İNÖNÜ ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

LİMİTLEME METODLARI VE TAUBER TEOREMLERİ

M.Kemal ÖZDEMİR

YÜKSEK LİSANS TEZİ
MATEMATİK ANABİLİM DALI

" Fen Bilimleri Enstitüsü Müdürlüğüne "

İş bu çalışma, jürimiz tarafından Matematik Anabilim dalında YÜKSEK LİSANS TEZİ olarak kabul edilmiştir.

Başkan Prof. Dr. İhsan SOLAK

Üye Doç. Dr. Rıfat GÜNEŞ

Üye Yrd. Doç. Dr. Hüsamettin COŞKUN

Onay

Yukarıdaki imzaların, adı geçen öğretim üyelerine ait olduğunu onaylarım.

..../..../1997

Prof. Dr. Eşref YÜKSEL

Enstitü Müdürü

Tez konumu veren ve çalışmalarımın her adımında yardımlarını esirgemeyen Sayın Hocam *Prof. Dr. İhsan SOLAK'* a, tez yazımında teknik desteklerinden dolayı *Arş. Grv. Mustafa UÇKUN'* a ve Gülsen ZEREN' e teşekkürlerimi sunarım.

Malatya - 1997 *M.Kemal ÖZDEMİR*

NOTASYONLAR

$A=(a_{n,k})$	sonsuz matris
$A^m=(a^m_{n,k})$	matris çarpımı
$A\subset B$	A, B den zayıftır
(A)	Abel yakınsaklık
(B)	Borel üstel metodu
$B(X,Y)$	X den Y ye sınırlı lineer operatörlerin cümlesi
$(C,1)$	1. mertebeden Cesàro dönüşümü (ortalaması)
(C,m)	m-mertebeden Cesàro dönüşümü (ortalaması)
(C,α)	α-mertebeden Cesàro dönüşümü (ortalaması)
$(c^m_{k,j})$	m-mertebeden Cesàro matrisi
$(c^\alpha_{k,j})$	α-mertebeden Cesàro matrisi
$\mathbb{C}$	kompleks sayılar cümlesi
$c(X)$	X de yakınsak dizilerin uzayı
(E,r)	r-mertebeden Euler dönüşümü
E_1	orijinal Euler dönüşümü
$(e^r_{n,k})$	r-mertebeli Euler matrisi
$\Gamma(x)$	gamma fonksiyonu
(H,m)	m-mertebeden Hölder ortalaması (dönüşümü)
$\inf\limits_n$	infimum
$\binom{k}{m}$	binom katsayısı
ℓ_p	p-mutlak toplanabilir kompleks dizilerin uzayı ($0<p<\infty$)
$\liminf\limits_{n\to\infty}$	limit inferior (alt limit)
$\limsup\limits_{n\to\infty}$	limit superior (üst limit)

(N, q_n)	Nörlund dönüşümü
(R, q_n)	Nörlund-tipi dönüşüm
IR	Reel sayılar cümlesi
$\sup_n$	supremum
$w_n(x)$	bir x dizisinin salınım fonksiyonu
$[[x]]$	x in tamdeğeri

İÇİNDEKİLER

ÖZET

Bu çalışma üç bölümden meydana gelmiştir: İlk bölümde, sonraki bölümlerde kullanılan bazı limitleme metodları verildi.

İkinci bölümde, kompleks terimli seriler için Tauberian teoremler çalışıldı.

Son bölümde, terimleri bir Banach uzayından alınan seriler için Tauberian teoremler tartışıldı.

ABSTRACT

This study consists of three chapters: In the first chapter, some limitation methods, which have been used in the latter chapters, were given.

In the second chapter, Tauberian theorems were studied for series of complex terms.

In the last chapter, Tauberian theorems were discussed for series in Banach space.

GİRİŞ

1826 yılında Abel, $\sum a_n = s$ olması halinde $\sum a_n = s \quad (A)$ olduğunu, yani her yakınsak serinin aynı toplama Abel toplanabilir olduğunu gösterdi. Genelde bunun tersinin doğru olmadığını $a_n = (-1)^n$ alarak görebiliriz, gerçekten $\sum (-1)^n = \frac{1}{2} \quad (A)$ olduğu halde $\sum (-1)^n \neq \frac{1}{2}$ dir. Tersi ne zaman doğrudur? Cevabın, serinin genel terimi üzerine bir takım şartların konulmasıyla olacağını ilk defa A. Tauber gördü.

1897 de Tauber, $\sum a_n = s \quad (A)$ ve $na_n \to 0 \quad (n \to \infty)$ olması halinde $\sum a_n = s$ olduğunu gösterdi. Böylece, $na_n \to 0$ şartı bir Tauberian şart olarak adlandırıldı. Bu şart Abel toplanabilirlikten yakınsaklığa geçişe izin verdi.

Tauber' in İkinci Teoremi denilen, Birinci Teoremi ile bağlantılı bir teorem, yine Tauber tarafından verildi. Onun bu iki teoremi aşağıdaki gibi gösterildi.

$$T_1: \quad \sum a_n = s \quad (A) \text{ ve } na_n \to 0 \quad \Rightarrow \quad \sum a_n = s$$

$$T_2: \quad \sum a_n = s \quad (A) \text{ ve } na_n \to 0 \quad (C,1) \quad \Rightarrow \quad \sum a_n = s$$

Tabi ki T_1, T_2 nin bir sonucudur, çünkü $na_n \to 0$ olması $na_n \to 0 \quad (C,1)$ olmasını gerektirir.

1911 de Littlewood $na_n \to 0 \quad (na_n = o(1))$ yerine $na_n = O(1)$ alıp, T_1 ifadesini ispatlayarak daha ileri Tauberian Teorisini başlattı. Oldukça genel bir Tauberian teorem, 1930 yılında Wiener tarafından bulundu ve O, bu teoremi Asal Sayı Teoremi' nin ispatını vermek için kullandı.

1. BÖLÜM

BAZI LİMİTLEME METODLARI

Bu kesimde, sonraki bölümlerde kullanacağımız bazı limitleme metodlarını vereceğiz.

Tanım 1.1. $\{a_n\}_0^\infty$ kompleks sayıların bir dizisi olsun. Eğer

$$\lim_{x\to 1^-}(1-x)\sum_{k=0}^{\infty}a_k x^k = L$$

mevcut ise $\{a_n\}_0^\infty$ dizisi L-ye Abel yakınsaktır veya (A) yakınsaktır denir [1].

Aşağıdaki teorem, bir dizinin yakınsaklığı ile Abel yakınsaklığını karşılaştırır.

Teorem 1.1. Eğer $\{a_n\}_0^\infty$ dizisi L-ye yakınsak ise $\{a_n\}_0^\infty$ L-ye (A) yakınsaktır (fakat tersi doğru değildir) [1].

İspat. $-1<x<1$ için $f(x)=(1-x)\sum_{k=0}^{\infty}a_k x^k$ olsun. $0<\varepsilon<1$ verilmiş olsun. Seçilen $N=N(\varepsilon)$ pozitif tamsayısı için $n\geq N$ olduğunda $\left|a_n-L\right|<\frac{1}{2}\varepsilon$ kalır. $M=\max\left\{\left|a_0-L\right|,\ldots,\left|a_N-L\right|\right\}$ olsun. $-1<x<1$ için $(1-x)\sum_{k=0}^{\infty}x^k=1$ olduğunu biliyoruz. $\delta=\dfrac{\varepsilon}{(N+1)(M+1)}$ alırsak, $x\in(1-\delta,1)$ için

$$\begin{aligned}
|f(x)-L| &= \left|(1-x)\sum_{k=0}^{\infty}a_k x^k - L\right| \\
&= \left|(1-x)\sum_{k=0}^{\infty}a_k x^k - (1-x)\sum_{k=0}^{\infty}Lx^k\right| \\
&= \left|(1-x)\sum_{k=0}^{\infty}(a_k-L)x^k\right| \\
&\leq \left|(1-x)\sum_{k=0}^{N}(a_k-L)x^k\right| + \left|(1-x)\sum_{k=N+1}^{\infty}(a_k-L)x^k\right|
\end{aligned}$$

$$< (1-x)(N+1)M + \frac{1}{2}\varepsilon = \frac{\varepsilon}{2(N+1)(M+1)}(N+1)M + \frac{1}{2}\varepsilon$$
$$< \frac{1}{2}\varepsilon + \frac{1}{2}\varepsilon = \varepsilon$$

kalır. Bu nedenle, $\lim_{x\to 1^-} f(x) = \lim_{x\to 1^-} (1-x)\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k = L$, yani $\{a_n\}_0^\infty$ dizisi L-ye (A) yakınsaktır.

Teoremin tersinin doğru olmadığını göstermek için $n = 0,1,\ldots$ için $a_n = 1 + (-1)^n$ alalım. $\{a_n\}_0^\infty$ ıraksaktır, bununla beraber,

$$\lim_{x\to 1^-} (1-x)\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k = \lim_{x\to 1^-} \sum_{k=0}^{\infty} 2(-1)^k x^k = 2\lim_{x\to 1^-} \frac{1}{1+x} = 1$$

dir.

Tanım 1.2. $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ kompleks sayıların bir serisi ve $\{s_n\}_0^\infty$ kısmi toplamlar dizisi olsun. Eğer $\{s_n\}_0^\infty$ dizisi L-ye (A) yakınsak ise $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ serisi L-ye (A) yakınsaktır denir [1].

Teorem 1.2. Eğer $\sum_{k=0}^{\infty} a_k = M$ ise $\lim_{x\to 1^-} \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k = M$ dir [1].

İspat. $s_n = \sum_{k=0}^{n} a_k$ olsun. $|x| < 1$ için $\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$ serisi mutlak yakınsaktır. $\{s_n\}_0^\infty$ M-ye yakınsak olduğundan, Teorem 1.1 gereğince, $\{s_n\}_0^\infty$ M-ye (A) yakınsaktır, yani

$$M = \lim_{x\to 1^-} (1-x)\sum_{k=0}^{\infty} s_k x^k = \lim_{x\to 1^-} \left[\sum_{k=0}^{\infty} s_k x^k - \sum_{k=0}^{\infty} s_k x^{k+1}\right]$$
$$= \lim_{x\to 1^-} \left[s_0 + \sum_{k=1}^{\infty} s_k x^k - \sum_{k=1}^{\infty} s_{k-1} x^k\right] = \lim_{x\to 1^-} \left[s_0 + \sum_{k=1}^{\infty} (s_k - s_{k-1}) x^k\right]$$
$$= \lim_{x\to 1^-} \left[a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} a_k x^k\right] = \lim_{x\to 1^-} \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$$

dir.

Tanım 1.3. $\{a_n\}_0^\infty$ kompleks sayıların bir dizisi olsun. Eğer

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^{n} a_k = L$$

mevcut ise, $\{a_n\}_0^\infty$ dizisi L-ye Cesàro yakınsaktır veya $(C,1)$ yakınsaktır denir [1].

Teorem 1.3. Eğer $\{a_n\}_0^\infty$ dizisi L-ye yakınsak ise $\{a_n\}_0^\infty$ L-ye $(C,1)$ yakınsaktır (fakat tersi doğru değildir) [1].

İspat. $\varepsilon > 0$ verilmiş olsun. $n \geq N_1$ için $|a_n - L| < \frac{1}{2}\varepsilon$ olacak şekilde bir N_1 pozitif tamsayısı vardır. $n \geq N_2$ için $\frac{1}{n}\left|[a_0 + \cdots + a_{N_1-1}] - N_1 L\right| < \frac{1}{2}\varepsilon$ olacak şekilde bir N_2 pozitif tamsayısı vardır. $N = \max\{N_1, N_2\}$ olsun. $n \geq N$ için

$$\begin{aligned}
\left|\frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n} a_k - L\right| &= \left|\frac{1}{n+1}\left[\sum_{k=0}^{n} a_k - (n+1)L\right]\right| \\
&\leq \frac{1}{n+1}\left|\sum_{k=0}^{N_1-1} a_k - N_1 L\right| + \frac{1}{n+1}\left|\sum_{k=N_1}^{n} a_k - (n+1-N_1)L\right| \\
&< \frac{1}{2}\varepsilon + \frac{1}{n+1}\left|\sum_{k=N_1}^{n}[a_k - L]\right| \leq \frac{1}{2}\varepsilon + \frac{1}{n+1}\sum_{k=N_1}^{n}|a_k - L| \\
&< \frac{1}{2}\varepsilon + \frac{1}{n+1}(n+1-N_1)\frac{1}{2}\varepsilon \leq \frac{1}{2}\varepsilon + \frac{1}{2}\varepsilon = \varepsilon
\end{aligned}$$

kalır.

$n = 0,1,\ldots$ için $a_n = 1 + (-1)^n$ örneğinden de anlaşılacağı gibi teoremin tersi doğru değildir. $\{a_n\}_0^\infty$ dizisi ıraksak olmakla beraber, şimdi göstereceğiz ki 1' e $(C,1)$ yakınsaktır.

$\varepsilon > 0$ verilmiş olsun. Bu durumda

$$\sum_{k=0}^{n} a_k = \begin{cases} n+2 & , \quad n-\text{çift ise} \\ n+1 & , \quad n-\text{tek ise} \end{cases}$$

olur. Buradan,

$$\left|\frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n} a_k - 1\right| \leq \left(\frac{n+2}{n+1} - 1\right) = \frac{1}{n+1}$$

dir. $N(\varepsilon)$ pozitif tamsayısı $N(\varepsilon)>(1-\varepsilon)/\varepsilon$ olacak şekilde seçilsin. Böylece $n \geq N(\varepsilon)$ için $1/(n+1)<\varepsilon$, dolayısıyla

$$\left|\frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n} a_k - 1\right| < \varepsilon$$

kalır.

Tanım 1.4. $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ kompleks sayıların bir serisi ve $\{s_n\}_0^{\infty}$ kısmi toplamlar dizisi olsun. Eğer $\{s_n\}_0^{\infty}$ dizisi L-ye $(C,1)$ yakınsak ise $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ serisi L-ye $(C,1)$ yakınsaktır denir [1].

Serilerin Cauchy çarpımı incelenirken aşağıdaki teorem oldukça sık kullanılır. $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ ve $\sum_{k=0}^{\infty} b_k$ serilerinin Cauchy çarpımı, $c_k = \sum_{j=0}^{k} a_j b_{k-j}$ olmak üzere, $\sum_{k=0}^{\infty} c_k$ serisidir. Eğer $\sum_{k=0}^{\infty} a_k = A$ ve $\sum_{k=0}^{\infty} b_k = B$ mutlak yakınsak seriler ise $\sum_{k=0}^{\infty} c_k = A.B$ dir.

Teorem 1.4. Eğer $\sum_{k=0}^{\infty} a_k = A$ ve $\sum_{k=0}^{\infty} b_k = B$ ise $\sum_{k=0}^{\infty} c_k$ Cauchy çarpımı $A.B$-ye $(C,1)$ yakınsaktır [1].

İspat. $A_n = \sum_{k=0}^{n} a_k$, $B_n = \sum_{k=0}^{n} b_k$, $s_n = \sum_{k=0}^{n} c_k$ ve $E_n = \frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n} s_k$ olsun. Bu durumda

$$\begin{aligned} s_n = \sum_{k=0}^{n} c_k &= \sum_{k=0}^{n}\left[\sum_{j=0}^{k} a_j b_{k-j}\right] = \sum_{j=0}^{n}\left[\sum_{k=j}^{n} a_j b_{k-j}\right] \\ &= \sum_{j=0}^{n} a_j\left[\sum_{k=j}^{n} b_{k-j}\right] = \sum_{j=0}^{n} a_j B_{n-j} \end{aligned}$$

olur. Ayrıca,

$$E_n = \frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n} s_k = \frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n}\left[\sum_{j=0}^{k} a_j B_{k-j}\right] = \frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n}\left[\sum_{j=0}^{k} a_{k-j} B_j\right]$$

$$= \frac{1}{n+1} \sum_{j=0}^{n} B_j \left[\sum_{k=j}^{n} a_{k-j} \right] = \frac{1}{n+1} \sum_{j=0}^{n} B_j A_{n-j}$$

dir. Böylece,

$$\begin{aligned} E_n &= \frac{1}{n+1} \sum_{j=0}^{n} B_j (A_{n-j} - A) + \frac{1}{n+1} \sum_{j=0}^{n} B_j A \\ &= \frac{1}{n+1} \sum_{j=0}^{n} B_j (A_{n-j} - A) + A \left[\frac{1}{n+1} \sum_{j=0}^{n} B_j \right] \end{aligned}$$

olur. $\{B_k\}_0^\infty$ dizisi B-ye yakınsak olduğundan, Teorem 1.3 gereğince, $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n+1} \sum_{j=0}^{n} B_j = B$ dir. Buradan, $\lim_{n\to\infty} E_n = A.B$ olması için gerek ve yeter şart $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n+1} \sum_{j=0}^{n} B_j (A_{n-j} - A) = 0$ olmasıdır.

$\varepsilon > 0$ verilmiş olsun. $\{B_n\}_0^\infty$ ve $\{A_n - A\}_0^\infty$ dizileri yakınsak, dolayısıyla sınırlı olduklarından, $n = 0,1,\ldots$ için $|B_n| \le M_1$ ve $|A_n - A| \le M_2$ olacak şekilde $M_1 > 0$ ve $M_2 > 0$ sayıları vardır. Ayrıca, $\{A_n - A\}_0^\infty$ sıfıra yakınsak olduğundan $n \ge N_1$ için $|A_n - A| < \varepsilon/2M_1$ olacak şekilde $N_1 = N_1(\varepsilon)$ pozitif tamsayısı ve $(N_1 + 1)/N_2 < \varepsilon/2M_1 M_2$ olacak şekilde bir N_2 pozitif tamsayısı vardır. $N = \max\{N_1, N_2\}$ olsun. $n \ge N$ için

$$\begin{aligned} \left| \frac{1}{n+1} \sum_{j=0}^{n} B_j (A_{n-j} - A) \right| &= \frac{1}{n+1} \left| \sum_{j=0}^{n} B_{n-j} (A_j - A) \right| \\ &\le \frac{1}{n+1} \sum_{j=0}^{N_1} |B_{n-j}| |A_j - A| + \frac{1}{n+1} \sum_{j=N_1+1}^{n} |B_{n-j}| |A_j - A| \\ &< \frac{1}{n+1} \sum_{j=0}^{N_1} M_1 M_2 + \frac{1}{n+1} \sum_{j=N_1+1}^{n} M_1 \left(\frac{\varepsilon}{2M_1} \right) \\ &= \frac{N_1 + 1}{n+1} M_1 M_2 + \frac{n - N_1}{n+1} \frac{1}{2} \varepsilon \\ &< \frac{\varepsilon}{2M_1 M_2} (M_1 M_2) + \frac{1}{2}\varepsilon = \frac{1}{2}\varepsilon + \frac{1}{2}\varepsilon = \varepsilon \end{aligned}$$

kalır.

Sonuç 1.1. $\sum_{k=0}^{\infty} a_k = A$, $\sum_{k=0}^{\infty} b_k = B$ ve bu iki serinin Cauchy çarpımı $\sum_{k=0}^{\infty} c_k = C$ ise $C = A.B$ dir [1].

İspat. Teorem 1.4 gereğince, $\sum_{k=0}^{\infty} c_k$ serisi $A.B$-ye $(C,1)$ yakınsaktır ve Teorem 1.3 gereğince, $\sum_{k=0}^{\infty} c_k$ serisi C-ye $(C,1)$ yakınsaktır. Dizilerin limitinin tekliğinden ve $\{E_n\}_0^{\infty}$ dizisinin (Teorem 1.4 ün ispatında $\{E_n\}_0^{\infty}$ tanımlanmıştı) hem $A.B$-ye hem de C-ye yakınsak olmasından $A.B = C$ dir.

Aşağıdaki teorem, bir dizinin $(C,1)$ yakınsaklığı ile (A) yakınsaklığını karşılaştırır.

Teorem 1.5. Eğer $\{a_n\}_0^{\infty}$ dizisi L-ye $(C,1)$ yakınsak ise $\{a_n\}_0^{\infty}$ L-ye (A) yakınsaktır (fakat tersi doğru değildir) [1].

İspat. $s_n = \frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n} a_k$ ve $f(x) = (1-x)\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$ alalım. Bu durumda, $(n+1)s_n = \sum_{k=0}^{n} a_k$ ve $ns_{n-1} = \sum_{k=0}^{n-1} a_k$ yazılırsa, $a_k = (k+1)s_k - ks_{k-1}$ olur. Ayrıca

$$f(x) = (1-x)\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k = (1-x)\left\{a_0 + \sum_{k=1}^{\infty}[(k+1)s_k - ks_{k-1}]x^k\right\}$$

yazılabilir. $\sum_{k=0}^{\infty}(k+1)x^k$ serisinin yakınsaklık yarıçapı 1 dir ($\sum_{k=0}^{\infty} x^{k+1}$ serisinin yakınsaklık yarıçapı 1 olduğundan), böylece $\sum_{k=0}^{\infty}(k+1)s_k x^k$ ve $\sum_{k=0}^{\infty} ks_{k-1}x^k$ serilerinin her birinin yakınsaklık yarıçapı 1 dir ($\{s_k\}_0^{\infty}$ sonlu bir L-limitine yakınsadığından). Bu nedenle, $\sum_{k=1}^{\infty}[(k+1)s_k - ks_{k-1}]x^k$ serisinin yakınsaklık yarıçapı 1 dir. Böylece $(1-x)\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$ serisi $|x|<1$ için yakınsaktır. Şimdi

$\lim\limits_{x\to 1^-}(1-x)\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k = \lim\limits_{x\to 1^-} f(x) = L$ olduğunu gösterelim.

$$\frac{1}{(1-x)^2} f(x) = \frac{1}{1-x}\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k = \left[\sum_{k=0}^{\infty} x^k\right]\left[\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k\right]$$
$$= \sum_{k=0}^{\infty}(a_0+\cdots+a_k)x^k = \sum_{k=0}^{\infty}(k+1)s_k x^k$$

dir. Ayrıca,

$$\frac{1}{(1-x)^2} = \frac{d}{dx}\left(\frac{1}{1-x}\right) = \sum_{k=0}^{\infty}(k+1)x^k$$

ve böylece,

$$\frac{L}{(1-x)^2} = \sum_{k=0}^{\infty}(k+1)Lx^k$$

olur. Bu nedenle, $0<x<1$ için

$$|f(x)-L| = \left|(1-x)^2\sum_{k=0}^{\infty}(k+1)(s_k-L)x^k\right| \le (1-x)^2\sum_{k=0}^{\infty}(k+1)|s_k-L|x^k$$

dir. $\{s_n\}_0^{\infty}$ dizisi L-ye yakınsak olduğundan, verilen $\varepsilon>0$ ve $n\ge N$ için $|s_n-L|<\frac{1}{2}\varepsilon$ olacak şekilde bir $N=N(\varepsilon)$ pozitif tamsayısı vardır. $\{s_n\}_0^{\infty}$ yakınsak olduğundan sınırlıdır, o halde her $n=0,1,\ldots$ için $|s_n|\le M$ olacak şekilde bir $M>0$ sayısı vardır. $\delta(\varepsilon)=\min\left\{\frac{1}{2},\left[\varepsilon/4(M+1)(N+1)^2\right]^{1/2}\right\}$ seçilsin. Bu durumda, $1-\delta(\varepsilon)<x<1$ için

$$|f(x)-L| \le (1-x)^2\sum_{k=N}^{\infty}(k+1)|s_k-L|x^k + (1-x)^2\sum_{k=0}^{N-1}(k+1)|s_k-L|x^k$$
$$< (1-x)^2\frac{1}{2}\varepsilon\sum_{k=0}^{\infty}(k+1)x^k + \frac{\varepsilon}{4(M+1)(N+1)^2}N(2M)\sum_{k=0}^{N-1}x^k$$
$$< \frac{(1-x)^2}{(1-x)^2}\frac{1}{2}\varepsilon + \frac{2MN^2\varepsilon}{4(M+1)(N+1)^2} < \frac{1}{2}\varepsilon + \frac{1}{2}\varepsilon = \varepsilon$$

kalır.

Böylece, $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 1^-} \sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k x^k = L$ dir, yani $\{a_n\}_0^{\infty}$ dizisi L-ye (A) yakınsaktır.

Teoremin tersinin doğru olmadığını göstermek için

$$a_n = \begin{cases} k+1 & , \ n=2k \quad ; \ k=0,1,\ldots \\ -(k+1) & , \ n=2k+1; \ k=0,1,\ldots \end{cases}$$

alalım. İlk olarak, $\{a_n\}_0^{\infty}$ dizisinin $(C,1)$ yakınsak olmadığını gösterelim.

$s_n = \dfrac{1}{n+1} \sum\limits_{k=0}^{n} a_k$ alınırsa

$$s_n = \begin{cases} 0 & , \ n=2k+1; \ k=0,1,\ldots \\ \dfrac{k+1}{2k+1} & , \ n=2k \quad ; \ k=0,1,\ldots \end{cases}$$

olur. Bu nedenle, $\{s_{2k+1}\}_0^{\infty}$ dizisi 0' a ve $\{s_{2k}\}_0^{\infty}$ dizisi $1/2$' ye yakınsar, bununla beraber $\{s_n\}_0^{\infty}$ yakınsak değildir.

Son olarak, $\{a_n\}_0^{\infty}$ dizisinin $1/4$' e (A) yakınsak olduğunu gösterelim. $|x|<1$ için

$$\begin{aligned}
(1-x)\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k &= \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k - \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^{k+1} \\
&= a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k - a_{k-1}) x^k = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k (k+1) x^k \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} (k+1)(-x)^k = \sum_{k=1}^{\infty} k(-x)^{k-1} = -\sum_{k=1}^{\infty} \frac{d}{dx}(-x)^k \\
&= -\frac{d}{dx}\left(\sum_{k=0}^{\infty} (-x)^k\right) = -\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{1+x}\right) = \frac{1}{(1+x)^2}
\end{aligned}$$

olur. Bu nedenle, $\lim\limits_{x\to 1^-} (1-x)\sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k x^k = \lim\limits_{x\to 1^-} \dfrac{1}{(1+x)^2} = \dfrac{1}{4}$ elde edilir. Böylece, $\{a_n\}_0^{\infty}$ $(C,1)$ yakınsak değildir, fakat (A) yakınsaktır.

Tanım 1.5. $f(x)$ ve $g(x)$ fonksiyonları verilmiş olsun. Sabit bir x_0 noktası alalım ve kabul edelim ki $g(x)$, x_0 noktasının açık bir komşuluğunda pozitif ve sürekli olsun.

i) x_0 noktasının bir komşuluğunda $|f(x)| < Kg(x)$ olacak şekilde bir K sabiti varsa $f(x) = O(g(x))$, $(x \to x_0)$ dir.

ii) Eğer $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f(x)}{g(x)} = 0$ ise $f(x) = o(g(x))$, $(x \to x_0)$ dir.

iii) Eğer $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f(x)}{g(x)} = 1$ ise $f(x) \sim g(x)$, $(x \to x_0)$ dir, burada $g(x)$, x_0 noktasının bir komşuluğunda pozitif olmak zorunda değildir.

Bu tanımda x_0 sonlu veya sonsuz olabilir (x_0 ın sonsuz olması halinde, " x_0 noktasının açık bir komşuluğunda pozitif ve sürekli olması " şartı yerine, " yeterince büyük x ler için $g(x)$ in pozitif ve sürekli olması, yani $x > \xi$ için $g(x)$ pozitif ve sürekli olacak şekilde ξ sayısının mevcut olması " şartı olmalıdır) [1].

$\sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k$ kompleks sayıların bir serisi olsun ve $s_n = \sum\limits_{k=0}^{n} a_k$ diyelim. Bilindiği gibi, $\sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k$ yakınsak ise $a_n = o(1)$ ve $s_n = O(1)$ dir (yakınsak bir dizi sınırlı olduğundan). Şimdi ispatlanacağı gibi serinin $(C,1)$ yakınsaklığı $s_n = o(n)$ ve $a_n = o(n)$ olmasını gerektirir.

Teorem 1.6. $\sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k$ serisi $(C,1)$ yakınsak ise $s_n = o(n)$ ve $a_n = o(n)$ dir [1].

İspat. $t_n = \dfrac{1}{n+1} \sum\limits_{k=0}^{n} s_k$ alınırsa, $s_n = (n+1)t_n - nt_{n-1}$ olur. Hipotez gereği, $\{t_n\}_0^{\infty}$ yakınsaktır (L-ye yakınsak olduğunu kabul edelim). Bu nedenle,

$$\frac{s_n}{n} = \left(1 + \frac{1}{n}\right) t_n - t_{n-1} = (t_n - t_{n-1}) + \frac{1}{n} t_n$$

dir. O halde,

$$\lim_{n \to \infty} \frac{s_n}{n} = \lim_{n \to \infty} \left[(t_n - t_{n-1}) + \frac{1}{n} t_n \right] = L - L + \lim_{n \to \infty} \frac{t_n}{n} = 0$$

olur, yani $s_n = o(n)$ dir.

Ayrıca, $a_n = s_n - s_{n-1} = o(n) + o(n) = o(n)$ dir.

Tanım 1.6. $\{q_n\}_0^\infty$, $q_0 > 0$ olmak üzere, reel sayıların bir dizisi ve $Q_n = \sum_{k=0}^{n} q_k$ olsun.

i) $(N, q_n) = (a_{n,k})$ Nörlund dönüşümü

$$a_{n,k} = \begin{cases} q_{n-k} / Q_n & , \ k \le n \text{ ise} \\ 0 & , \ k > n \text{ ise} \end{cases}$$

olarak tanımlanır.

ii) $(R, q_n) = (r_{n,k})$ Nörlund-tipi dönüşümü

$$r_{n,k} = \begin{cases} q_k / Q_n & , \ k \le n \text{ ise} \\ 0 & , \ k > n \text{ ise} \end{cases}$$

olarak tanımlanır [1].

Nörlund ve Nörlund-tipi dönüşümlerin her ikisinde de, eğer her bir $n = 0,1,\ldots$ için $q_n = 1$ alınırsa $(C,1)$ dönüşümü elde edilir.

$A = (a_{n,k})$ olarak,

$$\begin{bmatrix} a_{0,0} & a_{0,1} & a_{0,2} & \cdots & a_{0,k} & \cdots \\ a_{1,0} & a_{1,1} & a_{1,2} & \cdots & a_{1,k} & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \\ a_{n,0} & a_{n,1} & a_{n,2} & \cdots & a_{n,k} & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \end{bmatrix}$$

sonsuz matrisini alalım, burada $n = 0,1,\ldots$ ve $k = 0,1,\ldots$ için $a_{n,k}$ kompleks sayılardır. Şimdi, bir dizinin A-dönüşümü ve bu dönüşümün regülerliği tanımını verebiliriz.

Tanım 1.7. $\{z_n\}_0^\infty$ kompleks sayıların bir dizisi olsun ve bir sonsuz matris olarak $A = (a_{n,k})$ matrisini alalım. Her bir $n = 0,1,\ldots$ için

$$\sigma_n = \sum_{k=0}^{\infty} a_{n,k} z_k$$

olmak üzere, $\{\sigma_n\}_0^\infty$ dizisi yakınsak ise bu diziye $\{z_n\}_0^\infty$ dizisinin A-dönüşümü denir [1].

Tanım 1.8. $A=(a_{n,k})$ kompleks sayıların bir sonsuz matrisi olsun.

i) Kompleks sayıların her yakınsak dizisinin A-dönüşümü mevcut ve yakınsak ise A matrisine konservatiftir denir.

ii) A konservatif ve limitleri koruyorsa, yani $\lim\limits_{n\to\infty} z_n = \lim\limits_{n\to\infty} \sigma_n$ ise A dönüşümüne regülerdir denir [1].

Şimdi, Silvermann-Toeplitz Teoremini ispatsız verelim.

Teorem 1.7. Bir $A=(a_{n,k})$ matrisinin regüler olması için gerek ve yeter şartlar,

i) Her bir $k=0,1,\ldots$ için $\lim\limits_{n\to\infty} a_{n,k}=0$,

ii) $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=0}^{\infty} a_{n,k}=1$,

iii) En az bir $M>0$ için $\sup\limits_{n}\left\{\sum\limits_{k=0}^{\infty}\left|a_{n,k}\right|\right\}\le M<\infty$

olmasıdır [1].

Teorem 1.8. (N,q_n) dönüşümünün regüler olması için gerek ve yeter şart $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{q_n}{Q_n}=0$ olmasıdır [1].

İspat. (N,q_n) dönüşümünün regüler olması için gerek ve yeter şart Silvermann-Toeplitz Teoreminin (i)-(iii) şartlarının sağlanmasıdır. Her bir $n=0,1,\ldots$ ve $k=0,1,\ldots$ için $\left|a_{n,k}\right|=a_{n,k}$ ve

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_{n,k}=\sum_{k=0}^{n} a_{n,k}=\sum_{k=0}^{n}\frac{q_{n-k}}{Q_n}=\frac{1}{Q_n}\sum_{k=0}^{n} q_{n-k}=1$$

olduğundan, (ii) ve (iii) şartları sağlanır. Şimdi, k sabit olsun. $k=0$ için $\lim\limits_{n\to\infty} a_{n,0}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{q_n}{Q_n}$ dir, böylece, eğer (N,q_n) regüler ise $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{q_n}{Q_n}=0$ dır.

Şimdi, kabul edelim ki $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{q_n}{Q_n} = 0$ olsun. $\{Q_n\}_0^\infty$ dizisi artan olduğundan, k sabit olmak üzere, $n \geq k$ için

$$0 \leq a_{n,k} = \frac{q_{n-k}}{Q_n} \leq \frac{q_{n-k}}{Q_{n-k}}$$

dır. Buradan

$$0 \leq \lim_{n\to\infty} a_{n,k} \leq \lim_{n\to\infty} \frac{q_{n-k}}{Q_{n-k}} = 0$$

olur, dolayısıyla $\lim\limits_{n\to\infty} a_{n,k} = 0$ dır. Böylece, Silvermann-Toeplitz Teoreminin (i) şartı sağlanır. Bu ise (N, q_n) dönüşümünün regüler olmasını gerektirir.

Tanım 1.9. Birinci mertebeden Hölder ortalaması, $(H,1) = (h^1_{n,k})$,

$$h^1_{n,k} = \begin{cases} \dfrac{1}{n+1} & , \ n \geq k \text{ ise} \\ 0 & , \ n < k \text{ ise} \end{cases}$$

olarak tanımlanır. m-inci mertebeden Hölder ortalaması ise, bir m pozitif tamsayısı için

$$(H,m) = (h^m_{n,k}) = (h^1_{n,k}) \cdot (h^{m-1}_{n,k})$$

olarak tanımlanır (buradaki çarpım bilinen anlamda matris çarpımıdır) [1].

Birinci mertebeden Hölder ortalaması $(C,1)$ dönüşümüdür.

Teorem 1.9. Pozitif bir m tamsayısı için (H,m) regülerdir [1].

Tanım 1.10. A ve B iki dönüşüm olsun.

i) $\{z_k\}_0^\infty$ dizisi hem A-toplanabilir hem de B-toplanabilir ise A ve B, $\{z_k\}_0^\infty$ dizisi için karşılaştırılabilirdir denir.

ii) A ve B herhangi bir dizi için karşılaştırılabilir olmak üzere, bu dizinin A-dönüşümü ve B-dönüşümü aynı değere yakınsıyorsa A ve B tutarlıdır denir.

iii) Eğer A-toplanabilir her dizi B-toplanabilir ise A, B den zayıftır denir ve $A \subset B$ yazılır.

iv) Eğer $A \subset B$ ve $B \subset A$ ise A ve B, dizi uzayının tamamında, karşılıklı olarak tutarlıdır (ya da denktir) denir [1].

Teorem 1.10. Eğer $m > n$ ise (m ve n pozitif tamsayılar) $(H,n) \subset (H,m)$ dir [1].

Tanım 1.11. $\{z_k\}_0^\infty$ kompleks sayıların bir dizisi olsun. Negatif tamsayı olmayan herhangi bir α reel sayısı için $\{A_n^\alpha\}_0^\infty$ ve $\{s_n^\alpha\}_0^\infty$ dizileri, sırasıyla

$$\sum_{k=0}^{\infty} A_k^\alpha x^k = (1-x)^{-\alpha-1} \quad \text{ve} \quad \sum_{k=0}^{\infty} s_k^\alpha x^k = (1-x)^{-\alpha} \sum_{k=0}^{\infty} z_k x^k$$

eşitlikleri ile tanımlansın. Eğer $\lim_{k\to\infty} s_k^\alpha / A_k^\alpha = y$ ise $\{z_k\}_0^\infty$ dizisi y-ye (C,α) toplanabilirdir. (C,α) dönüşümüne α-mertebeden Cesàro ortalaması denir [1].

Önce (C,α) dönüşümünün regülerliğini inceleyelim. $\alpha = m$ pozitif bir tamsayı olsun. Binom Teoremi gereğince, $|x| < 1$ için

$$(1-x)^{-m-1} = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{k+m}{m} x^k$$

yazılabilir, burada $\binom{k}{m}$ binom katsayıları olup, $k \geq m$ için $\binom{k}{m} = \dfrac{k!}{m!(k-m)!}$ dir.

Böylece, $A_k^m = \binom{k+m}{m}$ olur. Ayrıca

$$\sum_{k=0}^{\infty} s_k^m x^k = (1-x)^{-m} \sum_{k=0}^{\infty} z_k x^k = \sum_{j=0}^{\infty} \binom{j+m-1}{m-1} x^j \sum_{k=0}^{\infty} z_k x^k = \sum_{k=0}^{\infty} c_k x^k$$

dır, burada $c_k = \sum_{t=0}^{k} \binom{k-t+m-1}{m-1} z_t$ Cauchy çarpımının Cauchy katsayılarıdır.

Böylece, $s_k^m = \sum_{k=0}^{t} \binom{k-t+m-1}{m-1} z_t$ dir. Dolayısıyla, eğer $(c_{n,k}^m)$ matrisi

$$c_{n,k}^m = \begin{cases} \binom{n-k+m-1}{m-1} \Big/ \binom{n+m}{m} & , \quad k \leq n \text{ ise} \\ 0 & , \quad k > n \text{ ise} \end{cases}$$

olarak tanımlanırsa, $\{z_k\}_0^\infty$ dizisinin (C,α) dönüşümü, $\{z_k\}_0^\infty$ dizisinin $(c_{n,k}^m)$ matris dönüşümü olur. Özellikle, $m = 1$ ise

$$k \le n \text{ için } c^1_{n,k} = \binom{n-k}{0} \Big/ \binom{n+1}{1} = \frac{1}{n+1} \text{ ve } k > n \text{ için } c^1_{n,k} = 0$$

dır, yani $m = 1$ için $(C,1)$ dönüşümü elde edilir.

Genel olarak, negatif tamsayı olmayan herhangi bir α reel sayısı için

$$f(x) = (1-x)^{-\alpha-1} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(\alpha+1)\ldots(\alpha+k)}{k!} x^k$$

ve böylece, $A^\alpha_0 = 1$ ve $k \ge 1$ için $A^\alpha_k = \dfrac{(\alpha+1)\ldots(\alpha+k)}{k!}$ dir. Ayrıca

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{\infty} s^\alpha_k x^k &= (1-x)^{-\alpha} \sum_{k=0}^{\infty} z_k x^k \\
&= \left(1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\alpha\ldots(\alpha+k-1)}{k!} x^k \right) \sum_{j=0}^{\infty} z_j x^j \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} c^\alpha_k x^k
\end{aligned}$$

dır, burada

$$c^\alpha_k = \sum_{j=0}^{k-1} \frac{\alpha(\alpha+1)\ldots(\alpha+k-j-1)}{(k-j)!} z_j + z_k \tag{1.1}$$

dir. O halde, eğer $(c^\alpha_{k,j})$ matrisini

$$c^\alpha_{k,j} = \begin{cases} 1 & , \quad k = j = 0 \text{ ise} \\[4pt] \dfrac{1}{\left[\dfrac{(\alpha+1)\ldots(\alpha+k)}{k!}\right]} & , \quad k = j \ne 0 \text{ ise} \\[4pt] \dfrac{\left[\dfrac{\alpha\ldots(\alpha+k-j-1)}{(k-j)!}\right]}{\left[\dfrac{(\alpha+1)\ldots(\alpha+k)}{k!}\right]} & , \quad k > j \text{ ise} \\[4pt] 0 & , \quad \text{diğer durumda} \end{cases}$$

olarak tanımlarsak, $\{z_k\}_0^\infty$ dizisinin (C,α) dönüşümü, $\{z_k\}_0^\infty$ dizisinin $(c^\alpha_{k,j})$ matris dönüşümü olur.

Teorem 1.11. $\alpha > 0$ için $(C,\alpha) = (c^\alpha_{k,j})$ regülerdir [1].

İspat. İlk olarak, eğer $\alpha > 0$ ise her $k = 0,1,\ldots$ ve $j = 0,1,\ldots$ için $c_{k,j}^{\alpha} \geq 0$ olup, $\sum_{j=0}^{\infty} c_{k,j}^{\alpha} = \sum_{j=0}^{\infty} \left| c_{k,j}^{\alpha} \right|$ dir. Böylece, eğer $\lim_{k\to\infty} \sum_{j=0}^{\infty} c_{k,j}^{\alpha} = 1$ (Silvermann-Toeplitz Teoreminin (ii) şartı) olduğu gösterilirse, $\sup_{k} \left\{ \sum_{j=0}^{\infty} \left| c_{k,j}^{\alpha} \right| \right\} < \infty$ (Silvermann-Toeplitz Teoreminin (iii) şartı) olduğu gösterilmiş olur. $\sum_{j=0}^{\infty} c_{k,j}^{\alpha} = \sum_{j=0}^{k} c_{k,j}^{\alpha}$ olup, eğer $k = 0$ ise $\sum_{j=0}^{0} c_{0,j}^{\alpha} = 1$ dir. Eğer $k \geq 1$ ise

$$\sum_{j=0}^{k} c_{k,j}^{\alpha} = \frac{1}{A_k^{\alpha}} \left[1 + \sum_{j=0}^{k-1} \frac{\alpha \ldots (\alpha + k - j - 1)}{(k-j)!} \right]$$

olur. (1.1) eşitliğinde $1 + \sum_{j=0}^{k-1} \frac{\alpha \ldots (\alpha + k - j - 1)}{(k-j)!} = c_k^{\alpha}$ göz önünde bulundurulursa, her $n = 0,1,\ldots$ için $z_n = 1$ olur.

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{\infty} c_k^{\alpha} x^k &= \sum_{k=0}^{\infty} s_k^{\alpha} x^k = (1-x)^{-\alpha} \sum_{k=0}^{\infty} z_k x^k = (1-x)^{-\alpha} \sum_{k=0}^{\infty} (1) x^k \\ &= (1-x)^{-\alpha} \sum_{k=0}^{\infty} x^k = (1-x)^{-\alpha} (1-x)^{-1} \\ &= (1-x)^{-\alpha-1} = \sum_{k=0}^{\infty} A_k^{\alpha} x^k \end{aligned}$$

yani $c_k^{\alpha} = A_k^{\alpha}$ dır ve böylece,

$$\sum_{j=0}^{\infty} c_{k,j}^{\alpha} = \sum_{k=0}^{k} c_{k,j}^{\alpha} = \frac{1}{A_k^{\alpha}} c_k^{\alpha} = \frac{1}{A_k^{\alpha}} A_k^{\alpha} = 1$$

olur. Buradan, $\lim_{k\to\infty} \sum_{j=0}^{\infty} c_{k,j}^{\alpha} = 1$ olup, Silvermann-Toeplitz Teoreminin (ii) ve (iii) şartı sağlanır.

Şimdi, her bir sabit $j = 0,1,\ldots$ için $\lim_{k\to\infty} c_{k,j}^{\alpha} = 0$ olduğunu gösterelim. j sabit olsun ve $k \geq j$ alalım.

$$\lim_{k\to\infty} c_{k,j}^{\alpha} = \lim_{k\to\infty} \frac{\alpha\ldots(\alpha+k-j-1)}{(k-j)!}\frac{k!}{(\alpha+1)\ldots(\alpha+k)}$$
$$= \lim_{k\to\infty} \frac{\alpha k(k-1)\ldots(k-j+1)}{(\alpha+k-j)\ldots(\alpha+k)} = \lim_{k\to\infty} \frac{\alpha k^{j}}{k^{j+1}} = \lim_{k\to\infty} \frac{\alpha}{k} = 0$$

olup, Silvermann-Toeplitz Teoreminin (i) şartı sağlanır, böylece (C,α); $\alpha > 0$ için regülerdir.

Tanım 1.11 de, her $k = 0,1,\ldots$ için $A_k^0 = 1$ ve $\sum_{k=0}^{\infty} s_k^0 x^k = \sum_{k=0}^{\infty} z_k x^k$, yani her $k = 0,1,\ldots$ için $s_k^0 = z_k$ olduğundan, $\alpha = 0$ hali yakınsaklık tanımını verir. Böylece, $\lim_{k\to\infty} s_k^0 / A_k^0 = \lim_{k\to\infty} z_k$ mevcut olması için gerek ve yeter şart $\{z_k\}_0^{\infty}$ dizisinin yakınsak olmasıdır.

Lemma 1.1. α ve β reel sayılar olsun. $k > t+1$ için

$$\frac{(\alpha+\beta)\ldots(\alpha+\beta+k-t-1)}{(k-t)!} = \frac{\beta\ldots(\beta-1+k-t)}{(k-t)!} + \sum_{j=t+1}^{k-1} \frac{\alpha\ldots(\alpha-1+j-t)}{(j-t)!}\cdot\frac{\beta\ldots(\beta-1+k-j)}{(k-j)!} + \frac{\alpha\ldots(\alpha-1+k-t)}{(k-t)!}$$

dir [1].

Lemma 1.2. $(d_{k,j}^{\alpha})$ matrisi $d_{k,j}^{\alpha} = A_k^{\alpha} c_{k,j}^{\alpha}$ olarak tanımlansın, yani

$$d_{k,j}^{\alpha} = \begin{cases} 1 & , \quad k = j \text{ ise} \\ \dfrac{\alpha\ldots(\alpha+k-j-1)}{(k-j)!} & , \quad k > j \text{ ise} \\ 0 & , \quad \text{diğer durumda} \end{cases}$$

olsun. Bu takdirde $(e_{k,t}^{\alpha}) = (d_{k,j}^{-\alpha})\cdot(d_{j,t}^{\alpha})$ ise $e_{k,t}^{\alpha} = \begin{cases} 1 & , \ k = t \text{ ise} \\ 0 & , \ k \neq t \text{ ise} \end{cases}$ dir [1].

Teorem 1.12. $\alpha > -1$ ve $h > 0$ ise $(C,\alpha) \subset (C,\alpha+h)$ dır. Yani $\{z_k\}_0^{\infty}$ dizisi y-ye (C,α) toplanabilir ise $\{z_k\}_0^{\infty}$ y-ye $(C,\alpha+h)$ toplanabilirdir [1].

İspat. Kabul edelim ki $\{z_k\}_0^\infty$ dizisi y-ye (C,α) toplanabilir olsun, yani $\lim_{k\to\infty}\sum_{j=0}^{k} c_{k,j}^{\alpha} z_j = y$ olsun. $t_k = \sum_{j=0}^{k} c_{k,j}^{\alpha} z_j$ ve $\sigma_k = \sum_{j=0}^{k} c_{k,j}^{\alpha+h} z_j$ alalım. Böylece

$$A_k^\alpha t_k = A_k^\alpha \sum_{j=0}^{k} c_{k,j}^{\alpha} z_j = \sum_{j=0}^{k} A_k^\alpha c_{k,j}^{\alpha} z_j = \sum_{j=0}^{k} d_{k,j}^{\alpha} z_j$$

ve buradan,

$$\sum_{k=0}^{t} d_{t,k}^{-\alpha} A_k^\alpha t_k = \sum_{k=0}^{t} d_{t,k}^{-\alpha}\left(\sum_{j=0}^{k} d_{k,j}^{\alpha} z_j\right) = \sum_{j=0}^{t}\left(\sum_{k=j}^{t} d_{t,k}^{-\alpha} d_{k,j}^{\alpha}\right) z_j = z_t$$

olur. O halde,

$$\begin{aligned}\sigma_k = \sum_{j=0}^{k} c_{k,j}^{\alpha+h} z_j &= \sum_{j=0}^{k} c_{k,j}^{\alpha+h}\left(\sum_{m=0}^{j} d_{j,m}^{-\alpha} A_m^\alpha t_m\right)\\ &= \sum_{m=0}^{k}\left(\sum_{j=m}^{k} c_{k,j}^{\alpha+h} d_{j,m}^{-\alpha} A_m^\alpha\right) t_m\end{aligned}$$

dir. $k<m$ için $p_{k,m}=0$ ve $k\geq m$ için $p_{k,m}=\sum_{j=m}^{k} c_{k,j}^{\alpha+h} d_{j,m}^{-\alpha} A_m^\alpha$ olmak üzere, $(p_{k,m})$ dönüşümü regüler ise, $\{t_k\}_0^\infty$ dizisi y-ye yakınsak olduğundan, $\{\sigma_k\}_0^\infty$ dizisi y-ye yakınsaktır. Şimdi teoremi ispatlayalım.

İlk olarak, $p_{m,m} = A_m^\alpha / A_m^{\alpha+h}$ olup, $k>m$ için

$$\begin{aligned}p_{k,m} &= \sum_{j=m}^{k} c_{k,j}^{\alpha+h} d_{j,m}^{-\alpha} A_m^\alpha = \frac{A_m^\alpha}{A_k^{\alpha+h}} \sum_{j=m}^{k} d_{k,j}^{\alpha+h} d_{j,m}^{-\alpha}\\ &= \frac{A_m^\alpha}{A_k^{\alpha+h}} \frac{(\alpha+h-\alpha)\ldots(\alpha+h-\alpha+k-m-1)}{(k-m)!}\end{aligned} \tag{1.2}$$

dir (Lemma 1.1 ve $d_{k,j}^{\beta}$ nın tanımı kullanıldı). Buradan, $k>m$ için

$$p_{k,m} = \frac{(\alpha+1)\ldots(\alpha+m)}{m!}\left[\frac{k-m+1}{\alpha+h+k-m+1}\cdots\frac{k}{\alpha+h+k}\right]\left[\frac{h}{\alpha+h+1}\cdots\frac{h+k-m-1}{\alpha+h+k-m}\right] \tag{1.3}$$

olur. m sabit ve $k>m+1$ olsun. Böylece,

$$\frac{k-m+1}{\alpha+h+k-m+1}\cdots\frac{k}{\alpha+h+k} \sim \frac{k^m}{k^m},\quad (k\to\infty)$$

dir ve buradan, $\lim_{k\to\infty}\left[\frac{k-m+1}{\alpha+h+k-m+1}\cdots\frac{k}{\alpha+h+k}\right]=1$ dir. Ayrıca

$$\frac{h}{\alpha+h+1}\cdots\frac{h+k-m-1}{\alpha+h+k-m}=\left(1-\frac{\alpha+1}{\alpha+h+1}\right)\cdots\left(1-\frac{\alpha+1}{\alpha+h+k-m}\right)$$

olup, her $j=1,2,\ldots$ için $0\le b_j<1$ dir, burada $b_j=(\alpha+1)/(\alpha+h+j-m)$ dir.

Böylece, $\sum_{j=1}^{\infty}b_j$ serisi ıraksaktır, dolayısıyla $\lim_{k\to\infty}\left[\frac{h}{\alpha+h+1}\cdots\frac{h+k-m-1}{\alpha+h+k-m}\right]=0$

dır. Böylece, (1.3) eşitliğinden $\lim_{k\to\infty}p_{k,m}=0$ olur (yani, Silvermann-Toeplitz Teoreminin (i) şartı sağlanır). (1.3) eşitliğinden $p_{k,m}\ge 0$ dır. Bu nedenle, eğer $\lim_{k\to\infty}\sum_{m=0}^{\infty}p_{k,m}=1$ ise Silvermann-Toeplitz Teoreminin (ii) ve (iii) şartları sağlanır, böylece $(p_{k,m})$ regülerdir. Şimdi bunu görelim.

$$\begin{aligned}\sum_{m=0}^{\infty}p_{k,m}&=\sum_{m=0}^{k}p_{k,m}=\sum_{m=0}^{k}\frac{A_m^{\alpha}}{A_k^{\alpha+h}}\sum_{j=m}^{k}d_{k,j}^{\alpha+h}d_{j,m}^{-\alpha}\\&=\frac{1}{A_k^{\alpha+h}}\sum_{m=0}^{k}A_m^{\alpha}\frac{h\ldots(h+k-m-1)}{(k-m)!}\end{aligned}$$

dir.

$$\sum_{m=0}^{k}A_m^{\alpha}\frac{h\ldots(h+k-m-1)}{(k-m)!}=\sum_{m=0}^{k}\frac{(\alpha+1)\ldots(\alpha+m)}{m!}\frac{h\ldots(h+k-m-1)}{(k-m)!}=c_k$$

olur, burada

$$\begin{aligned}1+\sum_{k=1}^{\infty}c_kx^k&=\left[1+\sum_{j=1}^{\infty}\frac{(\alpha+1)\ldots(\alpha+j)}{j!}x^j\right]\left[1+\sum_{t=1}^{\infty}\frac{h\ldots(h+t-1)}{t!}x^t\right]\\&=(1-x)^{-(\alpha+1)}(1-x)^{-h}=(1-x)^{-(\alpha+h+1)}\\&=1+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(\alpha+h+1)\ldots(\alpha+h+k)}{k!}x^k\end{aligned}$$

yani,

$$\sum_{m=0}^{k}A_m^{\alpha}\frac{h\ldots(h+k-m-1)}{(k-m)!}=\frac{(\alpha+h+1)\ldots(\alpha+h+k)}{k!}=A_k^{\alpha+h}$$

dir. Böylece,

$$\sum_{m=0}^{k} p_{k,m} = \frac{1}{A_k^{\alpha+h}} \sum_{m=0}^{k} A_m^{\alpha} \frac{h\ldots(h+k+m-1)}{(k-m)!} = 1$$

olur.

Tanım 1.12. Her bir x reel sayısı için $\sum_{k=0}^{\infty} z_k \frac{x^k}{k!}$ serisi yakınsak ve $\lim_{x\to\infty} e^{-x} \sum_{k=0}^{\infty} z_k \frac{x^k}{k!} = y$ ise $\{z_k\}_0^{\infty}$ dizisi y-ye Borel toplanabilirdir veya (B) toplanabilirdir denir [1].

Teorem 1.13. Borel üstel metodu regülerdir [1].

İspat. $\{z_k\}_0^{\infty}$ z-ye yakınsak olsun. Bu durumda, $\limsup_{n\to\infty} \{z_n/n!\}^{1/n} = 0$ dır ve böylece, $\sum_{k=0}^{\infty} z_k \left(x^k/k!\right)$ serisi her x reel sayısı için yakınsaktır.

Şimdi, $\varepsilon > 0$ verilmiş olsun ve

$$\left| e^{-x} \sum_{k=0}^{\infty} z_k \frac{x^k}{k!} - z \right| = \left| e^{-x} \sum_{k=0}^{\infty} z_k \frac{x^k}{k!} - e^{-x} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} z \right|$$
$$= \left| e^{-x} \sum_{k=0}^{\infty} (z_k - z) \frac{x^k}{k!} \right|$$

olduğu göz önünde bulundurulsun. Bu durumda, $k \geq K$ için $|z_k - z| < \frac{1}{2}\varepsilon$ olacak şekilde $K = K(\varepsilon)$ pozitif tamsayısı vardır. Ayrıca, $\{z_k\}_0^{\infty}$ yakınsak olduğundan, her $k = 0,1,\ldots$ için $|z_k - z| \leq M$ olacak şekilde bir $M > 0$ sayısı vardır. Bu nedenle, $x \geq 1$ için,

$$\left| e^{-x} \sum_{k=0}^{\infty} z_k \frac{x^k}{k!} - z \right| \leq \left| e^{-x} \sum_{k=0}^{K-1} (z_k - z) \frac{x^k}{k!} \right| + \left| e^{-x} \sum_{k=K}^{\infty} (z_k - z) \frac{x^k}{k!} \right|$$
$$< e^{-x} MKx^{K-1} + \left(e^{-x} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} \right) \frac{1}{2}\varepsilon$$
$$= e^{-x} MKx^{K-1} + \frac{1}{2}\varepsilon$$

dir. $x \geq \delta$ için $\frac{x^{K-1}}{e^x} < \frac{\varepsilon}{2MK}$ olacak şekilde $\delta = \delta(\varepsilon) > 1$ seçilsin. Böylece, $x > \delta$ için

$$\left| e^{-x} \sum_{k=0}^{\infty} z_k \frac{x^k}{k!} - z \right| < MK \frac{\varepsilon}{2MK} + \frac{1}{2}\varepsilon = \varepsilon$$

kalır. Dolayısıyla

$$\lim_{x \to \infty} e^{-x} \sum_{k=0}^{\infty} z_k \frac{x^k}{k!} = z$$

olur. O halde Borel üstel metodu regülerdir.

Genel olarak, Borel üstel metodu yerine bir matris metodu alınır (toplanabilmede Borel matris metodu denir). Bunun için

$$b_{n,k} = e^{-n} \frac{n^k}{k!}; \quad n = 0,1,\ldots \quad , \quad k = 0,1,\ldots$$

alalım. $\{z_k\}_0^{\infty}$ dizisinin Borel dönüşümü olan $\{\sigma_n\}_0^{\infty}$ dizisi

$$\sigma_n = \sum_{k=0}^{\infty} b_{n,k} z_k$$

ile tanımlanır.

Tanım 1.13. $r \in \mathbf{C} \ / \{1,0\}$ olsun. r-inci mertebeden Euler dönüşümü $(E,r) = (e_{n,k}^r)$ olup,

$$e_{n,k}^r = \begin{cases} \binom{n}{k} r^k (1-r)^{n-k} & , \ k \leq n \text{ ise} \\ 0 & , \ k > n \text{ ise} \end{cases}$$

dir. $r = 1$ için $e_{n,k}^1 = \begin{cases} 0 & , \ k \neq n \text{ ise} \\ 1 & , \ k = n \text{ ise} \end{cases}$, $k \geq 1$ ve $n = 0,1,\ldots$ için $e_{n,k}^0 = 0$ ve $n = 0,1,\ldots$ için $e_{n,0}^0 = 1$ alınır.

Euler' in orijinal dönüşümü E_1,

$$a_{n,k} = \begin{cases} \binom{n}{k} \frac{1}{2^n} & , \ k \leq n \text{ ise} \\ 0 & , \ k > n \text{ ise} \end{cases}$$

olmak üzere $(a_{n,k})$ matrisi ile verildi. E_1 dönüşümünün orijinal genellemesi $(b^q_{n,k})$ dönüşümüdür, burada

$$b^q_{n,k} = \begin{cases} \binom{n}{k}(q+1)^{-n} q^{n-k} & , \ k \le n \text{ ise} \\ 0 & , \ k > n \text{ ise} \end{cases}$$

dır. Tanım 1.13 de $r=(q+1)^{-1}$ alınırsa, $(b^q_{n,k})$ dönüşümü elde edilir. Böylece, $r=1/2$, orijinal E_1 dönüşümü olan $(E,1/2)$ dönüşümünü verir [1].

Teorem 1.14. (E,r) dönüşümünün regüler olması için gerek ve yeter şart $0<r\le 1$ ve r nin reel olmasıdır [1].

İspat. $\sum_{n=k}^{\infty}\binom{n}{k}w^{n-k}$ serisinin $|w|<1$ için yakınsak olduğu biliniyor ($(1-w)^{k+1}$ fonksiyonunun $w=0$ civarında Taylor serisine açılımı $\sum_{n=k}^{\infty}\binom{n}{k}w^{n-k}$ serisi olup, bu seri $|w|<1$ için yakınsak olduğundan). k sabit olsun. Böylece, $\lim_{n\to\infty} e^r_{n,k} = \lim_{n\to\infty}\binom{n}{k}r^k(1-r)^{n-k} = r^k \lim_{n\to\infty}\binom{n}{k}(1-r)^{n-k}$ dır. $|1-r|\ge 1$ ise $\lim_{n\to\infty}\binom{n}{k}(1-r)^{n-k} \ne 0$ dır. Eğer $|1-r|<1$ ise $\lim_{n\to\infty}\binom{n}{k}(1-r)^{n-k}=0$ dır ($\sum_{n=k}^{\infty}\binom{n}{k}(1-r)^{n-k}$ yakınsak olduğundan). Böylece, Silvermann-Toeplitz Teoreminin (i) şartının sağlanması için, yani $\lim_{n\to\infty} e^r_{n,k}=0$ olması için gerek ve yeter şart $|1-r|<1$ olmasıdır.

Ayrıca, $(\alpha+\beta)^n = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\alpha^k\beta^{n-k}$ olduğundan,

$$\sum_{k=0}^{\infty} e^r_{n,k} = \sum_{k=0}^{n} e^r_{n,k} = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}r^k(1-r)^{n-k} = (1-r+r)^n = 1$$

dir, buradan $\lim\limits_{n\to\infty} \sum\limits_{k=0}^{\infty} e_{n,k}^{r} = 1$ dir. Bu nedenle, Silvermann-Toeplitz Teoreminin (ii) şartı sağlanır (r -parametresi ne olursa olsun).

Son olarak,

$$\sum_{k=0}^{\infty} \left| e_{n,k}^{r} \right| = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} |r|^{k} \, |1-r|^{n-k} = \left(|r| + |1-r| \right)^{n}$$

dir. Böylece, $\sup\limits_{n} \left\{ \sum\limits_{k=0}^{\infty} \left| e_{n,k}^{r} \right| \right\} \leq M < \infty$ olacak şekilde $M > 0$ mevcut olması için gerek ve yeter şart $\sup\limits_{n} \left\{ \left(|r| + |1-r| \right)^{n} \right\} \leq M < \infty$ olmasıdır. Bu ise $|r| + |1-r| \leq 1$ olmasını çift yönlü gerektirir. Üçgen eşitsizliğinden, $r \in \mathbb{C}$ için $|r| + |1-r| \geq 1$ dir. Böylece, $|r| + |1-r| \leq 1$ dir ancak ve ancak $|r| + |1-r| = 1$ dir, yani $r \in IR$ ve $0 \leq r \leq 1$ dir. O halde, Silvermann-Toeplitz Teoreminin (iii) şartının sağlanması için gerek ve yeter şart $0 \leq r \leq 1$ dir. Bu, $|1-r| < 1$ şartı ile birleştirilirse, $(e_{n,k}^{r})$ matrisinin regüler olması için gerek ve yeter şartın $r \in IR$ ve $0 < r \leq 1$ olduğunu ifade eder.

Lemma 1.3. $rs \neq 0$ olmak üzere $(e_{n,k}^{r}) \cdot (e_{n,k}^{s})$ çarpımı, (E, rs) dönüşümü için bir matristir [1].

İspat. $(a_{n,j}) = (e_{n,k}^{r}) \cdot (e_{k,j}^{s})$ olsun. Açık olarak, $j > n$ ise $a_{n,j} = 0$ dır. Ayrıca, eğer $r = 1$ veya $s = 1$ ise aynı sonucun elde edileceği açıktır. ($(E,1)$ adi yakınsak olduğundan). Kabul edelim ki, $r \neq 1$, $s \neq 1$ ve $j \leq n$ olsun. Böylece, $a_{n,j} = \sum\limits_{k=j}^{n} e_{n,k}^{r} e_{k,j}^{s}$ dir. Eğer $j = n$ ise

$$a_{n,n} = e_{n,n}^{r} \cdot e_{n,n}^{s} = \binom{n}{n} r^{n} \binom{n}{n} s^{n} = (rs)^{n}$$

dir. Eğer $j < n$ ise

$$
\begin{aligned}
\sum_{k=j}^{n} e_{n,k}^{r} e_{k,j}^{s} &= \sum_{k=j}^{n} \binom{n}{k} r^{k} (1-r)^{n-k} \binom{k}{j} s^{j} (1-s)^{k-j} \\
&= s^{j} \frac{(1-r)^{n}}{(1-s)^{j}} \sum_{k=j}^{n} \binom{n}{k} \binom{k}{j} r^{k} \left(\frac{1-s}{1-r}\right)^{k} \\
&= \binom{n}{j} (rs)^{j} (1-r)^{n-j} \sum_{k=j}^{n} \binom{n-j}{k-j} \left[\frac{r(1-s)}{1-r}\right]^{k-j} \\
&= \binom{n}{j} (rs)^{j} (1-r)^{n-j} \left[1+\frac{r(1-s)}{1-r}\right]^{n-j} \\
&= \binom{n}{j} (rs)^{j} (1-rs)^{n-j}
\end{aligned}
$$

dir.

Sonuç 1.2. $r \neq 0$ ise (E,r) invertible ve $(E,r)^{-1} = (E,1/r)$ dir [1].

Teorem 1.15. $0<|s|\leq|r|$ ve $|s|+|r-s|=|r|$ ise $(E,r)\subset(E,s)$ dir [1].

İspat. $0<|s|\leq|r|$ alalım ve kabul edelim ki, $\{z_k\}_0^\infty$ dizisi y-ye (E,r) toplanabilir olsun, yani $\{t_n\}_0^\infty$ dizisi y-ye yakınsak olsun, burada $t_n = \sum_{k=0}^{\infty} e_{n,k}^{r} z_k = \sum_{k=0}^{n} e_{n,k}^{r} z_k$ dir. Böylece, Sonuç 1.2 den

$$
\begin{aligned}
\sum_{n=0}^{j} e_{j,n}^{1/r} t_n &= \sum_{n=0}^{j} e_{j,n}^{1/r} \sum_{k=0}^{n} e_{n,k}^{r} z_k \\
&= \sum_{k=0}^{j} \left(\sum_{n=k}^{j} e_{j,n}^{1/r} e_{n,k}^{r} \right) z_k = z_j
\end{aligned}
$$

olur. Lemma 1.3 den

$$
\begin{aligned}
\sigma_n = \sum_{j=0}^{\infty} e_{k,j}^{s} z_j &= \sum_{j=0}^{k} e_{k,j}^{s} z_j \\
&= \sum_{j=0}^{k} e_{k,j}^{s} \left(\sum_{n=0}^{j} e_{j,n}^{1/r} t_n \right) \\
&= \sum_{n=0}^{k} \left(\sum_{j=n}^{k} e_{k,j}^{s} e_{j,n}^{1/r} \right) t_n = \sum_{n=0}^{k} e_{k,n}^{s/r} t_n
\end{aligned}
$$

olur. $0<|s|\leq|r|$ ve $|s|+|r-s|=|r|$ olduğundan $0<s/r\leq 1$ dir ve Teorem 1.14 den $(E,s/r)$ dönüşümü regülerdir. Böylece, $\{t_n\}_0^\infty$ dizisi y-ye yakınsak olduğundan $\{\sigma_n\}_0^\infty$ dizisi y-ye yakınsaktır.

2. BÖLÜM

TAUBERIAN TEOREMLER

A-toplanabilen bir seri, genel terimi üzerine konulan bir ek şartla yakınsak kılınabiliyorsa, bu şarta A limitleme metodu için bir Tauberian şart, bu tür teoremlere de Tauberian teoremler denir.

Bu bölümde, A limitleme metodu olarak Abel, Cesàro ve Euler metodlarını alacağız.

Tauberian teoremlere girmeden önce, bu bölümde sıkça kullandığımız bazı sonuç ve notasyonları verelim.

Teorem 2.1. Eğer $\{c_n\}_0^\infty$ pozitif sayıların $+\infty$ a artan bir dizisi ve $\{a_n\}_0^\infty$ reel sayıların herhangi bir dizisi ise

$$\liminf_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}-a_n}{c_{n+1}-c_n}\le\liminf_{n\to\infty}\frac{a_n}{c_n}\le\limsup_{n\to\infty}\frac{a_n}{c_n}\le\limsup_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}-a_n}{c_{n+1}-c_n}$$

dir [1].

Sonuç 2.1. $\{a_n\}_0^\infty$ reel sayıların herhangi bir dizisi ise

$$\liminf_{n\to\infty}(a_{n+1}-a_n)\le\liminf_{n\to\infty}\frac{a_n}{n}\le\limsup_{n\to\infty}\frac{a_n}{n}\le\limsup_{n\to\infty}(a_{n+1}-a_n)$$

dir [1].

Sonuç 2.2. $\{s_n\}_0^\infty$ reel sayıların herhangi bir dizisi ise

$$\liminf_{n\to\infty}s_n\le\liminf_{n\to\infty}\frac{s_0+\cdots+s_n}{n+1}\le\limsup_{n\to\infty}\frac{s_0+\cdots+s_n}{n+1}\le\limsup_{n\to\infty}s_n \qquad (2.1)$$

dir [1].

Bu kısımda, 1.Bölümdeki

$$A_n^\alpha = \frac{(\alpha+1)\ldots(\alpha+n)}{n!} \quad \text{ve} \quad s_n^k = \sum_{j=0}^{n} s_j^{k-1}$$

notasyonlarını kullanacağız, burada k pozitif bir tamsayı ve $s_n^0 = s_n = \sum_{j=0}^{n} s_j$ olup, eğer $\lim_{n\to\infty} s_n^k / A_n^k = y$ ise $\sum_{j=0}^{\infty} a_j$ serisi y-ye (C,k) toplanabilirdir. Bu, gamma fonksiyonu ile verilirse

$$A_n^\alpha = \frac{\Gamma(\alpha+n+1)}{\Gamma(\alpha+1)\Gamma(n+1)}$$

dir. Böylece $\lim_{n\to\infty} \frac{s_n^k}{\Gamma(k+n+1)/\Gamma(k+1)\Gamma(n+1)} = y$ olmak şartıyla, $\sum_{j=0}^{\infty} a_j$ serisi y-ye (C,k) toplanabilirdir (k pozitif bir tamsayıdır).

Teorem 2.2. k bir pozitif tamsayı olsun. Eğer $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ (C,k) toplanabilir ise $a_n = o(n^k)$ ve $s_n = o(n^k)$ dır [1].

İspat. Hipotez gereği, $\lim_{n\to\infty} \frac{s_n^k}{\Gamma(k+n+1)/\Gamma(k+1)\Gamma(n+1)} = s$ olacak şekilde bir s vardır. Böylece,

$$s_n^k = \left\{ \frac{n^k}{\Gamma(k+1)}(1+o(1)) \right\}(s+o(1)) = s\frac{n^k}{\Gamma(k+1)} + o(n^k) \tag{2.2}$$

olur ve buradan,

$$s_n^{k-1} = s_n^k - s_{n-1}^k = o(n^k)$$

dır. Benzer olarak, $j = 2,3,\ldots,k$ için $s_n^{k-j} = o(n^k)$ dır. Bu nedenle, $a_n = s_n - s_{n-1} = o(n^k)$ olur.

Teorem 2.3. Eğer $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ serisi s-ye $(C,1)$ toplanabilir ve yeterince büyük n ler için $a_n \geq 0$ ise $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ s-ye yakınsar [1].

İspat. $s_n = \sum_{j=0}^{n} a_j$ olsun. $n \geq n_0$ için $s_{n+1} \geq s_n$ olacak şekilde n_0 sayısı vardır. Eğer $s_n = O(1)$ ise $\{s_n\}_0^\infty$ yakınsaktır (L-ye yakınsasın) ve (2.1) gereğince $L = s$ dir.

Eğer $\{s_n\}_0^\infty$ sınırsız bir dizi ise $\lim_{n\to\infty} s_n = +\infty$ ve (2.1) gereğince $\lim_{n\to\infty} s_n^1 / (n+1) = +\infty$ olur ki bu, hipotezle çelişir.

Lemma 2.1. Eğer $|x| < 1$ için $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ yakınsak ve $\sum_{n=0}^{\infty} a_n = +\infty$ ise $\lim_{x\to 1^-} \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = +\infty$ dir [1].

İspat. $|x| < 1$ için $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ olsun. $|x| < 1$ için $f(x) = f(x)(1-x)\sum_{n=0}^{\infty} x^n$ yazılabilir. Böylece, $s_n = \sum_{j=0}^{n} a_j$ olmak üzere,

$$f(x) = (1-x)\sum_{n=0}^{\infty} s_n x^n \tag{2.3}$$

olur. $\{s_n\}_0^\infty \to +\infty$ olduğundan, $H > 0$ verildiğinde $n \geq n_1$ için $s_n > H$ olacak şekilde $n_1 = n_1(H)$ sayısı vardır. Böylece, $0 < x < 1$ için

$$(1-x) \sum_{n=n_1+1}^{\infty} s_n x^n > H(1-x)\left(\sum_{n=n_1+1}^{\infty} x^n\right) = Hx^{n_1+1}$$

olur. Şimdi, $0 < x_1 < x < 1$ için $Hx^{n_1+1} > \frac{1}{2}H$ olacak şekilde x_1 vardır. Ayrıca, $0 < x_2 < x < 1$ için

$$(1-x)\left|\sum_{n=0}^{n_1} s_n x^n\right| < (1-x)\sum_{n=0}^{n_1} |s_n| < \frac{1}{4}H$$

olacak şekilde x_2 vardır. Böylece, $0 < \max\{x_1, x_2\} < x < 1$ için

$$f(x) > (1-x) \sum_{n=n_1+1}^{\infty} s_n x^n - (1-x)\left|\sum_{n=0}^{n_1} s_n x^n\right| > \frac{1}{4}H$$

olur. H keyfi olduğundan,

$$\lim_{x\to 1^-} \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = \lim_{x\to 1^-} f(x) = +\infty$$

olur.

Teorem 2.4. $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ serisi s-ye Abel toplanabilir ve yeterince büyük n ler için $a_n \geq 0$ ise $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ s-ye yakınsar [1].

İspat. $n > n_0$ için $a_n > 0$ olacak şekilde bir n_0 sayısı vardır. Böylece $\{s_n\}_{n_0+1}^{\infty}$ dizisi artan bir dizidir. Eğer $s_n = O(1)$ ise $\sum_{n=0}^{\infty} a_n = L$ olacak şekilde L-sayısı vardır. Teorem 1.2 gereğince,

$$\lim_{x\to 1^-} \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n$$

dir ve böylece $s = L$ dir.

Eğer $s_n \neq O(1)$ ise $\lim_{n\to\infty} s_n = +\infty$ dir ve Lemma 2.1 den, $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ serisi Abel toplanabilir değildir (ki bu, hipotezle çelişir).

Şimdi, (C,k) toplanabilir bir serinin Abel toplanabilir olduğunu ispatlayalım. Bu, bize Teorem 2.3 için bir alternatif ispat verir.

Teorem 2.5. k bir pozitif tamsayı olsun. Eğer $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ s-ye (C,k) toplanabilir ise $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ s-ye Abel toplanabilirdir [1].

İspat. $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ (C,k) toplanabilir olduğundan, Teorem 2.2 gereğince, $a_n = o(n^k)$ dır. Böylece, $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ serisi $|x| < 1$ için yakınsaktır ($f(x)$ fonksiyonuna yakınsadığını kabul edelim). (2.3) de olduğu gibi

$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}a_n x^n=(1-x)\sum_{n=0}^{\infty}s_n x^n$$
$$=(1-x)^2\sum_{n=0}^{\infty}s_n^1 x^n=\cdots=(1-x)^{k+1}\sum_{n=0}^{\infty}s_n^k x^n \tag{2.4}$$

olur. $n^k/k!-\binom{n}{k}=o(n^k)$ olduğundan, (2.2) gereğince,

$$s_n^k=s\binom{n}{k}+o(n^k)=s\binom{n}{k}+o\left(\binom{n}{k}\right)$$

olur. Böylece, $\varepsilon>0$ verildiğinde $N=N(\varepsilon)\geq k$ sayısı vardır öyle ki, $n\geq N$ için $\left|s_n^k-s\binom{n}{k}\right|<\varepsilon\binom{n}{k}$ kalır. $0<x<1$ için

$$\begin{aligned}
&\left|\sum_{n=0}^{\infty}s_n^k x^n-s\sum_{n=k}^{\infty}\binom{n}{k}x^n\right| \\
&\leq\sum_{n=k}^{\infty}\left|s_n^k-s\binom{n}{k}\right|x^n+\sum_{n=0}^{k-1}\left|s_n^k\right|x^n \\
&\leq\varepsilon\sum_{n=N+1}^{\infty}\binom{n}{k}x^n+\sum_{n=0}^{k-1}\left|s_n^k\right|+\sum_{n=k}^{N}\left|s_n^k-s\binom{n}{k}\right| \\
&\leq\varepsilon\sum_{n=k}^{\infty}\binom{n}{k}x^n+\sum_{n=0}^{k-1}\left|s_n^k\right|+\sum_{n=k}^{N}\left|s_n^k-s\binom{n}{k}\right|
\end{aligned}$$

olur. Şimdi, $\sum_{n=k}^{\infty}\binom{n}{k}x^n=x^k(1-x)^{-k-1}$ dir. Böylece

$$\limsup_{x\to1^-}\frac{\left|\sum_{n=0}^{\infty}s_n^k x^n-s\sum_{n=k}^{\infty}\binom{n}{k}x^n\right|}{x^k(1-x)^{-k-1}}\leq\varepsilon$$

kalır. Bu nedenle,

$$\limsup_{x\to1^-}\frac{\sum_{n=0}^{\infty}s_n^k x^n-s\sum_{n=k}^{\infty}\binom{n}{k}x^n}{x^k(1-x)^{-k-1}}=0$$

dır. (2.4) gereğince,

$$\lim_{x\to1^-}\frac{f(x)(1-x)^{-k-1}}{x^k(1-x)^{-k-1}}=s$$

yani,

$$\lim_{x \to 1^-} f(x) = \lim_{x \to 1^-} \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = s$$

elde edilir.

Sonuç 2.3. $\alpha > -1$ olsun. $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ s-ye (C,α) toplanabilir ise $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ s-ye Abel toplanabilirdir [1].

Sonuç 2.4. $\alpha > -1$ olsun. $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ s-ye (C,α) toplanabilir ve yeterince büyük n ler için $a_n \geq 0$ ise $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ s-ye yakınsar [1].

İspat. Sonuç 2.3 den $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ serisi s-ye Abel toplanabilirdir. Böylece, Teorem 2.4 gereğince, seri s-ye yakınsar.

Teorem 2.6. $T_n = \sum_{j=1}^{n} j a_j$ olsun. $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ s-ye $(C,1)$ toplanabilir ise $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ serisinin s-ye yakınsak olması için gerek ve yeter şart $T_n = o(n)$ olmasıdır [1].

İspat. $(n+1)s_n - s_n^1 = (n+1)\sum_{j=0}^{n} a_j - \sum_{j=0}^{n} s_j = T_n$ olduğundan,

$$s_n - \frac{s_n^1}{n+1} = \frac{T_n}{n+1} \tag{2.5}$$

olur.

Eğer $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ yakınsak ise (2.1) den

$$\lim_{n \to \infty} \frac{s_n^1}{n+1} = \lim_{n \to \infty} s_n$$

olur. Böylece (2.5) den, $T_n = o(n)$ dir.

Eğer $T_n = o(n)$ ise (2.5) ve hipotez gereği,

$$s_n = \frac{s_n^1}{n+1} + o(1)$$

olur. Böylece, $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ serisi s -ye yakınsar.

Sonuç 2.5. $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ s -ye $(C,1)$ toplanabilir ve $a_n = o(1/n)$ ise $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ s -ye yakınsar [1].

İspat. $na_n = o(1)$ olduğundan, (2.1) gereğince, $T_n = o(n)$ dir. Böylece, Teorem 2.6 gereğince, $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ s -ye yakınsar [1].

Teorem 2.7. $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ s -ye Abel toplanabilir ise $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ serisinin s -ye yakınsak olması için gerek ve yeter şart $T_n = o(n)$ olmasıdır [1].

İspat. (a) İlk olarak kabul edelim ki $na_n = o(1)$ olsun. $0 < x < 1$ için

$$\begin{aligned} f(x) - s_m &= \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n - \sum_{n=0}^{m} a_n \\ &= -\sum_{n=0}^{m} a_n (1 - x^n) + \sum_{n=m+1}^{\infty} a_n x^n \end{aligned}$$

dir. Şimdi, $1 - x^n = (1-x)\sum_{j=0}^{n-1} x^j < n(1-x)$ olur. $\varepsilon_m = \max_{k \ge m} |ka_k|$ alırsak,

$$\begin{aligned} |f(x) - s_m| &\le \sum_{n=1}^{m} (1-x)n|a_n| + \left| \sum_{n=m+1}^{\infty} \frac{na_n x^n}{n} \right| \\ &\le (1-x)\sum_{n=1}^{m} n|a_n| + \varepsilon_{m+1} \sum_{n=m+1}^{\infty} \frac{x^n}{n} \\ &< (1-x)\sum_{n=1}^{m} n|a_n| + \frac{\varepsilon_{m+1}}{m+1} \frac{1}{1-x} \end{aligned}$$

olur. $na_n = o(1)$ olduğundan, (2.1) gereğince, $\sum_{n=0}^{m} na_n = o(m)$ dir. Ayrıca, $\{\varepsilon_m\}_0^{\infty}$ dizisi sıfıra yakınsar. Böylece

$$\left|f\left(1-\frac{1}{m}\right)-s_m\right|\le\frac{1}{m}\sum_{n=0}^{\infty}n\left|a_n\right|+\varepsilon_{m+1}=o(1)$$

yani, $\lim_{m\to\infty}s_m=s$ dir.

(b) Şimdi, $T_n=o(n)$ olsun. $T_0=0$ ve $n\ge 1$ için $(T_n-T_{n-1})/n=a_n$ olduğundan, $0<x<1$ için

$$\begin{aligned}f(x)&=a_0+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{T_n}{n}x^n-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{T_{n-1}}{n}x^n\\&=a_0+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{T_n}{n}x^n-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{T_n}{n+1}x^{n+1}\\&=a_0+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{T_n}{n}x^n-\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{T_n}{n}-\frac{T_n}{n(n+1)}\right)x^{n+1}\\&=a_0+(1-x)\sum_{n=1}^{\infty}\frac{T_n}{n}x^n+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{T_n}{n(n+1)}x^{n+1}\end{aligned}$$

olur. $\max_{n\ge m}\left|T_n\right|/n=\delta_m$ alalım. Böylece, $\{\delta_m\}_0^{\infty}$ dizisi sıfıra yakınsar ve

$$\begin{aligned}&\limsup_{x\to 1^-}\left|(1-x)\sum_{n=1}^{\infty}\frac{T_n}{n}x^n\right|\\&\le\limsup_{x\to 1^-}(1-x)\sum_{n=1}^{m}\frac{\left|T_n\right|}{n}x^n+\limsup_{x\to 1^-}(1-x)\frac{\delta_{m+1}}{1-x}=\delta_{m+1}\end{aligned}$$

olur. Bu nedenle

$$\lim_{x\to 1^-}(1-x)\sum_{n=1}^{\infty}\frac{T_n}{n}x^n=0$$

ve

$$\lim_{x\to 1^-}f(x)=a_0+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{T_n}{n(n+1)}x^{n+1}$$

dır. Böylece,

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{T_n}{n(n+1)}\tag{2.6}$$

serisi $(s-a_0)$'a Abel toplanabilirdir ve $T_n/[n(n+1)]=o(1/n)$ olur. Bu durumda, (a) gereğince, (2.6) serisi $(s-a_0)$'a yakınsar. Fakat, (2.6) daki serinin toplamı,

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{T_k}{k(k+1)}=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{T_k}{k}-\frac{T_k}{k+1}\right)$$
$$=\lim_{n\to\infty}\left(\sum_{k=1}^{n}\frac{T_k}{k}-\sum_{k=2}^{n+1}\frac{T_{k-1}}{k}\right)$$
$$=\lim_{n\to\infty}\left(-\frac{T_n}{n+1}+\sum_{k=1}^{n}a_k\right)=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}a_k$$

olup, $\sum_{k=0}^{\infty}a_k$ s-ye yakınsar.

$\sum_{n=0}^{\infty}a_n$ yakınsak olduğundan, Teorem 2.6 gereğince, $T_n=o(n)$ dir.

Sonuç 2.6. $\alpha>-1$ olsun. $\sum_{n=0}^{\infty}a_n$ s-ye (C,α) toplanabilir ve $T_n=o(n)$ ise $\sum_{n=0}^{\infty}a_n$ s-ye yakınsar [1].

Sonuç 2.7. $\sum_{n=0}^{\infty}a_n$ s-ye Abel toplanabilir ve $a_n=o(1/n)$ ise $\sum_{n=0}^{\infty}a_n$ s-ye yakınsar [1].

Tanım 2.1. $x=\{x_n\}_0^{\infty}$ sınırlı bir dizi olsun. $\{x_n\}_0^{\infty}$ dizisinin salınımlı $w_n(x)$ fonksiyonu

$$w_n(x)=\sup_{k,\ell\geq n}\left|x_k-x_\ell\right|$$

olarak tanımlanır. $w_n(x)$ fonksiyonu, n nin artmayan bir fonksiyonudur ve x_n ler reel olmak üzere

$$\lim_{n\to\infty}w_n(x)=\limsup_{n\to\infty}x_n-\liminf_{n\to\infty}x_n$$

dir [1].

Teorem 2.8. $\sum_{n=0}^{\infty}a_n$ s-ye $(C,1)$ toplanabilir ve $na_n\geq -c$ ($\exists c>0$ için) ise $\sum_{n=0}^{\infty}a_n$ s-ye yakınsaktır [1].

İspat. $s_n = \sum_{k=0}^{n} a_k$ için

$$\begin{aligned}
&s_n - \frac{s^1_{n+k}}{n+k+1} - \frac{n}{k+1}\left\{\frac{s^1_{n+k}}{n+k+1} - \frac{s^1_{n-1}}{n}\right\} \\
&= s_n - \frac{n+k+1}{k+1}\frac{1}{n+k+1}\sum_{j=0}^{n+k} s_j + \frac{1}{k+1}\sum_{j=0}^{n-1} s_j \\
&= s_n - \frac{1}{k+1}\sum_{j=n}^{n+k} s_j \\
&= -\frac{1}{k+1}\left\{ka_{n+1} + (k-1)a_{n+2} + \cdots + a_{n+k}\right\}
\end{aligned}$$

dir.

$\sigma_n = s^1_n/(n+1)$ ve $\sigma = \{\sigma_n\}_0^\infty$ olmak üzere, $w_n = w_n(\sigma)$ olsun. Ayrıca,

$$s_n - \sigma_{n+k} = \frac{n}{k+1}(\sigma_{n+k} - \sigma_{n-1}) - \frac{1}{k+1}\sum_{j=1}^{k}(k+1-j)a_{n+j} \tag{2.7}$$

olup,

$$\begin{aligned}
s_n &\le \sigma_{n+k} + \frac{n}{k+1}w_{n-1} + \frac{c}{k+1}\left\{\frac{k}{n+1} + \frac{k-1}{n+2} + \cdots + \frac{1}{n+k}\right\} \\
&\le \sigma_{n+k} + \frac{n}{k+1}w_{n-1} + \frac{c}{2}\frac{k(k+1)}{(k+1)(n+1)}
\end{aligned}$$

elde edilir.

$k = k(n) = [[n\sqrt{(w_{n-1})}]]$ seçelim. $\{w_n\}_0^\infty$ sıfıra azalan bir dizi olduğundan

$$\limsup_{n\to\infty} s_n \le \lim_{n\to\infty} \sigma_n = s \tag{2.8}$$

dir.

Şimdi, $\liminf_{n\to\infty} s_n$ alt limitini bulalım. $k < n-1$ ise

$$s_n - \sigma_{n-k-1} = \frac{n+1}{k+1}(\sigma_n - \sigma_{n-k-1}) + \frac{1}{k+1}\sum_{j=n-k+1}^{n}(j-n+k)a_j$$

olup,

$$s_n \ge \sigma_{n-k-1} - \frac{n+1}{k+1}w_{n-k-1} - \frac{c}{k+1}\frac{k(k+1)}{2(n-k+1)}$$

elde edilir. $0<\varepsilon<\frac{1}{2}$ verilsin ve $k=k(n)=[[\varepsilon n]]$ alalım. Bu durumda, $\lim_{n\to\infty}\frac{n+1}{k+1}w_{n-k-1}=0$ olur. Böylece,

$$\liminf_{n\to\infty} s_n \geq s-\varepsilon c$$

olur. Buradan,

$$\liminf_{n\to\infty} s_n \geq s$$

elde edilir. (2.8) den $\lim_{n\to\infty} s_n = s$ dir.

$\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ s-ye $(C,1)$ toplanabilir ve $na_n \leq c$ ($\exists c>0$ için) olmak şartıyla, $\sum_{n=0}^{\infty}(-a_n)$ serisi göz önünde bulundurulur ve Teorem 2.8 kullanılırsa, $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ serisinin s-ye yakınsak olduğu görülür.

Teorem 2.9. $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ s-ye $(C,1)$ toplanabilir ve $a_n = O(1/n)$ ise $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ s-ye yakınsar [1].

İspat[1]. Kabul edelim ki hipotezler sağlansın. Bu durumda, $\{n|a_n|\}_1^{\infty}$ dizisi sınırlıdır. $\delta_n = \sup_{k\geq n}|a_k|$ alalım. Böylece, $\{\delta_n\}_0^{\infty}$ dizisi sıfıra azalır ve $n\delta_n = O(1)$ olur. (2.7) den

$$|s_n - \sigma_{n+k}| \leq \frac{n}{k+1}w_{n-1} + \frac{k}{2}\delta_{n+1}$$

yazılabilir. $k=k(n)=\left[\frac{2nw_{n-1}}{\delta_{n+1}}\right]^{1/2}$ alınırsa,

$$|s_n - \sigma_{n+k}| < (2nw_{n-1}\delta_{n+1})^{1/2}$$

olur. Böylece, $\lim_{n\to\infty}(2nw_{n-1}\delta_{n+1})^{1/2}=0$ olduğundan, $\lim_{n\to\infty} s_n = s$ dir.

[1] Bu ispat [1, sayfa: 86] dan alınmıştır.

Teorem 2.10. $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ s-ye Abel toplanabilir ve $s_n = \sum_{j=0}^{n} a_j \geq -c$ ($\exists c > 0$ ve her $n = 0,1,\ldots$ için) ise $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ serisi s-ye $(C,1)$ toplanabilirdir [1].

Teorem 2.11. $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ s-ye Abel toplanabilir ve $\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n} ka_k \geq -c$ ($\exists c > 0$ ve her $n = 1,2,\ldots$ için) ise $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ serisi s-ye $(C,1)$ toplanabilirdir [1].

Teorem 2.12 (Hardy-Littlewood). $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ s-ye Abel toplanabilir ve $na_n \geq -c$ ($\exists c > 0$ ve her $n = 0,1,\ldots$ için) ise $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ serisi s-ye yakınsar [1].

İspat. $na_n \geq -c$ olduğundan $\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n} ka_k \geq -c$ dir. Teorem 2.11 den $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ serisi s-ye $(C,1)$ toplanabilirdir ve Teorem 2.8 den, $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ s-ye yakınsar.

Lemma 2.2. $n \geq 1$ için $e^{11/12}\left(\frac{n}{e}\right)^n \sqrt{n} < n! \leq e\left(\frac{n}{e}\right)^n \sqrt{n}$ dir [1].

Lemma 2.3. $X_n = \frac{\sqrt{n}}{2^{4n}}\sum_{k=0}^{n}\binom{4n}{k}$ ve $Y_n = \frac{\sqrt{n}}{2^{4n}}\binom{4n}{2n}$ ise $X_n = o(1)$ $(n \to \infty)$ ve $Y_n = O(1)$ $(n \to \infty)$ dir [1].

Teorem 2.13. $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ serisi s-ye $(E,1/2)$ toplanabilir ve $a_n = o(n^{-1/2})$ ise $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ serisi s-ye yakınsar [1].

İspat. $s_n = \sum_{k=0}^{n} a_k$ ve $\sigma_n^1 = \frac{1}{2^n}\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}s_k$ olsun. $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ s-ye $(E,1/2)$ toplanabilir olduğundan,

$$\lim_{n\to\infty} \sigma_n^1 = s$$

dir.

$$\sigma_{4n}^1 - s_{2n} = \frac{1}{2^{4n}} \sum_{k=0}^{4n} \binom{4n}{k} (s_k - s_{2n})$$
$$= \frac{1}{2^{4n}} \left(\sum{}_1 + \sum{}_2 + \sum{}_3 \right)$$

olduğunu göz önünde bulunduralım, burada $\sum_1 = \sum_{k=0}^{n} \binom{4n}{k} (s_k - s_{2n})$, $\sum_2 = \sum_{k=n+1}^{3n-1} \binom{4n}{k} (s_k - s_{2n})$ ve $\sum_3 = \sum_{k=3n}^{4n} \binom{4n}{k} (s_k - s_{2n})$ dir.

Şimdi, $a_n = o(n^{-1/2})$ olup, $k \le 4n$ için $|s_k| \le c\sqrt{n}$ olacak şekilde bir $c > 0$ sayısı vardır. Böylece, Lemma 2.3 den,

$$\frac{1}{2^{4n}} \left| \sum{}_1 \right| < \frac{2c}{2^{4n}} \sum_{k=0}^{n} \binom{4n}{k} \sqrt{n} = o(1)$$

ve

$$\frac{1}{2^{4n}} \left| \sum{}_3 \right| < \frac{2c}{2^{4n}} \sum_{k=3n}^{4n} \binom{4n}{k} \sqrt{n}$$
$$< \frac{2c}{2^{4n}} \binom{4n}{3n} (n+1)\sqrt{n} = o(1)$$

olur. $\varepsilon_n = \sup_{k>n} \sqrt{k} \left| a_k \right|$ olarak tanımlansın. $\sqrt{n} a_n = o(1)$ olduğundan, $\{\varepsilon_n\}_0^\infty$ sıfıra yaklaşır. Böylece,

$$\frac{1}{2^{4n}} \left| \sum{}_2 \right| = \frac{1}{2^{4n}} \left| \sum_{k=n+1}^{3n-1} \binom{4n}{k} (s_k - s_{2n}) \right|$$
$$\le \frac{1}{2^{4n}} \sum_{k=n+1}^{3n-1} \frac{\varepsilon_n}{\sqrt{n}} |2n - k| \binom{4n}{k}$$
$$< \frac{2\varepsilon_n}{2^{4n}} \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{k=0}^{2n} (2n - k) \binom{4n}{k}$$
$$= \frac{2\varepsilon_n}{2^{4n}} \frac{1}{\sqrt{n}} \left\{ 2n \sum_{k=0}^{2n} \binom{4n}{k} - 4n \sum_{k=1}^{2n} \binom{4n-1}{k-1} \right\}$$
$$= \frac{2\varepsilon_n}{2^{4n}} \frac{n}{\sqrt{n}} \binom{4n}{2n} = 2\varepsilon_n Y_n$$

olur, burada Y_n, Lemma 2.3 de tanımlanmıştır. Lemma 2.3 gereğince, $\frac{1}{2^{4n}}\left|\sum_2\right| = o(1)$ olup,

$$s_{2n} = s + o(1)$$

ve $s_{2n+1} - s_{2n} = o(1)$ olduğundan,

$$s_n = s + o(1)$$

dir.

Sonuç 2.8. $\frac{1}{2} \le r \le 1$ olsun. $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ s-ye serisi (E,r) toplanabilir ve $a_n = o(n^{-1/2})$ ise $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ s-ye yakınsar [1].

İspat. Teorem 1.15 gereğince, $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ serisi s-ye $(E,1/2)$ toplanabilirdir. Böylece, Teorem 2.13 gereğince, $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ s-ye yakınsar.

3. BÖLÜM

BANACH UZAYLARINDA TAUBERIAN TEOREMLER

Bu bölümde, terimleri bir Banach uzayından alınan seriler için bazı teoremler ve sonuçlar verildi.

Teorem 3.1. $\sum a_n$ Banach uzayında bir seri olsun. Eğer $\sum a_n = s \quad (C,1)$ ve

$$\sup_n n\|a_n\| < \infty \tag{3.1}$$

ise $\sum a_n = s$ dir [2].

İspat. $s = \theta$ almakla genellik bozulmaz, çünkü $s \neq \theta$ ise $b_0 = a_0 - s$, $n \geq 1$ için $b_n = a_n$ alarak $\sum b_n$ serisi teşkil edilebilir. Şimdi,

$$s_n = a_0 + a_1 + \cdots + a_n ,$$
$$t_n = \frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n} s_k$$

alalım. Böylece, $\sum a_n = \theta \quad (C,1)$ ile $\|t_n\| \to 0 \quad (n \to \infty)$ denktir.

(3.1) deki supremumu M ile gösterelim. Bu takdirde, $q+1 < n$ için

$$\begin{aligned}(n+1)t_n &= \sum_{k=0}^{q} s_k + \sum_{k=q+1}^{n}(s_k - s_n + s_n) \\ &= (q+1)t_q + (n-q)s_n - \sum_{k=q+1}^{n}(a_{k+1} + \cdots + a_n)\end{aligned}$$

dir. Böylece,

$$\begin{aligned}(n-q)\|s_n\| &\leq (q+1)\|t_q\| + (n+1)\|t_n\| + M\sum_{k=q+1}^{n}\left(\frac{1}{k+1} + \cdots + \frac{1}{n}\right) \\ &\leq (q+1)\|t_q\| + (n+1)\|t_n\| + \frac{M}{q+1}\sum_{k=q+1}^{n}(n-k) \\ &\leq (q+1)\|t_q\| + (n+1)\|t_n\| + \frac{M(n-q)^2}{2(q+1)}\end{aligned}$$

olur. Şimdi, $0<\varepsilon<1/2$ ve $q=n-[[\varepsilon n]]$ alalım. Bu durumda, yeterince büyük n ler için

$$\|s_n\| \le \frac{4}{\varepsilon}\left(\|t_q\|+\|t_n\|\right)+\frac{M\varepsilon}{2(1-\varepsilon)}$$

kalır. $1/2(1-\varepsilon)<1$ olduğundan, yeterince büyük n sayıları için $\|s_n\| \le H\varepsilon$ olacak şekilde bir pozitif H sabiti vardır. Bu ise ispatı verir.

Teorem 3.2. $\sum a_n$ Banach uzayında bir seri olsun. Eğer $\sum a_n = s$ (A) ve (3.1) şartı sağlanıyorsa $\sum a_n = s$ dir [2].

İspat. $\sum a_n = s$ (A) olsun. Bu durumda, $f(x)=\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$ serisi, her bir $x \in (0,1)$ için yakınsaktır ve $f(x) \to s$ $(x \to 1^-)$ dir. $\sum a_n$ serisinin ilk terimini değiştirerek, $s=\theta$ kabul etmek genellikten bir şey kaybettirmez. (3.1) deki supremumu M ile gösterelim.

$\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$ serisi mutlak yakınsak olduğundan, $0<x<1$ ve $k \ge 1$ için $\|a_k x^k\| \le x^k M/k \le Mx^k$ olur. Şimdi, $s_n = a_0 + a_1 + \cdots + a_n$ olmak üzere, $0<x<1$ ve $n>1$ için

$$\begin{aligned}
\|s_n\| &\le \left\|\sum_{k=1}^{n}(1-x^k)a_k\right\| + \sum_{k=n+1}^{\infty}\|a_k\|x^k + \|f(x)\| \\
&\le (1-x)\sum_{k=1}^{n} k\|a_k\| + \frac{M}{n}\sum_{k=n+1}^{\infty} x^k + \|f(x)\| \\
&\le (1-x)\sum_{k=1}^{n} k\|a_k\| + \frac{M}{n(1-x)} + \|f(x)\|
\end{aligned}$$

dir. $x=1-n^{-1}$ alalım ve $f(1-n^{-1}) \to \theta$ olduğundan, açık olarak

$$H=\sup_n \|s_n\| < \infty \tag{3.2}$$

dir.

Kısmi toplamdan,

$$\sum_{k=0}^{m} a_k x^k = s_m x^m + \sum_{k=0}^{m-1} s_k (x^k - x^{k+1})$$

olup, $0 < x < 1$ ve (3.2) ifadesinden

$$\sum a_k x^k = (1-x)\sum s_k x^k \to \theta \quad (x \to 1^-) \tag{3.3}$$

elde edilir.

(3.2) ve (3.3) den

$$s_n \to \theta \quad (C,1) \tag{3.4}$$

olur. Bu durumda, Teorem 3.1 gereğince, (3.1) ve (3.4) şartları $\sum a_k = \theta$ sonucunu verir. Bu ise teoremin ispatıdır.

(3.4) ifadesini ispatlamak için

$$g(t) = \begin{cases} 0 & , \ 0 \le t < e^{-1} \text{ ise} \\ t^{-1} & , \ e^{-1} \le t \le 1 \text{ ise} \end{cases}$$

fonksiyonunu tanımlayalım. $n > 1$ için $x = e^{-1/n}$ alalım, böylece $0 \le k \le n$ olması

$$g(x^k) = g(e^{-k/n}) = e^{k/n}$$

ve $k > n$ olması $g(x^k) = 0$ olmasını gerektirir. Bu durumda

$$(1-x)\sum_{k=0}^{\infty} x^k g(x^k) s_k = (1-e^{-1/n})\sum_{k=0}^{n} s_k$$

olur. $(n+1)(1-e^{-1/n}) \to 1 \quad (n \to \infty)$ olduğundan (3.4) ifadesinin doğru olduğunu göstermek için

$$G(x) = (1-x)\sum_{k=0}^{\infty} x^k g(x^k) s_k \to \theta \quad (x \to 1^-) \tag{3.5}$$

olduğunu göstermeliyiz.

Bunu yapmak için bir p polinomu alalım ve $h = g - p$ diyelim. Böylece

$$G(x) = (1-x)\sum x^k h(x^k) s_k + (1-x)\sum x^k p(x^k) s_k \tag{3.6}$$

olur.

Şimdi, her bir $r \in IN$ için $(1-x)/(1-x^r) \to 1/r \quad (x \to 1^-)$ olup, (3.3) ifadesi, (3.6) daki ikinci toplamın $x \to 1^-$ için θ-ya yakınsak olmasını gerektirir.

(3.2) gereğince ,

$$\left\| (1-x)\sum x^k h(x^k) s_k \right\| \le H(1-x)\sum x^k \left| h(x^k) \right|$$

yazılabilir.

$\varepsilon > 0$ verilsin. Weierstrass yaklaşım teoremi gereğince [1, Sonuç 5.40]

$$\int_0^1 |h(t)|\,dt < \varepsilon$$

olacak şekilde bir p polinomu seçilebilir.

İspatı tamamlamak için,

$$\limsup_{x \to 1^-} (1-x) \sum x^k \left|h(x^k)\right| \le \int_0^1 |h(t)|\,dt \tag{3.7}$$

ya da bir değişken değiştirmesi yapılırsa,

$$\limsup_{y \to 0^+} A \le \int_0^1 |h(t)|\,dt \tag{3.8}$$

olduğunu göstermek yeterlidir, burada

$$A = y \sum e^{-ky} \left|h(e^{-ky})\right| \tag{3.9}$$

dir.

(3.8) ifadesini ispat etmek için $0 < y < 1$, $w > 3$ alalım ve $\alpha = [[1/wy]]$, $\beta = [[w/y]]$ yazalım. Böylece,

$$A = A_1 + A_2 + A_3 \tag{3.10}$$

olur, burada A_1, $0 \le k \le \alpha$ üzerinden toplam, A_2, $\alpha + 1 \le k \le \beta$ üzerinden toplam ve A_3, $k > \beta$ üzerinden toplamdır.

h nin teşkilinden, $0 \le t \le 1$ için $|h(t)| \le D$ olacak şekilde bir $D > 0$ sayısı vardır. Bu nedenle,

$$A_1 \le yD(\alpha + 1) \le yD + D/w,$$

$$\limsup_{y \to 0^+} A_1 \le D/w \tag{3.11}$$

olur. Ayrıca,

$$A_3 \le yDe^{-w/2} \sum_{k=\beta+1}^{\infty} e^{-ky/2}$$

$$\le yDe^{-w/2} / (1 - e^{-y/2}),$$

$$\limsup_{y \to 0^+} A_3 \le 2De^{-w/2} \tag{3.12}$$

$$a_n = (m + \varepsilon_n) p_n, \tag{3.15}$$

$$t_n \to \theta, \tag{3.16}$$

$$t_n \to m. \tag{3.17}$$

(3.15) de $\{\varepsilon_n\}_0^\infty$ ile gösterilen dizi, $\varepsilon_n \to \theta$ $(n \to \infty)$ olacak şekilde bir dizidir ve m, X in bir elemanıdır.

Eğer $\{\lambda_n\}_0^\infty$, $0 = \lambda_0 < \lambda_1 < \cdots < \lambda_n \to \infty$ olacak şekilde bir reel dizi ve $q_k = \lambda_{k+1} - \lambda_k$ ise, bu takdirde $m = \theta$ ile birlikte (3.15) göz önünde bulundurulduğunda (3.16) elde edilir. Özellikle $\lambda_n = n$ ise $na_n = o(1)$ ve $T_n = o(n)$ klasik Tauberian şartları elde edilir.

Şimdi bir A toplanabilme metodu tanımlayalım.

$$A\colon S(X) \to X$$

fonksiyonu verilsin, burada $S(X)$, $c(X)$ in bir üst kümesidir. $c(X)$ deki her bir x için $\lim Ax = \lim x$ ise A-ya regülerdir diyeceğiz. Eğer, her bir $x, y \in S(X)$ için $x + y \in S(X)$ ve $A(x+y) = A(x) + A(y)$ ise A-ya toplamsaldır denir.

Eğer

$$\{a_1 + \cdots + a_n\} \in S(X) \text{ ve } A\{a_1 + \cdots + a_n\} = s$$

ise $\sum a_k$ serisi, X de s-ye A-toplanabilirdir denir.

Eğer $\sum a_k$ s-ye A-toplanabilir ve $\{a_n\}_0^\infty$ üzerindeki şartla birlikte $\sum a_k = s$ ise $\{a_n\}_0^\infty$ üzerindeki bu şarta A için bir Tauberian şart denir.

Teorem 3.3. A bir regüler toplamsal toplanabilme metodu olsun.

i) Eğer (3.15) A için bir Tauberian şart ise $\{t_n\}_0^\infty \in c(X)$ de A için bir Tauberian şarttır.

ii) Eğer X lokal konveks uzay ve A için bir Tauberian şart $\{t_n\}_0^\infty \in c(X)$ ise (3.15) de A için bir Tauberian şarttır [2].

İspat. (i) Kabul edelim ki (3.17) sağlansın ve $\sum a_k$ s-ye A-toplanabilir olsun. Şimdi $a_1 = \left(Q_1 / q_0\right) t_1$ ve $n \geq 2$ için

$$a_n = (Q_n / Q_{n-1})t_n - t_{n-1} = (1 + p_n)t_n - t_{n-1}$$

diyelim. Böylece,

$$a_1 + \cdots + a_n = t_n + p_1 t_1 + \cdots + p_n t_n \tag{3.18}$$

olur. Hipotez gereği, $A\{a_1 + \cdots + a_n\} = s$ ve $t_n \to m$ olduğundan, A nın regüler olması $A(t) = m$ olmasını gerektirir.

Ayrıca, $-t$ yakınsak ve $A(t + (-t)) = \lim \theta = \theta$ olduğundan, toplamsallık gereğince, (3.18) den,

$$\sum p_k t_k \quad (s-m)\text{-ye } A\text{-toplanabilir} \tag{3.19}$$

olur. Fakat, $p_k t_k = p_k (m + \varepsilon_k)$ ve (3.15) A için bir Tauberian şart olduğundan, (3.19) daki $\sum p_k t_k$ serisi $(s-m)$ toplamına yakınsar. (3.18) den görülür ki,

$$a_1 + \cdots + a_n \to m + s - m \quad (n \to \infty)$$

dir, yani $\sum a_n = s$ dir.

ii) (3.15) sağlansın ve $\sum a_k$ s-ye A-toplanabilir olsun. Bu durumda, eğer $\varepsilon_0 = -m$ olarak tanımlarsak

$$t_n = m + \frac{1}{Q_n} \sum_{k=0}^{n} q_k \varepsilon_k$$

olur. İspatı tamamlamak için, $t_n \to m \quad (n \to \infty)$ ya da $\sum a_{n,k} \varepsilon_k \to \theta \quad (n \to \infty)$ olduğunu göstermek yeterlidir. Kabul edelim ki (3.14) sağlansın. Bu durumda,

$$\sup_n \sum_k \left| a_{n,k} \right| H^{-1} \le 1 \tag{3.20}$$

olacak şekilde bir pozitif H sabiti vardır.

θ-nın bir komşuluğu $N(\theta)$ olsun. Bu durumda, $H^{-1}N(\theta)$, θ-nın bir komşuluğudur ve X lokal konveks olduğundan, $H^{-1}N(\theta)$ komşuluğunda θ-yı bulunduran, θ-nın bir U mutlak konveks komşuluğu vardır. $\varepsilon_k \to \theta \quad (k \to \infty)$ olduğundan, her $k > i$ için

$$\varepsilon_k \in 2^{-1} U \tag{3.21}$$

olacak şekilde bir $i \in IN$ vardır. (3.20) ve (3.21) den, her $n \in IN$ için

$$H^{-1}\sum_{k>i} a_{n,k}\varepsilon_k \in 2^{-1}U$$

olur. Her bir k için $a_{n,k} \to 0 \quad (n \to \infty)$ olduğundan, her $n > j$ için

$$H^{-1}\sum_{k\leq i} a_{n,k}\varepsilon_k \in 2^{-1}U$$

olacak şekilde bir $j \in IN$ vardır. Böylece, $2^{-1}U$ mutlak konveks olduğundan, her $n > j$ için

$$2^{-1}H^{-1}\sum a_{n,k}\varepsilon_k \in 2^{-1}U$$

dir. O halde, her $n > j$ için $\sum a_{n,k}\varepsilon_k \in N(\theta)$ olur ki bu, teoremi ispatlar.

Teorem 3.4. Bir A matrisi ile verilen regüler toplanabilme metodu vardır öyle ki $na_n \to 0$, A için bir Tauberian şarttır, fakat $na_n \to m$, A için bir Tauberian şart değildir [2].

İspat. $n \in IN$ için $b_n = 1/n$ olarak tanımlansın öyle ki $B_n = \sum_{k=1}^{n} b_k \to \infty \quad (n \to \infty)$ olsun. $n_1 = 1$ alalım ve $1 < n_2 < n_3 < \cdots$ seçelim öyle ki, $k \geq 1$ ve $\forall n \leq n_k$ için

$$kB_n \leq B_{n_{k+1}} \tag{3.22}$$

olsun. $k > 1$ iken $n_{k-1} < n \leq n_k$ için ve $k = 1$ iken $n = 1$ için

$$A_n = A_n(x) = x_n - B_n x_{n_{k+1}} / B_{n_{k+1}} \tag{3.23}$$

ile bir A matris dönüşümü tanımlayalım. (3.22) den anlaşıldığı gibi A regülerdir. Ayrıca $A_n(B) = 0$, böylece $\sum b_k$ 0' a A-toplanabilirdir. Fakat, $nb_n = 1$ ve $\sum b_n$ ıraksaktır.

Şimdi, $na_n \to 0$ ve $\sum a_n$ s-ye A-toplanabilir olduğunda $\sum a_n = s$ olduğunu gösterelim.

$\sum a_n$ s-ye A-toplanabilir olduğundan, $x_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n$ olmak üzere, $A_n(x) \to s \quad (n \to \infty)$ olur.

$y_k = x_{n_k}$, $\alpha_k = A_{n_k}$, $\beta_k = B_{n_k}$ yazalım. Bu takdirde, (3.23) de $n = n_k$ ile birlikte

$$\alpha_k / \beta_k = y_k / \beta_k - y_{k+1} / \beta_{k+1},$$
$$y_{i+1} / \beta_{i+1} = y_1 / \beta_1 - \sum_{k=1}^{i} (\alpha_k / \beta_k)$$

olur. $\exists \lambda$ sabiti için

$$y_{i+1} = \lambda \beta_{i+1} + \beta_{i+1} \sum_{k=i+1}^{\infty} (\alpha_k / \beta_k) \tag{3.24}$$

olduğundan, (3.22) den dolayı $\sum (1/\beta_k) < \infty$ dir.

$\alpha_k \to s$ olduğundan, (3.22) den açıktır ki, (3.24) deki ikinci terim $\{\alpha_k\}_1^{\infty}$ dizisinin bir Toeplitz dönüşümüdür ve böylece $y_{i+1} = \lambda \beta_{i+1} + s + o(1)$ olduğu açıktır. Şimdi, (3.23)

$$x_n = A_n + \lambda B_n + o(1) = s + \lambda B_n + o(1) \tag{3.25}$$

olmasını gerektirir ve böylece,

$$\frac{1}{B_n} \sum_{k=1}^{n} a_k = \lambda + o(1) \tag{3.26}$$

olur. Fakat (3.26) nın sol tarafı, açık olarak, $\{ka_k\}_0^{\infty}$ sıfır dizisinin bir Toeplitz dönüşümüdür. Böylece (3.26), $\lambda = 0$ olmasını gerektirir. O halde, (3.25) den $x_n = s + o(1)$ elde edilir ki bu, $\sum a_k = s$ olması demektir, dolayısıyla ispat tamamlanır.

Teorem 3.5. $na_n = O(1)$, $(C,1)$ için bir Tauberian şarttır, fakat

$$\frac{1}{n+1} \sum_{k=1}^{n} ka_k = O(1)$$

$(C,1)$ için bir Tauberian şart değildir [2].

İspat. Teorem 2.9 gereğince, $na_n = O(1)$, $(C,1)$ için bir Tauberian şarttır. Bununla beraber, eğer $a_k = (-1)^{k+1}$ ise her $n \in IN$ için

$$\left| \sum_{k=1}^{n} ka_k \right| < (n+1)$$

ve $\sum a_k = \frac{1}{2}$ $(C,1)$ dir, fakat $\sum a_k$ ıraksaktır.

Kabul edelim ki, X bir Banach uzayı ve $n,k \in IN$ için $G_{n,k} \in B(X,X)$ olsun.

$$G_n(a) = \sum G_{n,k} a_k$$

dönüşümü ile tanımlanan G seriden-diziye toplanabilme metodunu ele alalım. $\Delta G_{n,k} = G_{n,k} - G_{n,k+1}$ diyelim. Her zaman olduğu gibi, $\sum a_k$ serisinin s-ye G-toplanabilir olması, $G_n(a) \to s \quad (n \to \infty)$ olması demektir. Ayrıca, eğer $\sup_n \| G_n(a) \| < \infty$ ise $\sum a_k$ G-sınırlıdır denir.

Aşağıdaki şartları inceleyelim.

$$\sup_n \left\| (\Delta G_{n,k})_{k \geq 1} \right\| < \infty, \tag{3.27}$$

$$G_{n,k} \to I \quad (n \to \infty, \text{ her bir } k \text{ için}), \tag{3.28}$$

$$g_n \equiv \left\| (p_k G_{n,k})_{k \geq 1} \right\| < \infty \text{ (her bir } n \text{ için)}, \tag{3.29}$$

$$\limsup_n g_n^{-1} \left\| \sum p_k G_{n,k} x \right\| > 0 \text{ (her bir } x \neq \theta \text{ için)}. \tag{3.30}$$

(3.28) de I, özdeşlik operatörünü gösterir. (3.29) da, her bir n için $\sum p_k G_{n,k}$ serisinin yakınsak olduğunu kabul ediyoruz.

Şimdi şu lemmayı verelim.

Lemma 3.1. (3.27)-(3.30) şartları sağlansın. Kabul edelim ki, $\sum b_k$ X Banach uzayında G-sınırlı bir seri ve $b_k = (m + \varepsilon_k) p_k$ olsun. Ayrıca $m \in X$ ve $\varepsilon_k \in X$, $\| \varepsilon_k \| \to 0 \quad (k \to \infty)$ olsun. Bu takdirde $m = \theta$ dır [2].

İspat. Kabul edelim ki $m \neq \theta$ olsun.

$$\sum_{k=1}^{r} G_{n,k} b_k = \sum_{k=1}^{r} p_k G_{n,k} m + \sum_{k=1}^{r} p_k G_{n,k} \varepsilon_k$$

yazılabilir. Hipotez gereği, $\sum p_k G_{n,k}$ serisi yakınsaktır ve $\| \varepsilon_k \| \to 0$ olduğundan, (3.29) dan anlaşılacağı gibi, her bir n için $\sum p_k G_{n,k} \varepsilon_k$ yakınsaktır. Böylece,

$$\sum p_k G_{n,k} m = \sum G_{n,k} b_k - \sum p_k G_{n,k} \varepsilon_k \tag{3.31}$$

dir.

Şimdi göstereceğiz ki, $g_n \to \infty$ $(n \to \infty)$ dir. A pozitif bir sayı olsun. $1 + p_k = Q_k / Q_{k-1}$ olduğundan, $\prod_{k=1}^{\infty}(1+p_k)$ sonsuz çarpımı ıraksaktır, buradan $\sum_{k=1}^{\infty}|p_k| = \infty$ olur. Böylece, öyle bir r vardır ki $\sum_{k=1}^{r}|p_k| > \mathrm{A}$ olur. $1 \le k \le r$ için $x_k = (\operatorname{sgn} p_k) m / \|m\|$ olarak tanımlayalım. Bu takdirde, grup normu tanımı [2, Tanım 2.1] gereğince,

$$g_n \ge \left\| \sum_{k=1}^{r} |p_k| G_{n,k} m \right\| \cdot \|m\|^{-1} \tag{3.32}$$

dir. (3.28) ve (3.32) gereğince,

$$\mathrm{A} < \sum_{k=1}^{r} |p_k| \le \limsup_n g_n$$

olur. Böylece $g_n \to \infty$ dir. Yeterince büyük n sayıları için $\|(A_{n,k})_{k \ge 1}\| = 1$ olmak üzere $A_{n,k} = g_n^{-1} p_k G_{n,k}$ alalım. Ayrıca, (3.28) ve $g_n \to \infty$ olması, her bir k için $\lim_n A_{n,k} = 0$ olmasını gerektirir. Böylece $(A_{n,k})$, sıfır dizisini sıfır dizisine dönüştüren bir operatör matristir. (3.31) den,

$$g_n^{-1} \left\| \sum p_k G_{n,k} m \right\| \le g_n^{-1} \left\| \sum G_{n,k} b_k \right\| + \left\| \sum A_{n,k} \varepsilon_k \right\|$$

elde edilir. $\sup_n \left\| \sum G_{n,k} b_k \right\| < \infty$, $g_n \to \infty$ ve $\sum A_{n,k} \varepsilon_k \to \theta$ olduğundan,

$$\limsup_n g_n^{-1} \left\| \sum p_k G_{n,k} m \right\| = 0$$

elde edilir ki bu, (3.30) ile çelişir. Bu ise lemmayı ispatlar.

Teorem 3.6. (3.27)-(3.30) şartları sağlansın. $\|\varepsilon_n\| \to 0$ olmak üzere, $a_n = \varepsilon_n p_n$, G için bir Tauberian şart olsun. Bu takdirde,

$$t_n = \frac{1}{Q_n} \sum_{k=1}^{n} Q_{k-1} a_k \to m$$

G için bir Tauberian şarttır [2].

İspat. Kısmi toplamdan,

$$\sum_{k=1}^{r} G_{n,k} a_k = G_{n,r} Q_r Q_{r-1}^{-1} t_r + \sum_{k=1}^{r-1} \Delta G_{n,k} t_k + \sum_{k=1}^{r-1} p_k G_{n,k} t_k$$
$$= G_{n,r} t_r + \sum_{k=1}^{r-1} \Delta G_{n,k} t_k + \sum_{k=1}^{r} p_k G_{n,k} t_k$$

yazılabilir. [2, Teorem 4.5] den dolayı,

$$H = \sup_{n,k} \left\| G_{n,k} \right\| < \infty \tag{3.33}$$

dır. $b_1 = t_1$, $k \geq 2$ için $b_k = t_k - t_{k-1}$ olarak tanımlayalım. Bu takdirde, $t_n \to m$ kabulünden, $\sum b_k$ m-ye yakınsar.

$$\sum_{k=1}^{r} G_{n,k} b_k = G_{n,r} t_r + \sum_{k=1}^{r-1} \Delta G_{n,k} t_k \tag{3.34}$$

olduğundan, her bir n için $\sum p_k G_{n,k} t_k$ yakınsaktır ve

$$\sum G_{n,k} a_k = \sum G_{n,k} b_k + \sum p_k G_{n,k} t_k \tag{3.35}$$

dir.

(3.34), (3.33) ve (3.27) gereğince, her n, r için

$$\left\| \sum_{k=1}^{r} G_{n,k} b_k \right\| \leq \left(H + \left\| (\Delta G_{n,k})_{k \geq 1} \right\| \right) \sup \left\| t_k \right\|$$

ve böylece, $\sup_n \left\| \sum G_{n,k} b_k \right\| < \infty$ olur.

$\sum a_k$ G-toplanabilir olduğundan, (3.35) den $\sum p_k t_k$ G-sınırlıdır. Fakat, Lemma 3.1 gereğince $m = \theta$ olduğundan, $p_k t_k = (m + \varepsilon_k) p_k$ dır. Burada, $\left\| \varepsilon_k \right\| \to 0$ dır. Bu nedenle, $\sum b_k = \theta$ olur.

[2, Teorem 4.5] den dolayı, $\lim_n \sum G_{n,k} b_k = \theta$ dır. Böylece (3.35), $\lim_n \sum p_k G_{n,k} t_k = \lim_n \sum G_{n,k} a_k = s$ olmasını gerektirir. Fakat $p_k t_k = p_k \varepsilon_k$ ve böylece, $\sum p_k t_k = s$ olur.

$a_1+\cdots+a_n=t_n+p_1t_1+\cdots+p_nt_n$ olduğundan, $\sum a_k=s$ dir. Bu ise ispatı tamamlar.

Aşağıda Teorem 3.7 de, lokal konvekslik hipotezinin, Teorem 3.3(ii) deki sonucu doğruladığını gösterelim. Bunu yapmak için, $0<p<1$ olmak üzere,

$$\ell_p=\left\{x=\{x_k\}:\|x\|=\sum\left|x_k\right|^p<\infty\right\}$$

dizi uzayında çalışacağız. ℓ_p deki topoloji, $\lambda\in\mathbf{C}$, $x,y\in\ell_p$ için $\|\lambda x\|=|\lambda|^p\cdot\|x\|$ ve $\|x+y\|\leq\|x\|+\|y\|$ özelliklerini sağlayan $\|\cdot\|$, p-normu ile verilir. Dikkat edilirse ℓ_p, lokal konveks olmayan bir lineer topolojik Hausdorff uzayıdır. Eğer $\alpha=(1-p)/p$ ve k-ıncı yerdeki $k^{-\alpha}$ ile birilikte

$$x^{(k)}=(0,0,\ldots,k^{-\alpha},0,0,\ldots)$$

ise $x^{(k)}\to\theta$ dır, fakat $\|y_n\|\to p^{-1}$ olduğundan

$$y_n=\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}x^{(k)}\not\to\theta$$

dır.

Teorem 3.7. $0<p<1$ olmak üzere ℓ_p uzayını ele alalım. Bu takdirde,

$$t_n=\frac{1}{n+1}\sum_{k=1}^{n}ka_k\to\theta$$

$(C,1)$ için bir Tauberian şarttır, fakat $na_n\to\theta$, $(C,1)$ için bir Tauberian şart değildir [2].

İspat. $$s_n=t_n+\frac{1}{n+1}\sum_{k=1}^{n}s_k$$

bağıntısından, $t_n\to\theta$, $(C,1)$ için bir Tauberian şarttır.

Şimdi $a_k=\left(a_{ki}\right)=\left(a_{k,1},a_{k,2},\ldots\right)$ yazalım ve e_k, ℓ_p de k-ıncı birim vektör olsun. Aşağıda gösterildiği gibi, $n_1,n_2,\ldots$ doğal sayılarını seçelim. $n_1>2$

alalım ve $k < n_1$ için $a_k = \theta$ olarak tanımlayalım. $k = n_1$ için, $a_{ki} = 1/n_1$ $(n_1 < i \le n_1 + [[n_1^p]])$ aksi halde $a_{ki} = 0$ olarak tanımlayalım.

$n_1 < k \le n_1 + [[n_1^p]]$ için $a_k = -e_k / n_1$ alalım. Bu durumda, $\|s_{n_1}\| = [[n_1^p]]/n_1^p$ olup, $k = n_1 + [[n_1^p]]$ için $s_k = \theta$ ve $1 \le k \le n_1 + [[n_1^p]]$ için $\|s_k\| \le 1$ dir. Daha sonra, $q = (1+p^2)/p(1-p)$ olmak üzere,

$$n_2 > 2^{2/p} n_1^{1/p} + 2^{1/(1-p)} 2^q \tag{3.36}$$

seçelim. Böylece, $n_1 + [[n_1^p]] < n_2 - [[2^p n_2^p]]$ olur.

$$a_k = \begin{cases} \theta & , \quad n_1 + [[n_1^p]] < k \le n_2 - [[2^p n_2^p]] \text{ ise} \\ e_k / 2n_2 & , \quad n_2 - [[2^p n_2^p]] < k \le n_2 \text{ ise} \end{cases}$$

olarak tanımlayalım. Bu takdirde, $\|s_{n_2}\| = [[2^p n_2^p]]/2^p n_2^p$ olup, $n_1 + [[n_1^p]] \le k \le n_2 - [[2^p n_2^p]]$ için $s_k = \theta$ ve $1 \le k \le n_2$ için $\|s_k\| \le 1$ dir. Ayrıca, $n_1 + [[n_1^p]] < k \le n_2$ olması $\|ka_k\| \le 1/2^p$ olmasını gerektirir.

Şimdi, $n_2 < k \le n_2 + [[2^p n_2^p]]$ için

$$a_k = -e_{k-[[2^p n_2^p]]} / 2n_2$$

olarak tanımlayalım öyle ki, $k = n_2 + [[2^p n_2^p]]$ için $s_k = \theta$ ve $1 \le k \le n_2 + [[2^p n_2^p]]$ için $\|s_k\| \le 1$ olsun. Ayrıca, (3.36) gereğince, $n_2 < k \le n_2 + [[2^p n_2^p]]$ olması $\|ka_k\| < 1$ olmasını gerektirir.

$n_1 < n_2 < \cdots < n_i$ seçelim ve bu durumda,

$$n_{i+1} > (i+1)^{2/p} n_i^{1/p} + 2^{1/(1-p)} (i+1)^q \tag{3.37}$$

ile a_k, $n_i - [[i^p n_i^p]]$ ve $n_i + [[i^p n_i^p]]$ şeklindeki terimleri içeren değerler için tanımlanır. Buradan,

$$\|s_k\| \le 1 \text{ (her } k \text{ için)} \tag{3.38}$$

$$s_k = \theta \quad (n_i + [[i^p n_i^p]] \leq k \leq n_{i+1} - [[(i+1)^p n_{i+1}^p]]), \tag{3.39}$$

$$\left\| s_{n_i} \right\| = [[i^p n_i^p]] / i^p n_i^p \to 1 \quad (i \to \infty) \tag{3.40}$$

dir. (3.37) gereğince, eğer

$$n_i + [[i^p n_i^p]] < k \leq n_{i+1} + [[(i+1)^p n_{i+1}^p]]$$

ise bu takdirde, $ka_k \to \theta \quad (k \to \infty)$ dan, $\left\| ka_k \right\| < 2^p / (1+i)^p$ olacağı açıktır.

(3.39) ve (3.40) dan $\{s_n\}_0^\infty$ ıraksaktır. Geriye $c_n = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} s_k$ olmak üzere, $c_n \to \theta$ olduğunu göstermek kalır. $n > n_1$ alalım öyle ki, $\exists i$ için $n_i \leq n < n_{i+1}$ olsun. Sadelik bakımından,

$$\alpha(i) = n_i - [[i^p n_i^p]] \text{ ve } \beta(i) = n_i + [[i^p n_i^p]]$$

diyelim. $n_i \leq n \leq \beta(i)$ için

$$\begin{aligned} c_n &= \frac{1}{n} \sum_{1}^{\beta(i-1)} s_k + \frac{1}{n} \sum_{\alpha(i)}^{n_i} s_k + \frac{1}{n} \sum_{1+n_i}^{n} s_k . \\ &\equiv A_1 + A_2 + A_3 \end{aligned}$$

olduğu göz önünde bulundurulsun. Böylece (3.38), $\left\| A_1 \right\| < i n_{i-1} / n^p \leq i n_{i-1} / n_i^p$ olmasını gerektirir. (3.37) gereğince $\left\| A_1 \right\| < 1/i$ dir.

s_k nın teşkili gereği,

$$\left\| \sum_{\alpha(i)}^{n_i} s_k \right\| = i^{-p} n_i^{-p} \sum_{r=1}^{[[i^p n_i^p]]} r^p < (i n_i)^{p^2}$$

olduğu açıktır. Böylece (3.37) den $\left\| A_2 \right\| < 1/i$ dir. $n_i \leq n \leq \beta(i)$ için $\left\| c_n \right\| < 3/i$ oluğundan, açık olarak, $\left\| A_3 \right\| < 1/i$ dir.

Ayrıca, $\beta(i) < n \leq \alpha(i+1)$ için $\left\| c_n \right\| < 3/i$ dir.

Son olarak kabul edelim ki, $\alpha(i+1) < n < n_{i+1}$ olsun.

$$\left\| c_n \right\| < \frac{3}{i} + \frac{1}{n^p} \left\| \sum_{1+\alpha(i+1)}^{n} s_k \right\|$$

$$\leq \frac{3}{i} + \frac{2^p \left\{ (i+1) n_{i+1} \right\}^{p^2}}{n_{i+1}^p}$$

$$< \frac{3}{i} + \frac{2^p}{i+1}$$

olduğundan, (3.37) gereğince $2n > n_{i+1}$ dir. Yukarıdaki sonuçlar gereğince $\left\| c_n \right\| \to 0 \quad (n \to \infty)$ bulunur. Bu ise teoremin ispatını verir.

KAYNAKLAR

1. POWELL, R.E. and SHAH, S.M. *Summability Theory and Its Applications*, Van Nostrand Reinhold Company, London (1972).

2. MADDOX, I.J. *Infinite Matrices of Operators*, Springer - Verlag Berlin Heidelberg New York (1980).

ÖZGEÇMİŞ

10.03.1973 tarihinde Antakya' da doğdu. İlk öğrenimini Antakya' da, orta öğrenimini Balıkesir' de ve lise öğrenimini Bingöl' de tamamladı. 1990 yılında İnönü Üniversitesi Fen Edebiyat Fakültesi Matematik Bilim Lisansına girmeye hak kazandı. 1994 yılında Matematik Bilim Lisansıyla mezun oldu. Aynı yılın güz döneminde Trabzon' un Çaykara ilçesinde matematik öğretmeni olarak görev yaptı, bahar döneminde İnönü Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalı' nda Yüksek Lisans öğrenimine başladı. Ayrıca İnönü Üniversitesi Fen Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümü' nün açmış olduğu Araştırma Görevliliği sınavını kazandı ve şu anda bu görevine devam etmektedir.