in \Gamma(D^{\perp})$ için

$$T\overline{M} = TM \oplus TM^{\perp}$$

olduğundan

$$\nabla_X Y = \nabla'_X Y + h(X,Y) = \nabla'_X Y \in \Gamma(D)$$

dır. Benzer olarak $\nabla_U V \in \Gamma(D^{\perp})$ olur. Buradan

$$Ug(Y,V) = 0$$

$$g(\nabla_U Y,V) + g(\nabla_U V,Y) = 0$$

$$g(\nabla_U Y,V) = 0 \Rightarrow \nabla_U Y \in \Gamma(D)$$

olur. Böylece D paraleldir. Benzer olarak $D^{\perp}$ paraleldir.

I.7.1. Önerme. $\overline{M}$, D ve $D^{\perp}$ ortogonal distribüsyonuna sahip bir manifold olsun. Bu durumda D nin ∇ ya göre paralel olması için gerek ve yeter şart $D^{\perp}$ nin paralel olmasıdır [2].

İspat. ($\Rightarrow$) D paralel olsun. Bu durumda $X \in \Gamma(T\overline{M}), Y \in \Gamma(D), V \in \Gamma(D^{\perp})$ için

$$Xg(Y,V) = 0$$

$$g(\nabla_X Y,V) + g(Y,\nabla_X V) = 0$$

dır. $\nabla_X Y \in \Gamma(D)$ olduğundan

$$g(Y,\nabla_X V) = 0 \Rightarrow \nabla_X V \in \Gamma(D^{\perp})$$

elde edilir. Bu ise $D^{\perp}$ nin paralel olduğunu gösterir.

($\Leftarrow$) $D^{\perp}$ paralel olsun. Bu durumda $X \in \Gamma(T\overline{M}), Y \in \Gamma(D), V \in \Gamma(D^{\perp})$ olmak üzere

$$Xg(Y,V) = 0$$

$$g(\nabla_X Y,V) + g(Y,\nabla_X V) = 0$$

olur. $\nabla_X V \in \Gamma(D^{\perp})$ olduğundan

$$g(\nabla_X Y,V) = 0 \Rightarrow \nabla_X Y \in \Gamma(D)$$

dır. Bu da D nin paralel olduğunu gösterir.

II. BÖLÜM

KOMPLEKS MANİFOLDLAR

Bu bölüm sekiz altbölüm olarak düzenlenmiştir. Birinci ve ikinci altbölümlerde kompleks ve hemen hemen kompleks manifoldların inşaasında kullanılacak cebirsel kavramlar ve holomorfik fonksiyonlar ele alınacaktır. Üçüncü , dördüncü ve beşinci altbölümlerde sırasıyla kompleks manifold ve hemen hemen kompleks manifold, Hermityen manifold ve Kaehler manifoldlar tanımlanacak onlara ait karakteristik özellikler verilecektir. Altıncı altbölümde Kaehler manifoldlara ait karakteristik özellikler lokal koordinatlarda formülüze edilecektir. Yedinci altbölümde nearly Kaehler manifoldlar çok kısa olarak incelenecktir. Sekizinci altbölümde üçüncü , dördüncü , beşinci ve yedinci altbölümlerde tanımlanan manifoldlara örnekler verilecektir.

II.1. Cebirsel Kavramlar

II.1.1. Tanım. V bir reel vektör uzayı olsun.

$$V^c = \left\{ Z \,\middle|\, \vec{Z} = \vec{X} + i\,\vec{Y}; X, Y \in V \right\}$$

cümlesini gözönüne alalım. V^c üzerinde aşağıdaki işlemleri tanımlayalım.

1) $+ : V^c \times V^c \to V^c$

$$(Z, Z_1) \to Z + Z_1 = \left(\vec{X} + i\,\vec{Y}\right) + \left(\vec{X}_1 + i\,\vec{Y}_1\right) = \left(\vec{X} + \vec{X}_1\right) + i\left(\vec{Y} + \vec{Y}_1\right)$$

2) $C \times V^c \to V^c$

$$\lambda.Z \to (a + ib)\left(\vec{X} + i\,\vec{Y}\right) = \left(a\,\vec{X} - b\,\vec{Y}\right) + i\left(b\,\vec{X} + a\,\vec{Y}\right)$$

bu iki işleme göre V^c bir vektör uzayıdır. Bu uzaya V nin kompleksleştirilmiş uzayı denir[9].

II.1.2. Tanım. V bir reel vektör uzayı olsun. V nin birim dönüşümü I olmak üzere

$$J:V \to V, \quad J^2 = -I$$

lineer endomorfizmine V üzerinde bir kompleks yapı denir[5].

Bir J kompleks yapıya sahip V reel vektör uzayı verildiğinde

$$(a+ib)\vec{X} = a\vec{X} + bJ\vec{X} \tag{II.1.1}$$

çarpımı tanımlanırsa, V kompleks vektör uzayı olur. Burada V nin boyutu çift olmalıdır. Tersine V n-boyutlu kompleks vektör uzayı olsun. V nin J lineer endomorfizmi

$$JX = iX \tag{II.1.2}$$

ile tanımlanır ve V, $2n$-boyutlu reel vektör uzayı olarak gözönüne alınırsa bu durumda J V nin kompleks yapısı olur[5].

II.1.1. Önerme. V $2n$-boyutlu reel vektör uzayı ve J V nin kompleks yapısı olsun. Bu durumda $\{X_1,...,X_n\}$ lineer bağımsız vektörler ise $\{X_1,...,X_n,JX_1,...,JX_n\}$ V için bir bazdır [8].

Şimdi R_J^{2n} ile J kompleks yapıya sahip $2n$-boyutlu reel vektör uzayını gösterelim. C^n kompleks vektör uzayı olmak üzere C^n nin bir bazını $\xi_1,...,\xi_n$ ve R_J^{2n} nin bir bazını da $\{X_1,...,X_n,JX_1,...,JX_n\}$ ile gösterelim. Bu durumda R_J^{2n} nin elemanlarını $a^iX_i + b^iJX_i$ formunda ve C^n nin elemanlarını $(a^\alpha + ib^\alpha)\xi_\alpha$ şeklinde yazabiliriz. Böylece ;

$$\begin{aligned} \varphi : R_J^{2n} &\to C^n \\ X &\to (a^i + ib^i)\xi_i \end{aligned}$$

ile tanımlanan dönüşüm lineerdir. Gerçekten $X = a^iX_i + b^iJX_i$, $Y = c^iX_i + d^iJX_i$ için

$$\begin{aligned} \varphi(\lambda X) &= \varphi(\lambda a^iX_i + \lambda b^iJX_i) \\ &= (\lambda a^i + \lambda i b^i)\xi_i \\ &= \lambda(a^i + ib^i)\xi_i \\ &= \lambda\varphi(X) \end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned}\varphi(X+Y) &= \varphi\left(a^i X_i + b^i JX_i + c^i X_i + d^i JX_i\right)\\ &= \varphi\left(\left(a^i + c^i\right)X_i + \left(b^i + d^i\right)JX_i\right)\\ &= \left(\left(a^i + c^i\right) + i\left(b^i + d^i\right)\right)\xi_i\\ &= \left(a^i + ib^i\right)\xi_i + \left(c^i + id^i\right)\xi_i\\ &= \varphi(X) + \varphi(Y)\end{aligned}$$

olur. Diğer taraftan

$$\begin{aligned}\varphi\left(a^i X_i + b^i JX_i\right) &= \varphi\left(c^i X_i + d^i JX_i\right)\\ \left(a^i + ib^i\right)\xi_i &= \left(c^i + id^i\right)\xi_i\\ \left(a^i + ib^i\right) &= \left(c^i + id^i\right) \Rightarrow a^i = c^i, b^i = d^i\end{aligned}$$

olur. Buradan $X=Y$ dır. Böylece φ bir vektör uzayı izomorfizmasıdır [10]. Biz başka durum söz konusu olmadıkça C^n ile R^{2n} i özdeş olarak alacağız. R^{2n} nin kompleks yapısı , $Z^k = X^k + iY^k \in C^n$ olmak üzere

$$\begin{aligned} J_0 : R^{2n} &\to R^{2n}\\ (X_1,\ldots,X_n,Y_1,\ldots,Y_n) &\to (Y_1,\ldots,Y_n,-X_1,\ldots,-X_n)\end{aligned}$$

ile verilir. Buna kanonik kompleks yapı denir ve matrisel ifadesi

$$J_0 = \begin{bmatrix} 0 & I_n \\ -I_n & 0 \end{bmatrix} \tag{II.1.3}$$

dır [8].

II.1.1. Teorem. V $2n$-boyutlu bir reel vektör uzayı ve J V üzerinde kompleks yapı olsun. V nin bir bazı $\{X_1,\ldots,X_n,JX_1,\ldots,JX_n\}$ ise

$$Z_k = \frac{1}{2}(X_k - iJX_k), \overline{Z}_k = \frac{1}{2}(X_k + iJX_k) \tag{II.1.4}$$

olmak üzere V^c nin bir bazı da $\{Z_1,\ldots,Z_n,\overline{Z}_1,\ldots,\overline{Z}_n\}$ dır [9].

İspat. Önce $c^k, \lambda^k \in C$ olmak üzere $\{Z_1,\ldots,Z_n,\overline{Z}_1,\ldots,\overline{Z}_n\}$ cümlesinin lineer bağımsız olduğunu gösterelim;

$$\sum_k \lambda^k Z_k + \sum_k c^k \overline{Z}_k = 0$$

$$\frac{1}{2}\sum_k \lambda^k (X_k - iJX_k) + \frac{1}{2}\sum_k c^k (X^k + iJX^k) = 0$$

$$\sum_k (\lambda^k + c^k) X_k + i\sum_k (c^k - \lambda^k) JX_k = 0$$

olur. Burada X_k, JX_k baz olduğundan

$$\lambda^k + c^k = 0 \quad c^k - \lambda^k = 0 \Rightarrow c^k = \lambda^k = 0$$

dır.

Şimdi $Z_k, \overline{Z}_k$ nın V^c yi gerdiğini gösterelim. $\beta^k = \sum_k a^k Z_k + \sum_k b^k \overline{Z}_k \in V^c$ olmak üzere

$$\begin{aligned}
\beta^k &= \sum_k a^k \frac{1}{2}(X_k - iJX_k) + \sum_k b^k \frac{1}{2}(X_k + iJX_k) \\
&= \sum_k \frac{a^k}{2} X_k - i\frac{a^k}{2} JX_k + \sum_k \frac{b^k}{2} X_k + i\frac{b^k}{2} JX_k \\
&= \left(\frac{a^k + b^k}{2}\right) X_k - \left(\frac{a^k - b^k}{2}\right) iJX_k \\
&= \left(\frac{c}{2}\right) X_k - \left(\frac{d}{2}\right) iJX_k = \frac{1}{2}(\ cX_k - diJX_k\ ) \in V^c
\end{aligned}$$

elde edilir.

II.1.2. Teorem. *V,R* üzerinde *2n* boyutlu bir vektör uzayı ve J bir kompleks yapı olsun. Bu durumda

$$\begin{aligned}
\tilde{J} &: V^c \to V^c \\
Z &\to \tilde{J}(Z) = \tilde{J}(X + iY) = J(X) + iJ(Y)
\end{aligned} \tag{II.1.5}$$

dönüşümü V^c üzerinde bir kompleks yapıdır [9].

İspat. $\tilde{J}$ dönüşümünün V^c üzerinde bir kompleks yapı olduğunu göstermek için; $\tilde{J}$ nin bir endomorfizm ve $\tilde{J}^2 = -I$ olduğunu göstermek yeterlidir.

1) $Z, Z' \in V^c$ için

$$\begin{aligned}
\tilde{J}(Z + Z') &= \tilde{J}((X + iY) + (X' + iY')) \\
&= \tilde{J}(X + X' + i(Y + Y')) \\
&= J(X + X') + iJ(Y + Y')
\end{aligned}$$

$$= JX + JX' + iJY + iJY'$$
$$= \tilde{J}(X+iY) + \tilde{J}(X'+iY')$$
$$= \tilde{J}(Z) + \tilde{J}(Z')$$

ve $c = (\ a+ib\ ) \in C$ olmak üzere

$$\tilde{J}((a+ib)(X+iY)) = \tilde{J}((aX-bY)+i(aY+bX))$$
$$= J(aX-bY\ ) + iJ(\ aY+bX)$$
$$= aJX - bJY + iaJY + ibJX$$
$$= a(JX+iJY) + ib(iJY+JX)$$
$$= (a+ib)(JX+iJY)$$
$$= (a+ib)\tilde{J}(X+iY)$$

olduğundan $\tilde{J}$ bir endomorfizmdir.

2) $(X+iY) \in V^c$ için

$$\tilde{J}^2(X+iY) = \tilde{J}(JX+iJY)$$
$$= J(JX) + iJ(JY)$$
$$= -(X+iY)$$
$$= -I$$

olur. Böylece ispat tamamlanır. Şimdi

$$Z_k = \frac{1}{2}(X_k - iJX_k), \overline{Z}_k = \frac{1}{2}(X_k + iJX_k)$$

olmak üzere

$$J(Z_k) = \frac{1}{2}(JX_k - iJ^2X_k)$$
$$= \frac{1}{2}(JX_k + iX_k)$$
$$= i\left(\frac{1}{2}X_k - i\frac{1}{2}JX_k\right)$$

olur. Buradan

$$J(Z_k) = iZ_k \tag{II.1.6}$$

elde edilir. Benzer olarak

$$J(\overline{Z}_k) = \frac{1}{2}(JX_k + iJ^2X_k)$$
$$= \frac{1}{2}(JX_k - iX_k)$$
$$= -i\left(\frac{1}{2}X_k + iJX_k\right)$$

olur ve buradan da

$$J\left(\overline{Z}_k\right)=-i\overline{Z}_k \tag{II.1.7}$$

elde edilir. Böylece (II.1.6) ve (II.1.7) den V^c nin iki alt cümlesi

$$\begin{aligned} V^{1,0}&=\left\{Z\middle|Z\in V^c: JZ=iZ\right\}\\ V^{0,1}&=\left\{Z\middle|Z\in V^c: JZ=-iZ\right\}\end{aligned} \tag{II.1.8}$$

ile ifade edilebilir.

II.1.1. Önerme. V bir reel vektör uzayı ve V^c V nin kompleksleştrilmişi olsun. Bu durumda $V^{1,0}$ ve $V^{0,1}$ V^c nin alt uzaylarıdır [9].

II.1.3. Teorem. $V^c=V^{1,0}\oplus V^{0,1}$ dır [5].

İspat. Göstereceğiz ki $V^{1,0}\cap V^{0,1}=\{0\}$ ve $V_1\in V^{1,0}, V_2\in V^{0,1}$ ve $Z\in V^c$ için $Z=V_1+V_2$ dır.

Şimdi kabul edelim ki $V^{1,0}\cap V^{0,1}\neq\{0\}$ olsun. bu durumda

$$Z\in V^{1,0}\Rightarrow Z=\frac{1}{2}\left(X_1-iJX_1\right)$$

$$Z\in V^{0,1}\Rightarrow Z=\frac{1}{2}\left(X_2+iJX_2\right)$$

dır. Buradan $X_1-X_2=0, 2JX_1=0$ olur. J lineer ve birebir olduğundan $X_1=X_2=0$ elde edilir. O halde kabulümüz yanlıştır.

$Z\in V^c, Z=Y_1+Y_2$ olsun. Bu durumda

$$Y_1=\frac{1}{2}\left[X_1+JX_2-iJ\left(X_1+JX_2\right)\right]\in V^{1,0}$$

$$Y_2=\frac{1}{2}\left[X_1-JX_2+iJ\left(X_1-JX_2\right)\right]\in V^{0,1}$$

yazılabilir. Buradan ispat tamamlanır.

II.1.3. Tanım. V bir vektör uzayı ve V^* V nin dual uzayı olsun. Bu durumda

$$V^{*^c}=\{\omega_1+i\omega_2 | \omega_1+i\omega_2 : V\to C$$
$$X\to(\omega_1+i\omega_2)=\omega_1(X)+i\omega_2(X)\} \tag{II.1.9}$$

cümlesine V^* ın kompleksleştirilmişi denir [5].

II.1.4. Teorem. V bir reel vektör uzayı ve J, V üzerinde bir kompleks yapı olsun. Bu taktirde V nin duali V^* olmak üzere

$$J^*: V^*\to V^*$$
$$\omega \;\to J^*(\omega)(X)=\omega(JX) \tag{II.1.10}$$

dönüşümü V^* üzerinde bir kompleks yapı tanımlar [5].

İspat *1)*

$$\begin{aligned} J^{*^2}(\omega)(X) &= J^*(J^*(\omega)(X)) \\ &= J^*(\omega(JX)) \\ &= \omega(J^2X) \\ &= -\omega(X) \\ &= -I \end{aligned}$$

olur . Buradan $J^{*^2}=-I$ elde edilir.

2) J^* dönüşümü için

$$\begin{aligned} J^*(\omega)(X+Y) &= \omega(JX+JY) \\ &= \omega(JX)+\omega(JY) \\ &= J^*(\omega(X))+J^*(\omega(Y)) \end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned} J^*(\omega(cX)) &= \omega(J(cX)) \\ &= \omega(cJX) \\ &= c\omega(JX) \\ &= cJ^*(\omega(X)) \end{aligned}$$

şartları sağlandığından J^* bir endomorfizmdir.

II.1.5. Tanım. V bir reel vektör uzayı , V^* V nin duali ve V^{*c} V^* ın kompleksleştirilmişi olsun. Bu durumda

$$J^*(\omega) = i\omega \tag{II.1.11}$$

ile tanımlanan ω elemanına (1,0) tipli denir. Bu formdaki altuzay

$$V_{1,0} = \left\{\omega \in V^{*c} \middle| \forall X \in V^{0,1} : \omega(X) = 0\right\} \tag{II.1.12}$$

ile tanımlanır. V^{*c} nin

$$J^*(\omega) = -i\omega$$

özelliğini sağlayan elemanına (0,1) tipli denir ve bu formdaki altuzay da

$$V_{0,1} = \left\{\omega \in V^{*c} \middle| \forall X \in V^{1,0} : \omega(X) = 0\right\} \tag{II.1.13}$$

ile tanımlanır. Burada II.1.3 Teoremine benzer olarak aşağıdaki sonuç verilebilir.

II.1.1 Sonuç. $V^{*c} = V_{1,0} \oplus V_{0,1}$

V reel m-boyutlu bir vektör uzayı ve V^c, V nin kompleksleştirilmişi olsun. Bu durumda V, V^c nin bir altuzayıdır. V üzerinde (r,s) mertebeli tensör uzayı $T_s^r(V)$ olsun. $T_s^r(V)$ nin kompleksleştirilmişi $T_s^r(V^c)$ dir. Böylece $T_s^r(V)$,$T_s^r(V^c)$ nin bir reel altuzayıdır [8].

II.1.6 ve II.1.7 denklemleri gözönüne alınırsa V^c de kompleks konjuge; $V^{1,0}$ ve $V^{0,1}$ arasında bir lineer izomorfizm tanımlar [8].

V R üzerinde bir vektör uzayı olsun. Bu durumda ΛV^{*c} yi Sonuç II.1.1 den $\Lambda V_{1,0}$, $\Lambda V_{0,1}$ alt cebirlerine ayrıştırabiliriz. $\alpha \in \Lambda^p V_{1,0}$,$\beta \in \Lambda^q V_{0,1}$ olmak üzere ΛV^{*c} nin $\alpha \Lambda \beta$ ile gerilen altuzayı $\Lambda^{p,q} V^{*c}$ olsun. Bu durumda aşağıdaki önerme verilebilir.

II.1.2. Önerme. V reel vektör uzayı, V^* V nın duali ve V^{*c}, V^* ın kompleksleştirilmişi olsun. Bu durumda ΛV^{*c} uzayı

$$\Lambda V^{*c} = \sum_{r=0}^{n} \Lambda^r V^{*c} , \quad \Lambda^r V^{*c} = \sum_{p+q=r} \Lambda^{p,q} V^{*c}$$

şeklinde ayrıştırılabilir ve V^{*c} deki kompleks konjuge ΛV^{*c} ye; $\Lambda^{p,q}V^{*c}$ ve $\Lambda^{q,p}V^{*c}$ arasında reel lineer izomorfizm olarak genişletilebilir[8].

Eğer $V_{1,0}$ kompleks vektör uzayı için bir baz $\{e^1,...,e^n\}$ ise , $V_{0,1}$ kompleks vektör uzayı için bir baz $\{\bar{e}^1,...,\bar{e}^n\}$ olur ve bu durumda kompleks sayılar cismi üzerinde $\Lambda^{p,q}V^{*c}$ için baz formu $1 \le j_1 \langle ... \langle j_p \le n$, $1 \le k_1 \langle ... \langle k_q \le n$ olmak üzere

$$e^{j_1}\Lambda...\Lambda e^{j_p}\Lambda\bar{e}^{k_1}\Lambda...\Lambda\bar{e}^{k_q}$$

dır [8].

II.2. C^n de Holomorfik Fonksiyonlar

II.2.1. Tanım. C^n ile R^{2n} özdeş olduğundan C^n $2n$-boyutlu bir afin uzay gibi alınabilir. Buna göre C^n nin bir p noktasında tanjant ve kotanjant uzayları sırasıyla $T_{R^{2n}}(p)$, $T^*_{R^{2n}}(p)$;

$$\left\{\frac{\partial}{\partial x_1}\Big|_p, \frac{\partial}{\partial y_1}\Big|_p, ..., \frac{\partial}{\partial x_k}\Big|_p, \frac{\partial}{\partial y_k}\Big|_p\right\}$$

ve

$$\left\{dx^1\big|_p, dy^1\big|_p, ..., dx^k\big|_p, dy^k\big|_p\right\} \tag{II.2.1}$$

standart bazlarına sahiptir. $z^k = x^k + iy^k$ olmak üzere

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial z_k}\Big|_p &= \frac{1}{2}\left\{\frac{\partial}{\partial x_k}\Big|_p - i\frac{\partial}{\partial y_k}\Big|_p\right\} \\ \frac{\partial}{\partial \bar{z}_k}\Big|_p &= \frac{1}{2}\left\{\frac{\partial}{\partial x_k}\Big|_p + i\frac{\partial}{\partial y_k}\Big|_p\right\} \end{aligned} \tag{II.2.2}$$

ve

$$\begin{aligned} dz^k\big|_p &= dx^k\big|_p + i\,dy^k\big|_p \\ d\bar{z}^k\big|_p &= dx^k\big|_p - i\,dy^k\big|_p \end{aligned} \tag{II.2.3}$$

dır. Bu durumda

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x_k}\Big|_p &= \left\{\frac{\partial}{\partial z_k}\Big|_p + \frac{\partial}{\partial \bar{z}_k}\Big|_p\right\} \\ \frac{\partial}{\partial y_k}\Big|_p &= i\left\{\frac{\partial}{\partial z_k}\Big|_p - \frac{\partial}{\partial \bar{z}_k}\Big|_p\right\} \end{aligned} \tag{II.2.4}$$

ve

$$dx^k\big|_p = \frac{1}{2}\left\{dz^k\big|_p + d\bar{z}^k\big|_p\right\}$$
$$dy^k\big|_p = \frac{1}{2i}\left\{dz^k\big|_p - d\bar{z}^k\big|_p\right\} \tag{II.2.5}$$

olur. Böylece teorem (II.1.2) den $T^c_{R^{2n}}(p), T^{*c}_{R^{2n}}(p)$ uzaylarının standart bazları sırasıyla

$$\left\{\frac{\partial}{\partial z_1}\Big|_p, \frac{\partial}{\partial \bar{z}_1}\Big|_p, \ldots, \frac{\partial}{\partial z_k}\Big|_p, \frac{\partial}{\partial \bar{z}_k}\Big|_p\right\}, \left\{dz^1\big|_p, d\bar{z}^1\big|_p, \ldots, dz^k\big|_p, d\bar{z}^k\big|_p\right\}$$

dır [10].

II.2.2. Tanım. C^n nin bir W açık altcümlesinde tanımlı kompleks değerli bir fonksiyon f olsun. Eğer $f(p)=\Phi(p)+i\,\Psi(p)$ fonksiyonun reel ve imajiner kısımları C^1 sınıfından ise f ye C^1 sınıfındandır denir [10].

f nin kısmi ve total diferensiyeli sırasıyla

$$\frac{\partial}{\partial x_k}\Big|_p f = \frac{\partial}{\partial x_k}\Big|_p \Phi + i\frac{\partial}{\partial x_k}\Big|_p \Psi$$
$$\frac{\partial}{\partial y_k}\Big|_p f = \frac{\partial}{\partial y_k}\Big|_p \Phi + i\frac{\partial}{\partial y_k}\Big|_p \Psi \tag{II.2.6}$$

ve

$$df\big|_p = d\Phi\big|_p + d\Psi\big|_p \tag{II.2.7}$$

ile tanımlanır [10].

II.2.3. Tanım. C^n nin bir W açık altcümlesinde tanımlı kompleks değerli bir fonksiyon f olsun. $\Delta z_k = \Delta x_k + i\Delta y_k$ için $p = z_0 \in D$ noktasında

$$\lim_{\Delta z \to 0} \frac{f\left(z_{0_k} + \Delta z_k\right) - f\left(z_{0_k}\right)}{\Delta z_k} \tag{II.2.8}$$

limit değeri her k için var ve z_k ya Δx_k , Δy_k yaklaşımından bağımsız ise kompleks değerli f fonksiyonuna holomorfiktir denir. Bu durumda

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x_k} = \frac{\partial \Psi}{\partial y_k} \qquad \frac{\partial \Phi}{\partial y_k} = -\frac{\partial \Psi}{\partial x_k} \tag{II.2.9}$$

Cauchy-Riemann denklemlerine sahip oluruz [10].

II.2.4. Tanım. $W \subset C^n$ üzerinde verilen kompleks değerli f fonksiyonu (II.2.9) denklemlerini sağlarsa f ye holomorfik fonksiyon denir. Eğer f holomorfik fonksiyon ise W deki her p noktasının bazı komşuluklarında kuvvet serisine açılabilir ve üstelik Φ,Ψ fonksiyonları $x_1, y_1 \ldots, x_k, y_k$. değişkenlerine göre analitiktir[10].

II.2.1. Önerme. $W \subset C^n$ üzerinde verilen kompleks değerli f fonksiyonunun z_0 noktasında holomorfik olması için gerek ve yeter şart f nin z_0 da C^1sınıfından ve $\frac{\partial}{\partial \bar{z}_k}(f) = 0$ olmasıdır [10].

İspat. (II.2.6) dan

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial \bar{z}_k} &= \frac{1}{2}\left[\frac{\partial}{\partial x_k}(\Phi + i\Psi) + i\frac{\partial}{\partial y_k}(\Phi + i\Psi)\right] \\ &= \frac{1}{2}\left[\frac{\partial \Phi}{\partial x_k} + i\frac{\partial \Psi}{\partial x_k} + i\frac{\partial \Phi}{\partial y_k} - \frac{\partial \Psi}{\partial y_k}\right] \\ &= \frac{1}{2}\left[\left(\frac{\partial \Phi}{\partial x_k} - \frac{\partial \Psi}{\partial y_k}\right) + i\left(\frac{\partial \Phi}{\partial y_k} + \frac{\partial \Psi}{\partial x_k}\right)\right]\end{aligned}$$

dır. Buradan

$$\frac{\partial f}{\partial \bar{z}_k} = 0 \Leftrightarrow \Phi, \Psi \quad C^1 \text{ sınıfından ve}$$

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x_k} - \frac{\partial \Psi}{\partial y_k} = 0 \qquad \frac{\partial \Phi}{\partial y_k} + \frac{\partial \Psi}{\partial x_k} = 0$$

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x_k} = \frac{\partial \Psi}{\partial y_k} \qquad \frac{\partial \Phi}{\partial y_k} = -\frac{\partial \Psi}{\partial x_k}$$

olur. Böylece (II.2.9) denklemleri elde edilir ve ispat tamamlanır.

II.3. Kompleks Manifoldlar ve Hemen Hemen Kompleks Manifoldlar.

II.3.1. Tanım. M $2n$-boyutlu bir Hausdorff uzayı ve M de bir açık $\{U_\alpha\}_{\alpha\in I}$ olsun. Eğer $\forall p\in M$ için

$$\psi_\alpha : U_\alpha \subset M \to W_\alpha \subset C^n$$

homeomorfizması var ve $U_\alpha \cap U_\beta \neq \varnothing$ olmak üzere

$$\phi_{\alpha\beta} = \psi_\alpha o \psi_\beta^{-1} : \psi_\beta(U_\alpha \cap U_\beta) \to \psi_\alpha(U_\alpha \cap U_\beta)$$

$$\phi_{\beta\alpha} = \psi_\beta o \psi_\alpha^{-1} : \psi_\alpha(U_\alpha \cap U_\beta) \to \psi_\beta(U_\alpha \cap U_\beta)$$

dönüşümleri holomorfik ise M ye kompleks manifold denir. C^n ile R^{2n} özdeş olduğundan M $2n$-boyutlu reel analitik manifolddur. Burada $\{(U_\alpha, \psi_\alpha)\}_{\alpha\in I}$ ya M nin holomorfik koordinat komşuluğu sistemi denir [14].

M bir n-boyutlu kompleks manifold, $\{(U_\alpha, \psi_\alpha)\}_{\alpha\in I}$ holomorfik koordinat komşuluğu sistemi olsun. U, M de bir açık,

$$\psi : U \subset M \to W \subset C^n$$

bir homeomorfizm ve $U \cap U_\alpha \neq \varnothing$ olmak üzere

$$\psi_\alpha o \psi^{-1} : \psi(U \cap U_\alpha) \to \psi_\alpha(U \cap U_\alpha)$$

$$\psi o \psi_\alpha^{-1} : \psi_\alpha(U \cap U_\alpha) \to \psi(U \cap U_\alpha)$$

dönüşümlerinin her ikisi holomorfik ise (U, ψ) ye holomorfik koordinat komşuluğu denir. Bu durumda $p\in U$ için

$$\psi(p) = (z_1(p), \ldots, z_n(p))$$

dır. Burada $z_i(p)$ sayısına lokal koordinatlar ve $(z_1, \ldots, z_n)$ sistemine de lokal koordinat fonksiyonları sistemi denir.

M $2n$-boyutlu bir reel manifold olduğundan M nin bir p noktasında $T_M(p), T_M^*(p)$ uzayları tanımlanabilir. $z_k = x_k + iy_k$ olduğundan $(x_1, y_1, \ldots, x_n, y_n)$ standart koordinat fonksiyonları olmak üzere $T_M(p), T_M^*(p)$ nin standart bazları sırasıyla $\left(\frac{\partial}{\partial x_1}, \frac{\partial}{\partial y_1}, \ldots, \frac{\partial}{\partial x_n}, \frac{\partial}{\partial y_n}\right)$ ve $(dx^1, dy^1, \ldots, dx^n, dy^n)$ dır [14].

Şimdi $T_M(p), T_M^*(p)$ nin kompleks yapılarını tanımlayalım.

II.3.2. Tanım. M reel $2n$-boyutlu bir kompleks manifold olsun. $T_M(p)$ için bir baz $\left\{\frac{\partial}{\partial x_k},\frac{\partial}{\partial y_k}\right\}$ olmak üzere

$$\begin{aligned} J : T_M(p) &\to T_M(p) \\ \left\{\frac{\partial}{\partial x_k}\right\} &\to J\left\{\frac{\partial}{\partial x_k}\right\} = \frac{\partial}{\partial y_k} \\ \left\{\frac{\partial}{\partial y_k}\right\} &\to J\left\{\frac{\partial}{\partial y_k}\right\} = -\frac{\partial}{\partial x_k} \end{aligned} \qquad \text{II.3.1)}$$

ile tanımlanan J dönüşümüne $T_M(p)$ üzerinde bir kompleks yapıdır denir. Bu durumda $T_M(p)$ nin kompleksleştirilmişini $T_M^c(p)$ ile gösterelim. U ve U' M nin iki açık komşuluğu ve $p\in U\cap U'$ olmak üzere

$$\begin{aligned} J\left(\frac{\partial}{\partial x_k'}\right) &= J\left(\frac{\partial x_k}{\partial x_k'}\frac{\partial}{\partial x_k}+\frac{\partial y_k}{\partial x_k'}\frac{\partial}{\partial y_k}\right) \\ &= \frac{\partial x_k}{\partial x_k'}J\left(\frac{\partial}{\partial x_k}\right)+\frac{\partial y_k}{\partial x_k'}J\left(\frac{\partial}{\partial y_k}\right) \\ &= \frac{\partial y_k}{\partial y_k'}\frac{\partial}{\partial y_k}+\frac{\partial x_k}{\partial y_k'}\frac{\partial}{\partial x_k} \\ &= \frac{\partial}{\partial y_k} \end{aligned} \qquad \text{(II.3.2)}$$

dır. Benzer olarak

$$J\left(\frac{\partial}{\partial y_k'}\right) = -\frac{\partial}{\partial x_k'} \qquad \text{(II.3.3)}$$

elde edilir [5].

II.3.3. Tanım. M reel $2n$-boyutlu bir kompleks manifold ve M nin kotanjant uzayı $T_M^*(p)$ olsun. $p\in U\subset M$ olmak üzere, $\{dx^k,dy^k\}$ $T_M^*(p)$ nin bir bazıdır. Bu durumda

$$\begin{aligned} J^* : T_M^*(p) &\to T_M^*(p) \\ (dx^k) &\to J^*(dx^k) = -dy^k \\ (dy^k) &\to J^*(dy^k) = dx^k \end{aligned}$$

ile tanımlanan dönüşüme $T_M^*(p)$ üzerinde bir kompleks yapıdır denir [5].

J^* kompleks yapısı ile elde edilen $T_M^*(p)$ ın kompleksleştirilmişini $T_M^{*c}(p)$ ile gösterelim. (II.1.10) dan

$$J^*(dx^k)\left(\frac{\partial}{\partial x_{k'}}\right) = dx^k\left(J\left(\frac{\partial}{\partial x_{k'}}\right)\right) = dx^k\left(\frac{\partial}{\partial y_{k'}}\right) = 0$$

$$J^*(dx^k)\left(\frac{\partial}{\partial y_{k'}}\right) = dx^k\left(J\left(\frac{\partial}{\partial y_{k'}}\right)\right) = -dx^k\left(\frac{\partial}{\partial x_{k'}}\right) = \delta^k_{k'}$$

$$J^*(dy^k)\left(\frac{\partial}{\partial x_{k'}}\right) = dy^k\left(J\left(\frac{\partial}{\partial x_{k'}}\right)\right) = dy^k\left(\frac{\partial}{\partial y_{k'}}\right) = \delta^{k'}_k$$

$$J^*(dy^k)\left(\frac{\partial}{\partial y^{k'}}\right) = dy^k\left(J\left(\frac{\partial}{\partial y^{k'}}\right)\right) = -dy^k\left(\frac{\partial}{\partial x^{k'}}\right) = 0$$

elde edilir. Böylece (II.1.8), (II.1.11), (II.1.14) denklemleri gözönüne alındığında $T_M^c(p)$ ve $(T_M^{*c}(p)$ uzayları için sırasıyla $\left(T_M^c(p)\right)^{1,0}, \left(T_M^c(p)\right)^{0,1}$ ve $\left(T_M^{*c}(p)\right)_{1,0}, \left(T_M^{*c}(p)\right)_{0,1}$ ayrışımları tanımlanabilir. Buradan (II.2.4) ve (II.2.5) den $T_M^c(p)$ ve $T_M^{*c}(p)$ için standart bazlar sırasıyla

$$\left\{\frac{\partial}{\partial z_1}\bigg|_p, \frac{\partial}{\partial \bar{z}_1}\bigg|_p, \ldots, \frac{\partial}{\partial z_k}\bigg|_p, \frac{\partial}{\partial \bar{z}_k}\bigg|_p\right\}, \left\{dz^1\big|_p, d\bar{z}^1\big|_p, \ldots, dz^k\big|_p, d\bar{z}^k\big|_p\right\}$$

olur[5].

II. 3.4. Tanım. M reel $2n$-boyutlu kompleks manifold olsun. $T_M^c(p)$ nin bir bazı $\left(\frac{\partial}{\partial z_k}, \frac{\partial}{\partial \bar{z}_k}\right)$ olmak üzere

$$J : T_M^c(p) \to T_M^c(p)$$

$$\frac{\partial}{\partial z_k} \to J\left(\frac{\partial}{\partial z_k}\right) = i\frac{\partial}{\partial \bar{z}_k}$$

$$\frac{\partial}{\partial \bar{z}_k} \to J\left(\frac{\partial}{\partial \bar{z}_k}\right) = -i\frac{\partial}{\partial z_k}$$

ile tanımlı dönüşüme $T_M^c(p)$ nin kompleks yapısı denir [5].

II.3.5. Tanım. M reel $2n$-boyutlu manifold ve J, M üzerinde $(1,1)$ mertebeli tensör alanı olsun. Bu durumda $p \in M$ için

$$J_p : T_M(p) \to T_M(p)$$

lineer dönüşümü $T_M(p)$ üzerinde bir kompleks yapı ise J ye M üzerinde hemen hemen kompleks yapı denir. M ye de J kompleks yapısıyla birlikte bir hemen hemen kompleks manifold denir [9].

II.3.1. Sonuç. M hemen hemen kompleks manifold ise n=2m dir. Burada n M nin kompleks boyutu, 2m ise M nin reel boyutudur [8].

II.3.1. Teorem. M bir kompleks manifold olsun. Bu durumda M üzerinde bir hemen hemen kompleks yapı vardır [9].

İspat. M nin bir $\{U_\alpha, \psi_\alpha\}$ kompleks atlası için

$$\psi_\alpha : U_\alpha \subset M \to W_\alpha \subset C^n$$

dönüşümü holomorfiktir. Şimdi U_α üzerinde $\{z_1,\ldots,z_n\}$ lokal koordinatları verilsin. Bu durumda $z_j = x_j + iy_j$ olmak üzere

$$J\left(\frac{\partial}{\partial x_j}\right) = \frac{\partial}{\partial y_j} \quad , \quad J\left(\frac{\partial}{\partial y_j}\right) = -\frac{\partial}{\partial x_j}$$

$$J\left(\frac{\partial}{\partial z_j}\right) = i\frac{\partial}{\partial z_j} \quad , \quad J\left(\frac{\partial}{\partial \bar{z}_j}\right) = -\frac{\partial}{\partial \bar{z}_j}$$

$$\frac{\partial}{\partial z_j} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x_j} - iJ\frac{\partial}{\partial x_j}\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x_j} - i\frac{\partial}{\partial y_j}\right)$$

$$\frac{\partial}{\partial \bar{z}_j} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x_j} + iJ\frac{\partial}{\partial x_j}\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x_j} + i\frac{\partial}{\partial y_j}\right)$$

dır. U_α üzerinde bir başka lokal koordinat sistemi $\{w_1,\ldots,w_n\}$ olsun. $w_k = u_k + iv_k$ olmak üzere $T_M(p)$'nin bir J' endomorfizmi için

$$J'\left(\frac{\partial}{\partial u^k}\right) = \frac{\partial}{\partial v^k} \quad , \quad J'\left(\frac{\partial}{\partial v^k}\right) = \frac{\partial}{\partial u^k}$$

$$J'\left(\frac{\partial}{\partial w^k}\right) = i\frac{\partial}{\partial w^k} \quad , \quad J'\left(\frac{\partial}{\partial \bar{w}^k}\right) = -i\frac{\partial}{\partial \bar{w}^k}$$

dır. M bir kompleks manifold olduğundan lokal koordinat sistemleri arasında holomorfik F fonksiyonu vardır. Böylece

$$\frac{\partial}{\partial w_k}=\sum_j \frac{\partial F_j}{\partial w_k}\frac{\partial}{\partial z_j} \quad , \quad \frac{\partial}{\partial \overline{w}_k}=\sum_j \frac{\partial \overline{F}_j}{\partial \overline{w}_k}\frac{\partial}{\partial \overline{z}_j}$$

olur. $\dfrac{\partial}{\partial w_k},\dfrac{\partial}{\partial \overline{w}_k}$ sırasıyla $\dfrac{\partial}{\partial z_j},\dfrac{\partial}{\partial \overline{z}_j}$ nin lineer bileşimi olduğundan

$$J\left(\frac{\partial}{\partial w_k}\right)=i\frac{\partial}{\partial w_k} \quad , \quad J\left(\frac{\partial}{\partial \overline{w}_k}\right)=-i\frac{\partial}{\partial \overline{w}_k}$$

bulunur. Böylece M nin her p noktasında J' ve J aynıdır ve J lokal koordinat sisteminin seçiminden bağımsızdır. $J^2=-I$ olduğu açıktır.

II.3.6. Tanım. M ve M' sırasıyla J ve J' hemen hemen kompleks yapıları ile birlikte hemen hemen kompleks manifoldlar olsun. Eğer $J' o f_* = f_* o J$ ise f ye hemen hemen komplekstir veya f, J ve J' yapılarını korur denir [9].

II.3.1. Önerme. C^n, C^m nin kompleks yapıları sırasıyla J ve J', ve $f: C^n \to C^m$'ye bir fonksiyon olsun. Bu durumda f nin C^n, C^m nin hemen hemen kompleks yapılarını koruması için gerek ve yeter şart f nin holomorfik olmasıdır [8].

İspat. $(w_1,\ldots,w_n)$, C^m nin lokal koordinat sistemi olsun. Bu durumda

$$u^k=u^k(x_1,\ldots,x_n,y_1,\ldots,y_n)$$
$$v^k=v^k(x_1,\ldots,x_n,y_1,\ldots,y_n)$$

ve

$$f: C^n \to C^m$$

olmak üzere

$$\begin{aligned} f_*\left(\frac{\partial}{\partial x_j}\right)&=\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{\partial u_k}{\partial x_j}\right)\frac{\partial}{\partial u_k}+\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{\partial v_k}{\partial x_j}\right)\frac{\partial}{\partial v_k} \\ f_*\left(\frac{\partial}{\partial y_j}\right)&=\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{\partial u_k}{\partial y_j}\right)\frac{\partial}{\partial u_k}+\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{\partial v_k}{\partial y_j}\right)\frac{\partial}{\partial v_k}\end{aligned} \tag{II.3.5}$$

denklemleri vardır. (II.3.5) denklemlerine J uygulanırsa

$$f_*\left(J\left(\frac{\partial}{\partial x_j}\right)\right)=\sum_{k=1}^{m}\left(\frac{\partial u_k}{\partial y_j}\right)\frac{\partial}{\partial u_k}+\sum_{k=1}^{m}\left(\frac{\partial v_k}{\partial y_j}\right)\frac{\partial}{\partial v_k}$$

$$f_*\left(J\left(\frac{\partial}{\partial y_j}\right)\right)=-\sum_{k=1}^{m}\left(\frac{\partial u_k}{\partial x_j}\right)\frac{\partial}{\partial u_k}-\sum_{k=1}^{m}\left(\frac{\partial v_k}{\partial x_j}\right)\frac{\partial}{\partial v_k}$$

$$Jf_*\left(\frac{\partial}{\partial x_j}\right)=\sum_{k=1}^{m}\frac{\partial u_k}{\partial x_j}\frac{\partial}{\partial v_k}-\sum_{k=1}^{m}\frac{\partial v_k}{\partial x_j}\frac{\partial}{\partial u_k}$$

$$Jf_*\left(\frac{\partial}{\partial y_j}\right)=\sum_{k=1}^{m}\frac{\partial u_k}{\partial y_j}\frac{\partial}{\partial v_k}-\sum_{k=1}^{m}\frac{\partial v_k}{\partial y_j}\frac{\partial}{\partial u_k}$$

elde edilir. $Jf_*=f_*J$ eşitliği gözönüne alınırsa

$$\frac{\partial u_k}{\partial x_j}=\frac{\partial v_k}{\partial y_j} \quad , \quad \frac{\partial v_k}{\partial x_j}=-\frac{\partial u_k}{\partial y_j}$$

bulunur . Bu ise Cauchy-Riemann denklemleridir.

II.3.2. Önerme. M ve M' kompleks manifoldlar olsun. Bu durumda $f: M \to M'$ dönüşümünün holomorfik olması için gerek ve yeter şart M ve M' kompleks manifoldlarının kompleks yapılarına göre f nin hemen hemen kompleks olmasıdır [9].

İspat. J ve J', M ve M' manifoldlarının kompleks yapıları ve $p \in M, f(p) \in M'$ noktalarının komşuluklarında tanımlanan lokal koordinat sistemleri sırasıyla $\{z_1,\ldots,z_n\}$ ve $\{w_1,\ldots,w_n\}$ olsun. $w_k=u_k+iv_k$ olmak üzere

$$f_*u_j=\alpha^j\left(x^1,\ldots,x^n,y^1,\ldots,y^n\right)$$

$$f_*v_j=\beta^j\left(x^1,\ldots,x^n,y^1,\ldots,y^n\right)$$

şeklinde tanımlanırsa

$$f_*\left(\frac{\partial}{\partial x_k}\right)=\sum_j\left\{\left(\frac{\partial\alpha^j}{\partial x_k}\right)\frac{\partial}{\partial u_j}+\left(\frac{\partial\beta^j}{\partial x_k}\right)\frac{\partial}{\partial v_j}\right\}$$

$$f_*\left(\frac{\partial}{\partial y_k}\right)=\sum_j\left\{\left(\frac{\partial\alpha^j}{\partial y_k}\right)\frac{\partial}{\partial u_j}+\left(\frac{\partial\beta^j}{\partial y_k}\right)\frac{\partial}{\partial v_j}\right\}$$

elde edilir. Önerme II.3.1 de olduğu gibi

$$f_*\left(J\left(\frac{\partial}{\partial x_k}\right)\right) \text{ ile } J'\left(f_*\left(\frac{\partial}{\partial x_k}\right)\right) \quad , \quad f_*\left(J\left(\frac{\partial}{\partial y_k}\right)\right) \text{ ile } J'\left(f_*\left(\frac{\partial}{\partial y_k}\right)\right)$$

karşılaştırılırsa

$$\frac{\partial \alpha^j}{\partial x_k} = \frac{\partial \beta^j}{\partial y_k} \quad , \quad \frac{\partial \alpha^j}{\partial y_k} = -\frac{\partial \beta^j}{\partial x_k}$$

olur. Bunlar ise Cauchy-Riemann denklemleridir.

II.3.7. Tanım. M bir manifold ve M nin p noktasındaki tanjant uzayı $T_M(p)$ olsun. Bu durumda $T_M(p)$'nin kompleksleştirilmiş $T_M^c(p)$ uzayına M nin kompleks tanjant uzayı ve bu uzayın elemanlarına da p noktasındaki kompleks tanjant vektörü denir.

M J kompleks yapısı ile birlikte hemen hemen kompleks manifold olsun. Bu durumda Teorem II.1.4 den

$$T_M^c(p) = T_M^{0,1}(p) + T_M^{1,0}(p)$$

dır [9].

II.3.8. Tanım. $X \in T_M^c(p)$ tanjant vektörü, $X \in T_M^{1,0}(p)$ ise X e (1,0) tipinde, $X \in T_M^{0,1}(p)$ ise X e (0,1) tipindedir denir. Bazen bunlara sırasıyla holomorfik ve anti-holomorfik vektörler de denir. M bir manifold olsun. $\chi(M)$ nin kompleksleştirilmişine kompleks vektör alanı denir ve $\chi^c(M)$ ile gösterilir [9].

Tanım II.3.8 ve II.1.8 den görülür ki kompleks tanjant vektörün (1,0) ((0,1)) tipinde olması için gerek ve yeter şart $X \in T_M(p)$ için, $Z=X-iJX$ ($Z=X+iJX$) olmasıdır .

II.3.9. Tanım. M bir manifold ve M üzerinde r-formların uzayı $D^r(M)$ olsun. Bu durumda $\omega_1, \omega_2 \in D^r(M)$ için $\varpi = \omega_1 + i\omega_2$ olmak üzere ϖya kompleks r-form denir. Kompleks r-formların uzayı $C^r(M)$, $\left(\Lambda^r T_M^{*c}(p)\right)$ ile gösterilir. Bir kompleks r-form $\forall p \in M$ için

$$\underbrace{T_M^c(p) \times \ldots \times T_M^c(p)}_{r-\text{tane}} \rightarrow C \qquad \text{(II.3.6)}$$

anti-simetrik dönüşüm olarak da tanımlanır.

Kompleks r-formun daha genelleştirilmişi olarak kompleks tensör alanı ;reel tensör alanlarının kompleksleştilmişi olarak gözönüne alınır. Yani (r,s) mertebeli bir kompleks tensör alanı

$$T^{c}{}^{s}_{r}\big|_p : \underbrace{T_M^c(p)\times\ldots\times T_M^c(p)}_{r-\tan e}\times\underbrace{T_M^{*c}(p)\times\ldots T_M^{*c}(p)}_{s-\tan e}\to C$$

ile tanımlanır[9].

Önerme II.1.1 $T_M^{*c}(p)$ için ifade edilirse $C(M)$, M üzerinde kompleks diferensiyel formların uzayı olmak üzere

$$C(M)=C^r(M)=\sum_{p,q=0}^{n}C^{p,q}(M)\quad ,C^r(M)=\sum_{p+q=r}C^{p,q}(M) \qquad \text{(II.3.7)}$$

ayrışımına sahip oluruz. $C^{p,q}(M)$ uzayının elemanına (p,q) tipinde kompleks form denir [9].

II.3.10. Tanım. M bir kompleks manifold olsun. M üzerinde bir kompleks formun (1,0) ((0,1)) tipinde olması için gerek ve yeter şart $Z\in T_M^{0,1}(p)$ için $\omega(Z)=0$ ($Z\in T_M^{0,1}$ için,$\omega(Z)=0$) olmasıdır [9].

$C^{1,0}(M)$ uzayının bir bazı $\{\omega^1,\ldots,\omega^n\}$ olsun. Bu durumda $C^{0,1}(M)$ nin bir bazı $\{\overline{\omega}^1,\ldots,\overline{\omega}^n\}$ olur. Böylece $C^{p,q}(M)$ uzayının bir bazı da $\omega^{j_1}\Lambda\ldots\Lambda\omega^{j_p}\Lambda\overline{\omega}^{k_1}\Lambda\ldots\Lambda\overline{\omega}^{k_q}$ olur [9].

II.3.11.Tanım. E bir reel vektör demeti olsun E nin kompleksleştirilmişine $\pi: E^c\to M$, V^c standart lifi ile birlikte bir kompleks vektör demetidir denir. $p\in M$ üzerinde $\left(E^c\right)_p$ lifi E_p lifinin kompleksleştirilmişidir [11].

II.3.12. Tanım. M $2n$-boyutlu bir reel manifold ve TM, M nin tanjant demeti olsun. Bu taktirde n-boyutlu kompleks manifoldun kompleks tanjant demeti T^cM; reel tanjant demetinin kompleksleştirilmişi olarak gözönüne alınır. Yani

$$T^cM=\bigcup_{p\in M}T_M^c(p)$$

dır. Böylece kompleksleştirilmiş vektör alanı, $T^c M$ demetinin kesitidir. Bunun anlamı $\forall p \in M$ için $T^c_M(p)$ tanjant uzayına bir L_p vektörü taşıyan L dönüşümünün varolmasıdır.

$\forall p \in M$ için $V(p) \subseteq T^c_M(p)$ altuzayını karşılık getiren L dönüşümüne $T^c M$ nin m-boyutlu kompleks altdemeti denir [3].

II.3.13. Tanım. M bir kompleks manifold ve J M üzerinde hemen hemen kompleks yapı olsun. Bu durumda

$$N_J(X,Y) = J^2[X,Y] + [JX,JY] - J[JX,Y] - J[X,JY] \qquad \text{(II.3.7)}$$

tensör alanına J nin Nijenhuis tensör alanı denir[8].

II.3.14. Tanım. M bir kompleks manifold , J hemen hemen kompleks yapı ve Z,W (1,0) tipinde vektör alanları olsun. Eğer $[Z,W]$, (1,0) tipinde ise J ye integrallenebilirdir denir [9].

II.3.2. Teorem. M bir kompleks manifold olsun. J hemen hemen kompleks yapısının integrallenebilir olması için gerek ve yeter şart Nijenhuis tensör alanının sıfır olmasıdır [9].

İspat. X ve Y reel vektör alanları ve $Z=[X-iJX,Y-iJY]$ olsun. Bu durumda

$$Z+iJZ=N(X,Y)-iJN(X,Y)$$

eşitliği elde edilir. Buradan $Z+iJZ=0$ olması için gerek ve yeter şart Z nin (1,0) tipinde olmasıdır. Bu ise $N=0$ olması için gerek ve yeterdir.

II.3.15. Tanım. J ve M sırasıyla hemen hemen kompleks yapı ve hemen hemen kompleks manifold olsun. Eğer M bir kompleks manifoldu meydana getiren

$2n$-boyutlu reel manifold ise hemen hemen J kompleks yapısına kompleks yapı denir [8]

II.3.3. Teorem. M hemen hemen kompleks manifold ve J, M üzerinde hemen hemen kompleks yapı olsun. Bu durumda J hemen hemen kompleks yapısının bir kompleks yapı olması için gerek ve yeter şart Nijenhuis tensör alanının sıfır olmasıdır [8].

II.3.3. Teorem. M reel $2n$-boyutlu hemen hemen kompleks manifold ve M üzerinde hemen hemen kompleks yapı J olsun. M nin bir U örtüsü ve U üzerinde

$$J\left(\frac{\partial}{\partial x_j}\right)=\frac{\partial}{\partial y_j} \quad , \quad J\left(\frac{\partial}{\partial y_j}\right)=-\frac{\partial}{\partial x_j}$$

olacak şekilde $\{x_1,\dots,x_n,y_1,\dots,y_n\}$ lokal koordinat sistemi var ise M bir kompleks manifolddur [9].

İspat. $U\cap V\neq\varnothing$ olmak üzere U ve V üzerinde sırasıyla $\{x_j,y_j\}$, $\{u_j,v_j\}$ lokal koordinat sistemini alalım. Buradan

$$\frac{\partial}{\partial x_j}=\sum\frac{\partial\alpha^k}{\partial x_j}\frac{\partial}{\partial u_k}+\frac{\partial\beta^k}{\partial x_j}\frac{\partial}{\partial v_k}$$

$$\frac{\partial}{\partial y_j}=\sum\frac{\partial\alpha^k}{\partial y_j}\frac{\partial}{\partial u_k}+\frac{\partial\beta^k}{\partial y_j}\frac{\partial}{\partial v_k}$$

$$J\left(\frac{\partial}{\partial x_j}\right)=\sum\frac{\partial\alpha^k}{\partial x_j}J\left(\frac{\partial}{\partial u_k}\right)+\frac{\partial\beta^k}{\partial x_j}J\left(\frac{\partial}{\partial v_k}\right)$$

$$\frac{\partial}{\partial y_j}=\sum\frac{\partial\alpha^k}{\partial x_j}\frac{\partial}{\partial v_k}-\frac{\partial\beta^k}{\partial x_j}\frac{\partial}{\partial u_k}$$

elde edilir. Burada ikinci ve dördüncü denklemler karşılaştırılırsa

$$\frac{\partial\alpha^k}{\partial x_j}=\frac{\partial\beta^k}{\partial y_j} \quad ,-\frac{\partial\beta^k}{\partial x_j}=\frac{\partial\alpha^k}{\partial y_j} \tag{II.3.9}$$

bulunur.

$$\left.\begin{cases} u_k = \alpha^k\left(x_j, y_j\right) \\ v_k = \beta^k\left(x_j, y_j\right) \end{cases}\right\} \Rightarrow w_k = u_k + iv_k = \alpha^k\left(x_j, y_j\right) + i\beta^k\left(x_j, y_j\right)$$

dır. $f_k = \alpha^k + i\beta^k$, $\left(x_k, y_k\right) \leftrightarrow z_k = x_k + iy_k$ olduğundan

$$f_k\left(z_1, \ldots, z_n\right) = \alpha^k\left(z_1, \ldots, z_n\right) + i\beta^k\left(z_1, \ldots, z_n\right)$$
$$w_k = f_k\left(z_1, \ldots, z_n\right)$$

elde edilir. Böylece (II.3.9) dan f_k holomorfik olduğundan koordinat değişimi holomorfiktir.

II.3.16. Tanım. M hemen hemen kompleks manifold olsun. Eğer $\forall X \in \chi(M)$ için

$$L_X J = 0$$

ise X vektör alanına hemen hemen J kompleks yapısının infinitesimal otomorfizmi denir [8].

Önerme I.3.5. den

$$\begin{aligned}\left(L_X J\right)Y &= L_X JY - JL_X Y \\ &= [X, JY] - J[X, Y]\end{aligned}$$

dır. Böylece aşağıdaki önermeyi verebiliriz.

II.3.3. Önerme. M hemen hemen kompleks manifold ve J M nin bir hemen hemen kompleks yapısı olsun. Bu taktirde X vektör alanının infinitesimal otomorfizm olması için gerek ve yeter şart $\forall X, Y \in \chi(M)$ için $[X, JY] = J[X, Y]$ olmasıdır [9].

II.3.4. Önerme. M bir hemen hemen kompleks manifold, J M nin hemen hemen kompleks yapısı, $X \in \chi(M)$ vektör alanı, J kompleks yapısının infinitesimal otomorfizmi olsun. Bu durumda JX J nin infinitesimal otomorfizmi dir $\Leftrightarrow$ $\forall X, Y \in \chi(M)$ için $N_J(X, Y) = 0$.

İspat.($\Rightarrow$) JX, J nin infinitesimal otomorfizmi olduğundan

$$[JX, JY] = J[JX, Y]$$

dır. X, J nin infinitesimal otomorfizmi olduğundan da

$$[X,JY]=J[X,Y]$$

olur. Bu ifadeye J uygulanırsa

$$J[X,JY]=-[X,Y]$$

elde edilir. Böylece

$$\begin{aligned} N_J(X,Y) &= -[X,Y]+[JX,JY]-J[X,JY]-J[JX,Y] \\ &= -[X,Y]+[X,Y]=0 \end{aligned}$$

dır.

($\Leftarrow$) X infinitesimal otomorfizm olduğundan

$$[X,JY]=J[X,Y]$$

dir. Bu eşitlik Nijenhuis tensör alanının ifadesinde kullanılırsa

$$\begin{aligned} N_J(X,Y) &= J^2[X,Y]+[JX,JY]-J[JX,Y]-J[X,JY]=0 \\ 0 &= -[X,Y]+[JX,JY]-J^2[X,Y]-J[JX,Y] \\ 0 &= [JX,JY]-J[JX,Y] \\ [JX,JY] &= J[JX,Y] \end{aligned}$$

elde edilir. Böylece JX, J nin infinitesimal otomorfizmidir.

M bir kompleks manifold, $z_j = x_j + iy_j$ olmak üzere M üzerinde $\{z_1,\dots,z_n\}$ lokal koordinat sistemi verilsin.

$$d' : C^{p,q}(M) \to C^{p+1,q}(M)$$
$$d'' : C^{p,q}(M) \to C^{p,q+1}(M)$$

ve $\forall \omega \in C^{p,q}(M)$ için $d\omega = d'\omega + d''\omega$ olarak tanımlansın. Bu durumda

$$d^2\omega = d'^2\omega + d'd''\omega + d''d'\omega + d''^2\omega = 0$$

dır. Buradan

$$d'^2 = 0 \, , d'd'' + d''d' = 0 \, , d''^2 = 0 \qquad \text{(II.3.10)}$$

elde edilir [9].

II.3.17. Tanım. M bir kompleks manifold ve ω, M üzerinde $(p,0)$ mertebeli diferensiyel form olsun. Eğer $d''\omega = 0$ ise ω, formuna holomorfiktir denir [9].

$(0,0)$ mertebeli f diferensiyel formu için

$$df = d'f + d''f = \sum \frac{\partial f}{\partial z_i} dz_i + \sum \frac{\partial f}{\partial \bar{z}_i} d\bar{z}_i$$

olur ve bu durumda f holomorfiktir $\Leftrightarrow \frac{\partial f}{\partial \bar{z}_i} = 0$.

$$\omega = \sum f_{i_1 \ldots i_r} dz^{i_1} \Lambda \ldots \Lambda dz^{i_r}$$

ile verilen formun dış türevi

$$d\omega = \sum \frac{\partial f_{i_1 \ldots i_r}}{\partial z_j} dz^j \Lambda dz^{i_1} \Lambda \ldots \Lambda dz^{i_r}$$
$$+ \sum \frac{\partial f_{i_1 \ldots i_r}}{\partial \bar{z}_j} d\bar{z}^j \Lambda dz^{i_1} \Lambda \ldots \Lambda dz^{i_r}$$

dır[9].

II.3.18. Tanım. M bir kompleks manifold ve Z, M üzerinde bir vektör alanı olsun. Bu durumda her f holomorfik fonksiyonu için Zf holomorfik ise Z ye holomorfik vektör alanı denir [9].

II.3.1. Sonuç. $Z = \sum f_i \frac{\partial}{\partial z_i}$ holomorfiktir $\Leftrightarrow f_i$ holomorfiktir [9].

II.3.5. Teorem. M hemen hemen kompleks manifold, M üzerinde hemen hemen kompleks yapı J olsun. Bu durumda M nin kompleks manifold olması için gerek ve yeter şart $\nabla J = 0$, $T = 0$ olacak şekilde M üzerinde ∇ konneksiyonunun var olmasıdır [9]. Burada T ∇ konneksiyonunun torsiyon tensör alanıdır.

İspat. ($\Leftarrow$) $\nabla J = 0, T = 0$ olacak şekilde ∇ konneksiyonu varolsun. Bu durumda

$$\begin{aligned} [X,Y] &= \nabla_X Y - \nabla_Y X \\ \nabla_X JY &= (\nabla_X J)Y + J\nabla_X Y = J\nabla_X Y \end{aligned} \quad \text{(II.3.12)}$$

yazarız. Böylece Nijenhuis tensör alanının ifadesi

$$\begin{aligned} N(X,Y) &= [JX,JY] - J[X,JY] - J[JX,Y] - [X,Y] \\ &= \nabla_{JX} JY - \nabla_{JY} JX - J\nabla_X JY + J\nabla_{JY} X - J\nabla_{JX} Y + J\nabla_Y JX - \nabla_X Y + \nabla_Y X \end{aligned}$$

$$= (\nabla_{JX} J)Y + J\nabla_{JX} Y - ((\nabla_{JY} J)X + J\nabla_{JY} X) - J(\nabla_X J)Y + \nabla_X Y$$
$$+ J\nabla_{JY} X - J\nabla_{JX} Y + J((\nabla_Y J)X + J\nabla_Y X) - \nabla_X Y + \nabla_Y X$$

olur. (II.3.12) den uygun sadeleştirmeler yapılırsa

$$N(X,Y) = \nabla_Y X + J(\nabla_{JY} X) + \nabla_X Y - \nabla_X Y = 0$$

elde edilir. O halde M bir kompleks manifolddur.

($\Rightarrow$) Şimdi kabul edelim ki M bir kompleks manifold olsun. M parakompakt olduğu için M üzerinde bir Riemann metriği vardır. Bu nedenle $T=0$ olacak şekilde bir ∇ lineer konneksiyonu vardır.

$$A(X,Y) = (\nabla_X J)Y - (\nabla_Y J)X$$
$$S(X,Y) = (\nabla_X J)Y + (\nabla_Y J)X$$

olmak üzere

$$\nabla'_X Y = \nabla_X Y + \frac{1}{4}[A(X,JY) - JS(X,Y)] \qquad \text{(II.3.13)}$$

M üzerinde bir konneksiyondur. İspatlayacağız ki $\nabla' J = 0$, $T' = 0$ dır. $X,Y \in \chi(M)$ için (II.3.13) kullanılırsa

$$(\nabla'_X J)Y = \nabla'_X JY - J\nabla'_X Y$$
$$= \nabla_X JY + \frac{1}{4}[A(X,-Y) - JS(X,JY)] - J(\nabla_X Y +$$
$$\frac{1}{4}[A(X,JY) - JS(X,Y)])$$
$$= \nabla_X JY - J\nabla_X Y + \frac{1}{4}\{[-(\nabla_X J)Y + (\nabla_Y J)X -$$
$$J(\nabla_X J)JY - J(\nabla_{JY} J)X] - J(A(X,JY) - S(X,Y))\}$$
$$= (\nabla_X J)Y + \frac{1}{4}[-(\nabla_X J)Y + (\nabla_Y J)X - J((\nabla_X J)JY) +$$
$$(\nabla_Y J)X - J((\nabla_X J)JY) + J(\nabla_{JY} J)X - (\nabla_X J)Y - (\nabla_Y J)X]$$
$$= (\nabla_X J)Y + \frac{1}{4}[-2(\nabla_X J)Y - 2J((\nabla_X J)JY)]$$
$$= (\nabla_X J)Y - \frac{1}{2}[(\nabla_X J)Y + J((\nabla_X J)JY)]$$
$$= \frac{1}{2}(\nabla_X J)Y - \frac{1}{2}J((\nabla_X J)JY)$$

olur. Diğer taraftan

$$\begin{aligned}J(\nabla_X J)JY &= J(\nabla_X J^2Y - J(\nabla_X JY)) \\ &= J\nabla_X J^2Y - J^2\nabla_X JY \\ &= -J\nabla_X Y + \nabla_X JY \\ &= -J\nabla_X Y + J\nabla_X Y + (\nabla_X J)Y \\ &= (\nabla_X J)Y\end{aligned}$$

dır. Buradan

$$(\nabla'_X J)Y = \frac{1}{2}(\nabla_X J)Y - \frac{1}{2}(\nabla_X J)Y = 0$$

elde edilir. T=0 olduğundan

$$\begin{aligned}A(JX,Y)+A(X,JY) &= (\nabla_{JX}J)Y - (\nabla_Y J)JX + (\nabla_X J)JY - (\nabla_{JY}J)X \\ &= \nabla_{JX}JY - J\nabla_{JX}Y - [-\nabla_Y X - J(\nabla_Y JX)] + \\ &\quad [\nabla_X J^2Y - J\nabla_X JY] - [\nabla_{JY}JX - J(\nabla_{JY}X)] \\ &= \nabla_{JX}JY - J(\nabla_{JX}Y) + \nabla_Y X + J(\nabla_Y JX) \\ &\quad -\nabla_X Y - J(\nabla_X JY) - \nabla_{JY}JX + J(\nabla_{JY}X) \\ &= \nabla_Y X - \nabla_X Y + \nabla_{JX}JY - \nabla_{JY}JX - J(\nabla_{JX}Y - \nabla_Y JX) \\ &\quad -J(\nabla_X JY - \nabla_{JY}X) \\ &= -[X,Y] + [JX,JY] - J[JX,Y] - J[X,JY] \\ &= N(X,Y) \end{aligned} \qquad \text{(II.3.14)}$$

dır. Buradan

$$\begin{aligned}T'(X,Y) &= \nabla'_X Y - \nabla'_Y X - [X,Y] \\ &= \nabla_X Y + \frac{1}{4}[A(X,JY) - JS(X,Y)] - \nabla_Y X \\ &\quad - \frac{1}{4}[A(Y,JX) - JS(Y,X)] - [X,Y] \\ &= \nabla_X Y - \nabla_Y X - [X,Y] + \frac{1}{4}A(X,JY) - \frac{1}{4}JS(X,Y) - \\ &\quad \frac{1}{4}A(Y,JX) + \frac{1}{4}JS(Y,X)\end{aligned}$$

$$= \frac{1}{4}\left(A(X,JY) - A(Y,JX)\right)$$
$$= \frac{1}{4}\left(A(X,JY) + A(JX,Y)\right)$$

elde edilir. (II.3.14) denklemi gözönüne alınırsa

$$T'(X,Y) = \frac{1}{4} N_j(X,Y)$$

dır. Böylece M bir kompleks manifold olduğundan

$$T' = 0$$

olur.

II.4. Hermityen Manifoldlar

II.4.1. Tanım. M hemen hemen kompleks manifold ve M nin hemen hemen kompleks yapısı J olsun. M üzerinde bir Riemann metriği g olmak üzere $X,Y \in \chi(M)$ için

$$g(JX,JY) = g(X,Y) \tag{II.4.1}$$

ise g fonksiyonuna Hermityen metrik denir [9].

II.4.2. Tanım. M hemen hemen kompleks manifold olsun. Eğer g Hermityen metriği tanımlı ise M ye hemen hemen Hermityen manifold denir. M bir kompleks manifold ve M üzerinde g Hermityen metriği tanımlı ise M ye Hermityen manifold denir [9].

II.4.1. Önerme. M parakompakt manifold ise her hemen hemen kompleks manifold Hermityen metriğe sahiptir [9].

İspat. M parakompakt olduğundan M üzerinde Riemann metriği vardır. $X,Y \in \chi(M)$ için

$$h(X,Y) = g(X,Y) + g(JX,JY) \tag{II.4.2}$$

olarak tanımlanırsa

$$h(JX,JY)=g(JX,JY)+g(-X,-Y)$$

dır. g pozitif tanımlı olduğundan

$$h(JX,JY)=g(JX,JY)+g(X,Y) \qquad \text{(II.4.3)}$$

olur.(II.4.2) ve (II.4.3) den ispat tamamlanır.

M bir hemen hemen kompleks manifold olsun. M üzerinde g Hermityen metriği, ikinci mertebeden kovaryant simetrik tensör alanına genişletilebilir. Bu durumda g tensör alanı aşağıdaki özelliklere sahiptir[9].

a) $Z,W \in \chi(M) \Rightarrow g(\overline{Z},\overline{W}) = \overline{g(Z,W)}$ (II.4.4)

b) $0 \neq Z \in \chi(M) \Rightarrow g(Z,\overline{Z}) \rangle 0$ (II.4.5)

c) $Z \in \chi^{1,0}(M), W \in \chi^{0,1}(M) \Rightarrow g(Z,\overline{W}) = 0$ (II.4.6)

d) $g(Z_j,\overline{Z}_k) = \overline{g(Z_k,\overline{Z}_j)}$

II.4.3. Tanım. M hemen hemen Hermityen manifold, g ve J M üzerinde sırasıyla Hermityen metrik ve hemen hemen kompleks yapı olsun. $X,Y \in \chi(M)$ için

$$\phi(X,Y) = g(X,JY) \qquad \text{(II.4.7)}$$

ile tanımlı tensöre temel 2-form denir [9].

ϕ, M üzerinde temel 2-form olmak üzere

$$\phi(JX,JY) = \phi(X,Y) \qquad \text{(II.4.8)}$$

dır. Gerçekten

$$\phi(JX,JY) = g(JX,J^2Y) = g(JX,-Y)$$

olur. g pozitif tanımlı ve J her noktada non-singüler olduğundan

$$\phi(JX,JY) = \phi(X,Y)$$

elde edilir [9].

II.4.1. Lemma. M hemen hemen Hermityen manifold, g ve J M üzerinde sırasıyla Hermityen metrik ve hemen hemen kompleks yapı olsun. Bu durumda N nijenhuis tensör alanı ve ϕ temel 2-form olmak üzere $X,Y,Z \in \chi(M)$ için

$$2g\left(\left(\nabla_X J\right)Y,Z\right)-g\left(JX,N(Y,Z)\right)=3d\phi(X,JY,JZ)-3d\phi(X,Y,Z)$$

dır [9].

İspat.

$$\begin{aligned}\left(\nabla_X J\right)JY &= \nabla_X JJY - J\left(\nabla_X JY\right)\\ &= \nabla_X Y - J\left(\left(\nabla_X J\right)Y + J\left(\nabla_X Y\right)\right)\\ &= -\nabla_X Y - J\left(\nabla_X J\right)Y + \nabla_X Y\\ &= -J\left(\nabla_X J\right)Y \end{aligned} \qquad \text{(II.4.9)}$$

ve

$$\begin{aligned}\left(\nabla_X \phi\right)Y &= X(\phi(Y,Z)) - \phi\left(Y,\nabla_X Z\right) - \phi\left(\nabla_X Y,Z\right)\\ &= X(g(Y,JZ)) - g\left(Y,J\nabla_X Z\right) - g\left(\nabla_X Y,JZ\right)\\ &= \left(\nabla_X Y,JZ\right) + g\left(Y,\nabla_X JZ\right) - g\left(Y,J\nabla_X Z\right) - \left(\nabla_X Y,JZ\right)\\ &= g\left(Y,\left(\nabla_X J\right)Z\right) \end{aligned} \qquad \text{(II.4.10)}$$

elde edilir. Diğer taraftan

$$\begin{aligned}N(Y,Z) &= [JY,JZ] - J[Y,JZ] - J[JY,Z] - [Y,Z]\\ &= \left(\nabla_{JY}JZ - \nabla_{JZ}JY\right) - J\left(\nabla_Y JZ - \nabla_{JZ}Y\right)\\ &\quad - J\left(\nabla_{JY}Z - \nabla_Z JY\right) - \left(\nabla_Y Z - \nabla_Z Y\right)\\ &= \left(\nabla_{JY}J\right)Z + J\left(\nabla_{JY}Z\right) - \left(\nabla_{JZ}J\right)Y - J\left(\nabla_{JZ}Y\right)\\ &\quad - J\left(\nabla_Y J\right)Z + \nabla_Y Z + J\nabla_{JZ}Y - J\nabla_{JY}Z\\ &\quad + J\left(\nabla_Z J\right)Y - \nabla_Z Y - \nabla_Y Z + \nabla_Z Y \end{aligned}$$

$$N(Y,Z) = \left(\nabla_{JY}J\right)Z - \left(\nabla_{JZ}J\right)Y + J\left(\nabla_Z J\right)Y - J\left(\nabla_Y J\right)Z \qquad \text{(II.4.11)}$$

ve (I.3.16) dan

$$
\begin{aligned}
3d\phi(X,Y,Z) &= X(\phi(Y,Z)) + Y(\phi(Z,X)) + Z(\phi(X,Y)) - \phi([X,Y],Z) - \phi([Y,Z],X) - \phi([Z,X],Y) \\
&= X(g(Y,JZ)) + Y(g(Z,JX)) + Z(g(X,JY)) - g([X,Y],JZ) - g([Y,Z],JX) - g([Z,X],JY) \\
&= g(\nabla_X Y, JZ) + g(Y, \nabla_X JZ) + g(\nabla_Y Z, JX) + g(\nabla_Z X, JY) + g(X, \nabla_Z JY) \\
&\quad + g(Z, \nabla_Y JX) - g([X,Y],JZ) - g([Y,Z],JX) - g([Z,X],JY) \\
&= g(\nabla_X Y, JZ) + g(Y, \nabla_X JZ) + g(\nabla_Y Z, JX) + g(Z, \nabla_Y JX) + g(\nabla_Z X, JY) \\
&\quad + g(X, \nabla_Z JY) - g((\nabla_X Y - \nabla_Y X), JZ) - g((\nabla_Y Z - \nabla_Z Y), JX) \\
&\quad - g((\nabla_Z X - \nabla_X Z), JY) \\
&= g(Y, \nabla_X JZ) + g(Z, \nabla_Y JX) + g(X, \nabla_Z JY) + g(\nabla_Y X, JZ) + g(\nabla_Z Y, JX) \\
&\quad + g(\nabla_X Z, JY) \\
&= g(Y, (\nabla_X J)Z) + g(Z, (\nabla_Y J)X + J(\nabla_Y X)) - g(X, J(\nabla_Z Y)) \\
&\quad + g(X, (\nabla_Z J)Y + J(\nabla_Z Y)) - g(Z, J(\nabla_Y X)) - g(Y, J(\nabla_X Z))
\end{aligned}
$$

olur. Böylece

$$3d\phi(X,Y,Z) = g(Y,(\nabla_X J)Z) + g(Z,(\nabla_Y J)X) + g(X,(\nabla_Z J)Y) \qquad \text{(II.4.12)}$$

elde edilir. Benzer olarak

$$3d\phi(X,JY,JZ) = g(JY,(\nabla_X J)JZ) + g(JZ,(\nabla_{JY} J)X) + g(X,(\nabla_{JZ} J)JY) \text{(II.4.13)}$$

dır.(II.4.10), (II.4.11), (II.4.12) ve (II.4.13) denklemlerinden

$$
\begin{aligned}
3d\phi(X,Y,Z) - 3d\phi(X,JY,JZ) &= g(Y,(\nabla_X J)Z) + g(Z,(\nabla_Y J)X) \\
&\quad + g(X,(\nabla_Z J)Y) - g(JY,(\nabla_X J)JZ) \\
&\quad - g(JZ,(\nabla_{JY} J)X) - g(X,(\nabla_{JZ} J)JY) \\
&= g(Y,(\nabla_X J)Z) - g(JY,(\nabla_X J)JZ) \\
&\quad + g(Z,(\nabla_Y J)X) - g(JZ,(\nabla_{JY} J)X) \\
&\quad + g(X,(\nabla_Z J)Y) - g(X,(\nabla_{JZ} J)JY)
\end{aligned}
$$

bulunur. Burada

$$-g(JY,(\nabla_X J)JZ) = g(Y,(\nabla_X J)Z)$$

$$-g(JY,(\nabla_X J)JZ) = g(Y,(\nabla_X J)Z)$$

olduğundan

$$\begin{aligned}3d\phi(X,Y,Z) - 3d\phi(X,JY,JZ) = {} & g(Y,(\nabla_X J)Z) + g(Y,(\nabla_X J)Z) \\ & + g(Z,(\nabla_Y J)X) + g(X,(\nabla_Z J)Y) \\ & - g(JZ,(\nabla_{JY} J)X) - g(X,(\nabla_{JZ} J)JY)\end{aligned}$$

elde edilir.

$$Xg(Y,JZ) = -Xg(JY,Z)$$

olduğu kullanılırsa

$$g(Y,(\nabla_X J)Z) = -g((\nabla_X J)Y,Z)$$

dır. Böylece

$$\begin{aligned}& = -2g((\nabla_X J)Y,Z) - g(J(\nabla_Y J)Z,JX) \\ & + g((\nabla_{JY} J)Z,JX) + g(JX,J(\nabla_Z J)Y) \\ & - g((\nabla_{JZ} J)Y,JX) \\ & = -2g((\nabla_X J)Y,Z) + g(JX,N(Y,Z))\end{aligned}$$

bulunur. Buradan ispat tamamlanır.

II.4.1. Teorem. M hemen hemen kompleks manifold, g ve J M üzerinde sırasıyla Hermityen metrik ve hemen hemen kompleks yapı olsun. ∇ g ile tanımlı Riemann konneksiyonu olmak üzere aşağıdakiler denktir..

a) $\nabla J=0$

b) $\nabla\phi=0$

c)Hemen hemen kompleks yapı J torsiyonsuz ve temel 2-formu kapalıdır[9].

İspat. *(a⇔b)* (II.4.10) dan

$$(\nabla_X \phi)(Y,Z) = g(Y,(\nabla_X J)Z)$$

dır. Böylece

$$\nabla J = 0 \Leftrightarrow \nabla\phi = 0$$

olur.

(b⇒c) *(b)* den $\nabla\phi = 0$ dır. (a) ve (II.4.12) den $d\phi = 0$,lemma II.4.1 den N=0 elde edilir.

(c⇒b) Lemma II.4.1 den ∇J=0 dır. Bu ise $\nabla\phi = 0$ demektir.

II.5. Kaehler Manifoldlar

II.5.1. Tanım. M bir hemen hemen kompleks manifold ve g M üzerinde bir Hermityen metrik olsun. Eğer M üzerinde tanımlanan ϕ temel 2-formu kapalı ise $(d\phi = 0)$ g Hermityen metriğe Kaehler metrik denir.

II.5.2. Tanım. M hemen hemen kompleks manifold olsun. Eğer M üzerinde g Kaehler metriği tanımlı ise M ye hemen hemen Kaehler manifold denir. Eğer M bir kompleks manifold ve M üzerinde g Kaehler metriği tanımlı ise M ye Kaehler manifold denir [9].

II.5.1. Teorem. M bir Hermityen manifold olsun. Bu durumda M nin bir Kaehler manifold olması için gerek ve yeter şart $\nabla J = 0$ olmasıdır [2].

İspat. Teorem II.4.1 den açıktır.

II.5.1. Önerme. M bir Kaehler manifold olsun. Bu durumda M nin eğrilik tensörü ve Ricci tensörü $\forall X, Y \in \chi(M)$ için aşağıdaki özelliklere sahiptir.

a) $$R(X,Y)J = JR(X,Y) \quad , \quad R(JX,JY) = R(X,Y) \qquad \text{(II.5.1)}$$

b) $$S(JX,JY) = S(X,Y) \quad , \quad S(X,Y) = \frac{1}{2}\left(izJR(X,JY)\right) \qquad \text{(II.5.2)}$$

İspat. *a)*

$$
\begin{aligned}
R(X,Y)JZ &= \nabla_X \nabla_Y JZ - \nabla_Y \nabla_X JZ - \nabla_{[X,Y]} JZ \\
&= \nabla_X\left(\left(\nabla_Y J\right)Z + J\nabla_Y Z\right) - \nabla_Y\left(\left(\nabla_X J\right)Z + J\nabla_X Z\right) \\
&\quad -\left(\left(\nabla_{[X,Y]} J\right)Z + J\nabla_{[X,Y]} Z\right) \\
&= \nabla_X J\left(\nabla_Y Z\right) - \nabla_Y J\left(\nabla_X Z\right) + J\nabla_{[X,Y]} Z \\
&= \left(\nabla_X J\right)\nabla_Y Z + J\left(\nabla_X \nabla_Y Z\right) - \left(\nabla_Y J\right)\nabla_X Z + J\left(\nabla_Y \nabla_X Z\right) \\
&\quad - J\left(\nabla_{[X,Y]} Z\right) \\
&= J\left(\nabla_X \nabla_Y Z\right) - J\left(\nabla_Y \nabla_X Z\right) - J\left(\nabla_{[X,Y]} Z\right) \\
&= JR(X,Y)Z
\end{aligned}
$$

ve

$$
\begin{aligned}
g\left(R(JX,JY)Z,W\right) &= g\left(R(W,Z)JX,JY\right) \\
&= g\left(JR(W,Z)X,JY\right) \\
&= g\left(R(W,Z)X,Y\right) \\
&= g\left(R(X,Y)Z,W\right)
\end{aligned}
$$

$$
R(JX,JY) = R(X,Y)
$$

bulunur.

b) M nin ortonormal bir bazı $\{e_1,\ldots,e_n\}$ olsun. Bu durumda

$$
\begin{aligned}
S(JX,JY) &= \sum_i g\left(R(e_i,JX)JY,e_i\right) \\
&= \sum_i g\left(R(Je_i,JX)JY,Je_i\right) \\
&= \sum_i g\left(R(e_i,X)JY,Je_i\right) \\
&= \sum_i g\left(JR(e_i,X)Y,Je_i\right) \\
&= \sum_i g\left(R(e_i,X)Y,e_i\right) \\
&= S(X,Y)
\end{aligned}
$$

dır. Şimdi (I.4.3) kullanılırsa

$$
\begin{aligned}
S(X,Y) &= \sum_i g(R(e_i,X)Y,e_i) \\
&= -\sum_i g(JR(e_i,X)JY,e_i) \\
&= \sum_i \left[g(JR(X,JY)e_i,e_i) + g(JR(JY,e_i)X,e_i) \right] \\
&= \sum_i \left[g(JR(X,JY)e_i,e_i) + g(JR(JY,Je_i)X,Je_i) \right] \\
&= \sum_i \left[g(JR(X,JY)e_i,e_i) + g(R(Y,e_i)X,e_i) \right] \\
&= izJR(X,JY) - S(X,Y) \\
S(X,Y) &= \frac{1}{2} izJR(X,JY)
\end{aligned}
$$

elde edilir.

II.5.2. Önerme. M bir Kaehler manifold olsun. M nin S Ricci tensörü

$$
(\nabla_Z S)(X,Y) = (\nabla_X S)(Y,Z) + (\nabla_{JY} S)(JX,Z) \tag{II.5.3}
$$

eşitliğini sağlar [9].

İspat. Önerme II.5.1*(b)* gözönüne alındığında

$$
\begin{aligned}
(\nabla_Z S)(X,Y) &= \frac{1}{2}\sum g(J(\nabla_Z R)(X,JY)e_i,e_i) \\
(\nabla_Z S)(X,Y) &= \frac{1}{2}\sum g((\nabla_X R)(JY,Z)e_i,e_i) + \frac{1}{2}\sum g(J(\nabla_{JY} R)(Z,X)e_i,e_i) \\
&= (\nabla_X S)(Y,Z) + (\nabla_{JY} S)(JX,Z)
\end{aligned}
$$

elde edilir.

II.5.3. Önerme. M bir Kaehler manifoldu, J ve g sırasıyla M üzerinde hemen hemen kompleks yapı ve Kaehler metrik olsun. M nin eğrilik tensörü

R=K

a) $R(X,Y,Z,W) = -R(Y,X,Z,W) = -R(X,Y,W,Z)$

b) $R(X,Y,Z,W)+R(Y,Z,X,W)+R(Z,XY,W)=0$

c) $R(JX,JY,Z,W) = R(X,Y,JZ,JW) = R(X,Y,Z,W)$

özelliklerini sağlar[10].

II.5.3. Tanım. M bir manifold, $T_M(p)$ nin bir düzlemi P olsun. Eğer P düzlemi J altında invaryant ise P ye holomorfik düzlem (düzlem kesiti) denir. Bu durumda $\{X, JX\}$ P için bir ortonormal bazdır[10].

II.5.4. Tanım. M bir Kaehler manifoldu, M üzerinde hemen hemen kompleks yapı J olsun. P holomorfik düzleminde tanımlı kesit eğriliğine holomorfik kesit eğriliği denir. ve $X \in \chi(M)$ için

$$K(p)=R(X,JX,X,JX)=g(R(X,JX),X) \qquad \text{(II.5.4)}$$

ile verilir.

Eğer M nin her p noktasındaki düzlem kesitleri için $K(p)$ sabit ise M ye sabit holomorfik kesit eğrilikli manifold (uzay) denir[10].

II.5.1. Teorem. M bir Kaehler manifold, g ve J M üzerinde sırasıyla Kaehler metrik ve hemen hemen kompleks yapı olsun. Eğer holomorfik düzlem üzerinde holomorfik kesit eğriliği sadece p noktasına bağlı ise bu durumda M sabit holomorfik kesit eğrilikli uzaydır[10].

II.5.2. Teorem. M bir Kaehler manifold olsun. Bu durumda M sabit holomorfik kesit eğriliklidir $\Leftrightarrow X, Y, Z \in \chi(M)$ için

$$\begin{aligned} R(X,Y)Z = \frac{1}{4}c\big[&g(X,Z)Y - g(Y,Z)X + g(JX,Z)JY - g(JY,Z)JX \\ &+2g(JX,Y)JZ\big] \end{aligned} \qquad \text{(II.5.5)}$$

dır [9]. Burada c kesit eğriliğinin değeridir

İspat. Birinci bölümdeki Önerme I.4.1 e benzer olarak $R = cR_0$ dır. Burada

$$\begin{aligned} R_0(X,Y,Z,W) = \frac{1}{4}\big[&g(X,W)g(Y,Z) - g(Y,W)g(X,Z) + g(X,JW) \\ &g(Y,JZ) - g(Y,JW)g(X,JZ) + 2g(X,JY)g(W,JZ)\big] \end{aligned}$$

dır ve R_0 önerme II.5.3 ün özelliklerini sağlar. Buradan

$$g(R(X,Y)Z,W) = cg(R_0(X,Y)Z,W)$$
$$= \frac{1}{4}c[g(g(X,Z)Y,W) - g(g(Y,Z)X,W)$$
$$- g(g(X,JZ)JY,W) + g(g(Y,JZ)JX,W) - 2g(g(X,JY)JZ,W)$$
$$g(R(X,Y)Z,W) = \frac{1}{4}c[g(g(X,Z)Y,W) - g(g(Y,Z)X,W)$$
$$+ g(g(JX,Z)JY,W) - g(g(JY,Z)JX,W) + 2g(g(JX,Y)JZ,W)$$

olur. Buradan da

$$R(X,Y)Zg = \frac{1}{4}cg(X,Z)Y - g(Y,Z)X + g(JX,Z)JY - g(JY,Z)JX$$
$$+ 2g(JX,Y)Z$$

elde edilir.

II.5.3. Teorem. M bir kompleks manifold, M üzerinde $(0,q)$ formu φ ve M de z_0 noktasının bir komşuluğunda $\bar{\partial}\varphi = 0$ olsun. Bu durumda $z_0 \in W \subseteq U$ için $\varphi = \bar{\partial}\psi$ şartını sağlayan $(0,q\text{-}1)$ mertebeli ψ formu vardır[12].

II.5.1. Lemma. M nin bir U koordinat komşuluğu üzerinde holomorfik p-form φ olsun. Bu taktirde $d\psi = \varphi$ şartını sağlayan $(p\text{-}1)$ holomorfik ψ formu vardır$\Leftrightarrow$ $d\varphi = 0$ [12].

II.5.4. Önerme. M bir Kaehler manifoldu olsun. M üzerinde $\varphi = \sum \varphi_{\alpha\beta} dz^{\alpha} \Lambda dz^{\bar{\beta}}$ formu için $d\varphi = 0$ dır$\Leftrightarrow$ M de

$$\varphi = \partial\bar{\partial}f = \partial\left(\sum \frac{\partial f}{\partial \bar{z}_{\beta}} dz^{\bar{\beta}}\right) = \sum_{\alpha,\beta} \frac{\partial^2 f}{\partial z_{\alpha} \partial \bar{z}_{\beta}} dz^{\alpha} \Lambda dz^{\bar{\beta}}$$

özelliğini sağlayan $C^{\infty} - f$ fonksiyonu vardır[5].

İspat.$(\Leftarrow)$ $\varphi = \partial\bar{\partial}f$ olsun. Bu durumda

$$
\begin{aligned}
d\varphi &= d\left(\bar{\partial}\partial f\right) \\
&= \left(\partial+\bar{\partial}\right)\left(\bar{\partial}\partial f\right) \\
&= \partial\bar{\partial}\partial f \\
&= -\bar{\partial}\partial\partial f \\
&= 0
\end{aligned}
$$

elde edilir.

($\Rightarrow$) Kabul edelim ki $d\varphi = \partial\varphi + \bar{\partial}\varphi = 0$ olsun. Bu durumda $\partial\varphi, (2,1)$ ve $\bar{\partial}\varphi, (1,2)$ mertebeli olduğundan $\bar{\partial}\varphi = 0, \partial\varphi = 0$ dır. Böylece Teorem II.5.2 den $\psi^{1,0} = \sum \psi_\alpha dz^\alpha$ formu vardır. Buradan

$$
\partial\varphi = \partial\bar{\partial}\psi^{1,0} = -\bar{\partial}\partial\psi^{1,0}, \partial\varphi = 0
$$

olduğundan

$$
\partial\psi^{1,0} = \frac{1}{2}\sum\left(\frac{\partial\psi_\beta}{\partial z_\alpha} - \frac{\partial\psi_\alpha}{\partial z_\beta}\right)dz^\alpha \Lambda dz^\beta
$$

$$
\frac{\partial}{\partial \bar{z}_\lambda}\left(\frac{\partial\psi_\beta}{\partial z_\alpha} - \frac{\partial\psi_\alpha}{\partial z_\beta}\right) = 0
$$

dır. Böylece $\partial\psi^{1,0}$ holomorfik (0,2) formdur. Bu durumda Lemma II.5.1 den

$$
\partial\psi^{1,0} = d\omega = \partial\omega
$$

özelliğini sağlayan ω formu vardır. Bu ise

$$
\partial\left(\psi^{1,0} - \omega\right) = 0, \; \psi^{1,0} - \omega = \partial f
$$

dır. Buradan

$$
\varphi = \bar{\partial}\psi^{1,0} = \bar{\partial}\left(\omega + \partial f\right) = \bar{\partial}\partial f = \partial\bar{\partial}(-f)
$$

elde edilir.

II.6. Lokal Koordinatlarda Kaehler Manifold Üzerinde Riemann Konneksiyonların İfadeleri

M kompleks n-boyutlu Kaehler manifold, M üzerinde Hermityen metrik g ve M nin kompleks lokal koordinat komşuluğu $\{U, Z^\alpha\}$ olsun. $T_M(p)$ nin baz vektörleri $e_1,\ldots,e_n, e_1^* = Je_1,\ldots,Je_n$ ve bu bazların duali de $\omega^1,\ldots,\omega^n, \omega^{1^*} = J\omega^1,\ldots,\omega^{n^*}$ olsun.

ω=$\left(\omega^i_j\right)$ $\left(1 \le i, j \le 2n\right)$ konneksiyon 1-form olmak üzere

$$\omega^i_j = \omega^{i^*}_{j^*} \qquad \omega^i_{j^*} = -\omega^{i^*}_j \qquad \omega^i_j = -\omega^j_i \qquad \omega^i_{j^*} = \omega^j_{i^*} \tag{II.6.1}$$

dır. Gerçekten

$$\begin{aligned} \omega^{i^*}_{j^*} &= \left(\nabla_X e^*_j\right)e^*_i \\ &= g\left(\nabla_X e^*_j, e^*_i\right) \\ &= g\left(\nabla_X Je_j, Je_i\right) \\ &= \left(\nabla_X e_j\right)e_i = \omega^i_j \end{aligned}$$

olarak elde edilir. Diğerleri de benzer şekilde kolayca gösterilir.

$\Omega = \left(\Omega^i_j\right)$ ile eğrilik formunu gösterelim.(I.6.24) den

$$\Omega^i_j = \frac{1}{2}\sum_{k,l} R^i_{jk}\,\omega^k \Lambda \omega^l$$

olur. Bu durumda $T^{1,0}{}_M(p), T^{0,1}{}_M(p)$ nin kompleks bazları sırasıyla

$$\zeta_i = \frac{1}{2}\left(e_i - ie^*_i\right) \quad , \quad \zeta_{\bar{i}} = \frac{1}{2}\left(e_i + ie^*_i\right) \tag{II.6.2}$$

dır. Bu bazların dualleri de

$$\theta^i = \omega^i + i\omega^{i^*} \quad , \quad \theta^{\bar{i}} = \omega^i - i\omega^{i^*}$$

olur. Şimdi

$$\begin{aligned} \theta^i_j &= \omega^i_j + i\omega^{i^*}_j \quad , \quad \theta^{\bar{i}}_j = \omega^i_j - i\omega^{i^*}_j \\ \Psi^i_j &= \Omega^i_j + i\Omega^{i^*}_j \quad , \quad \Psi^{\bar{i}}_j = \Omega^i_j - i\Omega^{i^*}_j \end{aligned} \tag{II.6.3}$$

eşitliklerini gözönüne alalım. Böylece teorem I.6.7 deki bağıntılar kompleks manifoldlar için aşağıdaki şekilde verilebilir.

$$\begin{aligned} d\theta^i &= -\sum \theta^i_j \Lambda \theta^j \quad , \quad \theta^i_j + \theta^{\bar{j}}_{\bar{i}} = 0 \\ d\theta^i_j &= -\sum \theta^i_k \Lambda \theta^k_j + \Psi^i_j \qquad \Psi^i_j = \sum K^i{}_{jk\bar{l}}\,\theta^k \Lambda \theta^{\bar{l}} \end{aligned} \tag{II.6.4}$$

Burada

$$K^i{}_{jk\bar{l}} = \frac{1}{2}\left[R^i{}_{jkl} + R^i{}_{j^*kl^*} + i\left(R^i{}_{jkl^*} - R^i{}_{j^*kl}\right)\right] \tag{II.6.5}$$

dır[9].

II.6.1. Teorem. M bir Kaehler manifold olsun. Bu durumda M nin sabit holomorfik kesit eğrilikli olması için gerek ve yeter şart

$$K_{i\bar{j}k\bar{l}} = -\frac{1}{2}c\left[g_{i\bar{j}}g_{k\bar{l}} + g_{i\bar{l}}g_{\bar{j}k}\right]$$

olmasıdır [8].

İspat. Teorem II.5.2 nin ispatında kullanılan R_0 değeri gözönüne alındığında

$$\begin{aligned}K_{i\bar{j}k\bar{l}} &= cR_0\left(z_i, z_{\bar{j}}, z_k, z_{\bar{l}}\right)\\ &= c\frac{1}{4}\Big[g\left(z_i, z_k\right)g\left(z_{\bar{j}}, z_{\bar{k}}\right) - g\left(z_i, z_{\bar{l}}\right)g\left(z_{\bar{j}}, z_k\right)\\ &\quad + g\left(z_i, Jz_k\right)g\left(z_{\bar{j}}, Jz_{\bar{k}}\right) - g\left(z_i, Jz_{\bar{l}}\right)g\left(z_{\bar{j}}, Jz_k\right)\\ &\quad +2g\left(z_i, Jz_j\right)g\left(z_k, Jz_{\bar{l}}\right)\Big]\end{aligned}$$

ile ifade edilebilir. (II.4.6) ve (II.1.6), (II.1.7) den

$$\begin{aligned}K_{i\bar{j}k\bar{l}} &= c\frac{1}{4}\Big[-g\left(z_i, z_{\bar{l}}\right)g\left(z_{\bar{j}}, z_k\right) - g\left(z_i, z_{\bar{l}}\right)g\left(z_{\bar{j}}, z_k\right)\\ &\quad +2g\left(z_i, z_{\bar{j}}\right)g\left(z_k, z_{\bar{l}}\right)\Big]\\ &= -\frac{c}{2}\left[g_{i\bar{j}}g_{k\bar{l}} + g_{i\bar{l}}g_{\bar{j}k}\right]\end{aligned}$$

elde edilir.

M bir Kaehler manifold ve M üzerinde kompleks lokal koordinat sistemi $\{z_1, \ldots, z_n\}$ olsun. $T_M^c(p)$ de tanımlanan Hermit metriğini gözönüne alalım. Bu durumda $z_i = \frac{\partial}{\partial z_i}$ $z_{\bar{i}} = \bar{z}_i = \frac{\partial}{\partial \bar{z}_i}$ $(i = 1 \ldots n)$, $Z_I, Z_J \in \Gamma\left(T_M^c(p)\right)$ için $g_{IJ} = g\left(Z_I, Z_J\right)$ ile gösterelim. Eğer standart bazlar alınırsa II.4.6 dan $g_{ij} = g_{\bar{i}\bar{j}} = 0$ olur. $g_{i\bar{j}}$ $n \times n$ Hermityen matrislerdir. g metriği için

$$ds^2 = 2\sum_{i,j} g_{i\bar{j}}dz^i d\bar{z}^j$$

ile ifade edilebilir. Böylece $Z, W \in \Gamma\left(T_M^c(p)\right)$ vektörleri

$$Z=\sum_i\left(dz^i(Z)z_i+d\bar{z}^i(Z)\bar{z}_i\right)\ ,\quad W=\sum_j\left(dz^j(W)z_j+d\bar{z}^j(W)\bar{z}_j\right)$$

şeklinde yazılabilir. ϕ temel 2-form olmak üzere

$$\begin{aligned}
\phi(Z,W) &= g(Z,JW)\\
&= g\left(\sum_i\left(dz^i(Z)z_i+d\bar{z}^i(Z)\bar{z}_i\right),J\left(\sum_j\left(dz^j(W)z_j+d\bar{z}^j(W)\bar{z}_j\right)\right)\right)\\
&= g\left(z_i,iz_j\right)dz^i(Z)dz^j(W)+ig\left(z_i,\bar{z}_j\right)dz^i(Z)d\bar{z}^j(W)\\
&\quad +ig\left(\bar{z}_i,z_j\right)d\bar{z}^i(Z)dz^j(W)-ig\left(\bar{z}_i,-\bar{z}_j\right)d\bar{z}^i(Z)d\bar{z}^j(W)\\
&= -ig\left(z_i,\bar{z}_j\right)dz^i(Z)d\bar{z}^j(W)+ig\left(d\bar{z}^i(Z)\bar{z}_i,dz^j(W)z_j\right)\\
&= -ig\left(z_i,\bar{z}_j\right)dz^i(Z)d\bar{z}^j(W)+i\overline{g\left(dz^i(Z)z_i,d\bar{z}^j(W)\bar{z}_j\right)}\\
&= -ig\left(z_i,\bar{z}_j\right)dz^i(Z)d\bar{z}^j(W)-ig\left(z_i,\bar{z}_j\right)d\bar{z}^j(Z)dz^i(W)\\
&= -2i\left(g_{i\bar{j}}\left(dz^i(Z)d\bar{z}^j(W)-d\bar{z}^j(Z)dz^i(W)\right)\right)\\
&= -2ig_{i\bar{j}}dz^i\Lambda d\bar{z}^j
\end{aligned}\tag{II.6.7}$$

elde edilir. M bir Kaehler manifoldu olduğundan

$$d\phi=-2i\sum_{i,j}dg_{i\bar{j}}dz^i\Lambda d\bar{z}^j$$

$$d\phi=-i\left(\partial_k g_{i\bar{j}}-\partial_i g_{k\bar{j}}\right)dz^k\Lambda dz^i\Lambda d\bar{z}^j+\left(\partial_{\bar{k}}g_{i\bar{j}}-\partial_{\bar{j}}g_{\bar{k}i}\right)d\bar{z}^k\Lambda dz^i\Lambda d\bar{z}^j=0$$

bulunur. Böylece Kaehler metriğini karakterize eden

$$\partial_k g_{i\bar{j}}=\partial_i g_{k\bar{j}}\quad ,\quad \partial_{\bar{k}}g_{i\bar{j}}=\partial_{\bar{j}}g_{\bar{k}i}\tag{II.6.8}$$

eşitlikleri elde edilmiş olur[9].

$$\Gamma^{I}_{JK}=\frac{1}{2}g^{IL}\left\{\partial_J g_{LK}+\partial_K g_{JL}-\partial_L g_{JK}\right\}$$

Christoffel sembolünü gözönüne alalım. Burada $g^{IL}=\left(g_{IL}\right)^{-1}$ dir. M bir Kaehler manifold ve g bir Hermityen metrik olarak alınırsa (II.4.6) ve (II.6.8) den

$$\Gamma^{i}_{J\bar{k}}=\frac{1}{2}g^{iL}\quad \partial_J g_{L\bar{k}}+\partial_{\bar{k}}g_{JL}-\partial_L g_{J\bar{k}}\quad =0\tag{II.6.9}$$

ve

$$\Gamma^{\bar{i}}_{Jk} = 0 \qquad \text{(II.6.10)}$$

elde edilir[9]. J torsiyonsuz (simetrik) olduğundan

$$\Gamma^{i}_{jk} = \Gamma^{i}_{kj} \quad , \quad \Gamma^{\bar{i}}_{\bar{j}\bar{k}} = \Gamma^{\bar{i}}_{\bar{k}\bar{j}} \quad , \quad \Gamma^{I}_{JK} = 0 \qquad \text{(II.6.11)}$$

dır. (I.4.5), (II.4.6) ve (II.6.8) den

$$\Gamma^{i}_{j\bar{k}} = \frac{1}{2} g^{il} \left\{ \partial_j g_{l\bar{k}} + \partial_{\bar{k}} g_{jl} - \partial_l g_{j\bar{k}} \right\} = 0 \qquad \text{(II.6.12)}$$

ve

$$\Gamma^{i}_{jk} = g^{i\bar{l}} \partial_k g_{j\bar{l}} \quad , \quad \Gamma^{\bar{i}}_{\bar{j}\bar{k}} = g^{\bar{i}l} \partial_{\bar{j}} g_{\bar{k}l} \qquad \text{(II.6.13)}$$

olur [20].

Şimdi (I.4.21) ve teorem I.4.10 a benzer olarak

$$R(Z_K, Z_L) Z_J = \sum_I K^{I}_{JKL} Z_I$$

ve

$$K_{IJKL} = g\left(R(Z_K, Z_L) Z_J, Z_I \right)$$

eşitliklerini ifade edebiliriz. I.4.25 den

$$K_{IJKL} = \sum_T g_{IT} K^{T}_{JKL}$$

ve (I4.22) den de

$$K^{I}_{JKL} = \left(\partial_K \Gamma^{I}_{LJ} - \partial_L \Gamma^{I}_{KJ} \right) + \left(\Gamma^{T}_{LJ} \Gamma^{I}_{KT} - \Gamma^{T}_{KJ} \Gamma^{I}_{LT} \right)$$

olur. Bu durumda (II.6.9) ve (II.6.10)

$$K^{i}_{\bar{j}kl} = \left(\partial_k \Gamma^{i}_{l\bar{j}} - \partial_l \Gamma^{i}_{k\bar{j}} \right) + \left(\Gamma^{t}_{l\bar{j}} \Gamma^{i}_{kt} - \Gamma^{t}_{k\bar{j}} \Gamma^{i}_{lt} \right) = o \qquad \text{(II.6.14)}$$

ve buna benzer olarak

$$K^{\bar{i}}_{jkL} = 0 \qquad \text{(II.6.15)}$$

bulunur.(II.6. 14) ve (II.6.15) bağıntılarında (I.4.25) kullanılırsa

$$K_{ijKL} = K_{\bar{i}\bar{j}KL} = 0 \qquad \text{(II.6.16)}$$

bulunur. Diğer taraftan

$$K_{IJKL} = -K_{IJLK} = -K_{JIKL} = K_{KLIJ}$$

olduğundan

$$K^{\dot{I}}_{Jkl} = K^{\dot{I}}_{\bar{J}\bar{k}\bar{l}} = 0 \quad , \quad K_{\dot{I}Jkl} = K_{\dot{I}\bar{J}\bar{k}\bar{l}} = 0 \qquad \text{(II.6.17)}$$

dır. Böylece sadece

$$\begin{aligned} &K^{i}_{jk\bar{l}}, K^{i}_{j\bar{k}l}, K^{\bar{i}}_{\bar{j}k\bar{l}}, K^{\bar{i}}_{\bar{j}\bar{k}l} \\ &K_{\bar{i}\bar{j}k\bar{l}}, K_{i\bar{j}\bar{k}l}, K_{\bar{i}jk\bar{l}}, K_{\bar{i}j\bar{k}l} \end{aligned} \qquad \text{(II.6.18)}$$

bileşenleri sıfırdan farklıdır. Bu bileşenlerden $K^{i}_{jk\bar{l}}$ ve $K_{i\bar{j}k\bar{l}}$ metrik tensörü ve Chrisstoffel sembolü cinsinden aşağıdaki şekilde hesaplayalım. Diğer bileşenlerde benzer şekilde hesaplanabilir. (II.4.6) dan

$$K^{i}_{jk\bar{l}} = -\partial_{\bar{l}}\Gamma^{i}_{jk} \qquad \text{(II.6.19)}$$

ve (I.4.22) den

$$K_{i\bar{j}k\bar{l}} = g_{i\bar{f}} K^{\bar{f}}_{\bar{j}k\bar{l}}$$

olur. Burada

$$K^{\bar{f}}_{\bar{j}k\bar{l}} = \left(\partial_{k}\Gamma^{\bar{f}}_{\bar{l}\bar{j}} - \partial_{\bar{l}}\Gamma^{\bar{f}}_{k\bar{j}}\right) + \left(\Gamma^{t}_{\bar{l}\bar{j}}\Gamma^{\bar{f}}_{kt} - \Gamma^{t}_{k\bar{j}}\Gamma^{\bar{f}}_{lt}\right)$$

dır. (II.6.12) den de

$$K^{\bar{f}}_{\bar{j}k\bar{l}} = \partial_{k}\Gamma^{\bar{f}}_{\bar{l}\bar{j}}$$

elde edilir. Buradan

$$\begin{aligned} K_{i\bar{j}k\bar{l}} &= g_{i\bar{f}}\,\partial_{k}\Gamma^{\bar{f}}_{\bar{l}\bar{j}} \\ &= g_{i\bar{f}}\partial_{k}\left(g^{\bar{f}t}\left(\partial_{\bar{l}}g_{t\bar{j}}\right)\right) \\ &= g_{i\bar{f}}\left\{\partial_{k}g^{\bar{f}t}\left(\partial_{\bar{l}}g_{t\bar{j}}\right) + g^{\bar{f}t}\partial_{k}\partial_{\bar{l}}g_{t\bar{j}}\right\} \\ &= g_{i\bar{f}}\partial_{k}g^{\bar{f}t}\partial_{\bar{l}}g_{t\bar{j}} + \partial_{k}\partial_{\bar{l}}g_{i\bar{j}} \end{aligned}$$

diğer taraftan

$$\begin{aligned} &\partial_{k}\left(g_{i\bar{f}}g^{\bar{f}t}\right) = \partial_{k}g_{i\bar{f}}g^{\bar{f}t} + g_{i\bar{f}}\partial_{k}g^{\bar{f}t} \\ &-\partial_{k}g_{i\bar{f}}g^{\bar{f}t} = g_{i\bar{f}}\partial_{k}g^{\bar{f}t} \end{aligned}$$

olduğundan

$$K_{i\bar{j}k\bar{l}} = -g^{\bar{f}t}\frac{\partial}{\partial z_k} g_{i\bar{f}}\frac{\partial}{\partial \bar{z}_l} g_{t\bar{j}} + \frac{\partial}{\partial z_k}\frac{\partial}{\partial \bar{z}_l} g_{i\bar{j}}$$

veya

$$K_{i\bar{j}k\bar{l}} = \frac{\partial^2 g_{i\bar{f}}}{\partial z_k \partial \bar{z}_l} - \sum_{t,f} g^{t\bar{f}} \frac{\partial g_{i\bar{f}}}{\partial z_k}\frac{\partial g_{t\bar{j}}}{\partial \bar{z}_l} \tag{II.6.20}$$

dır[9].

M bir Kaehler manifold olsun. M nin Ricci tensörünün bileşenleri

$$K_{ij} = K^{l}_{lij}$$

veya Christoffel sembolleri kullanılırsa

$$K_{ij} = \frac{\partial\Gamma^{k}_{jk}}{\partial x_i} - \frac{\partial\Gamma^{k}_{ik}}{\partial x_j}$$

olduğundan

$$K_{i\bar{j}} = \sum_k \frac{\partial\Gamma^{k}_{jk}}{\partial z_i} - \frac{\partial\Gamma^{k}_{ik}}{\partial \bar{z}_j}$$

$$K_{i\bar{j}} = \sum_k -\frac{\partial\Gamma^{k}_{ik}}{\partial \bar{z}_j} \tag{II.6.21}$$

dır. Benzer olarak

$$K_{\bar{i}j} = \overline{K}_{i\bar{j}} \text{ ve } K_{ij} = K_{\bar{i}\bar{j}} = O$$

dır. Şimdi G ile $g_{i\bar{j}}$ matrisinin determinantını gösterelim. Yani

$$G = \left|g_{IJ}\right| = \left|g_{i\bar{j}}\right|^2$$

olsun. Bu matrisinin determinantının türevi

$$\frac{\partial G}{\partial x_j} = \sum_{i,k} g g_{i,k} \text{ nın kofaktörü} \frac{\partial g_{ik}}{\partial x_j} = g^{ik} g \frac{\partial g_{ik}}{\partial x_j}$$

olduğundan

$$\frac{\partial G}{\partial z_i} = G g^{j\bar{k}} g \frac{\partial g_{j\bar{k}}}{\partial z_i}$$

dır. Burada (II.6.8) ve (II.6.13) kullanılırsa

$$\Gamma^k_{ik} = \frac{\partial \log G}{\partial z_i} \tag{II.6.22}$$

elde edilir. Böylece

$$K_{i\bar{j}} = -\frac{\partial \log G}{\partial z_i \partial \bar{z}_j} \tag{II.6.23}$$

olur.

M nin S Ricci tensörü ile birleşen Ricci form

$$\rho(X,Y) = S(X,JY)$$

olduğundan

$$\begin{aligned} \rho &= -iK_{IJ}dz^I \wedge dz^J \\ &= -2iK_{i\bar{j}}dz^i \wedge d\bar{z}^j \\ &= 2i\left(\partial_i \partial_{\bar{j}} \log G\right) dz^i \wedge d\bar{z}^j \end{aligned} \tag{II.6.24}$$

olur [9].

II.7. Nearly Kaehler Manifoldlar

II.7.1. M hemen hemen Hermityen manifold olsun. Eğer $\forall X \in \chi(M)$ için

$$\left(\nabla_X J\right)X = 0 \tag{II.7.1}$$

ise M ye nearly Kaehler manifold denir[9].

II.7.1. Teorem. M hemen hemen Hermityen manifoldun nearly Kaehler manifold olması için gerek ve yeter şart $\forall X,Y \in \chi(M)$ için

$$\left(\nabla_X J\right)Y + \left(\nabla_Y J\right)X = 0 \tag{II.7.2}$$

dır[2].

İspat. ($\Rightarrow$) M nearly Kaehler manifold olsun. $\forall X,Y \in \chi(M)$ için

$$\left(\nabla_{X+Y} J\right)(X+Y) = 0$$

dır. Bu ifade

$$\nabla_{X+Y}J(X+Y)-J\nabla_{X+Y}X+Y=0$$
$$\nabla_X JX+\nabla_X JY+\nabla_Y JX+\nabla_Y JY-J\nabla_X X-J\nabla_X Y-J\nabla_Y X-J\nabla_Y Y=0$$
$$(\nabla_X J)X+(\nabla_X J)Y+(\nabla_Y J)X+(\nabla_Y J)Y=0$$

olur. (II.7.1) den

$$(\nabla_X J)Y+(\nabla_Y J)X=0$$

elde edilir.

($\Leftarrow$) $(\nabla_X J)Y+(\nabla_Y J)X=0$ olsun. Bu ifade $\forall X,Y\in\chi(M)$ için sağlandığından özel olarak $X=Y$ içinde sağlanır. Buradan

$$(\nabla_X J)X+(\nabla_X J)X=0\Rightarrow 2(\nabla_X J)X=0\Rightarrow(\nabla_X J)X=0$$

elde edilir.

II.7.1. Önerme. M nearly Kaehler manifold olsun. Bu durumda M nin Nijenhuis tensör alanı $\forall X,Y\in\chi(M)$ için

$$[J,J](X,Y)=4J(\nabla_Y J)X \tag{II.7.3}$$

dır[2].

İspat. ∇ M üzerinde torsiyonsuz(simetrik) konneksiyon olduğundan

$$\begin{aligned}
[J,J](X,Y)&=[JX,JY]-[X,Y]-J[JX,Y]-J[X,JY]\\
&=\nabla_{JX}JY-\nabla_{JY}JX-\nabla_X Y+\nabla_Y X-J(\nabla_X JY-\nabla_{JY}X)-\\
&\quad J(\nabla_{JX}Y-\nabla_Y JX)\\
&=(\nabla_{JX}J)Y+J(\nabla_{JX}Y)-(\nabla_{JY}J)X-J(\nabla_{JY}X)-\nabla_X Y+\nabla_Y X\\
&\quad -J(\nabla_{JX}Y)+J(\nabla_Y J)X-(\nabla_Y X)-J((\nabla_X J)Y+J(\nabla_X Y))+J(\nabla_{JY}X)\\
&=J(\nabla_{JX}J)Y-\nabla_X Y-J(\nabla_{JY}J)X+\nabla_Y X-\nabla_X Y+\nabla_Y X\\
&\quad +\nabla_X Y+J(\nabla_Y J)X-\nabla_Y X-J(\nabla_X J)Y+(\nabla_X Y)-J(\nabla_{JY}X)\\
&=(\nabla_{JX}J)Y-(\nabla_{JY}J)X+J(\nabla_Y J)X-J(\nabla_X J)Y
\end{aligned} \tag{II.7.4}$$

olur. Burada

$$(\nabla_X J)Y=\nabla_X JY-J\nabla_X Y$$

dır Bu eşitliğin her iki tarafına $-J$ uygulanırsa

$$-J\left(\nabla_X J\right)Y = -J\nabla_X JY - \nabla_X Y$$

bulunur. Ayrıca

$$J\left(\nabla_Y J\right)X = J\left(\nabla_Y JX\right) + \nabla_Y X$$

$$\left(\nabla_{JY} J\right)X = -\left(\nabla_X J\right)JY = \nabla_X Y + J\left(\nabla_X JY\right) = J\left(\nabla_X J\right)Y$$

dır. Bu ifadeler II.7.4 de yerine yazılırsa

$$\begin{aligned}[J,J](X,Y) &= 2\left(\nabla_Y X + J\left(\nabla_Y JX\right) - \nabla_X Y - J\left(\nabla_X JY\right)\right)\\ &= 2\left(J\left(\nabla_Y JX - J\left(\nabla_Y X\right)\right) - J\left(\nabla_X JY - J\nabla_X Y\right)\right)\\ &= 2J\left(\left(\nabla_Y J\right)X - \left(\nabla_X J\right)Y\right)\\ &= 4J\left(\left(\nabla_Y J\right)X\right)\end{aligned}$$

olur. Bu önermeye göre

$$N(X,Y)+N(Y,X)=0 \qquad g(N(X,Y),Z)+g(N(X,Z),Y)=0$$

$$N(JX,JY)+N(X,Y)=0 \qquad g(N(X,JY),JZ)+g(N(X,Y),Z)=0$$

elde edilir [9].

Teorem II.5.1 ve II.7.2 den aşağıdaki önermeyi verebiliriz.

II.7.2. Önerme. *M* bir nearly Kaehler manifold olsun. Eğer *M* nin Nijenhuis tensör alanı sıfır ise *M* Kaehler manifolddur[9].

II.8. Örnekler

II.8.1. $e_0 = 1$, e_1, e_2, e_3 R^3 ün standart bazları olmak üzere

$$K = \left\{q \middle| q = S_q + V_q = e_0 d + ae_1 + be_2 + ce_3, a,b,c,d \in R\right\}$$

cümlesini gözönüne alalım. Burada S_q skaler kısım ve $\vec{V}_q = ae_1 + be_2 + ce_3$ q nun vektörel kısmını göstermektedir. *K* üzerinde aşağıdaki işlemleri tanımlayalım.

1. $q_1 + q_2 = S_{q_1} + S_{q_2} + \vec{V}_{q_1} + \vec{V}_{q_2} = S_{q_1+q_2} + \vec{V}_{q_1+q_2}$

2.
$$q_1 \times q_2 = \left(S_{q_1} + V_{q_1}\right) \times \left(S_{q_2} + V_{q_2}\right)$$
$$= S_{q_1} S_{q_2} + S_{q_1} V_{q_2} + S_{q_2} V_{q_1} - \langle V_{q_1}, V_{q_2} \rangle + V_{q_1} \Lambda V_{q_2}$$

3.
$$q_1 = q_2 \Leftrightarrow S_{q_1} = S_{q_2} \text{ ve } V_{q_1} = V_{q_2}$$

dır. Böylece (K,= +,×) dörtlüsüne Kuaterniyonlar cümlesi denir. Bir kuaterniyonunun eşleniği $K_{\bar{q}} = S_q - V_q$ ve normu da $\|q\| = q \times K_q$ dır [18].

$e_0, e_1, e_2, \ldots, e_7$, R^8 ın standart bazı olsun Bu durumda $\alpha \in R^8$ elemanı

$$\alpha = Ae_0 + X \tag{II.8.1}$$

şeklinde yazılabilir. Burada $A \in R$ ve X ,$e_1, \ldots, e_7$ 'nin bir lineer kombinasyonudur. Bir Cayley sayısı $X = (q_1, q_2)$ sıralı kuaterniyon çiftidir. Çarpma ve toplama aşağıdaki gibi tanımlanır;

$$\begin{aligned} (q_1, q_2) + (q_1', q_2') &= (q_1 \pm q_1', q_2 \pm q_2') \\ (q_1, q_2)(q_1', q_2') &= (q_1 q_1' - \overline{q_2'} q_2, q_2' q_1 + q_2 \overline{q_1'}) \end{aligned} \tag{II.8.2}$$

Burada $\bar{q}$, q nun konjugesini göstermektedir.

Bir Cayley sayısının eşleniği $\overline{X} = (\bar{q}_1, -q_2)$ dir. Buradan

$$X\overline{X} = (q_1 \bar{q}_1 + \overline{q_2} q_2, 0) \text{ ve } |X|^2 = q_1 \overline{q_1} + q_2 \overline{q_2} \tag{II.8.3}$$

C Cayley sayıları göstermek üzere $X, Y \in C$ için

$$X \Lambda Y = (\overline{Y} X - \overline{X} Y)/2 \text{ ve } \langle X, Y \rangle = (X\overline{Y} + Y\overline{X})/2 \tag{II.8.4}$$

ile tanımlanır[15]. Cayley sayılarının cümlesi bir cebir yapısına sahiptir. Ayrıca

$$X.Y = -\langle X, Y \rangle + X \Lambda Y$$

ve

$$X.(X.X') = (X.X).X' \quad (X'.X).X = X'(X.X)$$

eşitlikleri vardır. Eğer bir $X = (q_1, q_2)$ Cayley sayısında q_1 reel ve $q_2 = 0$ ise X e reeldir denir. Eğer sadece imajiner ise X e imajiner dir denir ve İmC ile gösterilir.

$X, Y \in \mathrm{İmC}$ $\langle X,Y\rangle = 0$ ise $X\Lambda Y = \overline{Y}X = -\overline{X}Y$ sağlanır. Bütün imajiner sayıların formu C nin altuzayıdır.

Şimdi E^7 de

$$S^6 = \left\{X \in E^7 \middle| \langle X,X\rangle = 1\right\}$$

S^6 birim küresini ve S^6 üzerinde g tensör alanını gözönüne alalım. Bu durumda $X \in S^6$ da $T_{S^6}(X)$ tanjant uzayı X e dik E^7 nin altuzayı ile aynı olur. Yani

$$V_X = \left\{Y \in U^7 \middle| (X,Y) = 0, X \in S^6\right\}$$

dır. $T_{S^6}(X)$ üzerinde J_X endomorfizmini $Y \in T_{S^6}(X)$ için

$$J_X Y = X\Lambda Y$$

ile tanımlayalım. Bu durumda

$$\begin{aligned} J_X(Y+Z) &= X\Lambda(Y+Z) \\ &= X\Lambda Y + X\Lambda Z \\ &= J_X Y + J_X Z \end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned} J_X(\lambda Y) &= X\Lambda\lambda Y \\ &= \lambda X\Lambda Y \\ &= \lambda J_X Y \end{aligned}$$

olduğundan J_X lineerdir. Diğer taraftan

$$\begin{aligned} J_X^2(Y) &= J_X(X\Lambda Y) \\ &= X\Lambda(X\Lambda Y) \\ &= X.(X\Lambda Y) + \langle X.X\Lambda Y\rangle \\ &= X.(X\Lambda Y) \\ &= (X.X).Y \\ &= -\langle X,X\rangle Y \\ &= -Y \end{aligned}$$

olduğundan $J_X^2 = -I$ dır. Böylece J_X hemen hemen kompleks yapıdır ve S^6 hemen hemen kompleks manifolddur.

S^6 için

$$\begin{aligned} g(J_X Y, J_X Z) &= g(X\Lambda Y, X\Lambda Z) \\ &= \begin{vmatrix} g(X,X) & g(X,Z) \\ g(Y,X) & g(Y,Z) \end{vmatrix} \end{aligned}$$

$$= g(Y,Z)g(X,X)$$
$$= g(Y,Z)$$

dir. Böylece S^6 hemen hemen Hermityen manifolddur.

Şimdi S^6 nın nearly Kaehler manifold olduğunu gösterelim ;

$$\begin{aligned}(\nabla_Y J_X)Y &= \nabla_Y J_X Y - J_X \nabla_Y Y\\ &= \nabla_Y X \Lambda Y - X \Lambda \nabla_Y Y\\ &= \nabla_Y X \Lambda Y + X \Lambda \nabla_Y Y - X \Lambda \nabla_Y Y\\ &= 0\end{aligned}$$

dır. Bu ise S^6 nın nearly Kaehler manifold olduğunu gösterir [9].

II.8.2 Örnek. C^n n-boyutlu kompleks vektör uzayı olsun. $C^{n+1} - \{0\}$ üzerinde bir denklik bağıntısını

$$Z = (Z_k) \sim W = (W_k) \Leftrightarrow Z_k = \lambda W_k \quad 0 \neq \lambda \in C$$

ile tanımlayalım. Bu denklik sınıflarının cümlesine n-boyutlu **kompleks projektif uzay** denir ve $IP^n(C)$ ile gösterilir

$$\pi \; : \; C^{n+1} - \{0\} \to C^{n+1} - \{0\}/\sim .$$
$$U_j^* = \{Z | Z_j \neq 0\} \subset (C^{n+1} - \{0\}) \text{ için } \pi(U_j^*) = U_j$$

ve

$$\varphi_\lambda : C^{n+1} - \{0\} \to C^{n+1} - \{0\}$$

$\varphi_\lambda(Z) = \lambda Z$ ile tanımlı dönüşüm olsun. $\varphi_\lambda^{-1} = \varphi_{1/\lambda}$ olduğundan φ_λ bir homeomorfizmdir.

$U^* \subset C^{n+1} - \{0\}$ olduğundan

$$[U^*] = \bigcup_{\lambda \in C} \varphi_\lambda(U^*)$$

dır. $\varphi_\lambda(U^*)$ların her biri açık olduğundan $[U^*]$ açıktır. Bu durumda $\sim$ bağıntısı açıktır [13]. Dolayısıyla π açıktır. $\pi(U_j^*) = U_j$ ve bu açıklar $C^{n+1} - \{0\}$ uzayını örter.

$X = C^{n+1} - \{0\}$ diyelim. $X \times X \subset C^{n+1} \times C^{n+1}$ üzerinde

$$f(Z,W) = f(Z_1,\ldots,Z_n,W_1,\ldots,W_n) = \sum_{i \neq j} |Z_i W_j - Z_j W_i|$$

fonksiyonunu tanımlayalım. Bu durumda

fonksiyonunu tanımlayalım. Bu durumda

$$f(Z,W)=0 \quad \Leftrightarrow \quad Z=\lambda W$$

olacak şekilde $\lambda \in C$ olmasıdır. Bu ise $Z\sim W$ olması ile eşdeğerdir. Buradan

$$R=\{(Z,W)|Z\sim W\}=f^{-1}(0)$$

cümlesi kapalıdır. Böylece $C^{n+1}-\{0\}/_{\sim}$ uzayı Hausdorff dur[13].

Denklik bağıntısı açık olduğundan $\pi(U_j^*)=U_j\subset C^{n+1}-\{0\}/_{\sim}$ açıktır.

Böylece

$$\varphi_i: U_i \rightarrow C^n$$

$$(z_1,\ldots,z_n)\rightarrow \varphi_i([z_i])=\left(\frac{z_1}{z_i},\ldots,\frac{z_{i-1}}{z_i},\frac{z_{i+1}}{z_i}\ldots,\frac{z_{n+1}}{z_i}\right)$$

$z_i \neq 0$ olduğundan φ_i $1-1$, örten ve süreklidir. Buradan φ_i homeomorfizmdir. $U_i \cap U_j$ üzerinde

$$\varphi_i o \varphi_j^{-1}: C^n \rightarrow C^n$$

$$(z_1,\ldots,z_n)\rightarrow[(z_1,\ldots,z_{j-1},1,z_{j+1},\ldots,z_n)]$$

$$\downarrow$$

$$\left(\frac{z_1}{z_j},\ldots,\frac{z_{j-1}}{z_j},\frac{1}{z_j},\frac{z_{j+1}}{z_j},\ldots,\frac{z_n}{z_j}\right)$$

olmak üzere $\varphi_i o \varphi_j^{-1}$ holomorfiktir. Böylece $IP^n(C)$ kompleks manifolddur. Burada $\left(\frac{z_1}{z_j},\ldots,\frac{z_{j-1}}{z_j},\frac{z_{j+1}}{z_j},\ldots,\frac{z_n}{z_j}\right)$ koordinatlarına $IP^n(C)$ nin inhomojen koordinatları ve $(z_1,\ldots,z_n)$ koordinatlarına da homojen koordinat sistemi denir[13].

II.8.3. Örnek. $\tau_1,\tau_2,\ldots\tau_{2n}\in C^n$ lineer bağımsız reel vektörler olsun. Bu taktirde

$$\Gamma=\left\{Z \middle| Z=\sum_{i=1}^{2n}k_i\tau_i \quad ,k_i\in \mathrm{Z}\right\}$$

C^n 'nin toplam grubunun altgrubudur. $Z\sim Z' \Leftrightarrow Z-Z'\in\Gamma$ bağıntısını gözönüne alalım.$Z,Z'\in C^n$ için bu bağıntı bir denklik bağıntısıdır. denklik sınıflarının $T^n=C^n/\sim$ cümlesi bir topolojik uzaydır öyleki

$$\pi_T: C^n \rightarrow T^n$$

kanonik projeksiyonu süreklidir. T^n topolojik uzayına n-boyutlu **kompleks tor** denir.

$Z_0 \in \Gamma$ ve $U \subset C^n$ için

$$U + Z_0 = \{Z + Z_0 | Z \in U\}$$

olsun. Eğer U açık ise $U + Z_0$ açıktır. Diğer taraftan

$$\pi(U) = \{Z \in C^n | Z - Z' \in \Gamma, Z' \in U\} = \bigcup_{Z_0 \in \Gamma} (U + Z_0)$$

olduğundan π açık dönüşümdür.

$Z_0 \in C^n$ keyfi bir nokta olsun. Bu taktirde

$$F_{Z_0} = \left\{ Z \middle| Z = Z_0 + \sum_{i=1}^{n} r_i \tau_i \quad r_i \in R \quad -\frac{1}{2} < r_i < \frac{1}{2} \right\}$$

cümlesi C^n de açıktır. $Z, Z' \in F_{Z_0}$ noktaları için

$$Z - Z' = \sum_{i=1}^{2n} (r_i - r_i') \tau_i \quad i = 1 \ldots 2n \quad |r_i - r_i'| < 1$$

dır. O halde Z ve Z' sadece eşit olduklarında denktirler Yani

$$\pi|_{F_{Z_0}} : F_{Z_0} \to U_{Z_0} = \pi(F_{Z_0}) \subset T^n$$

birebirdir. Buradan

$$\varphi_{Z_0} = \left(\pi|_{F_{Z_0}}\right)^{-1} : U_{Z_0} \to F_{Z_0} \subset C^n$$

torlar için kompleks koordinat sistemidir ve bütün U_{Z_0} ların cümlesi toru tamamen örter. Şimdi T^n uzayının Hausdorff olduğunu gösterelim;

$$X_1 = \pi(Z_1) \neq \pi(Z_2) = X_2$$

olsun. Bu durumda

$$Z_1 - Z_2 = \sum_{i=1}^{2n} k_i \tau_i + \sum_{i=1}^{2n} r_i \tau_i$$

yazılabilir. Burada $i=1 \ldots 2n$ $k_i \in Z$ $, 0 \leq r_i \leq 1$ üstelik r_i lerin hepsi aynı zamanda sıfır değildir.$r_1 \neq 0$ $\varepsilon > 0$ ve $2\varepsilon < r_1 < 1 - 2\varepsilon$ olsun. Bu durumda

$$U = \left\{ Z \middle| Z = \sum_{i=1} \bar{r}_i \tau_i \quad |\bar{r}| < \varepsilon \right\}$$

açıktır ve buradan

$$U_1(Z_1) = U_1 + Z_1 \quad U_2(Z_2) = U_2 + Z_2$$

açık komşuluklarıdır. Şimdi kabul edelim ki

$$\pi(U_1)\cap\pi(U_2)\neq 0$$

olsun. Bu durumda $Z'\sim Z''$ olacak şekilde $Z'\in U_1$ $Z''\in U_2$ noktaları vardır. Böylece

$$Z'=Z_1+\sum_{i=1}^{2n}r_i'\tau_i \quad Z''=Z_2+\sum_{i=1}^{2n}r_i''\tau_i \quad |r'|<\varepsilon \quad |r''|<\varepsilon$$

dır. Dolayısıyla

$$Z'-Z''=(Z_1-Z_2)+\sum_{i=1}^{2n}(r'-r'')\tau_i$$

$$=\sum_{i=1}^{2n}k_i\tau_i+\sum_{i=1}(r_i+(r_i'-r_i''))\tau_i$$

dır.

$$1>r_1+2\varepsilon>|r_1+(r_1'-r_1'')|>r_1-2\varepsilon$$

olduğundan $r_1+(r_1'-r_1'')$ tam sayı olmaz. Bu ise çelişkidir. Bu nedenle $\pi(U_1)$ ve $\pi(U_2)$ ayrıktır.

Şimdi

$$\varphi_{Z_1}o\varphi^{-1}{}_{Z_2}=\varphi_{Z_1}o\pi \quad : \quad \varphi_{Z_2}(U_{Z_1}\cap U_{Z_2})\to\varphi_{Z_1}(U_{Z_1}\cap U_{Z_2})$$

bir topolojik dönüşümdür. Burada

$$\varphi_{Z_1}o\varphi^{-1}{}_{Z_2}(Z)=Z+\sum k_i(Z)\tau_i$$

ve k_i fonksiyonlarının değerleri tam sayıdır. $\{\tau_1,\tau_2,\ldots\tau_{2n}\}$ C^{n}' uzayının bir reel bazı olduğundan k_i sürekli ve sabit olmalıdır. Böylece T^n bir kompleks manifolddur [19]

II.8.4. Örnek. n-boyutlu C^n kompleks uzayını ve C^n üzerinde

$$ds^2=\sum_{j=1}^{n}dz^j d\bar{z}^j$$

metriğini gözönüne alalım. Buradan temel 2-formun tanımından

$$\phi=\sum_{j=1}^{n}dz^j\wedge d\bar{z}^j$$

dır. Böylece

$$d\phi=\sum_{j=1}^{n}d(dz^j\wedge d\bar{z}^j)$$

$$d\phi = \sum_{j=1}^{n} d\left(dz^j \Lambda d\bar{z}^j\right)$$

ve $d^2 = 0$ olduğundan

$$d\phi = 0$$

dır. Bu ise n-boyutlu C^n kompleks uzayının bir Kaehler manifold olduğunu gösterir[9].

II.8.5. Örnek. $IP^n(C)$ Örnek II.8.2 de tanımlanan kompleks projektif uzay ve $z_0, \ldots, z_n$ $P^n(C)$de homojen koordinat sistemi olsun. Her j indisi için $Z_j \neq 0$ U_j $P^n(C)$ uzayının bir açık altcümlesi olmak üzere U_j üzerinde

$$t_j^k = \frac{z_k}{z_j} \quad j,k = 0,1,\ldots,n$$

lokal koordinat sistemi ve $f_j = \sum_{k=0}^{n} t_j^k \bar{t}_j^k$ fonksiyonunu gözönüne alalım. Bu durumda $U_j \cap U_k$ üzerinde

$$f_j = \sum_{i=o}^{n} t_j^i \bar{t}_j^i = \sum_{i=o}^{n} \left(t_k^i \bar{t}_k^i\right) t_j^k \bar{t}_j^k = f_k t_j^k \bar{t}_j^k$$

dır. Böylece

$$\log f_j = \log f_k + \log t_j^k + \log \bar{t}_j^k$$

t_j^k , $U_j \cap U_k$ üzerinde holomorfik olduğundan

$$d'' \log t_j^k = 0 \quad d' \log \bar{t}_j^k = d'' \log t_j^k = 0$$

olur ve

$$d'd'' = -d''d'$$

olduğundan da

$$d'd'' \log f_j = d'd'' \log f_k$$

dır. Önerme II.5.4 den

$$\phi = -4id'd'' \log f_j$$

dır. Diğer taraftan $t^\alpha = t_0^\alpha$ olmak üzere

$$f_0 = \sum_{j=o}^{n} t_0^j \bar{t}_0^j = 1 + \sum_{i=o}^{n} \left(t^\alpha \bar{t}^\alpha\right)$$

olduğundan

$$\phi = -4i \sum_{\alpha,\beta=1} \frac{\partial^2 \log f_0}{\partial^\alpha \partial^{\bar\beta}} dt^\alpha \Lambda d\bar{t}^\beta$$

dır. Böylece

$$f_0 = \log\left(1 + \sum_{i=o}^{n} |t^\alpha|^2 \right)$$

olur. Bu durumda $IP^n(C)$ bir Kaehler manifold olur. Şimdi Kaehler metriğini ifade edelim.

$$\bar\partial f_0 = \left(1 + \sum_{i=o}^{n} |t^\alpha|^2 \right)^{-1} \left(\sum t^\alpha d\bar{t}^\alpha \right)$$

$$\partial\bar\partial f_0 = \left(1 + \sum_{i=o}^{n} |t^\alpha|^2 \right)^{-1} \sum dt^\alpha \Lambda d\bar{t}^\alpha - \left(1 + \sum_{i=o}^{n} |t^\alpha|^2 \right)^{-2} + \sum \bar{t}^\alpha dt^\alpha \Lambda \sum t^\alpha d\bar{t}^\alpha$$

eşitliklerini gözönüne alalım. Buradan

$$\phi = -4i \frac{1}{\left(1 + \sum_{i=o}^{n} |t^\alpha|^2 \right)} \left(\left(1 + \sum_{i=o}^{n} |t^\alpha|^2 \right) - \bar{t}^\alpha t^\alpha \right) dt^\alpha \Lambda d\bar{t}^\alpha$$

veya

$$\phi = -4i \frac{\sum dt^\alpha \Lambda d\bar{t}^\alpha + \sum t^\alpha \bar{t}^\alpha \sum dt^\alpha \Lambda d\bar{t}^\alpha - \sum \bar{t}^\alpha dt^\alpha \Lambda t^\alpha d\bar{t}^\alpha}{\left(1 + \sum t^\alpha \bar{t}^\alpha\right)^2}$$

dır.

$$ds^2 = 2 \sum g_{\alpha\bar\beta} dz^\alpha dz^{\bar\beta}$$

olduğundan

$$ds^2 = 4 \frac{\left(1 + \sum t^\alpha \bar{t}^\alpha\right)\left(\sum dt^\alpha d\bar{t}^\alpha\right) - \left(\sum \bar{t}^\alpha dt^\alpha\right)\left(\sum t^\alpha d\bar{t}^\alpha\right)}{\left(1 + \sum t^\alpha \bar{t}^\alpha\right)^2}$$

elde edilir. Buna Study-Fubini metriği denir[9].

III.BÖLÜM

CR-YAPILAR

CR-yapılara ayrılan bu bölümde önce CR-yapı , CR-manifoldların tanımı ve herhangi bir manifoldun CR-manifold olma durumu tartışılacaktır. Daha sonraki iki alt bölümde ise kompleks manifoldların genel altmanifoldları ve anti-holomorfik altmanifoldları tanımlanacaktır. Ayrıca kompleks manifoldların genel altmanifoldlarının CR-manifold olduğu ispatlanacak ve anti-holomorfik altmanifoldlar için distribüsyonların integrallenebilirliği üzerine bir teorem verilecektir.

III.1. CR-Manifoldlar

III. 1.1. Tanım. *M* (*2n+s*)-boyutlu reel diferensiyellenebilir manifold ve *M* üzerinde reel *2n* boyutlu diferensiyellenebilir distribüsyon *D* olsun. Kabul edelim ki *D*

$$J:D\to D,\quad J^2=-I$$

dönüşümüne sahip vektör demeti olsun. (Burada *I* *D* üzerinde birim dönüşümdür) Bu durumda *M* hemen hemen kompleks distribüsyona sahiptir denir ve *D* ye *M* üzerinde hemen hemen kompleks distribüsyon denir [2].

III. 1.2. Tanım. *M* diferensiyellenebilir manifold, (*D,J*) *M* üzerinde hemen hemen kompleks distribüsyon olsun . Eğer $X,Y\in\Gamma(D)$ için

$$[JX,JY]-[X,Y]\in\Gamma(D) \qquad \text{(III.1.1)}$$

ve

$$[J,J](X,Y)=[JX,JY]-[X,Y]-J([X,JY]+[JX,Y])=0 \qquad \text{(III.1.2)}$$

şartları sağlanıyorsa (D,J) ye M üzerinde reel CR-yapıdır denir [2].

III. 1.3. Tanım. M bir diferensiyellenebilir manifold ve $T^c M, M$ nin kompleksleştirilmiş tanjant demeti olsun. Eğer $T^c M$ nin kompleks altdemeti H için aşağıdaki şartlar sağlanıyor ise H ya M üzerinde kompleks CR-yapıdır denir [2].

i) $$H \cap \overline{H} = \{0\} \qquad \text{(III.1.3)}$$

ii) H involutive dır. Yani

$$U,V \in \Gamma(H) \Rightarrow [U,V] \in \Gamma(H) \qquad \text{(III.1.4)}$$

III.1.1. Teorem. M bir diferensiyellenebilir manifold olsun. Bu durumda M nin reel CR-yapıya sahip olması için gerek ve yeter şart M nin kompleks CR-yapıya sahip olmasıdır[2].

İspat.($\Rightarrow$) Kabül edelim ki M reel CR-yapıya sahip olsun. Bu durumda

$$H = \left\{X - \sqrt{-1}JX; X \in \Gamma(D)\right\} \qquad \text{(III.1.5)}$$

ile tanımlayalım. Buradan $H \cap \overline{H} = \{0\}$ olur.

Eğer

$$U = X - \sqrt{-1}JX \quad , \quad V = Y - \sqrt{-1}JY$$

alınırsa

$$[U,V] = [X,Y] - [JX,JY] - \sqrt{-1}\{[X,JY] - [JX,Y]\} \qquad \text{(III.1.6)}$$

elde edilir. (II.1.2) den

$$[U,V] = [X,Y] - [JX,JY] - \sqrt{-1}\{[X,Y] - [JX,JY]\} \qquad \text{(III.1.7)}$$

olur. Buradan $[U,V] \in \Gamma(H)$ dır. Böylece M kompleks CR-yapıya sahiptir.

($\Leftarrow$) Şimdi kabul edelim ki M kompleks CR-yapıya sahip olsun. Bu durumda D distribüsyonunu

$$D = \{X = \operatorname{Re} U; U \in \Gamma(H)\} \qquad \text{(III.1.8)}$$

ve J dönüşümünü de

$$J : D \to D, JX = \mathrm{Re}(\sqrt{-1}U) \tag{III.1.9}$$

ile tanımlayalım. Böylece $J^2 = -I$,dır.

Diğer taraftan (III.1.7) ve (III.1.9) dan

$$[JX, JY] - [X, Y] = -\mathrm{Re}([U, V]) \in \Gamma(D) \tag{III.1.10}$$

dır. Burada X=Re(U), Y=Re(V) olur. Böylece (III.1.1) şartı sağlanır. (III.1.10) da JY yerine Y alınırsa

$$[JX, Y] + [X, JY] = \mathrm{Re}(\sqrt{-1}[U, V]) \in \Gamma(D) \tag{III.1.11}$$

elde edilir. (III.1.10) ve (III.1.11) dan

$$\begin{aligned} -J\{[JX, Y] + [X, JY]\} &= -\mathrm{Re}(\sqrt{-1}(\sqrt{-1}[U, V])) \\ &= \mathrm{Re}([U, V]) \end{aligned}$$

dır. Buradan (III.1.2) den

$$[J, J](X, Y) = [JX, JY] - [X, Y] - J([X, JY] + [JX, Y]) = 0$$

elde edilir.

III.1.4. Tanım. M bir diferensiyellenebilir manifold olsun. Eğer M, CR-yapıya sahip ise M ye CR-manifold denir [2].

III.1.5. Tanım. M n-boyutlu bir manifold olsun. M üzerinde (1,1) mertebeli bir tensör alanı

$$\phi^3 + \phi = 0 \tag{III.1.12}$$

özelliğini sağlarsa ϕ ye f-yapı denir. Eğer $n=r$ ise f-yapı manifoldun hemen hemen kompleks yapısını verir [9].

Şimdi

$$P = -\phi^2, Q = \phi^2 + I \tag{III.1.13}$$

alalım. Bu durumda

$$P+Q=I, P^2=P, Q^2=Q$$
$$\phi P=P\phi=\phi, Q\phi=\phi Q=0 \tag{III.1.14}$$

elde edilir. Bu denklemler gösterir ki P ve Q operatörleri manifoldun her noktasındaki tanjant uzaya uygulanan komplemant operatörlerdir. Bu durumda manifold üzerinde P ve Q operatörlerine karşılık gelen sırasıyla $D, D^{\perp}$ distribüsyonları vardır. ϕ nin rankı, r olarak alındığında D, r-boyutlu ve $D^{\perp}$,$(n-r)$ boyutludur [9].

Kabul edelim ki M ϕ f-yapısına sahip $(2n+s)$ reel boyutlu manifold olsun. $\{\varsigma_1,\ldots,\varsigma_s\}$ vektör alanları ve $\{\eta^1,\ldots,\eta^s\}$ 1-formları

$$\phi^2=-I+\sum_{l=1}^{s}\eta^l\otimes\varsigma_l \quad ;\phi\varsigma_l=0 \tag{III.1.15}$$

$$\eta^l(\varsigma_m)=\delta^l_m \quad ; \quad \eta^l o\phi=0 \tag{III.1.16}$$

özelliğini sağlasın. Burada I, TM üzerinde birim dönüşümdür. Bu durumda M, $(\phi,\eta^l,\varsigma_l)$ tensör alanları tarafından verilen komplemant çatı ile birlikte f- yapıya sahiptir denir [2].

D distribüsyonu

$$D=\left\{X\in\Gamma(TM)\middle|\eta^l(X)=0, l=1\ldots s\right\} \tag{III.1.17}$$

ile tanımlandığında (III.1.15) eşitliği gözönüne alınırsa ϕ,D üzerinde hemen hemen J kompleks yapıdır. Böylece M, $\forall p\in M$ için boy$D_p=2n$ boyutlu kompleks distribüsyonuna sahiptir[2].

$(\phi,\eta^l,\varsigma_l)$ çatısı ile birlikte f-yapının torsiyon tensör alanı, $[\phi,\phi]$ ϕ nin Nijenhuis tensör alanı olmak üzere

$$S=[\phi,\phi]+2\sum_{l=1}^{s}d\eta^l\otimes\varsigma_l \tag{III.1.18}$$

ile tanımlanır [2].

III.1.6. Tanım. M bir manifold ve D, M üzerinde kompleks distribüsyon olsun. $\forall X,Y\in\Gamma(D)$ için

$$S(X,Y)=0 \tag{III.1.19}$$

ise $(\phi, \eta^l, \varsigma_l)$ ya D-normal dir denir [2].

III.1.1. Önerme. M komplemant çatı ile birlikte D-normal f-yapıya sahip manifold olsun. Bu durumda M CR-manifolddur [2].

İspat. III.1.6 tanımından

$$S(X,Y)=0$$

ve

$$\eta^m(S(X,Y)) = \eta^m\left([\phi,\phi](X,Y)+2\sum_{l=1}^{s} d\eta^l \otimes \varsigma_l(X,Y)\right)$$

dır. Burada

$$d\eta^l(X,Y)=\frac{1}{2}\left(X\eta^l(Y)-Y\eta^l(X)-\eta^l[X,Y]\right)$$
$$=-\frac{1}{2}\eta^l[X,Y]$$

olduğundan

$$\eta^m(S(X,Y))=\eta^m\left([\phi,\phi](X,Y)-\sum_{l=1}^{s}\eta^l([X,Y])\varsigma_l\right)$$
$$=\eta^m(\ [\phi X,\phi Y]+\phi^2[X,Y]-\phi[X,\phi Y]$$
$$-\phi[\phi X,Y]-\sum_{l=1}^{s}\eta^l([X,Y]\varsigma_l\ )$$

dır. (III.1.15) den

$$=\eta^m(\ [\phi X,\phi Y]-[X,Y]+\sum_{l=1}^{s}\eta^l([X,Y]\varsigma_l-\phi[X,\phi Y]$$
$$-\phi[\phi X,Y]-\sum_{l=1}^{s}\eta^l([X,Y]\varsigma_l\ )$$
$$0=\eta^m([JX,JY]-[X,Y])$$

elde edilir. (III.1.17) den

$$[JX,JY]-[X,Y]\in\Gamma(D)\quad,\quad[X,JY]+[JX,Y]\in\Gamma(D)$$

ve

$$[J,J](X,Y)=[JX,JY]-[X,Y]-J([X,JY]+[JX,Y])=0$$

olur. Böylece ispat tamamlanır.

M, (*2n+s*) boyutlu CR-manifold ve (*D,J*), $boyD_p = 2n$ ile birlikte *M* üzerinde CR-yapı olsun. Bu taktirde *M* nin bir *U* komşuluğunda *D* ye ait olmayan lineer bağımsız vektör alanlarının bir cümlesi $\{\varsigma_1,\ldots,\varsigma_s\}$ seçilebilir. Bu durumda $\{\eta^1,\ldots,\eta^s\}$, *U* üzerinde diferensiyel 1-formlar, α *U* üzerinde diferensiyellenebilir fonksiyonlar ve $X \in \Gamma(D)$ olmak üzere

$$\eta^l\left(X + \sum_{m=1}^{s} \alpha^m \varsigma_m \right) = \alpha^l \tag{III.1.20}$$

ile tanımlanabilir. Buradan

$$\eta^l(X) = 0 \,,\; \eta^l(\varsigma_m) = \delta^l_m$$

elde edilir. Diğer taraftan *M* üzerinde

$$Y = X - \sum_{m=1}^{s} \eta^m(X)\varsigma_m$$

ile tanımlanan her *Y* vektör alanı *D* ye ait olduğundan *U* üzerinde (1,1) mertebeli bir tensör alanı $X \in \Gamma(TM)$ için

$$\phi X = J\left(X - \sum_{m=1}^{s} \eta^m(X)\varsigma_m\right) \tag{III.1.21}$$

dır [2].

III.1.2 Önerme. *M* bir CR-manifold olsun. *M* nin her *U* koordinat komşuluğunda komplemant çatı ile birlikte *D*-normal *f*-yapı vardır [2].

III.1.7. Tanım. *M* bir manifold olsun. *M* nin bir *U* komşuluğunda (*D,J*) CR-yapısı üzerinde $(\phi, \eta^l, \varsigma_l)$ *f*-yapısına komplemant çatı ile birlikte birleşik *f*-yapı denir [2].

III.1.1 Lemma. $(\phi, \eta^l, \varsigma_l)$ ve $(\overline{\phi}, \overline{\eta^l}, \overline{\varsigma_l})$ birleşik *f*-yapılar olsun. Bu taktirde *M* manifoldunun bir *U* koordinat komşuluğunda, diferensiyellenebilir fonksiyonların tersinir matrisi, $\left[\lambda^m_l\right]$, $\left[\lambda^m_l\right]$ nin ters matrisi $\left[\overline{\lambda^l_m}\right]$ ve $\rho_l \in \Gamma(D)$ olmak üzere

$$\overline{\varsigma_l} = \rho_l + \sum_{m=1}^{s} \lambda_l^m \varsigma_m$$

$$\overline{\eta^l} = \sum_{m=1}^{s} \overline{\lambda_m^l}\, \eta^m \qquad \text{(III.1.22)}$$

$$\overline{\phi} + \sum_{l=1}^{s} \overline{\eta^l} \otimes J\rho_l = \phi$$

dır [2].

M nin bir U koordinat komşuluğunda (D,J) CR-yapısı üzerinde $(\phi, \eta^l, \varsigma_l)$ birleşik f-yapısı için (0,2) mertebeli G^a tensör alanını $X,Y \in \chi(U)$ için

$$G^l(X,Y) = d\eta^l(\phi X, Y) \qquad \text{(III.1.23)}$$

ile tanımlayalım. Bu durumda aşağıdaki önerme verilebilir.

III.1.3. Önerme. M bir manifold ve D M üzerinde hemen hemen kompleks distribüsyon olsun. $X,Y \in \Gamma(D)$ için

$$G^l(X,Y) = G^l(Y,X)$$
$$G^l(JX,JY) = G^l(X,Y) \qquad \text{(III.1.24)}$$

dır [2].

İspat. $X,Y \in \Gamma(D)$ için (I.3.16) dan

$$\begin{aligned} G^l(X,Y) &= d\eta^l(\phi X, Y) \\ &= -\frac{1}{2}\eta^l([\phi X, Y]) \\ &= -\frac{1}{2}\eta^l([JX, Y]) \\ &= \frac{1}{2}\eta^l([Y, JX]) \end{aligned}$$

olur. (III.1.17) den

$$\eta^l(JX) = \eta^l(Y) = 0$$

ve

$$\eta^l([JX,Y] + [X,JY]) = 0$$

elde edilir. Böylece ispat tamamlanır.

Şimdi aynı CR-yapı üzerinde $(\overline{\phi}, \overline{\eta^l}, \overline{\varsigma_l})$ birleşik f-yapıyı gözönüne alalım ve bir diğer tensör alanını $\overline{G^a}$ ile gösterelim. Bu durumda (III.1.22) den

$$
\begin{aligned}
\overline{G^l}(X,Y) &= d\overline{\eta^l}(\phi X,Y) \\
&= -\frac{1}{2}\overline{\eta^l}([JX,Y]) \\
&= -\frac{1}{2}\overline{\lambda^l_m}\eta^m([JX,Y]) \\
&= \overline{\lambda^l_m}G^m(X,Y)
\end{aligned}
$$

elde edilir .

III.1.4. Önerme. M $(2n+s)$-boyutlu CR-manifold ve (D,J), $boyD_p = 2n$ ile birlikte M üzerinde CR-yapı olsun. Kabul edelim ki $\forall X \in \Gamma(D)$ için { l=1,...,s} $G^l(X,X) \neq 0$ olsun. Bu durumda D distribüsyonu integrallenebilir değildir ve D nin integral manifoldunun boyutu $(n+1)$ den azdır [2].

İspat. $X,Y \in \Gamma(D)$ için $[JX,Y] \notin \Gamma(D)$ olduğundan D integrallenebilir değildir.

Kabul edelim ki M^* D nin (n+1) boyutlu integral altmanifoldu olsun. Bu durumda M^*üzerinde $\{X_1,...,X_n,JX_1\}$, çatısı vardır. Hipotezde $G^l(X,X) \neq 0$ olduğundan $\eta^l([JX_1,X_1]) \neq 0$ olur. Buradan $[JX_1,X_1] \notin \Gamma(D)$ elde edilir. Bu ise $[JX_1,X_1] \in \Gamma(TM^*)$ olması ile çelişir. Böylece M^* ın boyutu $(n+1)$ den az olmalıdır.

III.1.1. Sonuç. M $(2n+1)$-boyutlu CR-manifold ve M üzerinde pozitif veya negatif tanımlanmış (0,2) mertebeli tensör alanı $G^l(X,Y) = d\eta^l(\phi X,Y)$ olsun. Bu durumda D integrallenebilir değildir ve D nin integral altmanifoldunun boyutu $(n+1)$ den azdır[2].

M $(2n+s)$-boyutlu manifold ve ϕ f-yapısının rankı $2n$ olsun. Bu durumda (II.1.13) ve (II.1.14) den

$$P = -\phi^2 \quad , \quad Q = I + \phi^2$$

ile P ve Q izdüşümlerini tanımlayalım. Buradan

$$P+Q=I \quad P^2=P \quad Q^2=Q \quad PQ=QP=0$$

dır. Böylece

$$D=\{X\in\Gamma(TM)|QX=0\} \quad , \quad D^{\perp}=\{X\in\Gamma(TM)|PX=0\} \qquad \text{(III.1.25)}$$

ile tanımlanan D ve $D^{\perp}$ distribüsyonlarına sahip oluruz [2].

III.1.8. Tanım. M reel $(2n+s)$-boyutlu manifold olsun. ϕ bir f-yapı ve Q bir projeksiyon olmak üzere $\forall X,Y\in\Gamma(D)$ için

$$[\phi,\phi](X,Y)=Q([X,Y]) \qquad \text{(III.1.26)}$$

ise ϕ f-yapısına D-normaldir denir[2].

III.1.2. Teorem. M bir reel manifold olsun. Eğer M D-normal f- yapıya sahip ise bu taktirde M CR-manifolddur[2].

İspat. Kabul edelim ki M D-normal f-yapıya sahip manifold olsun. Bu durumda $X,Y\in\Gamma(D)$ için (III.1.26) dan

$$[\phi,\phi](X,Y)-Q([X,Y])=0$$

$$[\phi X,\phi Y]+\phi^2[X,Y]-\phi[X,\phi Y]-\phi[\phi X,Y]-Q([X,Y])=0$$

dır. Burada ϕ yerine J ve (III.1.13) gözönüne alınırsa

$$[JX,JY]-P[X,Y]-\phi[X,JY]-\phi[JX,Y]-Q[X,Y]=0$$

$$[JX,JY]-P[X,Y]-\phi[X,JY]-\phi[JX,Y]-[X,Y]+P[X,Y]=0$$

$$[JX,JY]-\phi[X,JY]-\phi[JX,Y]-[X,Y]=0$$

elde edilir. Buradan da

$$Q\phi=\phi+\phi^3=0$$

kullanılırsa

$$[JX,JY]-[X,Y]\in\Gamma(D) \qquad \text{(III.1.27)}$$

olur. Böylece (III.1.1) elde edilir. (III.1.27) denkleminde JX yerine X alınmasıyla

$$[X, JY] + [JX, Y] \in \Gamma(D)$$

olur Böylece

$$[JX, JY] - [X, Y] - J[X, JY] - J[JX, Y] = 0$$

bulunur. Bu ise (III.1.2) dir. Böylece teorem III.1.1 den ispat tamamlanır.

III.2. Kompleks Manifoldların Genel(Generic) Altmanifoldları

$\overline{M}$ kompleks boyutu p olan bir kompleks manifold ve $\overline{M}$ nin reel boyutu m olan altmanifoldu M olsun. $\overline{M}$ üzerindeki hemen hemen kompleks yapıyı $\bar{J}$ ile gösterelim. Bu durumda $X, Y \in \Gamma(T\overline{M})$ için

$$[\bar{J}, \bar{J}](X, Y) = 0 \tag{III.2.1}$$

dır. $\forall p \in M$ için $D_p = T_M(p) \cap \bar{J}T_M(p)$ olsun. D_p $\bar{J}$ altında $T_M(p)$ nin maksimal invaryant altuzayıdır [2].

III.2.1. Tanım. $\overline{M}$ kompleks boyutu p olan bir kompleks manifold ve $\overline{M}$ nin reel boyutu m olan altmanifoldu M olsun. Eğer

$$D: p \to D_p \subset T_M(p)$$

M üzerinde bir distribüsyon ise M manifolduna Genel (Generic) altmanifold denir. D üzerindeki kompleks yapıyı J ile gösterelim. Bu durumda (D,J) M üzerinde 2n-boyutlu hemen hemen kompleks distribüsyondur [2].

III.2.1. Teorem. $\overline{M}$ kompleks manifold, $\overline{M}$ nin generic altmanifoldu M olsun. Bu durumda M CR-manifolddur[2].

İspat. Göstereceğiz ki M üzerinde (D,J) bir CR-yapıdır. U, M üzerinde bir koordinat komşuluğu olmak üzere U üzerinde $D, D^{\perp}$ ortonormal distribüsyonlarını gözönüne alalım. P ve Q, TM üzerinde D ve $D^{\perp}$ üzerindeki projeksiyon dönüşüm olsun. Bu durumda $X \in \Gamma(TM)$ için

$$X=PX+QX \tag{III.2.2}$$

yazılabilir. Eşitliğin her iki tarafına $\bar{J}$ uygulanırsa $\bar{J}X=\bar{J}PX+\bar{J}QX$ olur. Burada $\bar{J}PX=JPX \in \Gamma(TM), \bar{J}QX \in \Gamma(TM^{\perp})$ dır. ~~(III.2.1) ve (III.2.2)~~ den $\overline{M}$ kompleks manifold olduğundan

$$[\bar{J},\bar{J}](X,Y)=[\bar{J}X,\bar{J}Y]-[X,Y]-\bar{J}[\bar{J}X,Y]-\bar{J}[X,\bar{J}Y]=0$$

olur. $X,Y \in \Gamma(TM)$ olduğundan

$$[\bar{J},\bar{J}](X,Y)=[JX,JY]-[X,Y]-JP\{[JX,Y]-[X,JY]\}$$
$$+\bar{J}Q\{[X,Y]-[X,JY]\}=0$$

dır. teğetsel ve normal bileşenleri ayrı ayrı sıfıra eşit olacağından

$$[JX,JY]-[X,Y]-JP\{[JX,Y]-[X,JY]\}=0$$
$$\bar{J}Q\{[X,Y]-[X,JY]\}=0$$
$$Q\{[X,Y]-[X,JY]\}=0$$

olur. X yerine JX alınırsa

$$Q\{-[X,Y]+[JX,JY]\}=0 \Rightarrow [JX,JY]-[X,Y] \in \Gamma(D)$$

ve buradan

$$[JX,JY]-[X,Y]-(JP+\bar{J}Q)\{[JX,Y]-[X,JY]\}=0$$
$$[JX,JY]-[X,Y]-J\{[JX,Y]-[X,JY]\}=0$$

olur. Böylece (III.1.1) ve (III.1.2) elde edilir.

$\overline{M}$ $(2n+s)$-boyutlu kompleks manifold, $\overline{M}$ nin generic altmanifoldu M olsun. Kabul edelim ki (D,J) Teorem III.2.1. deki CR-yapı olsun. Bu durumda M üzerinde $(\phi, \eta^l, \varsigma_l)$ çatısı birleşen bileşik f-yapısı vardır. Burada ς_l D ye ait olmayan vektör alanları ve η^l D de tanımlı 1-formlardır. Böylece U üzerinde M ye teğet olmayan $N_l=\bar{J}\varsigma_l, (l=1 \ldots s)$ vektör alanları elde edilir. Bu şekilde $(\phi, \eta^l, \varsigma_l)$ f-yapısından indirgenen bağıntıya afin normaller denir. Eğer $(\bar{\phi}, \bar{\eta}^l, \bar{\varsigma}_l)$, (D,J) üzerinde bir başka birleşik f-yapı ve $\overline{N}_l$ vektör alanı ise

$$\overline{\varsigma}_l = \rho_l + \sum_{m=1}^{s} \lambda_l^m \varsigma_m$$

$$\overline{N}_l = J\rho_l + \sum_{m=1}^{s} \lambda_l^m N_m \tag{III.2.3}$$

$$\overline{\eta}^l = \sum_{m=1}^{s} \overline{\lambda}_l^m \eta^m \quad ; \quad \overline{\phi} + \sum_{m=1}^{s} \overline{\eta}^m \otimes J\rho_m = \phi$$

dır.

Eğer boy$T_M(p)^{\perp} = s$ ise Mye afin anti-holomorfik altmanifold denir[2].

III.3. Kompleks Manifoldların Anti-Holomorfik Altmanifoldları

III.1.1. Tanım. $\overline{M}$ kompleks p boyutlu kompleks manifold ve $\overline{M}$ nin reel m-boyutlu reel altmanifoldu M olsun. Eğer M üzerinde aşağıdaki şartları sağlayan D ve$D^{\perp}$ distribüsyonları varsa Mye $\overline{M}$ nin CR-altmanifoldu denir[2].

i) $T_M(p) = D_p \oplus D^{\perp}{}_p$ (III.3.1)

ii) $\bar{J}(D_p) = D_p; \bar{J}(D^{\perp}{}_p) \cap T_M(p) = \{0\}$ (III.3.

Burada $\bar{J}$, $\overline{M}$ üzerindeki hemen hemen kompleks yapıdır.

III.3.2. Tanım. $\overline{M}$ $p=n+s$-boyutlu kompleks manifold olsun. $\overline{M}$ ye gömülü $m=2n+s$ $(\text{boy}_R D^{\perp}{}_p = s, \text{boy}_R D_p = 2n)$ boyutlu CR-altmanifolduna anti-holomorfik altmanifold denir [2].

Şimdi kabul edelim ki $\overline{M}$ nin anti-holomorfik altmanifoldu M olsun. Bu durumda

$$T\overline{M} = D \oplus D^{\perp} \oplus \bar{J}D^{\perp} \tag{III.3.3}$$

dır. Burada $\bar{J}D^{\perp}$ Mye normal demet olarak gözönüne alınır.

$\overline{M}$ nin konneksiyonu $\overline{\nabla}$, M nin konneksiyonu da ∇ olmak üzere $X, Y \in \Gamma(TM)$ için

$$\overline{\nabla}_X Y = \nabla_X Y + h(X, Y) \tag{III.3.4}$$

dır. Buradan $\nabla_X Y \in \Gamma(TM)$, $h(X,Y) \in \Gamma(\bar{J}D^{\perp})$ olur. Böylece ∇ M üzerinde simetrik afin konneksiyon ve h; M üzerinde normal demet değerli 1-formdur. Buna M nin ikinci temel formu denir.

D ve $D^{\perp}$ TM nin P ve Q projeksiyon dönüşümleri yardımıyla tanımlanan distribüsyonları olsun . Bu durumda

$$\begin{aligned} \phi : \Gamma(T\bar{M}) &\to \Gamma(TM) \\ X \quad &\to \phi X = \bar{J}PX \end{aligned} \tag{III.3.5}$$

$$\begin{aligned} \omega : \Gamma(T\bar{M}) &\to \Gamma(\bar{J}D^{\perp}) \\ X \quad &\to \omega X = \bar{J}QX \end{aligned} \tag{III.3.6}$$

dönüşümleri tanımlayalım. Buradan

$$\bar{J}X = \phi X + \omega X \tag{III.3.7}$$

elde edilir. $U \in \Gamma(JD^{\perp}), X \in \Gamma(TM)$ olsun. Böylece

$$\bar{\nabla}_X U = -A_U X + \nabla^{\perp}{}_X U \tag{III.3.8}$$

yazılabilir. Burada $A_U X \in \Gamma(TM), \nabla^{\perp}{}_X U \in \Gamma(JD^{\perp})$ dır. A_U TM nin endomorfizmi ve $\nabla^{\perp}{}_X U, \bar{J}D^{\perp}$ nin afin konneksiyonudur[2].

III.3.1. Teorem. $\bar{M}$ kompleks manifold ve $\bar{M}$ nin anti-holomorfik altmanifoldu M olsun. Bu durumda

i) D distribüsyonunun integrallenebilir olması için gerek ve yeter şart M nin ikinci temel formu için , $X, Y \in \Gamma(D)$ olmak üzere

$$h(X, \bar{J}Y) = h(Y, \bar{J}X) \tag{III.3.9}$$

eşitliğinin sağlanmasıdır.

ii) $D^{\perp}$ distribüsyonunun integrellenebilir olması için gerek ve yeter şart $V, W \in \Gamma(D^{\perp})$ için

$$A_{\bar{J}V} W = A_{\bar{J}W} V \tag{III.3.10}$$

eştliğinin sağlanmasıdır[2].

İspat. $X, Y \in \Gamma(D)$ alalım Bu durumda

$$\overline{\nabla}_X JY = J\overline{\nabla}_X Y$$

olduğundan (III.3.4) ve (III.3.7) den

$$\nabla_X \bar{J}Y + h(X, \bar{J}Y) = \phi(\nabla_X Y) + \omega(\nabla_X Y) + \bar{J}h(X, Y) \qquad \text{(III.3.11)}$$

olur. $h(X,Y) \in \Gamma(\bar{J}D^{\perp})$ olduğundan tanım III.3.1. den $\bar{J}h(X,Y) \in \Gamma(D^{\perp})$ dır.

Böylece

$$h(X, \bar{J}Y) = \omega(\nabla_X Y) \qquad \text{(III.3.12)}$$

elde edilir. Benzer olarak

$$h(Y, \bar{J}X) = \omega(\nabla_Y X) \qquad \text{(III.3.13)}$$

bulunur. ∇ torsiyonsuz (simetrik) konneksiyon olduğundan (III.3.12) ve (III.3.13) den

$$h(X, \bar{J}Y) - h(Y, \bar{J}X) = \omega([X, Y])$$

dır. Böylece (*i*) ispatlanır.

ii) Şimdi (III.3.7) denklemi kullanılarak $W, V \in \Gamma(D^{\perp})$ için

$$\begin{aligned} \bar{J}(\overline{\nabla}_V W) &= \bar{J}(\nabla_V W + h(V, W)) \\ &= \phi(\nabla_V W) + \omega(\nabla_V W) + \bar{J}h(V, W) \end{aligned} \qquad \text{(III.3.14)}$$

elde edilir. (III.3.8) den

$$\overline{\nabla}_V \bar{J}W = -A_{\bar{J}W} V + \nabla^{\perp}{}_V \bar{J}W \qquad \text{(III.3.15)}$$

dır. (III.3.14) ve (III.3.15) den

$$\nabla^{\perp}{}_V \bar{J}W = \omega(\nabla_V W)$$

olur. Böylece (III.3.8) kullanılırsa

$$\overline{\nabla}_V \bar{J}W - \overline{\nabla}_W \bar{J}V = A_{\bar{J}V} W - A_{\bar{J}W} V + \omega([V, W])$$

elde edilir. Diğer taraftan

$$\overline{\nabla}_V \bar{J}W - \overline{\nabla}_W \bar{J}V = \bar{J}([V, W])$$

dır. Buradan (III.3.7) ve (III.3.8) kullanılırsa

$$\phi([V, W]) = A_{\bar{J}V} W - A_{\bar{J}W} V$$

elde edilir. Bu ise (*ii*) nin ispatıdır.

III.3.3. Tanım. M bir anti-holomorfik altmanifold olsun. $X,Y \in \Gamma(TM)$ için

$$S(X,Y) = [\phi,\phi](X,Y) - 2\bar{J}d\omega(X,Y) \qquad \text{(III.3.16)}$$

ile tanımlı S tensör alanına M nin torsiyon tensör alanı denir. Eğer M üzerinde S sıfıra denk olursa M ye normal anti-holomorfik altmanifold denir[2].

III.3.2. Teorem. $\overline{M}$ kompleks manifold ve $\overline{M}$ nin anti-holomorfik altmanifoldu olsun. Bu takdirde M normaldir $\Leftrightarrow A_{N_l} o\phi = \phi o A_{N_l}$ dır. Burada N_l, $\bar{J}D^{\perp}$ nın bazıdır[2].

IV. BÖLÜM

CR-ALTMANİFOLDLAR

Bu bölüm dört altbölümden oluşmaktadır. Birinci altbölümde kompleks altmanifoldlar, Kaehler altmanifoldlar ve total reel altmanifoldlar kısaca tanıtılacak onlara ait genel özellikler verilecektir. İkinci altbölümde Hermit ve Kaehler manifoldların CR-altmanifoldları tanımlanacak, invaryant ve anti-invaryant distribüsyonların integrallenebilirliği tartışılacaktır. Ayrıca invaryant ve anti-invaryant distribüsyonların maksimal integral manifoldlarının Kaehler manifold ve Kaehler manifoldun CR-altmanifoldu üzerinde total jeodezik olma durumu incelenecektir. Üçüncü ve dördüncü altbölümlerde sırasıyla total umbilik CR-altmanifold, pseudo umbilik CR-altmanifold ve normal CR-altmanifoldların karakteristik özellikleri verilecektir.

IV.1. Kaehler Altmanifoldlar

IV.1.1. Tanım. $\overline{M}$ bir kompleks manifold, $\overline{M}$ nin bir altcümlesi M olsun. $f: M \to \overline{M}$ immersiyonu holomorfik ise M ye kompleks altmanifold denir[9].

$\overline{M}$ n-boyutlu Kaehler manifold J ve g $\overline{M}$ üzerinde sırasıyla hemen hemen kompleks yapı ve Hermityen metrik olsun. Bu taktirde g M altmanifoldu üzerinde bir Hermityen metriktir . Bu Hermityen metriğe bağlı olarak M nin temel 2-formu kapalıdır. Böylece $\overline{M}$ nin her kompleks altmanifoldu Kaehlerdir [9].

IV.1.2. Tanım. $\overline{M}$ n-boyutlu Kaehler manifold olsun. $\overline{M}$ nin J kompleks yapısı altında invaryant kompleks (analitik) altmanifolduna Kaehler altmanifold denir. Yani bir Kaehler altmanifold $\forall p \in M$ için

$$JT_M(p) \subset T_M(p)$$
$$JT^{\perp}{}_M(p) \subset T^{\perp}{}_M(p) \qquad \text{(IV.1.1)}$$

bağıntılarını sağlar[9].

M ve $\overline{M}$ üzerinde tanımlanan kovaryant diferensiyel operatörleri sırası ile $\nabla, \overline{\nabla}$ ile gösterelim. Böylece (I.6.2) ve (I.6.3) den

$$\overline{\nabla}_X JY = \nabla_X JY + h(X, JY) \text{ ve } J\overline{\nabla}_X Y = J\nabla_X Y + Jh(X,Y) \qquad \text{(IV.1.2)}$$

elde edilir. (IV.1.2) denkleminde tanjant ve normal kısımlar karşılaştırılırsa

$$\nabla_X JY = J\nabla_X Y \quad , \quad h(X, JY) = Jh(X,Y) \qquad \text{(IV.1.3)}$$

bulunur. Buradan ∇ $\left(\nabla_X J = 0\right)$ Kaehler ve h simetriktir.

IV.1.1. Lemma. $\overline{M}$ n-boyutlu Kaehler manifold ve $\overline{M}$ nin m-boyutlu Kaehler altmanifoldu M olsun. Bu durumda M nin ikinci temel formu

$$h(JX,Y) = h(X,JY) = Jh(X,Y) \qquad \text{(IV.1.4)}$$

eşitliklerini sağlar ve buna denk olarak

$$A_V JX = JA_V X = -A_{JV} X \qquad \text{(IV.1.5)}$$

dır [9].

IV.1.1. Önerme. $\overline{M}$ n-boyutlu Kaehler manifoldu olsun. $\overline{M}$ nın herhangi bir Kaehler altmanifoldu minimal altmanifolddur[9].

İspat. $\overline{M}$ Kaehler manifoldunun altmanifoldu M olsun. $T_M(p)$ üzerinde $e_1,\dots,e_n, Je_1,\dots,Je_n$ 0rtonormal bazını seçelim, Lemma IV.1.1 dan

$$Trh = \sum_i h(e_i,e_i) + h(Je_i,Je_i)$$
$$= \sum_i h(e_i,e_i) + Jh(e_i,Je_i)$$
$$= \sum_i h(e_i,e_i) + J^2 h(e_i,e_i) = 0$$

elde edilir.

IV.1.2. Önerme. $\overline{M}$ Kaehler manifold ve $\overline{M}$ nin Kaehler altmanifoldu M olsun. R ve $\overline{R}$ sırasıyla M ve $\overline{M}$ nin Riemann eğrilik tensörlerini göstersin. Bu taktirde $X \in \chi(M)$için

$$g(R(X,JX)JX,X)=g(\overline{R}(X,JX)JX,X)-2g(h(X,X),h(X,X)) \qquad \text{(IV.1.6)}$$

dır[9].

İspat.

$$\begin{aligned}
\overline{R}(X,JX)JX &= \overline{\nabla}_X\overline{\nabla}_{JX}JX-\overline{\nabla}_{JX}\overline{\nabla}_X JX-\overline{\nabla}_{[JX,X]}JX \\
&= \overline{\nabla}_X\left(\nabla_{JX}JX+h(JX,JX)\right)-\overline{\nabla}_{JX}\left(\nabla_X JX+h(X,JX)\right) \\
&\quad -\left(\nabla_{[X,JX]}JX+h([X,JX],JX)\right) \\
&= \overline{\nabla}_X\nabla_{JX}JX+\overline{\nabla}_X h(JX,JX)-\overline{\nabla}_{JX}\nabla_X JX-\overline{\nabla}_{JX}h(X,JX) \\
&\quad -\left(\nabla_{[X,JX]}JX+h([X,JX],JX)\right) \\
&= \nabla_X\nabla_{JX}JX+h\left(X,\nabla_{JX}JX\right)-A_{h(JX,JX)}X+\nabla^{\perp}{}_X h(JX,JX) \\
&\quad -\nabla_{JX}\nabla_X JX-h\left(JX,\nabla_X JX\right)+A_{h(X,JX)}JX-\nabla^{\perp}{}_{JX}h(X,JX) \\
&\quad -\left(\nabla_{[X,JX]}JX+h([X,JX],JX)\right) \\
&= R(X,JX)JX+h\left(X,\nabla_{JX}JX\right)-A_{h(JX,JX)}X \\
&\quad +\nabla^{\perp}{}_X h(JX,JX)-h\left(JX,\nabla_X JX\right)+A_{h(X,JX)}JX \\
&\quad +\nabla^{\perp}{}_{JX}h(X,JX)-h([X,JX],JX)
\end{aligned}$$

elde edilir. (I.3.21) den

$$\begin{aligned}
\overline{R}(X,JX)JX = R(X,JX)JX &+ h\left(X,\nabla_{JX}JX\right)-A_{h(JX,JX)}X \\
&+\nabla^{\perp}{}_X h(JX,JX)-h\left(JX,\nabla_X JX\right)+A_{h(X,JX)}JX \\
&+\nabla^{\perp}{}_{JX}h(JX,JX)-h\left(\nabla_X JX,JX\right)+h\left(\nabla_{JX}X,JX\right)
\end{aligned}$$

$$\overline{R}(X,JX)JX = R(X,JX)JX - h\left(X,\nabla_X X\right) + A_{h(X,X)}X$$
$$- \nabla^{\perp}{}_X h(X,X) + h\left(X,\nabla_X X\right) + A_{Jh(X,X)}JX$$
$$- \nabla^{\perp}{}_{JX} h(X,X) + h\left(\nabla_X X,X\right) - h\left(\nabla_X X,X\right)$$
$$\overline{R}(X,JX)JX = R(X,JX)JX + A_{h(X,X)}X - \nabla^{\perp}{}_X h(X,X)$$
$$+ A_{Jh(X,X)}JX - \nabla^{\perp}{}_{JX} h(X,X)$$

olur. Burada eşitliğin her iki tarafı **X** ile iç çarpıma tabi tutulursa

$$g\left(\overline{R}(X,JX)JX,X\right) = g\left(R(X,JX)JX,X\right) + g\left(A_{h(X,X)}X,X\right) -$$
$$g\left(\nabla^{\perp}{}_X h(X,X),X\right) - g\left(A_{Jh(X,X)}JX,X\right)$$
$$- g\left(\nabla^{\perp}{}_{JX} h(X,X),X\right)$$
$$g\left(\overline{R}(X,JX)JX,X\right) = g\left(R(X,JX)JX,X\right) + g\left(A_{h(X,X)}X,X\right) +$$
$$+ g\left(A_{Jh(X,X)}JX,X\right)$$

dır. (I.6.4) den

$$g\left(A_{h(X,X)}X,X\right) = g\left(h(X,X),h(X,X)\right)$$

ve

$$g\left(A_{Jh(X,X)}JX,X\right) = g\left(h(JX,X),Jh(X,X)\right)$$

elde edilir. Burada IV.1.3 kullanılırsa

$$g\left(A_{Jh(X,X)}JX,X\right) = g\left(Jh(X,X),Jh(X,X)\right)$$
$$= g\left(h(X,X),h(X,X)\right)$$

olur. Böylece

$$g\left(R(X,JX)JX,X\right) = g\left(\overline{R}(X,JX)JX,X\right) - 2g\left(h(X,X),h(X,X)\right)$$

elde edilir.

IV.1.3. Tanım. $\overline{M}$ kompleks m-boyutlu hemen hemen Hermityen manifold, J ve g sırasıyla hemen hemen kompleks yapı ve Hermityen metrik olsun. Eğer $\overline{M}$ nin n-boyutlu M altmanifoldu için

$$JT_M(p) \subset T_M^{\perp}(p)$$

ise M ye $\overline{M}$ nin anti-invaryant (total reel) altmanifoldu denir [9].

$\overline{M}$ kompleks n-boyutlu Kaehler manifold ve $\overline{M}$ nin anti-invaryant altmanifoldu M olsun. Bu durumda

$$T_M^{\perp}(p) = JT_M(p) \oplus N_M(p)$$

dır. Burada $N_M(p)$ $JT_M(p)$ nin ortogonal komplemanıdır ve $N_M(p)$ J altında invaryant uzaydır.

Şimdi M ye normal olan V vektör alanını gözönüne alalım. Bu durumda

$$JV=BV+CV \tag{IV.1.7}$$

şeklinde yazabiliriz. Burada BV JV nin teğet ve CV de JV nin normal kısmıdır. Böylece

$$BCV = 0 \quad C^2V = -V - JBV \quad BJV = -V \quad CJV = 0$$

dır. Buradan

$$C^3 + C = 0$$

elde edilir. Bu gösterir ki C normal demet üzerinde f-yapıdır. (I.6.2) ve (I.6.3) den

$$(\nabla_X C)V = -h(X, BV) - JA_V X$$

dır. $X \in \chi(M)$ için $\nabla_X C = 0$ ise normal demet üzerinde C f-yapıya paraleldir denir[9].

IV.1.2. Lemma. $\overline{M}$ kompleks m-boyutlu Kaehler manifold, $\overline{M}$ nin n-boyutlu anti-invaryant altmanifoldu M olsun. Eğer normal demet üzerinde f-yapı paralel ise $V \in N_M(p)$ için

$$A_V = 0$$

dır[9].

İspat. Eğer $V \in N_M(p)$ ise bu durumda $BV=0$ dır. Bu ise $JA_V X = 0$ ve $A_V = 0$ demektir.

IV.2. CR-altmanifold ve CR-altmanifold Üzerinde Distribüsyonların İntegrallenebilirliği

IV.2.1. Tanım. $\overline{M}$ n-boyutlu hemen hemen Hermityen manifold ve $\overline{M}$ nin altmanifoldu M olsun. Eğer $\forall p \in M$ için aşağıdaki şartları sağlayan $D, D^{\perp}$ distribüsyonları varsa M ye CR-altmanifold denir[2].

i) D holomorfiktir yani $J(D_p) = D_p$

ii) $D^{\perp}: p \to D_p{}^{\perp} \subset T_M(p)$ anti-invaryant yani; $J(D_p^{\perp}) \subset T_M^{\perp}(p)$

D distribüsyonunun kompleks boyutu p ve $D^{\perp}$ ın reel boyutu q olsun. Bu durumda $q=0$ için M kompleks ve $p=0$ ise M total reel altmanifolddur. Eğer $q = boyT_M^{\perp}(p)$ ise CR-altmanifolda anti-holomorfik altmanifold denir. Eğer M ne kompleks ne de total reel altmanifold ise M ye has(proper) CR-altmanifold denir [2].

M hemen hemen Hermityen manifold $\overline{M}$ ye gömülü keyfi Riemann manifoldu olsun. $X \in \chi(M)$ için

$$JX = \phi X + \omega X$$

yazılabilir. Burada ϕX ve ωX JX ın sırasıyla teğet ve normal kısımlarıdır. Buna göre aşağıdaki teoremi verebiliriz.

IV.2.1. Teorem. $\overline{M}$ hemen hemen Hermityen manifold olsun. M altmanifoldunun $\overline{M}$ nin CR-altmanifoldu olması için gerek ve yeter şart

$$\text{rank}\phi\text{=sabit} \tag{IV.2.2}$$

ve

$$\omega o \phi = 0 \tag{IV.2.3}$$

olmasıdır[2].

İspat. (⇒) Kabul edelim ki M, $\overline{M}$ nin CR-altmanifoldu olsun. P ve Q sırasıyla $D, D^{\perp}$ üzerindeki projeksiyonlarını göstersin. Bu durumda

$$\phi X = JPX \tag{IV.2.4}$$

$$\omega X = JQX \tag{IV.2.5}$$

yazılabilir. Böylece rankϕ=$2p$ dir ve (IV.2.4) ifadesi (IV.2.5) de kullanılırsa

$$(\omega o \phi)X = JQ(\phi X) = JQ\phi X = 0$$

elde edilir. Buradan $\omega o \phi = 0$ dır.

(⇐) Şimdi kabul edelim ki (IV.2.2) ve (IV.2.3) bağıntıları sağlansın. D distribüsyonunu $\forall p \in M$ için

$$D_p = \imath m \phi_p$$

ile tanımlayalım. $X = \phi Y \in \Gamma(D)$ için

$$JX = J\phi Y = \phi^2 Y + (\omega o \phi)Y = \phi^2 Y \in \Gamma(D)$$

dır. Buradan D invaryanttır. Şimdi TM de D ye ortogonal distribüsyonu $D^{\perp}$ ile gösterelim. $W, X \in \Gamma(D^{\perp}), U \in \Gamma(D)$ için $Y = U+W$ olsun. Bu durumda

$$\begin{aligned} g(JX,Y) &= -g(X, JU + JW) \\ &= -g(X, JU) - g(X, JW) \\ &= -g(X, JW) \\ &= -g(X, \phi W) \\ &= 0 \end{aligned}$$

olur. Böylece M, $\overline{M}$ nin CR-altmanifoldudur.

Kabul edelim ki $\overline{M}$ hemen hemen Hermityen manifold ve $\overline{M}$ nin CR-altmanifoldu M olsun. Bu durumda ϕ nin Nijenhuis tensör alanı

$$[\phi,\phi](X,Y)=[\phi X,\phi Y]+\phi^2[X,Y]-\phi[X,\phi Y]-\phi[\phi X,Y] \qquad \text{(IV.2.6)}$$

dır. (III.1.9) ve (III.1.10) dan

$$[J,J](X,Y)=[\phi,\phi](X,Y)-Q([X,Y])-\omega([\phi X,Y]+[X,\phi Y]) \qquad \text{(IV.2.7)}$$

elde edilir[2].

IV.2.2. Teorem. $\overline{M}$ hemen hemen Hermityen manifold ve $\overline{M}$ nin CR-altmanifoldu M olsun. Bu durumda D distribüsyonunun integrallenebilir olması için gerek ve yeter şart $X,Y\in\Gamma(D)$ için

$$\text{Teğ}[J,J](X,Y)=[\phi,\phi](X,Y) \qquad \text{(IV.2.8)}$$

veya

$$\text{Nor}[J,J](X,Y)=-\omega([\phi X,Y]+[X,\phi Y]) \qquad \text{(IV.2.9)}$$

dır[2].

IV.2.3. Teorem. $\overline{M}$ hemen hemen Hermityen manifold ve $\overline{M}$ nın CR-altmanifoldu M olsun. Bu taktirde D distribüsyonunun integrallenebilir olması için gerek ve yeter şart $X,Y\in\Gamma(D)$ için

$$\text{Nor}[J,J](X,Y)=0 \qquad \text{(IV.2.10)}$$

ve

$$Q[\phi,\phi](X,Y)=0 \qquad \text{(IV.2.11)}$$

dır[2].

İspat. ($\Rightarrow$) Kabul edelim ki D integrallenebilir olsun. Bu durumda $X,Y\in\Gamma(D)$ için $\phi X\in\Gamma(D)$, $\phi Y\in\Gamma(D)$ olacağından (IV.2.10) elde edilir. (IV.2.6) da (IV.2.4) kullanılırsa

$$[\phi,\phi](X,Y)=[\phi X,\phi Y]-P[X,Y]-\phi[X,\phi Y]-\phi[\phi X,Y]$$

elde edilir. Böylece $\forall p \in M$ için $D_p = \imath m\phi_p$ alınırsa $[\phi,\phi](X,Y) \in \Gamma(D)$ olur.

($\Leftarrow$) (IV.2.9) ve (IV.2.10) dan

$$\omega([\phi X,Y]+[X,\phi Y]) = 0$$
$$\omega([JX-\omega X,Y]+[X,JY-\omega Y]) = 0$$
$$\omega([JX,Y]-[\omega X,Y]+[X,JY]-[X,\omega Y]) = 0$$
$$Q[JX,Y]-Q[\omega X,Y]+Q[X,JY]-Q[X,\omega Y] = 0$$
$$Q\{[JX,Y]+[X,JY]\} = 0$$
$$Q\{[JX,JY]-[X,Y]\} = 0$$

elde edilir. Buradan

$$Q(Te\breve{g}[J,J](X,Y)) = 0$$

dır. Diğer taraftan $Q(Te\breve{g}[J,J](X,Y)) = Q([\phi,\phi](X,Y)) - Q([X,Y])$ olduğundan

IV.2.11 den

$$Q([X,Y]) = 0 \Rightarrow [X,Y] \in \Gamma(D)$$

dır. Böylece aşağıdaki sonuçlar verilebilir.

IV.2.1. Sonuç. $\overline{M}$ Hermityen manifoldunun CR-altmanifoldu M olsun. D distribüsyonunun integrallenebilir olması için gerek ve yeter şart ϕ tensörünün Nijenhuis tensör alanının D üzerinde sıfır olmasıdır[2].

IV.2.2. Sonuç. $X,Y \in \Gamma(D^{\perp})$ için $[\phi,\phi](X,Y) = -P[X,Y]$ dır[2].

IV.2.4. Teorem. $\overline{M}$ hemen hemen Hermityen manifold ve $\overline{M}$ nin CR-altmanifoldu M olsun. $D^{\perp}$ distribüsyonunun integrallenebilir olması için gerek ve yeter şart $D^{\perp}$ distribüsyonu üzerinde Nijenhuis tensör alanının sıfır olmasıdır[2].

Şimdi kabul edelim ki $\overline{M}$ nearly Kaehler manifold ve M $\overline{M}$ nin CR-altmanifoldu olsun. Bu durumda

$$
\begin{aligned}
[J,J](X,Y) &= [JX,JY]-[X,Y]-J([JX,Y]+[X,JY]) \\
J([JX,Y]+[X,JY]) &= -[J,J](X,Y)+[JX,JY]-[X,Y] \\
[JX,Y]+[X,JY] &= J([J,J](X,Y))-J([JX,JY])+J([X,Y]) \\
&= J([J,J](X,Y))+J[X,Y]-J\left(\overline{\nabla}_{JX}JY-\overline{\nabla}_{JY}JX\right) \\
&= J([J,J](X,Y))+J[X,Y]-J\left(\overline{\nabla}_{JX}JY\right)+J\left(\overline{\nabla}_{JY}JX\right) \\
&= J([J,J](X,Y))+J[X,Y]+J\left(\left(\overline{\nabla}_{JY}J\right)X+J\overline{\nabla}_{JY}X\right) \\
&\quad -J\left(\left(\overline{\nabla}_{JX}J\right)Y+J\overline{\nabla}_{JX}Y\right) \\
&= J([J,J](X,Y))+J([X,Y])+J\left(\overline{\nabla}_{JY}J\right)X-J\left(\overline{\nabla}_{JX}J\right)Y \\
&\quad +\overline{\nabla}_{JX}Y-\overline{\nabla}_{JY}X \\
&= J([J,J](X,Y))+J([X,Y])-\left(\left(\overline{\nabla}_{Y}J\right)X+\left(\overline{\nabla}_{X}J\right)Y\right) \\
&\quad +\overline{\nabla}_{JX}Y-\overline{\nabla}_{JY}X
\end{aligned}
$$

olur. Burada (II.7.2) kullanıldığında yukarıdaki eşitlik

$$
\begin{aligned}
&= J([J,J](X,Y))+J([X,Y])-\left(\overline{\nabla}_{Y}J\right)X-\left(\overline{\nabla}_{Y}J\right)X \\
&\quad +\overline{\nabla}_{JX}Y-\overline{\nabla}_{JY}X \\
&= J([J,J](X,Y))+J([X,Y])+\nabla_{JX}Y \\
&\quad +h(JX,Y)-\nabla_{JY}X-h(JY,X)-2\left(\nabla_{Y}J\right)X
\end{aligned}
$$

olur. Burada da (II.7.3) kullanılırsa

$$
\begin{aligned}
&= \frac{1}{2}J([J,J](X,Y))+J([X,Y])+\nabla_{JX}Y+h(JX,Y) \\
&\quad -\nabla_{JY}X-h(JY,X)
\end{aligned}
\tag{IV.2.12}
$$

elde edilir. ∇ simetrik konneksiyon olarak gözönüne alınırsa $X,Y\in\Gamma(D)$ için

$$
h(X,JY)-h(JX,Y)=\frac{1}{2}J([J,J](X,Y))+J([X,Y])+\nabla_{Y}JX-\nabla_{X}JY \tag{IV.2.13}
$$

olur[2].

IV.2.5. Teorem.. $\overline{M}$ nearly Kaehler manifold ve $\overline{M}$ nin CR-altmanifoldu M olsun. Bu taktirde D distribüsyonunun integrallenebilir olması için gerek ve yeter şart $X,Y\in\Gamma(D)$ için

$$h(X,JY)=h(JX,Y) \tag{IV.2.14}$$

ve

$$[J,J](X,Y)\in\Gamma(D) \tag{IV.2.15}$$

olmasıdır[2].

İspat. ($\Rightarrow$)Kabul edelim ki D integrallenebilir olsun. Bu durumda (IV.2.12) den

$$h(X,JY)-h(JX,Y)=\frac{1}{2}J([J,J](X,Y)) \tag{IV.2.16}$$

elde edilir. (IV.2.8) ,(IV.2.10) dan

$$h(X,JY)-h(JX,Y)=\frac{1}{2}J([\phi,\phi](X,Y))$$

dır. Burada (IV.2.1) ve (IV.2.11) kullanılırsa

$$\begin{aligned} h(X,JY)-h(JX,Y)&=\frac{1}{2}(\phi[\phi,\phi](X,Y)+\omega[\phi,\phi](X,Y)) \\ &=\frac{1}{2}(JP[\phi,\phi](X,Y)+JQ[\phi,\phi](X,Y)) \end{aligned}$$

olur. Böylece

$$h(X,JY)-h(JX,Y)=0$$

elde edilir. (IV.2.8) ,(IV.2.11) ve (IV.2.11) den

$$[J,J](X,Y)\in\Gamma(D)$$

dır.

($\Leftarrow$) (IV.2.12) den

$$J([X,Y])=\nabla_X JY-\nabla_Y JX-\frac{1}{2}J([J,J](X,Y)) \tag{IV.2.17}$$

olur. $\forall Z\in\Gamma(D^{\perp})$ için $V\in\Gamma(TM^{\perp})$ vardır öyleki

$$Z=JV$$

dır. Buradan (IV.2.15) ve (IV.2.17) kullanılırsa

$$g([X,Y],JV)=-g(J[X,Y],V)=0$$

elde edilir. Böylece ispat tamamlanır.

IV.2.1. Önerme. $\overline{M}$ nearly Kaehler manifold ve $\overline{M}$ nin CR-altmanifoldu M olsun. Bu taktirde $h(X,JY)=h(JX,Y)$ olması için gerek ve yeter şart $X,Y\in\Gamma(D), Z\in\Gamma(D^{\perp})$ için

$$g(h(X,JY)-h(Y,JX),JZ)=0 \tag{IV.2.18}$$

eşitliğinin gerçeklenmesidir[2].

IV.2.6. Teorem. $\overline{M}$ nearly Kaehler manifold ve $\overline{M}$ nin CR-altmanifoldu M olsun. Bu taktirde anti-invaryant distribüsyonun integrallenebilir olması için gerek ve yeter şart $U,W\in\Gamma(D^{\perp})$ ve $X\in\Gamma(D)$ için

$$g((\overline{\nabla}_U J)W,X)=0 \tag{IV.2.19}$$

olmasıdır[2].

İspat. $D^{\perp}$ integrallenebilir olsun. $U,W\in\Gamma(D^{\perp})$ ve $X\in\Gamma(D)$ için

$$\begin{aligned}3d\phi(U,W,X)&=g([U,W],JX)\\&=g((\overline{\nabla}_U J)W,X)\end{aligned}$$

olduğundan ispat elde edilir.

IV.2.2. Tanım. $\overline{M}$ hemen hemen Hermityen manifold ve $\overline{M}$ nin CR-altmanifoldu M olsun. $X\in\Gamma(D)$ ve$U\in\Gamma(D^{\perp})$ olmak üzere, eğer ikinci temel form için

$$h(X,U)=0 \tag{IV.2.20}$$

sağlanıyorsa M ye mixed jeodezik CR-altmanifold denir [2].

IV.2.7. Teorem. $\overline{M}$ hemen hemen Hermityen manifold ve $\overline{M}$ nin CR-altmanifoldu M olsun. Bu taktirde M altmanifoldunun mixed jeodezik olması için gerek ve yeter şart D ve $D^{\perp}$ distribüsyonlarının Weingarten temel tensörüne göre invaryant olmalarıdır. Yani $X\in\Gamma(D)$, $U\in\Gamma(D^{\perp})$ ve $V\in\Gamma(TM^{\perp})$ için

$$A_V X \in \Gamma(D)\,,\, A_V U \in \Gamma(D^{\perp})$$

dır [2].

İspat. $$g(h(X,U),V) = g(A_V X, U)$$

olduğundan ispat açıktır.

IV.2.3. Tanım. $\overline{M}$ hemen hemen Hermityen manifold , $\overline{M}$ nin CR-altmanifoldu M ve $D, D^{\perp}$ distribüsyonlarının maksimal integral manifoldları sırasıyla M_1 , M_2 olsun. Eğer D ve $D^{\perp}$ integrallenebilir ve $M = M_1 \times M_2$ Riemann çarpımı ise M ye CR-çarpım denir.

$D \neq \{0\}$, $D^{\perp} \neq \{0\}$ ise CR-çarpıma has CR-çarpım denir [2].

$\overline{M}$ Kaehler manifold, g ve J sırasıyla $\overline{M}$ üzerindeki hemen hemen kompleks yapı ve Hermityen metrik olsun. $\overline{M}$ ye gömülü keyfi Riemann manifoldu M olsun. M üzerindeki Riemann metriği $\overline{M}$ den indirgenen metrik olsun.

M e teğet herhangi X vektör alanını

$$JX = \phi X + \omega X$$

ile gösterelim. Burada ϕX ve ωX JX ın sırasıyla teğet ve normal kısımlarını göstersin. Bu durumda f tanjant demet üzerinde endomorfizm ve ω tanjant demet üzerinde normal demet değerli 1-formdur.

M ye normal keyfi V vektör alanı için

$$JV = BV + CV$$

şeklinde yazabiliriz. Burada BV JV nin teğet ve CV de JV nin normal kısmıdır. Bu taktirde ϕ TM üzerinde ve C $TM^{\perp}$ üzerinde anti-simetriktir.

ω ve B arasında

$$\begin{aligned} g(\omega X, V) + g(X, BV) &= g(-\phi X + JX, V) + g(X, JV - CV) \\ &= g(JX, V) - g(\phi X, V) + g(X, JV) - g(X, CV) \qquad \text{(IV.2.22)} \\ &= 0 \end{aligned}$$

bağıntısı vardır. Böylece

$$\begin{aligned} J(JX) &= J\phi X + J\omega X \\ &= \phi^2 X + \omega\phi X + B\omega X + C\omega X \end{aligned}$$

dır. Buradan

$$-X = \phi^2 X + B\omega X + C\omega X + \omega\phi X$$

elde edilir. Bu denklem düzenlenirse

$$\begin{aligned} &\phi^2 X + B\omega X + X = 0 \\ &\omega\phi X + C\omega X = 0 \end{aligned}$$

olur. $\forall X$ için bu eşitlikler sağlandığından

$$\begin{aligned} &\phi^2 + B\omega + I = 0 \\ &\omega\phi + C\omega = 0 \end{aligned} \qquad \text{(IV.2.23)}$$

dır. Benzer olarak

$$\begin{aligned} J(JV) &= JBV + JCV \\ &= \phi BV + \omega BV + BCV + C^2 V \\ \phi BV + \omega BV &+ BCV + C^2 V - V = 0 \end{aligned}$$

elde edilir. Buradan

$$\begin{aligned} &\phi B + BC = I \\ &\omega B + C^2 = 0 \end{aligned} \qquad \text{(IV.2.24)}$$

dır.

Şimdi ϕ ve ωnın kovaryant türevlerini

$$\begin{aligned} (\nabla_X \phi)Y &= \nabla_X \phi Y - \phi \nabla_X Y \\ (\nabla_X \omega)Y &= \nabla_X \omega Y - \omega \nabla_X Y \end{aligned}$$

olarak tanımlayalım. Benzer olarak B ve C nin kovaryant türevleri de

$$\begin{aligned} (\nabla_X B)V &= \nabla_X BV - B\nabla^{\perp}{}_X V \\ (\nabla_X C)V &= \nabla_X CV - C\nabla^{\perp}{}_X V \end{aligned}$$

olur. Bu durumda Gauss ve Weingarten formüllerinden

$$
\begin{aligned}
Jh(X,Y) &= \overline{\nabla}_X JY - J\nabla_X Y \\
&= \overline{\nabla}_X \phi Y + \overline{\nabla}_X \omega Y - J\nabla_X Y \\
&= \nabla_X \phi Y + h(X,\phi Y) - A_{\omega Y} X + \nabla^{\perp} X\omega Y - \phi\nabla_X Y - \omega\nabla_X Y \\
&= (\nabla_X \phi)Y + \phi\nabla_X Y + h(X,\phi Y) - A_{\omega Y} X + \nabla^{\perp} X\omega(\nabla^{\perp} X\omega)Y \\
&\quad - \phi\nabla_X Y - \omega\nabla_X Y \\
&= (\nabla_X \phi)Y + h(X,\phi Y) - A_{\omega Y} X + (\nabla^{\perp} X\omega)Y
\end{aligned}
$$

dır. (IV.1.3) den

$$
Jh(X,Y) = Bh(X,Y) + Ch(X,Y) = (\nabla_X \phi)Y + h(X,\phi Y) - A_{\omega Y} X + (\nabla^{\perp} X\omega)Y
$$

olur. Böylece elde edilen denklemin normal ve tanjant kısımları karşılaştırılırsa

$$
(\nabla_X \phi)Y = A_{\omega Y} X + Bh(X,Y) \qquad \text{(IV.2.25)}
$$

ve

$$
(\nabla_X \omega)Y = -h(X,\phi Y) + Ch(X,Y) \qquad \text{(IV.2.26)}
$$

elde edilir.

Benzer olarak

$$
\begin{aligned}
-JA_V X &= \overline{\nabla}_X JV - J\nabla^{\perp} XV \\
&= \overline{\nabla}_X BV + CV - B\nabla^{\perp} XV - C\nabla^{\perp} XV \\
&= \overline{\nabla}_X BV + \overline{\nabla}_X CV - B\nabla^{\perp} XV - C\nabla^{\perp} XV \\
&= \nabla_X BV + h(X,BV) - A_{CV} X + \nabla^{\perp} XCV - B\nabla^{\perp} XV - C\nabla^{\perp} XV \\
&= (\nabla_X B)V + B\nabla_X V + h(X,BV) - A_{CV} X + (\nabla_X C)V + C\nabla^{\perp} XV \\
&\quad - B\nabla_X V - C\nabla^{\perp} XV \\
&= (\nabla_X B)V - A_{CV} X + h(X,BV) + (\nabla_X C)V
\end{aligned}
$$

elde edilir. (III.4.5) den

$$
-JA_V X = -\phi A_V X - \omega A_V X = (\nabla_X B)V - A_{CV} X + h(X,BV) + (\nabla_X C)V
$$

dır. Burada da denklemin tanjant ve normal kısımları düzenlenirse

$$
(\nabla_X B)V = A_{CV} X - \phi A_V X \qquad \text{(IV.2.27)}
$$

ve

$$\left(\nabla_X C\right)V = -\omega A_V X - h(X, BV) \qquad \text{(IV.2.28)}$$

olur[9].

Şimdi kabul edelim ki $\overline{M}$ manifoldu sabit holomorfik kesit eğrilikli olsun. Bu durumda M nin R eğrilik tensörü

$$R(X,Y)Z = \frac{1}{4}c\left[g(Y,Z)X - g(X,Z)Y + g(JY,Z)JX - g(JX,Z)JY + 2g(X,JY)JZ\right] + A_{h(Y,Z)}X - A_{h(X,Z)}Y + \left(\nabla_Y h\right)(X,Z) - \left(\nabla_X h\right)(Y,Z)$$

dır. Burada (III.3.7) denklemi gözönüne alınırsa

$$\begin{aligned} R(X,Y)Z = \frac{1}{4}c\big[&g(Y,Z)X - g(X,Z)Y + g(\phi Y + \omega Y, Z)(\phi X + \omega X) \\ &- g(\phi X + \omega X, Z)(\phi Y + \omega Y) + 2g(X, \phi Y + \omega Y)(\phi Z + \omega Z)\big] \qquad \text{(IV.2.29)} \\ &+ A_{h(Y,Z)}X - A_{h(X,Z)}Y + \left(\nabla_Y h\right)(X,Z) - \left(\nabla_X h\right)(Y,Z) \end{aligned}$$

elde edilir. Buradan Gauss ve Codazzi denklemleri sırasıyla

$$R(X,Y)Z = \frac{1}{4}c\left[g(Y,Z)X - g(X.Z)Y + g(\phi Y,Z)\phi X - g(\phi X,Z)\phi Y + 2g(X,\phi Y)\phi Z\right] + A_{h(Y,Z)}X - A_{h(X,Z)}Y$$

ve

$$\left(\nabla_X h\right)(Y,Z) - \left(\nabla_Y h\right)(X.Z) = \frac{1}{4}c\left[g(\phi Y,Z)\omega X - g(\phi X,Z)\omega Y + 2g(X,\phi Y)\omega Z\right] \qquad \text{(IV.2.30)}$$

olur. Böylece Ricci denklemi

$$\begin{aligned} g\left(R^{\perp}(X,Y)U,V\right) + g\left(\left[A_U, A_V\right]X,Y\right) &= g\left(\overline{R}(X,Y)V,U\right) \\ &= \frac{1}{4}c\big[g(X,V)g(Y,U) - g(Y,V)g(X,U) \\ &\quad + g(JX,V)g(JY,U) - g(JY,V)g(JX,U) \\ &\quad + 2g(JX,Y)g(JV,U) \\ &= g(\phi X + \omega X, V)g(\phi Y + \omega Y, U) \\ &\quad - g(\phi Y + \omega Y, V)g(\phi X + \omega X, U) \\ &\quad + 2g(\phi X + \omega X, Y)g(BV + CV, U) \end{aligned}$$

$$= g(\omega X,V)g(\omega Y,U) - g(\omega Y,V)g(\omega X,U)$$
$$+ 2g(\phi X,Y)g(CV,U) \qquad \text{(IV.2.31)}$$

olarak elde edilir[9].

IV.2.4. Tanım. $\overline{M}$ bir Kaehler manifold ve $\overline{M}$ nin altmanifoldu M olsun. Eğer M üzerinde aşağıdaki şartları sağlayan D, $D^{\perp}$ distribüsyonları varsa M ye $\overline{M}$ Kaehler manifoldunun CR-altmanifoldu denir[9].

i) D invaryant yani; $J(D_p) = D_p$

ii) $D^{\perp}: p \to D_p^{\perp} \subset T_M(p)$ anti-invaryant yani; $J(D_p^{\perp}) \subset T_M^{\perp}(p)$

IV.2.8. Teorem. $\overline{M}$ Kaehler manifold ve $\overline{M}$ nin bir altmaifoldu M olsun. Bu durumda M CR-altmanifolddur $\Leftrightarrow \omega\phi = 0$ dır[9].

İspat. Kabul edelim ki M $\overline{M}$ nin CR-altmanifoldu olsun. P, Q sırasıyla D, $D^{\perp}$ üzerinde ki projeksiyonlarını göstersin. Bu durumda

$$P + Q = I \quad P^2 = P \quad Q^2 = Q \quad PQ = QP = 0$$

dır. (IV.2.1) den

$$Q\phi P = 0 \quad \omega P = 0 \quad \phi P = \phi \qquad \text{(IV.2.32)}$$

olur. (IV.2.23) bağıntısının ikinci denkleminden

$$\omega\phi + C\omega = 0$$

$$\omega\phi P + C\omega P = 0$$

dır. (IV.2.32) den

$$\omega\phi = 0 \qquad \text{(IV.2.33)}$$

elde edilir.

Tersine kabul edelim ki Kaehler manifoldunun bir altmanifoldu için $\omega\phi = 0$ olsun. Bu durumda

$$C\omega=0 \tag{IV.2.34}$$

dır. (IV.2.22) ve (IV.2.34) den

$$BC=0 \tag{IV.2.35}$$

ve (IV.2.24) bağıntısının birinci dekleminden de

$$\phi B=0 \tag{IV.2.36}$$

elde edilir.

Böylece (IV.2.23) ifadesinin birinci denkleminden

$$\phi^3+\phi=0 \tag{IV.2.37}$$

olur. Benzer olarak (IV.2.24) ifadesinin ikinci denkleminden de

$$C^3+C=0 \tag{IV.2.38}$$

dır. Şimdi

$$P=-\phi^2 \quad Q=I-P$$

alalım. Bu durumda

$$P+Q=I \quad P^2=P \quad Q^2=Q \quad PQ=QP=0$$

dır. Bu ise P ve Q nun projeksiyon operatörler olduğunu, D ve $D^{\perp}$ ortogonal distribüsyonların tanımlanabileceğini gösterir. Buradan

$$\phi P=\phi$$

ve

$$\phi Q=0$$

elde edilir. $g(\phi X,Y)$ anti-simetrik ve $g(QX,Y)$ simetrik olduğundan

$$Q\phi=0$$

elde edilir. Böylece

$$Q\phi P=0$$

olduğundan

$$\omega P=0$$

dır. Bu denklemler gösterir ki D distribüsyonu invaryant ve $D^{\perp}$ distribüsyonu anti-invaryanttır. Bu ise M nin CR-altmanifold olduğunu gösterir.

(IV.2.37) ve (IV.2.38) denklemlerinden aşağıdaki teorem verilebilir.

IV.2.9. Teorem. $\overline{M}$ Kaehler manifold ve $\overline{M}$ nin CR-altmanifoldu M olsun Bu durum da ϕ M de ve C M nin normal demetinde *f*-yapıdır[9].

IV.2.10. Teorem. $\overline{M}(c)$ kompleks uzay form ve $\overline{M}(c)$ nin altmanifoldu M olsun. Bu durumda M nin $\overline{M}(c)$ kompleks uzay formunun CR-altmanifoldu olması için gerek ve yeter şart M üzerinde tanımlanan has diferensiyellenebilir distribüsyon $D_p = T_M(p) \cap JT_M(p)$ olmak üzere $X,Y \in \Gamma(D)$, $Z,W \in \Gamma(D^{\perp})$ için

$$g(\overline{R}(X,Y)Z,W)=0$$

olmasıdır[9].

İspat. Eğer M $\overline{M}(c)$ kompleks uzay formunun CR-altmanifoldu ise

$$\begin{aligned}\overline{R}(X,Y)Z &= \frac{1}{4}\big[g(X,Z)Y - g(Y,Z)X + g(JX,Z)JY - g(JY,Z)JX \\ &\quad +2g(JX,Y)JZ\big] \\ &= \frac{1}{4}c\big[2g(JX,Y)JZ\big] \\ &= \frac{1}{2}c\big[g(JX,Y)JZ\big]\end{aligned}$$

dır. Buradan

$$g(\overline{R}(X,Y)Z,W) = \frac{1}{2}cg(JX,Y)g(JZ,W) = 0$$

elde edilir.

Şimdi tersini kabul edelim. Yani $g(\overline{R}(X,Y)Z,W)=0$ olsun. Bu durumda göstereceğiz ki M, $\overline{M}(c)$ nin CR-altmanifoldudur.

$$g(\overline{R}(JX,X)Z,W) = \frac{1}{2}cg(X,X)g(JZ,W) = 0$$

ve D distribüsyonu holomorfik olduğundan, $JD_p^{\perp}$, D_p ye diktir. Böylece $JD_p^{\perp} \in T^{\perp}{}_M(p)$ dır. Bu ise M nin $\overline{M}(c)$ kompleks uzay formunun CR-altmanifoldu olduğunu gösterir.

$\overline{M}$ Hermityen manifold ve ϕ $\overline{M}$ nin temel 2-formu olsun. Bu durumda

$$d\phi = \phi \Lambda \omega \tag{IV.2.39}$$

eşitliğini sağlayan ω 1-formuna Lee form denir. Eğer Lee form kapalı ise bu manifoldlara lokal konformal simpletik manifoldlar denir[9].

IV.2.11. Teorem. $\overline{M}$ $d\phi = \phi\Lambda\omega$ şartını sağlayan bir Hermityen manifold olsun. Bu durumda M $\overline{M}$ nin CR-altmanifoldu ise $D^{\perp}$ integrallenebilirdir[9].

İspat. $X \in \Gamma(D)$, $Z,W \in \Gamma(D^{\perp})$ için

$$\phi(X,Z) = g(X,JZ) = 0$$
$$\phi(Z,W) = g(Z,JW) = 0$$

dır. Bu nedenle

$$d\phi(X,Z,W) = \phi\Lambda\omega(X,Z,W)$$
$$= -g([Z,W],JX) = 0$$

olur. X ve JX D de seçilen keyfi vektörler ve $[Z,W]$ M ye teğet olduğundan $D^{\perp}$ integrallenebilirdir.

IV.2.5. Tanım. D distribüsyonu integrallenebilir ve D nin her integral manifoldu üzerinde indirgenen hemen hemen kompleks yapı ϕ integrallenebilir ise ϕf-yapısına kısmi integrallenebilirdir denir[9].

IV.2.12. Teorem. $\overline{M}$ Kaehler manifold ve $\overline{M}$ nin CR-altmanifoldu M olsun. Bu durumda ϕf-yapısı kısmi integrallenebilirdir gerek ve yeter şart

$$h(\phi X,Y) = h(X,\phi Y)$$

dır[9].

İspat. $X,Y \in \Gamma(D)$ için

$$\left(\nabla_X \omega\right)Y = -h(X,\phi Y) + Ch(X,Y)$$

dır. Buradan

$$\begin{aligned}\omega[X,Y] &= \omega\nabla_X Y - \omega\nabla_Y X \\ &= -\left(\nabla_X \omega\right)Y + \left(\nabla_Y \omega\right)X \\ &= h(X,\phi Y) - h(\phi X,Y)\end{aligned}$$

elde edilir. Böylece D integrallenebilirdir gerek ve yeter şart $h(\phi X,Y) = h(X,\phi Y)$ dır. Bu durumda D nin integral altmanifoldu $\overline{M}$ de invaryant ve Kaehlerdir. Bu ise D üzerine indirgenen ϕf-yapısının integrallenebilirliğini gösterir.

IV.2.13. Teorem. $\overline{M}$ Kaehler manifold ve $\overline{M}$ nin CR-altmanifoldu M olsun. Bu durumda

i) $D^{\perp}$ distribüsyonu integrallenebilirdir.

ii) D distribüsyonunun integrallenebilir olması için gerek ve yeter şart $X,Y \in \Gamma(D)$ için

$$h(X,JY) = h(Y,JX) \qquad \text{(IV.2.40)}$$

dır [2].

IV.2.6. Tanım. $\overline{M}$ bir manifold ve $\overline{M}$ nin CR-altmanifoldu M olsun. Eğer M nin ikinci temel formu sıfır ise M ye D-jeodezik CR-altmanifold denir. Yani M D-Jeodezik ise $X,Y \in \Gamma(D)$ için

$$h(X,Y) = 0 \qquad \text{(IV.2.41)}$$

dır[2].

IV.2.14. Teorem. $\overline{M}$ bir Kaehler manifold ve $\overline{M}$ nin CR-altmanifoldu M olsun. Bu taktirde *i*) D distribüsyonu integrallenebilir ve D nin maksimal integral manifoldu M de total jeodeziktir $\Leftrightarrow$ $X,Y \in \Gamma(D)$ ve $Z \in \Gamma(D^{\perp})$ için

$$g(h(X,Y),JZ)=0 \tag{IV.2.42}$$

dır.

ii) D distribüsyonunun integrallenebilir ve D nin maksimal integral manifoldunun $\overline{M}$ de total jeodezik olması için gerek ve yeter şart M altmanifoldunun D-jeodezik olmasıdır[2].

İspat. *i*) ($\Rightarrow$) Kabul edelim ki D distribüsyonu integrallenebilir ve D nin maksimal integral manifoldu total jeodezik olsun. Bu durumda Teorem I.7.2 den $X,Y \in \Gamma(D)$ için $\nabla_X Y \in \Gamma(D)$ dır. $Z \in \Gamma(D^{\perp})$ için Gauss formülünden

$$\begin{aligned} g(\overline{\nabla}_X Y, JZ) &= g(\nabla_X Y, JZ) + g(h(X,Y),JZ) \\ &= g(h(X,Y),JZ) \end{aligned}$$

olur. Burada Teorem II.4.1 kullanılırsa

$$\begin{aligned} -g(J\overline{\nabla}_X Y, Z) &= -g(\overline{\nabla}_X JY, Z) \\ &= -g(\nabla_X JY + h(X,JY), Z) \\ &= -g(\nabla_X JY, Z) - g(h(X,JY),Z) \end{aligned}$$

$$-g(J\overline{\nabla}_X Y, Z) = 0 \tag{IV.2.43}$$

bulunur. Böylece

$$g(h(X,Y),JZ)=0$$

olur.

($\Leftarrow$) Kabul edelim ki $g(h(X,Y),JZ)=0$ olsun. Bu durumda $X,Y \in \Gamma(D)$ ve $Z \in \Gamma(D^{\perp})$ için (IV.2.18),(IV.2.40) ve (IV.2.42) den D distribüsyonu integrallenebilirdir. Gauss formülünden

$$g(\overline{\nabla}_X Y, JZ) = g(\nabla_X Y, JZ) + g(h(X,Y),JZ)$$

dır. (IV.2.42) den

$$= g(\nabla_X Y, JZ)$$

olur. Burada $\nabla_X Y \in \Gamma(TM)$, $JZ \in \Gamma(TM^{\perp})$ olduğundan

$$g\left(\nabla_X Y, JZ\right) = 0$$

dır. Buradan

$$J\nabla_X Y \in \Gamma(D)$$
$$\nabla_X Y \in \Gamma(D)$$

elde edilir. Böylece Teorem I.7.2 den ispat tamamlanır.

ii) ($\Rightarrow$)Kabul edelim ki D distribüsyonu integrallenebilir ve D nin maksimal integral manifoldu $\overline{M}$ de total jeodezik olsun Bu durumda Teorem I.7.2 den $X, Y \in \Gamma(D)$

$$\overline{\nabla}_X Y \in \Gamma(D)$$

dır. Gauss formülünden

$$g\left(h(X,Y),V\right) = g\left(\overline{\nabla}_X Y, V\right) = 0$$

olur. Buradan $h(X,Y) = 0$ elde edilir. Böylece M D-jeodeziktir.

($\Leftarrow$) M D-jeodezik olsun. Bu durumda (IV.2.40) dan D integrallenebilir olduğundan $X, Y \in \Gamma(D)$ için $\overline{\nabla}_X Y \in \Gamma(TM)$ dır. Böylece

$$g\left(\overline{\nabla}_X Y, Z\right) = g\left(J\overline{\nabla}_X Y, JZ\right) = g\left(h(X, JY), JZ\right) = 0$$

dır. Bu $\overline{\nabla}_X Y \in \Gamma(D)$ olduğunu gösterir. Böylece Teorem I.7.2. den D in her maksimal integral manifoldu $\overline{M}$ de total jeodeziktir.

P ve Q sırasıyla D invaryant distribüsyon ve $D^{\perp}$ anti-invaryant distribüsyonunun projeksiyon dönüşümleri olsun. Bu durumda $\overline{M}$ Kaehler manifold olduğundan $X, Y \in \Gamma(TM)$

$$\overline{\nabla}_X JY = J\overline{\nabla}_X Y$$

dır.(IV.1.7) ve (IV.2.1) ifadeleri gözönüne alınırsa

$$\overline{\nabla}_X \phi Y + \omega Y = J\left(\nabla_X Y + h(X,Y)\right)$$
$$\overline{\nabla}_X \phi Y + \overline{\nabla}_X \omega Y = J\nabla_X Y + Jh(X,Y)$$
$$\nabla_X \phi Y + h(X,\phi Y) - A_{\omega Y} X + \nabla^{\perp}{}_X \omega Y = \phi\nabla_X Y + \omega\nabla_X Y + Bh(X,Y) + Ch(X,Y)$$

elde edilir. Buradan

$$\nabla_X \phi Y + h(X,\phi Y) - A_{\omega Y} X + \nabla^{\perp}{}_X \omega Y - \phi\nabla_X Y - \omega\nabla_X Y - Bh(X,Y) - Ch(X,Y) = 0$$

dır. Denklem teğet ve normal kısımlarına göre düzenlenirse

$$\nabla_X \phi Y - A_{\omega Y} X - \phi \nabla_X Y - Bh(X,Y) = 0$$
$$h(X,\phi Y) + \nabla^{\perp}{}_X \omega Y - \omega \nabla_X Y - Ch(X,Y) = 0 \qquad \text{(IV.2.44)}$$

olur. Birinci denkleme P ve Q operatörleri uygulanırsa

$$P\nabla_X \phi Y - PA_{\omega Y} X = \phi \nabla_X Y \qquad \text{(IV.2.45)}$$

$$Q\nabla_X \phi Y - QA_{\omega Y} X = Bh(X,Y) \qquad \text{(IV.2.46)}$$

dır.

Şimdi $T\overline{M} = D \oplus D^{\perp} \oplus TM^{\perp}$ olduğu gözönüne alınırsa $X \in \Gamma(D \oplus D^{\perp})$ $V \in \Gamma(TM^{\perp})$ için

$$\overline{\nabla}_X JV = J\overline{\nabla}_X V$$
$$\overline{\nabla}_X BV + CV = J(-A_V X + \nabla^{\perp}{}_X V)$$
$$\overline{\nabla}_X BV + \overline{\nabla}_X CV = -JA_V X + J\nabla^{\perp}{}_X V$$
$$\nabla_X BV + h(X,BV) - A_{CV} X + \nabla^{\perp}{}_X CV = -\phi A_V X - \omega A_V X + B\nabla^{\perp}{}_X V + C\nabla^{\perp}{}_X V$$
$$\nabla_X BV + h(X,BV) - A_{CV} X + \nabla^{\perp}{}_X CV + \phi A_V X + \omega A_V X - B\nabla^{\perp}{}_X V - C\nabla^{\perp}{}_X V = 0$$

elde edilir. Böylece

$$\nabla_X BV - A_{CV} X + \phi A_V X - B\nabla^{\perp}{}_X V = 0 \qquad \text{(IV.2.47)}$$

ve

$$h(X,BV) + \nabla^{\perp}{}_X CV + \omega A_V X - C\nabla^{\perp}{}_X V = 0 \qquad \text{(IV.2.48)}$$

dır. (IV.2.47) ye P ve Q operatörleri uygulanırsa

$$P(\nabla_X BV) - P(A_{CV} X) = -\phi(A_V X) \qquad \text{(IV.2.49)}$$

ve

$$Q\nabla_X BV = QA_{CV} X + B\nabla^{\perp}{}_X V \qquad \text{(IV.2.50)}$$

olur[2].

Bundan sonra aksi söylenmedikçe $D, D^{\perp}$ distribüsyonlarının maksimal integral manifoldlarını M_1, M_2 ile göstereceğiz.

IV.2.15. Teorem. $\overline{M}$ bir Kaehler manifold ve $\overline{M}$ nin CR-altmanifoldu M olsun. Bu taktirde M_2 manifoldunun M de total jeodezik olması için gerek ve yeter şart $X \in \Gamma(D^{\perp}), Z \in \Gamma(D)$ için

$$h(X,Z)\in\Gamma(\nu) \tag{IV.2.51}$$

dır. Burada ν'$TM^{\perp}$ uzayının $JD^{\perp}$ e ortogonal olan bir altuzayıdır öyleki $TM^{\perp}=JD^{\perp}\oplus\nu$ dır [2].

İspat. $X,Y\in\Gamma(D^{\perp})$, $Z\in\Gamma(D)$ için (IV.2.44) ifadesinin birinci denkleminden

$$g\left(\nabla_X \phi Y - A_{\omega Y}X - \phi\nabla_X Y - Bh(X,Y),Z\right)=0$$

$$g\left(-A_{\omega Y}X,Z\right)-g\left(\phi\nabla_X Y,Z\right)=0$$

$$g\left(\phi\nabla_X Y,Z\right)=-g\left(A_{\omega Y}X,Z\right)=-g\left(h(X,Z),\omega Y\right)$$

dır. Böylece M_2 nin total jeodezik olması için gerek ve yeter şart $\nabla_X Y\in\Gamma(D^{\perp})$ dır.

IV.2.3. Sonuç. $\overline{M}$ bir Kaehler manifold ve $\overline{M}$ nin mixed jeodezik CR-altmanifoldu M olsun. Bu taktirde $D^{\perp}$ distribüsyonunun her maksimal integral manifoldu M de total jeodeziktir [2].

IV.2.4. Sonuç. $\overline{M}$ Kaehler manifold ve $\overline{M}$ nin anti-holomorfik altmanifoldu M olsun. Bu taktirde M altmanifoldunun mixed jeodezik olması için gerek ve yeter şart $D^{\perp}$ distribüsyonun her maksimal integral manifoldunun M de total jeodezik olmasıdır [2].

IV.2.16. Teorem. $\overline{M}$ Kaehler manifold ve $\overline{M}$ nin CR-altmanifoldu M olsun. Bu durumda M_2 $\overline{M}$ de total jeodeziktir $\Leftrightarrow$ $X,Y\in\Gamma(D^{\perp})$, $Z\in\Gamma(TM)$ için

$$\nabla^{\perp}{}_X JY\in\Gamma(JD^{\perp}) \tag{IV.2.52}$$

ve

$$h(X,Z)\in\Gamma(\nu) \tag{IV.2.53}$$

dır [2].

İspat. Gauss formülü kullanılırsa $X,Y \in \Gamma(D^{\perp})$, $Z \in \Gamma(D)$ ve $V \in \Gamma(\nu)$ için

$$\begin{aligned} g(\overline{\nabla}_X Y, Z) &= g(\overline{\nabla}_X JY, JZ) \\ &= g(-A_{JY}X + \nabla^{\perp}{}_X JY, JZ) \\ &= -g(A_{JY}X, JZ) + g(\nabla^{\perp}{}_X JY, JZ) \\ &= -g(h(X,JZ), JY) \end{aligned} \tag{IV.2.54}$$

elde edilir. $U \in \Gamma(D^{\perp})$ için

$$\begin{aligned} g(\overline{\nabla}_X Y, JU) &= g(\nabla_X Y + h(X,Y), JU) \\ &= g(\nabla_X Y, JU) + g(h(X,Y), JU) \\ &= g(h(X,Y), JU) \end{aligned} \tag{IV.2.55}$$

ve $V \in \Gamma(\nu)$ için

$$\begin{aligned} g(\overline{\nabla}_X Y, V) &= g(\overline{\nabla}_X JY, JV) \\ &= g(-A_{JY}X + \nabla^{\perp}{}_X JY, JV) \\ &= -g(A_{JY}X, JV) + g(\nabla^{\perp}{}_X JY, JV) \\ &= g(\nabla^{\perp}{}_X JY, JV) \end{aligned} \tag{IV.2.56}$$

dir. (IV.2.54),(IV.2.55) ve (IV.2.56) dan M_2 $\overline{M}$ de total jeodeziktir $\Leftrightarrow$ $X,Y \in \Gamma(D^{\perp})$ için

$$\overline{\nabla}_X Y \in \Gamma(D^{\perp})$$

dır. Böylece $X,Y \in \Gamma(D^{\perp})$, $Z \in \Gamma(TM)$ için $\nabla^{\perp}{}_X Y \in \Gamma(JD^{\perp})$ ve $h(X,Z) \in \Gamma(\nu)$

olur.

IV.2.6. Tanım. $\overline{M}$ bir manifold ve $\overline{M}$ nin CR-altmanifoldu M olsun. Eğer M nin ikinci temel formu $X,Y \in \Gamma(D^{\perp})$ için

$$h(X,Y) = 0 \tag{IV.2.57}$$

ise M ye $D^{\perp}$-jeodeziktir denir [2].

IV.2.17. Teorem. $\overline{M}$ Kaehler manifold ve $\overline{M}$ nin CR-altmanifoldu M olsun. Bu taktirde M_2, $\overline{M}$ de total jeodeziktir $\Leftrightarrow$ M, $D^{\perp}$-jeodezik ve $X,Y \in \Gamma(D^{\perp})$, $Z \in \Gamma(D)$ için

$$g(h(X,Z),JY) = 0 \qquad \text{(IV.2.58)}$$

dır [2].

İspat. Gauss formülü ve (IV.2.56) dan $X,Y \in \Gamma(D^{\perp})$, $V \in \Gamma(\nu)$ için

$$\begin{aligned} g(\overline{\nabla}_X Y, V) &= g(\overline{\nabla}_X JY, JV) \\ &= g(\nabla^{\perp}{}_X JY, JV) \end{aligned}$$

ve

$$g(\nabla^{\perp}{}_X JY, JV) = g(h(X,Y),V) \qquad \text{(IV.2.59)}$$

elde edilir. IV.2.16 teoreminde IV.2.59. ifadesi kullanıldığında teorem ispatlanır.

IV.2.4. Sonuç. $\overline{M}$ Kaehler manifold ve $\overline{M}$ manifoldunun anti-holomorfik altmanifoldu M olsun. Bu taktirde M $D^{\perp}$ distribüsyonunun maksimal integral manifoldunun total jeodezik olması için gerek ve yeter şart M altmanifoldunun mixed jeodezik ve $D^{\perp}$-jeodezik olmasıdır[2] .

IV.3 . Kaehler Manifoldların Umbilik CR-altmanifoldları

IV.3.1. Lemma. $\overline{M}$ Kaehler manifold ve $\overline{M}$ nin CR-altmanifoldu M olsun. Bu taktirde $X,Y \in \Gamma(D^{\perp})$ için

$$A_{JX}Y = A_{JY}X \qquad \text{(IV.3.1)}$$

dır [2].

İspat. $X,Y \in \Gamma(D^{\perp})$ ve $Z \in \Gamma(TM)$

$$\begin{aligned} \overline{\nabla}_X JY &= -A_{JY}X + \nabla^{\perp}{}_X JY \\ \overline{\nabla}_Y JX &= -A_{JX}Y + \nabla^{\perp}{}_Y JX \end{aligned}$$

eşitliklerinden

$$g\left(\overline{\nabla}_X JY - \overline{\nabla}_Y JX, Z\right) = g\left(A_{JX}Y - A_{JY}X, Z\right)$$

elde edilir. Buradan

$$\begin{aligned} g\left(\overline{\nabla}_X JY - \overline{\nabla}_Y JX, Z\right) &= g\left(J\overline{\nabla}_X Y - J\overline{\nabla}_X Y, Z\right) \\ &= -g\left(\overline{\nabla}_X Y - \overline{\nabla}_X Y, JZ\right) \\ &= -g([X,Y], JZ) \\ &= -g([X,Y], \phi Z) \end{aligned}$$

dır. Böylece

$$g\left(A_{JX}Y - A_{JY}X, Z\right) = -g([X,Y], \phi Z) \qquad \text{(IV.3.2)}$$

dır. $D^{\perp}$ integrallenebilir olduğundan

$$A_{JX}Y = A_{JY}X$$

olur.

IV.3.1.Teorem. $\overline{M}$ Kaehler manifold ve $\overline{M}$ nin CR-altmanifoldu M olsun. Eğer M total umbilik ise bu taktirde

i) M total jeodezik

ii) M total reel

iii) anti-invaryant distribüsyon bir boyutludur

önermelerinden sadece biri doğrudur[2]

İspat. Kabul edelim ki boy$D^{\perp}$>1 olsun. Bu durumda $X \in \Gamma\left(D^{\perp}\right)$ ve M nin ortalama eğrilik vektörü için (IV.3.1) den

$$A_{JX}BH = A_{JBH}X \qquad \text{(IV.3.3)}$$

sahip oluruz. M total umbilik olduğundan

$$h(X,Y) = g(X,Y)H \qquad \text{(IV.3.4)}$$

eşitliği vardır. Böylece (IV.3.3) ifadesi X ile iç çarpıma tabi tutalursa

$$g\left(A_{JX}BH, X\right) = g\left(A_{JBH}X, X\right)$$

veya

$$g(h(BH,X),JX) = g(h(X,X),JBH)$$
$$g(g(BH,X)H,JX) = g(g(X,X)H,JBH)$$
$$g(BH,X)g(H,JX) = g(X,X)g(H,JBH)$$
$$g(BH,X)g(H,JX) = -g(X,X)g(JH,BH) \qquad \text{(IV.3.5)}$$

elde edilir. X, BH ya ortogonal alınırsa (IV.3.5) den BH=0 elde edilir. (IV.2.48) den $Y \in \Gamma(TM)$ için

$$P(A_{CH}Y) = \phi(A_H Y) \qquad \text{(IV.3.6)}$$

elde edilir.

Şimdi kabul edelim ki M total reel olmasın, yani boy$D > 2$ olsun. Bu durumda $Z \in \Gamma(D)$ için

$$g(PA_{JH}Y,Z) = g(A_{JH}Y,Z) = g(Y,Z)g(JH,H) = 0 \qquad \text{(IV.3.7)}$$

ve

$$g(\phi A_H Y,Z) = -g(A_H Y,JZ) = -g(Y,JZ)g(H,H) \qquad \text{(IV.3.8)}$$

dır. Burada JZ nin yerine Y alınır ve (IV.3.6) ,(IV.3.7) kullanılırsa

$$\begin{aligned} g(PA_{CH}Y,Z) &= g(A_{CH}Y,Z) \\ &= g(A_{JH}Y,Z) - g(A_{BH}Y,Z) \\ &= g(A_{JH}Y,Z) \end{aligned}$$

olur. Böylece

$$g(Y,Y)g(H,H) = 0$$

elde edilir. Buradan H=0 elde edilir. Bu ise M manifoldunun total jeodezik olduğunu gösterir.

IV.3.2. Teorem. $\overline{M}$ Kaehler manifold ve $\overline{M}$ nin total jeodezik CR-altmanifoldu M olsun. Bu durumda M CR-çarpımdır[2].

İspat. Kaehler manifoldun CR-altmanifoldu için anti-invaryant distribüsyon integrallenebilirdir. Ayrıca $\underline{M}$ total jeodezik olduğundan Teorem IV.2.15 den M_2 total jeodezik ve TeoremIV.2.14den de D integrallenebilir, D nin maksimal integral altmanifoldu total jeodeziktir. Böylece M CR-çarpımdır.

IV.3.3. Teorem. . $\overline{M}$ Kaehler manifold ve $\overline{M}$ nin total umbilik CR-altmanifoldu M olsun. Bu durumda $X \in \Gamma(D)$ ve $Y \in \Gamma(D^\perp)$ için K $\overline{M}$ nin kesit eğriliği olmak üzere

$$K(X \wedge Y) = 0 \tag{IV.3.9}$$

dır[2].

İspat. h nın kovaryant türevi

$$(\nabla_X h)(Y,Z) = \nabla^\perp{}_X h(Y,Z) - h(\nabla_X Y, Z) - h(Y, \nabla_X Z)$$

olduğundan (IV.3.4) kullanılırsa $X,Y,Z \in \Gamma(TM)$ için

$$\begin{aligned}
(\nabla_X h)(Y,Z) &= \nabla^\perp{}_X (g(Y,Z)H) - g(\nabla_X Y, Z)H - g(Y, \nabla_X Z)H \\
&= \nabla^\perp{}_X g(Y,Z)H + g(Y,Z)\nabla^\perp{}_X H - g(\nabla_X Y, Z)H \\
&\quad - g(Y, \nabla_X Z)H \\
(\nabla_X h)(Y,Z) &= g(\nabla^\perp{}_X Y, Z)H + g(\nabla^\perp{}_X Z, Y)H + g(Y,Z)\nabla^\perp{}_X H \\
&\quad - g(\nabla_X Y, Z)H - g(Y, \nabla_X Z)H
\end{aligned}$$

$$(\nabla_X h)(Y,Z) = g(Y,Z)\nabla^\perp{}_X H \tag{IV.3.10}$$

elde edilir. Diğer taraftan $V \in \Gamma(TM^\perp)$ için

$$\begin{aligned}
\overline{R}(X,Y,Z,V) &= g(\overline{R}(X,Y)Z,V) \\
&= g(R(X,Y)Z,V) - g\left(A_{h(Y,Z)}X, V\right) + g\left(A_{h(X,Z)}Y, V\right) \\
&\quad + g((\nabla_X h)(Y,Z),V) - g((\nabla_Y h)(X,Z),V) \\
&= g((\nabla_X h)(Y,Z),V) - g((\nabla_Y h)(X,Z),V) \\
&= g(Y,Z)g(\nabla^\perp{}_X H, V) - g(X,Z)g(\nabla^\perp{}_Y H, V)
\end{aligned} \tag{IV.3.11}$$

dır. $X \in \Gamma(D)$ ve $Y \in \Gamma(D^\perp)$ alınırsa (IV.3.11) den

$$\overline{R}(X,Y,X,Y)=\overline{R}(X,Y,JX,JY)=0$$

elde edilir.

(IV.3.3) den aşağıdaki sonuçlar verilebilir.

IV.3.1. Sonuç. Pozitif veya negatif eğrilikli bir Kaehler manifoldun da has(proper) total umbilik olmayan bir CR-altmanifold vardır[2].

IV.3.2. Sonuç. Pozitif veya negatif eğrilikli Kaehler manifoldun da total umbilik olmayan bir reel hiper yüzeyi vardır[2].

$\overline{M}$ Kaehler manifold ve $\overline{M}$ nin CR-altmanifoldu M olsun. Bu durumda M de normal demet için

$$TM^{\perp}=JD^{\perp}\oplus \nu \qquad \text{(IV.3.12)}$$

ortogonal ayrışımına sahip oluruz. $\forall p\in M$ için $T_{\nu}(p)$ uzayının boyutu r-olsun. ν holomorfik vektör demeti olduğundan lokal ortonormal çatı alanı $TM^{\perp}$ üzerinde , $e_1,\dots,e_q$ $D^{\perp}$ üzerinde lokal ortonormal çatı alanı olmak üzere

$$\{Je_1,\dots,Je_q,v_1,\dots,v_r,v_{r+1}=Jv_1,\dots,Jv_r\}$$

dır. Bu durumda

$$A_i=A_{Je_i} \quad A_{\alpha}=A_{v_\alpha}\,,A_{\alpha^*}=A_{v_{\alpha^*}}$$

olsun. Başka bir durum söz konusu olmadıkça indisleri

$$i,j,k=1\dots q \quad \alpha,\beta,\gamma=1\dots r$$
$$\alpha^*,\beta^*,\gamma^*=r+1\dots 2r$$

olarak alacağız.

IV.3.1. Tanım. M bir CR-altmanifold olsun. Eğer A Weingarten temel tensörü $a_i,b_i,a_\alpha,b^i_\alpha,a_{\alpha^*},b^i_{\alpha^*}$ M de diferensiyellenebilir fonksiyon ve $X\in\Gamma(TM)$ için

$$A_iX=a_iX+b_ig(X,e_i)e_i \qquad \text{(IV.3.13)}$$

$$A_\alpha X=a_\alpha X+\sum_{i=1}^{2}b^i_\alpha g(X,e_i)e_i \qquad \text{(IV.3.14)}$$

$$A_{\alpha^*}X = a_{\alpha^*}X + \sum_{i=1}^{r} b_{\alpha^*}^{i} g(X, e_i) e_i \qquad \text{(IV.3.15)}$$

ile verilirse M ye pseudo-umbiliktir denir[2].

IV.3.1. Önerme. $\overline{M}$ Kaehler manifold ve $\overline{M}$ nin pseudo umbilik CR-altmanifoldu M olsun. Bu durumda M mixed jeodeziktir[2].

İspat. (IV.3.13) - (IV.3.15) den invaryant ve anti-invaryant distribüsyonlar A_V dönüşümü altında invaryanttır. Böylece (IV.2.7) teoreminden M mixed jeodeziktir.

IV.3.2. Önerme. $\overline{M}$ Kaehler manifold ve $\overline{M}$ nin mixed jeodezik CR-altmanifoldu M olsun. Bu durumda $X \in \Gamma(D)$, $V \in \Gamma(\nu)$ için

$$A_{JV}X = JA_V X \qquad \text{(IV.3.16)}$$

dır [2].

İspat. M mixed jeodezik olduğundan tanım (IV.2.2) ve Teorem IV.2.7.den

$$g\left(A_{JV}X - JA_V X, Y\right) = g\left(h(X,Y), JV\right) + g\left(A_V X, JY\right) = 0$$

dır. Diğer taraftan $Z \in \Gamma(D)$ için

$$\begin{aligned} g\left(A_{JV}X - JA_V X, Z\right) &= g\left(-\overline{\nabla}_X JV, Z\right) + g\left(A_V X, JZ\right) \\ &= g\left(\overline{\nabla}_X V + A_V X, JZ\right) \\ &= g\left(\nabla^{\perp}{}_X V, JZ\right) = 0 \end{aligned}$$

olur. Böylece (IV.3.12) ayrışımından

$$\begin{aligned} A_{JV}X - JA_V X &= 0 \\ A_{JV}X &= JA_V X \end{aligned}$$

elde edilir.

IV.3.3. Önerme. $\overline{M}$ Kaehler manifold ve $\overline{M}$ nin pseudo umbilik has(proper) CR-altmanifoldu M olsun. Eğer $q>1$ ise bu taktirde $a_i, a_\alpha, a_{\alpha^*}$ fonksiyonları M üzerinde sıfıra denktir[2].

İspat. (IV.3.1) ve (IV.3.13) den

$$a_i = g\left(A_i e_j, e_j\right) = g\left(A_j e_i, e_j\right) = 0 \; j \neq i$$

elde edilir. Şimdi invaryant D distribüsyonun birim vektör alanı X olsun. (IV.3.14) (IV.3.15) ve önerme (IV.3.1) kullanılırsa

$$\begin{aligned} a_\alpha &= g\left(A_\alpha X, X\right) \\ &= g\left(JA_\alpha X, JX\right) \\ &= a_{\alpha^*} g(X, JX) \\ &= 0 \end{aligned}$$

elde edilir. Benzer olarak

$$\begin{aligned} a_{\alpha^*} &= g\left(A_{\alpha^*} X, X\right) \\ &= g\left(JA_{\alpha^*} X, JX\right) \\ &= a_\alpha g(X, JX) \\ &= 0 \end{aligned}$$

olur.

IV.3.4. Teorem. $\overline{M}$ Kaehler manifold ve $\overline{M}$ nin pseudo umbilik has(proper) CR-altmanifoldu M olsun. Eğer $q>1$ ise Bu durumda M CR-çarpımdır[2].

İspat. $X, Y \in \Gamma(TM)$ için (IV.3.13)-(IV.3.15) bağıntılarından

$$g\left(A_i X, Y\right) = g\left(\left(a_i X + b_i g\left(X, e_i\right) e_i\right), Y\right)$$

ve

$$h(X,Y)=\sum_{i=1}^{q} b_i g(X,e_i)g(Y,e_i)Je_i$$
$$+\sum_{\alpha=1}^{r}\sum_{i=1}^{q}\left\{b_\alpha^i g(X,e_i)g(Y,e_i)v_\alpha\right\} \qquad \text{(IV.3.17)}$$
$$+\sum_{\alpha^*=r+1}^{2r}\sum_{i=1}^{q}\left\{b_{\alpha^*}^i g(X,e_i)g(Y,e_i)v_{\alpha^*}\right\}$$

dır. Böylece $X \in \Gamma(D)$ ve $Y \in \Gamma(TM)$ için

$$h(X,Y)=0$$

olur. Teorem IV.2.14 den D integrallenebilir ve maksimal integral manifoldu M de total jeodeziktir. Diğer taraftan Teorem IV.2.15.den $D^\perp$ distribüsyonun her maksimal integral manifoldu total jeodeziktir. Böylece ispat tamamlanır.

Şimdi M_2 $D^\perp$ distribüsyonun maksimal integral manifoldu olsun. $D, D^\perp$ ve v vektör demetlerini aynı sembollerle gösterelim. Böylece M_2 maksimal integral altmanifolduna normal olan demet

$$\mu = D \oplus JD^\perp \oplus v$$

dır. (IV.1.7) bağıntısına benzer olarak $V \in \Gamma(v)$ için

$$JV = B^*V + C^*V \qquad \text{(IV.3.18)}$$

alalım. Burada $B^*V \in \Gamma(D^\perp), C^*V \in \Gamma(D \oplus v)$ dır. M_2, $\overline{M}$ nin total reel altmanifoldu olduğundan C^* morfizmi normal demet üzerinde bir f-yapıdır. h^* ile M_2 nın ikinci temel formunu ve A_{V^*} ile de v normal kesite karşılık gelen Weingarten temel tensörünü gösterelim. $V \in \Gamma(v), X \in \Gamma(TM_2)$ için C^* f-yapısının kovaryant türevini

$$(\nabla'_X C^*)V = \nabla^*_X C^*V - C^*\nabla^*_X V$$

ile tanımlayalım. Burada ∇^* μ vektör demeti üzerinde $\overline{\nabla}$ den indirgenen Lineer konneksiyondur. $X \in \Gamma(TM_2), V \in \Gamma(\mu)$ için

$$\overline{\nabla}_X JV = J\overline{\nabla}_X V$$

dır. Burada işlem yapılırsa

$$\overline{\nabla}_X B^*V + C^*V = J\left(-A^*_V X + \nabla^*_X V\right)$$
$$\overline{\nabla}_X B^*V + \overline{\nabla}_X C^*V = J\left(-A^*_V X\right) + J\left(\nabla^*_X V\right)$$
$$\nabla^*_X B^*V + h^*\left(X, B^*V\right) - A^*_{C^*V} X + \nabla^*_X C^*V = -JA^*_V X + B^*\nabla^*_X V + C^*\nabla^*_X V$$
$$h^*\left(X, B^*V\right) + \nabla^*_X C^*V = -JA^*_V X + C^*\nabla^*_X V$$
$$\left(\nabla'_X C^*\right)V = -h^*\left(X, B^*V\right) - JA^*_V X \tag{IV.3.19}$$

elde edilir.

IV.3.4. Tanım. M_2 $D^{\perp}$ distribüsyonunun maksimal integral manifoldu olsun. Eğer $X \in \Gamma(TM_2)$ için

$$\nabla_X C^* = 0$$

ise C^* f-yapısına paraleldir denir[2].

IV.3.5. Tanım. $\overline{M}$ bir Kaehler manifold ve $\overline{M}$ nin CR-altmanifoldu M olsun. $X \in \Gamma(TM), V \in \Gamma(TM^{\perp})$ için

$$\left(\nabla_X C\right)V = \nabla^{\perp}_X CV - C\left(\nabla^{\perp}_X V\right) = 0$$

sağlanıyorsa $TM^{\perp}$ üzerinde C f-yapısına paraleldir denir[2].

IV.3.5. Teorem. $\overline{M}$ bir Kaehler manifold ve $\overline{M}$ nin (q>1)pseudo umbilik has CR-altmanifoldu M olsun. Bu durumda aşağıdakiler denktir[2].

i) $TM^{\perp}$ üzerinde C, f-yapısı paraleldir.

ii) μ üzerinde C^* f-yapısı paraleldir

iii) M üzerinde $b^{I}_{\alpha}, b^{I}_{\alpha^*}$ fonksiyonları sıfıra denktir.

İspat. (*i*⇔*iii*) (IV.2.50) den $X \in \Gamma(TM), V \in \Gamma(TM^{\perp})$ için

$$\left(\nabla_X C\right)V = -h(X, BV) - \omega\left(A_V X\right)$$

dır. V yerine Je_i ve V_{α}, V_{α^*} alınırsa (IV.3.17) den

$$\left(\nabla_X C\right)V = -\omega\left(A_V X\right) \tag{IV.3.20}$$

elde edilir. Böylece $(\nabla_X C)V = 0 \Leftrightarrow \omega(A_V X) = 0$ Buradan $b_\alpha^l, b_{\alpha^*}^l$ fonksiyonlarının hepsi sıfırdır.

($ii \Leftrightarrow iii$) M^* Mde total jeodezik olduğundan $X,Y \in \Gamma(TM^*)$ için

$$h^*(X,Y) = h(X,Y) \qquad \text{(IV.3.21)}$$

dır. Buradan $X,Y \in \Gamma(TM^*)$ için

$$A^*_V = 0 \qquad \text{(IV.3.22)}$$

dır. (IV.3.19) dan C^* paralel olması için gerek ve yeter şart

$$h^*(X,e_i) = J(A^* Je_i) \qquad \text{(IV.3.23)}$$

ve

$$A^*_{V_\alpha} X = A^*_{V_{\alpha^*}} X = 0 \qquad \text{(IV.3.24)}$$

olmasıdır.

($i \Leftrightarrow ii$) $X \in \Gamma(D)$ için

$$(\nabla_X C)V = -h(X,BV) - \omega(A_V X)$$

dır. Bu durumda C $TM^\perp$ üzerinde paraleldir gerek ve yeter şart

$$h(X,e_i) = J(A_i X) \qquad \text{(IV.3.25)}$$

ve

$$A_\alpha X = A_{\alpha^*} X = 0 \qquad \text{(IV.3.26)}$$

dır. Böylece (IV.3.21) ve (IV.3.26) den C^* paraleldir gerek ve yeter şart C paraleldir.

IV.3.4. Önerme. $\overline{M}$ bir Kaehler manifold ve $\overline{M}$ nin ($q>1$) paralel ikinci form ile birlikte pseudo umbilik has CR-altmanifoldu M olsun. Bu durumda $D^\perp$ distribüsyonunun her maksimal integral manifoldu paralel ikinci temel forma sahiptir[2].

İspat. ikinci temel form paralel olduğundan

$$(\nabla_X h)(Y,Z) = \nabla^\perp_X h(Y,Z) - h(\nabla_X Y, Z) - h(Y, \nabla_X Z) = 0$$

dır. Burada (IV.3.21) kullanılırsa

$$\left(\nabla_X h^*\right)(Y,Z)=0$$

elde edilir.

IV.3.6. Teorem. $\overline{M}$ pozitif veya negatif eğrilikli Kaehler manifold olsun. Bu durumda $\overline{M}$ ye gömülen, $q>1$ olmak üzere pseudo umbilik has olmayan CR-altmanifoldlar vardır[2].

İspat. (IV.3.17) kullanılırsa $X\in\Gamma(D), Y\in\Gamma(D^{\perp})$ için

$$\begin{aligned}\overline{R}(X,Y,JX,JY)&=g\left(\overline{R}(X,Y)JX,JY\right)\\&=g\left(\left(\left(\nabla_X h\right)(Y,JX)-\left(\nabla_Y h\right)(X,JX)\right),JY\right)\\&=g\left(\nabla^{\perp}{}_X h(Y,JX)-h\left(\nabla_X Y,JX\right)-h\left(Y,\nabla_X JX\right),JY\right)\\&\quad-g\left(\nabla^{\perp}{}_Y h(X,JX)-h\left(\nabla_Y X,JX\right)-h\left(X,\nabla_Y JX\right),JY\right)\\&=-g\left(h\left(Y,\nabla_X JX\right),JY\right)\end{aligned}\qquad\text{(IV.3.27)}$$

elde edilir. $h(X,JX)=h(X,X)=0$ olduğundan

$$\nabla_X JX=J\nabla_X X$$

dır. Buradan $\nabla_X JX\in\Gamma(D)$,(IV.3.27) gözönüne alınırsa her pseudo umbilik CR-altmanifold mixed jeodezik olduğundan

$$g\left(\overline{R}(X,Y)X,Y\right)=g\left(\overline{R}(X,Y)JX,JY\right)=0$$

elde edilir.

IV.4. Kaehler Manifoldların Normal CR-altmanifoldları

$\overline{M}$ Kaehler manifold ve $\overline{M}$ nin CR-altmanifoldu M olsun. Bu durumda M üzerinde ϕ f-yapısı ve normal demet değerli 1-form vardır. g Hermityen metrik ve $X,Y\in\Gamma(TM)$ olmak üzere

$$g(JX,JY)=g(\phi X+\omega X,\phi Y+\omega Y)$$
$$=g(\phi X,\phi Y)+g(\phi X,\omega Y)+g(\omega X,\phi Y)+g(\omega X,\omega Y)$$
$$=g(\phi X,\phi Y)+g(\omega X,\omega Y)$$

dır. Böylece

$$g(\phi X,\phi Y)=g(JX,JY)-g(\omega X,\omega Y) \tag{IV.4.1}$$

olur. $X,Y\in\Gamma(TM)$ için (IV.2.44) bağıntısının birinci denkleminden

$$(\nabla_X\phi)Y=Bh(X,Y)+A_{\omega Y}X \tag{IV.4.2}$$

elde edilir. Diğer taraftan ω nin kovaryant türevi ve (IV.2.44) bağıntısının ikinci denkleminden

$$(\nabla_X\omega)Y=Ch(X,Y)-h(X,\phi Y) \tag{IV.4.3}$$

dır. (IV.2.47) ve (IV.2.48) den $X\in\Gamma(TM)$, $V\in\Gamma(TM^{\perp})$ için

$$(\nabla_X B)V=A_{CV}X-\phi(A_V X) \tag{IV.4.4}$$

ve

$$(\nabla_X C)V=-h(X,BV)-\omega(A_V X) \tag{IV.4.5}$$

elde edilir.

$\overline{M}$ de bir CR-altmanifoldun temel 2-formu $X,Y\in\Gamma(TM)$için

$$\Omega(X,Y)=g(X,\phi Y) \tag{IV.4.6}$$

ile tanımlanır. Bu durumda (IV.2.44) bağıntısının ikinci denkleminden

$$\begin{aligned}\Omega(\phi X,\phi Y)&=g(\phi X,\phi(\phi Y))\\&=g(\phi X,\phi^2 Y)\\&=g(J\phi X,J\phi^2 Y)\\&=g(\phi X,-PY)\\&=g(\phi X,-Y+QY)\\&=g(\phi X,-Y)+g(\phi X,QY)\\&=g(-PX,-\phi Y)\\&=g(-X,-\phi Y)\\&=\Omega(X,Y)\end{aligned} \tag{IV.4.7}$$

elde edilir ve ω nin dış türevi

$$d\omega(X,Y)=\frac{1}{2}\{\nabla^{\perp}{}_X(\omega Y)-\nabla^{\perp}{}_Y(\omega X)-\omega[X,Y]\} \tag{IV.4.8}$$

ile verilir.

Şimdi $X,Y \in \Gamma(TM)$ için S tensör alanını

$$S(X,Y)=[\phi,\phi](X,Y)-2Bd\omega(X,Y) \tag{IV.4.9}$$

ile tanımlayalım. (IV.4.8) ve ∇ simetrik konneksiyonu gözönüne alınırsa (IV.4.9) denklemi

$$\begin{aligned}
S(X,Y) &= [\phi X,\phi Y]+\phi^2[X,Y]-\phi[X,\phi Y]-\phi[\phi X,Y] \\
&\quad -B\left\{\nabla^{\perp}{}_X\omega Y-\nabla^{\perp}{}_Y\omega X-\omega[X,Y]\right\} \\
&= \nabla_{\phi X}\phi Y-\nabla_{\phi Y}\phi X+\phi^2\nabla_X Y-\phi^2\nabla_Y X-\phi\nabla_X\phi Y \\
&\quad +\phi\nabla_{\phi Y}X-\phi\nabla_{\phi X}Y+\phi\nabla_Y\phi X+B\left\{-\nabla^{\perp}{}_X\omega Y+\nabla^{\perp}{}_Y\omega X\right. \\
&\quad \left.+\omega\nabla_X Y-\omega\nabla_Y X\right\} \\
&= \left(\nabla_{\phi X}\phi\right)Y-\left(\nabla_{\phi Y}\phi\right)X-\phi\left\{-\phi\nabla_X Y+\nabla_X\phi Y\right\} \\
&\quad +\phi\left\{\nabla_Y\phi X-\phi\nabla_Y X\right\}-B\left\{\left(\nabla_X\omega\right)Y-\left(\nabla_Y\omega\right)X\right\} \\
&= \left(\nabla_{\phi X}\phi\right)Y-\left(\nabla_{\phi Y}\phi\right)X-\phi\left\{\left(\nabla_X\phi\right)Y\right\}+\phi\left\{\left(\nabla_Y\phi\right)X\right\} \\
&\quad -B\left\{\left(\nabla_X\omega\right)Y-\left(\nabla_Y\omega\right)X\right\}
\end{aligned} \tag{IV.4.10}$$

olur [2].

IV.4.1. Tanım. $\overline{M}$ Kaehler manifold ve $\overline{M}$ nin CR-altmanifoldu M olsun. Eğer M üzerinde (IV.4.10) bağıntısı ile verilen S tensör alanı sıfır ise M altmanifolduna normaldir denir[2].

IV.4.1. Teorem. $\overline{M}$ Kaehler manifold ve $\overline{M}$ nin CR-altmanifoldu M olsun. Bu durumda M altmanifoldu normal altmanifolddur $\Leftrightarrow$ $X \in \Gamma(D)$, $Y \in \Gamma(D^{\perp})$ için

$$A_{\omega Y}\phi X=\phi\left(A_{\omega Y}X\right) \tag{IV.4.11}$$

dır[2].

İspat. (IV.4.10) de (IV.4.2) ve (IV.4.3) beraber kullanılırsa

$$S(X,Y) = Bh(\phi X,Y) + A_{\omega Y}\phi X - Bh(\phi Y,X) - A_{\omega X}\phi Y$$
$$+\phi\{Bh(Y,X) + A_{\omega X}Y - Bh(X,Y) - A_{\omega Y}X\}$$
$$-B\{Ch(X,Y) - h(X,\phi Y) - Ch(Y,X) - h(Y,\phi X)\}$$

veya

$$S(X,Y) = Bh(\phi X,Y) + A_{\omega Y}\phi X - Bh(\phi Y,X) - A_{\omega X}\phi Y$$
$$+\phi A_{\omega X}Y - \phi A_{\omega Y}X + Bh(X,\phi Y) - Bh(Y,\phi X)$$
$$= \left(A_{\omega Y}o\phi - \phi oA_{\omega Y}\right)X - \left(A_{\omega X}o\phi - \phi oA_{\omega X}\right)Y \qquad \text{(IV.4.12)}$$

elde edilir.

Şimdi kabul edelim ki M normal CR-altmanifold olsun. Bu durumda $X \in \Gamma(D)$ için

$$A_{\omega X} = 0$$

olduğundan (IV.4.12) den (IV.4.11) elde edilir.

Şimdi de kabul edelim ki (IV.4.11) sağlansın Göstereceğiz ki $S(X,Y) = 0$ dır. $TM = D \oplus D^{\perp}$ olduğundan önce $X,Y \in \Gamma(D)$ alalım. Bu taktirde (IV.4.12) dan $S(X,Y) = 0$ elde edilir. Şimdi $X \in \Gamma(D), Y \in \Gamma(D^{\perp})$ için teoremin doğruluğunu gösterelim. (IV.4.12) ve (IV.4.11) den

$$S(X,Y) = \left(A_{\omega Y}o\phi - \phi oA_{\omega Y}\right)X = 0$$

elde edilir. $X,Y \in \Gamma(D^{\perp})$ için (IV.4.12) ve $\phi X = \phi Y = 0$ den

$$S(X,Y) = \phi\left(A_{\omega X}Y - A_{\omega Y}X\right)$$

dır. Burada (IV.3.1) gözönüne alınırsa $S=0$ elde edilir . Böylece ispat tamamlanır.

Kabul edelim ki $(e_1,\ldots,e_q)$ $D^{\perp}$ ın lokal çatısı olsun. A_i ile $V_i = Je_i$ ye göre Weingarten temel tensörünü göstersin. Buna göre aşağıdaki sonuç verilebilir.

IV.4.1. Sonuç. $\overline{M}$ Kaehler manifold ve $\overline{M}$ nin CR-altmanifoldu M olsun. Bu taktirde M CR-altmanifoldunun normal olması için $\Leftrightarrow$

$$A_i o\phi = \phi o A_i \quad (i = 1 \ldots q) \tag{IV.4.13}$$

dır. [2].

$\overline{M}$ bir Kaehler manifold olduğundan

$$\overline{\nabla}_X Je_i = J\overline{\nabla}_X e_i$$

olur. Burada (I.6.2) ve (I.6.3) denlemlerinden

$$-A_{V_i} X + \nabla^{\perp} X V_i = J\left(\nabla_X e_i + h(X, e_i)\right)$$

$$-A_{V_i} X + \nabla^{\perp} X V_i = \phi\nabla_X e_i + \omega\nabla_X e_i + Bh(X, e_i) + Ch(X, e_i) \tag{IV.4.14}$$

elde edilir. Benzer olarak

$$-J\overline{\nabla}_X Je_i = \overline{\nabla}_X e_i$$

$$-J\left(-A_{V_i} X + \nabla^{\perp} X V_i\right) = \left(\nabla_X e_i + h(X, e_i)\right)$$

$$\phi A_{V_i} X - \omega A_{V_i} X - B\nabla^{\perp} X V_i - C\nabla^{\perp} X V_i = \nabla_X e_i + h(X, e_i) \tag{IV.4.15}$$

dır. Böylece (IV.4.14) denkleminden

$$\nabla^{\perp} X V_i = \omega\nabla_X e_i + Ch(X, e_i) \tag{IV.4.16}$$

ve (IV.4.15) denkleminden de

$$\nabla_X e_i = \phi A_{V_i} X - B\nabla^{\perp} X V_i \tag{IV.4.17}$$

elde edilir.

IV.4.2. Tanım. $\overline{M}$ Kaehler manifold ve $\overline{M}$ nin CR-altmanifoldu M olsun. $Y, Z \in \Gamma(TM)$ için

$$g\left(\nabla_Z X, Y\right) + g\left(Z, \nabla_Y X\right) = 0 \tag{IV.4.18}$$

ise X vektör alanına killing vektör alanı denir[2]. Eğer $Y, Z\Gamma(D)$ için (IV.4.18) sağlanıyorsa X vektör alanına D-killing vektör alanı denir[2].

IV.4.2. Teorem. $\overline{M}$ Kaehler manifold ve $\overline{M}$ nin CR-altmanifoldu M olsun. M CR-altmanifoldunun normal olması için gerek ve yeter şart e_i nin D-killing olmasıdır[2].

İspat. (IV.4.17) denkleminden $Y, Z \in \Gamma(D)$ için

$$g\left(\nabla_Z e_i, Y\right) + g\left(Z, \nabla_Y e_i\right) = g\left(\left(\phi o A_i - A_i o \phi\right) Z, Y\right) \qquad \text{(IV.4.19)}$$

dır. Böylece sonuç IV.4.1 ve (IV.4.19) denkleminden ispat tamamlanır.

$Y \in \Gamma(TM)$ ye göre ϕ endomorfizminin Lie türevi

$$\left(L_Y \phi\right) X = [Y, \phi X] - \phi[Y, X]$$

dır. Şimdi bir başka tensör alanını

$$S^*(Y, X) = \left(L_Y \phi\right) X$$

ile tanımlayalım[2]. Buna göre aşağıdaki teorem verilebilir.

IV.4.3. Teorem. $\overline{M}$ Kaehler manifold ve $\overline{M}$ nin CR-altmanifoldu M ve $X \in \Gamma(D)$, $Y \in \Gamma(D^{\perp})$ için

$$Q\left(\nabla_X Y\right) = 0 \qquad \text{(IV.4.20)}$$

olsun. Bu taktirde M altmanifoldunun normal CR-altmanifold olması için gerek ve yeter şart

$$S^*(Y, X) = 0 \qquad \text{(IV.4.21)}$$

olmasıdır[2].

İspat. Teorem IV.4.1 den M normal CR-altmanifolddur $\Leftrightarrow S(X,Y)=0$ dır. $X \in \Gamma(D)$, $Y \in \Gamma(D^{\perp})$ için (IV.4.9) de (IV.4.3) ve (IV.4.8) kullanılırsa

$$S(X,Y) = \phi\left(\phi[X,Y] - [\phi X, Y] - Bh(\phi X, Y)\right) \qquad \text{(IV.4.22)}$$

ve

$$h(\phi X, Y) = \omega\left(\nabla_Y X\right) + Ch(X, Y)$$

elde edilir. Böylece

$$Bh(\phi X, Y) = -Q\left(\nabla_Y X\right)$$

dır. (IV.4.23) denkleminden

$$S(X,Y) = \phi\left(\phi[X,Y] - [\phi X, Y]\right) + Q\left(\nabla_Y X\right) \qquad \text{(IV.4.23)}$$

olur. Lie türevin tanımı, S^* tensör alanı ve (IV.4.23) denklemi kullanılırsa

$$S(X,Y) = \phi S^*(Y, X) + Q\left(\nabla_Y X\right) \qquad \text{(IV.4.24)}$$

elde edilir Şimdi teoremin ispatına geçelim.

Kabul edelim ki M normal CR-altmanifold olsun. Bu taktirde (IV.4.24) den

$$\phi PS^{*}(Y,X)=0 \tag{IV.4.25}$$

ve

$$Q(\nabla_{Y}X)=0$$

elde edilir. (IV.4.20) ve (IV.4.25) den

$$\begin{aligned} QS^{*}(Y,X) &= Q[Y,\phi X]-Q\phi[Y,X] \\ &= Q\left(\nabla_{Y}\phi X-\nabla_{\phi X}Y\right) \\ &= Q\nabla_{Y}\phi X \\ &= 0 \end{aligned}$$

dır. Böylece (IV.4.21) sağlanır.

Şimdi kabul edelim ki (IV.4.21) sağlansın Bu durumda

$$S^{*}(Y,X)=0$$

$$(L_{Y}\phi)X=0$$

elde edilir. Böylece $X\in\Gamma(D)$, $Y\in\Gamma(D^{\perp})$ için

$$Q([X,Y])=0 \tag{IV.4.26}$$

dır. (IV.4.24) de (IV.4.20) ve (IV.4.21) ,(IV.4.26) kullanılırsa

$$S(X,Y)=0$$

elde edilir.

KAYNAKLAR

[1] Aslım G. Genel Topoloji Ege Üniversitesi, Fen Fakültesi yayınları No:109 (1988)

[2] Bejancu A. Geometry of CR-Submanifolds, D.Reidel publishing company (1986) Dordrecht Holland

[3] Bogges A. CR-manifolds and Tangential Cauchy-Riemann Complex, CRC. Press Inc.(1991)

[4] Civelek Ş. İkinci Mertebeden Genişletilmiş Manifoldlar Üzerinde Liftler, Gazi Üni. Fen bilimleri Enst. Y.lisans tezi (1988)

[5] Martin D. Manifold Theory, Ellis Horwood limited (1991)(England)

[6] Hacısalihoğlu H.H Diferensiyel Geometri, İnönü Üniv.Fen-Ed Fak. Mat No:2 (1982)

[7] Hacısalihoğlu H.H. Yüksek Diferensiyel Geometriye Giriş, Fırat Üniversitesi Fen Fakültesi yayınları Mat No:2 (1980)

[8] Kobayashi S. and Nomizu K. Foundations of Differential Geometry I-II , interscience Publishing of John Wiley &sons (1963 ,1969)

[9] Yano K. ,Kon M. Structures on Manifolds, World Scientific Publishing Co. Pte. Ltd.(1984)

[10] Okubo T. Differential Geometry,Marcell Dekker ınc. (1987)

[11] Poor W.A. Differential Geometric Structures, Mc-Graw hill Company (1981)

[12] Morrow J.A. , Kodaira K. Complex Manifolds, Holt ,Rine hart and Winston Inc. (1971)

[13] Bootby W.M. An Introduction to Differentiable Manifolds and Riemannian Geometry, Academic Press ınc (1986)

[14] Matsushima Y. Differentiable Manifolds, Marcell Dekker Inc Newyork (1972)

[15] Hashimoto H. Some 6-Dimensional Oriented Submanifolds in the Octanians, Math.Rep.Toyama Üniv. Vol. 11(1988) 1-19

[16] İçen İ. Demetler üzerine,İnönü Üni. Fen Bilimleri Enst. (Y. lisans tezi)(1989)

[17] Chen B.Y Geometry of Submanifolds, Marcell Dekker Inc. Newyork (1973)

[18] Hacısalihoğlu H.H. Hareket Geometrisi ve Kuaterniyonlar teorisi, Gazi Üni. Fen-Ed. Fak. YayınlarıMat.No:2(1983)

[19] Yıldız C. Kompleks Manifoldlar, A.Üni. Fen bilimleri Enst.(Y. lisans tezi)

[20] Yano K. Differential Geometry on Complex and Almost Complex Spaces. Pergamon Press Book . The Macmillan Company Newyork (1965)

ÖZGEÇMİŞ

10.10.1972 yılında Malatya'nın Pütürge ilçesinde doğdu. İlk ve orta öğrenimini Pütürge ve Malatya'da bitirdi. 1989 da Ege Üniversitesi Fen Fakültesi Matematik Bölümüne girmeye hak kazandı. 1993 de Teorik Matematik Ağırlıklı Matematik Lisans proğramını bitirdi. Aynı yıl İnönü Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalında Yüksek Lisansa başladı. Halen İnönü Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsünde Araştırma görevlisi olarak çalışmaktadır.