84258

T.C.
İNÖNÜ ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

SINIRLI YAKINSAKLIK ALANLARI

Murat CANDAN

YÜKSEK LİSANS TEZİ
MATEMATİK ANABİLİM DALI

MALATYA
1999

T.C.
İNÖNÜ ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

SINIRLI YAKINSAKLIK ALANLARI

Murat CANDAN

YÜKSEK LİSANS TEZİ
MATEMATİK ANABİLİM DALI

Tez konumu veren ve çalışmalarımın her adımında yardımlarını esirgemeyen Sayın Danışmanım Prof. Dr. İhsan SOLAK' a ve manevi desteklerinden dolayı Sayın Prof. Dr. Sadık KELEŞ' e, ihtiyaç duyduğum anlarda kendileri ile konuşup tartışma imkanı bulduğum kıymetli arkadaşlarım Arş. Gör. M. Kemal ÖZDEMİR' e ve Arş. Gör. Yılmaz YILMAZ' a teşekkürlerimi sunarım.

Malatya-1999 Murat CANDAN

" Fen Bilimleri Enstitüsü Müdürlüğüne "

İş bu çalışma , jürimiz tarafından Matematik Anabilim dalında YÜKSEK LİSANS TEZİ olarak kabul edilmiştir.

Başkan Prof. Dr. Sadık KELEŞ

Üye Prof. Dr. İhsan SOLAK

Üye Doç. Dr. Rifat GÜNEŞ

Onay

Yukarıdaki imzaların, adı geçen öğretim üyelerine ait olduğunu onaylarım.

1./11/1999

Prof.Dr. Satılmış Kaya

Enstitü Müdürü

NOTASYONLAR

$A = (a_{mn})$	sonsuz matris
$A \subset B$	A, B den zayıftır
$\mathcal{A}$	$A = (a_{mn})$ matrisi tarafından limitlenen sınırlı dizilerin cümlesi
$\|\mathcal{A}\|$	A limitlenebilen sınırlı dizilerin $\mathcal{A}$ cümlesinin normu
$\mathcal{F}$	bütün reel sayı dizilerinin cümlesi
$\mathcal{F}(T)$	T dönüşümünün yakınsaklık alanı
$h(A)$	$A = (a_{mn})$ matrisinin $h(A)$ normu
$\liminf$	limit inferior(alt limit)
$\limsup$	limit superior(üst limit)
$N(\mathcal{A})$	$A = (a_{mn})$ regüler matrisinin normu

İÇİNDEKİLER

ÖZET

Bu çalışma iki bölümden meydana gelmiştir. İlk bölümde temel tanım ve teoremler verildi.

İkinci bölümde sınırlı yakınsaklık alanları incelendi.

ABSTRACT

This study consist of two chapters: In the first chapter, basis definitions and theorems were given.

In the second chapter, bounded convergence fields were examined.

1. BÖLÜM

Bu kesimde ileride sıkça kullanacağımız tanım ve sonuçları vereceğiz.

1.1. Limitleme Metodları

$\sigma = \{s_n\}$ $(n = 1,2,\ldots)$ şeklindeki bütün reel sayı dizilerinin cümlesini $\mathcal{F}$ ile gösterelim.

Bilindiği gibi

$$\sigma = \{s_n\} \ , \ \tau = \{t_n\}$$

dizileri verildiğinde $\forall n \in IN$ için $s_n = t_n$ ise $\sigma = \tau$ dur.

$\mathcal{F}$ üzerinde toplama ve bir reel sayı ile çarpma işlemleri

$$\sigma + \tau = \{s_n + t_n\}$$
$$a\sigma = \{as_n\}$$

şeklinde tanımlanır.

$\mathcal{F}$ aşağıdaki özellikleri açıkça sağladığından bir vektör uzayıdır.

i. $\sigma + \tau = \tau + \sigma$

ii. $\rho + (\sigma + \tau) = (\rho + \sigma) + \tau$

iii. $\rho + \sigma = \rho + \tau \ \Rightarrow \sigma = \tau$

iv. $a.(\sigma + \tau) = a.\sigma + a.\tau$

v. $(a + b).\tau = a.\tau + b\tau$

vi. $a(b.\sigma) = (a.b)\sigma$

vii. $I.\sigma = \sigma$

$\mathcal{F}$ nin sıfır elemanı bütün terimleri sıfır olan $\theta = \{0\}$ şeklindeki bir dizidir.

Burada $\begin{array}{c} T : \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{F} \\ \sigma \rightarrow T_\sigma \end{array}$ şeklinde bir dönüşüm tanımlamak mümkündür. (T_σ, $T(\sigma)$ şeklinde de gösterilebilir) Dönüşümlere basit örnek olarak I özdeşlik ve sıfır dönüşümleri verilebilir.[1]

$$I.\sigma = \sigma$$
$$0.\sigma = \theta$$

Tanım 1.1.1: $\sigma, \tau \in \mathcal{F}$ için T_σ ve T_τ tanımlı , $a \in IR$ için ; $T(\sigma + \tau)$ ve $T(a.\sigma)$ da tanımlı olmak üzere

i. $T(\sigma + \tau) = T(\sigma) + T(\tau)$

ii. $T(a.\sigma) = a.T(\sigma)$

eşitlikleri sağlanırsa T ye lineer denir.[1]

Her lineer dönüşüm ; $T_\sigma \in C$ olan bütün σ dizilerinin oluşturduğu $\mathcal{F}(T)$ yakınsaklık alanına sahiptir. Yani

$$\mathcal{F}(T) = \{\sigma = \{s_n\} : T_\sigma = \{t_n\}, t_n \to t(n \to \infty)\}$$

dir. Burada C yakınsak dizilerin vektör uzayıdır.

Tanım 1.1.2: Eğer $\sigma \in \mathcal{F}(T)$ ise $T_\sigma = \{t_n\}$ olmak üzere

$$\lim_{n \to \infty} t_n = t$$

dir. Burada t ye σ nın T limiti veya $T - \lim s_n$ denir.[1]

Teorem 1.1.3: Eğer T bir lineer dönüşüm ise $\mathcal{F}(T)$ yakınsaklık alanı bir vektör uzayıdır.[1]

İspat: Kabul edelim ki $\sigma, \tau \in \mathcal{F}(T)$ ve $a \in IR$ olsun. $\sigma, \tau \in \mathcal{F}(T)$ olduğundan T_σ ve T_τ yakınsaktır. T lineer olduğundan

$$T(\sigma + \tau) = T(\sigma) + T(\tau)$$
$$T(a\sigma) = aT(\sigma)$$

dır. Yani $\sigma + \tau$ ve $a.\sigma \in \mathcal{F}(T)$ dir. Böylece $\mathcal{F}(T)$ toplama ve skaler ile çarpma işlemlerine göre kapalıdır. Bu işlemler $\mathcal{F}$ üzerinde de sağlandığından $\mathcal{F}(T)$ bir vektör uzayıdır.[1]

Tanım 1.1.4: Sınırlı dizileri sınırlı dizilere dönüştüren bir lineer dönüşüme limitleme metodu denir.

I özdeşlik ve sıfır dönüşümü birer limitleme metodudur.[1]

ÖRNEK 1.1.5: $t_n = \frac{1}{2}(s_n + s_{n+1})(n = 1,2,\ldots)$ şeklinde tanımlanan dönüşüm bir limitleme metodudur.[1]

Gerçekten

$$|t_n| = \left|\frac{1}{2}(s_n + s_{n+1})\right| = \frac{1}{2}|s_n + s_{n+1}| \le \frac{1}{2}(|s_n| + |s_{n+1}|) \le \frac{1}{2}(K + K) = K$$

i) $T(\sigma + \tau) = T(s_1 + t_1, s_2 + t_2, \ldots, s_n + t_n, \ldots)$

$$\begin{aligned} &= \frac{1}{2}(s_n + t_n + s_{n+1} + t_{n+1}) \\ &= \frac{1}{2}[(s_n + s_{n+1}) + (t_n + t_{n+1}) \\ &= \frac{1}{2}(s_n + s_{n+1}) + \frac{1}{2}(t_n + t_{n+1}) \\ &= T(\sigma) + T(\tau) \end{aligned}$$

ii) $T(a\sigma) = T(as_1, as_2, \ldots, as_n, \ldots)$

$$\begin{aligned} &= \frac{1}{2}(as_n + as_{n+1}) \\ &= aT\sigma \end{aligned}$$

dir.

ÖRNEK 1.1.6: $t_n = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} s_k \, (n = 1,2,\ldots)$ ile verilen dönüşüm bir limitleme metodudur.[1]

$$|t_n| = \frac{1}{n}\left|\sum_{k=1}^{n} s_k\right| \le \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}|s_k| \le \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} K = K$$

Lineerliği bir önceki örnekteki gibi gösterilebilir.[1]

Tanım 1.1.7: T bir lineer dönüşüm olmak üzere $\mathcal{F}(T)$ yakınsaklık alanı bütün $\{s_n\}$ yakınsak dizilerini kapsar ve

$$T - \lim s_n = \lim s_n$$

ise T ye regüler denir.[1]

ÖRNEK 1.1.8: $t_n = \frac{1}{2}(s_n + s_{n+1})$ ile tanımlanan T dönüşümü regülerdir.[1]

$s_n \to s (n \to \infty)$ olsun.

$$\lim t_n = \lim[\frac{1}{2}(s_n + s_{n+1})]$$
$$= \frac{1}{2}\lim(s_n + s_{n+1}) = \frac{1}{2}(\lim s_n + \lim s_{n+1}) = s$$

olup $t_n \to s(n \to \infty)$ dir

$\mathcal{F}(T)$ yakınsaklık alanı aynı zamanda bazı ıraksak dizileri de içerir.

Örneğin $\sigma = \{s_n\} = \{1,0,1,0,\ldots,1,0,\ldots\}$ dizisi için T dönüşümünü $T(s_n) = t_n = s_{2n-1}$ alalım.

$$T(\sigma) = \{t_n\} = \{s_{2n-1}\} = \{1,1,\ldots,1,\ldots\}$$

olup $T - \lim s_n = 1$ yani $\sigma \in \mathcal{F}(T)$ dir.

ÖRNEK 1.1.9: $t_n = \frac{1}{2}(s_n - s_{n+1})$ ile tanımlanan limitleme metodu regüler değildir. Çünkü bu dönüşüm bütün yakınsak dizileri ,bir sıfır dizisine dönüştürür. Gerçekten $s_n \to s(n \to \infty)$ ise $\lim t_n = \lim[\frac{1}{2}(s_n - s_{n+1})] = \frac{1}{2}\lim s_n - \frac{1}{2}\lim s_{n+1} = 0$ dır.[1]

Tanım 1.1.10 : $\{s_n\}$ bir reel terimli dizi ve A da $\{s_n\}$ dizisinin alt dizilerinin limitlerinin cümlesi olsun. Sup$A$ ve İnf$A$ sayılarına sırasıyla $\{s_n\}$ dizisinin üst limiti ve alt limiti denir. Üst limit $\limsup s_n$ veya $\overline{\lim} s_n$, alt limit $\liminf s_n$ veya $\underline{\lim} s_n$ ile gösterilir.[2]

Teorem 1.1.11: $\{s_n\}$ sınırlı bir dizi olsun. Bu taktirde

$$\liminf_{n\to\infty} s_n \le \limsup_{n\to\infty} s_n$$

dir.[3]

Teorem 1.1.12: i) $\{a_n\}$, $\lim_{n\to\infty} a_n = L$ olacak şekilde bir dizi olsun. Bu taktirde

$$\limsup_{n\to\infty} a_n = L = \liminf_{n\to\infty} a_n,$$

ii) $\{a_n\}$ sınırlı bir dizi olmak üzere

$$\limsup_{n\to\infty} a_n = L = \liminf_{n\to\infty} a_n$$

ise $\lim_{n\to\infty} a_n = L$ dir.[3]

Teorem 1.1.13: $\{a_n\}$ ve $\{b_n\}$;her $n \in IN$ için $a_n \leq b_n$ olacak şekilde iki sınırlı dizi olsun. Bu taktirde

$$\limsup_{n\to\infty} a_n \leq \limsup_{n\to\infty} b_n$$
$$\liminf_{n\to\infty} a_n \leq \liminf_{n\to\infty} b_n$$

dir.[3]

Sonuç 1.1.14: $x, y \in IR$ ve her $\varepsilon > 0$ için $x \leq y + \varepsilon$ ise $x \leq y$ dir.[3]

Tanım 1.1.15: $t_n = \dfrac{s_1 + s_2 + \cdots + s_n}{n}$ ile verilen limitleme metoduna CESÁRO metodu denir.[1]

Teorem 1.1.16: Cesáro metodu regülerdir.[3]

İspat: Verilen her $\varepsilon > 0$ için en az bir $N \in IN$ vardır öyle ki her $n \geq N$ için

$$L - \varepsilon < s_n < L + \varepsilon$$

dur. Her $n \geq N$ için $t_n = \dfrac{s_1 + s_2 + \cdots + s_n}{n}$ olsun. Burada t_n'i

$$t_n = \frac{s_1 + s_2 + \cdots + s_N}{n} + \frac{s_{N+1} + s_{N+2} + \cdots + s_n}{n}$$

şeklinde yazabiliriz.

$$\frac{(n-N)(L-\varepsilon)}{n} < \frac{s_{N+1} + s_{N+2} + \cdots + s_n}{n} < \frac{(n-N)(L+\varepsilon)}{n}$$

olduğundan

$$C = s_1 + s_2 + \cdots + s_N$$

olmak üzere

$$\frac{C}{n} + \frac{(n-N)(L-\varepsilon)}{n} < t_n < \frac{C}{n} + \frac{(n-N)(L+\varepsilon)}{n}$$

dir. Teorem 1.1.13 den

$$\limsup_{n\to\infty}\left(\frac{C}{n} + \frac{(n-N)(L-\varepsilon)}{n}\right) \leq \limsup_{n\to\infty} t_n \leq \limsup_{n\to\infty}\left(\frac{C}{n} + \frac{(n-N)(L+\varepsilon)}{n}\right)$$

eşitsizliğini yazabiliriz.

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{C}{n} + \frac{(n-N)(L-\varepsilon)}{n}\right) = 0 + (L - \varepsilon)$$

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{C}{n}+\frac{(n-N)(L+\varepsilon)}{n}\right)=0+(L+\varepsilon)$$

olduğundan her $\varepsilon > 0$ için

$$L-\varepsilon \le \limsup_{n\to\infty} t_n \le L+\varepsilon$$

olur. Sonuç 1.1.14 den

$$L \le \limsup_{n\to\infty} t_n \le L$$

olur ki bu da $\limsup_{n\to\infty} t_n = L$ demektir. Benzer olarak

$$\liminf_{n\to\infty} t_n = L$$

dir. Teorem 1.1.12 (ii) gereğince

$$\lim_{n\to\infty} t_n = L$$

yazabiliriz ki; bu da istenilen sonuçtur.

Tanım 1.1.17 (MATRİS LİMİTLEME METODLARI):

En önemli limitleme metodları bir sonsuz matris ile temsil edilir.

$$A=(a_{mn})=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & \cdots \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & \cdots \\ . & . & \cdots & . & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} & \cdots \\ . & . & \cdots & . & \cdots \end{bmatrix}$$

olsun. $\sigma = \{s_n\}$ dizisi için $\{s_n\}$ nin A_σ dönüşümü, matris çarpımı ile tanımlı $\{t_n\}$ dizisi mevcut olmak üzere

$$t_m = \sum_{n=1}^{\infty} a_{mn} s_n$$

şeklinde tanımlanır. Yani

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & \cdots \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & \cdots \\ . & . & \cdots & . & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} & \cdots \\ . & . & \cdots & . & \cdots \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} s_1 \\ s_2 \\ \vdots \\ s_n \\ \vdots \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11}s_1 + a_{12}s_2 + \cdots + a_{1n}s_n + \cdots \\ a_{21}s_1 + a_{22}s_2 + \cdots + a_{2n}s_n + \cdots \\ \vdots \\ a_{m1}s_1 + a_{m2}s_2 + \cdots + a_{mn}s_n + \cdots \\ \vdots \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \sum_{n=1}^{\infty} a_{1n} s_n \\ \sum_{n=1}^{\infty} a_{2n} s_n \\ \vdots \\ \sum_{n=1}^{\infty} a_{mn} s_n \\ \vdots \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} t_1 \\ t_2 \\ \vdots \\ t_m \\ \vdots \end{bmatrix} \text{ dir.}$$

Bu dönüşüm açıkça lineerdir.[1]

Sonuç 1.1.18: Her regüler matris bir limitleme metodudur.[1]

Şimdide bir matrisin regüler olması için gerek ve yeter şartları verelim.

Teorem 1.1.19 (SILVERMAN-TOEPLITZ): $A = (a_{mn})$ matrisinin regüler olması için gerek ve yeter şartlar

i) Her m için $\sum_{n=1}^{\infty} |a_{mn}| < K$ olacak şekilde bir K sabiti var.

ii) Her n için $\lim_{m \to \infty} a_{mn} = 0$.

iii) $\lim_{m \to \infty} \sum_{n=1}^{\infty} a_{mn} = 1$.[1]

Tanım 1.1.20: A ve B iki dönüşüm olsun. $\{s_n\}$ dizisi hem A hem de B toplanabilirse A ve B ye $\{s_n\}$ dizisi için karşılaştırılabilirdir denir.[4]

Tanım 1.1.21: A ve B iki dönüşüm olsun. A ve B herhangi bir dizi için karşılaştırılabilir olmak üzere, bu dizinin A dönüşümü ve B dönüşümü aynı değere yakınsıyorsa, yani

$$A - \lim s_n = B - \lim s_n$$

ise A ve B ye tutarlıdır denir[4]. Eğer bu dizi sınırlı ise A ve B ye $b-$tutarlıdır denir.[1]

Tanım 1.1.22: A ve B iki dönüşüm olsun, eğer A toplanabilir her dizi B toplanabilir ise A ya B den zayıftır denir ve $A \subset B$ yazılır.[4]

1.2. *O, o* SEMBOLLERİ

Tanım 1.2.1: $f(x)$ ve $g(x)$ fonsiyonları verilmiş olsun sabit bir x_0 noktası için kabul edelim ki $g(x)$, x_0'ın açık bir komşuluğunda pozitif ve sürekli olsun . Bu durumda

i) x_0'ın açık komşuluğunda $|f(x)| < K.g(x)$ olacak şekilde bir K sabiti varsa $f(x) = O(g(x))$ $(x \to x_0)$ dır.

ii) Eğer $\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = 0$ ise $f(x) = o(g(x))(x \to x_0)$ dır.

Bu tanımda x_0 sonlu veya sonsuz olabilir (x_0'ın sonsuz olması halinde , x_0 noktasının açık bir komşuluğunda pozitif ve sürekli olması şartı yerine , yeterince büyük x ler için $g(x)$ in pozitif ve sürekli olmasıdır , yani $x > \xi$ için $g(x)$ pozitif ve sürekli olacak şekilde ξ sayısının mevcut olmasıdır), şartı olmalıdır.[4]

Özel olarak $f = O(1)$ f'nin sınırlı olduğunu ifade eder. $f = o(1)$ ise $f \to \infty$ demektir.[5]

ÖRNEK 1.2.2: $x > 3$ için $|5x^2 + 2x + 3| = 5x^2 + 2x + 3 < 6x^2$ olup

$$5x^2 + 2x + 3 = O(x^2)(x \to \infty)$$

dir.[4]

ÖRNEK 1.2.3: $|\sin x| \leq 1$, $\lim_{x \to \infty} \frac{\sin x}{x} = 0$ olduğundan $\sin x = o(x)(x \to \infty)$ olur.[4]

2. BÖLÜM

2.1. SINIRLI DİZİLER: Bu bölüm bir matris tarafından limitlenen sınırlı diziler ile ilgilidir. Sonuç 1.1.18 de her regüler matrisin bir limitleme metodu olduğu verildi. Buradaki ilk basit ispatların BRUDNO tarafından yapılmasına rağmen, çoğu teorem MAZUR ve ORLICZ tarafından incelendi. [1]

Tanım 2.1.1: $A = (a_{mn})$ bir limitleme matrisi olsun. Eğer

$$a_{mn} = 0 \quad (n \leq \lambda(m), n \geq \mu(m))$$

olacak şekilde $(\lambda(m) \uparrow \infty, \mu(m) \uparrow \infty)$ dizileri varsa A ya bir kesme matrisi denir.[1]

LEMMA 2.1.2: $A = (a_{mn})$ bir regüler matris olsun. Bu durumda $\{p_n\}, p_n \uparrow \infty$ bir dizi ve $B = (b_{mn})$ bir kesme matrisi olmak üzere

$$\lim_{m \to \infty} \left(\sum_{n=1}^{\infty} a_{mn} s_n - \sum_{n=1}^{\infty} b_{mn} s_n \right) = 0$$

dır.[1]

İspat: $\mu(k)$;

$$\mu(1) > 1$$

$$\mu(k) > \mu(k-1) \qquad (m \leq k)$$

$$\sum_{n=\mu(k)}^{\infty} (k+1)|a_{mn}| \leq 2^{1-k}$$

olacak şekilde seçilsin. Eğer

$$p_n = 1 \quad (n < \mu(1))$$

$$p_n = k+1 \quad ((\mu(k) \leq n < \mu(k+1))$$

ise

$$\sum_{n=\mu(m)}^{\infty} p_n |a_{mn}| = \sum_{r=m}^{\infty} \left(\sum_{n=\mu(r)}^{\mu(r+1)-1} (r+1)|a_{mn}| \right) \leq \sum_{r=m}^{\infty} 2^{1-r} = 2^{2-m}$$

ve her m için $\sum_{n=1}^{\infty} p_n |a_{mn}|$ yakınsaktır. Ayrıca

$$\lim_{m \to \infty} |a_{mn}| = 0 \quad (n = 1, 2, \cdots)$$

olduğundan $m \geq m_p \quad (p = 1,2,\cdots)$ için

$$\sum_{n=1}^{p} p_n |a_{mn}| \leq \frac{1}{p}$$

olduğu açıktır. Diğer taraftan $m_p > m_{p-1}$. $(p = 2,3,\cdots)$ alabiliriz. $\lambda(m)$,

$$\lambda(m) = 1 \quad (m < m_2) \text{ ve}$$

$$\lambda(m) = p \quad (m_p \leq m < m_{p+1})$$

olacak şekilde seçilsin ve

$$|s_n| \leq H.p_n \quad (n = 1,2,\cdots)$$

$$b_{mn} = a_{mn} \quad (\lambda(m) + 1 \leq n \leq \mu(m))$$

$$b_{mn} = 0 \quad (n \leq \lambda(m)) \text{ veya } (n > \mu(m)) \text{ ise}$$

$$\lim_{m \to \infty} \left(\sum_{n=1}^{\infty} a_{mn} s_n - \sum_{n=1}^{\infty} b_{mn} s_n \right) = 0$$

dır.

$\{\lambda(m)\}$ ve $\{\mu(m)\}$'in inşasının sınırlı diziler içinde geçerli olduğunu belirtebiliriz.

Teorem 2.1.3: $A = (a_{mn})$ bir regüler matris olsun. Bu durumda bir $\{p_n^{'}\}$, $p_n^{'} \uparrow \infty$ dizisi ve $\sum_{n=1}^{\infty} x_n = \infty$, $x_n \downarrow 0$ olacak şekilde pozitif bir $\{x_n\}$ dizisi varsa $s_n = O(p_n^{'})$ şeklindeki $\{s_n\}$ dizisinin A tarafından sıfıra limitlenmesi için gerek ve yeter şart $\{\xi_n\}$ sınırlı ve $|\xi_n - \xi_{n-1}| = O(x_n)$ olmak üzere $\{\xi_n s_n\}$ formundaki her dizinin A tarafından limitlenmesidir.[1]

İspat: Sadece $\{s_n\}$, $s_n = O(p_n^{'})$ dizisi ile ilgilendiğimizden A yı bir kesme matrisi olarak seçebileceğimiz lemma 2.1.2'den açıktır. Bundan başka

$$a_{mn} = 0 \quad (n > m)$$

olduğu kabul edilebilir aksi taktirde bu şartı sağlayan denk bir matris, A nın satırlarının tekrarlanması ile inşa edilebilir. Kesme matrisinin inşasından $\{\lambda(m)\}$

$$\lambda(m) - \lambda(m-1) \leq 1 \quad (m = 2,3,\cdots)$$

ilave şartını sağlar.

$\{m_k\}$ dizisi $m_1 = 1$, $\lambda(m_k) = m_{k-1}$ olacak şekilde, $\{x_n\}$ dizisi

$$x_n = \frac{1}{k(m_k - m_{k-1})} \quad (\lambda(m_k) < n \le m_k) \ , \ \sum_{\lambda(m_k)+1}^{m_k} x_n = \frac{1}{k}$$

olacak şekilde pozitif ve monoton azalan ve $\{p_n^{'}\}, p_n^{'} \uparrow \infty, p_n^{'} \le p_n$ ve $p_{m_k}^{'} \le \log k$ $(k = 1,2,\cdots)$ şeklinde seçelim. (Burada p_n lemma 2.1.2 deki gibi seçiliyor). Bu durumda, eğer

$$m_k < m \le m_{k+1} \ , \ \sum_{n=1}^{\infty} |a_{mn}| < M \ , \ |s_n| < H.p_n^{'} \ , \ |\xi_n| < K \text{ ve } |\xi_n - \xi_{n-1}| < C.x_n$$

ise

$$|t_m| = |\sum_{n=1}^{m} a_{mn}\xi_n s_n| \le | \sum_{n=\lambda(m)+1}^{m} (\xi_m - \xi_n) a_{mn} s_n| + |\xi_m| . | \sum_{n=\lambda(m)+1}^{m} a_{mn} s_n | \qquad ...(1)$$

m sonsuza giderken bu toplamın ikinci kısmının limiti sıfırdır. Ayrıca

$$\begin{aligned} | \sum_{n=\lambda(m)+1}^{\infty} (\xi_m - \xi_n) a_{mn} s_n | &\le \max_{\lambda(m) < n \le m} |\xi_m - \xi_n| \sum_{n=1}^{m} |a_{mn}||s_n| \\ &\le H. M. \log(k+1) \sum_{n=\lambda(m)+1}^{m_{k+1}} |\xi_n - \xi_{n-1}| \\ &\le C. H. M \log(k+1) \sum_{n=\lambda(m_k)+1}^{m_{k-1}} x_n \\ &\le C. H. M. \log(k+1)(\frac{1}{k} + \frac{1}{k+1}) \end{aligned}$$

olup şartlar gereklidir.

Kabul edelim ki $\{s_n\}$, A tarafından $s \ne 0$'a limitlensin. $\sum_{n=1}^{\infty} x_n = \infty$ olduğundan 0 ile 1 arasında salınan ve $|\xi_n - \xi_{n-1}| = O(x_n)$ eşitliğini sağlayan sınırlı bir $\{\xi_n\}$ dizisi seçebiliriz .

$$\lim_{p\to\infty} |\xi_{m_p}| = 1 \quad , \quad \lim_{q\to\infty} |\xi_{m_q}| = 0$$

olsun. (1) den

$$\lim_{p\to\infty} |t_{m_p}| = |s| \ , \ \lim_{q\to\infty} |t_{m_q}| = 0 \qquad ...(2)$$

olduğu açıktır ve $\{\xi_n s_n\}$ şeklindeki her dizi A tarafından limitlenemez. $\{\xi_n\}$. $\xi_n = 1$ $(n = 1,2,\cdots)$ olduğundan

$$\xi_n = O(1) \quad , \ \xi_n - \xi_{n-1} = O(x_n)$$

eşitlikleri sağlanır. Dolayısıyla $\{s_n\}$ dizisi A tarafından limitlenebilir. Bu ise ispatı tamamlar.

Tanım 2.1.4: $A=(a_{mn})$ ve $B=(b_{mn})$ regüler matrisler olsun. Eğer her B limitlenen sınırlı bir dizi A limitlenirse, A ya B den $b-$kuvvetli denir ve $A \supseteq B$ veya $B \subseteq A$ yazılır.

Eğer $A \subseteq B$ ve $B \subseteq A$ ise A ve B ye $b-$denk denir.[1]

Tanım 2.1.5: $A=(a_{mn})$ ve $B=(b_{mn})$ regüler matrisler olsun. Sabit bir $\{\mu_n\}$ $\mu_n \uparrow \infty$ dizisi için $s_n = O(\mu_n)$ şeklindeki her B limitlenen $\{s_n\}$ dizisi , A limitlenirse A ya B den μ_n $-$kuvvetli denir[1]

Tanım 2.1.6: $A=(a_{mn})$ ve $B=(b_{mn})$ regüler matrisler olsun. Eğer bir , $\{\mu_n\}$ $\mu_n \uparrow \infty$ dizisi için her $\{s_n\}$ ($s_n = O(\mu_n)$) dizisi aynı değere hem A hem de B limitlenirse A ve B ye μ_n $-$tutarlıdır denir.[1]

Teorem 2.1.7: Eğer $A=(a_{mn})$ ve $B=(b_{mn})$ regüler matrisler ve A, B den $b-$kuvvetli ise A ve B $b-$tutarlıdır.[1]

İspat:Eğer A ve B, $b-$tutarlı değil ise

$$A-\lim s_n = 1 \quad \text{ve} \quad B-\lim s_n = 0$$

olacak şekilde sınırlı bir $\{s_n\}$ dizisi seçebiliriz. Teorem 2.1.3'den B limitlenebilen fakat A limitlenemeyen $\{\xi_n s_n\}$ şeklinde sınırlı bir dizi mevcuttur. Bu $A \supseteq B$ olması ile bir çelişkidir.

$$A=(a_{mn}) \text{ matrisi } A_m = s_{2m} \quad (m=1,2,\cdots) \text{ ve}$$

$$B=(b_{mn}) \text{ matrisi } B_m = s_{2m+1} \quad (m=1,2,\cdots)$$

dönüşümleri ile tanımlanırsa, sırasıyla A ve B; $1,0,1,0,\cdots$, dizisini 0'a ve 1'e limitler. Bu hem A hem de B den b-kuvvetli regüler matris olmadığını belirtir, çünkü böyle bir matris her iki matris ile b-tutarlı olmak zorunda olacaktır.

Gerçekten bir $A=(a_{mn})$ regüler matrisi tarafından limitlenen bir sınırlı dizinin değeri A tarafından limitlenen sınırlı dizilerin vektör uzayı tarafından tek olarak belirlenir. Bu vektör uzayına ait olan bütün dizileri limitleyen her matris uzaydaki her bir sınırlı diziyi önceden belirlenen değere limitler.

Teorem 2.1.8: Eğer $A=(a_{mn})$ ve $B=(b_{mn})$ regüler matrisler ve A, B den μ_n-kuvvetli ise bir $p_n \uparrow \infty$ $(p_n \le \mu_n)$ için A ve B p_n-tutarlıdır.[1]

İspat: Teorem 2.1.3 deki gibi bir $\{p_n'\}$ $p_n' \uparrow \infty$ dizisini kullanırsak; eğer $\{s_n\}, s_n = O(p_n')$ sıfıra A limitlenirse, $\{\xi_n s_n\}$ dizisi de A limitlenebilir burada $\{\xi_n\}$ teorem 2.1.3 deki şartları sağlar. $p_n \uparrow \infty$ ve $p_n \le \min(\mu_n, p_n')$ $(n=1,2,\cdots)$ olmak üzere $\{s_n\}, s_n = O(p_n)$ dizileri için teorem 2.1.7 nin ispatındakine benzer bir çelişki kullanılabilir.

$B=(b_{mn})$ matrisi

$$B_1 = -S_1 \quad , \quad B_m = 2S_m - S_{m+1} \quad (m=2,3,\cdots)$$

dönüşümleri ile tanımlansın. Bu durumda eğer $\{s_n\}$, s'ye B limitlenirse

$$\begin{aligned} S_{m+1} &= B_m + 2B_{m-1} + \cdots + 2^{m-1} B_1 \\ &= 2^{m+1}[\frac{1}{4}B_1 + \cdots + \frac{1}{2^m} B_{m-1} + \frac{1}{2^{m+1}} B_m] \end{aligned}$$

olur. $C = \sum_{k=1}^{\infty} 2^{-k-1} B_k$ mutlak yakınsak olduğundan

$$\begin{aligned} S_{m+1} &= C.2^{m+1} + 2^{m+1}[2^{-m-2}B_{m+1} + \cdots] \\ &= C.2^{m+1} + [\frac{1}{2}B_{m+1} + \cdots] \\ &= C.2^{m+1} + \delta_{m+1} \end{aligned}$$

dir.

$$\delta_m = \frac{1}{2}B_m + \frac{1}{4}B_{m+1} + \cdots$$

s ye yakınsayan bir $\{B_m\}$ dizisinin bir regüler dönüşümü olduğundan $\{\delta_m\}$ dizisi s'ye yakınsar. $\{C.2^{m+1} + \delta_m\}$ dizisi;

$$A_m = 2S_m - (1 + 2^{-m-1})S_{m+1} \quad (m=1,2,\cdots)$$

dönüşümü ile tanımlanan $A=(a_{mn})$ matrisi tarafından limitlenebilir. Bununla birlikte

$$A-\lim 2^{m+1}=1$$

ve bütün B limitlenebilen diziler A limitlenebildiği halde A ve B, $a-$tutarlı değildir.

Tanım 2.1.9: $A=(a_{mn})$ ve $B=(b_{mn})$ regüler matrisler olsun. Eğer A, B den $b-$kuvvetli ve A en az bir B limitlenemeyen sınırlı bir diziyi limitlerse A ya B den kesin olarak kuvvetlidir denir ve $A\supset B$ veya $B\subset A$ şeklinde yazılır.[1]

Teorem 2.1.10: Eğer $A=(a_{mn})$ ve $B=(b_{mn})$ regüler matrisler ve $A\supset B$ ise bir $C=(c_{mn})$ regüler matrisi vardır öyle ki

$$A\supset C\supset B$$

dir.[1]

İspat: A limitlenebilen fakat B limitlenemeyen bir dizi $\{s_n^{'}\}$ olmak üzere $A-\lim s_n^{'}=0$ olsun.

$$B_m=\sum_{n=1}^{\infty} b_{mn}s_n^{'} \qquad (m=1,2,\cdots)$$

ve kabul edelim ki $\limsup\limits_{m\to\infty} B_m=s\neq 0$ olsun.(Eğer $\limsup\limits_{m\to\infty} B_m=0$ ise $\{-s_n^{'}\}$ dizisi gerekli özelliklere sahip olacak) Bu taktirde

$$\limsup_{m\to\infty} B_m=\lim_{k\to\infty} B_{m_k}=s$$

olacak şekilde bir $\{m_k\}$ dizisi vardır. $\{m_k\}$ indisleri ve B 'nin satırları yardımıyla bir regüler $B^{'}=(b_{kn}^{'})$ matrisi

$$b_{kn}^{'}=b_{m_k,n} \quad (k,n=1,2,\cdots)$$

oluşturabiliriz. $B^{'}$ nün satırlarının tekrarlanması ile

$$b_{kn}^{''}=0 \quad (n>k)$$

olacak şekilde $B^{''}=(b_{kn}^{''})$ oluştururuz. Eğer

$$t_m=\sum_{N=1}^{\infty} b_{kn}^{''}s_n^{'}$$

teorem 2.1.3 dekine benzer bir analizle bir $\{\xi_n s_n^{'}\}$ dizisinin varlığı gösterilir ve $\{k_p\}$ ve $\{k_q\}$ indis dizileri (2) eşitliğini sağlar yani

$$\lim_{p\to\infty} | t_{k_p} | = \lim_{p\to\infty} | \sum_{n=1}^{\infty} b''_{k_p,n} \xi_n s'_n | = | s | \qquad ...(3)$$

$$\lim_{q\to\infty} | t_{k_q} | = \lim_{q\to\infty} | \sum_{n=1}^{\infty} b''_{k_q,n} \xi_n s'_n | = 0 \qquad ...(4)$$

dır.

Aynı zamanda $\{\xi_n\}$ dizisinin A matrisine de uygun seçildiğini kabul edebiliriz öyle ki teorem 2.1.3'e göre $A - \lim \xi_n s_n' = 0$ dır. $C = (c_{mn})$ matrisi

$$c_{2r,n} = b_{m_r,n} \quad , \quad c_{2r-1,n} = a_{r,n} \quad (r, n = 1,2,\cdots)$$

olacak şekilde tanımlansın .

Açık olarak $C - \lim s_n$ mevcutsa $A - \lim s_n$ mevcuttur ve $A \supseteq C$ dir. ayrıca $\{s_n\}$ sınırlı ve $B - \lim s_n = s$ mevcutsa $C - \lim s_n = s$ mevcut ve $C \supseteq B$ dir. $A - \lim s_n' = 0$ ve $B' - \lim s_n' = B'' - \lim s_n' = s$ olduğundan $\{s_n'\}$ dizisi C limitlenemez ve $A \supset C$ dir. Bununla birlikte $A - \lim \xi_n s_n = 0$ ve (4) den $C - \lim \xi_n s_n' = 0$ olduğu açıktır. (3) ve (4) birlikte ele alındığında $\{\xi_n s_n\}$'nin B limitlenemediği görülür .Sonuç olarak $A \supset C \supset B$ dir.

2.2. DÜZGÜN LİMİTLENEBİLİR DİZİLER

Bu bölümde bir regüler matris tarafından düzgün olarak limitlenen dizilerin cümlesini inceleyeceğiz.[1]

Tanım 2.2.1: E dizilerin bir cümlesi olsun. Eğer $\{s_n\} \in E$ için

$$|\sum_{n=1}^{\infty} a_{mn} s_n - s| < \varepsilon_m \quad (m = 1,2,\cdots)$$

olacak şekilde bir $\{\varepsilon_n\}$ $(\varepsilon_n \downarrow 0)$ dizisi varsa , E ye bir $A = (a_{mn})$ regüler matrisi tarafından s ye düzgün olarak limitlenebilir denir.[1]

Tanım 2.2.2: E sınırlı dizilerin bir cümlesi olsun. Her $\{s_n\} \in E$ için

$$|s_n| \leq H \quad (n = 1,2,\cdots)$$

olacak şekilde bir H varsa. E ye düzgün sınırlıdır denir.[1]

Tanım 2.2.3: $\{s_n\}$ ve $\{\xi_n\}$ birer dizi olmak üzere, eğer

$$|s_n| \leq |\xi_n| \quad (n \geq N)$$

olacak şekilde bir N varsa, $\{s_n\}$ dizisi $\{\xi_n\}$ sınırlıdır denir.[1]

$\{\zeta_n^k\}$, $\zeta_n^k \downarrow 0$ $(k = 1,2,\cdots)$ dizilerin sayılabilir bir cümlesi $\{m_k\}, (k = 1,2,\cdots)$

$$|\zeta_n^r| < \frac{1}{k} \quad (n \geq m(k), 1 \leq r \leq k)$$

ve $\{\xi_n\}$ dizisi de

$$\xi_n = 1 \quad (n < m(1)) \quad , \quad \xi_n = \frac{1}{k} \quad (m(k) \leq n < m(k+1))$$

olarak tanımlansın.

Bu durumda $\{\zeta_n^k\}$, her bir k ve $\xi_n \downarrow 0$ için $\{\xi_n\}$ sınırlıdır.[1]

Teorem 2.2.4: $A = (a_{mn})$ bir regüler matris ve $\{s_n^k\}$ $(k = 1,2,\cdots)$ her biri A tarafından sıfıra limitlenen düzgün sınırlı dizilerin sayılabilir bir cümlesi olsun. Bu durumda sıfıra düzgün limitlenen $\{t_n^k\}$ sınırlı dizilerinin bir cümlesi vardır öyle ki

$$s_n^k = t_n^k \quad (n \geq N(k), k = 1,2,\cdots) \quad , \quad |t_n^k| \leq |s_n^k| \quad (n, k = 1,2,\cdots)$$

dir [1]

İspat: $A_m(s_n^k) = \sum_{n=1}^{\infty} a_{mn} s_n^k$ $(k, m = 1,2,\cdots)$ ve $\zeta_m^k = \sup_{m \geq r} |A_r(s_n^k)|$ $(k = 1,2,\cdots)$ olsun. $\zeta_m^k \downarrow 0$ $(k = 1,2,\cdots)$ olduğundan bir $\{\zeta_m\}$, $\zeta_m \downarrow 0$ dizisi vardır öyle ki $\{A_m(s_n^k)\}$ her bir k $(k = 1,2,\cdots)$ için $\{\zeta_m\}$ sınırlıdır. Dolayısıyla $|A_m(s_n^k)| < \zeta_m$ $(m > N(k))$ olacak şekilde bir $N(k)$ vardır.

$|s_n^k| \leq H$ $(n, k = 1,2,\cdots)$, $\sum |a_{mn}| < M$ $(m = 1,2,\cdots)$ olsun. $\{\lambda(m)\}$ ve $\{\mu(m)\}$;

$$\lambda(m) - \lambda(m-1) \leq 1 \ (m = 2,3,\cdots)$$

$$\sum_{n=1}^{\lambda(m)} |a_{mn}| < \varepsilon_m, \ \sum_{n=\mu(m)+1}^{\infty} |a_{mn}| < \varepsilon_m \ (m = 1,2,\cdots)$$

($\varepsilon_m \downarrow 0$ olmak üzere) olacak şekilde seçelim. $\{m(r)\}$

$$\lambda(m(r)) = \mu(m(r-1)) \ (r = 2,3,\cdots), m(1) = 1$$

olacak şekilde indislerin dizisi olsun.

$\{t_n^k\}$ yı inşa etmek için p yi $\lambda(m[\frac{p(p-1)}{2}]) > \mu(N(k))$ olacak şekilde seçelim ve

$$t_n^k = 0 \ (n \le \lambda(m[\frac{p(p-1)}{2}]))$$

$$t_n^k = \frac{r}{p} s_n^k [\lambda(m[\frac{p(p-1)}{2} + r - 1]) < n \le \lambda(m[\frac{p(p-1)}{2} + r])] \ (1 < r \le p)$$

$$t_n^k = s_n^k \ (n > \lambda(m[\frac{p(p+1)}{2}]))$$

yazalım. Burada açık olarak $| t_n^k | \le | s_n^k | \ (n,k = 1,2,\cdots)$ dır.

i) Eğer $m \le N(k)$ ise $|\sum_{n=1}^{\infty} a_{mn} t_n^k | \le H,\ \sum_{n=\mu(m)+1}^{\infty} |a_{mn}| \le H\varepsilon_m$ dir.

ii) Eğer $m < m[\frac{p(p+1)}{2}]$ ise

$$\begin{aligned} |\sum_{n=1}^{\infty} a_{mn} t_n^k | &\le |\sum_{n=1}^{\lambda(m)} a_{mn} t_n^k | + | \sum_{n=\lambda(m)+1}^{\infty} a_{mn} s_n^k | \\ &\le 2.H \sum_{n=1}^{\lambda(m)} |a_{mn}| + |\sum_{n=1}^{\infty} a_{mn} s_n^k | \\ &\le 2.H.\varepsilon_m + \zeta_m \end{aligned}$$

dir.

iii) Eğer

$$m(\frac{p(p-1)}{2} + r - 1) \prec m \le m(\frac{p(p-1)}{2} + r) \ (1 \le r \le p)$$

ise ve $\lambda(r)$ yi $\lambda(m[\frac{p(p-1)}{2} + r])$

$$\begin{aligned} |\sum_{n=1}^{\infty} a_{mn} t_n^k | &\le |\sum_{n=1}^{\lambda(m)} a_{mn} t_n^k | + | \sum_{n=\lambda(m)+1}^{\mu(m)} \frac{r}{p} a_{mn} s_n^k | + | \sum_{n=\lambda(r)+1}^{\mu(m)} \frac{1}{p} a_{mn} s_n^k | + | \sum_{n=\mu(m)+1}^{\infty} a_{mn} t_n^k | \\ &\le H(1 + \frac{r}{p}) \sum_{n=1}^{\lambda(m)} |a_{mn}| + \frac{r}{p} |\sum_{n=1}^{\infty} a_{mn} s_n^k | + \frac{H}{p} \sum_{n=\lambda(r)+1}^{\mu(m)} |a_{mn}| + H(1 + \frac{r}{p}) \sum_{n=\mu(m)+1}^{\infty} |a_{mn}| \\ &\le 4H\varepsilon_m + \frac{r}{p}\zeta_m + \frac{HM}{p} \\ &\le 4H\varepsilon_m + \zeta_m + \frac{HM}{p} \end{aligned}$$

dir.

iv) Eğer $N(k) < m \leq m(\frac{p(p-1)}{2})$ ve $\lambda(0)$ yerine $\lambda(m[\frac{p(p-1)}{2}])$ alırsak

$$|\sum_{n=1}^{\infty} a_{mn} t_n^k| \leq \frac{1}{p} |\sum_{n=\lambda(0)+1}^{\mu(m)} a_{mn} s_n^k| + |\sum_{n=\mu(m)+1}^{\infty} a_{mn} t_n^k|$$

dır (Eğer $\lambda(0) \geq \mu(m)$ ise sağ taraftaki ilk toplam sıfır olarak alınabilir). Bu ise

$$|\sum_{n=1}^{\infty} a_{mn} t_n^k| \leq \frac{HM}{p} + H\varepsilon_m$$

olmasını gerektirir.

$$v_m = 4H\varepsilon_m + \zeta_m + HM, [m(\frac{p(p-1)}{2} < m \leq m(\frac{p(p+1)}{2})]$$

olmak üzere her m ve k için

$$|\sum_{n=1}^{\infty} a_{mn} t_n^k| \leq v_m$$

ve $v_m \downarrow 0$ olduğundan ispat tamamlanır.

Tanım 2.2.5: $1-1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}-\frac{1}{2}-\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}+\frac{1}{n}+\cdots+\frac{1}{n}-\frac{1}{n}-\frac{1}{n}-\cdots-\frac{1}{n}+\cdots$

serisinin $\{u_k\}$ kısmi toplamlar dizisini $c-$ dizisi olarak adlandıracağız.[1]

Teorem 2.2.6: $A = (a_{mn})$ bir regüler matris $\{\lambda(m)\}$ ve $\{\mu(m)\}$;

$$\lambda(m) - \lambda(m-1) \leq 1 \ (m = 2,3,\cdots)$$

$$\lim_{m\to\infty} \sum_{n=1}^{\lambda(m)} |a_{mn}| = \lim_{m\to\infty} \sum_{n=\mu(m)}^{\infty} |a_{mn}| = 0$$

olacak şekilde diziler ve $\{u_k\}, c-$dizisi olsun. Eğer $\{s_n^p\}$ $(p = 1,2,\cdots)$ A tarafından sıfıra düzgün limitlenen, düzgün sınırlı dizilerin sayılabilir bir cümlesi ve $\{m_k\}$:

$$\lambda(m_{k+1}) \geq \mu(m_k) \ (\mathrm{k} = 1,2,\cdots)$$

olacak şekilde bir indis dizisi ise $\{s_n\}$ sınırlı dizisi A tarafından sıfıra limitlenir. Burada

$$s_n = u_k s_n^p, (\lambda(m_{p(p-1)}) \leq \lambda(m_k) \leq n \leq \lambda(m_{k+1}) < \lambda(m_{p(p+1)})) \ (\mathrm{p} = 2,3,\cdots)$$

$$s_n = s_n, (n < \lambda(m_2))$$

dir.[1]

İspat: $\{s_n\}$ teoremde tanımlandığı gibi olsun,

$$\sum_{n=1}^{\infty} | a_{mn} | \leq M \;\; (m=1,2,\cdots) \text{ ve } | s_n^p | \leq H \text{ }, | \sum_{n=1}^{\infty} a_{mn} s_n^p | < \zeta_m \;\; (\mathrm{m,p} = 1,2,\cdots)$$

(burada $\zeta_m \downarrow 0$)

$$m_{p(p-1)} \leq m_k \leq m_{k+1} < m_{p(p+1)} \text{ için}$$

$$|\sum_{n=1}^{\infty} a_{mn} s_n| \leq |\sum_{n=1}^{\lambda(m)} a_{mn} s_n| + u_k | \sum_{n=\lambda(m)+1}^{\mu(m)} a_{mn} s_n^p | + | u_k - u_{k+1} | | \sum_{n=\lambda(m_{k+1})}^{\mu(m)} a_{mn} s_n^p | + | \sum_{n=\mu(m)+1}^{\infty} a_{mn} s_n |$$

dir(Eğer $\lambda(m_{k+1}) \geq \mu(m)$ ise üçüncü toplam sıfır olarak alınabilir). Buradan

$$| \sum_{n=1}^{\infty} a_{mn} s_n | \leq 2H \sum_{n=1}^{\lambda(m)} | a_{mn} | + 2H \sum_{n=\mu(m)+1}^{\infty} | a_{mn} | + u_k | \sum_{n=1}^{\infty} a_{mn} s_n^p | + \delta_k MH$$

$$\leq 2H \sum_{n=1}^{\lambda(m)} | a_{mn} | + 2H \sum_{n=\mu(m)+1}^{\infty} | a_{mn} | + \zeta_m + MH\delta_k$$

ve $\{s_n\}$ dizisi sıfıra A limitlenebilir.

Teorem 2.2.7: $A = (a_{mn})$ ve $B = (b_{mn})$ regüler matrisler, $A \supseteq B$ ve E düzgün sınırlı dizilerin bir cümlesi olsun. Eğer E ; B tarafından sıfıra düzgün limitlenirse, A tarafından da düzgün limitlenir.[1]

İspat: Eğer E dizilerin sonsuz bir cümlesi ise ispat açıktır. Kabul edelim ki E ; A tarafından sıfıra düzgün limitlenemeyen sınırlı dizilerin sonsuz bir cümlesi olsun .Bu durumda her m_0 için bir $\{s_n\} \in E$ dizisi vardır öyle ki sabit bir ε ve $m > m_0$ için

$$\left| \sum_{n=1}^{\infty} a_{mn} s_n \right| > \varepsilon \qquad \ldots(5)$$

olur. $\{\lambda(m)\}$ ve $\{\mu(m)\}$ dizilerini

$$\lim_{m\to\infty} \sum_{n=1}^{\lambda(m)} |a_{mn}| = \lim_{m\to\infty} \sum_{n=1}^{\lambda(m)} |b_{mn}| = \lim_{m\to\infty} \sum_{n=\mu(m)+1}^{\infty} |a_{mn}| = \lim_{m\to\infty} \sum_{n=\mu(m)+1}^{\infty} |b_{mn}| = 0$$

$$\lambda(m) - \lambda(m-1) \leq 1 \quad (m = 2,3,\cdots)$$

olacak şekilde seçelim. $\{m(k)\}$ indislerin dizisi ve E nin sayılabilir bir alt cümlesi $\{s_n^p\}$ $(p = 1,2,\cdots)$ tümevarımla tanımlayabiliriz. $m(1) = 1$ ve $\{s_n^1\}$ bir m için (5) şartını sağlayan E nin bir elemanı olsun. Şimdi $m(r), (r \leq (p-1)^2 + 1)$ ve $\{s_n^r\}, (r \leq p-1)$'i seçelim;

$m(r),((p-1)^2+1<r\le p^2)$ 'yi $\lambda(m(r))\ge\mu(m(r-1))$ olacak şekilde,

$\{s_n^p\}\in E$ yi ,bir $m=m(\varepsilon,p)\ge m(p^2)$ için (5) şartını sağlayacak şekilde,

$m(p^2+1)$ 'i $\lambda(m(p^2+1))\ge\mu(m(\varepsilon,p))$ şekilde

seçelim. Bu şekilde $\{s_n^p\}$ yardımıyla sıfıra B limitlenen sınırlı bir $\{s_n^{'}\}$ dizisine sahip oluruz, fakat $m=m(\varepsilon,p)$ için

$$|\sum_{n=1}^{\infty}a_{mn}s_n^{'}|\ge|\sum_{n=\lambda(m)+1}^{\mu(m)}a_{mn}s_n^p|-\sum_{n=1}^{\lambda(m)}|a_{mn}||s_n^{'}|-\sum_{n=\mu(m)+1}^{\infty}|a_{mn}||s_n^{'}|\ge\varepsilon-2\sum_{n=1}^{\infty}|a_{mn}||s_n^{'}|$$

dir ve $\{s_n^{'}\}$, A tarafından limitlenemez. $A\supseteq B$ olduğundan bu bir çelişkidir ve E cümlesi A tarafından düzgün limitlenir.

2.3. SINIRLI YAKINSAKLIK ALANLARI VE ARAKESİTİ

$A=(a_{mn})$ ve $B=(b_{mn})$ regüler matrisler ise

$$c_{2k,n}=b_{k,n}\quad,\quad c_{2k-1,n}=a_{k,n}\quad(k,n=1,2,\cdots)$$

ile tanımlanan $C=(c_{mn})$ matrisi, hem A hem de B tarafından aynı değere limitlenen dizileri limitler.[1]

Tanım 2.3.1: Bir regüler matrisin sınırlı yakınsaklık alanı matris tarafından limitlenen sınırlı dizilerden ibarettir.

Sınırlı yakınsaklık alanlarının bir cümlesinin arakesiti,cümlenin her elemanına ait olan dizilerden ibarettir.[1]

Teorem 2.3.2: $\{A^k\}$ regüler matrislerin sayılabilir bir cümlesi olsun. Sınırlı bir diziyi limitleyen bir $A=(a_{mn})$ regüler matrisinin olması için gerek ve yeter şart bu dizinin her A^k $(k=1,2,\cdots)$ tarafından aynı değere limitlenmesidir.[1]

İspat: $\sup\limits_m\sum\limits_{n=1}^{\infty}|a_{mn}^k|=M(k)$ $\quad(k=1,2,\cdots)$ olsun.(Burada $\limsup\limits_{k\to\infty}M(k)=\infty$ olabilir.) $\{\xi_k\}$ yı, $\xi_1=1$, $\xi_k\downarrow 0$ ve $\zeta_k=\xi_k M(k)$ olmak üzere $\zeta_k\downarrow 0$ olacak şekilde seçelim. $A=(a_{mn})$ matrisi

$$A_1 = A_1^{'} \ , \ A_m = (1-\xi_r)A_v^{'} + \xi_r A_v^r \quad m = \frac{v(v+1)}{2} + r \quad (1 \le r \le v+1)$$

dönüşümü ile tanımlı olmak üzere

$$A_m^k(s_n) = \sum_{n=1}^{\infty} a_{mn}^k s_n \quad (m = 1,2,\cdots)$$

olsun.

Eğer sınırlı bir $\{s_n^{'}\}$ dizisi ve her $A^k \ (k = 1,2,\cdots)$ tarafından sıfıra limitlenirse $v \ge N$ için

$$\{A_v^k\} \le \varepsilon \quad (1 \le k \le j)$$

dir. $v \ge N$ ve $r \le j$ için

$$|A_m| \le |1-\xi_r||A_v^1| + \xi_r |A_v^R| \le (1+2\xi_r)\varepsilon,$$

ve $r > j$ için

$$|A_m| \le |1-\xi_r||A_v^1| + \xi_r |A_v^R| \le (1+\xi_r)\varepsilon + M(r)H\xi_r$$

burada $|s_n^{'}| \le H \quad (n = 1,2,\cdots)$ r'nin $M(r)H\xi_r < \varepsilon$ ve $N^{'}$ nün $|A_v^i| \le \varepsilon \quad (1 \le i \le r)$ $v > N^{'}$ şeklindeki seçiminden

$$|A_m| \le (2+\xi_r)\varepsilon \quad (v > N^{'})$$

olup $\{s_n^{'}\}, A$ tarafından sıfıra limitlenir.

Eğer $\{s_n^{'}\}$ her bir $A^k \ (k = 1,2,\cdots)$ tarafından s ye limitlenirse $\{s_n^{'} - s\}$ her bir matris tarafından sıfıra limitlenir. Bu yüzden $\{s_n^{'}\}$ A tarafından s ye limitlenir.

Eğer bir dizi bazı k lar için A^k tarafından limitlenemezse $\{A_m^r\}, (r < k)$ yakınsak kabul edilerek $\dfrac{v(v+1)}{2} + k, (v = 1,2,\cdots)$ indisli satırlar yakınsamayacaktır.

Eğer bir $\{s_n^{'}\}$ dizisi her matris tarafından aynı değere limitlenmiyorsa bu durumda $A^1 - \lim s_n^{'} = s_1$ ve bir k için $A^k - \lim s_n^{'} = s_2 \ne s_1$ dir. Bu

$$\{A_m\}, \ (m = 2,4,7,\cdots,\frac{v(v+1)}{2} + k;\cdots)$$

dizisinin limitinin s_1 ve

$$\{A_m\}, \ (m = \frac{k(k+1)}{2}, \frac{k(k+1)}{2} + k, \cdots, \frac{v(v+1)}{2} + k, \cdots)$$

dizisinin limitinin $(1-\xi_k)s_1+\xi_k s_2$ olmasını gerektirir ve $\{s_n'\}, A$ limitlenemez. Bu ispatı tamamlar.

Aşağıdaki corollary, teorem2.3.2 ve 2.1.7 nin bir sonucudur.

Corollary: A^k $(k=1,2,\cdots)$ regüler matrislerin sayılabilir bir cümlesi olsun. Eğer

$$A^1 \supseteq A^2 \supseteq \cdots \supseteq A^k \supseteq \cdots$$

ise bu matrislerin sınırlı yakınsaklık alanlarının arakesiti de sınırlı yakınsaklık alanıdır.[1]

Teorem 2.3.3: $\{A^i\}$ $(i=1,2,\cdots)$ regüler matrislerin sayılabilir bir cümlesi olsun öyle ki

$$A^1 \supseteq A^2 \supseteq \cdots \supseteq A^i \supseteq \cdots$$

ve her bir A^i en az bir sınırlı ıraksak diziyi limitlerse bu taktirde A^i limitlenen bir sınırlı ıraksak dizi vardır.[1]

İspat: Hipotez gereğince $\{s_n^i\}$ $(i=1,2,\cdots)$ sınırlı ıraksak dizilerin bir cümlesi vardır öyle ki $\{s_n^i\}$ sıfıra A^j $(1\le j\le i)$ limitlenir.

$$|s_n^i|\le 1 \quad (i,n=1,2,\cdots) \text{ ve } \lim_{n\to\infty}\sup|s_n^i|=1 \quad (i=1,2,\cdots)$$

olsun.

$\{m(h)\}, m(h)+1\le m(h+1)$ indislerin dizisi , her $m\ge m(h)$ için

$$\sum_{n=1}^{k}|a_{mn}^r|\le\frac{1}{h} \quad (1\le r\le h)$$

olacak şekilde seçilsin ve $\lambda(m)$

$$\lambda(m)=h \quad (m(h)\le m<m(h+1))$$

ile tanımlanan fonksiyon olsun. Eğer

$$m<m(r) \text{ için } \varepsilon_m(r)=\sup_m\sum_{n=1}^{\infty}|a_{mn}^r|$$

$$m(h)\le m\le m(h+1) \text{ için } \varepsilon_m(r)=\frac{1}{h} \quad (h\ge r)$$

ise

$$\sum_{n=1}^{\lambda(m)}|a_{mn}^r|\le\varepsilon_m(r) \quad (m,r=1,2,\cdots) \text{ ve } \varepsilon_m(r)\downarrow 0 \quad (r=1,2,\cdots)$$

dır.

$$\{\mu(m)\},\ \mu(m) > \mu(m-1)\ \ (m = 2,3,\cdots)$$

ve

$$\sum_{n=\mu(m)+1}^{\infty} |a_{mn}^{r}| < \frac{1}{m}\ \ (1 \le r \le m), (m = 1,2,\cdots)$$

olacak şekilde seçilsin.

$$m \le r \text{ için } \varepsilon_m^{'}(r) = \sup_m \sum_{n=1}^{\infty} |a_{mn}^{r}|$$

$$m \ge r \text{ için } \varepsilon_m^{'}(r) = \frac{1}{m}$$

ve $\varepsilon^{'}(r) \downarrow o, (r = 1,2,\cdots)$ olmak üzere

$$\sum_{n=\mu(m)+1}^{\infty} |a_{mn}^{r}| < \varepsilon_m^{'}(r)\quad (r, m = 1,2,\cdots)$$

olmasını gerektirir.

Her bir $(i, j), (1 \le i \le j)$ tamsayı çiftti için bir $\{\zeta_m(i,j)\}, \zeta_m(i,j) \downarrow 0$ dizisi vardır öyle ki

$$|A_m'(s_n^j)| = |\sum_{n=1}^{\infty} a_{mn}' s_n^j| < \zeta_m(i,j)\quad (m = 1,2,\cdots)$$

dir. Bu ise $\{\zeta_n\}$ dizisinin varlığını belirtir, öyle ki $A_m'(s_n^j)$, $\{\zeta_m\}$ sınırlıdır yani

$$|A_m'(s_n^j)| \le \zeta_m\quad (m > N(i,j))$$

dir. $N(j) = \max_{i \le j} N(i,j)$ olsun bu durumda

$$|A_m'(s_n^j)| \le \zeta_m\quad (m < N(j), 1 \le i \le j)$$

dir. $\{s_n^j\}, (j \ge i)$ dizilerin cümlesi A' tarafından sıfıra limitlenir. Şimdi $\{m(k)\}$. indislerin dizisini;

$$m(1) = 1\ \ ,\ \ \lambda(m(k+1)) = \mu(m(k))\ \ ,\ (k = 1,2,\cdots)$$

olacak şekilde seçelim ve $\{t_n^j\}$ dizilerini elde etmek için teorem 2.2.4 deki gibi $\{s_n^j\}, (j = 1,2,\cdots)$ dizileri üzerinde operasyon yapalım. Bu operasyonlar $N(j), \{\zeta_m\}, \{\mu_m\}$ ve $\{m(k)\}$ ya bağlıdır ve bu nicelikler matristen bağımsızdır. Daha önce olduğu gibi

$$|\sum_{n=1}^{\infty} a_{mn}^{i} t_{m}^{j}| \leq v_m \quad , \quad v_m = v_m(i) \quad (j \geq i)$$

ve $\{t_n^j\}$ $(j \geq i)$ dizileri, A^i tarafından düzgün limitlenen sınırlı ıraksak dizilerin bir cümlesini oluşturur. $\sup_m \sum_{n=1}^{\infty} |a_{mn}^i|$, $\{\varepsilon_m(i)\}$, $\{\varepsilon_m{}'(i)\}$ nin hepsi i ye bağlıdır öyle ki $\{v_m(i)\}$ de i ye bağlıdır. Şimdi $\{m(k')\}$ indislerin dizisini

$$m(1) = 1 \quad , \quad \lambda(m(k'+1)) \geq \mu(m(k')) \quad , (k' = 1,2,\cdots)$$

ve bir n_0 $\{ \{\lambda(m(p^2)) \leq n_0 \leq \lambda(m(p^2+1))\}$ $(p = 1,2,\cdots)$ için

$$||t_{n_0}^p|-1| < \frac{1}{p} \qquad \ldots(6)$$

olacak şekilde seçelim.

$\{t_n^p\}$ dizileri her bir A^i $(i = 1,2,\cdots)$ tarafından limitlenir çünkü her bir i için dizilerin sonlu sayıdakileri hariç A^i tarafından sıfıra düzgün limitlenir. A^i tarafından limitlenemeyen dizilerin sonlu cümlesi bu dizideki sadece sonlu sayıdaki terimi etkiler. (6) gereğince bu dizilerin ıraksak olduğu açıktır.

2.4. MATRİS CÜMLELERİ

Şimdi matrislerin sonsuz bir $\{A^1, A^2, \cdots A^k \cdots\}$ cümlesini alalım öyle ki her bir A^k matrisi , A^r $(1 \leq r < k)$ matrislerinin herhangi biri tarafından limitlenemeyen bir $\{s_n^k\}$ sınırlı dizisini limitlesin. Matrislerin bu cümlesi her biri öncekinden kesin $b-$kuvvetli olan matrislerin bir dizisi şeklinde alınabilir. Eğer cümlenin her elemanından $b-$kuvvetli bir $A = (a_{mn})$ matrisi varsa A nın cümledeki matrislerden herhangi biri tarafından limitlenemeyen bir sınırlı diziyi limitleyeceğini ispatlayacağız.

Teorem 2.4.1 : $\{A^k\}$ regüler matrislerin sayılabilir sonsuz bir cümlesi olsun öyle ki her bir A^k $(k \geq 2)$ matrisi, A^r $(1 \leq r \leq k)$ matrisi tarafından limitlenemeyen sınırlı bir $\{s_n^k\}$ dizisini limitlesin. Eğer $A = (a_{mn})$ matrisi cümledeki her bir matristen

$b-$kuvvetli ise A cümlenin herhangi bir elemanı tarafından limitlenemeyen sınırlı bir diziyi limitler.[1]

İspat: $\{s_n^k\}$ dizisi teorem 2.2.4 de A tarafından sıfıra düzgün limitlendiğinden, düzgün sınırlı olduğu farz edilebilir. Teorem 2.2.4 de kullanılan yapıda sonlu çokluktaki terimlerin değiştirilmesinden dizilerin dönüşümlerinin $\limsup$ ve $\liminf$ ine göre temelde hiçbir özelliği kaybolmaz. $\{\lambda(m)\}$ ve $\{\mu(m)\}$ teorem 2.3.3 deki gibi

$$\lim_{m\to\infty}\sum_{n=1}^{\lambda(m)}|a_{mn}|=\lim_{m\to\infty}\sum_{n=\mu(m)+1}^{\infty}|a_{mn}|=0$$

$$\lim_{m\to\infty}\sum_{n=1}^{\lambda(m)}|a_{mn}^k|=\lim_{m\to\infty}\sum_{n=\mu(m)+1}^{\infty}|a_{mn}^k|=0 \quad (k=1,2,\cdots)$$

$$\lambda(m)-\lambda(m-1)\le 1 \quad (m=2,3,\cdots)$$

olacak şekilde tanımlansın. $m(1)=1$ olsun ve $k\le(p-1)^2+1$ için $m(k)$' Nın belirlendiğini kabul edelim. Bu durumda $m(k)$, $((p-1)^2\le k\le p^2)$

$$\lambda(m(k))\ge\mu(m(k-1)) \qquad \ldots(7)$$

olacak şekilde seçilsin. p de

$$p=\frac{n(n+1)}{2}+r \quad (n=1,2,\cdots)$$

şeklinde olsun. Bu durumda $\lambda(m(p^2+1))\ge\mu(m(p^2))$ olacak şekilde $m(p^2+1)$ seçilirse m_0 $(m(p^2)<m_0\le m(p^2+1))$ için

$$|\sum_{n=1}^{\infty}a_{m_0 n}^{r-1}s_n^r|>\limsup_{m\to\infty}|\sum_{n=1}^{\infty}a_{mn}^{r-1}s_n^r|-\frac{1}{p} \qquad \ldots(8)$$

olur. eğer $r=1$ ise sadece (7)'nin $k=p^2+1$ için sağlanmasını isteyeceğiz.

$$k=1,1,2,1,2,3,\cdots,1,2,\cdots,r,1,\cdots$$

kuralına göre $\{s_n^k\}$ dizilerini oluşturmak için indislerin $\{m(k)\}$ dizisi kullanılarak, A tarafından sıfıra limitlenen bir dizi elde ederiz ve bu diziyi $\{s_n^{'}\}$ ile gösteririz. $s_n^{'}=0$ $\{\lambda(m[p(p-1)])<n\le\mu(m[p(p-1)])\}$ olduğundan her r için $(r=2,3,\cdots)$ için $|s_n^{'}|\le H$ $(n=1,2,\cdots)$ dır ve $m=m[p(p-1)]$ için

$$|\sum_{n=1}^{\infty} a_{mn}^{r-1} s_n'| \le |\sum_{n=1}^{\lambda(m)} a_{mn}^{r-1} s_n'| + |\sum_{n=\mu(m)+1}^{\infty} a_{mn}^{r-1} s_n'|$$
$$\le H\sum_{n=1}^{\lambda(m)} |a_{mn}^{r-1}| + H\sum_{n=\mu(m)+1}^{\infty} |a_{mn}^{r-1}|$$

olur ve

$$\liminf_{m\to\infty} |\sum_{n=1}^{\infty} a_{mn}^{r-1} s_n'| = 0 \qquad ...(9)$$

olur. Diğer taraftan her r ve m $(m(p^2) < m \le m(p^2+1))$ ve $p = \frac{n(n+1)}{2} + r$ $(r = 1,2,\cdots)$ için

$$|\sum_{n=1}^{\infty} a_{mn}^{r-1} s_n'| \ge |\sum_{n=\lambda(m)}^{\mu(m)} u_{p^2} a_{mn}^{r-1} s_n^R| - |\sum_{n=1}^{\lambda(m)} a_{mn}^{r-1} s_n'| - |\sum_{n=\mu(m)+1}^{\infty} a_{mn}^{r-1} s_n'| - |u_{p^2} - u_{p^2+1}|| \sum_{n=\lambda(m(p^2+1))}^{\mu(m)} a_{mn}^{r-1} s_n^r$$

dir. Eğer $\mu(m) < \lambda(m(p^2+1))$ ise son toplam sıfır olarak alınabilir.

$$|\sum_{n=1}^{\infty} a_{mn}^{r-1} s_n| \ge |\sum_{n=1}^{\lambda(m)} a_{mn}^{r-1} s_n'| - 2H\sum_{n=1}^{\lambda(m)} |a_{mn}^{r-1}| - 2H\sum_{n=\mu(m)+1}^{\infty} |a_{mn}^{r-1}| - \frac{H}{p}\sum_{n=1}^{\infty} |a_{mn}^{r-1}|$$

olup (8)'dan

$$\limsup_{m\to\infty} |\sum_{n=1}^{\infty} a_{mn}^{r-1}| \ge \limsup_{m\to\infty} |\sum_{n=1}^{\infty} a_{mn}^{r-1} s_n'| \qquad ...(10)$$

olduğu açıktır.

(9) ve (10) den $\{s_n'\}$, A^{r-1} $(r = 2,3,\cdots)$ tarafından limitlenemez. Bu da teoremin ispatını tamamlar.

2.5. DİZİLERİN LİMİTLERİNİN SINIRLARI

$|s_n| \le 1$ $(n = 1,2,\cdots)$ şeklindeki $\{s_n\}$ dizilerinin oluşturduğu E cümlesine birim küre denir.[1]

Tanım 2.5.1: $A = (a_{mn})$ bir regüler matris $\mathcal{A}$ da A tarafından limitlenen sınırlı dizilerin cümlesi olsun. A nın modülü

$$N(\mathcal{A}) = \sup |\, A - \lim s_n \,|$$

şeklinde tanımlanır. Burada sup, birim küredeki $\mathcal{A}$ nın bütün dizileri üzerinden alınır.[1]

Teorem 2.5.2: $A=(a_{mn})$ ve $B=(b_{mn})$ regüler matrisler ve $A \supseteq B$ olsun. Bu durumda

$$N(\mathcal{A}) \geq N(\mathcal{B})$$

dir.[1]

Teorem 2.5.3: $A=(a_{mn})$ bir regüler matris olsun. Bu durumda A, birim küredeki bir $\{s_n^{'}\}$ dizisini limitler öyle ki

$$N(\mathcal{A}) = A-\lim s_n'$$

dir.[1]

İspat: Modülün tanımı $\{s_n^k\}$ birim küredeki dizilerin bir cümlesinin varlığını gerektirir öyle ki

$$A-\lim s_n^k = s^k \quad (k=1,2,\cdots)$$

dır. Teorem 2.2.4 den, bu dizilerin A tarafından düzgün limitlendiği açıktır. $\{\lambda(m)\}$ ve $\{\mu(m)\}$;

$$\lim_{m\to\infty} \sum_{n=1}^{\lambda(m)} |a_{mn}| = \lim_{m\to\infty} \sum_{n=\mu(m)+1}^{\infty} |a_{mn}| = 0 \quad (k=1,2,\cdots)$$

$$\lambda(m)\lambda(-m-1) \leq 1 \quad (m=2,3,\cdots)$$

olacak şekilde tanımlansın. $m(1)=1$ ve $\{m(k)\}$

$$\lambda(m(k)) = \mu(m(k-1)) \quad (k=2,3,\cdots)$$

olacak şekilde indislerin dizisi olsun.

$$\{t_n^1\},\, t_n^1 = 0 \;\; \{n \leq \lambda(m(2))\}$$

ve

$$t_n^1 = u_k(s_n^{2p-1} - s^{2p-1}),$$

$$\lambda(m[p(p-1)] < \lambda(m(k)) \leq n \leq \lambda(m(k+1)) \leq \lambda(m[p(p+1)]) \;\; (p=2,3,\cdots)$$

$$\{t_n^{'}\},\, t_n^2 = (1-u_k)(s_n^{2p} - s^{2p}),$$

$$\lambda(m(p^2)) < \lambda(m(k)) \leq n \leq \lambda(m(k+1)) \leq \lambda(m([p+1]^2)) \;\; (p=1,2,\cdots)$$

$t_n^2 = 0 \quad \{n \le \lambda(m(1))\}$ olsun teorem 2.2.6 dan $\{t_n^1\}$ in A tarafından sıfıra limitlendiği görülür. $t_n = t_n^1 + t_n^2 \quad (n = 1,2,\cdots)$ olsun. Bu durumda $\{t_n\}, A$ tarafından sıfıra limitlenir. Şimdi

$$\lambda(m(p^2)) < \lambda(m(k)) \le n \le \lambda(m(k+1)) \le \lambda(m[p(p+1]) \text{ iken}$$

$$t_{n+s} = (1-u_k)s_n^{2p} + u_k s_n^{2p-1} - (1-u_k)s^{2p} - u_k s^{2p-1} + s \text{ dir ve}$$

$$\lambda(m[p(p+1)]) < \lambda(m(k)) \le n \le \lambda(m(k+1)) \le \lambda(m[(p+1)^2]) \text{ iken}$$

$$t_{n+s} = (1-u_k)s_n^{2p} + u_k s_n^{2p+1} - (1-u_k)s_{n\ \ddot{u}}^{2p} - u_k s^{2p+1} + s \text{ dir.}$$

Ayrıca; $\lambda(m(p^2)) < \lambda(m(k)) \le n \le \lambda(m(k+1)) \le \lambda(m[p(p+1])$ iken

$$\delta_n = s - (1-u_k)s_n^{2p} - u_k s_n^{2p-1},$$

$$\lambda(m[p(p+1)]) < \lambda(m(k)) \le n \le \lambda(m(k+1)) \le \lambda(m[(p+1)^2]) \text{ iken}$$

$$\delta_n = s - (1-u_k)s_n^{2p} - u_k s_n^{2p+1}$$

olarak tanımlanan $\{\delta_n\}$ dizisi sıfıra yakınsar,

$$v_n = t_n + s - \delta_n \quad (n = 1,2,\cdots)$$

eşitliği ile verilen $\{v_n\}$ dizisi birim küreededir ve s ye A limitlenir.

Teorem 2.5.4: $\{A^i\}$ regüler matrislerin sayılabilir sonsuz bir cümlesi olsun öyle ki

$$A^1 \supseteq A^2 \supseteq \cdots \supseteq A^i \supseteq \cdots$$

ve bunların sınırlı yakınsaklık alanlarının arakesiti $A = (a_{mn})$ nin sınırlı yakınsaklık alanı olsun. Bu durumda

$$N(\mathcal{A}) = \lim_{i\to\infty} N(\mathcal{A}^i)$$

dir.[1]

İspat: Teorem 2.5.3 den $\{s_n^i\}$ $(i = 1,2,\cdots)$ birim küredeki dizilerin bir cümlesine sahibiz öyle ki $s_n^i \in \mathcal{A}^r \quad (i \ge r)$

$$N(\mathcal{A}^i) = s^i = A^r - \lim s_n^i \quad (i \ge r)$$

dir. $s = \lim_{i\to\infty} s^i$ olsun. $s^1, s^2, \cdots$ azalan bir dizi ve alttan sınırlı olduğundan bu limit mevcuttur. Teorem 2.5.3 ün ispatındaki gibi $\{s_n^i - s\}$ dizisinden $\{t_n\}$ dizisi oluşturulabilir. $\{t_n\}$ deki sonlu çokluktaki terim $\{s_n^i - s^i\}$ $(i \le r)$ dizilerinden elde edildiğinden

$$A-\lim t_n = 0 \quad (r=1,2,\cdots)$$

dır. $s \le s'$ $(i=1,2,\cdots)$ olduğundan $\{t_n + s\}$ birim kürededir ve A' $(i=1,2,\cdots)$ tarafından s ye limitlenir. Bu ise

$$N(\mathcal{A}) \ge s$$

olmasını gerektirir ve teorem 2.5.2 den

$$N(\mathcal{A}) = s$$

dir.

Teorem 2.5.5: Eğer $\{s_n\}$ birim küreye ait, $A=(a_{mn})$ regüler matris ve

$$A-\lim s_n = N(\mathcal{A}) > 1$$

ise

$$\limsup_{n\to\infty} s_n = 1 \ , \ \liminf_{n\to\infty} s_n = -1$$

dir.[1]

İspat: Kabul edelim ki teorem doğru olmasın yani

$$\limsup_{n\to\infty} s_n = u < 1$$

olsun. Bu durumda bir n_0 bulabiliriz öyle ki $n \ge n_0$ için $s_n \le \dfrac{u+1}{2}$ dir. $\{s_n^{'}\}$,

$$s_n^{'} = \begin{cases} 0 & n < n_0 \\ s_n + \dfrac{1-u}{2} & n \ge n_0 \end{cases}$$

şeklinde tanımlanırsa $\{s_n^{'}\}$ birim kürededir. Eğer $N(\mathcal{A}) = N$ ise

$$A-\lim s_n^{'} = N + \frac{1-u}{2} > N$$

dir. Bu bir çelişkidir. O halde $\limsup\limits_{n\to\infty} s_n = 1$ dir.

Şimdi $N > 1$ ve $\liminf\limits_{n\to\infty} s_n = L > -1$ olduğunu kabul edelim $\varepsilon = \dfrac{L+1}{8} > 0$ olsun. Eğer $n \ge n_1$ ise $s_n \ge -1 + 4\varepsilon$ olur.

$$s''_n = \begin{cases} 0 & n < n_1 \\ \dfrac{s_n - \varepsilon/N}{1 - \varepsilon/N} & n \geq n_1 \end{cases}$$

olsun. Bu durumda

$$s''_n \leq \frac{1 - \varepsilon/N}{1 - \varepsilon/N} = 1$$

ve aynı zamanda

$$s''_n \geq \frac{-1 + 4\varepsilon - \varepsilon/N}{1 - \varepsilon/N} \geq \frac{-1 + 3\varepsilon/N}{1 - \varepsilon/N} \geq -1$$

dir. Bu durumda $\{s''_n\}$ birim küreededir ve

$$A - \lim s''_n = \frac{N - \varepsilon/N}{1 - \varepsilon/N} = N + \frac{\varepsilon - \varepsilon/N}{1 - \varepsilon/N} > N \ ,$$

$N > 1$ olduğundan $L = -1$ dir.Bu ispatı tamamlar.

2.6. MATRİS NORMLARI

Tanım 2.6.1: Bir $A = (a_{mn})$ regüler matrisinin $h(A)$ normu

$$h(A) = \limsup_{m \to \infty} \sum_{n=1}^{\infty} |a_{mn}|$$

ile tanımlanır.

A limitlenebilen dizilerin $\mathcal{A}$ cümlesinin normu

$$\|\mathcal{A}\| = \inf h(A)$$

dır. Burada inf: A ya $b-$denk olan bütün matrisler üzerinden alınır. $h(A) \geq \|\mathcal{A}\| \geq N(\mathcal{A}) \geq 1$ olup eğer $h(A) \leq N(\mathcal{A})$ ise

$$h(A) = \|\mathcal{A}\| = N(\mathcal{A})$$

olduğu açıktır. Örneğin $A = (a_{mn})$ matrisi

$$a_{m,2m-1} = \frac{1+k}{2} \quad , \; a_{m,2m} = \frac{1-k}{2} \quad (k > 1)$$

$$a_{m,n} = 0 \quad (n \neq 2m, 2m-1, m = 1,2,\cdots)$$

ile tanımlansın. Bu matris $\{(-1)^{n+1}\}$ dizisini k ya limitler ve

$$N(\mathcal{A}) \geq k = h(A)$$

ve buradan $\|\mathcal{A}\| = k$ dır.[1]

Teorem 2.6.2: Eğer $A = (a_{mn})$ ve $B = (b_{mn})$ regüler matrisler ve $A \supseteq B$ ise

$$\|\mathcal{A}\| \geq \|\mathcal{B}\|$$

dir.[1]

İspat: $\varepsilon > 0$ olsun ve $C = (c_{mn})$ matrisi

$$c_{2k-1,n} = \varepsilon b_{k,n} + (1-\varepsilon)a_{k,n} \ , \ c_{2k,n} = a_{k,n} \quad (k,n = 1,2,\cdots)$$

olarak tanımlansın.

$$A_m(s_n) = \sum_{n=1}^{\infty} a_{mn}s_n \quad , \quad B_m(s_n) = \sum_{n=1}^{\infty} b_{mn}s_n \quad (m = 1,2,\cdots)$$

olsun. Eğer $\{s_n\}$, C tarafından limitlenirse. C'nin çift indisli satırları yakınsak olduğundan $\{A_m(s_n)\}$ yakınsaktır, $\{\varepsilon B_m(s_n) + (1-\varepsilon)A_m(s_n)\}$ dizisinin de bu limite yakınsaması gerekir. Bu yüzden

$$C \supseteq B$$

ve B ile C matrisleri $b-$denktir. $\varepsilon > 0$ keyfi verildiğinden

$$h(c) \leq \max[h(A), \varepsilon h(B) + (1-\varepsilon)h(A)]$$

dır ve buradan

$$\|\mathcal{A}\| \geq \|\mathcal{B}\|$$

olur.

Aşağıdaki teorem; teorem 2.6.2 ve 2.5.2 nin bir sonucudur.

Teorem 2.6.3: Eğer $\{A^k\}$

(a) $\limsup_{k\to\infty} N(A^k) = \infty$,

(b) $\limsup_{k\to\infty} \|\mathcal{A}^k\| = \infty$

şartlarının ikisinden birini sağlayan regüler matrislerin sayılabilir sınırsız bir cümlesi ise

$$A \supseteq A^k \quad (k = 1,2,\cdots)$$

şartını sağlayan $A = (a_{mn})$ matrisi yoktur.[1]

$A = (a_{mn})$ matrisi $a_{m,2m-1} = 2$, $a_{m,2m} = -1$ ve $a_{mn} = 0$ $(n \neq 2m, 2m-1, m = 1,2,\cdots)$ ile tanımlansın.

$\{A^k\}$ matrisleri $(A_m^k = \sum a_{mn}^k s_n)$ A nın kendisi ile ard arda iterasyonu ile bulunur.

$$A^2 = A.A, A^3 = A.A^2, \cdots, A^k = A.A^{k-1}, \cdots$$

A nın her bir sütununda kesinlikle sıfır olmayan bir eleman vardır ve basit bir tümevarım A^k $(k = 2,3,\cdots)$ için bunun doğru olduğunu gösterir. Eğer

$$\lim_{k\to\infty} \sum_{n=1}^{\infty} |a_{mn}^k| = s$$

mevcut ise , s ye limitlenen 1 ve -1 lerin bir dizisi mevcuttur.

$k = 2$ için $\sum_{n=1}^{\infty} |a_{mn}^2| = 2(2+1) + 1(2+1) = (2+1)^2 = 3^2 \quad (m = 1,2,\cdots)$

Benzer şekilde $\sum_{n=1}^{\infty} |a_{mn}^k| = (2+1)^k = 3^k \quad (m = 1,2,\cdots)$ dir.Bu yüzden A^k, 1 ve -1 in bir dizisini 3^k ya limitler ve

$$3^k = h(A^k) = \|\mathcal{A}^k\|$$

dır.

Teorem 2.6.3'ü göz önünde bulundurduğumuzda her k için A^k dan $b-$kuvvetli regüler matris olmadığı açıktır.

Tanım 2.6.4: $A = (a_{mn})$ bir regüler matris olsun. Eğer

$$h(A') = \|\mathcal{A}\|$$

olacak şekilde A ya $b-$denk olan bir $A' = (a_{mn})$ matrisi varsa $\mathcal{A}$ nın normuna erişilebilir norm denir.[1]

Teorem 2.6.5: Bir regüler matrisin sınırlı yakınsaklık alanının normu daima erişilebilir değildir.[1]

İspat: $A_{2n-1} = s_{3n-2}$, $A_{2n} = 2s_{3n-1} - s_{3n}$ $(n = 1,2,\cdots)$

dönüşümleri ile tanımlanan $A=(a_{mn})$ matrisini göz önüne alalım. Tek satırlardan teşkil edilen matrisin normu 1 olduğundan ve A dan $b-$kuvvetli olduğundan ve teorem 2.6.2 den $\|\mathcal{A}\|\leq 1$ olduğu açıktır ve bu yüzden $\|\mathcal{A}\|=1$ dir.

Eğer $A^{+}=(a^{+}_{m,n})$, A ya $b-$denk ve $h(A^{+})=1$ ise

$$\lim_{m\to\infty}\sum{}' |a^{+}_{m,n}|=0$$

dır, burada $\sum{}'$, $a^{+}_{m,n}<0$ olan n indisleri üzerinden alınan toplamı gösterir. Bu negatif terimlerin sınırlı dizilerin limitini etkilemeyeceği açık olup. $a^{-}_{m,n}\geq 0$ $(m,n=1,2,\cdots)$ kabul edebiliriz.

A matrisi $0,\frac{1}{2},1,0,\frac{1}{2},1,\cdots,$ dizisini 0'a limitler, öyle ki A^{+} matrisi

$$\lim_{m\to\infty}\sum_{n=1}^{\infty}(\frac{1}{2}|a^{+}_{m,3n-1}|+|a^{+}_{m,3n}|)=0$$

şartını sağlar. Bu ise

$$\lim_{m\to\infty}\sum_{n=1}^{\infty}(|a^{+}_{m,3n-1}|+|a^{+}_{m,3n}|)=0$$

olmasını gerektirir. Bu son şart $0,1,-1,0,1,-1,\cdots$, dizisinin A^{+} da olduğunu ve sıfıra $A-$limitlendiğini gösterir. bu ise doğru değildir. Bu çelişki $\mathcal{A}$ nın normunun erişilebilir olmadığını gösterir.

KAYNAKLAR

[1] PETERSEN, G.M. *Regular Matrix Transformation*, McGraw-Hill, New York-Toronto-Sydney (1966).

[2] BALCI, M. *Matematik Analiz*, Ankara (1997).

[3] JOHNSONBAUGH, R. and PFAFFENBERGER, W.E. *Foundations of Mathematical Analysis*, New York (1981).

[4] POWELL, R.E. and SHAH. S.M. *Summability Theory and Its Applications*. Van Nostrand Reinhold Company, London (1972).

[5] HARDY, G.H., M.A., F.R.S. *Sırfi Matematik Dersleri*, İstanbul (1956).

ÖZGEÇMİŞ

07.09.1974 tarihinde Malatya'da doğdu. İlk ve orta öğrenimini Malatya'da tamamladı. 1992 yılında İnönü Üniversitesi Fen-Edebiyat Fakültesi Matematik Bilim Lisansına girmeye hak kazandı. 1996 yılında Matematik Bilim Lisansından mezun oldu. Aynı yılın güz döneminde İnönü Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalı'nda Yüksek Lisans öğrenimine başladı. 1998 yılında İnönü Üniversitesi Fen Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümünde Araştırma Görevlisi olarak göreve başladı ve şu anda bu görevine devam etmektedir.