

T. C.
İNÖNÜ ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

84252

LİNEERLEŞTİRİLMİŞ BURGERS' DENKLEMİ İÇİN
SONLU ELEMAN TEKNİKLERİ

Emine Nesligül Aksan

YÜKSEK LİSANS TEZİ
MATEMATİK ANABİLİM DALI

TEC. Y. D. S. 11.000.000
DOKÜMAN YAGI

MALATYA

1999

T. C.
İNÖNÜ ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

LİNEERLEŞTİRİLMİŞ BURGERS' DENKLEMİ İÇİN
SONLU ELEMAN TEKNİKLERİ

Emine Nesligül Aksan

YÜKSEK LİSANS TEZİ
MATEMATİK ANABİLİM DALI


T.C. YÜKSEKÖĞRETİM ENSTİTÜSÜ
DOKÜMAN TAGE


MALATYA


1999

“Fen Bilimleri Enstitüsü Müdürlüğüne”

İş bu çalışma, jürimiz tarafından Matematik Anabilim Dalında YÜKSEK LİSANS TEZİ olarak kabul edilmiştir.

Başkan Prof. Dr. Sadık KELEŞ 


Üye Yrd. Doc. Dr. Selçuk KUTLUAY 

Üye Yrd. Doc. Dr. Ali ÖZDEŞ 

Onay

Yukarıdaki imzaların adı geçen öğretim üyelerine ait olduğunu onaylıyorum.

26/10/1997


Prof. Dr. Satılmış KAYA
Enstitü Müdürü

TEŞEKKÜRLER

Çalışmalarım süresince her türlü imkanı sağlayarak bana yardımcı olan, bilgi ve deneyimlerinden yararlandığım tez danışmanım Yrd. Doç. Dr. Ali ÖZDEŞ' e, araştırmalarım sırasında görüşleriyle bana yol gösteren ilgi ve desteğini esirgemeyen bölüm başkanımız Sayın Prof. Dr. Sadık KELEŞ' e, değerli bilgi ve yardımlarından dolayı Yrd. Doç. Dr. Selçuk KUTLUAY' a, Yrd. Doç. Dr. A. Refik BAHADIR' a, Arş. Grv. Alaattin ESEN' e , tezimin her aşamasında her türlü desteği sağlayan aileme ve eşim Arş. Grv. Mehmet Ali AKSAN' a teşekkürü bir borç bilirim.



ÖZET

$$\frac{\partial U}{\partial t} + U \frac{\partial U}{\partial x} = \nu \frac{\partial^2 U}{\partial x^2}$$

olarak tanımlanan Burgers' denklemi J. M. Burger ve diğer bilim adamları tarafından turbülansın basit bir modeli olarak kullanıldı. Bununla birlikte bu denklem şok dalga teorisi ile de ilgilidir.

Denklemin analitik çözümü bilinmesine rağmen ν parametresinin sıfıra yakın değerlerinde ($\nu < 0.01$) analitik çözüm elde edilemez. Bu yüzden denklemin çözümü için farklı metodlar geliştirildi. Bu metodlardan birisi "*Sonlu Eleman Metodu*" dur. Bu tezde denklemi çözmek için sonlu eleman metodu kullanıldı.

Bu çalışmada $\nu \geq 0.01$ için analitik çözümler ile elde edilen nümerik çözümler karşılaştırıldı. Bunların uyum içerisinde olduğu gösterildi. $0.004 \leq \nu \leq 0.01$ için elde edilen sonuçlar grafiksel olarak ifade edildi. Son olarak $\nu \leq 0.004$ için denklemin parabolik yapısının kaybolduğu grafik üzerinde gözlendi.

ABSTRACT

The one dimensional Burgers' equation written as

$$\frac{\partial U}{\partial t} + U \frac{\partial U}{\partial x} = \nu \frac{\partial^2 U}{\partial x^2}$$

has been used by J. M. Burger and others as a simple mathematical model of turbulence. The equation is also related to shock wave theory.

Although the general analytical solution of the equation is known, it can not be obtained when the viscosity parameter, ν , is near zero ($\nu < 0.01$). Therefore, it was developed different methods to solve this equation. One of the methods is "***The Finite Element Method***". The finite element method was used to solve the equation in this thesis.

In this study, when $\nu \geq 0.01$ the analytical solution of the equation was compared with the numerical solution. It was shown that the both solutions are in good agreement. For $0.004 \leq \nu \leq 0.01$ the obtained results were shown graphically. For $\nu \leq 0.004$ it was observed that the parabolic structure of the equation was lost.

İÇİNDEKİLER

	<u>Sayfa NO</u>
TEŞEKKÜR	iii
ÖZET	iv
ABSTRACT	v
İÇİNDEKİLER	vi
GİRİŞ	viii
BÖLÜM 1	
TEMEL TANIM VE KAVRAMLAR	1
1.1. Bir Matrisin Özdeğer ve Özvektörleri Üzerine Genel Tanım ve Teoremler	1
1.2. Türevlere Sonlu Fark Yaklaşımları	2
1.2.1. Birinci Mertebeden Türevler İçin Sonlu Fark Yaklaşımları ...	3
1.2.2. İkinci Mertebeden Türevler İçin Sonlu Fark Yaklaşımları	5
1.3. Zamana Bağlı Isı İletimi Denkleminin Sonlu Fark Gösterimi	7
1.3.1. Ağırlıklı Averaj Yöntemi	9
1.4. Sonlu Fark Yöntemleri İçin Genel Kararlılık Analizi	9
1.4.1. Matris Yöntemi	9
BÖLÜM 2	13
2.1. Sonlu Eleman Yönteminin Kısa Tarihçesi	13
2.2. Sonlu Eleman Yönteminin Temel Fikri	14
2.3. Yöntemin Kavramları	15
2.3.1. Sonlu Eleman Terminolojisi	15
2.3.2. Eleman Tipleri	16
2.4. Sonlu Eleman Yöntemi	18
2.4.1. Örnek	27
2.4.2. Örnek	31

BÖLÜM 3	33
3.1. Denklemin Analitik Çözümü	33
3.1.1. Hopf-Cole Dönüşümü	33
3.1.2. Analitik Çözüm	38
BÖLÜM 4	43
4.1. Sonlu Eleman Metodunun Model Probleme Uygulanması	43
4.2. Nümerik Çözümün Kararlılık Analizi	48
4.3. Nümerik Sonuç ve Tartışma	50
KAYNAKLAR	62
ÖZGEÇMİŞ	65



GİRİŞ

Literatürde Burgers' denklemleri olarak bilinen

$$\frac{\partial U}{\partial t} + U \frac{\partial U}{\partial x} = \nu \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} \quad (1)$$

bir boyutlu non-linear parabolik kısmi diferansiyel denklem ilk olarak 1918' de Bateman' ın [1] makalesinde görüldü. Burgers' denklemleri sayı teorisinden gaz dinamiğine, ısı iletiminden elastikiyet teorisine kadar bir çok alanda yapılan çalışmalarda matematiksel model olarak kullanıldı. Birçok makalede, master ve doktora tezlerinde model problem olarak ele alındı [2,3,4].

Denklemin bilim dünyasında tanınması 1939-1965 yıllarında denkleme adını veren J. M. Burger' in yaptığı çalışmalar sayesinde oldu. Burger özellikle Turbulans teorisi üzerine yaptığı çalışmalarda Burgers' denklemini matematiksel model olarak kullandı [5-6] ve denklemin, non-linear küçük parametre ile çarpılmış yüksek mertebeden terimleri içermesinden dolayı Navier-Stokes denklemlerine benzerliğini ortaya çıkardı.

1951' de Cole [7] (1) denkleminin şok dalga teorisinin tipik özelliklerine sahip olduğunu gösterdi. Non-linear terimin dalga boyunu ve genişliğini ayarladığını, ν parametresinin ise doğal süreksizlikleri önlediğine işaret etti. Ayrıca Burgers' denkleminin her iki yanı U ile çarpılır ve $x_1 \leq x \leq x_2$ sonlu bölgesinde integre edilirse

$$\frac{1}{2} \int_{x_1}^{x_2} \frac{\partial}{\partial t} (U^2) dx + \frac{1}{3} U^3 \Big|_{(x_1,t)}^{(x_2,t)} = \nu U \frac{\partial U}{\partial x} \Big|_{(x_1,t)}^{(x_2,t)} - \nu \int_{x_1}^{x_2} \left(\frac{\partial U}{\partial x} \right)^2 dx$$

şeklinde bir enerji denklemine dönüştüğüne işaret etti. Burada

$$\frac{1}{2} \int_{x_1}^{x_2} \frac{\partial}{\partial t} (U^2) dx : \text{Sistemdeki kinematik enerji değişiminin toplam hızı}$$

$$\frac{1}{3} U^3 \Big|_{(x_1,t)}^{(x_2,t)} : \text{Sınırlar boyunca sistemin dışında kinetik enerjinin net akışı}$$

$$U \frac{\partial U}{\partial x} \Big|_{(x_1,t)}^{(x_2,t)} : \text{Sınırlarda sistem üzerine yapılan iş hızı}$$

$$\int_{x_1}^{x_2} \left(\frac{\partial U}{\partial x} \right)^2 dx : \text{Sistemdeki viskosite ile enerjinin toplam dağılıması}$$

olarak tanımlanır.

E. Varoğlu ve L. Finn [8] akışkan mekaniği açısından Burgers' denkleminin bir model tanımladığını ve bu modelde, $U(x,t)$ ' nin hız ve v ' nin hıza bağlı sıvı akışı olarak temsil edildiğini ifade ettiler. Hızdaki değişim difüzyona sebep olduğundan

$$\frac{\partial c}{\partial t} + U \frac{\partial c}{\partial x} = v \frac{\partial^2 c}{\partial x^2}$$

ile verilen difüzyon-geçirgenlik denklemini Burgers' denkleminin bir benzeri olarak düşündüler. Bu denklem $c(x,t)$ katı konsantrasyonunun $U(x,t)$ hızlı sıvı akışı tarafından taşındığını tanımlar. Konsantrasyon farkının difüzyonu, difüzyon-geçirgenlik denkleminin sağ tarafındaki terimden kaynaklanır. Burada v , eddy difüzyon katsayısıdır.

Blackstock [9] makalesinde son yıllarda termoviskos sıvılarda sonlu genlikli dalgaların problemine değinecek şekilde çok genel bir metodun gelişme gösterdiğine ve bu metodun Burgers' denkleminin kullanılmasına dayandığını vurguladı. Burada, Burgers' denklemindeki U parçacık hızı ile ilgili terim, v küçük bir parametre, t zaman, x gecikme zamanının negatifidir.

Özel olarak $v = 0$ için Burgers' denklemi

$$U_t + UU_x = 0$$

ile verilen gaz dinamiğinin momentum denklemine indirgenir. Bu denklem bir çok nümerik yöntem için bir test problemi olarak kullanıldı [8].

Ayrıca Burgers' denklemi sonlu genlikli enine hidrodinamik dalgalar [10] ve bir isotropik katıda boyuna elastik dalgalar [11] gibi bir çok fiziksel olayın matematiksel modeli olarak kullanıldı.

Matematikte çözümü bulunabilen çok az sayıda non-linear denklemlerden biri olan Burgers' denklemi üzerinde bir çok nümerik çözüm çalışmaları da yapılmıştır: Örneğin; Miller Burgers' denkleminin çözümü için Predictor-Corrector metoduyla elde edilen sonuçlarla, açık metodla elde edilen sonuçları karşılaştırdı [3]. T. Öziş ve A. Özdeş direkt varyasyonel metodu kullandılar ve elde edilen sonuçların diğer metotlarla elde edilen sonuçlarla uyum sağladığını gösterdiler [12]. E. Varoğlu ve L. Finn Ağırlıklı Rezidü metodunu [8], J. Caldwell ve P. Wanless Sonlu Eleman Metodunu [13], P. Arminjon ve C. Beauchamp Sonlu Eleman Metodunu [14], Evans ve Abdullah Group Explicit ve Sonlu Eleman Metodunu [15]. R. C. Mittal ve P. Singhal Galarkin Metodunu [16] kullandılar. Yaklaşık olarak aynı zamanda fakat birbirinden bağımsız olarak Hopf [17] ve Burger [18] tarafından denklemin çözümü için

$$U = t^{-1/2}S(z) ; z = (4vt)^{-1/2}x$$

dönüşümü kullandılar. Burgers' denkleminin bu benzerlik dönüşümü ile quasi-linear adi diferansiyel denkleme (Ricatti Denklemi) indirgeniği gösterildi [19].

Bir çok çalışmada denklemin çözümü Hopf-Cole dönüşümü olarak bilinen

$$U = -2v \frac{\theta_x}{\theta}$$

dönüşümü ile elde edilmiştir [2,3,19].

Bu dönüşüm altında Burgers' denklemi lineer ısı denklemine dönüşmektedir. Bu dönüşümün hidrodinamik uygulamaları Ames [20], Chu [21], Shvets ve Melesko [22] tarafından tartışıldı.

Denklem matematiksel açıdan da ilginç özellikler arz etmektedir. Şöyle ki $v \frac{\partial^2 U}{\partial x^2}$ terimi v ' nin çok küçük olması halinde etkisini kaybettiğinden denklem hiperbolik bir hale dönüşmektedir. Bu nedenle yapılan çalışmalarda küçük viskozite değerleri için denklemin parabolik yapısını bozmayan yöntemler geliştirilmeye çalışılmıştır.

Bu çalışmada Hopf-Cole dönüşümünden faydalanarak Burgers' denkleminin bir sonlu eleman çözümü verildi. Elde edilen nümerik çözümler yine aynı dönüşümle bulunan analitik çözümle karşılaştırıldı. Küçük viskozite değerleri için çözümler elde edilmeye ve viskozite için bir alt sınır belirlenmeye çalışıldı.



BÖLÜM 1

TEMEL TANIM VE KAVRAMLAR

1.1. Bir Matrisin Özdeğer ve Özvektörleri Üzerine Genel Tanım ve Teoremler

1.1.1. Tanım: $A \in IR_n^n$ ve $\lambda \in IR$ olmak üzere

$$P(\lambda) = \det(A - \lambda I_n)$$

olarak tanımlanan P polinomuna A matrisinin *karakteristik polinomu* denir [23].

1.1.2. Tanım: $A \in IR_n^n$ matrisinin karakteristik polinomu P ise P polinomunun köklerine A matrisinin *karakteristik değerleri* veya *özdeğerleri* denir [23].

1.1.3. Tanım: $A \in IR_n^n$ matrisinin özdeğerleri λ_i ($i = 1, 2, \dots, n$) olmak üzere sıfırdan farklı bir $x \in IR^n$ vektörü için

$$(A - \lambda_i I_n)x = 0$$

özelliğini sağlayan sıfırdan farklı x vektörüne A matrisinin λ_i özdeğerine karşılık gelen *karakteristik vektörü* veya *özvektörü* denir [23].

1.1.4. Tanım: $A \in IR_n^n$ matrisinin λ_i ($i = 1, 2, \dots, n$) özdeğerlerinin mutlak değerce en büyüğüne A matrisinin *spektral yarıçapı* denir ve $\rho(A)$ ile gösterilir. Buna göre A matrisinin $\rho(A)$ spektral yarıçapı

$$\rho(A) = \max_i |\lambda_i|$$

dir [24].

1.1.5. Teorem (Bir Tridiagonal Matrisin Özdeğerleri):

$a, b, c \in \mathbb{R}$ ve $bc > 0$ olmak üzere bir $A \in \mathbb{R}_n^n$ matrisi

$$A = \begin{bmatrix} a & b & & & & \\ c & a & b & & & \\ & c & a & b & & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & & c & a & b \\ & & & & c & a \end{bmatrix}$$

olarak verilsin. Bu matrisin bütün özdeğerleri λ_s ,

$$\lambda_s = a + 2\sqrt{bc} \cos \frac{s\pi}{n+1}, s = 1, 2, \dots, n$$

dir.

Bu teorem fark denklemleri (*difference equation*) yardımıyla kolayca ispatlanabilir [24].

1.2. Türevlere Sonlu Fark Yaklaşımları

$U(x, t)$, x ve t bağımsız değişkenlerine göre yeterince türevlenebilen bir fonksiyon olsun. h , x yönündeki artma miktarı olmak üzere $U(x+h, t)$ ve $U(x-h, t)$ fonksiyonlarının x civarında Taylor açılımları sırasıyla;

$$U(x+h, t) = U(x, t) + h \frac{\partial U}{\partial x} + \frac{h^2}{2} \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{h^3}{6} \frac{\partial^3 U}{\partial x^3} + \dots \quad (1.1)$$

$$U(x-h, t) = U(x, t) - h \frac{\partial U}{\partial x} + \frac{h^2}{2} \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} - \frac{h^3}{6} \frac{\partial^3 U}{\partial x^3} + \dots \quad (1.2)$$

olarak tanımlanılır. Benzer düşünceyle hareketle; k , t yönündeki artma miktarı olmak üzere $U(x, t+k)$ ve $U(x, t-k)$ fonksiyonlarının t civarındaki Taylor açılımları sırasıyla;

$$U(x, t+k) = U(x, t) + k \frac{\partial U}{\partial t} + \frac{k^2}{2} \frac{\partial^2 U}{\partial t^2} + \frac{k^3}{6} \frac{\partial^3 U}{\partial t^3} + \dots \quad (1.3)$$

$$U(x, t-k) = U(x, t) - k \frac{\partial U}{\partial t} + \frac{k^2}{2} \frac{\partial^2 U}{\partial t^2} - \frac{k^3}{6} \frac{\partial^3 U}{\partial t^3} + \dots \quad (1.4)$$

şeklindedir [25].

Şimdi $U(x, t)$ fonksiyonunun x ve t ye göre sırasıyla birinci ve ikinci mertebeden sonlu fark yaklaşımlarını bulalım.

1.2.1. Birinci Mertebeden Türevler İçin Sonlu Fark Yaklaşımları

$U(x, t)$ fonksiyonunun x yönündeki birinci mertebeden $\frac{\partial U}{\partial x}$ türevini gözönüne alalım. Sırasıyla (1.1) ve (1.2) Taylor açılımlarından $\frac{\partial U}{\partial x}$ yalnız bırakılırsa

$$\frac{\partial U}{\partial x} = \frac{U(x+h, t) - U(x, t)}{h} - \frac{h}{2} \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} - \frac{h^2}{6} \frac{\partial^3 U}{\partial x^3} \dots \quad (1.5)$$

$$\frac{\partial U}{\partial x} = \frac{U(x, t) - U(x-h, t)}{h} + \frac{h}{2} \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} - \frac{h^2}{6} \frac{\partial^3 U}{\partial x^3} + \dots \quad (1.6)$$

elde edilir. (1.1) eşitliğinden (1.2) eşitliği taraf tarafa çıkarılır ve $\frac{\partial U}{\partial x}$ yalnız bırakılırsa

$$\frac{\partial U}{\partial x} = \frac{U(x+h, t) - U(x-h, t)}{2h} - \frac{h^2}{6} \frac{\partial^3 U}{\partial x^3} + \dots \quad (1.7)$$

elde edilir. Bulunan bu (1.5), (1.6), (1.7) denklemlerinden $U(x,t)$ fonksiyonunun x civarında birinci mertebeden türevleri için

$$\frac{\partial U}{\partial x} = \frac{U(x+h,t) - U(x,t)}{h} + O(h) \quad (1.8)$$

$$\frac{\partial U}{\partial x} = \frac{U(x,t) - U(x-h,t)}{h} + O(h) \quad (1.9)$$

$$\frac{\partial U}{\partial x} = \frac{U(x+h,t) - U(x-h,t)}{2h} + O(h^2) \quad (1.10)$$

yaklaşımları elde edilir. Burada “ O ” sonsuz terimli bir eşitliğin sonlu bir terimde kesildiğini, $O(h)$ terimi ise hatanın $h \rightarrow 0$ olduğunda h ile orantılı olduğunu ifade eder ve buna kesme (Truncation) hatası denir [26].

Yine benzer düşünceyle hareketle $U(x,t)$ fonksiyonunun t yönünde birinci mertebeden türevleri, (1.3) ve (1.4) eşitliklerinden

$$\frac{\partial U}{\partial t} = \frac{U(x,t+k) - U(x,t)}{k} - \frac{k}{2} \frac{\partial^2 U}{\partial t^2} + \frac{k^2}{6} \frac{\partial^3 U}{\partial t^3} \dots \quad (1.11)$$

$$\frac{\partial U}{\partial t} = \frac{U(x,t) - U(x,t-k)}{k} + \frac{k}{2} \frac{\partial^2 U}{\partial t^2} - \frac{k^2}{6} \frac{\partial^3 U}{\partial t^3} + \dots \quad (1.12)$$

yaklaşımları elde edilir. (1.8), (1.9), (1.10) denklemlerine benzer düşünceyle (1.11), (1.12) denklemlerinden

$$\frac{\partial U}{\partial t} = \frac{U(x,t+k) - U(x,t)}{k} + O(k) \quad (1.13)$$

$$\frac{\partial U}{\partial t} = \frac{U(x,t) - U(x,t-k)}{k} + O(k) \quad (1.14)$$

yaklaşımları elde edilir. Burada $O(k)$ terimi hatanın k mertebesinde olduğunu ve hatanın k ile orantılı azalacağını göstermektedir.

1.2.2. İkinci Mertebeden Türevler İçin Sonlu Fark Yaklaşımları

$U(x,t)$ fonksiyonunun x yönünde ikinci mertebeden $\frac{\partial^2 U}{\partial x^2}$ türevini göz önüne alalım. $\frac{\partial^2 U}{\partial x^2}$ ikinci mertebeden türev yaklaşımını bulmak için $U(x+2h,t)$ ve $U(x-2h,t)$ fonksiyonlarının x civarındaki Taylor seri açılımları sırasıyla

$$U(x+2h,t) = U(x,t) + 2h \frac{\partial U}{\partial x} + \frac{4h^2}{2} \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{8h^3}{6} \frac{\partial^3 U}{\partial x^3} + \dots \quad (1.15)$$

$$U(x-2h,t) = U(x,t) - 2h \frac{\partial U}{\partial x} + \frac{4h^2}{2} \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} - \frac{8h^3}{6} \frac{\partial^3 U}{\partial x^3} + \dots \quad (1.16)$$

dır. (1.1) ve (1.15) eşitliklerinden $\frac{\partial U}{\partial x}$ yok edilir ve $\frac{\partial^2 U}{\partial x^2}$ yalnız bırakılırsa;

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} = \frac{U(x,t) + U(x+2h,t) - 2U(x+h,t)}{h^2} - h \frac{\partial^3 U}{\partial x^3} + \dots \quad (1.17)$$

bulunur. Benzer düşünceyle hareketle (1.2) ve (1.16) denklemlerinden $\frac{\partial U}{\partial x}$ yok

edilir ve $\frac{\partial^2 U}{\partial x^2}$ yalnız bırakılırsa;

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} = \frac{U(x-2h,t) + U(x,t) - 2U(x-h,t)}{h^2} + h \frac{\partial^3 U}{\partial x^3} + \dots \quad (1.18)$$

bulunur. (1.1), (1.2) denklemlerinden $\frac{\partial U}{\partial x}$ yok edilir ve $\frac{\partial^2 U}{\partial x^2}$ yalnız bırakılırsa;

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} = \frac{U(x-h,t) - 2U(x,t) + U(x+h,t)}{h^2} - \frac{h^2}{12} \frac{\partial^4 U}{\partial x^4} + \dots \quad (1.19)$$

bulunur.

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} = \frac{U(x,t) - 2U(x+h,t) + U(x+2h,t)}{h^2} + O(h) \quad (1.20)$$

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} = \frac{U(x-2h,t) - 2U(x-h,t) + U(x,t)}{h^2} + O(h) \quad (1.21)$$

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} = \frac{U(x-h,t) - 2U(x,t) + U(x+h,t)}{h^2} + O(h^2) \quad (1.22)$$

şeklinde ifade edilebilirler.

Kabul edelim ki problemin çözüm bölgesi $0 \leq x \leq l$ (l ,sonlu bir sayı) ve $t > 0$ olsun. Sonlu fark yaklaşımı için problemin çözüm bölgesi N eşit alt aralığa bölünür. Öyle ki $U(x,t)$ bağımlı değişkeni yalnız mesh noktalarında mevcuttur. $\Delta t = k$ ve

$\Delta x = h = \frac{l}{N}$ olacak şekilde eşit ve (x_i, t_m) mesh noktaları

$$x_i = i\Delta x = ih, \quad i=0,1,2,\dots,N$$

$$t_m = m\Delta t = mk, \quad m=0,1,2,\dots,N$$

olarak alınır.

Bir $P(ih, mk)$ mesh noktası üzerinde U nun değeri;

$$U_p = U(ih, mk) \cong U_{i,m} \cong U_i^m$$

ifadelerinden biri ile gösterilir.

Bu gösterimlerin kullanılması ve hataların ihmal edilmesi ile birinci ve ikinci mertebeden türevlere sonlu fark yaklaşımlarının formülleri

$$\frac{\partial U}{\partial x} \cong \frac{U_{i+1}^m - U_i^m}{h} \quad (1.23)$$

$$\frac{\partial U}{\partial x} \cong \frac{U_i^m - U_{i-1}^m}{h} \quad (1.24)$$

$$\frac{\partial U}{\partial x} \cong \frac{U_{i+1}^m - U_{i-1}^m}{2h} \quad (1.25)$$

$$\frac{\partial U}{\partial t} \cong \frac{U_i^{m+1} - U_i^m}{k} \quad (1.26)$$

$$\frac{\partial U}{\partial t} \cong \frac{U_i^m - U_i^{m-1}}{k} \quad (1.27)$$

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} \cong \frac{U_i^m - 2U_{i+1}^m + U_{i+2}^m}{h^2} \quad (1.28)$$

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} \cong \frac{U_{i-2}^m - 2U_{i-1}^m + U_i^m}{h^2} \quad (1.29)$$

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} \cong \frac{U_{i-1}^m - 2U_i^m + U_{i+1}^m}{h^2} \quad (1.30)$$

olarak elde edilirler. (1.23), (1.24), (1.25) ile verilen x' e göre birinci mertebeden türev yaklaşımlarına sırasıyla iki-nokta İleri (*Forward*), Geri (*Backward*) ve Merkezi (*Central*) fark formülleri denir. Benzer biçimde (1.26), (1.27) ile verilen t' ye göre birinci mertebeden türev yaklaşımlarına sırasıyla iki-nokta İleri ve Geri fark formülleri denir. (1.28), (1.29), (1.30) ile verilen x'' e göre ikinci mertebeden türev yaklaşımlarına sırasıyla üç-nokta İleri, Geri ve Merkezi fark formülleri denir.

1.3. Zamana Bağlı Isı İletim Denkleminin Sonlu Fark Gösterimi

Zamana bağlı ısı iletim denklemini sonlu fark formunda ifade etmek için bir çok yöntem vardır. Bunlardan başlıcaları;

- i) Explicit (Açık) Yöntem
- ii) Fully Implicit (Kapalı) Yöntem
- iii) Crank-Nicolson Yöntemi

dır. Her üç yöntem de kendi içlerinde bazı avantaj ve dezavantajlara sahiptirler. Bu çalışmada yukarıdaki üç yöntemi tek başlık altında Ağırlıklı Averaj Yöntemi ile ifade edeceğiz. Ağırlıklı Averaj Yöntemine geçmeden önce, $0 \leq x \leq l$ (l , sonlu bir sayı) ve $t > 0$ bölgesi üzerinde tanımlı zamana bağlı, boyutsuz ısı-iletim problemini göz önüne alalım.

$$\frac{\partial U}{\partial t} = \frac{\partial^2 U}{\partial x^2}, \quad 0 \leq x \leq l ; t > 0 \quad (1.31)$$

$$U(0,t) = g_1(t), \quad t \geq 0$$

$$U(l,t) = g_2(t), \quad t \geq 0$$

sınır şartları ve

$$U(x,0) = f(x), \quad 0 \leq x \leq l$$

başlangıç şartı ile verilsin. Burada $g_1(t)$, $g_2(t)$ ve $f(x)$ fonksiyonlarının bilindiğini kabul edelim.

Çözüm bölgesinin N eşit alt aralığa bölünmesiyle ki $U(x,t)$ sıcaklığı yalnız mesh noktalarda vardır, problemin çözümü için her bir Δt zaman adımında $\Delta x = \frac{l}{N}$ eşit uzunlukta alınır. $P(x_i, t_m)$ bir mesh noktası olsun. Burada

$$x_i = i\Delta x \quad i=0,1,2,\dots,N$$

$$t_m = m\Delta t \quad m=0,1,2,\dots,N$$

$$N\Delta x = l$$

dır.

Bu tip problemlerin diferansiyel denklemdeki türevler yerine (1.23)-(1.30) denklemleri ile verilen uygun fark formüllerinin kısmi diferansiyel denklemde yazılmasıyla sonlu fark yaklaşımları elde edilir.

1.3.1. Ağırlıklı Averaj Yöntemi

$\theta \in [0,1]$ olmak üzere

$$\frac{\partial U}{\partial t} = \frac{\partial^2 U}{\partial x^2}$$

denkleminde

$$\frac{\partial U}{\partial t} = \frac{U_i^{m+1} - U_i^m}{k}$$

$$\frac{U_i^{m+1} - U_i^m}{k} = \frac{1}{h^2} \left\{ \theta(U_{i-1}^{m+1} - 2U_i^{m+1} + U_{i+1}^{m+1}) + (1-\theta)(U_{i-1}^m - 2U_i^m + U_{i+1}^m) \right\} \quad (1.32)$$

yazılmasıyla elde edilen yaklaşıma Ağırlıklı Averaj Yaklaşımı denir. Burada $\theta = 0$, $\theta = 1/2$, $\theta = 1$ durumlarına sırasıyla Açık Yöntem, Crank-Nicolson Yöntemi, Kapalı Yöntem karşılık gelir [24].

1.4. Sonlu Fark Yöntemleri İçin Genel Kararlılık Analizi

Kısmi diferansiyel denkleme karşılık gelen sonlu fark denkleminin çözümünün kısmi diferansiyel denklemin tam çözümüne yakınsaması için gerekli olan şartlara kararlılık şartları, kararlılık şartlarının bulunması işlemine de kararlılık analizi adı verilir. Bu kısımda lineer denklemler için kullanılan kararlılık analizlerinden, Matris yöntemi verilecektir.

1.4.1. Matris Yöntemi

Matris yöntemi, Sonlu fark denklemlerinin çözümünün kararlılığının incelenmesinde sık kullanılan bir yöntemdir.

Bu yöntemde kararlılığın nasıl incelendiğini görmek için (1.31) denklemi ile verilen ısı iletim problemini tekrar göz önüne alalım. Denkleme karşılık gelen sonlu fark yaklaşımını kapalı olarak matris formunda

$$\underline{U}^{(m+1)} = A\underline{U}^{(m)} + \underline{b} \quad (1.33)$$

olarak yazabiliriz. $\underline{U}^{(m+1)*}$ ile yuvarlatma hataları içeren ve $\underline{U}^{(m+1)}$ değerine çok yakın bir çözüm gösterilirse

$$\underline{U}^{(m+1)*} = A\underline{U}^{(m)*} + \underline{b} \quad (1.34)$$

yazılabilir. Burada hata

$$e_i^m = U_i^m - U_i^{m*}$$

olarak tanımlanırsa hata vektörü

$$\underline{e}_i^{(m)} = [U_1^m - U_1^{m*} \quad U_2^m - U_2^{m*} \quad \dots \quad U_{N-1}^m - U_{N-1}^{m*}]^T$$

olmak üzere (1.33) ifadesinden (1.34) ifadesi çıkarılırsa

$$\underline{e}^{(m+1)} = A\underline{e}^{(m)}$$

elde edilir. Buradan

$$\underline{e}^{(m)} = A\underline{e}^{(m-1)} = A^2 \underline{e}^{(m-2)} = \dots = A^m \underline{e}^{(0)} \quad (1.35)$$

yazılabilir. Burada $\underline{e}^{(0)}$, $\underline{e}^{(0)} = [e_1^0 \quad e_2^0 \quad \dots \quad e_{N-1}^0]^T$ başlangıç hatasıdır. Kabul edelim ki başlangıç hatası $t = 0$ ' da biliniyor olsun. Bu durumda $\underline{e}^{(m)}$ değerinin ne zaman sınırlı olduğunu araştıralım.

Kabul edelim ki A reel, simetrik ve rankı $(N-1)$ olan bir matris olsun. Bu durumda A matrisinin $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_{N-1}$ özdeğerlerine karşılık gelen $(N-1)$ tane lineer

bağımsız $\underline{W}_1, \underline{W}_2, \dots, \underline{W}_{N-1}$ özvektörü vardır. Böylece \underline{W}_s ($s = 1, 2, \dots, N-1$)' ler \mathbb{R}^{N-1} uzayının bir bazını oluşturur. O halde boyutu $(N-1)$ olan herhangi bir vektör bunların lineer birleşimi olarak yazılabilir (Açıkça $\underline{e}^{(0)} \in \mathbb{R}^{N-1}$ dir). Buradan $\underline{e}^{(0)}$ \underline{W}_s ' lerin lineer birleşimi olarak

$$\underline{e}^{(0)} = \sum_{s=1}^{N-1} \alpha_s \underline{W}_s$$

yazılabilir. (1.35) denkleminde

$$\underline{e}^{(m)} = A^m \underline{e}^{(0)}$$

olduğundan

$$\underline{e}^{(m)} = A^m \sum_{s=1}^{N-1} \alpha_s \underline{W}_s \quad (1.36)$$

yazabiliriz.

Özvektör ve özdeğer tanımından

$$A \underline{W}_s = \lambda_s \underline{W}_s$$

dir. Diğer taraftan

$$A^m \underline{W}_s = \lambda_s^m \underline{W}_s$$

dir. Böylece (1.36) denkleminde

$$\underline{e}^{(m)} = A^m \underline{e}^{(0)} = A^m \sum_{s=1}^{N-1} \alpha_s \underline{W}_s = \sum_{s=1}^{N-1} \alpha_s A^m \underline{W}_s$$

olduğundan

$$\underline{e}^{(m)} = \sum_{s=1}^{N-1} \alpha_s \lambda_s^m \underline{W}_s$$

bulunur.

$\underline{e}^{(m)}$, nin m artarken sınırlı kalması (yani mutlak değerce istenildiği kadar küçük bir pozitif sayıdan küçük kalması)

$$\max_s |\lambda_s| \leq 1$$

olması ile mümkündür [24].



BÖLÜM 2

Son yıllarda, başlangıç-sınır değer problemlerinin nümerik çözümünde sonlu fark yöntemlerinin yanı sıra sonlu eleman yöntemleri de yaygın olarak kullanılmaya başlandı [13,14,27].

Grid noktaların bir sırası üzerinde problemi ayrı ayrı parçalara ayıran sonlu fark yöntemlerinden farklı olarak, sonlu eleman metodunda çok küçük birbiriyle bağlantılı alt bölgeler ve sonlu elemanların kurulduğu çözüm bölgesi oluşturulur. Böylece sonlu eleman yöntemi bir problemin formülasyonunda denklemleri geliştirmeye bir parçalı yaklaşım verir.

2.1. Sonlu Eleman Yönteminin Kısa Tarihçesi

Sonlu eleman yönteminin başlangıcı birçok şekilde değerlendirilebilir, bu değerlendirmeler bir uygulamalı matematikçinin, bir fizikçinin veya bir mühendisin görüş açısına göre değişebilir. Bu metodun geçmişi 1943 yılına kadar uzanır. Bu yıllarda Courant [28], St. Venant torsion (bükme,kıvrırma) problemini çalışmasında minimum potansiyel enerji prensibi ve üçgensel bölgeler üzerinde tanımlanan parçalı sürekli fonksiyonlar kullandı. 1960' da ise Clough [29] düzlem elastikiyeti üzerine bir makalesinde ilk kez "sonlu eleman metodu" deyimini kullandı.

Bu zaman boyunca uygulamalı matematikçiler kuvantum mekaniği sınır değer problemleriyle ve özellikle özdeğerler için alt ve üst sınırlarla ilgilendiler. Fizikçiler sürekli fonksiyonları temsil eden parçalı-yaklaşık fonksiyonların elde edilmesinin anlamını araştırdılar. Mühendisler ribs ve spars lar ile kuvvetlendirilen kabuk tipi yapıların stifness etkisinin katsayılarını bulabilmek için bulabilecekleri bir yol araştırdılar. Bu üç gurubun çalışmaları sonlu eleman metodu ve uygulamaları üzerinde çok ilerlemiş araştırmalar için bir temel meydana getirdi.

Morse ve Feshbach [30]' ün bir kitabı ile harekete geçen Greenstant [31], çözüm bölgesinin birtakım bitişik altkümelere bölüneceğini kabul etti. Bu altkümelerin üzerinde bir hücreyi ifade eden fonksiyon serileri ile çözüme yaklaşılr.

Greenstant teorisinde yer alan hücre kavramı, düzensiz şekilli hücre meshlerine izin verir.

1962’ de White [32] ve Friedrichs [33], bu dönemdeki mühendislerin çalışmalarından bağımsız olan varyasyonel prensiplerden fark denklemlerini geliştirerek üçgensel elemanları kullandılar. Sonlu eleman yönteminin popülerliği fizik ve mühendislikte artmaya başladı, birçok uygulamalı matematikçi lineer eliptik sınır değer problemlerinin özel bir hali üzerinde yoğunlaşarak, hesaplamaların hata sınıflandırılması, yakınsaklığı ve kararlılığı için yöntemin temelleri ile ilgilendiler. Bu on yıl süresince yöntem üzerinde matematiksel literatür önemli bir biçimde gelişti. Oysaki bu yöntem aynı on yıl boyunca benzer şekilde fizikte ve mühendislikte birbirinden bağımsız olarak başladı ve ilerledi. Zienkiewicz ve Cheung [34] bu yöntemin varyasyonel biçiminin formüle edilerek bütün alan problemlerine uygulanabileceğini yayınladıkları zaman, yöntem geniş bir yorum kazandı.

1960’lı yıllardan günümüze kadar sonlu eleman yöntemi uygulamalı bilimlerde ve mühendislikte geniş alanlara yayılmış kullanıma sahip oldu ve çeşitli kitaplarda, konferanslarda ve yüzlerce makalede yayınlandı [13,14,27].

2.2. Sonlu Eleman Yönteminin Temel Fikri

Sonlu eleman yönteminin temel fikri, çözümün bir parçalı yaklaşımını kullanarak ilgili problemi çözmektir. Bu belirlenmiş bölgeyi, küçük ve sonlu sayıda parçaya ayırarak yapılabilir. Birbiriyle bağlantılı bu alt bölgelere “sonlu elemanlar (*finite element*)” denir. Çözüm bu bağlantı noktalarının üzerine yaklaşımdır ki onlara “düğüm (*node*)” veya “düğüm noktaları (*nodal points*)” denir. Böylece ilgili bölgenin belli konumlarında ara değer bulunur.

Genel olarak ilgili bölge içinde farklı problemlerin sonlu eleman çözümünde daima aşağıda sunulan algoritma izlenilir.

- i) Çözüm bölgesi diskirize edilir.
- ii) İnterpolasyon fonksiyonları seçilir.

- iii) Eleman özellikleri belirlenir.
- iv) Denklem sistemi elde edecek şekilde eleman özellikleri birleştirilir.
- v) Denklem sistemi çözülür.
- vi) Eğer gerekirse ek hesaplamalar yapılır [27].

2.3. Yöntemin Kavramları

2.3.1. Sonlu Eleman Terminolojisi

“Sonlu Eleman Yöntemi” teriminin basit anlamı yönteminin içindeki iki anahtar kelimenin varlığı ile son derece açıktır. İlk anahtar kelime; sonsuz sayıda bölünmüş bölgede ilgili bölgeye dönüşen “sonlu” ve ikinci anahtar kelime; bu alt bölgelere verilen isim olan “eleman” dır. Her bir eleman, fonksiyonların kombinasyonları tarafından yaklaşılan problem değişkenleri üzerinde bazı noktalar içerir. Bu noktalar ve fonksiyonlara sırasıyla “düğüm” veya “düğüm noktaları” ve “interpolasyon fonksiyonu” veya “shape fonksiyonları” denir.

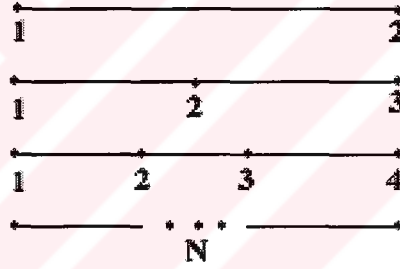
Eleman özelliklerinin formülasyonunun bir çok yolu vardır. Bunlar aşağıdaki gibi gruplandırılabilirler.

- i) Basit geometrideki problemler için bulunabilen *direkt yaklaşım*. Bu yaklaşımda direkt fiziksel neden, ilgili bilinmeyen değişken denklem sistemini tanımlamak için kullanılır.
- ii) *Varyasyonel yaklaşım* ki bu yaklaşım, bir fonksiyoneli en uygun hale getirmeyi içerir ve çözüm bölgelerinin yeterince büyük, kompleks şekilleri ile uğraştığı için direkt yaklaşıma kıyasla iyidir.
- iii) *The Weighted Residuals* yaklaşımı, varyasyonel yaklaşıma göre daha çok yönlüdür ve zorunlu Varyasyonel fonksiyonelin varlığını gerektirmez.
- iv) Sistemin enerjisinin (*termal / mekanik*) dengesini veren *Enerji-Denge (The energy-balance)* yaklaşımı [27].

Bu çalışmada, ikinci yaklaşım olan varyasyonel yaklaşım ile ilgilenilecek ve çözüm bölgesi üzerinde sonlu eleman kuran Galerkin varyasyonel prensibi kullanılacaktır.

2.3.2 Eleman Tipleri

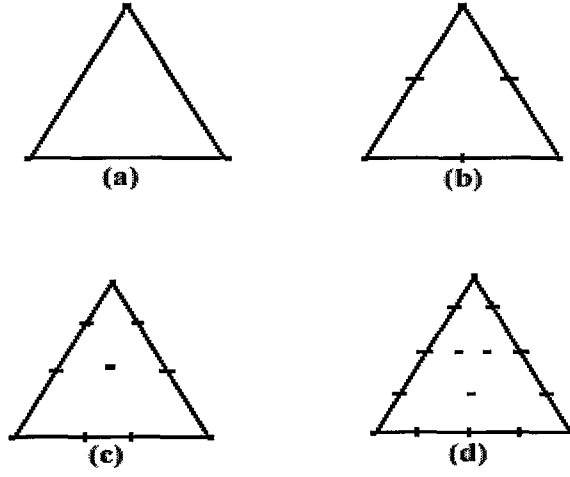
İnterpolasyon fonksiyonları (*shape*) ile birlikte sonlu elemanların seçimi belirlenmiş problemin çözümünde son derece önemlidir. Sonlu elemanların ve shape fonksiyonlarının seçimi, çözümün istenilen doğruluğuna, hesaplama ve depolama limitinin maliyetine bağlıdır. Genel olarak elemanların boyutları, ilgili problemin boyutu ile aynı olarak seçilir. Yani bir boyutta doğru parçası, iki boyutta üçgenler veya dikdörtgenler, üç boyutta beşgenler veya altıgenler olarak seçilir. Şekil (2.1) eleman tiplerinin bir boyutta basit bir ailesini gösterir.



Şekil 2.1. Değişik sayıdaki düğümler ile bir boyutlu eleman.

Bir özel eleman için belirlenmiş düğümlerin sayısı (ki onun boyutuna bakmaksızın) değişken düğümlerin tipine ve gerekli sürekliliğe bağlıdır. Son terimi açıklamak için onun standart tanımını verelim. Alan değişkeni, ortak bölge elemanında sürekli ise o zaman C^0 sürekliliğine sahiptir. Eğer ek olarak birinci mertebeden türevi sürekli ise C^1 sürekliliğine sahiptir (ve böylece devam eder).

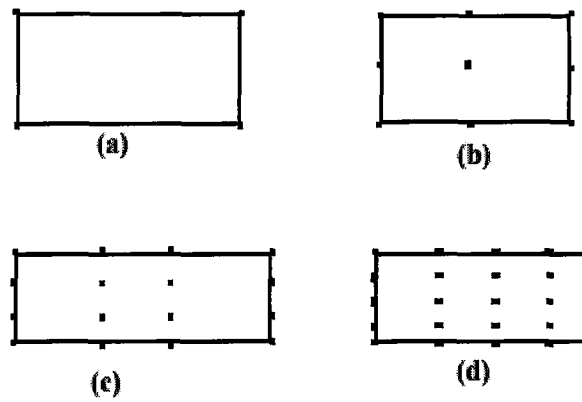
En basit iki- boyutlu eleman Şekil 2.2.' de gösterilen üç düğümlü üçgendir. Diğer gösterilenler yüksek mertebeden üçgensel elemanlardır.



Şekil 2.2. Üçgensel elemanlara örnekler

- a) Lineer (3-düğüm)
- b) Quadratic (6-düğüm)
- c) Cübic (10-düğüm)
- d) Quartic (15-düğüm)

Aynı zamanda basit ama az kullanılan iki-boyutlu bir eleman Şekil 2.3.' de gösterilen kare elemanlardır.



Şekil 2.3. Dikdörtgen elemanlara örnekler

- a) Lineer (4 düğümlü)
- b) Quadratic (9 düğümlü)
- c) Cubic (16 düğümlü)
- d) Quartic (25 düğümlü)

Genel olarak bu eleman tipleri belirli bir şekle veya eleman sayısına sınırlanamaz. Mesela Şekil 2.3.' de gösterilen elemanlar, genel quadrilateral elemanın bir özel halidir (Şekil 2.4.). Şekil 2.2. ve Şekil 2.3.' de gösterilen iç noktaları kapsamaması gerekmez.

Belli problemlerin çözümü için bir eleman tipinin seçiminin ana kriteri yeterli miktarda operasyonlar kullanarak problem değişkenleri için en iyi yaklaşıma sahip olan bir eleman seçmektir.



Şekil 2.4. Bir genel quadrilateral eleman

2.4. Sonlu Eleman Yöntemi

Sonlu eleman yöntemi, bir ısı denkleminin zayıf formülasyonunu meydana getiren yaklaşık çözümlerin sistematik anlamıdır. Bir ısı denkleminin zayıf formunu kurmak için test fonksiyonlarının bir uzayını tanımlayalım. Eğer $\Phi(x)$ test fonksiyonu ise kendisi ve birinci türevi $[0,1]$ aralığında tanımlı ve bu aralıkta karesi integrallenebilirdir. Yani

$$\int_0^1 [(\Phi(x))^2 + (\Phi'(x))^2] dx$$

var ve sonludur.

Burada tanımlanan test fonksiyonlarının uzayı $H[0,1]$ ile gösterilir. Eğer

$$\frac{\partial U}{\partial t} = \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} \quad 0 < x < 1, t > 0 \quad (2.1)$$

ısı denklemini $\Phi(x) \in H[0,1]$ fonksiyonu ile çarpılır ve $x=0$ ' dan $x=1$ ' e kadar integre edilirse;

$$\int_0^1 \Phi(x) \left(\frac{\partial U}{\partial t} - \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} \right) dx = 0$$

olur. Buradan

$$\int_0^1 \left(\Phi(x) \frac{\partial U}{\partial t} + \frac{\partial U}{\partial x} \frac{d\Phi}{dx} \right) dx = \Phi(1) \frac{\partial U}{\partial x}(1,t) - \Phi(0) \frac{\partial U}{\partial x}(0,t) \quad (2.2)$$

elde edilir. (2.2) denkleminin (2.1) ısı denkleminin temel zayıf formu denir.

Galerkin metodunu kullanarak (2.1) ısı denkleminin yaklaşık çözümlerini aşağıdaki gibi kurarız:

$U(x,t)$, (2.1) denkleminin bir yaklaşık çözümü olmak üzere

$$U(x,t) = \sum_{i=1}^{N+1} b_i(t) \Psi_i(x) \quad (2.3)$$

şeklinde tanımlansın. Burada $\Psi_i(x) \in H[0,1]$ ($1 \leq i \leq N+1$) baz fonksiyonları ve $b_i(t)$ ($1 \leq i \leq N+1$) henüz tanımlanmamış, zamanın diferansiyellenebilir fonksiyonlardır. Bundan başka $(N+1)$ tane test baz fonksiyonlarının $\{\Phi_1(x), \Phi_2(x), \dots, \Phi_{N+1}(x)\}$ bir sonlu lineer bağımsız cümlesini seçelim. Burada her bir $\Phi_i(x) \in H[0,1]$ ($1 \leq i \leq N+1$)' dir. Böylece $\Phi(x)$ test fonksiyonları oluşturulur.

Bu kabuller ile (2.2) denklemini (2.3) eşitliği kullanılarak bir $U(x,t)$ fonksiyonuna bağlı

$$\int_0^1 \left(\Phi(x) \frac{\partial U}{\partial t} + \frac{d\Phi}{dx} \frac{\partial U}{\partial x} \right) dx = \Phi(1) \frac{\partial U}{\partial x}(1,t) - \Phi(0) \frac{\partial U}{\partial x}(0,t) \quad (2.4)$$

denkleme dönüşür. Her $\Phi(x)$ test fonksiyonu $(N+1)$ tane test baz fonksiyonunun bir lineer birleşimi olduğundan

$$\Phi(x) = \sum_{i=1}^{N+1} a_i \Phi_i(x) \quad (2.5)$$

şeklinde yazılabilir. Burada a_i ($1 \leq i \leq N+1$) katsayıları keyfi reel sayılardır. (2.4) problemi gerçekte $b_i(t)$ ($1 \leq i \leq N+1$) bilinmeyen fonksiyonları için $N+1$ tane lineer, birinci mertebeden adi diferansiyel denklem sistemini ifade eder. Böylece bir sonlu fark metodu kullanılarak çözülebilir. $b_i(0)$ ($1 \leq i \leq N+1$) başlangıç şartları, başlangıç sıcaklığından elde edilirler. Galerkin yönteminde trial baz fonksiyonları ile test baz fonksiyonları özdeş olarak alınır ve shape fonksiyonları olarak adlandırılır. Yani

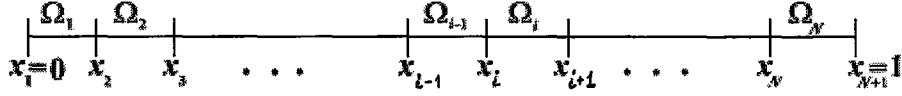
$$\Psi_i(x) = \Phi_i(x), \quad (1 \leq i \leq N+1)$$

olduğu kabul edilir.

Sonlu eleman yöntemi $\Phi_i(x)$ ($1 \leq i \leq N+1$) shape fonksiyonlarını seçmek için sistematik bir teknik kullanır. $[0,1]$ aralığı, uzunlukları sırası ile h_1, h_2, \dots, h_N olan $\Omega_1, \Omega_2, \dots, \Omega_N$ elemanları elde edilecek şekilde N alt aralığa bölünür. i . eleman Ω_i 'nin uç noktaları, x_i ve x_{i+1} ile gösterilir. Dolayısıyla

$$\Omega_i = [x_i, x_{i+1}] \quad ; \quad h_i = x_{i+1} - x_i \quad (1 \leq i \leq N)$$

dır. Burada $x_1=0$ ve $x_{N+1}=1$ 'dir. Her bir elemanın uç noktaları düğüm noktası olarak adlandırılır.



Şekil 2.5. Uzaysal $[0,1]$ aralığı için sonlu eleman mesh noktaları

Eleman ve düğümlerin toplanması problem için sonlu elemanların meshleri olarak ifade edilir. Çok karmaşık işlemlerde her bir eleman ikiden fazla düğümü kapsayabilir. Şekil 2.6' da grafiği verilen $\Phi_i(x)$ ($1 \leq i \leq N+1$) shape fonksiyonları aşağıdaki gibi tanımlansın.

$$\Phi_1(x) = \begin{cases} 1 - \frac{x}{h_1} & , x \in \Omega_1 \\ 0 & , x \notin \Omega_1 \end{cases}$$

$$\Phi_i(x) = \begin{cases} \frac{(x - x_{i-1})}{h_{i-1}} & , x \in \Omega_{i-1} \\ 1 - \frac{(x - x_i)}{h_i} & , x \in \Omega_i \\ 0 & , x \notin \Omega_{i-1} \cup \Omega_i \end{cases} \quad 2 \leq i \leq N \quad (2.6)$$

$$\Phi_{N+1}(x) = \begin{cases} 1 + \frac{(x-1)}{h_N} & , x \in \Omega_N \\ 0 & , x \notin \Omega_N \end{cases}$$

Burada $\Phi_i(x)$ ($1 \leq i \leq N+1$) shape fonksiyonları, aşağıdaki önemli özellikleri sağlar.

- i) Her bir $\Phi_i(x)$ ($1 \leq i \leq N+1$) shape fonksiyonu $H[0,1]$ ' in elemanıdır. Yani $\Phi_i(x)$ ve onun parçalı sürekli türevleri $[0,1]$ üzerinde karesi integrallenebilirdir.

ii) Her bir $\Phi_i(x)$ ($1 \leq i \leq N+1$) shape fonksiyonu elemanların üzerinde parçalı olarak tanımlıdır ve her bir Ω_j ($1 \leq j \leq N$) elemanı üzerinde lineer fonksiyondur.

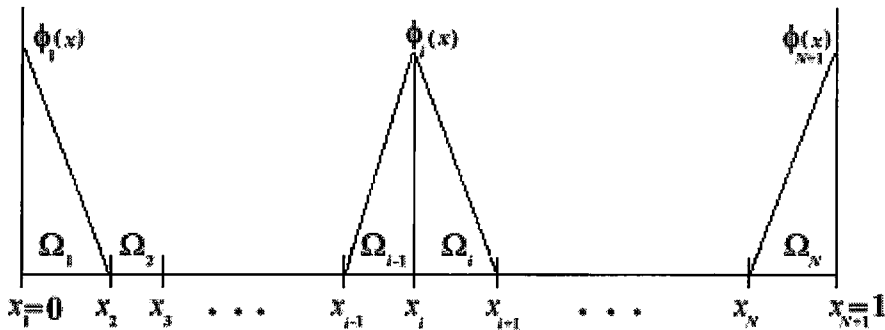
iii) $\Phi_i(x_j) = \delta_{ij}$ ($1 \leq i, j \leq N+1$)' dir. Böylece $\Phi(x) = \sum_{i=1}^{N+1} a_i \Phi_i(x)$ test fonksiyonunun x_j düğümü üzerindeki değeri $\Phi(x_j) = a_j$ ' dir.

iv) Eğer $|i-j| \geq 2$ ise $\Phi_i(x) \Phi_j(x) = 0$ ' dir.

Şimdi

$$\begin{aligned} \frac{\partial U}{\partial t} &= \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} & 0 < x < 1, t > 0 \\ U(x,0) &= f(x) \\ U(0,t) &= g_1(t), U(1,t) = g_2(t) \end{aligned} \quad (2.7)$$

başlangıç-sınır değer problemini göz önüne alalım. Burada $x=0$ ve $x=1$ ' de sınır sıcaklıkları verilmektedir. (2.2) denklemindeki $\frac{\partial U}{\partial x}(0,t)$ ve $\frac{\partial U}{\partial x}(1,t)$ sınır sıcaklıkları önceden bilinmediğinden bunlar denklemden elimine edilmek zorundadır. Bunun için test fonksiyonları $\Phi(0)=0$ ve $\Phi(1)=0$ olacak şekilde seçilirler.



Şekil 2.6. $[0,1]$ aralığında tanımlı sonlu eleman shape fonksiyonları x üzerinde tanımlandı.

Bu durumda (2.1) probleminin zayıf formu

$$\int_0^1 \left(\Phi(x) \frac{\partial U}{\partial t} + \frac{d\Phi}{dx} \frac{\partial U}{\partial x} \right) dx = 0 \quad (2.8)$$

şekline dönüşür. Buradan $U(x,t)$, (2.7) başlangıç ve sınır değerlerini sağlayacak şekilde bulunur.

Bu problemin sonlu eleman çözümünü aşağıdaki gibi yapılır. Bir sonlu eleman mesh' ini $\Omega_1, \Omega_2, \dots, \Omega_N$ elemanları, $0 = x_1, x_2, \dots, x_N, x_{N+1} = 1$ düğümleri ve $\Phi_1(x), \Phi_2(x), \dots, \Phi_{N+1}(x)$ shape fonksiyonları ile seçilir. Ω_i elemanlarının uzunlukları $h_i (1 \leq i \leq N)$ ile tanımlanır. Bu uzunlukların en büyüğü " h " olsun. Yaklaşık çözüm $U_h(x,t)$ ile tanımlanır. Açıkça h sifira gittiği zaman (ki en büyük elemanın uzunluğu sifira gider) $U_h(x,t)$ ' de (2.8) probleminin zayıf çözümü $U(x,t)$ ye yaklaşır.

$$U_h(x,t) = \sum_{i=1}^{N+1} b_i(t) \Phi_i(x)$$

şeklinde verilen bir sonlu eleman yaklaşımı ile (2.8)'in yaklaşık formu her $\Phi(x)$ test fonksiyonu $x = 0$ ve $x = 1$ ' de sifir olmak üzere

$$\int_0^1 \left(\Phi(x) \frac{\partial U_h}{\partial t} + \frac{d\Phi}{dx} \frac{\partial U_h}{\partial x} \right) dx = 0 \quad (2.9)$$

olur. Bu durumda yukarıda anlatılan (iii) şartından dolayı $a_1 = a_{N+1} = 0$ olmalıdır.

Böylece test fonksiyonları doğal olarak

$$\Phi(x) = \sum_{i=2}^N a_i \Phi_i(x) \quad (2.10)$$

olur. Burada $a_i (2 \leq i \leq N)$ katsayıları keyfi reel sayılardır. Aynı şekilde $U_h(x,t)$, (2.7)' den çıkarılan

$$U_h(0,t) = g_1(t)$$

$$U_h(1,t) = g_2(t)$$

sınır şartlarını sağlaması gerektiğinden, $b_1(t) = g_1(t)$ ve $b_{N+1}(t) = g_2(t)$ olmalıdır.

Böylece,

$$U_h(x,t) = g_1(t)\Phi_1(x) + \sum_{i=2}^N b_i(t)\Phi_i(x) + g_2(t)\Phi_{N+1}(x) \quad (2.11)$$

elde edilir. (2.10) ile tanımlanan test fonksiyonları ve (2.11) ile verilen yaklaşık sıcaklıkla, (2.9) problemi bütün a_i ($2 \leq i \leq N$) değerleri için

$$\begin{aligned} & \sum_{i=2}^N \sum_{j=2}^N a_i \left(\frac{db_j}{dt} \int_0^1 \Phi_i(x)\Phi_j(x) dx + b_j(t) \int_0^1 \Phi_i'(x)\Phi_j'(x) dx \right) \\ &= - \sum_{i=2}^N a_i \left(\int_0^1 \Phi_i(x) \left[\frac{dg_1}{dt} \Phi_1(x) + \frac{dg_2}{dt} \Phi_{N+1}(x) \right] dx + \int_0^1 \Phi_i'(x) [g_1(t)\Phi_1'(x) + g_2(t)\Phi_{N+1}'(x)] dx \right) \end{aligned}$$

şekindedir. Gerekli işlemler yapılırsa

$$\sum_{j=2}^N \left(c_{ij} \frac{db_j}{dt} + k_{ij} b_j(t) \right) = - \left(c_{i1} \frac{dg_1}{dt} + c_{iN+1} \frac{dg_2}{dt} + k_{i1} g_1(t) + k_{iN+1} g_2(t) \right) \quad (2.12)$$

şeklinde $b_i(t)$ ($2 \leq i \leq N$)' lere bağlı biçimindeki $N-1$ tane birinci mertebeden lineer adi diferansiyel denklem sistemin bulunur. Burada c_{ij} ve k_{ij} sırasıyla

$$\begin{aligned} c_{ij} = c_{ji} &= \int_0^1 \Phi_i(x)\Phi_j(x) dx \\ k_{ij} = k_{ji} &= \int_0^1 \Phi_i'(x)\Phi_j'(x) dx \end{aligned} \quad , (1 \leq i, j \leq N+1) \quad (2.13)$$

integralleri ile temsil edilir. (2.6) ile verilen shape fonksiyonları ile

$$\begin{aligned}
c_{11} &= \frac{1}{3}h_1, \quad c_{(N+1)(N+1)} = \frac{1}{3}h_N, \quad c_{ii} = \frac{1}{3}(h_{i-1} + h_i) & 2 \leq i \leq N \\
k_{11} &= \frac{1}{h_1}, \quad k_{(N+1)(N+1)} = \frac{1}{h_N}, \quad k_{ii} = \frac{1}{h_{i-1}} + \frac{1}{h_i} & 2 \leq i \leq N \\
c_{ii+1} &= \frac{1}{6}h_i, \quad k_{ii+1} = -\frac{1}{h_i} & 1 \leq i \leq N
\end{aligned} \tag{2.14}$$

olarak elde edilir. Burada h_i , Ω_i ($1 \leq i \leq N$) elemanın uzunluğudur. Ayrıca $|i-j| \geq 2$ ise,

$$c_{ij} = 0, \quad k_{ij} = 0 \tag{2.15}$$

dir.

(2.12) denklemi

$$C \frac{d}{dt} \underline{b}(t) + K \underline{b}(t) = \frac{d}{dt} \underline{c}(t) + \underline{d}(t) \tag{2.16}$$

matris formunda yazabilir. Burada C ve K ; $(N-1) \times (N-1)$ simetrik, pozitif tanımlı tridiagonal matrislerdir. Bu matrislere sırasıyla kapasitans ve stiffness matrisleri denir.

$$C = \begin{bmatrix} c_{22} & \cdots & c_{2N} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{N2} & \cdots & c_{NN} \end{bmatrix}, \quad K = \begin{bmatrix} k_{22} & \cdots & k_{2N} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ k_{N2} & \cdots & k_{NN} \end{bmatrix} \tag{2.17}$$

ve $\underline{b}(t)$, $\underline{c}(t)$, $\underline{d}(t)$ vektörleri

$$\underline{b}(t) = \begin{bmatrix} b_2(t) \\ b_3(t) \\ \vdots \\ b_{N-1}(t) \\ b_N(t) \end{bmatrix}, \quad \underline{c}(t) = \begin{bmatrix} c_{21}g_1(t) \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ c_{N(N+1)}g_2(t) \end{bmatrix}, \quad \underline{d}(t) = \begin{bmatrix} k_{21}g_1(t) \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ k_{N(N+1)}g_2(t) \end{bmatrix} \tag{2.18}$$

ile verilir. (2.7)' nin başlangıç şartından

$$b_i(0) = f(x_i), \quad (2 \leq i \leq N) \quad (2.19)$$

şeklinde belirlenebilir.

(2.16) denklemini bir sonlu fark metodu kullanarak çözeceğiz. Δt zaman adımı, \underline{b} vektörünün \underline{b}^j sonlu fark yaklaşımı, \underline{c}^j , \underline{d}^j vektörleri

$$\underline{b}^j \approx \underline{b}(j\Delta t), \quad \underline{c}^j = \underline{c}(j\Delta t), \quad \underline{d}^j = \underline{d}(j\Delta t)$$

şeklinde tanımlanırken (2.16)' nin zamana bağlı türevlerinin sonlu fark yaklaşımı

$$\frac{d}{dt} \underline{b} \approx \frac{1}{\Delta t} (\underline{b}^{j+1} - \underline{b}^j), \quad \frac{d}{dt} \underline{c} \approx \frac{1}{\Delta t} (\underline{c}^{j+1} - \underline{c}^j)$$

ile tanımlanır. (2.16) denkleminin türevsiz terimlerinin değerlerine t ve $t + \Delta t$ zamanlarında Ağırlıklı averaj ile yaklaşılır. Böylece (2.16) denklemi

$$\frac{1}{\Delta t} C (\underline{b}^{j+1} - \underline{b}^j) + K (\theta \underline{b}^{j+1} + (1-\theta) \underline{b}^j) = \frac{1}{\Delta t} (\underline{c}^{j+1} - \underline{c}^j) + \theta \underline{d}^{j+1} + (1-\theta) \underline{d}^j$$

şekline dönüşür. Burada $0 \leq \theta \leq 1$ ağırlık faktörüdür. $\theta = 0$, $\theta = 1/2$, $\theta = 1$ durumları sırasıyla açık (*explicit*), Crank-Nicolson, kapalı (*fully implicit*) sonlu fark metodlarına karşılık gelir.

Denklem basit bir düzenleme ile

$$D \underline{b}^{j+1} = E \underline{b}^j + \underline{c}^{j+1} - \underline{c}^j + \Delta t (\theta \underline{d}^{j+1} + (1-\theta) \underline{d}^j) \quad (2.20)$$

olur. Burada D ve E matrisleri sırasıyla

$$D = C + \theta \Delta t K, \quad E = C - (1-\theta) \Delta t K \quad (2.21)$$

şeklinde tanımlı simetrik, tridiagonal, pozitif tanımlı matrislerdir.

Her üç durumda da bilinmeyen \underline{b}^{j+1} ' i belirlemek için lineer denklem sistemi çözülmelidir.

$0 \leq \theta \leq 1$ herhangi bir değerin seçimi ile E bir regüler (*invertible*) matris olduğundan verilen $\underline{b}^j, \underline{b}^{j+1}$ ve uç noktadaki $g_1(t), g_2(t)$ sıcaklıklarını belirleyebiliriz. Böylece (2.19) ile tanımlanan \underline{b}^0 kullanılarak $\underline{b}^1, \underline{b}^2, \dots, \underline{b}^j$ değerleri ardışık olarak elde edilebilir. Buradan \underline{b}^j ve $b_i^j \approx b_i(j \Delta t)$ bileşenleri $U_h(x, j \Delta t)$ ' yi belirlemek için (2.11)' de yerine yazılır.

2.4.1 Örnek

$0 < x < 1$ sonlu bölgesinde $U_0 = 1$ başlangıç sıcaklığı ve $x = 0, x = 1$ de sınır sıcaklığı sıfır olan ısı iletimi denklemini çözmek için sonlu eleman metodunu kullanan bir algoritma tanımlayalım:

$$\begin{aligned} \frac{\partial U}{\partial t} &= \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} \\ U(x, 0) &= 1 \\ U(0, t) &= U(1, t) = 0 \end{aligned}$$

$h_i = x_{i+1} - x_i$ ($1 \leq i \leq N$) olmak üzere (2.14) ve (2.15) kullanılarak kapasitans ve stiffness matrisleri C ve K oluşturulur. Δt adımı ve θ tanımlanarak C ve K matrislerinden D ve E matrisleri bulunur. Sınır sıcaklığı sıfır olduğu için ($g_1(t) = g_2(t) = 0$) \underline{c}^j ve \underline{d}^j vektörleri sıfırdır ve (2.20) denklemini

$$D \underline{b}^{j+1} = E \underline{b}^j \quad (2.22)$$

olur veya D bir regüler (*invertible*) matris olduğundan

$$\underline{b}^{j+1} = D^{-1} E \underline{b}^j \quad (2.23)$$

olur. Genel olarak (2.22) denklem sistemini çözmek, (2.23)' ü çözmekten daha etkilidir. $U(x,t) = 1$ başlangıç şartından dolayı, \underline{b}^0 ' in $N-1$ bileşeninin hepsi tek olarak bellidir. (2.22)' yi veya (2.23)' ü çözerek \underline{b}^j ' yi buluruz ve bunları

$$U_h(x, j\Delta t) = \sum_{i=2}^N b_i^j \Phi_i(x)$$

denkleminde yerine yazılarak $U_h(x, j\Delta t)$ belirlenir. Burada b_i^j ($2 \leq i \leq N$) katsayıları \underline{b}^j ' nin $(i-1)$ ' inci bileşenidir.

$\Delta t = 0.00025$ ve $\Delta t = 0.00100$ iki farklı zaman artışı ve $\theta = 0, 1/2, 1$ için bu problemin sonlu eleman çözümü ile tam çözümü Tablo 2.1 de karşılaştırıldı. Problem 21 düğüm ve 20 eleman ile mesh oluşturularak çözüldü ($h = 0.05$). $\theta = 0$ ve $\Delta t = 0.00100$ için sonlu eleman çözümü kararlılık sınırlamasından dolayı anlamsızdır.

		$\Delta t = 0.00025$			$\Delta t = 0.00100$		
x	$U(x,t)$	$\theta = 1.0$	$\theta = 0.5$	$\theta = 0.0$	$\theta = 1.0$	$\theta = 0.5$	$\theta = 0.0$
0.0	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	-
0.1	0.1468	0.1463	0.1461	0.1459	0.1468	0.1461	-
0.2	0.2790	0.2782	0.2778	0.2775	0.2792	0.2778	-
0.3	0.3839	0.3828	0.3824	0.3819	0.3842	0.3824	-
0.4	0.4513	0.4500	0.4494	0.4489	0.4516	0.4494	-
0.5	0.4745	0.4731	0.4726	0.4720	0.4748	0.4726	-

Tablo 2.1. 2.4.1. örnek problemin 20 eleman ve 21 düğüm üzerinde θ ' nin üç farklı değeri ile Δt ' nin iki farklı değeri için elde edilen nümerik sonuçlar ile analitik çözümün karşılaştırılması. (- : Kararlılık kısıtlamasından nümerik sonuç elde edilemedi.)

Şimdi ısı denklemini aşağıdaki sınır sıcaklıkları ile göz önüne alıp, sonlu eleman yöntemini uygulamaya çalışalım.

$$\begin{aligned} -\frac{\partial U}{\partial x}(0,t) + \mu_0 U(0,t) &= U_0(t) \\ \frac{\partial U}{\partial x}(1,t) + \mu_1 U(1,t) &= U_1(t) \end{aligned} \quad (2.24)$$

(2.24) probleminin zayıf formu her $\Phi(x) \in H[0,1]$ ve her $t > 0$ için

$$\int_0^1 \left(\Phi(x) \frac{\partial U}{\partial t} + \frac{d\Phi}{dx} \frac{\partial U}{\partial x} \right) dx = \Phi(1)(U_1(t) - \mu_1 U(1,t)) + \Phi(0)(U_0(t) - \mu_0 U(0,t)) \quad (2.25)$$

dir. Bir önceki problemde olduğu gibi $\Omega_1, \Omega_2, \dots, \Omega_N$ elemanları, x_1, x_2, \dots, x_{N+1} düğümleri $\Phi_1(x), \Phi_2(x), \dots, \Phi_{N+1}(x)$ test (*shape*) fonksiyonları ile bir sonlu eleman mesh' i seçilir.

Yaklaşık çözümünün

$$U_h(x,t) = \sum_{i=1}^{N+1} b_i(t) \Phi_i(x) \quad (2.26)$$

formunda olduğu kabul edilir. Burada h en büyük elemanın uzunluğudur. Her $t > 0$ ve (2.5) formundaki bütün test fonksiyonları için

$$\int_0^1 \left(\Phi(x) \frac{\partial U_h}{\partial t} + \frac{d\Phi}{dx} \frac{\partial U_h}{\partial x} \right) dx = \Phi(1)(U_1(t) - \mu_1 U_h(1,t)) + \Phi(0)(U_0(t) - \mu_0 U_h(0,t)) \quad (2.27)$$

elde edilir. Buradan $b_i(t)$ ($1 \leq i \leq N+1$) fonksiyonları için (2.25) birinci mertebeden adi diferansiyel denklemlerin bir sistemi, yani

$$\sum_{j=1}^{N+1} \left(c_{ij} \frac{db_j}{dt} + k_{ij} b_j(t) \right) = \delta_{i(N+1)} (U_1(t) - \mu_1 \delta_{j(N+1)} b_j(t)) + \delta_{i1} (U_0(t) - \mu_0 \delta_{j1} b_j(t))$$

bulunur. Burada c_{ij} ve k_{ij} (2.13) ile verilir ve $\delta_{ij} = \begin{cases} 1, i = j \\ 0, i \neq j \end{cases}$ Kronecker deltasıdır.

Bu sistem $b_1(t)$ ve $b_{N+1}(t)$ de bilinmediğinden dolayı, $N+1$ bilinmeyenli $N+1$ denklemden oluşur. Böylece matris formunda

$$C \frac{d}{dt} \underline{b}(t) + K \underline{b}(t) = \underline{c}(t) \quad (2.28)$$

yazılabilir. Burada C ve K , $(N+1) \times (N+1)$ simetrik, pozitif tanımlı, tridiagonal matrisler olan kapasitans ve stiffness matrisleri

$$C = \begin{bmatrix} c_{11} & \cdots & c_{1(N+1)} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{(N+1)1} & \cdots & c_{(N+1)(N+1)} \end{bmatrix}, K = \begin{bmatrix} k_{11} + \mu_0 & k_{12} & \cdots & k_{1(N+1)} \\ k_{21} & k_{22} & \cdots & k_{2(N+1)} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ k_{N1} & \cdots & k_{NN} & k_{N(N+1)} \\ k_{(N+1)1} & \cdots & k_{(N+1)N} & k_{(N+1)(N+1)} + \mu_1 \end{bmatrix} \quad (2.29)$$

ile verilir. $N+1$ boyutlu $\underline{b}(t)$ ve $\underline{c}(t)$ vektörleri ise

$$\underline{b}(t) = \begin{bmatrix} b_1(t) \\ b_2(t) \\ \vdots \\ b_N(t) \\ b_{N+1}(t) \end{bmatrix}, \underline{c}(t) = \begin{bmatrix} U_0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ U_1 \end{bmatrix} \quad (2.30)$$

ile verilir.

Bir önceki problemde olduğu gibi (2.28)' e sonlu farklar uygulanırsa

$$D \underline{b}^{j+1} = E \underline{b}^j + \Delta t \theta \underline{c}^{j+1} + \Delta t (1 - \theta) \underline{c}^j \quad (2.31)$$

denklem sistemi elde edilir. Burada D ve E matrisleri, (2.29) ile verilen C ve K matrisleri cinsinden (2.21)' e benzer olarak ifade edilir. \underline{b}^j ve \underline{c}^j vektörleri ise

$$\underline{b}^j \approx \underline{b}(j\Delta t) \text{ ve } \underline{c}^j = c(j\Delta t) \quad (2.32)$$

ile verilir.

θ 'nın $1/2 \leq \theta \leq 1$ aralığındaki değeri, her Δt zaman adımı için bu aralıkta (2.31) kararlı olduğundan tercih edilir. (2.7) başlangıç şartından \underline{b}^0 başlangıç vektörü

$$\underline{b}_i^0 = f(x_i) \quad , \quad (1 \leq i \leq N+1) \quad (3.33)$$

şeklinde belirlenir.

Böylece \underline{b}^0 'ın kullanılması ile (2.31) çözülerek \underline{b}^j 'ler bulunabilir. Buradan da $U_h(x, j\Delta t)$ çözümü elde edilir.

2.4.2 Örnek

$0 \leq x \leq 1$ sonlu bölgesinde $U(x, t) = 1$ başlangıç sıcaklığı,

$$\frac{\partial U}{\partial x}(0, t) = 0$$

$$\frac{\partial U}{\partial x}(1, t) + U(1, t) = 0$$

Robbin sınır şartları ile verilen (2.1) ısı problemini çözmek için bir sonlu eleman metodu tanımlayalım.

Bu problem, $\mu_0 = 0, \mu_1 = 1, U_0(t) = 0, U_1(t) = 0$ ve $U(x, 0) = 1$ başlangıç şartı ile (2.27) problemidir. Daha önceden olduğu gibi sonlu eleman metodunu uygulamak için $x_i (1 \leq i \leq N)$ düğümleri ve bunlardan faydalanarak her bir elemanın uzunluğu $h_i = x_{i+1} - x_i (1 \leq i \leq N)$ tanımlanır. (2.14), (2.15) ve $\mu_0 = 0, \mu_1 = 1$ değerleri kullanılarak, (2.29) ile verilen kapasitans ve stiffness matrisleri C ve K teşkil edilir. Δt zaman adımının ve θ 'nın tanımlanması ile D ve E matrisleri tanımlanır. $U_0(t) = U_1(t) = 0$ olduğundan \underline{c}^j vektörü sıfırdır ve (2.31) denklemi

$$D\underline{b}^{j+1} = E\underline{b}^j \quad (2.34)$$

şekline indirgenir.

Başlangıç şartından dolayı \underline{b}^0 belli olduğundan (2.34) denklemini çözerek \underline{b}^j bulunur.

Aşağıdaki tabloda bu problemin tam çözümü ile $\theta = 0,1/2,1$ ve $\Delta t = 0.00025$, $\Delta t = 0.00100$ olmak üzere iki farklı zaman adımında sonlu eleman metodu ile elde edilen nümerik çözümleri karşılaştırıldı.

Burada $\theta < 1/2$ kararlılık sınırlamasından dolayı $\theta = 0$ ve $\Delta t = 0.00100$ için çözüm anlamsızdır [35].

		$\Delta t = 0.00025$			$\Delta t = 0.00100$		
x	$U(x,t)$	$\theta = 1.0$	$\theta = 0.5$	$\theta = 0.0$	$\theta = 1.0$	$\theta = 0.5$	$\theta = 0.0$
0.0	0.9931	0.9932	0.9933	0.9933	0.9930	0.9933	-
0.1	0.9918	0.9919	0.9920	0.9921	0.9918	0.9920	-
0.2	0.9878	0.9879	0.9880	0.9880	0.9878	0.9880	-
0.3	0.9804	0.9805	0.9805	0.9806	0.9804	0.9805	-
0.4	0.9684	0.9685	0.9685	0.9686	0.9684	0.9685	-
0.5	0.9505	0.9507	0.9507	0.9507	0.9507	0.9507	-
0.6	0.9552	0.9253	0.9253	0.9253	0.9254	0.9253	-
0.7	0.8908	0.8910	0.8909	0.8909	0.8912	0.8909	-
0.8	0.8462	0.8464	0.8463	0.8462	0.8466	0.8463	-
0.9	0.7905	0.7907	0.7906	0.7904	0.7910	0.7906	-
1.0	0.7236	0.7237	0.7236	0.7235	0.7240	0.7236	-

Tablo 2.2. 2.4.2. örnek problemin 20 eleman üzerinde θ ' nın üç, Δt ' nin iki değeri için elde edilen nümerik sonuçlar ile analitik çözümün karşılaştırılması. (- : Kararlılık kısıtlamasından nümerik sonuç elde edilemedi.)

BÖLÜM 3

Bu bölümde test problem olarak kullanılacak olan

$$\frac{\partial U}{\partial t} + U \frac{\partial U}{\partial x} = \nu \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} \quad (3.1)$$

Burgers' denkleminin analitik çözümü yapılacaktır.

3.1. Denklemin Analitik Çözümü

Burger's denklemini quasi-linear kısmi diferansiyel denklem olduğu için doğrudan analitik çözümünün bulunması ve bilinen nümerik çözüm metotlarının bu denkleme uygulanması oldukça güçtür. Fakat Burgers' denklemini bir dönüşüm yardımıyla lineer hale getirilip çözülebilen çok az sayıdaki non-lineer denklemlerden birisidir.

3.1.1. Hopf-Cole Dönüşümü

1950 yılında Hopf [15]

$$U = -2\nu \frac{\theta_x}{\theta} \quad (3.2)$$

şeklinde bir dönüşüm tanımladı. Burada $\theta(x,t)$;

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} = \nu \frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} \quad (3.3)$$

151 denkleminin bir çözümü ve $U(x,t)$ ' de (3.1) denkleminin çözümüdür. Hopf bu dönüşümle Burgers' denkleminin çözülebileceğini ifade etti. Daha sonra 1951' de

Cole [7] aşağıdaki teoremleri ifade ederek (3.3) ısı denklemi ile (3.1) Burgers' denklemi arasındaki ilişkiyi ispatlamış oldu:

3.1.1.1. Teorem:

$$\theta(x,t);$$

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} = v \frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2}$$

ısı denkleminin herhangi bir çözümü olsun. Bu durumda;

$$U(x,t) = -2v \frac{\theta_x}{\theta}$$

dir. Burada $U(x,t)$;

$$\frac{\partial U}{\partial t} + U \frac{\partial U}{\partial x} = v \frac{\partial^2 U}{\partial x^2}$$

Burgers' denkleminin çözümüdür.

İspat

$f = f(x,t)$ kendisi ve her mertebeden kısmi türevleri sürekli bir fonksiyon olmak üzere;

$$U(x,t) = f_x(x,t) \tag{3.4}$$

olsun. (3.4) denklemini (3.1)' de yerine yazılırsa,

$$f_{xt} + f_x f_{xx} = v f_{xxx} \tag{3.5}$$

elde edilir.

$f_{xt} = f_{tx}$ olduğu göz önünde bulundurularak, (3.5) denklemi x' e göre integre edilebilir. Böylece

$$\int f_{xt} dx + \int f_x f_{xx} dx = \int v f_{xxx} dx$$

$$f_t + \frac{1}{2} (f_x)^2 = v f_{xx} \quad (3.6)$$

olur.

$\theta(x, t)$, (3.3) denklemini sağlamak üzere;

$$f(x, t) = F[\theta(x, t)]$$

olsun. Bu durumda (3.6) denklemi;

$$\begin{aligned} F'(\theta)\theta_t + \frac{1}{2} [F'(\theta)\theta_x]^2 &= v \left\{ [F'(\theta)\theta_x]' \right\} \\ &= v [F''(\theta)\theta_x\theta_x + F'(\theta)\theta_{xx}] \\ &= v F''(\theta)\theta_x^2 + v F'(\theta)\theta_{xx} \end{aligned}$$

olur. (3.3) denklemi kullanırsa

$$\begin{aligned} F'(\theta)\theta_t + \frac{1}{2} [F'(\theta)\theta_x]^2 &= v F''(\theta)\theta_x^2 + v F'(\theta)\theta_{xx} \\ F'(\theta)v\theta_{xx} + \frac{1}{2} [F'(\theta)\theta_x]^2 &= v F''(\theta)\theta_x^2 + v F'(\theta)\theta_{xx} \end{aligned}$$

elde edilir. Gerekli düzenlemeler yapılırsa;

$$[F'(\theta)]^2 = 2v F''(\theta)$$

bulunur. $P(\theta) = F'(\theta)$ denilirse

$$[F'(\theta)]^2 = 2vF''(\theta)$$

$$[P(\theta)]^2 = 2vP'(\theta)$$

$$\frac{dP}{d\theta} = \frac{1}{2v}[P(\theta)]^2$$

$$\frac{dP}{P^2} = \frac{1}{2v}d\theta$$

$$-P^{-1} = \frac{1}{2v}(\theta + c)$$

$$P^{-1} = -\frac{1}{2v}(\theta + c)$$

$$P = -2v(\theta + c)^{-1}$$

$$\frac{dF}{d\theta} = -2v(\theta + c)^{-1}$$

$$dF = -2v(\theta + c)^{-1}d\theta$$

$$f(x,t) = F(\theta) = -2v \ln(\theta + c) + c_1$$

elde edilir. Son olarak (3.4) kullanılır ve $c = 0$ alınırsa;

$$U(x,t) = [-2v \ln \theta + c_1]_x$$

yani

$$U(x,t) = -2v \frac{\theta_x}{\theta}$$

dır. Böylece teoremin ispatı tamamlanmış olur.

Şimdi $\theta(x,t)$ başlangıç değerini bulmak için, (3.2) dönüşümünde $x = \xi$ değişken değişimiyle 0 ' dan x ' e kadar integral alınırsa

$$\begin{aligned} \int_0^x U(\xi,t) d\xi &= -2v \ln \theta(\xi,t) \Big|_0^x \\ &= -2v [\ln \theta(x,t) - \ln \theta(0,t)] \\ &= -2v \ln \left\{ \frac{\theta(x,t)}{\theta(0,t)} \right\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
-(2\nu)^{-1} \int_0^x U(\xi, t) d\xi &= \ln \left(\frac{\theta(x, t)}{\theta(0, t)} \right) \\
\exp \left\{ -(2\nu)^{-1} \int_0^x U(\xi, t) d\xi \right\} &= \frac{\theta(x, t)}{\theta(0, t)} \\
\theta(x, t) &= \theta(0, t) \exp \left\{ -(2\nu)^{-1} \int_0^x U(\xi, t) d\xi \right\}
\end{aligned} \tag{3.7}$$

bulunur. Kabul edelim ki $U(x, t)$ ' nin başlangıç değeri

$$U(x, 0) = U_0(x) \tag{3.8}$$

olsun. Bu durumda

$$\theta(x, 0) = \theta_0(x) = c_0 \exp \left\{ -(2\nu)^{-1} \int_0^x U_0(\xi) d\xi \right\} \tag{3.9}$$

elde edilir. Burada $c_0 = \theta(0, 0)$ ' dir. Ancak (3.2)' den dolayı c_0 değeri (3.1) için elde edilen çözüm üzerinde etkili değildir.

3.1.1.2. Teorem:

$$\frac{\partial U}{\partial t} + U \frac{\partial U}{\partial x} = \nu \frac{\partial^2 U}{\partial x^2}$$

Burgers' denkleminin

$$U(x, t) = -2\nu \frac{\theta_x}{\theta}$$

ile verilen çözümü tektir.

İspat

(3.1)' in herhangi bir $U(x,t)$ çözümü (3.7) ile belli olan bir $\theta(x,t)$ fonksiyonu tanımlar ki bu $\theta(x,t)$ fonksiyonu (3.3) denklemini sağlar.

Kabul edelim ki (3.1) denkleminin $U(x,t)$ ve $V(x,t)$ gibi iki çözümü olsun. Başlangıç şartından dolayı $U(x,0) = V(x,0)$ ' dir. $\theta(x,t)$ ' nin başlangıç değeri, (3.9) ile verilen bir c_0 sabitine bağlı olarak verilir.

$\theta(x,0)$ yalnızca $U(x,0) = V(x,0)$ 'a bağlı olduğundan $\theta(x,0)$ her bir durumda c_0 sabitine kadar aynıdır. Aynı şekilde sınır değerleri için her iki çözüm aynı olduğundan, $\theta(x,t)$ çözümü aynıdır. Fakat $U(x,t)$ ve $V(x,t)$ (3.2)' den elde edilirler. Böylece;

$$U(x,t) = V(x,t)$$

olur.

3.1.2. Analitik Çözüm

$$U_t + UU_x = vU_{xx}$$

$$U(x,0) = U_0(x) = \sin(\pi x) \quad (3.10)$$

$$U(0,t) = U(1,t) = 0 \quad (3.11)$$

olarak verilen problemin analitik çözümünü bulalım.

Bu problem; $D = \{(x,t): 0 \leq x \leq 1, 0 \leq t \leq T\}$ bölgesi üzerinde tanımlıdır. Analitik çözüm (3.3) ısı denklemine karşılık gelen (3.2) dönüşümü ile elde edilir. (3.9) ve (3.10)' un kullanılması ile $\theta(x,t)$ ' nin başlangıç şartı

$$\theta(x,0) = \theta_0(x) = c_0 \exp\left\{- (2v)^{-1} \int_0^x U_0(\xi) d\xi\right\}$$

$$\begin{aligned}
\theta(x,0) = \theta_0(x) &= c_0 \exp\left\{- (2\nu)^{-1} \int_0^x \sin(\pi\xi) d\xi\right\} \\
&= c_0 \exp\left\{- (2\nu)^{-1} \frac{1}{\pi} [-\cos(\pi\xi)]_0^x\right\} \\
&= c_0 \exp\left\{- (2\nu\pi)^{-1} [1 - \cos(\pi x)]\right\}
\end{aligned} \tag{3.12}$$

şeklinde bulunur ve (3.2)' nin kullanılması ile $\theta(x,t)$ için sınır şartları;

$$\theta_x(0,t) = \theta_x(1,t) = 0$$

olarak bulunur. Böylece (3.1), (3.10), (3.11) problemi

$$\begin{aligned}
\theta_t &= \nu\theta_{xx} \\
\theta_0(x) = \theta(x,0) &= c_0 \exp\left\{- (2\nu\pi)^{-1} [1 - \cos(\pi x)]\right\} \\
\theta_x(0,t) = \theta_x(1,t) &= 0
\end{aligned} \tag{3.13}$$

haline dönüşür.

(3.3) ısı denkleminin bir çözümü;

$$\theta(x,t) = X(x)T(t)$$

olsun.

$$\frac{\partial\theta}{\partial x} = X'(x)T(t)$$

$$\frac{\partial^2\theta}{\partial x^2} = X''(x)T(t)$$

$$\frac{\partial\theta}{\partial t} = X(x)T'(t)$$

eşitlikleri (3.3) ısı denkleminde yerine yazılırsa

$$X(x)T'(t) = \nu X''(x)T(t)$$

elde edilir. Burada gerekli düzenlemeler yapılırsa

$$\frac{X''}{X} = \frac{1}{v} \frac{T'}{T} = -\lambda^2 ; \lambda > 0 \text{ (sabit)}$$

ve buradan

$$X'' + \lambda^2 X = 0$$

$$T' + \lambda^2 v T = 0$$

şeklinde iki adi diferansiyel denklem bulunur. Bunların çözümleri sırasıyla

$$X = A_1 \cos(\lambda x) + B_1 \sin(\lambda x)$$

$$T = ce^{-\lambda^2 vt}$$

dır.

$$\theta(x, t) = X(x)T(t)$$

olduğundan

$$\theta(x, t) = [A_1 \cos(\lambda x) + B_1 \sin(\lambda x)] [ce^{-\lambda^2 vt}]$$

dir. $cA_1 = A$, $cB_1 = B$ olmak üzere;

$$\theta(x, t) = e^{-\lambda^2 vt} [A \cos(\lambda x) + B \sin(\lambda x)]$$

elde edilir. Sınır şartlarının uygulanmasıyla;

$$\frac{\partial \theta}{\partial x} = e^{-\lambda^2 vt} [-A\lambda \sin(\lambda x) + B\lambda \cos(\lambda x)]$$

$$\frac{\partial \theta}{\partial x}(0, t) = e^{-\lambda^2 vt} (B\lambda) = 0$$

bulunur. Bu ise

$$B = 0$$

olmasını gerektirir. Böylece

$$\theta(x,t) = Ae^{-\lambda^2 vt} \cos(\lambda x)$$

olur. Diğer sınır şartının kullanılmasıyla

$$\frac{\partial \theta}{\partial x} = -A\lambda e^{-\lambda^2 vt} \sin(\lambda x)$$

$$\frac{\partial \theta}{\partial x}(1,t) = -A\lambda e^{-\lambda^2 vt} \sin(\lambda) = 0$$

bulunur. Bu ise

$$\sin \lambda = 0$$

olmasını gerektirir. Böylece

$$\sin(\lambda) = \sin(n\pi)$$

$$\lambda = n\pi, n=0,1,2,\dots$$

dır. Buradan

$$\theta_n(x,t) = A_n e^{-v n^2 \pi^2 t} \cos(n\pi x) \quad (3.14)$$

denklemini elde edilir. (3.14) denklemini sınır şartlarını sağlar. Başlangıç şartını sağlaması için;

$$\theta(x,t) = A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} e^{-\pi^2 n^2 vt} A_n \cos(n\pi x)$$

olmalıdır. Böylece analitik çözüm için;

$$\theta(x,t) = A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} e^{-n^2\pi^2vt} A_n \cos(n\pi x) \quad (3.15)$$

olarak elde edilir. Burada A_0, A_n fourier katsayılarıdır ve bu katsayılar alışılmış anlamda

$$A_0 = \int_0^1 \theta_0(x) dx = c_0 \int_0^1 \exp\left\{-(2\pi v)^{-1}[1 - \cos(\pi x)]\right\} dx \quad (3.16)$$

$$A_n = 2c_0 \int_0^1 \exp\left\{-(2\pi v)^{-1}[1 - \cos(\pi x)]\right\} \cos(n\pi x) dx \quad (3.17)$$

şeklinde hesaplanır. Böylece (3.2)' yi kullanarak problemin tam çözümü;

$$U(x,t) = \frac{2\pi v \sum_{n=1}^{\infty} n e^{-n^2\pi^2vt} A_n \sin(n\pi x)}{A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} e^{-n^2\pi^2vt} A_n \cos(n\pi x)}$$

$$U(x,t) = \frac{2\pi v \sum_{n=1}^{\infty} n e^{-n^2\pi^2vt} A_n \sin(n\pi x)}{\sum_{n=0}^{\infty} e^{-n^2\pi^2vt} A_n \cos(n\pi x)} \quad (3.18)$$

olarak elde edilir.

BÖLÜM 4

4.1. Sonlu Eleman Metodunun Model Probleme Uygulanması

$$U_t + UU_x = \nu U_{xx}$$

ile verilen Burgers' denklemini

$$U(x,0) = \text{Sin}(\pi x)$$

$$U(0,t) = U(1,t) = 0$$

başlangıç ve sınır şartları ile göz önüne alınsın. Bölüm 3' de verilen

$$U = -2\nu(\theta_x / \theta) \quad (4.1)$$

Hopf-Cole dönüşümü uygulanarak model problem

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} = \nu \frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2}$$

$$\theta(x,0) = c_0 \exp\left\{-(2\nu\pi)^{-1} [1 - \text{Cos}(\pi x)]\right\}$$

$$\frac{\partial \theta}{\partial x}(0,t) = \frac{\partial \theta}{\partial x}(1,t) = 0$$

lineer ısı problemine dönüştürülür. 3.1.1.1. Teorem'i gereğince $\theta(x,t)$ lineer ısı denkleminin bir çözümü olmak üzere, (4.1) denklemindeki $U(x,t)$ model problemin çözümüdür ve 3.1.1.2. Teorem'i gereğince tek olarak bellidir.

Elde edilen bu ısı probleminin sonlu eleman metodu ile nümerik çözümünü elde etmek için $\Phi(x) \in H[0,1]$ test fonksiyonları seçilerek denklem bu fonksiyonlarla çarpılır ve $x = 0$ ' dan $x = 1$ ' e kadar integralini alınır. Böylece

$$\int_0^1 \Phi(x) \left(\frac{\partial \theta}{\partial t} - v \frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} \right) dx = 0$$

elde edilir. Kısmi integrasyon yoluyla

$$\int_0^1 \left(\Phi(x) \frac{\partial \theta}{\partial t} + v \frac{\partial \theta}{\partial x} \frac{d\Phi}{dx} \right) dx = v \left\{ \Phi(1) \frac{\partial \theta}{\partial x}(1,t) - \Phi(0) \frac{\partial \theta}{\partial x}(0,t) \right\} \quad (4.2)$$

bulunur. (4.2) denklemi lineer ısı denkleminin zayıf formudur. $(N+1)$ tane $\{\Psi_1(x), \Psi_2(x), \dots, \Psi_{N+1}(x)\}$ trial baz fonksiyonunun bir lineer birleşimi olarak

$$\tilde{\theta}(x,t) = \sum_{i=1}^{N+1} b_i(t) \Psi_i(x) \quad (4.3)$$

şeklinde yazılan $\tilde{\theta}(x,t)$, (4.2)' nin bir yaklaşık çözümü olsun.

Burada $b_i(t)$ ($1 \leq i \leq N+1$) keyfi reel sabitlerdir. Aynı uzaydan $(N+1)$ tane test (*shape*) baz fonksiyonunun $\{\Phi_1(x), \Phi_2(x), \dots, \Phi_{N+1}(x)\}$ bir sonlu lineer bağımsız cümlesi seçilsin. Burada her bir $\Phi_i(x) \in H[0,1]$, ($1 \leq i \leq N+1$)' dir. Bölüm 2' de belirtildiği gibi

$$\Psi_i(x) = \Phi_i(x), \quad 1 \leq i \leq N+1$$

olarak alınması genelliği bozmaz. Böylece (4.3) ile birlikte (4.2) denklemi

$$\int_0^1 \left(\Phi(x) \frac{\partial \tilde{\theta}}{\partial t} + v \frac{\partial \tilde{\theta}}{\partial x} \frac{d\Phi}{dx} \right) dx = v \left\{ \Phi(1) \frac{\partial \tilde{\theta}}{\partial x}(1,t) - \Phi(0) \frac{\partial \tilde{\theta}}{\partial x}(0,t) \right\} \quad (4.4)$$

olur. Her $\Phi(x)$ test fonksiyonu $\Phi_i(x)$ ($1 \leq i \leq N+1$) test baz fonksiyonlarının lineer birleşimi olarak

$$\Phi(x) = \sum_{i=1}^{N+1} a_i \Phi_i(x)$$

şeklinde yazılabileceğinden (4.4) denklemini $b_i(t)$ ($1 \leq i \leq N+1$) bilinmeyenleri için $(N+1)$ tane bilinmeyen lineer birinci mertebeli diferansiyel denklemden oluşan bir sisteme dönüştürülür. Burada $\Phi_i(x)$ ($1 \leq i \leq N+1$), bölüm 2' de (2.6) denklemleri ile tanımlanan test fonksiyonları ve $a_i(t)$ ($1 \leq i \leq N+1$) keyfi reel sayılardır.

Eğer problemin sınır şartları (4.4)' e uygulanırsa

$$\int_0^1 \left(\Phi(x) \frac{\partial \theta}{\partial t} + v \frac{\partial \theta}{\partial x} \frac{d\Phi}{dx} \right) dx = 0 \quad (4.5)$$

elde edilir. $0 = x_1, x_2, \dots, x_N, x_{N+1} = 1$ olmak üzere uzunlukları

$$h_i = x_{i+1} - x_i, 1 \leq i \leq N$$

olan Ω_i elemanlarını göz önüne alalım. Bu uzunlukların en büyüğü h olmak üzere, teorik olarak $h \rightarrow 0$ olursa

$$\theta_h(x, t) = \sum_{i=1}^{N+1} b_i(t) \Phi_i(x) \quad (4.6)$$

şeklinde tanımlanan yaklaşık çözümün (4.5)' in çözümü olan $\theta(x, t)$ ' ye yakınsayacağı açıktır.

Böylece (4.6)' nın (4.5)' de yazılması ile

$$\int_0^1 \left(\Phi(x) \frac{\partial \theta_h}{\partial t}(x, t) + v \frac{d\Phi}{dx} \frac{\partial \theta_h}{\partial x}(x, t) \right) dx = 0 \quad (4.7)$$

elde edilir.

Buradan

$$\sum_{i=1}^{N+1} \sum_{j=1}^{N+1} a_i \left(\frac{db_j}{dt} \int_0^1 \Phi_i(x) \Phi_j(x) dx \right) = -v \sum_{i=1}^{N+1} \sum_{j=1}^{N+1} a_i \left(b_j \int_0^1 \Phi'_i(x) \Phi'_j(x) dx \right)$$

olur ve biraz daha düzenlenirse $b_j(t)$ ($1 \leq j \leq N+1$) bilinmeyenlerine bağlı ($N+1$) tane birinci mertebeden adi diferansiyel denklemden oluşan

$$\sum_{j=1}^{N+1} c_{ij} \frac{db_j}{dt} = -v \sum_{j=1}^{N+1} b_j k_{ij} \quad (4.8)$$

sistemi bulunur. Burada c_{ij} ve k_{ij} sırasıyla

$$c_{ij} = \int_0^1 \Phi_i(x) \Phi_j(x) dx$$

$$k_{ij} = \int_0^1 \Phi_i'(x) \Phi_j'(x) dx$$

şeklinde tanımlanır. (2.6) denklemleriyle tanımlanan $\Phi_i(x)$ ($1 \leq i \leq N+1$) fonksiyonları ile, c_{ij} ve k_{ij} ($1 \leq i, j \leq N+1$) açık olarak (2.14) ve (2.15) denklemleri ile çakışır.

(4.8) denklemi

$$C \frac{d}{dt} \underline{b}(t) + vK \underline{b}(t) = 0 \quad (4.9)$$

şeklinde matris formunda yazılabilir. Burada C ve K matrisleri $(N+1) \times (N+1)$ simetrik pozitif tanımlı tridiagonal matrisler olup sırasıyla

$$C = \begin{bmatrix} c_{11} & \cdots & c_{1(N+1)} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{(N+1)1} & \cdots & c_{(N+1)(N+1)} \end{bmatrix}, K = \begin{bmatrix} k_{11} & \cdots & k_{1(N+1)} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ k_{(N+1)1} & \cdots & k_{(N+1)(N+1)} \end{bmatrix} \quad (4.10)$$

ve $\underline{b}(t)$ vektörü de

$$\underline{b}(t) = \begin{bmatrix} b_1(t) \\ b_2(t) \\ \vdots \\ b_{(N+1)}(t) \end{bmatrix} \quad (4.11)$$

şeklinde tanımlıdır.

(4.9) denklemi bir sonlu fark metodu kullanılarak çözülebilir. Buna göre Δt zaman adımı olmak üzere \underline{b}^j vektörünün sonlu fark yaklaşımı

$$\underline{b}^j \approx \underline{b}(j\Delta t)$$

olarak tanımlanırken (4.9) denkleminin zamana bağlı türevlerinin sonlu fark yaklaşımı

$$\frac{d}{dt} \underline{b} \approx \frac{1}{\Delta t} (\underline{b}^{j+1} - \underline{b}^j)$$

ile tanımlanır. Bu durumda (4.9) denkleminin ağırlıklı averaj yaklaşımı

$$\frac{1}{\Delta t} C (\underline{b}^{j+1} - \underline{b}^j) + vK (\theta \underline{b}^{j+1} + (1-\theta) \underline{b}^j) = 0$$

dır. Burada θ ağırlık faktörü olup $0 \leq \theta \leq 1$ dir. $\theta = 0, \theta = 1/2, \theta = 1$ durumları sırasıyla açık (*explicit*), Crank-Nicolson, kapalı (*fully implicit*) metodlarına karşılık gelir.

Bu denklem basit bir düzenleme ile

$$D \underline{b}^{j+1} = E \underline{b}^j \quad (4.12)$$

olur. Burada D ve E sırasıyla,

$$D = C + v\theta \Delta t K \quad , \quad E = C - v(1-\theta) \Delta t K$$

$$\lambda_{\max}^i = \frac{4 - 12(1 - \theta)r + 2(1 + 6(1 - \theta)r) \cos \frac{s\pi}{N+2}}{4 + 12\theta r + 2(1 - 6\theta r) \cos \frac{s\pi}{N+2}} \quad 1 \leq i \leq N+1$$

olarak elde edilir. Böylece yöntem, eğer $0 \leq \theta < 1/2$ ise $0 < r < \frac{1}{6(1-\theta)}$ için ve $1/2 \leq \theta \leq 1$ ise her $r > 0$ için (4.12) kararlıdır.

4.3. Nümerik Sonuç Ve Tartışma

Pentium 200 MMX bilgisayarda Microsoft Fortran derleyici kullanılarak, sonlu eleman metodunun verilen model probleme uygulanması ile elde edilen nümerik çözümlerle analitik çözümler karşılaştırıldı. Tablo 4.1.' de $\theta=0$, $\nu=1$, $\Delta t=0.00001$, $t_{\max}=0.1$ olmak üzere N^7 nin dört farklı seçimi için elde edilen nümerik çözümler ile analitik çözümler kararlılık kısıtlamasına bağlı kalmak koşulu ile karşılaştırıldı ve iyi sonuçlar elde edildi. Benzer şekilde $\theta=0.5$ ve $\theta=1$ için aynı şartlar altında ($\Delta t=0.00001$, $t_{\max}=0.1$, $\nu=1$) nümerik çözümler ile analitik çözümler karşılaştırıldı (Tablo 4.2., Tablo 4.3.) ve θ' nin her üç değerinde de, küçük h değerleri için aralıklarda daha iyi sonuçlar elde edildiği gözlemlendi. θ' nin her üç değeri için, $\nu \geq 0.004$ olmak üzere elde edilen nümerik çözümler yine $\theta=0$ için elde edilen kararlılık kısıtlamasına bağlı kalmak koşulu ile parabolik denklemin yapısının değişmediği görüldü (Şekil 4.5- Şekil 4.13). $\nu < 0.004$ için verilen parabolik denklemin yapısının değiştiği görüldü (Şekil 4.14).

x	Nümerik Çözüm				Analitik Çözüm
	$N=20$	$N=40$	$N=80$	$N=100$	
0.1	0.10969	0.11038	0.11031	0.10947	0.10954
0.2	0.20977	0.21126	0.21076	0.21003	0.20979
0.3	0.29101	0.29323	0.29283	0.29227	0.29190
0.4	0.34601	0.34868	0.34865	0.34823	0.34792
0.5	0.36777	0.37149	0.37200	0.37169	0.37158
0.6	0.35358	0.35798	0.35887	0.35886	0.35905
0.7	0.30381	0.30828	0.30942	0.30953	0.30991
0.8	0.22257	0.22615	0.22729	0.22737	0.22782
0.9	0.11756	0.11967	0.12028	0.12041	0.12069

Tablo 4.1. $\theta=0$, $\nu=1$, $\Delta t=0.00001$, $t_{max}=0.1$ için elde edilen nümerik çözümler ile analitik çözümlerin karşılaştırılması.

x	Nümerik Çözüm				Analitik Çözüm
	$N=20$	$N=40$	$N=80$	$N=100$	
0.1	0.10976	0.11032	0.10966	0.10989	0.10954
0.2	0.20971	0.21121	0.21032	0.21040	0.20979
0.3	0.29076	0.29307	0.29250	0.29263	0.29190
0.4	0.34535	0.34858	0.34841	0.34850	0.34792
0.5	0.36721	0.37156	0.37187	0.37202	0.37158
0.6	0.35325	0.35783	0.35879	0.35899	0.35905
0.7	0.30359	0.30832	0.30938	0.30961	0.30991
0.8	0.22246	0.22617	0.22724	0.22743	0.22782
0.9	0.11757	0.11959	0.12033	0.12041	0.12069

Tablo 4.2. $\theta=0.5$, $\nu=1$, $\Delta t=0.00001$, $t_{max}=0.1$ için elde edilen nümerik çözümler ile analitik çözümlerin karşılaştırılması.

x	Nümerik Çözüm				Analitik Çözüm
	$N=20$	$N=40$	$N=80$	$N=100$	
0.1	0.10911	0.10972	0.10989	0.10998	0.10954
0.2	0.20858	0.21025	0.21045	0.21050	0.20979
0.3	0.28930	0.29243	0.29273	0.29273	0.29190
0.4	0.34402	0.34814	0.34858	0.34865	0.34792
0.5	0.36645	0.37105	0.37195	0.37199	0.37158
0.6	0.35256	0.35772	0.35900	0.35906	0.35905
0.7	0.30320	0.30817	0.30951	0.30965	0.30991
0.8	0.22227	0.22612	0.22734	0.22744	0.22782
0.9	0.11754	0.11966	0.12038	0.12036	0.12069

Tablo 4.3. $\theta=1$, $\nu=1$, $\Delta t=0.00001$, $t_{max}=0.1$ için elde edilen nümerik çözümler ile analitik çözümlerin karşılaştırılması

Tablo 4.4.' de $\nu=0.1$, $h = 0.0125$, $\Delta t = 0.0001$ ve θ ' nın her üç değeri için farklı zaman adımlarında elde edilen nümerik çözümler ile analitik çözümlerin karşılaştırıldı. Analitik çözümler ile nümerik çözümlerin uyum içerisinde olduğu gözlemlendi.

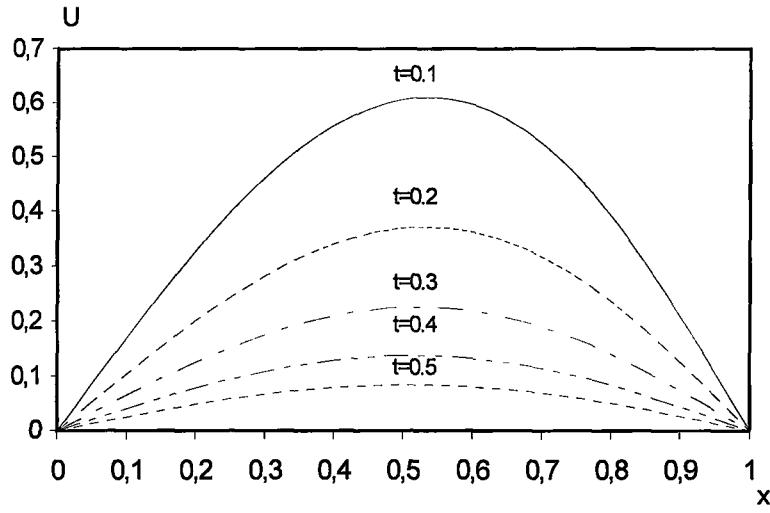
x	t_{max}	Nümerik Çözüm			Analitik Çözüm
		$\theta = 0$	$\theta = 0.5$	$\theta = 1$	
0.25	0.4	0.31420	0.31420	0.31429	0.30889
	0.6	0.24368	0.24368	0.24373	0.24074
	0.8	0.19756	0.19753	0.19758	0.19568
	1.0	0.16391	0.16387	0.16391	0.16256
	3.0	0.02742	0.02740	0.02743	0.02720
0.5	0.4	0.57629	0.57630	0.57636	0.56963
	0.6	0.45164	0.45165	0.45169	0.44721
	0.8	0.36243	0.36241	0.36245	0.35924
	1.0	0.29437	0.29433	0.29437	0.29192
	3.0	0.04051	0.04053	0.04057	0.04021
0.75	0.4	0.62603	0.62598	0.62592	0.62544
	0.6	0.49039	0.49038	0.49034	0.48721
	0.8	0.37716	0.37713	0.37713	0.37392
	1.0	0.29019	0.29014	0.29016	0.28747
	3.0	0.03000	0.03002	0.01334	0.02977

Tablo 4.4. $\nu=0.1$, $h = 0.0125$, $\Delta t = 0.0001$ için farklı zaman adımlarında elde edilen nümerik çözümler ile analitik çözümlerin karşılaştırılması.

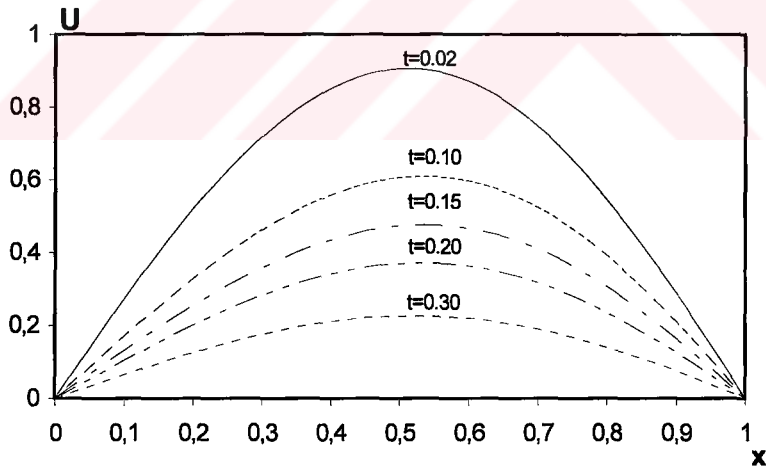
Tablo 4.5.' de $\nu=0.01$, $h = 0.005$, $\Delta t = 0.00025$ ve θ' nın her üç değeri için farklı zaman adımlarında elde edilen nümerik çözümler ile analitik çözümlerin karşılaştırıldı. Analitik çözümler ile nümerik çözümlerin uyum içerisinde olduğu gözlemlendi.

x	t_{max}	Nümerik Çözüm			Analitik Çözüm
		$\theta = 0$	$\theta = 0.5$	$\theta = 1$	
0.25	0.4	0.34843	0.34837	0.34817	0.34191
	0.6	0.27333	0.27332	0.27327	0.26896
	0.8	0.22452	0.22453	0.22454	0.22148
	1.0	0.19040	0.19041	0.19045	0.18819
	3.0	0.07545	0.07545	0.07547	0.07511
0.5	0.4	0.67128	0.67049	0.66741	0.66071
	0.6	0.53692	0.53645	0.53458	0.52942
	0.8	0.44467	0.44439	0.44326	0.43914
	1.0	0.37862	0.37845	0.37776	0.37442
	3.0	0.15090	0.15088	0.15086	0.15018
0.75	0.4	0.92534	0.92382	0.91781	0.91026
	0.6	0.77982	0.77836	0.77260	0.76724
	0.8	0.65666	0.65563	0.65159	0.64740
	1.0	0.56298	0.56229	0.55955	0.55605
	3.0	0.22599	0.22593	0.22576	0.22481

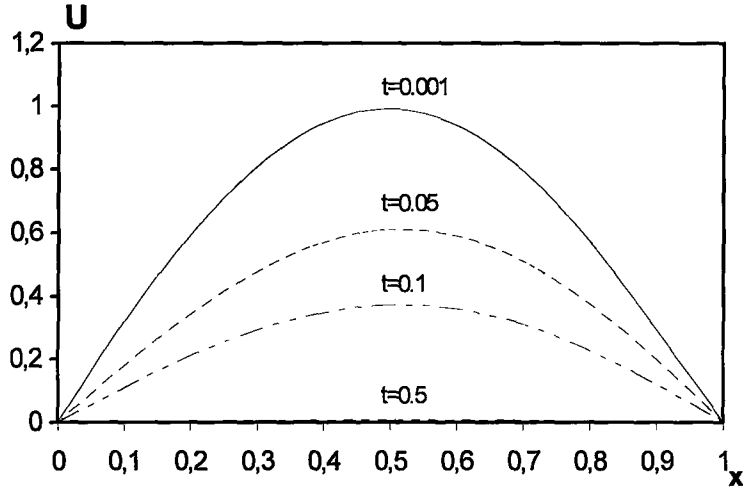
Tablo 4.5. $\nu=0.01$, $h = 0.005$, $\Delta t = 0.00025$ için farklı zaman adımlarında elde edilen nümerik çözümler ile analitik çözümlerin karşılaştırılması



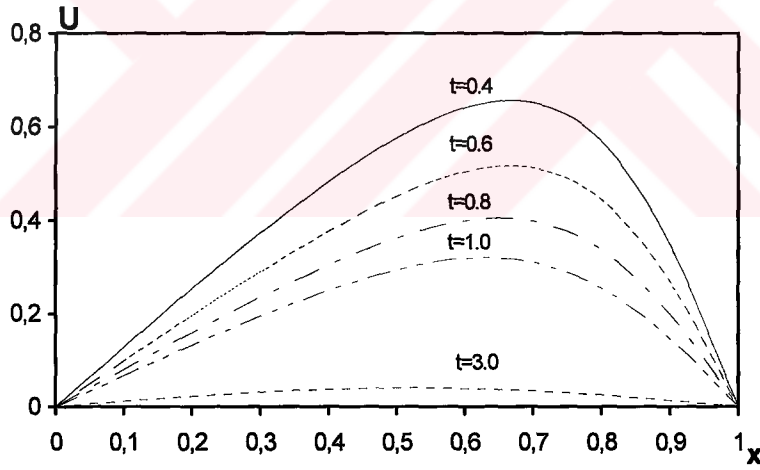
Şekil 4.1. $v=0.5$, $h=0.01$, $\Delta t = 0.00001$ için farklı zaman adımlarında elde edilen nümerik sonuçlar



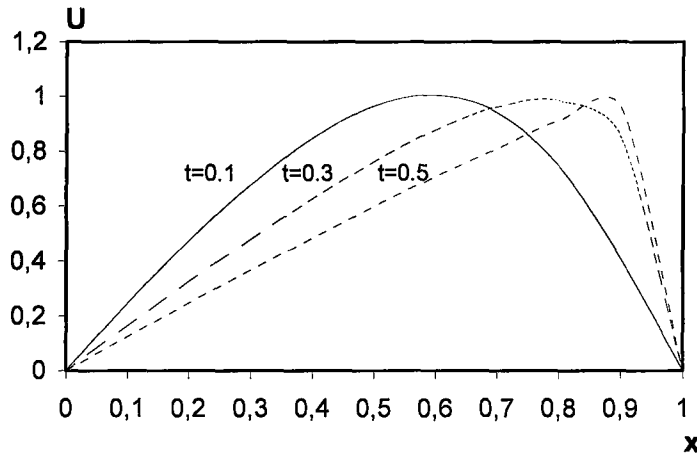
Şekil 4.2. $v=0.5$, $h=0.005$, $\Delta t = 0.00001$ için farklı zaman adımlarında elde edilen nümerik sonuçlar



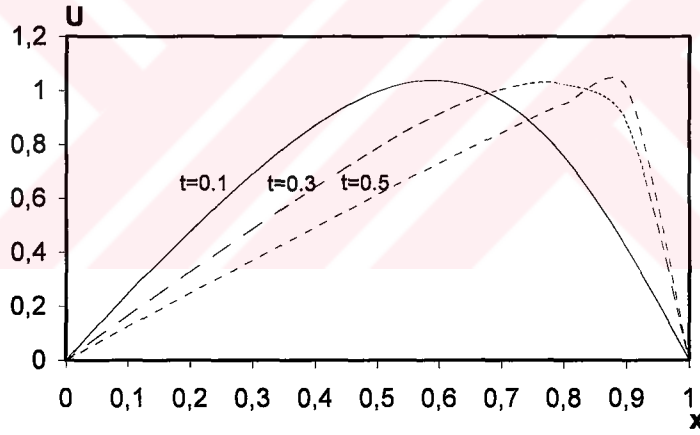
Şekil 4.3. $\nu=1$, $h=0.005$, $\Delta t = 0.0000025$ için farklı zaman adımlarında elde edilen nümerik sonuçlar



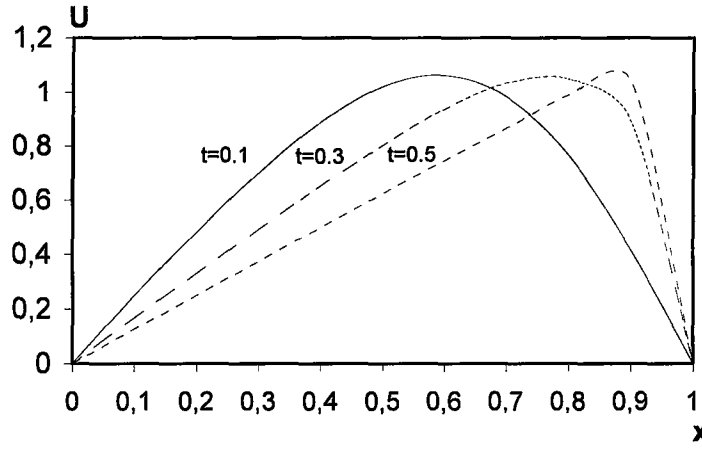
Şekil 4.4. $\nu=0.1$, $h=0.0125$, $\Delta t = 0.001$ için farklı zaman adımlarında elde edilen nümerik sonuçlar



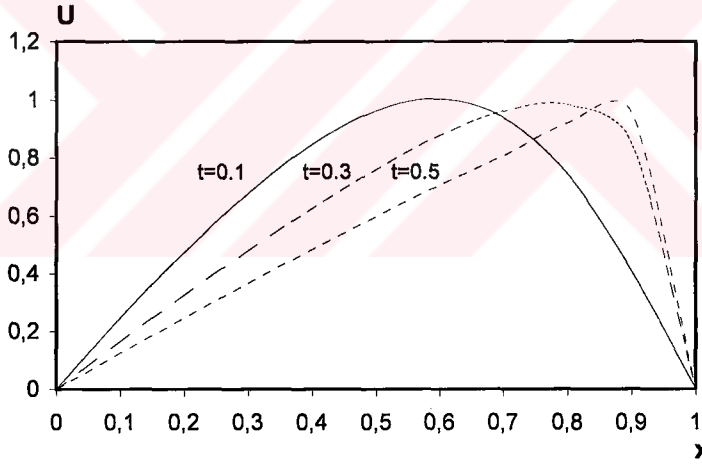
Şekil 4.5. $\nu=0.009$, $h=0.005$, $\Delta t =0.0002$, $\theta=0$ için farklı zaman adımlarında elde edilen nümerik çözümler.



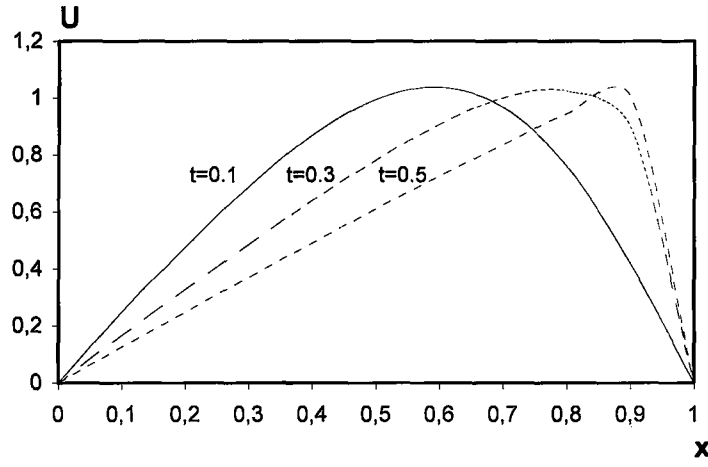
Şekil 4.6. $\nu=0.005$, $h=0.005$, $\Delta t =0.0005$, $\theta=0$ için farklı zaman adımlarında elde edilen nümerik çözümler



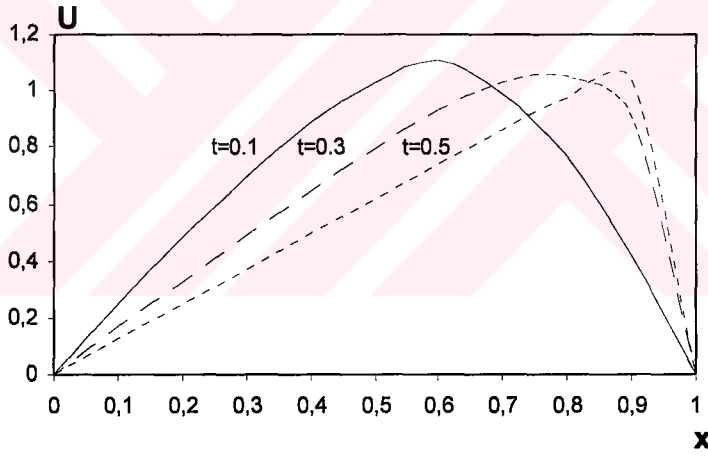
Şekil 4.7. $\nu=0.004$, $h=0.005$, $\Delta t = 0.0005$, $\theta=0$ için farklı zaman adımlarında elde edilen nümerik çözümler



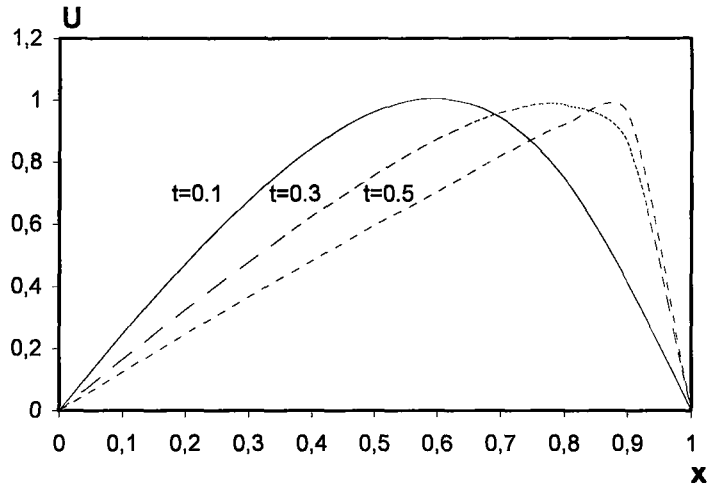
Şekil 4.8. $\nu=0.009$, $h=0.005$, $\Delta t = 0.0005$, $\theta=0.5$ için farklı zaman adımlarında elde edilen nümerik çözümler



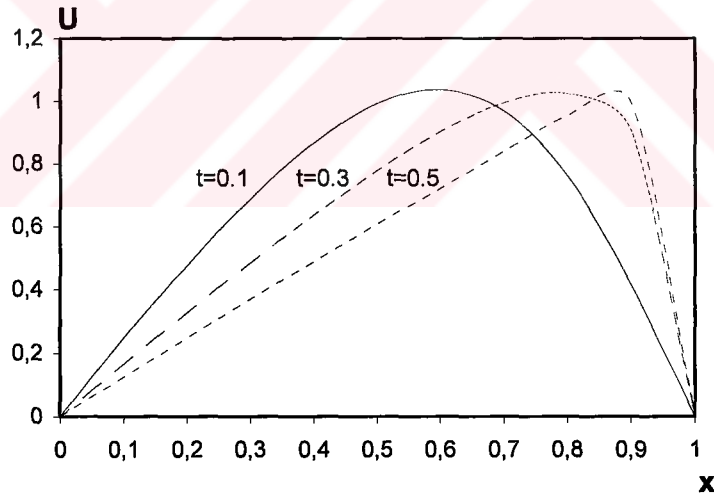
Şekil 4.9. $\nu=0.005$, $h=0.005$, $\Delta t = 0.0005$, $\theta=0.5$ için farklı zaman adımlarında elde edilen nümerik çözümler



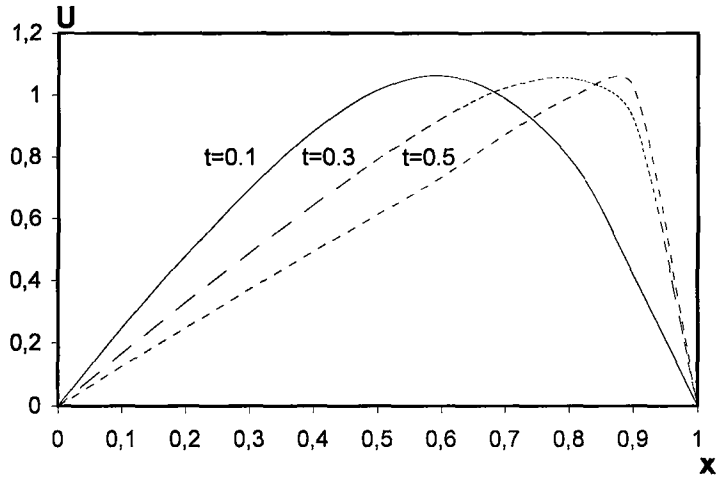
Şekil 4.10. $\nu=0.004$, $h=0.005$, $\Delta t = 0.0005$, $\theta=0.5$ için farklı zaman adımlarında elde edilen nümerik çözümler



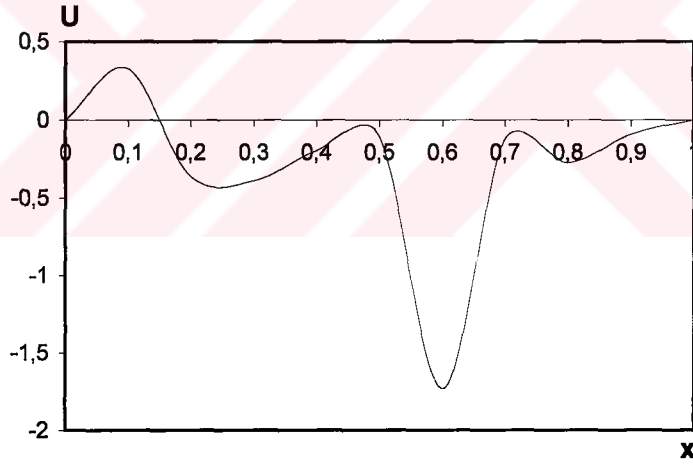
Şekil 4.11. $\nu=0.009$, $\Delta t = 0.0005$, $h=0.005$, $\theta=1$ farklı zaman adımlarında elde edilen nümerik çözümler.



Şekil 4.12. $\nu=0.005$, $\Delta t = 0.0005$, $h=0.005$, $\theta=1$ farklı zaman adımlarında elde edilen nümerik çözümler.



Şekil 4.13. $v=0.005$, $\Delta t = 0.0005$, $h=0.005$, $\theta=1$ farklı zaman adımlarında elde edilen nümerik çözümler.



Şekil 4.14. $v=0.001$, $h=0.025$, $\Delta t = 0.05$, $t_{\max}=0.5$ için elde edilen nümerik sonuç

KAYNAKLAR

- [1] Bateman, H., Some recent researchers on the motion of fluids. Monthly Weather Rev. 43, (1915), 163-170
- [2] A. Özdeş, Direkt Varyasyonel- Ardışık Yaklaştırma Yöntemi ile Non-Lineer Burgers Denkleminein Çözümü Üzerine, Doktora tezi, İnönü Üniversitesi (1991)
- [3] Miller E.L. Predictor-Corrector studies of Burger model of turbulent flow Master's Thesis (1966) Newark.
- [4] N. Utkan, On the finite difference approximations to non-linear partial differential equation, Master's Thesis METU (1983).
- [5] Burger, J. M., Mathematical examples illustrating relations occurring in the theory of turbulent fluid motion. Trans. Roy. Neth. Acad. Sci. Amsterdam, 17,(1939),1-153
- [6] Burger, J. M., A Mathematical model illustrating the theory of turbulence, in advances applied mechanics 1, Academic Press. New York, (1948) ,171-199
- [7] Cole, J. D. On a quasi linear parabolic equation occurring in aerodynamics. Quart. Apply. Math. 9,(1951),225-236
- [8] E. Varoğlu & W. D.L. Finn, Space-Time finite incorporating characteristics for the Burger's equation. Internat. J. Number. Methods Engrg. Vol 16, (1980) ,171-184
- [9] David T. Blackstock. Termaviscous Attenuation of Plane, Priodic, Finite-Amplitude Sound Waves, The Journal of the Acoustical society of America. Vol 36, Number 3 (1964)
- [10] Z. A. Goldberg, Finite-Amplitude waves in magnetohydrodynamics, Soviet Physics JETP 15, (1962), 179-181
- [11] L. A. Pospelov. Propagation on finite-amplitude elastic waves, Soviet Physics Acoust. 11,(1966), 302-304
- [12] T. Öziş and A.Özdeş, A direct varyasyonel methods applied to Burger's equation, Journal of Computational and Applied Mathematics 71,(1996),163-175

- [13] J. Caldwell and P. Wanless, ve A. E. Cook , Appl. Math. Modelling. Vol5, (June 1981),189-193
- [14] P. Arminjon and C. Beauchamp, International Journal for numerical methods in Engineering . Vol 12,(1978), 415-428
- [15] D. J. Evans and A.R. Abdullah, The group explicit method for the solution of Burger's equation computing.32,(1984),239-253
- [16] R. C. Mittal and P. Singhal, Communications in numerical methods in engineering.Vol9, (1993),397-406
- [17] E. Hopf, The partial differential equation $U_t + UU_x = \mu U_{xx}$ Comm. Pure. Appl. Math.3,(1950),201-230
- [18] Burger, J. M.,Correlation problems in a one-dimensional model of turbulence Proc,Roy. Neth. Acad. Sci. Amsterdam.53,(1950), 247-260, 293-406, 718-742
- [19], A riccati solution for Burger's equation. Quart. Appl. Math. 27, ,(1970),541-545
- [20] W. F. Ames, Nonlinear partial differential equations in engineering, Academic Press, New York. (1965)
- [21] C. W. Chu, A class of reducible systems of quasi-linear partial differential equations. Quart. Appl. Math. 23,(1965), 257-278
- [22] M. E. Shvets and V. P. Meleshko, Numerical algorithm of a solution of the system of equations of hydrodynamics of the atmosphere .Izv. Acad. Sci. USSR Atmospher. Ocean Phys. 1,(1965), 519-520
- [23] Burden, r.l. and Faires J.D., Nümerical Analysis, Prindle, Weber & Schmidt, Boston,(1980).
- [24] Smith,G.D., Nümerical Solution of Partial Differential Equations: Finite . Difference Methods, 3nd., Clarendon Press, Oxford (1987)
- [25] Twizell, E. H., Computational Methods for Partial Differential Equations (1984).
- [26] Kutluay, S., Predictor- Corrector Yöntemi ve Yakınsaklık Analizi, Yüksek Lisans Tezi, (1987).
- [27] Al- Kharafi, a. A. H., Finite Element Soluation of Initial/Boundary Value

- Problems, P. H. D. Thesis , Loughborough University of Technology, (1986).
- [28] Courant, R., Variational Methods for the Solution of Problems of Equilibrium and Vibration , Bull, Am. Math. Soc., Vol 149 (1943).
- [29] Clough, R. W., Finite Element Method in Plane Stress Analysis Proceedings of 2nd ASCE Conference on Electronic Computations, Pittsburgh, (1960).
- [30] Morse, P. N. and Feshbach, H., Methods of Theoretical Physics. Newyork McGraw- Hill Book Co.(2 Volumes),(1953).
- [31] Greenstant, j., On the Reduction of Continuous Problems to Discrete Form, IBM J. Res. Dev.,vol.3,(1959).
- [32] White, G. N., Difference Equations for Plane Thermal Elasticity Lams 2745, Los Alamos Scientific Laboratory , Los Alamos, N. Mex (1962).
- [33] Friedrichs, K. O., A Finite Difference Scheme for Nuemann and the Dirichlet Problem , NYO-9760, Caurant Institute of Mathematical Sciences, N. Y. University, N.Y, (1962).
- [34] Zienkiewicz, O. C. and Cheung, Y. K., Finite Elements in Solution of Field Problems, Engineer, Vol 220, (1965).
- [35] J. M. Hill & J. N. Dewynne, "Heat Conduction", Blackwell Scientific Publications, (1987)

ÖZGEÇMİŞ

1975 yılında Ankara' da doğdu. İlk, Orta ve Lise Öğrenimini Malatya ilinde tamamladı. 1992 yılında İnönü Üniversitesi, Fen-Edebiyat Fakültesi, Matematik Bölümüne girmeye hak kazandı. 1996 yılında aynı bölümden birincilikle mezun oldu. 1996 yılında İnönü Üniversitesi, Fen-Edebiyat Fakültesi, Matematik Bölümünün açmış olduğu Yüksek Lisans Sınavını kazandı. 1997 yılında aynı bölümün açmış olduğu Araştırma Görevliliği sınavını kazandı. Halen akademik çalışmalarını araştırma görevlisi olarak sürdürmektedir.



İZMİR İNÖNÜ ÜNİVERSİTESİ
FEN-EDEBİYAT FAKÜLTESİ
MATEMATİK BÖLÜMÜ