İNÖNÜ ÜNİVERSİTESİ

FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

KUATERNİYONİK LORENTZ MANİFOLDLARI ÜZERİNDE EĞİLİM ÇİZGİLERİ VE KARAKTERİZASYONLARI

Müge KARADAĞ

DOKTORA TEZİ

MATEMATİK ANABİLİM DALI

MALATYA

1999

Fen Bilimleri Enstitüsü Müdürlüğüne

İşbu çalışma jürimiz tarafından Matematik Anabilim Dalında DOKTORA TEZİ olarak kabul edilmiştir.

Başkan:Prof.Dr. Ali İhsan Sivridağ..

Üye:Doç.Dr.Mahmut Ergüt..

Üye:Doç.Dr.Rıfat Güneş..

ONAY

Yukarıdaki imzaların adı geçen öğretim üyelerine ait olduğunu onaylarım.

....../...../1999

Prof.Dr.Satılmış KAYA

Enstitü Müdürü

ÖZET

Bu çalışma üç bölüm halinde düzenlenmiştir. Birinci bölüm daha sonraki bölümlerin daha iyi anlaşılabilmesi için temel kavramlara ayrılmıştır. Bu bölümde öncelikle Lorentz Uzayı ile reel ve dual kuaterniyonlar teorisinin başlıca temel tanım ve teoremleri verilmiştir.

İkinci ve üçüncü bölümler çalışmanın orjinal kısımlarını teşkil etmektedirler.

İkinci bölümde önce Q_{ID^3} ün eğilim çizgileri ve bunların harmonik eğrilikleri incelenerek dual uzay-kuaterniyonik eğilim çizgileri için karakterizasyonlar verilmiştir. Daha sonrada dual kuaterniyonların uzayı Q_{ID^4} ün eğilim çizgileri ve bunların harmonik eğrilikleri incelenerek, harmonik eğriliklere ait ilginç sonuçlar elde edilmiştir. Ayrıca kuaterniyonik eğilim çizgileri için bir de karakterizasyon verilmiştir.

Tamamen orjinal olan üçüncü bölümde önce pseudo kuateniyonik Lorentz uzayının eğrileri için Serret-Frenet formülleri türetilmiştir. Daha sonrada bu formüller yardımıyla pseudo kuaterniyonik Lorentz eğilim çizgileri ve harmonik eğrilikleri ile bunlara ait karakterizasyonlar verilmiştir.

ABSTRACT

This thesis consist of three chapters. The first chapter is separated to principle concepts. Specially, in this chapter the fundamental definitions and theorems of Lorentz Space and quaternion theory are given.

The second and third chapters are the original parts of the thesis.

In the second chapter, firstly the helices of Q_{ID}^3 and their harmonic curvatures are studied. And it is given some characterizations for dual space-quaternionic helices. Later, the helices of Q_{ID}^4 and their harmonik curvatures are studied. And some interesting results are obtained. Furthermore a characterization this quaternionic helices is given.

The third chapter is completely original. In this chapter, firstly the Serret-Frenet formulas of curves in pseudo quaternionic Lorentz space are derivated. Later by using this formulas the helices of pseudo kuaternionic Lorentz space and harmonic curvatures of them are investigated. And some characterizations for the helices of pseudo quaternionic Lorentz space are given.

TEŞEKKÜR

Bu çalışmanın hazırlanmasında gerekli bütün imkanları sağlayarak bana yardımcı olan, her adımda bilgisine başvurduğum çok değerli Hocam Sayın Prof.Dr. Ali İhsan Sivridağ'a ve araştırmalarım sırasında değerli yardımlarını, önerilerini ve eleştirilerini aldığım Sayın Bölüm Başkanımız Prof.Dr.Sadık Keleş'e ve matematik bölümünün tüm değerli elemanlarına sonsuz teşekkürlerimi sunarım.

İÇİNDEKİLER

GİRİŞ

E^3, 3-boyutlu Öklid uzayında eğrilerin en ilginç olanlarından biri helislerdir. Helislerin günlük hayatta çok sık rastlanan bir genel hareketin her anında çizilmek istenen yörüngeler oldukları bilinmektedir.

Bir koni yüzeyi hatta bir küre yüzeyi üzerinde de çizilebilen helislerin olup olmadığı fikri helis tanımını daha da genelleştirmek gerektiğine sevketmiş ve Alman matematikçisi **E.Müller** helisleri 'Her noktasında sabit bir doğrultu ile sabit açı yapan eğriler' olarak tanımlamış ve bunlara **eğilim çizgileri** adını vermiştir **(Blaschke,W.)**. **Remzi Öztürk'** ün (1980) doktora tez çalışması ile $n \rangle 3$ olmak üzere E^n deki eğilim çizgileri için en genel karakterizasyonlar verilmiştir. **Nejat Ekmekçi'** nin (1991) doktora tezi ile de eğilim çizgileri ve bunlara ait karakterizasyonlar Lorentz Uzayında incelenmiştir.

Kuaterniyonlar ve pseudo kuaterniyonlar **M.Nagaraj** ve **K.Bharathi** tarafından çalışılmış ve kuaterniyonik eğriler için Frenet formülleri türetilmiştir [11] ve [14]. Bu formüller gözönünde bulundurularak, kuaterniyonik eğilim çizgileri için **M. Karadağ** ve **A. İ.Sivridağ** tarafından bazı karakterizasyonlar verilmiştir [12]. Ayrıca **M.Nagaraj** ve **K.Bharathi** tarafından yapılan çalışmalar **A. İ. Sivridağ, R. Güneş ve S. Keleş** tarafından dual kuaterniyonik eğrilere genelleştirilmiştir [13].

Bu çalışmada ise [13] ve [14] gözönünde bulundurularak dual kuaterniyonik eğilim çizgileri ve pseudo kuaterniyonik Lorentz eğilim çizgileri çalışılmış ve bunlara ait bazı karakterizasyonlar verilmiştir.

1.BÖLÜM

TEMEL KAVRAMLAR

Bu bölüm bundan sonraki bölümlerin daha iyi anlaşılabilmesi için temel tanım ve teoremlere ayrılmıştır. Burada önce Öklid ve Lorentz uzaylarındaki bazı temel tanımlar verilmiş, daha sonrada reel ve dual kuaterniyonlar hakkında kısaca bilgi sunulmuştur.

I.1.Lorentz Uzayı

I.1.1.Tanım: V bir reel vektör uzayı olsun.

$$\langle\,,\rangle : V\, x\, V \to IR$$

dönüşümü

$$\forall\, a,b \in IR \;\; ve \;\; \forall\, \vec{u},\vec{v},\vec{w} \in V \; için$$

$$i)\; \langle \vec{u},\vec{v} \rangle = \langle \vec{v},\vec{u} \rangle$$

$$ii)\; \langle a\vec{u}+b\vec{v},\vec{w} \rangle = a\langle \vec{u},\vec{w} \rangle + b\langle \vec{v},\vec{w} \rangle$$

$$\langle \vec{u},a\vec{v}+b\vec{w} \rangle = a\langle \vec{u},\vec{v} \rangle + b\langle \vec{u},\vec{w} \rangle$$

özelliklerine sahip ise $\langle\,,\rangle$ dönüşümüne V vektör uzayı üzerinde simetrik bilineer form denir [1].

I.1.2.Tanım: V vektör uzayı üzerinde bir simetrik bilineer form $\langle , \rangle$ olsun. $\langle , \rangle$ simetrik bilineer formuna eğer

$i) \forall \vec{v} \in V$ *ve* $\vec{v} \neq 0$ *için* $\langle \vec{v}, \vec{v} \rangle > 0$ ise pozitif definit

$ii) \forall \vec{v} \in V$ *ve* $\vec{v} \neq 0$ *için* $\langle \vec{v}, \vec{v} \rangle < 0$ ise negatif definit

$iii) \forall \vec{v} \in V$ *ve* $\vec{v} \neq 0$ *için* $\langle \vec{v}, \vec{v} \rangle \geq 0$ ise pozitif semi definit

$vi) \forall \vec{v} \in V$ *ve* $\vec{v} \neq 0$ *için* $\langle \vec{v}, \vec{v} \rangle \leq 0$ ise negatif semi definit

$v) \forall \vec{w} \in V$ *için* $\langle \vec{v}, \vec{w} \rangle = 0$ *olduğunda* $\vec{v} = 0$ olmak zorunda ise non dejenere değilse dejeneredir denir [1].

I.1.1.Teorem: Bir $\langle , \rangle$ simetrik bilineer formunun non degenere olması için gerek ve yeter şart $\langle , \rangle$ nin herhangi bir baza göre matrisinin tersinin olmasıdır [1].

I.1.3.Tanım: Bir V vektör uzayı üzerindeki non dejenere simetrik bilineer forma V vektör uzayı üzerinde bir skalar çarpım denir. V üzerinde bir skalar çarpım $\langle , \rangle$ olmak üzere (V, $\langle , \rangle$) ikilisine skalar çarpımlı uzay denir [2].

I.1.2.Teorem: Bir $V \neq \{ 0 \}$ skalar çarpımlı uzayı bir ortonormal baza sahiptir [1].

I.1.3.Teorem: V vektör uzayı içindeki bir ortonormal baz $\{\vec{e}_1, \ldots, \vec{e}_n\}$ olsun. $\varepsilon_i = \langle \vec{e}_i, \vec{e}_i \rangle$ olmak üzere , $\forall \vec{v} \in V$ vektörü

$\vec{v} = \sum_{i=1}^{n} \varepsilon_i \langle \vec{v}, \vec{e}_i \rangle \vec{e}_i$ biçiminde tek türlü yazılabilir [1].

I.1.4.Tanım: V vektör uzayı üzerinde bir simetrik bilineer form

$$\langle , \rangle : V x V \rightarrow IR$$

olsun.

$$\langle , \rangle\big|_W : W x W \rightarrow IR$$

negatif definit olacak şekilde en büyük boyutlu W alt uzayının boyutuna $\langle , \rangle$ simetrik bilineer formunun indeksi denir ve ν ile gösterilir [1].

Buna göre , $0 \leq \nu \leq boy V$ dir. $\nu = 0$ olması için gerek ve yeter şart $\langle , \rangle$ nin pozitif semi definit olmasıdır. V nin bir bazı $\{\vec{e}_1, \ldots, \vec{e}_n\}$ olsun. $b_{ij} = \langle \vec{e}_i, \vec{e}_j \rangle$ olmak üzere $[b_{ij}]_{nxn}$ matrisine $\{\vec{e}_1, \ldots, \vec{e}_n\}$ bazına göre $\langle , \rangle$ nin matrisi denir. $\langle , \rangle$ simetrik olduğundan $[b_{ij}]_{nxn}$ matrisi de simetriktir.

$$\langle V, V \rangle = \langle \sum_{i=1}^{n} \vec{v}_i \vec{e}_i , \sum_{j=1}^{n} \vec{w}_j \vec{e}_j \rangle = \sum_{i,j=1}^{n} b_{ij} \vec{v}_i \vec{w}_j$$

olduğundan $[b_{ij}]_{nxn}$ matrisi $\langle , \rangle$ yi belirler.

I.1.5.Tanım : M , C^∞ manifold olmak üzere,

$$\langle , \rangle : \chi(M) \, x \, \chi(M) \to C^\infty(M, R)$$

şeklinde tanımlı simetrik ,bilineer , non dejenere fonksiyonuna M üzerinde metrik tensör adı verilir. Bu metrik tensörün indeksine M manifoldunun indeksi denir [1].

I.1.6.Tanım: Yarı Öklidyen Uzay

IR^n n-boyutlu standard reel vektör uzayı verilsin. $0 \leq \nu \leq n$ olmak üzere ν tamsayısı için , IR^n üzerinde

$$\left\langle v_p, w_p \right\rangle = \sum_{i=1}^{n-\nu} v_i \, w_i - \sum_{i=n-\nu+1}^{n} v_i \, w_i$$

ile verilen metrik tensör gözönüne alınırsa, elde edilen uzay yarı-Öklidyen uzay olarak adlandırılır ve IR_ν^n ile gösterilir [1].

I.1.7.Tanım: Minkowski Uzayı

IR_ν^n yarı-Öklidyen uzayı verilsin. Eğer;

$\nu = 0$ ise IR_0^n , E^n Öklidyen n- uzaydır.

$\nu = 1$ ve $n \geq 2$ ise IR_1^n Minkowski n-uzay olarak adlandırılır [4].

I.1.8.Tanım: M, C^{∞} manifold ve $\langle , \rangle$ de M üzerinde sabit indeksli metrik tensör olmak üzere, (M, $\langle , \rangle$) çiftine bir Semi-Riemann manifold denir [1].

I.1.9.Tanım: boy M = n olmak üzere, (M, $\langle , \rangle$) çifti bir Semi-Riemann manifold olsun. Eğer, $\nu = 0$ ise (M, $\langle , \rangle$) çiftine bir Riemann Manifoldu denir. Ayrıca, $n \geq 2$ *ve* $\nu = 1$ ise (M, $\langle , \rangle$) çiftine bir Lorentz Manifoldu denir [5].

Bu tanıma göre , (M, g) Lorentz Manifoldu için

$$g(v_p, w_p) = \sum_{i=1}^{n-1} v_i\big|_p w_i\big|_p - v_n\big|_p w_n\big|_p \quad : \ p \in M,\ v_p, w_p \in T_p M$$

dir.

I.1.10.Tanım: n-boyutlu bir Reel vektör uzayı IR^n ve $\forall \vec{x}, \vec{y} \in IR^n$ için Riemann iç çarpımı;

$$\langle , \rangle_{IR} : IR^n x\, IR^n \rightarrow IR$$

$$(\vec{x}, \vec{y}) \rightarrow \langle \vec{x}, \vec{y} \rangle_{IR} = \sum_{i=1}^{n} \vec{x}_i \vec{y}_i$$

şeklinde tanımlanır [2].

I.1.11.Tanım: Lorentz İç Çarpımı

IR^n n-boyutlu Reel vektör uzayı olsun. Lorentz iç çarpımı

$$\langle , \rangle_L : IR^n x\, IR^n \rightarrow IR$$

$$(\vec{x}, \vec{y}) \rightarrow \langle \vec{x}, \vec{y} \rangle_1 = \sum_{i=1}^{n-1} \vec{x}_i \vec{y}_i - \vec{x}_n \vec{y}_n$$

şeklinde tanımlanır [3].

Bu Lorentz iç çarpımı ile birleşen IR^n vektör uzayına da n-boyutlu Standard Lorentz Uzayı ya da kısaca Lorentz Uzayı denir. Yani ,

$$L^n = \left\{ IR^n, \langle , \rangle_L \right\}$$

dir.

Biz çalışmanın bu kısmında kısalığın hatırı için $\langle\, ,\rangle_L$ Lorentz iç çarpımını $\langle\, ,\rangle$ ile gösterceğiz ve $L^n=\left\{IR^n,\langle\, ,\rangle_L\right\}$ yerine de L^n sembolünü kullanacağız.

I.1.12.Tanım: $J:\overline{M}\to M$ inclusion dönüşümü olmak üzere, $J^*(g)$, $\overline{M}$ üzerinde metrik tensör ise $\overline{M}$ ye M nin Lorentz alt manifoldu denir [1].

I.1.13.Tanım: Bir $\vec{x}\in L^n$ vektörüne

$\langle\vec{x},\vec{x}\rangle > 0$ veya $\vec{x}=0$ ise space like vektör ,

$\langle\vec{x},\vec{x}\rangle < 0$ ise time like vektör,

$\langle\vec{x},\vec{x}\rangle=0$ *ve* $\vec{x}\neq 0$ ise light like veya null vektör denir [6].

I.1.14.Tanım: n-boyutlu Lorentz uzayı L^n nin iki $\vec{x},\vec{y}$ vektörü için $\langle\vec{x},\vec{y}\rangle=0$ ise bu iki vektöre Lorentz anlamında diktirler denir [7].

I.1.15.Tanım: $\vec{x}\in L^n$ için $\vec{x}$ vektörünün normu

$$\|\vec{x}\|_L=\sqrt{|\langle\vec{x},\vec{x}\rangle|}$$

olarak tanımlanır [1].

I.1.4.Teorem: $\vec{x}\in L^n$ olmak üzere,

i) $\|\vec{x}\|_L > 0$ dır.

ii) $\|\vec{x}\|_L=0\Leftrightarrow\vec{x}$ bir null vektördür.

iii) $\vec{x}$ bir time like vektör ise $\|\vec{x}\|^2_L=-\langle\vec{x},\vec{x}\rangle$ dir.

$vi)\,\vec{x}$ bir space like vektör ise $\|\vec{x}\|_L^2 = \langle \vec{x}, \vec{x} \rangle$ dir [1].

I.1.16.Tanım: (V, $\langle , \rangle$) bir Lorentz uzayı olsun. W $\subset$ V alt uzayını gözönüne alalım.

$i)\,\langle , \rangle|_W : WxW \to IR$ pozitif ise W'ya space like alt uzay

$ii)\,\langle , \rangle|_W$ indeksi 1 olan non dejenere ise W' ya time like alt uzay

$iii)\,\langle , \rangle|_W$ dejenere ise W' ya light like alt uzay denir [1].

I.1.17.Tanım: V Lorentz uzayında bütün time like vektörlerin cümlesi τ olsun. $\vec{x} \in \tau$ için , $\{\vec{y} \in \tau : \langle \vec{x}, \vec{y} \rangle \langle 0\}$ cümlesine $\vec{y}$ nin $\vec{x}$'i ihtiva eden time konisi denir [1].

I.1.18.Tanım: Lorentz uzayında time like vektörler $\vec{x}, \vec{y}$ olsunlar. Bu iki vektörün aynı time konide olması için gerek ve yeter şart $\langle \vec{x}, \vec{y} \rangle \langle 0$ olmasıdır [1].

I.1.5.Teorem: Lorentz uzayında $\vec{x}, \vec{y}$ iki time like vektör olsun. Bu durumda ;

$i)$ $|\langle \vec{x}, \vec{y} \rangle| \geq \|\vec{x}\|_L \|\vec{y}\|_L$ (Lorentz uzayında Schwartz eşitsizliği)

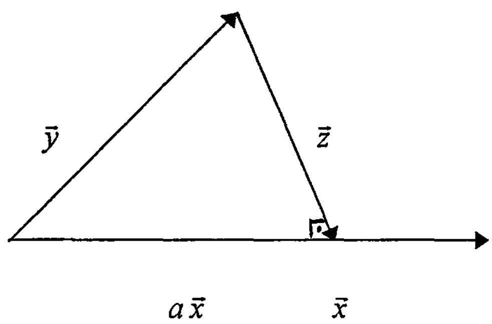
$ii)$ Eğer $\vec{x}, \vec{y}$ vektörleri aynı time konide iseler,

$$\langle \vec{x}, \vec{y} \rangle = -\|\vec{x}\|_L \|\vec{y}\|_L \, ch\varphi$$

olacak şekilde $\vec{x}$ *ve* $\vec{y}$ arasında hiperbolik açı diye adlandırılan bir tek $\varphi \geq 0$ sayısı vardır [7].

İspat : $\vec{y}$ vektörünün $\vec{x}$ üzerine Lorentz anlamında dik izdüşümünü alalım.

Bu durumda $\langle \vec{x}, \vec{z} \rangle = 0$ *ve* $\vec{y} = a\,\vec{x} + \vec{z}$ olup $\vec{z}$ vektörü bir space like vektördür.



Şekil-1

$$\langle \bar{y},\bar{y}\rangle=\langle a\,\bar{x}+\bar{z},a\,\bar{x}+\bar{z}\rangle$$

$$= a^2\langle \bar{x},\bar{x}\rangle+\langle \bar{z},\bar{z}\rangle$$

$$a^2\langle \bar{x},\bar{x}\rangle=\langle \bar{y},\bar{y}\rangle-\langle \bar{z},\bar{z}\rangle \qquad \ldots(I.1.1)$$

elde edilir.Diğer taraftan,

$$\langle \bar{x},\bar{y}\rangle^2=\langle \bar{x},a\bar{x}+\bar{z}\rangle^2=a^2\langle \bar{x},\bar{x}\rangle^2$$

(I.1.1) ifadesi ile birlikte,

$$\langle \bar{x},\bar{y}\rangle^2=(\langle \bar{y},\bar{y}\rangle-\langle \bar{z},\bar{z}\rangle)\langle \bar{x},\bar{x}\rangle$$

$$\langle \bar{x},\bar{y}\rangle^2=\langle \bar{y},\bar{y}\rangle\langle \bar{x},\bar{x}\rangle-\langle \bar{z},\bar{z}\rangle\langle \bar{x},\bar{x}\rangle \qquad \ldots \text{(I.1.2)}$$

olur. Son ifadede pozitif terim kaldırılırsa,

$$\langle \vec{x},\vec{y}\rangle^2 \geq \langle \vec{y},\vec{y}\rangle\langle \vec{x},\vec{x}\rangle$$

$$\langle \vec{x},\vec{y}\rangle^2 \geq \|\vec{x}\|_L^2 \|\vec{y}\|_L^2$$

$$|\langle \vec{x},\vec{y}\rangle| \geq \|\vec{x}\|_L \|\vec{y}\|_L$$

bulunur.

ii) $\vec{x},\vec{y}$ aynı time konide olsun. O zaman $\langle \vec{x},\vec{y}\rangle \langle 0$

$$\langle \vec{x},\vec{y}\rangle^2 = \langle \vec{x},\vec{x}\rangle\langle \vec{y},\vec{y}\rangle - \langle \vec{z},\vec{z}\rangle\langle \vec{x},\vec{x}\rangle$$

$$\frac{\langle \vec{x},\vec{y}\rangle^2}{\langle \vec{x},\vec{x}\rangle\langle \vec{y},\vec{y}\rangle} = 1 - \frac{\langle \vec{z},\vec{z}\rangle}{\langle \vec{y},\vec{y}\rangle}$$

dır.

$\vec{y}$ time like olduğundan $\langle \vec{y},\vec{y}\rangle = -\|\vec{y}\|^2{}_L$ dir. Ayrıca,

$$\frac{\langle \vec{x},\vec{y}\rangle^2}{\|\vec{x}\|_L^2 \|\vec{y}\|_L^2} = 1 + \frac{\langle \vec{z},\vec{z}\rangle}{\|\vec{y}\|_L^2}$$

olup, $\vec{z}$ space like olduğundan $\langle \vec{z},\vec{z}\rangle = \|\vec{z}\|^2{}_L$ dir. Burada

$$\frac{\langle \vec{x},\vec{y}\rangle^2}{\|\vec{x}\|_L^2 \|\vec{y}\|_L^2} - \frac{\|\vec{z}\|^2{}_L}{\|\vec{y}\|_L^2} = 1,\quad ch^2\varphi = \left(\frac{\langle \vec{x},\vec{y}\rangle}{\|\vec{x}\|_L \|\vec{y}\|_L}\right)^2 \Rightarrow |ch\varphi| = \frac{|\langle \vec{x},\vec{y}\rangle|}{\|\vec{x}\|_L \|\vec{y}\|_L}\quad ,\ sh^2\varphi = \left(\frac{\|\vec{z}\|_L}{\|\vec{y}\|_L}\right)$$

dir. $\forall\ \varphi \in IR$ için $ch\varphi \rangle 0$ ve $\langle \vec{x},\vec{y}\rangle \langle 0$ olduğundan ,

$$ch\varphi = -\frac{\langle \vec{x},\vec{y}\rangle}{\|\vec{x}\|_L \|\vec{y}\|_L}$$

olur.

Aynı time konideki $\forall \vec{x}, \vec{y}$ vektör çifti için ,

$$ch(-\varphi) = ch\varphi$$

olduğundan $\forall \vec{x}, \vec{y}$ vektör çiftine φ *ve* $-\varphi$ gibi iki tane hiperbolik açı karşılık gelir. Bu durumda $\vec{x}$ *ve* $\vec{y}$ arasındaki hiperbolik açı olarak $\varphi \geq 0$ açısını alacağız.

I.1.1.Sonuç: İki vektörün dik olabilmesi için gerek ve yeter şart birinin time like diğerinin space like olmasıdır [7].

I.1.19.Tanım: L^3 **de vektörel çarpım**

$\vec{x} = (\vec{x}_1, \vec{x}_2, \vec{x}_3)$, $\vec{y} = (\vec{y}_1, \vec{y}_2, \vec{y}_3) \in L^3$ olmak üzere,

$$\wedge\big|_L : L^3 x\, L^3 \rightarrow L^3$$

$$(\vec{x}, \vec{y}) \rightarrow \vec{x} \wedge\big|_L \vec{y} = (\vec{x}_2\vec{y}_3 - \vec{x}_3\vec{y}_2 , \vec{x}_3\vec{y}_1 - \vec{x}_1\vec{y}_3 , -(\vec{x}_1\vec{y}_2 - \vec{x}_2\vec{y}_1))$$

şeklinde tanımlı $\wedge\big|_L$ operatörüne L^3 de Lorentz anlamında vektörel çarpım denir [8].

Lorentz anlamındaki vektörel çarpım, IR^3 deki vektörel çarpımın ifadesine benzer olarak ,

$$\vec{x} \wedge\big|_L \vec{y} = \det \begin{vmatrix} \vec{e}_1 & \vec{e}_2 & -\vec{e}_3 \\ \vec{x}_1 & \vec{x}_2 & \vec{x}_3 \\ \vec{y}_1 & \vec{y}_2 & \vec{y}_3 \end{vmatrix}$$

şeklinde de ifade edilebilir.

I.1.2.Sonuç : $\vec{x}, \vec{y}, \vec{z} \in L^3$ olmak üzere

i) $\langle \vec{x} \wedge\big|_L \vec{y}, \vec{z} \rangle = \det(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$

ii) $(\vec{x} \wedge\big|_L \vec{y}) \wedge \vec{z} = \langle \vec{y}, \vec{z} \rangle \vec{x} - \langle \vec{x}, \vec{z} \rangle \vec{y}$

iii) $\langle \vec{x}, x \wedge\big|_L y \rangle = 0$

iv) $\langle \vec{y}, \vec{x} \wedge\big|_L \vec{y} \rangle = 0$

dir [8].

I.1.3.Sonuç: $\forall \vec{x},\vec{y} \in L^n$ için,

$$\langle \vec{x} \wedge|_L \vec{y}, \vec{x} \wedge|_L \vec{y} \rangle = (\langle \vec{x},\vec{y} \rangle)^2 - \langle \vec{x},\vec{x} \rangle \langle \vec{y},\vec{y} \rangle$$

dir [8].

I.1.20.Tanım: Bir α eğrisine

$\langle \dot{\alpha},\dot{\alpha} \rangle < 0$ ise time like eğri

$\langle \dot{\alpha},\dot{\alpha} \rangle > 0$ ise space like eğri

$\langle \dot{\alpha},\dot{\alpha} \rangle = 0$ ise null eğri

adı verilir [5].

I.1.6. Teorem: $M \subset L^n$ de time like bir eğri olsun. $s \in I$ yay parametresi olmak üzere, $\alpha(s)$ noktasındaki i-yinci eğrilik $k_i(s)$ ve Frenet r-ayaklısı $\{ V_1, V_2, \dots, V_{r-1}, V_r \}$ olsun. Bu durumda;

i) $\dot{V}_1 = \varepsilon_0 k_1 V_2$

ii) $\dot{V}_i = -\varepsilon_0 k_{i-1} V_{i-1} + \varepsilon_0 k_i V_{i+1}, \quad 1 < i < r$ ... (I.1.3)

iii) $\dot{V}_r = -\varepsilon_0 k_{r-1} V_{r-1}$

dir. Burada,

$$\varepsilon_0 = \begin{cases} -1, \ V_i & \textit{time like} \\ +1, \ V_i & \textit{space like} \end{cases}$$

dır [8].

İspat:

i) $V_1 = \dot{\alpha} \Rightarrow \dot{V}_1 \in Sp\{ \dot{\alpha}, \ddot{\alpha} \} = Sp\{ V_1, V_2 \}$

dir. Buna göre

$$\dot{V}_1 = \lambda_1 V_1 + \lambda_2 V_2$$

$$\langle V_1, V_1 \rangle = -1$$

$\langle \dot{V}_1, V_1 \rangle = 0$

ve

$\langle V_1, V_2 \rangle = 0$

den

$\langle \dot{V}_1, V_2 \rangle = -\langle \dot{V}_2, V_1 \rangle$

olduğundan,

$$\lambda_1 = \langle \dot{V}_1, V_1 \rangle = 0$$

$$\lambda_2 = \langle \dot{V}_1, V_2 \rangle = k_1 \quad ve \quad \langle V_2, V_2 \rangle = +1$$

olur. Buradan da

$$\dot{V}_1 = k_1 V_2 \quad veya \quad \dot{V}_1 = \varepsilon_0 \, k_1 V_2$$

elde edilir.

ii) Tümevarım metodunu uygulayacağız. Buna başlamadan önce şu yardımcı bağıntıları ispatlayalım:

i) $\langle \dot{V}_i, V_i \rangle = 0$

ii) $\langle \dot{V}_i, V_j \rangle = -\langle V_i, \dot{V}_j \rangle$

İspat:

i) $\langle V_i, V_i \rangle = \varepsilon_0 \quad , \quad \varepsilon_0 = \pm 1$

türev olup, buradan türev alınarak

$$\langle \dot{V}_i, V_i \rangle = 0$$

elde edilir.

ii) $\langle V_i, V_j \rangle = 0, \;\; i \neq j$

eşitliğinden türev alınarak

$$\langle \dot{V}_i, V_j \rangle + \langle V_i, \dot{V}_j \rangle = 0$$

veya

$$\langle \dot{V}_i, V_j \rangle = -\langle V_i, \dot{V}_j \rangle$$

elde edilir.

Bu bağıntılardan yararlanarak şimdi (ii) yi ispatlayalım:

1.Adım: i = 2 için doğru olduğunu gösterelim.

$$V_2 = \frac{\ddot{\alpha}}{\|\ddot{\alpha}\|_L}$$

olduğundan, $\dot{V}_2 \in Sp\{\dot{\alpha}, \ddot{\alpha}, \dddot{\alpha}\} = Sp\{V_1, V_2, V_3\}$

$$\dot{V}_2 = \lambda_1 V_1 + \lambda_2 V_2 + \lambda_3 V_3$$

$$\langle V_1, V_1 \rangle = -1$$

$$\varepsilon_0 \lambda_1 = \langle \dot{V}_2, V_1 \rangle = -\langle \dot{V}_1, V_2 \rangle$$

$$\varepsilon_0 \lambda_1 = -k_1 \quad , \quad \frac{1}{\varepsilon_0} = \varepsilon_0$$

$$\lambda_1 = -\varepsilon_0 k_1$$

$$\lambda_2 = \langle \dot{V}_2, V_2 \rangle = 0 \text{ ve}$$

$$\lambda_3 = k_2$$

dolayısıyla, $\varepsilon_0 = +1$ olmak üzere,

$$\dot{V}_2 = -\varepsilon_0 k_1 V_1 + \varepsilon_0 k_2 V_3$$

elde edilir.

2.Adım:

i = m için ifade doğru olsun. i = m+1 için de doğruluğunu gösterelim.

$$\dot{V}_3 = -\varepsilon_0 k_2 V_2 + \varepsilon_0 k_3 V_4$$

$$\dot{V}_4 = -\varepsilon_0 k_3 V_3 + \varepsilon_0 k_4 V_5$$

....

$$\dot{V}_{m+1} = -\varepsilon_0 k_{m-2} V_{m-2} + \varepsilon_0 k_{m-1} V_m$$

dir.O zaman i = m+1 için

$$\dot{V}_{m+1} \in Sp\{V_1, V_2, \ldots, V_{m+1}, V_{m+2}\} \text{ den}$$

$$\dot{V}_{m+1} = \lambda^1_{m+1} V_1 + \lambda^2_{m+1} V_2 + \ldots + \lambda^m_{m+1} V_m + \lambda^{m+1}_{m+1} V_{m+1} + \lambda^{m+2}_{m+1} V_{m+2}$$

dir. Burada, λ^j_{m+1} katsayılarını hesaplayalım.

$\lambda^1_{m+1} = \langle \dot{V}_{m+1}, V_1 \rangle = -\langle \dot{V}_1, V_{m+1} \rangle$, ayrıca teoremin ilk şıkkından $\dot{V}_1$ nün V_{m+1}

üzerinde bileşeni yoktur. Dolayısıyla $\lambda_{m+1}^{1}=0$ dır. Benzer şekilde devam edilirse, $\lambda_{m+1}^{m-2}=0$ *ve* $\lambda_{m+1}^{m+1}=0$ olduğu görülür. Yani hesapladığımız ifadede sıfır olmak zorunda bulunmayan λ_{m+1}^{1} *ve* λ_{m+1}^{m+2} bileşenleri kalır.Bu bileşenler de

$$\varepsilon_0\lambda_{m+1}^{m}=\langle\dot V_{m+1},V_m\rangle=-\langle\dot V_m,V_{m+1}\rangle$$

$$\lambda_{m+1}^{m}=-\varepsilon_0\langle\dot V_m,V_{m+1}\rangle \quad , \quad \lambda_{m+1}^{m}=-\varepsilon_0 k_m \quad \text{ve}$$

$$\varepsilon_0\lambda_{m+2}^{m+1}=\langle\dot V_m,V_{m+2}\rangle \quad , \quad \lambda_{m+2}^{m+1}=-\varepsilon_0 k_{m+1}$$

dir. O halde,

$$\dot V_{m+1}=-\varepsilon_0 k_m V_m+\varepsilon_0 k_{m+1}V_{m+2} \quad , \quad \dot V_i=-\varepsilon_0 k_{i-1}V_{i-1}+\varepsilon_0 k_i V_{i+1}$$

elde edilir.

iii) α eğrisinin türev vektörleri arasında en fazla r tanesi lineer bağımsız olacağından

$\dot V_r\in Sp\{\dot\alpha,\ddot\alpha,\dots,\alpha^r\}=Sp\{V_1,V_2,\dots,V_r\}$ olduğundan $\dot V_r\in Sp\{V_1,V_2,\dots,V_r\}$ ve dolayısı ile

$$\dot V_r=\sum_{i=1}^{r}\lambda_i V_i$$

olur. Buradan;

$$\varepsilon_0\lambda_i=\langle\dot V_r,V_i\rangle=-\langle\dot V_i,V_r\rangle \quad ,1\le i\le r$$

$$\dot V_i=-\varepsilon_0 k_{i-1}V_{i-1}+\varepsilon_0 k_i V_{i+1} \quad , \quad \varepsilon_0\lambda_i=-\varepsilon_0 k_i$$

$$\lambda_i=-\varepsilon_0 k_i\langle V_{i+1},V_r\rangle, \quad 1\le i\le r \;\; ve$$

$i=r-1$ için λ_i *den* $\langle V_r,V_r\rangle=\varepsilon_0$ konumu yapılarak

$$\lambda_{r-1}=-\varepsilon_0 k_{r-1}$$

$i=r$ için $\lambda_r=0$ *ve* $1\le i\le r-1$ için $\lambda_i=0$

$$\dot V_r=-\varepsilon_0 k_{r-1}V_{r-1}$$

bulunur. Böylece $\{V_1,V_2,\dots,V_r\}$ Frenet r-ayaklısının V_i Frenet vektörlerinin eğri boyunca kovaryant türevleri ile ilgili eşitlikler aşağıdaki şekildedir;

$$\dot V_i=\begin{cases}\varepsilon_0 k_1 V_2, & i=1\\ -\varepsilon_0 k_i V_{i-1}+\varepsilon_0 k_i V_{i+1}, & 1\le i\le r-1\\ -\varepsilon_0 k_r V_{r-1}, & i=r\end{cases} \qquad \text{... (I.1.4)}$$

[8].

I.1.21.Tanım : $M \subset L^n$ eğrisinin birim teğet vektör alanı V_1 ve $\vec{u}$, L^n in sabit birim bir vektörü olsun. Eğer $\forall\, p \in M$ için

$$\langle V_1, \vec{u} \rangle \big|_p = ch\ \varphi = st.$$

ise M eğrisine L^n de eğilim çizgisi, φ açısına M nin eğilim açısı $Sp\{\,\vec{u}\,\}$ uzayına da M nin eğilim ekseni denir [8].

I.1.22.Tanım : $M \subset L^n$ eğrisi verilmiş olsun. M nin eğrilikleri $k_1, k_2, k_3, \dots, k_{n-1}$ olsunlar. M nin birim teğet vektör alanı V_1 olmak üzere;

$$H_i : I \to IR$$

$$H_i = \begin{cases} 0 & ,i=0 \\ \dfrac{k_1}{k_2} & ,i=1 \\ \{V_1[H_{i-1}] + \varepsilon_0 H_{i-2} k_i\} \dfrac{\varepsilon_0}{k_{i+1}} & ,\ 1 \langle i \le n-2 \end{cases}$$

şeklinde tanımlı H_i fonksiyonuna, M nin i-yinci mertebeden Harmonik eğrilik fonksiyonu denir. Burada, $\varepsilon_0 = \pm 1$ dir [8].

Bu tanımda H_i fonksiyonlarının V_1 yönündeki kovaryant türevlerinin matrisel formdaki ifadesi

$$\begin{bmatrix} V_1[H_1] \\ V_1[H_2] \\ V_1[H_3] \\ . \\ . \\ . \\ V_1[H_{n-4}] \\ V_1[H_{n-3}] \\ V_1[H_{n-2}] \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \varepsilon_0 k_3 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ -\varepsilon_0 k_3 & 0 & \varepsilon_0 k_4 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\varepsilon_0 k_4 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ . & . & . & \dots & . & . & . \\ . & . & . & \dots & . & . & . \\ . & . & . & \dots & . & . & . \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & \varepsilon_0 k_{n-2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & -\varepsilon_0 k_{n-2} & 0 & \varepsilon_0 k_{n-1} \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & -\varepsilon_0 k_{n-1} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} H_1 \\ H_2 \\ H_3 \\ . \\ . \\ . \\ H_{n-4} \\ H_{n-3} \\ H_{n-2} \end{bmatrix}$$

dir [8].

I.2.Reel Kuaterniyonlar

I.2.1.Tanım : Bir reel kuaterniyon sıralı dört sayının +1, $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$ gibi dört birime eşlik etmesiyle tanımlanır [9]. Burada +1 bir reel birim olup diğer üç birim ise,

$i)\ \vec{e}_1 \; x \; \vec{e}_1 = \vec{e}_2 \; x \; \vec{e}_2 = \vec{e}_3 \; x \; \vec{e}_3 = -\vec{e}_4 \; , \; (\vec{e}_4 = +1)$

$ii)\ \vec{e}_i \; x \; \vec{e}_j = \vec{e}_k = -\vec{e}_j \; x \; \vec{e}_i \; , \; (ijk) \;\; (123)$ *ün çift permutasyonudur.*

özelliklerini sağlar. Böylece bir reel kuaterniyon ,

$$q = a\,\vec{e}_1 + b\,\vec{e}_2 + c\,\vec{e}_3 + d$$

şeklindedir. Burada ,

$$S_q = d \; , \; \vec{V}_q = a\,\vec{e}_1 + b\,\vec{e}_2 + c\,\vec{e}_3 \;\; , \; q = S_q + \vec{V}_q$$

olmak üzere ; S_q , q nun skalar kısmı $\vec{V}_q$ ise vektörel kısmıdır [9] ,[10].

Bundan sonra reel kuaterniyonların cümlesi Q ile gösterilecektir. Şimdi reel kuaterniyonlar üzerindeki işlemlerden bahsedelim:

I.2.2.Tanım : Toplama işlemi

$$\oplus : Q \, x \, Q \to Q$$

$$(p,q) \to p \oplus q = S_{p\oplus q} + \vec{V}_{p\oplus q}$$

şeklinde tanımlanır, burada

$$S_{p\oplus q} = S_p + S_q \quad ve \quad \vec{V}_{p\oplus q} = \vec{V}_p + \vec{V}_q$$

dır.Burada $S_p, S_q \in IR$ ve + işlemi IR deki toplama işlemi olup $\vec{V}_p, \vec{V}_q$ da birer reel vektördür. Böylece, $(Q, \oplus)$ ikilisi bir Abel grubudur. Buradaki etkisiz eleman sıfır kuaterniyonudur ve (0,0,0,0) dörtlüsünden ibarettir [9].

I.2.3.Tanım: Skalar ile çarpma

$$o: IR\, x\, Q \to Q$$

$$(\lambda, q) \to \lambda\, o\, q = \lambda q = \lambda S_q + \lambda \vec{V}_q$$

şeklinde tanımlanır. Buna göre

$i)\ \lambda\, o\,(p \oplus q) = (\lambda\, o\, p) \oplus (\lambda\, o\, q) \quad , \forall \lambda \in IR \ ve\ \forall p, q \in Q$

$ii)\ (\lambda_1 + \lambda_2)\, o\, q = (\lambda_1 o\, q) \oplus (\lambda_2 o\, q) \quad , \forall \lambda_1, \lambda_2 \in IR \ ve\ \ \forall q \in Q$

$iii)\ (\lambda_1 \cdot \lambda_2)\, o\, q = \lambda_1 o\, (\lambda_2 o\, q)$

$iv)\ 1\, o\, q = q$

dir. Bu durumda, $\{Q, \oplus, IR, +, \cdot, o\}$ sistemi bir reel vektör uzayıdır. Kısaca bu uzayı Q ile göstereceğiz [9].

I.2.4.Tanım : Kuaterniyon Çarpımı

p, q reel kuaterniyonlarının kuaterniyon çarpımı;

$$p\, x\, q = S_p \cdot S_q + S_p o \vec{V}_q + S_q o \vec{V}_p - \langle \vec{V}_p, \vec{V}_q \rangle + \vec{V}_p \wedge \vec{V}_q$$

şeklinde tanımlanır [9]. Burada, $\langle , \rangle$ *ve* $\wedge$ sırasıyla IR^3 üzerindeki iç çarpımı ve vektörel çarpımı göstermektedir. Bundan sonraki bölümlerde de aynı sembolleri bu anlamda kullanacağız.

Kuaterniyon çarpımının sağladığı özellikler aşağıda sıralanmıştır :

i) İki kuaterniyonun çarpımı yine bir kuaterniyondur.

ii) Kuaterniyon çarpımı birleşimlidir.

iii) Kuaterniyon çarpımı dağılımlıdır.

Fakat kuaterniyon çarpımı değişimli değildir. Bu özellikleri ile $\{Q, \oplus, IR, +, \cdot, o, x\}$ sistemi bir birleşimli cebirdir. Bu cebire Kuaterniyon cebiri denir ve Q ile gösterilir. Bu cebirin bir bazı $\{1, \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$ ve boyutu 4 dür.

I.2.5.Tanım : Bir $q \in Q$ kuaterniyonunun eşleniği diye ,

$$\alpha q = S_q - \vec{V}_q$$

şeklinde tanımlanan αq kuaterniyonuna denir [9]. Eşlenik işlemi aşağıdaki özelliklere sahiptir:

$i)\ \alpha(a\,p + b\,q) = a\,\alpha\,p + b\,\alpha\,q$

$ii)\ \alpha(p\,x\,q) = \alpha\,q\,x\,\alpha\,p$

$iii)\ \alpha(\alpha\,p) = p$

O halde eşlenik işlemi Q cebirinde bir involusyonlu bağıntıdır [10].

I.2.6.Tanım : Eğer, $q \in Q$ kuaterniyonu için,

$$q + \alpha q = 0$$

oluyorsa q ya bir uzay kuaterniyonu denir [11].

I.2.7.Tanım : Eğer, $q \in Q$ kuaterniyonu için,

$$q - \alpha q = 0$$

ise q ya bir temporal kuaterniyon adı verilir [11].

I.2.8.Tanım : $p, q \in Q$ kuaterniyonları için

$$h(p,q) = \frac{1}{2}[p\,x\,\alpha\,q + q\,x\,\alpha\,p]$$

ile verilen simetrik , reel değerli, bilineer h formu kuaterniyon iç çarpımı adını alır [11].

I.2.9.Tanım : Eğer $p, q \in Q$ kuaterniyonları için $h(p,q) = 0$ oluyorsa p ile q ya h- ortogonaldir denir [11].

I.2.10.Tanım : Bir $q \in Q$ kuaterniyonunun normu diye,

$$\| q \|^2 = h(q,q) = q \, x \, \alpha q$$

eşitliğini sağlayan $\| q \|$ reel sayısına denir [11].

I.2.11.Tanım : $I \subset IR$ olmak üzere,

$$\beta : I \to Q$$

$$\beta(s) = \sum_{i=1}^{4} \beta_i(s) \vec{e}_i \quad , (\vec{e}_4 = +1)$$

ile verilen reel , tek değişkenli kuaterniyon değerli β dönüşümü kuaterniyonik eğri olarak adlandırılır [10].

Özel olarak, $\beta(I) \subset IR^3$ ise β uzay-kuaterniyonik eğri adını alır.

I.2.12.Tanım : Bir $q \in Q$ kuaterniyonunun inversi ;

$$(\ )^{-1} : Q - \{0\} \to Q - \{0\}$$

$$q \quad \to q^{-1} = \frac{\alpha q}{\| q \|^2}$$

biçiminde tanımlanır. Böylece,

$$q \, x \, q^{-1} = q^{-1} x \, q = 1$$

dir. $q \neq 0$ olmak üzere, $\forall q \in Q$ elemanının bir q^{-1} inversine sahip olması Q cebirini bir bölüm cebiri yapar [9].

I.2.13.Tanım : Bölme

$q \neq 0$ olmak üzere bir p kuaterniyonunu bir q kuaterniyonu ile bölmek için p yi q^{-1} ile çarpmak gerekir. Fakat kuaterniyon çarpımı değişimli olmadığından bu çarpma işlemi iki türlüdür ve dolayısı ile p yi q ile iki türlü bölmek gerekir. Böylece

$$r_1 = p\,x\,q^{-1}$$

$$r_2 = q^{-1}x\,p$$

olup burada r_1 kuaterniyonuna p nin q ile sağdan ve r_2 kuaterniyonuna p nin q ile soldan bölümü denir. Ayrıca , $r_1 \neq r_2$ dir [9].

I.2.14.Tanım : Birim Kuaterniyon

Normu 1 olan kuaterniyona birim kuaterniyon denir ve q_0 biçiminde gösterilir. Buna göre vektörlerde olduğu gibi herhangi bir q kuaterniyonunun normlanmışı ,

$$q_0 = \frac{q}{\|q\|} = \frac{d + a\vec{e}_1 + b\vec{e}_2 + c\vec{e}_3}{\sqrt{d^2 + a^2 + b^2 + c^2}}$$

olarak ifade edilebilir [9].

I.2.1.Teorem: Q_{IR^3} deki regüler uzay-kuaterniyonik eğri

$$\alpha(s) = \alpha_1(s)\vec{e}_1 + \alpha_2(s)\vec{e}_2 + \alpha_3(s)\vec{e}_3 \ ; \ \forall \alpha_i(s) \in IR, \ 1 \le i \le 3$$

olmak üzere bu eğrinin Frenet takımı (t, n_1, n_2, k, r) dır [11]. $\alpha(s)$ eğrisinden türetilen Q_{IR^4} deki regüler kuaterniyonik eğri de

$$\tilde{\alpha}(s) = \alpha_1(s)\vec{e}_1 + \alpha_2(s)\vec{e}_2 + \alpha_3(s)\vec{e}_3 + \tilde{\alpha}_4(s)\vec{e}_4 \ , \tilde{\alpha}_4(s) \in IR$$

olmak üzere bu eğrinin Serret-Frenet formülleri aşağıdaki şekilde hesaplanmıştır:

$$\begin{bmatrix} \dot{T} \\ \dot{N}_1 \\ \dot{N}_2 \\ \dot{N}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & K & 0 & 0 \\ -K & 0 & k & 0 \\ 0 & -k & 0 & (r-K) \\ 0 & 0 & -(r-K) & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T \\ N_1 \\ N_2 \\ N_3 \end{bmatrix} \qquad \text{...(I.2.1)}$$

Burada $(T, N_1, N_2, N_3, K, k, (r-K))$ bu kuaterniyonik eğrinin Frenet takımıdır.Bu ifadedeki k ve r aynı zamanda Q_{IR^3} deki eğrinin sırasıyla asli eğriliği ve burulmasıdır [11] ve [12].

I.3.Dual kuaterniyonlar

Dual kuaterniyonlar da reel kuaterniyonlara benzer biçimde tanımlanırlar ve reel kuaterniyonların sağladıkları benzer özellikleri sağlarlar.

I.3.1.Tanım: İki reel kuaterniyon;

$$q = d + a\vec{e}_1 + b\vec{e}_2 + c\vec{e}_3$$

$$q^* = d^* + a^*\vec{e}_1 + b^*\vec{e}_2 + c^*\vec{e}_3$$

olmak üzere bir dual kuaterniyon,

$$\overline{q} = q + \varepsilon q^* \ , \ \varepsilon^2 = 0$$

şeklinde tanımlanır. Bir dual kuaterniyonu

$$\overline{q} = D + A\vec{e}_1 + B\vec{e}_2 + C\vec{e}_3$$

olarak da yazmak mümkündür. Burada,

$D = d + \varepsilon d^*, A = a + \varepsilon a^*, B = b + \varepsilon b^*, C = c + \varepsilon c^*$

olup, $\overline{q}$ nun dual bileşenleri olarak adlandırılırlar.

Yani bir dual kuaterniyon, bileşenleri dual sayılar olan bir kuaterniyon olarak ele alınabilir. Bir dual kuaterniyonun skalar ve vektörel kısımları sırasıyla; $S_{\overline{q}}$ *ve* $\vec{V}_{\overline{q}}$ ile gösterilirse,

$$S_{\overline{q}} = S_q + \varepsilon S_{q^*} = D$$

$$\vec{V}_{\overline{q}} = \vec{V}_q + \varepsilon \vec{V}_{q^*} = A\vec{e}_1 + B\vec{e}_2 + C\vec{e}_3$$

dır. Bir dual kuaterniyonun skalar kısmı bir dual sayıdır ve vektörel kısmı da bir dual vektördür. Açık olarak $\overline{q}$ dual kuaterniyonu aşağıdaki biçimde ifade edilir:

$$\overline{q} = d + a\vec{e}_1 + b\vec{e}_2 + c\vec{e}_3 + d^*(\varepsilon) + a^*(\varepsilon\vec{e}_1) + b^*(\varepsilon\vec{e}_2) + c^*(\varepsilon\vec{e}_3)$$

[9]. Dual kuaterniyonların cümlesini bundan sonra Q_{ID} ile göstereceğiz.

I.3.2.Tanım : İki dual kuaterniyonun toplamı

$$\oplus : Q_{ID} x Q_{ID} \rightarrow Q_{ID}$$
$$(\overline{p},\overline{q}) \rightarrow \overline{p} \oplus \overline{q} = p \oplus q + \varepsilon (p^* \oplus q^*)$$

biçiminde tanımlanır [9].

I.3.3.Tanım : İki dual kuaterniyonun çarpımı

$\overline{p},\overline{q} \in Q_{ID}$ ve

$$\overline{q} = q + \varepsilon q^{*}$$
$$\overline{p} = p + \varepsilon p^{*}$$

olmak üzere bu dual kuaterniyonların çarpımı şöyle tanımlanır [9]:

$$\overline{q}\, x\, \overline{p} = q\, x\, p + \varepsilon (q\, x\, p^{*} + q^{*} x\, p)$$

$$\overline{p}\, x \overline{q} = p\, x\, q + \varepsilon (p\, x\, q^{*} + p^{*} x\, q)$$

Dual kuaterniyonların çarpımı aşağıdaki özelliklere sahiptir:

i) İki dual kuaterniyonun çarpımı da bir dual kuaterniyondur.

ii) Dual kuaterniyonların çarpımı dağılımlıdır.

iii) Dual kuaterniyonların çarpımı birleşimlidir.

I.3.4.Tanım : Bir $\overline{q} = q + \varepsilon q^{*}$ dual kuaterniyonunun eşleniği $\alpha \overline{q}$ ile gösterilir ve

$$\alpha \overline{q} = \alpha q + \varepsilon (\alpha q^{*}) = D - A \vec{e}_1 - B \vec{e}_2 - C \vec{e}_3$$

olarak tanımlanır [9].

Eşlenik işleminin sahip olduğu özellikler aşağıdaki şekildedir:

$i)\ \alpha (\overline{p} + \overline{q}) = \alpha (p + q) + \varepsilon\ \alpha (p^{*} + q^{*})$

$$= \alpha \overline{p} + \alpha \overline{q}$$

$ii)\ \alpha (\overline{p}\, x \overline{q}) = \alpha q\, x\, \alpha\, p + \varepsilon (\alpha q^{*} x\, \alpha\, p + \alpha q\, x\, \alpha\, p^{*})$

$$= (\alpha q + \varepsilon \alpha q^{*}) x (\alpha\, p + \varepsilon\, \alpha\, p^{*})$$

$$= \alpha \overline{q}\, x\, \alpha \overline{p}$$

I.3.5.Tanım: Bir $\overline{q} \in Q_{ID}$ kuaterniyonunun normu,

$$\| \overline{q} \|^2 = h(\overline{q}, \overline{q}) = \overline{q} \, x \, \alpha \overline{q}$$

biçiminde tanımlanır [13].

$$\| \overline{q} \|^2 = D^2 + A^2 + B^2 + C^2$$

dir. Görüldüğü gibi $\| \overline{q} \|^2$ bir dual sayıdır. Bu dual sayının reel kısmı $\mathrm{Re} \| \overline{q} \|^2$ ve dual kısmı $Du \| \overline{q} \|^2$ ile gösterilir. Açık olarak,

$$\mathrm{Re} \| \overline{q} \|^2 = d^2 + a^2 + b^2 + c^2$$

$$Du \| \overline{q} \|^2 = 2(d d^* + a a^* + b b^* + c c^*)$$

dir. $\overline{p}$ *ve* $\overline{q}$ gibi iki dual kuaterniyonun çarpımının normu için

$$\begin{aligned} \| \overline{p} \, x \, \overline{q} \|^2 &= (\overline{p} \, x \, \overline{q}) \, x \alpha (\overline{p} \, x \, \overline{q}) \\ &= \| \overline{p} \|^2 x \| \overline{q} \|^2 \end{aligned}$$

elde edilir [9].

I.3.6.Tanım: Bir $\overline{q}$ dual kuaterniyonunun inversi $\overline{q}^{-1}$ ile gösterilir ve

$$\overline{q}^{-1} = \frac{\alpha \overline{q}}{\| \overline{q} \|^2} = \frac{D - A\vec{e}_1 - B\vec{e}_2 - C\vec{e}_3}{D^2 + A^2 + B^2 + C^2}$$

olarak tanımlanır [9]. $\overline{q}^{-1}$in reel kısmı ,

$$\mathrm{Re}(\overline{q}^{-1}) = \frac{d - a\vec{e}_1 - b\vec{e}_2 - c\vec{e}_3}{d^2 + a^2 + b^2 + c^2}$$

ve dual kısmı da

$$Du(\overline{q}^{-1}) = \frac{d - a^*\vec{e}_1 - b^*\vec{e}_2 - c^*\vec{e}_3}{d^2 + a^2 + b^2 + c^2} - \frac{2(d.d^* + a.a^* + b.b^* + c.c^*)}{(d^2 + a^2 + b^2 + c^2)}(d - a\vec{e}_1 - b\vec{e}_2 - c\vec{e}_3)$$

olarak elde edilir. Ayrıca;

$$\overline{q} \, x \, \overline{q}^{-1} = \overline{q}^{-1} x \, \overline{q} = 1$$

dir.

I.3.7.Tanım : Birim dual kuaterniyon

Normu birim olan ,yani reel kısmının normu 1, dual kısmının normu ise sıfır olan bir dual kuaterniyona birim dual kuaterniyon denir ve $\overline{q}_0$ ile gösterilir. Böyle bir dual kuaterniyon;

$$\overline{q}_0 = D_0 + A_0\,\vec{e}_1 + B_0\,\vec{e}_2 + C_0\,\vec{e}_3$$

şeklinde ifade edilebilir [9]. Burada,

$$D = d_0 + \varepsilon d_0^{*}, A = a_0 + \varepsilon a_0^{*}, B = b_0 + \varepsilon b_0^{*}, C = c_0 + \varepsilon c_0^{*}$$

olmak üzere,

$$\begin{cases} d_0^{\,2} + a_0^{\,2} + b_0^{\,2} + c_0^{\,2} = 1 \\ d_0 d_0^{*} + a_0\,a_0^{*} + b_0 b_0^{*} + c_0\,c_0^{*} = 0 \end{cases}$$

şeklindedir.

I.3.8.Tanım: İki Dual Kuaterniyonun İç çarpımı

$\overline{p}$ *ve* $\overline{q}$ iki birim dual kuaterniyon olmak üzere , bu iki dual kuaterniyonun iç çarpımı

$$\widetilde{h}\,(\overline{p},\overline{q}) = h(p,q) + \varepsilon[h(p,q^{*}) + h(p^{*},q)] \qquad \text{...(I.3.1)}$$

biçiminde tanımlanır [13]. Burada h ile reel kuaterniyonların iç çarpım işlemi kastedilmektedir.

Şimdi iki dual vektör arasındaki açıyı inceleyelim:

$\overline{p}$ *ve* $\overline{q}$ iki birim dual vektör olsunlar. $\overline{p}$ *ile* $\overline{q}$ nun

$$\langle \overline{p},\overline{q}\rangle = \langle p,q\rangle + \varepsilon\big(\langle p,q*\rangle + \langle p*,q\rangle\big) \qquad \text{...(I.3.2)}$$

iç çarpımını inceleyelim. Burada $\overline{p}$ *ve* $\overline{q}$ birer dual uzay-kuaterniyonu olarak gözönüne alınmıştır.

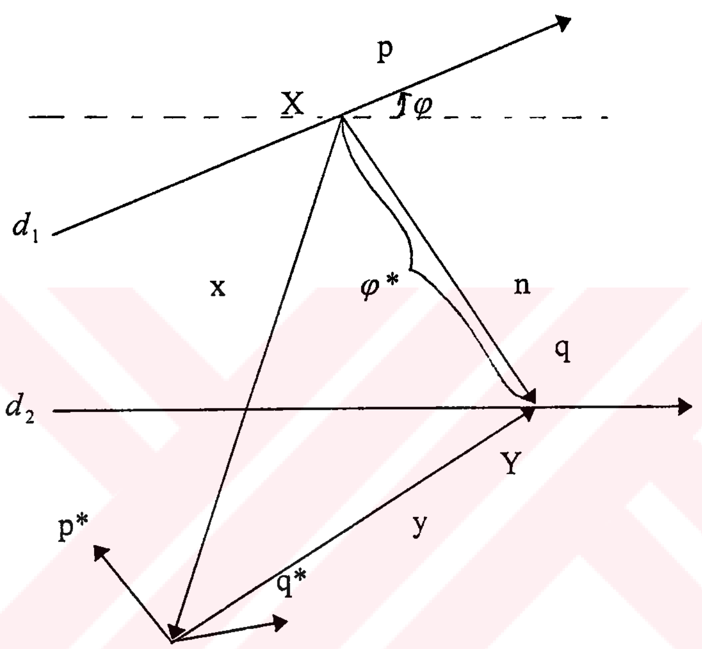
$\overline{p}$ *ve* $\overline{q}$ sırasıyla d_1 *ve* d_2 olmak üzere IR^3 de iki yönlü doğru belirtirler. d_1 in yönü p, yeri $p*$ ve d_2 nin yönü q, yeri $q*$ ile belli olduğundan p *ile* q arasındaki açı φ ise

$$\langle \bar{p},\bar{q}\rangle = \langle p,q\rangle + \varepsilon\left(\langle p,q*\rangle + \langle p*,q\rangle\right)$$

iç çarpımının reel kısmı ,

$$\langle p,q\rangle = \cos\varphi\ ,\ 0 \le \varphi \le \pi\ ,\ \varphi \in IR$$

olup $\langle \bar{p},\bar{q}\rangle$ iç çarpımının dual kısmı olan $\langle p,q*\rangle + \langle p*,q\rangle$ ifadesinin geometrik anlamı da aşağıdaki şekildedir:



Şekil-2

$p*$ *ve* $q*$ sırası ile d_1 *ve* d_2 yönlü doğruları üzerindeki X *ve* Y noktalarının seçilişinden bağımsız olduklarından X *ve* Y noktaları, d_1 *ve* d_2 doğrularının ortak dikmesinin ayakları olarak düşünülebilir. Bu ortak dikme yönündeki birim vektör ,

$$\vec{n} = \pm \frac{p \wedge q}{\| p \wedge q \|}$$

dır. d_1 *ve* d_2 arasındaki en kısa uzaklık $\varphi*$ ile gösterilirse ,

$$x-y=\pm\frac{p\wedge q}{\|p\wedge q\|}\varphi^*$$

dır.

$$p^*=x\wedge p \quad ve \quad q^*=y\wedge q$$

olduklarından,

$$\langle p,q^*\rangle=\langle p,y\wedge q\rangle=-\langle y,p\wedge q\rangle$$

ve

$$\langle p^*,q\rangle=\langle x\wedge p,q\rangle=\langle x,p\wedge q\rangle$$

dir.

$$\langle p,q^*\rangle+\langle p^*,q\rangle=\langle x-y,p\wedge q\rangle$$

$$=\pm\left\langle\frac{p\wedge q}{\|p\wedge q\|}\varphi^*,p\wedge q\right\rangle=\pm\frac{\varphi^*}{\|p\wedge q\|}\langle p\wedge q,p\wedge q\rangle$$

$$\langle p,q^*\rangle+\langle p^*,q\rangle=\pm\varphi^*\|p\wedge q\|=\pm\varphi^*\sin\varphi$$

bulunur. Sonuç olarak $\overline{p}$ *ile* $\overline{q}$ nun iç çarpımı için

$$\langle\overline{p},\overline{q}\rangle=\cos\varphi\pm\varepsilon\varphi^*\sin\varphi \quad \text{...(I.3.3)}$$

elde edilir. Bu son ifade de (-) işareti gözönüne alınırsa,

$$\cos\varphi-\varepsilon\varphi^*\sin\varphi=\cos(\varphi+\varepsilon\varphi^*)$$

ve $\phi=\varphi+\varepsilon\varphi^*$ bir dual sayı olmak üzere, Taylor Formülü gereğince

$$\langle\overline{p},\overline{q}\rangle=\cos\phi=\cos(\varphi+\varepsilon\varphi^*) \quad \text{...(I.3.4)}$$

elde edilir [9].

I.3.9.Tanım: $\phi=\varphi+\varepsilon\varphi^*$ dual sayısına $\overline{p}$ *ve* $\overline{q}$ birim vektörleri arasındaki dual açı denir.Görüldüğü gibi ϕ dual açısı $\overline{p}$ *ve* $\overline{q}$ birim dual vektörlerinin IR^3 deki temsil ettikleri yönlü doğrular arasındaki φ açısı ile bu iki doğru arasındaki en kısa uzaklık olan φ^* dan oluşmaktadır. $0\overline{P}=\overline{p}$ *ve* $0\overline{Q}=\overline{q}$ birim dual vektörlerinin uçları ID-Modülde O merkezli birim dual kürenin p *ve* q dual noktalarını belirteceğinden $\overline{p}$ *ve* $\overline{q}$ arasındaki $\phi=\varphi+\varepsilon\varphi^*$ dual açısı p *ve* q dual noktalarından geçen dual büyük dairenin pq dual yay uzunluğu olarak düşünülebilir [9].

I.3.1.Teorem: Q_{ID^3} deki regüler dual uzay-kuaterniyonik eğri

$$\beta(s)=\beta_1(s)\vec{e}_1+\beta_2(s)\vec{e}_2+\beta_3(s)\vec{e}_3 \;;\; \forall\beta_i(s)\in ID,\; 1\le i\le 3$$

olmak üzere bu eğrinin Frenet takımı (T, N_1, N_2, N_3, K, R) olsun [13]. $\beta(s)$ eğrisinden türetilen Q_{ID^4} deki regüler dual kuaterniyonik eğri de

$$\widetilde{\beta}(s)=\beta_1(s)\vec{e}_1+\beta_2(s)\vec{e}_2+\beta_3(s)\vec{e}_3+\widetilde{\beta}_4(s)\vec{e}_4 \;,\; \widetilde{\beta}_4(s)\in ID$$

olmak üzere bu eğrinin Serret-Frenet formülleri de aşağıdaki şekilde hesaplanmıştır :

$$\begin{bmatrix}\dot{\widetilde{T}}\\ \dot{\widetilde{N}}_1\\ \dot{\widetilde{N}}_2\\ \dot{\widetilde{N}}_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & \widetilde{K} & 0 & 0\\ -\widetilde{K} & 0 & K & 0\\ 0 & -K & 0 & R-\widetilde{K}\\ 0 & 0 & -(R-\widetilde{K}) & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\widetilde{T}\\ \widetilde{N}_1\\ \widetilde{N}_2\\ \widetilde{N}_3\end{bmatrix} \qquad ...(I.3.5)$$

Burada $(\widetilde{T}, \widetilde{N}_1, \widetilde{N}_2, \widetilde{N}_3, \widetilde{K}, K, R-\widetilde{K})$ bu eğrinin Frenet takımıdır. K *ve* R aynı zamanda Q_{ID^3} deki dual uzay-kuaterniyonik eğrinin sırasıyla asli eğriliği ve burulmasını göstermektedir [13].

II.BÖLÜM

DUAL KUATERNİYONİK EĞİLİM ÇİZGİLERİ İÇİN KARAKTERİZASYONLAR

II.1.Dual Kuaterniyonik Eğilim Çizgileri Ve Harmonik Eğrilikler

II.1.1. Q_{ID^3} Deki Dual Uzay-Kuaterniyonik Eğilim Çizgileri Ve Harmonik Eğrilikler

ID^3 ile uzay-kuaterniyonlarının cümlesi arasında bir izomorfizma kurarak Q_{ID^3} deki dual uzay-kuaterniyonik eğilim çizgilerini ve harmonik eğriliği ifade edeceğiz.

II.1.1.Tanım : $\beta : I \to Q_{ID^3}$ regüler dual uzay-kuaterniyonik eğri s-yay parametresi ile verilmiş olsun. Q_{ID^3} ün birim ve sabit bir vektörü $\vec{u}$ olmak üzere , $\forall\, s \in I$ için,

$$\tilde{h}\,(\dot{\beta}(s)\,,u) = \cos\phi = \cos(\,\varphi + \varepsilon\,\varphi^*) = st.,\ \varphi \neq \frac{\pi}{2} \qquad \text{... (II.1.1)}$$

ise β eğrisine Q_{ID^3} de bir dual uzay-kuaterniyonik eğilim çizgisidir denir.

Q_{ID^3} ün birim ve sabit bir vektörü $u = u_0 + \varepsilon u_0^*$ ve IR^3 deki γ kuaterniyon eğrisinden türetilen β eğrisinin β(s) noktasındaki Frenet 3- ayaklısı $\{T(s),\ N_1(s), N_2(s)\}$ olmak üzere ,

$\beta : I \rightarrow Q_{ID^3}$,

β(s)$=\gamma_1(s)\vec{e}_1+\gamma_2(s)\vec{e}_2+\gamma_3(s)\vec{e}_3+\varepsilon(\gamma_1^*(s)\vec{e}_1+\gamma_2^*(s)\vec{e}_2+\gamma_3^*(s)\vec{e}_3)$

ya da

$$\beta(s)=A(s)\vec{e}_1+B(s)\vec{e}_2+C(s)\vec{e}_3\ ; A(s), B(s), C(s)\in ID$$

olarak tanımlayalım. Bu durumda,

$$\dot{\beta}\ (\mathrm{s})\ =\ T_0(s)+\varepsilon T_0^*(s)=T(s)$$

$$\alpha\dot{\beta}(s)=\ -T_0(s)-\varepsilon T_0^*(s)$$

$$u=u_0+\varepsilon u_0^*$$

$$u=-u_0-\varepsilon u_0^* \quad (\text{ u bir dual uzay-kuaterniyonudur.})$$

olur. O halde $u, T(s)\in Q_{ID^3}$ olmak üzere, (I.3.1) den

$$\widetilde{h}(u,T(s))=h(u_0,T_0(s))+\varepsilon\ [h\ (u_0,T_0^*(s))+h\ (u_0^*,T_0(s)]$$

elde edilir. Burada iki dual kuaterniyonun iç çarpımı tanımı kullanılırsa, h reel kuaterniyonlar için iç çarpımı göstermek üzere,

$$\begin{aligned}
\widetilde{h}\ (u,T(s)) &= \frac{1}{2}\left[u_0 x\alpha\, T_0(s)+T_0(s)\,x\alpha\, u_0\right]+\\
&\varepsilon\frac{1}{2}\left[(u_0 x\,\alpha\, T_0^*(s)+T_0^*(s)\,x\,\alpha\, u_0)+(u_0^* x\,\alpha\, T_0(s)+T_0(s)x\,\alpha\, u_0^*\right]\\
&= \frac{1}{2}\ [\left\langle u_0\,,T_0(s)\right\rangle-u_0\wedge T_0(s)+\left\langle u_0\,,T_0(s)\right\rangle-T_0(s)\wedge u_0\ \ ]+\\
&\varepsilon\,\frac{1}{2}[\left\langle u_0\,,T_0{}^*(s)\right\rangle-u_0\wedge T_0{}^*(s)+\left\langle u_0\,,T_0{}^*(s)\right\rangle-T_0{}^*(s)\wedge u_0\ +\\
&\left\langle u_0{}^*,T_0(s)\right\rangle - u_0{}^*\wedge T_0(s)+\left\langle T_0(s),u_0{}^*\right\rangle - T_0(s)\wedge u_0{}^*\ ]\\
&= \frac{1}{2}\ [2\left\langle u_0\,,T_0(s)\right\rangle\ ]+\varepsilon\,\frac{1}{2}\ [2\left\langle u_0\,,T_0{}^*(s)\right\rangle+2\left\langle u_0{}^*,T_0(s)\right\rangle\ ]\\
&= \left\langle u_0\,,T_0(s)\right\rangle+\varepsilon\ [\left\langle u_0\,,T_0{}^*(s)\right\rangle+\left\langle u_0{}^*,T_0(s)\right\rangle\ ]
\end{aligned}$$

elde edilir. (I.3.3) den

$$\widetilde{h}\ (u,T(s))=.\cos\varphi\mp\ \varepsilon\,\varphi^*\sin\varphi$$

olup burada (-) işareti gözönüne alınarak $\phi=\varphi+\varepsilon\varphi^*$ dual açı olmak üzere, Taylor Formülü gereğince;

$\widetilde{h}\,(u\,,T(s)\,)=\cos\phi=\cos(\,\varphi+\varepsilon\,\varphi^*)$ olduğu görülür. γ bir reel eğilim çizgisi olduğundan dolayı $\cos\varphi=st.$ olup eğer $\varphi^*=st.$ ise bu durumda

$$\widetilde{h}\,(u\,,T(s)\,)=\cos\phi=st.$$

elde edilir.

II.1.1.Sonuç :

$$\gamma(s)=\gamma_1(s)\vec{e}_1+\gamma_2(s)\vec{e}_2+\gamma_3(s)\vec{e}_3$$

IR^3 de bir uzay-kuaterniyonik eğilim çizgisi ise Q_{ID^3} de γ dan türetilen

$$\beta(s)=\gamma_1(s)\vec{e}_1+\gamma_2(s)\vec{e}_2+\gamma_3(s)\vec{e}_3+\varepsilon(\gamma_1^*(s)\vec{e}_1+\gamma_2^*(s)\vec{e}_2+\gamma_3^*(s)\vec{e}_3)$$

uzay-kuaterniyonik eğrisi de $\varphi^*=st.$ olması durumunda bir dual uzay-kuaterniyonik eğilim çizgisidir.

II.1.3.Tanım : $\beta:I\to Q_{ID^3}$ bir regüler dual uzay- kuaterniyonik eğri olup s-yay parametresi ile verilsin. Q_{ID^3} ün sabit ve birim bir vektörü u ve $\{\,T(s),N_1(s),N_2(s)\,\}$ β eğrisinin β (s) noktasındaki Frenet 3- ayaklısı olsun. Bu taktirde, $u=u_0+\varepsilon\,u_0^*$ ile $\dot{\beta}$(s) arasındaki açı $\phi=\phi\,(s)$ olup;

$$\widetilde{H}:I\to ID\quad,$$

$$\widetilde{h}\,(N_2(s)\,,u\,)=\widetilde{H}(s)\cos\phi \qquad \text{...(II.1.2)}$$

biçiminde tanımlanan $\widetilde{H}$ fonksiyonuna β eğrisinin harmonik eğrilik fonksiyonu ve $\widetilde{H}$(s) dual sayısına da β eğrisinin β (s) noktasında u' ya göre dual harmonik eğriliği denir.

Şimdi (dual) harmonik eğriliği dual eğrilikler türünden ifade eden teoremi verelim:

II.1.1.Teorem: $\beta:I\to Q_{ID^3}$ s-yay parametresi ile verilen bir dual uzay-kuaterniyonik eğilim çizgisi olsun. β eğrisinin β (s) noktasındaki eğrilikleri $K(s)=k(s)+\varepsilon\,k^*(s)$, $R(s)=r(s)+\varepsilon\;r^*(s)$ ve harmonik eğriliği $\widetilde{H}$ olmak üzere,

$$\widetilde{H}(s)=\frac{K(s)}{R(s)}$$

dir.

İspat : $\beta : I \to Q_{ID^3}$ dual uzay- kuaterniyonik eğilim çizgisinin teğet vektörünün birim ve sabit u dual vektörü ile yapmış olduğu açı ϕ olsun. β (s) noktasındaki Frenet 3- ayaklısı $\{ T(s), N_1(s), N_2(s) \}$ olmak üzere,

$$\widetilde{h}\,(T(s),u)=\cos\phi=\cos(\varphi+\varepsilon\varphi^*)=st.$$

yazabiliriz. Buradan s-ye göre türev alınırsa,

$$\widetilde{h}\,(\dot{T}(s),u)+\widetilde{h}\,(T(s),\dot{u})=0 \quad \text{veya}$$

$$\widetilde{h}\,(\dot{T}(s),u)=0 \qquad ...(\text{II}.1.3)$$

bulunur.Burada $\dot{T}(s)=K(s)\,N_1(s)$ [13] kullanılırsa;

$$\widetilde{h}\,(K(s)\,N_1(s),u)=0$$

$$K(s)\;\widetilde{h}\,(N_1(s),u)=0$$

bulunur. Burada, $K(s)\neq 0$ dır. Öyleyse,

$$\widetilde{h}\,(N_1(s),u)=0 \qquad ...(\text{II}.1.4)$$

olur. (II.1.4) ün s-ye göre türevi ile;

$$\widetilde{h}\,(\dot{N}_1(s),u)+\widetilde{h}\,(N_1(s),\dot{u})=0$$

veya,

$$\widetilde{h}\,(\dot{N}_1(s),u)=0 \qquad ...(\text{II}.1.5)$$

elde edilir. Bu ifadede $\dot{N}_1=-K(s)\,T(s)+R(s)N_2(s)$ [13] kullanılırsa;

$$\widetilde{h}\,(-K(s)\,T(s)+R(s)\,N_2(s),u)=0$$

$$-K(s)\,\widetilde{h}\,(T(s),u)+R(s)\,\widetilde{h}\,(N_2(s),u)=0 \qquad ...(\text{II}.1.6)$$

bulunur. Burada, $\widetilde{h}\,(T(s),u)=\cos\phi$ ve (II.1.2) kullanılırsa,

$$-K(s)\cos\phi+R(s)\,\widetilde{H}(s)\,\cos\phi=0 \qquad ...(\text{II}.1.7)$$

elde edilir. Buradan;

$$\widetilde{H}(s)=\frac{K(s)}{R(s)}=\frac{1.\,e\breve{g}rilik}{2.\,e\breve{g}rilik} \qquad ...(\text{II}.1.8)$$

sonucuna ulaşılır. Böylece dual uzay-kuaterniyonik eğri için harmonik eğrilik, eğrilikler türünden elde edilmiş olur.

II.1.2 . Q_{ID^4} Deki Dual Kuaterniyonik Eğilim Çizgileri ve Harmonik Eğrilikler

II.1.4.Tanım: $\widetilde{\beta}: I \to Q_{ID^4}$ regüler dual kuaterniyonik eğri s-yay parametresi ile verilsin. Birim ve sabit bir dual uzay-kuaterniyonu $u = u_0 + \varepsilon u_0^*$ olmak üzere, $\forall\, s \in I$ için,

$$\widetilde{h}\,(\dot{\widetilde{\beta}}\,(s), u) = \cos\phi = \cos(\varphi + \varepsilon\varphi^*) = st.,\ \varphi \neq \frac{\pi}{2} \qquad ...(\text{II}.1.9\,)$$

ise $\widetilde{\beta}$ eğrisine Q_{ID^4} de bir dual kuaterniyonik eğilim çizgisidir denir.

II.1.3.Teorem : $\beta: I \to Q_{ID^3}$ bir dual uzay- kuaterniyonik eğilim çizgisi olsun. β (s) = $A(s)\,\vec{e}_1 + B(s)\,\vec{e}_2 + C(s)\,\vec{e}_3$; $A(s), B(s), C(s) \in$ ID , olmak üzere β dan türetilen her $\widetilde{\beta}$ = $A(s)\,\vec{e}_1 + B(s)\,\vec{e}_2 + C(s)\,\vec{e}_3 + D(s)$; $D(s) \in$ ID dual kuaterniyonik eğrisi de β ile aynı eksenli bir dual kuaterniyonik eğilim çizgisidir.

İspat : $\widetilde{\beta}: I \to Q_{ID^4}$ s-yay parametresi ile verilen bir dual kuaterniyonik eğri olsun. u birim ve sabit bir dual uzay-kuaterniyonu ve $\widetilde{\beta}$ nın $\widetilde{\beta}$ (s) noktasındaki Frenet 4-ayaklısı $\{\ \widetilde{T}(s), \widetilde{N}_1(s), \widetilde{N}_2(s), \widetilde{N}_3(s)\,\}$ olmak üzere,

$$\widetilde{h}\,(\dot{\widetilde{\beta}}\,(s), u) = \widetilde{h}\,(\widetilde{T}(s), u)$$

$$\widetilde{T}\,(\mathrm{s}) = D(s) + T(s),\ \ D(s) = d_0 + \varepsilon d_0^* \ \in \mathrm{ID}^3\,,$$

$$T(s) = \dot{A}(\mathrm{s})\ \vec{e}_1 + \dot{B}(\mathrm{s})\ \vec{e}_2 + \dot{C}(\mathrm{s})\ \vec{e}_3\ ,\ \ \dot{A}, \dot{B}, \dot{C} \in ID$$

$$T(s) = T_0(s) + \varepsilon T_0^*(s)$$

$$u = u_0 + \varepsilon u_0^*$$

$$\alpha\,\widetilde{T}\,(\mathrm{s}) = D(s) - T(s)$$

$$\widetilde{h}(\widetilde{T}(s), u) = h(u_0, T_0(s)) + \varepsilon\,[\,h\,(u_0^*, T_0(s)) + h\,(u_0, T_0^*(s))\,]$$

elde edilir. h , reel kuaterniyonlar için iç çarpımı göstermek üzere ; h nın özelliklerinin gözönünde bulundurulmasıyla,

$$\widetilde{h}\,(\widetilde{T}(s),u) = \frac{1}{2}\left[T_0(s)\,x\alpha\,u_0 + u_0 x\alpha\,T_0(s)\right] +$$
$$\varepsilon\frac{1}{2}\left[\,(\,T_0(s)x\,\alpha\,u_0^* + u_0^* x\,\alpha\,T_0(s)) + (\,T_0^*(s)\,x\,\alpha\,u_0 + u_0 x\,\alpha\,T_0^*(s))\right]$$

$$= \frac{1}{2}\,[\,-D.u_0 + \langle T_0(s),u_0\rangle - T_0(s)\wedge u_0 - D.u_0 + \langle u_0,T_0(s)\rangle - u_0\wedge T_0(s)\,] + \varepsilon\frac{1}{2}$$
$$\{\,[\,-D.u_0^* + \langle T_0(s),u_0^*\rangle - T_0(s)\wedge u_0^* - D.u_0^* + \langle u_0^*,T_0(s)\rangle - u_0^*\wedge T_0(s)] + [$$
$$-D^*.u_0 + \langle T_0^*(s),u_0\rangle - T_0^*(s)\wedge u_0 - D^*.u_0 + \langle u_0,T_0^*(s)\rangle - u_0\wedge T_0^*(s)\,]\,\}$$
$$= \frac{1}{2}\,[\,2\,\langle T_0(s),u_0\rangle\,] + \varepsilon\,\frac{1}{2}.2.[\,\langle T_0^*(s),u_0\rangle + \langle u_0^*,T_0(s)\rangle\,]$$
$$= \langle T_0(s),u_0\rangle + \varepsilon\,[\,\langle T_0^*(s),u_0\rangle + \langle u_0^*,T_0(s)\rangle\,]$$
$$= \cos\varphi \mp \varepsilon\,\varphi^*\sin\varphi$$
$$= \cos\phi,\quad \varphi \neq \frac{\pi}{2} \qquad \text{... (II.1.10)}$$

bulunur. Böylece ispat tamamlanır.

II.1.5.Tanım: $\widetilde{\beta}: I \to Q_{ID^4}$ regüler kuaterniyonik eğri s-yay parametresi ile verilsin. u birim ve sabit bir dual uzay-kuaterniyonu ve $\{\,\widetilde{T}(s),\widetilde{N}_1(s),\widetilde{N}_2(s),\widetilde{N}_3(s)\}$ de $\widetilde{\beta}$ eğrisinin $\widetilde{\beta}$(s) noktasındaki Frenet 4-ayaklısı olsun. Bu taktirde, $\widetilde{T}(s)$ ve u arasındaki açı ϕ olmak üzere,

$$\widetilde{H}_i : I \to ID \quad ,\, i = 1,2$$
$$\widetilde{h}\,(\,\widetilde{N}_{i+1}(s),u) = \widetilde{H}_i(s)\cos\phi \qquad \text{...(II.1.11)}$$

şeklinde tanımlı $\widetilde{H}_i$ fonksiyonuna $\widetilde{\beta}$ kuaterniyonik eğrisinin i-yinci harmonik eğrilik fonksiyonu ve $\widetilde{H}_i$(s) dual sayısına da $\widetilde{\beta}$ nın $\widetilde{\beta}$(s) noktasındaki i-yinci harmonik eğriliği denir. $\widetilde{H}_0 = 0$ olarak tanımlanır.

Dual kuaterniyonik bir eğrinin eğrilikleri ile harmonik eğrilikleri arasındaki ilişki aşağıdaki teorem ile ifade edilebilir:

II.1.3 .Teorem : $\widetilde{\beta}: I \to Q_{ID^4}$ s-yay parametresi ile verilen bir dual kuaterniyonik eğilim çizgisi olsun. $\widetilde{\beta}$ (s) noktasındaki i-yinci eğrilik $\widetilde{k}_i$ (s) , i-yinci eğrilik yarıçapı $\widetilde{\sigma}_i$(s) = $\dfrac{1}{\widetilde{k}_i(s)}$, $1 \le i \le 3$ ve $\widetilde{\beta}$ nın j-yinci harmonik eğriliği $\widetilde{H}_j(s)$, $j = 1,2$ olsun .

Bu takdirde;

$$\widetilde{H}_1(s) = \frac{1.eğrilik}{2.eğrilik}$$

ve ... (II.1.12)

$$\widetilde{H}_2(s) = \dot{\widetilde{H}}_1(s)\,\widetilde{\sigma}_3(s)$$

dir.

İspat : $\widetilde{\beta}: I \to Q_{ID^4}$ regüler kuaterniyonik eğri verilsin. u birim ve sabit bir dual uzay kuaterniyonu ve $\widetilde{\beta}$ (s) noktasındaki Frenet 4-ayaklısı $\{\widetilde{T}(s), \widetilde{N}_1(s), \widetilde{N}_2(s), \widetilde{N}_3(s)\}$ olmak üzere;

$$\widetilde{h}(\widetilde{T}(s), u) = \cos\phi = \cos(\varphi + \varepsilon\varphi^*) = st.$$

yazabiliriz. Bu ifadenin s-ye göre türevi alınırsa;

$$\widetilde{h}(\dot{\widetilde{T}}(s), u) + \widetilde{h}(\widetilde{T}(s), \dot{u}) = 0$$

$$\widetilde{h}(\dot{\widetilde{T}}(s), u) = 0 \qquad \text{... (II.1.13)}$$

elde edilir. (I.3.5) , (II.1.13) de yerine konulursa, $s \in I$ için,

$$\widetilde{h}(\widetilde{K}(s)\,\widetilde{N}_1(s), u) = 0$$

bulunur. Burada $\widetilde{K}(s) \neq 0$ olacağından

$$\widetilde{h}(\widetilde{N}_1(s), u) = 0 \qquad \text{... (II.1.14)}$$

elde edilir. Bu ifadenin s-ye göre tekrar türevi alınırsa;

$$\widetilde{h}(\dot{\widetilde{N}}_1(s), u) + \widetilde{h}(\widetilde{N}_1(s), \dot{u}) = 0$$

$$\widetilde{h}(\dot{\widetilde{N}}_1(s), u) = 0 \qquad \text{... (II.1.15)}$$

bulunur. (II.2.15) de (I.3.5) in kullanılmasıyla,

$$\widetilde{h}(\ -\widetilde{K}(s)\widetilde{T}(s)+K(s)\widetilde{N}_2(s)\,,\,\mathrm{u}\,)=0$$

$$-\widetilde{K}(s)\,\widetilde{h}(\,\widetilde{T}(s),u\,)+K(s)\,\widetilde{h}(\,\widetilde{N}_2(s),u\,)\ =0$$

bulunur. Ayrıca, (II.1.11) ifadesinden i = 1 için elde edilen

$$\widetilde{h}(\widetilde{N}_2(s),u)=\widetilde{H}_1(s)\cos\phi \qquad \text{... (II.1.16)}$$

nın (II.1.10) ile birlikte gözönüne alınmasıyla;

$$-\widetilde{K}(s)\cos\phi+K(s)\,\widetilde{H}_1(s)\cos\phi=0$$

veya

$$\widetilde{H}_1(s)=\frac{\widetilde{K}(s)}{K(s)}=\frac{1.\,e\breve{g}rilik}{2.\,e\breve{g}rilik} \qquad \text{... (II.1.17)}$$

elde edilir. Burada $\widetilde{K}$(s) , Q_{ID^4} deki eğrinin 1.eğriliği olup, $K(s)$ de hem Q_{ID^3} deki eğrinin 1.eğriliği hem de Q_{ID^4} deki eğrinin 2.eğriliğine karşılık gelmektedir [13].

İkinci dual harmonik eğriliği ifade etmek içinse, (II.1.16) ifadesinden s-ye göre türev alarak;

$$\widetilde{h}(\dot{\widetilde{N}}_2(s),u)+\widetilde{h}(\widetilde{N}_2(s),\dot{u})=\dot{\widetilde{H}}_1(s)\cos\phi$$

veya

$$\widetilde{h}(\dot{\widetilde{N}}_2(s),u)\ =\dot{\widetilde{H}}_1(s)\cos\phi \qquad \text{... (II.1.18)}$$

bulunur. (II.1.18) de $\dot{\widetilde{N}}_2(s)=-K(s)\,\widetilde{N}_1(s)+(R-\widetilde{K})\,(s)\,\widetilde{N}_3(s)$ oluşu kullanılırsa,

$$\widetilde{h}(\ -K(s)\,\widetilde{N}_1(s)+(R-\widetilde{K})\,(s)\,\widetilde{N}_3(s),u\,)=\dot{\widetilde{H}}_1(s)\cos\phi$$

$$-K(s)\,\widetilde{h}(\widetilde{N}_1(s),u\,)+(R-\widetilde{K})\,(s)\,\widetilde{h}(\widetilde{N}_3(s),u\,)=\dot{\widetilde{H}}_1(s)\cos\phi \qquad \text{... (II.1.19)}$$

eşitliğine ulaşılır. Burada her iki tarafı $\cos\phi$ ile bölüp (II.1.11) denkleminden i = 0 için elde edilen $\widetilde{H}_0$(s) = 0 ve i = 2 için elde edilen $\widetilde{H}_2$(s) ifadelerinin kullanılmasıyla,

$$-K(s)\,\widetilde{H}_0(s)+(R-\widetilde{K})\,(s)\,\widetilde{H}_2(s)=\dot{\widetilde{H}}_1(s)$$

ve buradan da

$$\widetilde{H}_2(s)=\dot{\widetilde{H}}_1(s)\frac{1}{(R-\widetilde{K})\,(s)}$$

elde edilir. Burada $\widetilde{k}_3 = R - \widetilde{K}$ dır [13]. Buna göre $\widetilde{\sigma}_3(s) = \dfrac{1}{(R-\widetilde{K})(s)}$ olacağından son eşitlikten

$$\widetilde{H}_2(s) = \dot{\widetilde{H}}_1(s)\,\widetilde{\sigma}_3(s) \qquad \text{... (II.1.20)}$$

bulunur.

Böylece dual kuaterniyonik eğilim çizgileri için harmonik eğrilikler , eğrilikler türünden elde edilmiş olur.

II.2.Dual Kuaterniyonik Eğilim Çizgileri İçin Karakterizasyonlar

Bu kısımda Q_{ID^3} deki dual uzay-kuaterniyonik eğilim çizgileri ve Q_{ID^4} deki dual kuaterniyonik eğilim çizgileri için birer karakterizasyon verilecektir.

II.2.1.Dual Uzay-Kuaterniyonik Eğilim Çizgileri İçin Bir Karakterizasyon

II.2.1.Teorem : $\beta : I \to Q_{ID^3}$ s-yay parametresi ile verilen bir dual uzay-kuaterniyonik eğri olsun. $\beta(s)$ noktasındaki harmonik eğrilik $\widetilde{H}(s)$ ve Frenet 3-ayaklısı $\{\, T(s), N_1(s), N_2(s) \,\}$ olmak üzere,

$$\beta \text{ bir dual uzay-kuaterniyonik eğilim çizgisidir} \Leftrightarrow \widetilde{H}^2(s) = \text{st.}$$

dir.

İspat:

$\Rightarrow$) β bir dual uzay-kuaterniyonik eğilim çizgisi ise,

$$\widetilde{h}(\dot{\beta}(s), u) = \cos\phi = st., \ \forall s \in I$$

olacak şekilde birim ve sabit bir u dual vektörü vardır. Bu dual vektör, dual uzay-kuaterniyonik β eğrisi β(s) noktasındaki $\{ T(s), N_1(s), N_2(s) \}$ bazı cinsinden

$$u = \tilde{h}(T(s),u)\,T(s) + \sum_{i=1}^{2} \tilde{h}(N_i(s),u)\,N_i(s) \qquad \text{...(II.2.1)}$$

biçiminde ifade edilebilir. (II.1.10), (II.1.11) bağıntıları ile ,

$$\| T(s) \| = \| N_1(s) \| = \| N_2(s) \| = 1, \; \| u \| = 1$$

olduğu gözönüne alınırsa,

$$\| u \|^2 = \tilde{h}(u,u) = u\, x\, \alpha\, u$$

$$1 = \left[\tilde{h}(T(s),u)\,T(s) + \sum_{i=1}^{2} \tilde{h}(N_i(s),u)\,N_i(s) \right] x\, \alpha \left[\tilde{h}(T(s),u)\,T(s) + \sum_{i=1}^{2} \tilde{h}(N_i(s),u)\,N_i(s) \right]$$

$$= \left[\tilde{h}(T(s),u)T(s) + \tilde{h}(N_2(s),u)\,N_2(s) \right] x\, \alpha \left[\tilde{h}(T(s),u)T(s) + \tilde{h}(N_2(s),u)\,N_2(s) \right]$$

$$= \left[\cos\phi\, T(s) + \tilde{H}(s)\cos\phi\, T(s) \right] x\, \alpha \left[\cos\phi\, T(s) + \tilde{H}(s)\cos\phi\, T(s) \right]$$

$$= \cos\phi \|T(s)\|^2 + \tilde{H}(s)\cos^2\phi\, T(s)\, x\alpha\, N_2(s) + \tilde{H}(s)\cos^2\phi\, N_2(s)\, x\, \alpha\, T(s) + \tilde{H}(s)\cos^2\phi \|N_2(s)\|$$

olduğu görülür.

Burada $\| T(s) \| = \| N_2(s) \| = 1$, $T(s) x\, N_2(s) = -N_1(s)$ ve $N_2(s) x\, T(s) = N_1(s)$ olduğundan

$$\tilde{H}^2(s)\cos\phi = 1 - \cos^2\phi$$

$$\text{...(II.2.2)}$$

$$\tilde{H}^2(s) = \frac{\sin^2\phi}{\cos^2\phi} = tg^2\phi = st.$$

elde edilir.

$\Leftarrow$) Karşıt olarak, β dual uzay-kuaterniyonik eğrisi için $\tilde{H}^2$(s) = a (st.) olduğunu kabul edelim. Bu taktirde, $\text{tg}^2\phi = \text{a}$ olacak şekilde bir ϕ açısı vardır. O halde,

$$u = \cos\phi\; T(s) + \tilde{H}(s)\, N_2(s) \cos\phi \qquad \text{...(II.2.3)}$$

olacak şekilde bir u dual uzay-kuaterniyonu tanımlayalım .Buna göre,

1) u dual uzay-kuaterniyonu sabittir:

2) u birimdir.

1) u dual uzay-kuaterniyonunun sabit olduğunu gösterelim:

(II.2.3) ün s-ye göre türevini alarak,

$$\frac{1}{\cos\phi}\frac{du}{ds} = \dot{T}(s) + \dot{\widetilde{H}}(s)\, N_2(s) + \widetilde{H}(s)\, \dot{N}_2(s) \qquad \text{...(II.2.4)}$$

elde edilir. Burada, $\dot{T}(s) = K(s)\, N_1(s)$, $\dot{N}_2(s) = -R(s)\, N_1(s)$ [13] olduğu ve

$\widetilde{H}(s) = \dfrac{K(s)}{R(s)}$ den $\dot{\widetilde{H}}(s) = 0$ oluşu gözönüne alınırsa,

$$\frac{1}{\cos\phi}\frac{du}{ds} = K(s)\, N_1(s) + \dot{\widetilde{H}}(s)\, N_2(s) + \widetilde{H}(s)\,(-R(s)\, N_1(s))$$

$$= K(s)\, N_1(s) + \frac{K(s)}{R(s)}(-R(s)\, N_1(s))$$

$$\frac{1}{\cos\phi}\frac{du}{ds} = 0$$

elde edilir. O halde u sabit bir dual uzay- kuaterniyonudur.

2) u dual uzay-kuaterniyonunun birim olduğunu gösterelim:

$$\| u \|^2 = \widetilde{h}(u,u) = u \, x \, \alpha \, u$$

$$= [\cos\phi\, T(s) + \widetilde{H}(s)\cos\phi\, N_2(s)]\, x \, \alpha\, [\cos\phi\, T(s) + \widetilde{H}(s)\cos\phi\, N_2(s)]$$

$$= \cos^2\phi + \widetilde{H}^2(s)\cos^2\phi$$

$$= \cos^2\phi\ (1 + \widetilde{H}^2(s))$$

$$= \cos^2\phi\ (1 + tg^2\,\phi)$$

$$= 1$$

elde edilir. Böylece,

$$\| u \| = 1$$

olur.Ayrıca,

$$\widetilde{h}(T(s),u)=\frac{1}{2}[T(s)\,x\,\alpha\,u+u\,x\,\alpha\,T(s)]$$

$$=\frac{1}{2}[\,T(s)\,x\alpha\,[\cos\phi\,T(s)+\widetilde{H}(s)\,N_2(s)\cos\phi\,]+[\cos\phi\,T(s)+\widetilde{H}(s)\,N_2(s)\cos\phi]\,x\,\alpha\,T(s)]$$

$$=\frac{1}{2}\left[\cos\phi\,\|T(s)\|^2+\widetilde{H}(s)\cos\phi\,T(s)\,x\,\alpha\,N_2(s)+\cos\phi\,\|T(s)\|^2+\widetilde{H}(s)\cos\phi\,N_2(s)\,x\,\alpha\,T(s)\right]$$

$$=\frac{1}{2}[2\cos\phi-\widetilde{H}(s)\cos\phi\,T(s)\,x\,N_2(s)-\widetilde{H}(s)\cos\phi\,N_2(s)\,x\,T(s)]$$

veya

$$\widetilde{h}(T(s),u)=\cos\phi=st.$$

dir.

Bu ise β nın bir dual uzay-kuaterniyonik eğilim çizgisi olduğunu gösterir.

II.2.2.Dual Kuaterniyonik Eğilim Çizgileri İçin Bir Karakterizasyon

II.2.1.Teorem: $\widetilde{\beta}:I\to Q_{ID^4}$ s-yay parametresi ile verilen bir dual kuaterniyonik eğri olsun. $\widetilde{\beta}$ (s) noktasındaki Frenet 4-ayaklısı $\{\widetilde{T}(s),\widetilde{N}_1(s),\widetilde{N}_2(s),\widetilde{N}_3(s)\}$ ve i-yinci harmonik eğriliği $\widetilde{H}_i(s)$, i = 1,2 olmak üzere,

$$\widetilde{\beta}\text{ bir eğilim çizgisidir}\Leftrightarrow\sum_{i=1}^{2}\widetilde{H}_i^2(s)=st.$$

dir.

İspat :

$\Rightarrow$) $\widetilde{\beta}:I\to Q_{ID^4}$ dual kuaterniyonik eğrinin bir eğilim çizgisi olduğunu kabul edelim. Öyleyse, $\widetilde{\beta}$ eğrisi için ,

$$\widetilde{h}(\dot{\widetilde{\beta}}(s),u)=\cos\phi=st.\ ,\quad\forall\,s\in I$$

olacak şekilde birim ve sabit bir dual uzay-kuaterniyonu vardır. Bu dual uzay-kuaterniyonu $\widetilde{\beta}$ eğrisinin $\widetilde{\beta}$ (s) noktasındaki bazı cinsinden,

$$u=\widetilde{h}(\widetilde{T}(s),u)\,\widetilde{T}(s)+\sum_{i=1}^{3}\widetilde{h}(\widetilde{N}_i(s),u)\,\widetilde{N}_i(s) \qquad \text{...(II.2.6)}$$

biçiminde ifade edilebilir. Burada, (II.1.10), (II.1.11) eşitlikleriyle birlikte $\widetilde{T},\widetilde{N}_1,\widetilde{N}_2,\widetilde{N}_3$ *ve* u'nun birim oldukları da gözönüne alınırsa;

$$\|u\|^2=\widetilde{h}(u,u)=u\,x\alpha\,u$$

$$=\left[\widetilde{h}(\widetilde{T}(s),u)\,\widetilde{T}(s)+\sum_{i=1}^{3}\widetilde{h}(\widetilde{N}_i(s),u)\,\widetilde{N}_i(s)\right]x\,\alpha\left[\widetilde{h}(\widetilde{T}(s),u)\,\widetilde{T}(s)+\sum_{i=1}^{3}\widetilde{h}(\widetilde{N}_i(s),u)\,\widetilde{N}_i(s)\right]$$

$$=\cos^2\phi\left\|\widetilde{T}(s)\right\|^2+\widetilde{H}_1(s)\cos^2\phi\;\widetilde{T}(s)x\,\alpha\,\widetilde{N}_2(s)+\widetilde{H}_2(s)\cos^2\phi\;\widetilde{T}(s)x\,\alpha\,\widetilde{N}_3(s)+\widetilde{H}_1(s)$$

$$\cos^2\phi\;\widetilde{N}_2(s)\,x\,\alpha\,\widetilde{T}(s)+\widetilde{H}_1^2(s)\cos^2\phi\left\|\widetilde{N}_2(s)\right\|^2+\widetilde{H}_1(s)\,\widetilde{H}_2(s)\cos^2\phi\,\widetilde{N}_2(s)\,x\alpha\,\widetilde{N}_3(s)$$

$$+\widetilde{H}_2(s)\cos^2\phi\,\widetilde{N}_3x\,\alpha\,\widetilde{T}(s)+\widetilde{H}_2(s)\,\widetilde{H}_1(s)\cos^2\phi\,\widetilde{N}_3(s)\,x\,\alpha\,\widetilde{N}_2(s)+\widetilde{H}_2^2(s)\cos^2\phi\left\|\widetilde{N}_3(s)\right\|^2$$

olur. Buradan da

$$1=\cos^2\phi+\widetilde{H}_1^2(s)\cos^2\phi+\widetilde{H}_2^2(s)\cos^2\phi$$

$$1-\cos^2\phi=(\widetilde{H}_1^2(s)+\widetilde{H}_2^2(s))\cos^2\phi$$

veya

$$\frac{\sin^2\phi}{\cos^2\phi}=\sum_{i=1}^{2}\widetilde{H}_i^2(s)$$

bulunur. Böylece

$$\sum_{i=1}^{2}\widetilde{H}_i^{\,2}(s)=tg^2\phi=st. \qquad \text{...(II.2.7)}$$

elde edilir.

$\Leftarrow$) $\widetilde{\beta}:I\to Q_{ID^4}$ dual kuaterniyonik eğrisi için $\sum_{i=1}^{2}\widetilde{H}_i^{\,2}(s)=a\,(st.)$ olduğunu kabul edelim. Bu taktirde, $tg^2\phi=a$ olacak şekilde bir ϕ dual açısı vardır. Buna göre,

$$u = \cos\phi\, \widetilde{T}(s) + \sum_{i=2}^{3} \widetilde{H}_{i-1}(s) \cos\phi\, \widetilde{N}_i(s) \qquad ...(II.2.8)$$

ile tanımlanan dual uzay-kuaterniyonu bir sabit ve birim kuaterniyondur.

1) Önce u' nun sabit olduğunu gösterelim.

(II.2.8) denkleminin s-ye göre türevini alarak;

$$\frac{1}{\cos\phi}\frac{du}{ds} = \dot{\widetilde{T}}(s) + \sum_{i=2}^{3} \dot{\widetilde{H}}_{i-1}(s)\, \widetilde{N}_i(s) + \sum_{i=2}^{3} \widetilde{H}_{i-1}(s)\, \dot{\widetilde{N}}_i(s) \qquad ...(II.2.9)$$

buluruz. Diğer yandan (II.1.11) de i = 2 için

$$\widetilde{h}(\widetilde{N}_3(s), u) = \widetilde{H}_2(s) \cos\phi$$

yazıp bu eşitliğin s-ye göre türevinin alınmasıyla,

$$\widetilde{h}(\dot{\widetilde{N}}_3(s), u) + \widetilde{h}(N_3(s), \dot{u}) = \dot{\widetilde{H}}_2(s) \cos\phi + 0$$

$$\widetilde{h}(\dot{\widetilde{N}}_3(s), u) = \dot{\widetilde{H}}_2(s) \cos\phi$$

$$\dot{\widetilde{H}}_2(s) = -(R-\widetilde{K})(s)\, \widetilde{H}_1(s) \qquad ...(II.2.10)$$

elde edilir. (II.2.8) ifadesinde (I.3.1), (II.1.8) ve

$$\dot{\widetilde{H}}_1(s) = (R-\widetilde{K})(s)\, \widetilde{H}_2(s) \qquad ...(II.2.11)$$

eşitliğinin kullanılmasıyla;

$$\frac{1}{\cos\phi}\frac{du}{ds} = \widetilde{K}(s)\, \widetilde{N}_1(s) + (R-\widetilde{K})(s)\, \widetilde{H}_2(s)\, \widetilde{N}_2(s) - (R-\widetilde{K})(s)\, \widetilde{H}_1(s)\, \widetilde{N}_3(s) +$$

$$\frac{\widetilde{K}(s)}{K(s)}(-\widetilde{K}(s)\widetilde{N}_1(s) + (R-\widetilde{K})(s)\, \widetilde{N}_3(s)) + \widetilde{H}_1(s)\frac{1}{(R-\widetilde{K})(s)}(-(R-\widetilde{K})(s)\widetilde{N}_2(s))$$

veya

$$\frac{1}{\cos\phi}\frac{du}{ds} = 0$$

bulunur. O halde u sabittir.

2) u nun birim olduğunu gösterelim:

$$\| u \|^2 = \widetilde{h}(u,u) = u\, x\alpha\, u$$

$$=\left[\cos\phi\ \widetilde{T}(s)+\sum_{i=2}^{3}\widetilde{H}_{i-1}(s)\cos\phi\,\widetilde{N}_i(s)\right]x\,\alpha\left[\cos\phi\ \widetilde{T}(s)+\sum_{i=2}^{3}\widetilde{H}_{i-1}(s)\cos\phi\,\widetilde{N}_i(s)\right]$$

$$=\left[\cos\phi\ \widetilde{T}(s)+\widetilde{H}_1(s)\cos\phi\,\widetilde{N}_2(s)+\widetilde{H}_2(s)\cos\phi\,\widetilde{N}_3(s)\right]x$$

$$\alpha\left[\cos\phi\ \widetilde{T}(s)+\widetilde{H}_1(s)\cos\phi\,\widetilde{N}_2(s)+\widetilde{H}_2(s)\cos\phi\,\widetilde{N}_3(s)\right]$$

$$=\cos^2\phi(1+\sum_{i=1}^{2}\widetilde{H}_i^{\,2}(s)$$

$$=\cos^2\phi(1+tg^2\phi)$$

$$=1$$

bulunur. Öyleyse,

$$\|u\|=1$$

dir. Diğer yandan,

$$\widetilde{h}(\widetilde{T}(s),u)=\frac{1}{2}[\widetilde{T}(s)\,x\,\alpha\,u+u\,x\,\alpha\,\widetilde{T}(s)]$$

$$=\frac{1}{2}\left[\widetilde{T}(s)\,x\,\alpha\,[\cos\phi\,\widetilde{T}(s)+\sum_{i=2}^{3}\widetilde{H}_{i-1}(s)\,\widetilde{N}_i(s)\cos\phi]\right]$$

$$+\left[[\cos\phi\,\widetilde{T}(s)+\sum_{i=2}^{3}\widetilde{H}_{i-1}(s)\,\widetilde{N}_i(s)\cos\phi]\,x\,\alpha\,\widetilde{T}(s)\right]$$

$$=\frac{1}{2}\left[\cos\phi\left\|\widetilde{T}(s)\right\|\right]^2+\widetilde{H}_1(s)\cos\phi\,\widetilde{T}(s)\,x\,\alpha\,\widetilde{N}_2(s)+\widetilde{H}_2(s)\cos\phi\,\widetilde{T}(s)x\,\alpha\,\widetilde{N}_3(s)+\cos\phi\left\|\widetilde{T}(s)\right\|^2$$

$$+\widetilde{H}_1(s)\cos\phi\,\widetilde{N}_2(s)\,x\alpha\,\widetilde{T}(s)+\widetilde{H}_2(s)\cos\phi\ \widetilde{N}_3(s)\,x\,\alpha\,\widetilde{T}(s)$$

$$=\frac{1}{2}\left[2\cos\phi-\widetilde{H}_1(s)\cos\phi\,\widetilde{N}_1(s)-\widetilde{H}_2(s)\cos\phi\,\widetilde{N}_2(s)+\widetilde{H}_1(s)\cos\phi\,\widetilde{N}_1(s)+\widetilde{H}_2(s)\cos\phi\,\widetilde{N}_2(s)\right]$$

veya

$$\widetilde{h}(\widetilde{T}(s),u)=\cos\phi\ =st.$$

bulunur. Bu ise β eğrisinin bir eğilim çizgisi olduğunu verir.

Böylece, ispat tamamlanmış olur.

II.2.1.Sonuç: Dual kuaterniyonik eğriler için elde edilen harmonik eğriliklerin türev denklemleri (II.2.10) ve (II.2.11) ile verilip matrisel ifadesi aşağıdaki şekildedir:

$$\begin{bmatrix} \dot{\widetilde{H}}_1 \\ \dot{\widetilde{H}}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & (R-\widetilde{K}) \\ -(R-\widetilde{K}) & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \widetilde{H}_1 \\ \widetilde{H}_2 \end{bmatrix} \qquad \text{...(II.2.12)}$$

III.BÖLÜM

PSEUDO KUATERNİYONİK LORENTZ UZAYI

III.1.Kuaterniyonlar Ve Pseudo Kuaterniyonlar Üzerine

V, 4-boyutlu reel vektör uzayı olsun.Burada V deki bir kuaterniyonu ve pseudo kuaterniyonu (psequat) tanımlayacağız. Sonrada tanımladığımız bu kuaterniyonların ve pseudo kuaterniyonların V de aynı cebirsel rolü oynadıklarını göstereceğiz.

$(\vec{e}_A)$, V nin bir bazı olsun. V de bu baz yardımıyla, Lie cebirini tanımlayalım:

III.1.1.Tanım: $\forall x = \sum_{A=1}^{4} x_A \vec{e}_A, y = \sum_{A=1}^{4} y_A \vec{e}_A \in V$ ise x ile y nin Lie çarpımı aşağıdaki şekilde tanımlanır:

$$[x, y] = \sum (x_i y_j - x_j y_i) \vec{e}_k \qquad \text{...(III.1.1)}$$

Burada, (ijk) (123) ün bir çift permutasyonudur [14].

III.1.2.Tanım: S *ve* T , V üzerinde

$$\forall x = \sum_{A=1}^{4} x_A \vec{e}_A \in V \text{ için } S x = \sum_{i=1}^{3} x_i \vec{e}_i, T x = x_4 \vec{e}_4 \qquad \text{...(III.1.2)}$$

ile tanımlı iki projeksiyon olsunlar. Açıktır ki, $ST = TS = 0$ *ve* $S + T = I$ dır. $\alpha : V \to V$, $\alpha = -S + T$ biçiminde tanımlanan lineer dönüşüm olmak üzere, $\forall x \in V$ için,

$$\alpha x = -\sum_{i=1}^{3} x_i \vec{e}_i + x_4 \vec{e}_4 = -S x + T x \qquad \text{...(III.1.3)}$$

dir. $\alpha^2 = I$ olduğundan α bir involutory lineer izomorfizmdir [14].

(III.1.2) ile verilen $S\ ve\ T$, V üzerinde sırasıyla uzay ve temporal projeksiyonlar olarak adlandırılırlar. (III.1.3) ile verilen α involutory izomorfizmi de V üzerinde Hamilton eşleniği adını alır [14].

III.1.3.Tanım: V üzerinde iki bilineer form, $\forall x, y \in V\ için$,

$$g(x,y) = \sum_{i=1}^{3} x_i y_i - x_4 y_4 \ ,\ h(x,y) = \sum_{A=1}^{4} x_A y_A \qquad ...(III.1.4)$$

şeklinde tanımlanır.Bu tanımdaki g ve h formlarının her ikisi de non-dejenere, reel, simetrik bilineer formlardır. g nin karşılık geldiği kuadratik form indefinite, h nın karşılık geldiği kuadratik form pozitif definittir [14].

Bununla beraber; $S, T\ ve\ \alpha$ (III.1.2) ve (III.1.3) ile tanımlı olup (III.1.4) ile tanımlanan bilineer formlara göre self adjointtirler.Yani $\forall x, y \in V\ için$,

$$\begin{aligned} g(Sx,y) &= g(x,Sy) = h(x,Sy) = h(Sx,y) \\ g(Tx,y) &= g(x,Ty) = -h(x,Ty) = -h(Tx,y) \end{aligned} \qquad ...(III.1.5)$$

$$g(\alpha x, y) = g(x, \alpha y) = -h(x,y) \qquad ...(III.1.6)$$

dir [14].

III.1.4.Tanım : b, V üzerinde keyfi simetrik bilineer form olsun. 'o' iç işlem olmak üzere; $\forall x, y \in V$ için ,

$$x\,o\,y = [x,y] + x_4 S_y + y_4 S_x - b(x,y)\vec{e}_4 \qquad ...(III.1.7)$$

tanımlayalım. Bu durumda (V,o) bir reel cebirdir (Genel olarak değişmeli ve birleşmeli değildir.). Bu şekilde tanımlanan reel cebir, b=g olduğu durumda V üzerinde pseudo kuaterniyonik cebir, b=h olduğu durumda ise V üzerinde reel kuaterniyonik cebir adını alır [14].

Kuaterniyonik durumda iç işlemi '.' ile pseudo kuaterniyonik durumda ise '$*$' ile göstereceğiz. Keyfi bir $x \in V$ yi gözönüne alalım. $N(x), x\,o\,\alpha x \in V$ biçiminde tanımlanır. Açıktır ki, $\forall x, y \in V$ için,

$$N(x) = -b\,(x, \alpha\, x)\,\vec{e}_4 \qquad ...(III.1.8)$$

dir. Yine kolayca görülebilir ki ,

$$N(x+y) - N(x) - N(y) = x\,o\,\alpha\, y + y\,o\alpha\, x$$

$$= -\{b\,(x, \alpha\, y) + b\,(y, \alpha\, x)\}\,\vec{e}_4 \qquad ...(III.1.9)$$

dir. α hem g ye hem de h ya göre self adjoint olduğundan,

$$x \cdot \alpha\, y + y \cdot \alpha\, x = -2\, g\,(x, \alpha\, y)\,\vec{e}_4 = 2\, h\,(x, y)\,\vec{e}_4 \qquad (\textit{kuaterniyonik durum})$$

$$x * \alpha\, y + y * \alpha\, x = -2\, h\,(x, \alpha\, y)\,\vec{e}_4 = 2\, g(x, y)\,\vec{e}_4 \qquad (\textit{pseudo kuaterniyonik durum}) \qquad ...(III.1.10)$$

elde edilir [14].

III.1.5.Tanım: $x \in V$ olsun. V de x in normu; $N\,(x)$, (III.1.8) denklemi ile tanımlanır. Kuaterniyonik durumda, $N\,(x)$, $h(x, x)\,\vec{e}_4$ ile tanımlanır. Pseudo kuaterniyonik durumda ise $N\,(x)$, $g\,(x,x)\,\vec{e}_4$ ile tanımlanır. Kuaterniyonik durumda aynı zamanda, $N\,(x)$, alışılmış öklidyen normu $N\,(x) = \|x\|^2\,\vec{e}_4$ ü verir. Pseudo kuaterniyonik durumda $x \in V$ yi;

$g\,(x,x) \rangle 0$ olduğu zaman space like,

$g\,(x,x) = 0$ olduğu zaman null,

$g\,(x,x) \langle 0$ olduğu zaman time like

olarak adlandıracağız [14].

III.1.6.Tanım: Bir x kuaterniyonu $\|x\| = 1$ olduğu zaman birimdir. Yine bir x pseudo kuaterniyonu $N\,(x)$, $+\vec{e}_4$ veya $-\vec{e}_4$ olduğu durumda birimdir [14].

III.1.7.Tanım: İki x ve y kuaterniyonu (ya da pseudo kuaterniyonu) $x \cdot \alpha\, y + y \cdot \alpha\, x = 0$ (*veya* $x * \alpha\, y + y * \alpha\, x = 0$) ise ortogonaldirler. x ve y nin ortogonalliği için bir eşdeğer şart da;

$$h(x,y)=0 \qquad veya \qquad g(x,y)=0 \qquad \text{...(III.1.11)}$$

dır.

Şimdi kuaterniyonik ve pseudo kuaterniyonik çarpımlar arasındaki ilişkiyi verelim: x ve y V nin iki elemanı olsunlar. Tanım (III.1.4) ve (III.1.7) eşitliğinden yararlanarak $x*y-x\cdot y$ değeri için

$$x*y-x\cdot y\equiv\{g(x,y)-h(x,y)\}\vec{e}_4 \qquad \text{... (III.1.12)}$$

elde edilir. (III.1.4) ve (III.1.10) eşitliklerinin bir sonucu olarak ;

$$x*y\equiv x\cdot y-2x_4y_4\vec{e}_4 \qquad \text{... (III.1.13)}$$

bulunur [14].

Bundan sonra L_Q^4 ile 4-boyutlu pseudo kuaterniyonik Lorentz uzayını göstereceğiz.

III.1.8.Tanım: $M\subset L_Q^4$ Lorentz uzayında s-yay parametresi ile verilen bir eğri olsun. M eğrisinin hız vektörü $\dot{X}$ olmak üzere,

i) $g(\dot{X},\dot{X})\langle 0$ ise $X(s)$ time like bir eğri,

ii) $g(\dot{X},\dot{X})\rangle 0$ ise $X(s)$ space like bir eğri,

iii) $g(\dot{X},\dot{X})=0$ ise $X(s)$ null eğri

olarak adlandırılır.

III.1.9.Tanım: $M\subset L_Q^4$ eğrisi verilmiş olsun. $s\in I$ ya karşılık gelen Frenet 4-ayaklısı $\{V_1(s),V_2(s),V_3(s),V_4(s)\}$ olmak üzere,

$$k_i:I\to IR$$

$$s\to k_i(s)=g(\dot{V}_i(s),V_{i+1}(s)) \qquad \text{...(III.1.14)}$$

şeklinde tanımlı k_i fonksiyonuna M eğrisinin i-yinci eğrilik fonksiyonu ve $k_i(s), 1\le i\le 3$ reel sayısına da $M(s)$ noktasındaki i-yinci eğriliği denir.

Şimdi bu ilişkiler yardımıyla pseudo kuaterniyonik Lorentz uzayı üzerinde çalışalım:

III.2.Bir Kuaterniyonik Lorentz Eğrisinin Serret Frenet Formülleri

III.2.1.Bir Pseudo Uzay-Kuaterniyonik Lorentz Eğrisinin Serret Frenet Formülleri

L_Q^3 ile 3-boyutlu pseudo kuaterniyonik Lorentz uzayını gösterelim. M bir pseudo uzay kuaterniyonik time like eğri olsun.

$\tilde{g}$ ile L_Q^3 de aşağıdaki şekilde tanımlanan Lorentz iç çarpımını gösterelim: $\forall\, x, y \in L_Q^3$ için,

$$\tilde{g}\,(x,y)=\sum_{i=1}^{2} x_i y_i - x_3 y_3$$

olmak üzere, L_Q^4 de 'o' iç işlemi

$$x\, o\, y = [x,y] + x_4 S_y + y_4 S_x - b\,(x,y)\,\vec{e}_4$$

biçiminde tanımlanır. L_Q^3 için bu ifadeyi tekrar ele alırsak;

$b=\tilde{g}$ ve 'o' iç işlemi yerine de '$*$' alınırsa,

$$x * y = [x,y] - \tilde{g}\,(x,y)\,\vec{e}_4 \qquad \text{...(III.2.1)}$$

elde edilir.

$X : I \to L_Q^3$ time like bir uzay-kuaterniyonik eğri olsun. Yani;

$\dot{X} = t$ olmak üzere, $N\,(t) = -1$ olsun.

$$N(t) = \tilde{g}\,(t,t) = t * \alpha\, t$$

olup her iki tarafın s-ye göre türevinin alınmasıyla

$$\dot{t} * \alpha\, t + t * \alpha\, \dot{t} = 0 \qquad \text{...(III.2.2)}$$

elde edilir. Bunun sonucu olarak ;

i) $\dot{t}, t$ ye $\tilde{g}$ - ortogonaldir. Yani , $\tilde{g}\,(\dot{t},t) = 0$

ii) $\dot{t} x \alpha t$ bir time like kuaterniyondur. Gerçekten

$$\tilde{g}(\dot{t}*\alpha t, \dot{t}*\alpha t)=\frac{1}{2}\left[(\dot{t}*\alpha t)*\alpha(\dot{t}*\alpha t)+(\dot{t}*\alpha t)*\alpha(\dot{t}*\alpha t)\right]$$

$$=\frac{1}{2}2\left[\dot{t}*\alpha t*\alpha(\alpha t)*\alpha\dot{t}\right]$$

$$=\dot{t}*N(t)*\alpha\dot{t}$$

$$=-\dot{t}*\alpha\dot{t} \ \langle 0$$

dir.

Böylece , $\dot{t}$ nın bir pseudo uzay kuaterniyonu oluşundan n_1 uzay-kuaterniyonunu ve k skalar fonksiyonunu aşağıdaki şekilde tanımlayalım:

$$\dot{t}=k\,n_1\,,\quad k=N(\dot{t})\,. \qquad \text{... (III.2.3)}$$

(i) den n_1, t ye $\tilde{g}$ – ortogonaldir. Yani $\tilde{g}(n_1,t)=0$ dır. Gerçekten;

$$\tilde{g}(n_1,t) = \frac{1}{2}\left[n_1*\alpha t+t*\alpha n_1\right]$$

$$= \frac{1}{2}\left[-n_1*t-t*n_1\right]$$

$$=0$$

dır . (ii) den

$$t*n_1 = n_2 = -n_1*t \qquad \text{... (III.2.4)}$$

olacak şekilde bir n_2 uzay kuaterniyonu vardır.

Burada; $t*n_2 = -n_1 = -n_2*t$ ve $n_2*n_1 = -t = -n_1*n_2$ yazabiliriz. Böylece; t, n_1, n_2 L_Q^3 de karşılıklı olarak $\tilde{g}$ – ortogonal olan birim pseudo uzay kuaterniyonlarıdır. Yani;

$$\tilde{g}(n_2,t) = \frac{1}{2}\left[n_2*\alpha t+t*\alpha n_2\right]$$

$$=\frac{1}{2}\left[-n_2*t-t*n_2\right]$$

$$=0$$

olduğundan n_2, t ye $\tilde{g}$-ortogonaldir.

$$\tilde{g}(n_1, n_2) = \frac{1}{2}\left[n_1 * \alpha n_2 + n_2 * \alpha n_1\right]$$

$$= \frac{1}{2}\left[-n_1 * n_2 - n_2 * n_1\right]$$

$$= 0$$

olup n_1, n_2 ye $\tilde{g}$-ortogonaldir. Benzer şekilde geri kalanlar da gösterilebilir. (III.2.4) eşitliğinden türev alarak

$$\dot{n}_2 = (t * n_1)^{\cdot}$$

$$= \dot{t} * n_1 + t * \dot{n}_1$$

$$= k\, n_1 * n_1 + t * \dot{n}_1$$

$$\dot{n}_2 = -k + t * \dot{n}_1$$

$$\dot{n}_2 = t * (-k\, t + \dot{n}_1) \qquad \text{...(III.2.5)}$$

elde edilir. Böylece $\dot{n}_2$ de n_2 ye $\tilde{g}$ – ortogonal olan bir pseudo uzay kuaterniyonudur. Bundan dolayı $\dot{n}_1 - k\,t,\ \dot{t}$ *ve* n_2 *ye* $\tilde{g}$ – ortogonaldir. Gerçekten,

$$\tilde{g}(\dot{n}_1 - k\,t,\ \dot{t}) = \frac{1}{2}\left[(\dot{n}_1 - k\,t) * \alpha\, \dot{t} + \dot{t} * \alpha\ (\dot{n}_1 - k\,t)\right]$$

$$= \frac{1}{2}\left[\dot{n}_1 * \alpha\, \dot{t} - k\,t * \alpha\, \dot{t} + \dot{t} * \alpha\, \dot{n}_1 - k\, \dot{t} * \alpha\, t\right]$$

$$= \frac{1}{2}\left[-\dot{n} * \dot{t} + k\,t * \dot{t} - \dot{t} * \dot{n}_1 + k\, \dot{t} * t\right]$$

$$= 0$$

olup $\dot{n}_1 - kt, \dot{t}$ ya $\tilde{g}$-ortogonaldir. Ayrıca

$$\tilde{g}(\dot{n}_1 - kt, n_2) = \frac{1}{2}[(\dot{n}_1 - kt) * \alpha n_2 + n_2 * \alpha(\dot{n}_1 - kt)]$$

$$= \frac{1}{2}[\dot{n}_1 * \alpha n_2 - kt * \alpha n_2 + n_2 * \alpha \dot{n}_1 - k n_2 * \alpha t]$$

$$= \frac{1}{2}[-\dot{n}_1 * n_2 + kt * n_2 - n_2 * \dot{n}_1 + k n_2 * t]$$

$$= 0$$

elde edilir. Böylece $\dot{n}_1 - kt$ nin n_2 ye $\tilde{g}$ – ortogonal olduğu da gösterilmiş oldu.

$n_1 = \dfrac{\ddot{X}}{N(\ddot{X})}$ birim bir uzay- kuaterniyonu olup, $\dot{n}_1 \in Sp\{t, n_1, n_2\}$ dir. Dolayısı ile ,

$\dot{n}_1 = \lambda_1 t + \lambda_2 n_1 + \lambda_3 n_2$ yazabiliriz . O halde;

$$\tilde{g}(\dot{n}_1, \dot{n}_1) = \lambda_1 \tilde{g}(t, \dot{n}_1) + \lambda_2 \tilde{g}(n_1, \dot{n}_1) + \lambda_3 \tilde{g}(n_2, \dot{n}_1)$$

$\tilde{g}(t,t) = -1$ dir. Yani X bir time like pseudo uzay- kuaterniyonik eğridir.

$$\varepsilon_0 \lambda_1 = \tilde{g}(\dot{n}_1, t) = -\tilde{g}(\dot{t}, n_1) = -k$$

$$\varepsilon_0 \lambda_1 = -k \ , \frac{1}{\varepsilon_0} = \varepsilon_0$$

$\lambda_1 = -\varepsilon_0 k$ *olup* t time like olduğundan $\varepsilon_0 = -1$ dir. Dolayısıyla

$$\lambda_1 = k$$

elde edilir.

$$\lambda_2 = \tilde{g}(\dot{n}_1, n_1) = 0 \quad \text{ve}$$

$$\lambda_3 = \tilde{g}(\dot{n}_1, n_2) = \varepsilon_0 r$$

$\tilde{g}(n_1, n_1) = 1$ dir. Yani n_1 space -like olup $\varepsilon_0 = +1, \lambda_3 = r$ olur. Dolayısı ile,

$$\dot{n}_1 = kt + r n_2 \qquad \text{...(III.2.6)}$$

elde edilir. (III.1.5) in (III.1.6) da yerine konulması ile ;

$$\dot{n}_2 = t * (-kt + \dot{n}_1)$$

$$= t * [-kt + (kt + r n_2)]$$

$$= t * r n_2 = r t * n_2$$

$$\dot{n}_2 = -r n_1 \qquad \text{... (III.2.7)}$$

dir.

(III.2.3), (III.2.6) ve (III.2.7) eşitlikleri L_Q^3 de bir time like pseudo uzay-kuaterniyonik eğrinin Serret Frenet formülleridir. (t, n_1, n_2, k, r) de bu eğrinin Frenet takımıdır.

III.2.2 Bir Pseudo Kuaterniyonik Lorentz Eğrisinin Serret Frenet Formülleri

Şimdi , L_Q^3 deki bir pseudo uzay kuaterniyonik Lorentz eğrisi için elde edilen Serret Frenet formüllerinden yararlanarak bir pseudo kuaterniyonik eğri için bu formülleri yeniden elde edelim:

$$\widetilde{X} = \sum_{A=1}^{4} q_A(s)\vec{e}_A$$

time like bir eğri olsun. g ile L_Q^4 deki pseudo kuaterniyonik Lorentz çarpımını gösterelim.

$$\dot{T} = K N_1 \ , K = N(\dot{T}) \, , N(T) = -1 \ \text{ve} \ N(N_1) = -1 \qquad \text{...(III.2.8)}$$

olsun. $N(T) = -1$ in türevi alınırsa,

$$g(T,T) = -1 \Rightarrow g(\dot{T},T) + g(T,\dot{T}) = 0$$

$$\Rightarrow 2g(\dot{T},T) = 0$$

$$\Rightarrow g(\dot{T},T) = 0$$

elde edilir. Burada, (III.2.8) kullanılırsa,

$$K g(N_1, T) = 0 \Rightarrow K \neq 0 \, , g(N_1, T) = 0$$

$$N_1 * \alpha T + T * \alpha N_1 = 0$$

elde edilir. Buradan ;

i) N_1, T ye g- ortogonaldir. Yani $g(N_1, T) = 0$ dır.

ii) $t = N_1 * \alpha T$ bir uzay-kuaterniyonudur. Yani;

$$N_1 * \alpha T + \alpha(N_1 * \alpha T) = 0 \quad \Rightarrow N_1 * \alpha T + \alpha(N_1 * \alpha T) = 2g(N_1, T) = 0$$

olduğu görülür. T ve N_1 birim uzunluklu olduklarından t de birim uzunlukludur. $t = N_1 * \alpha T$ eşitliğinden bu eğri boyunca N_1 vektörü $t * T$ olarak seçilebilir. Yani;

$$N_1 = t * T \qquad \text{...(III.2.9)}$$

yazılabilir. (III.2.9) un türevinde (III.2.3) , (III.2.8) ve (III.2.9) un kullanılmasıyla,

$$\begin{aligned} \dot{N}_1 &= \dot{t} * T + t * \dot{T} \\ &= k\, n_1 * T + t * K N_1 \\ &= k\, N_2 + (K t * (t * T)) \quad , t * t = +1 \end{aligned}$$

bulunur. Böylece

$$\dot{N}_1 = K T + k N_2 \qquad \text{... (III.2.10)}$$

elde edilir. Burada, $N_2 = n_1 * T$ dir.

N_2 nin özellikleri aşağıdaki şekilde verilebilir:

i) N_2 birimdir. Yani $N(N_2) = 1$ dir. Çünkü,

$$\begin{aligned} g(N_2, N_2) = N_2 * \alpha N_2 &= (n_1 * T) * \alpha (n_1 * T) \\ &= n_1 * T * \alpha T * \alpha n_1 \\ &= n_1 * N(T) * \alpha n_1 \\ &= -N(T) * n_1 * \alpha n_1 = 1 \end{aligned}$$

ii) T, N_1 *ve* N_2 karşılıklı olarak g- ortogonaldir.Gerçekten;

$$\begin{aligned} g(T, N_1) &= \frac{1}{2}\left[T * \alpha N_1 + N_1 * \alpha T \right] \\ &= \frac{1}{2}\left[T * \alpha (t * T) + (t * T) * \alpha T \right] \\ &= \frac{1}{2}\left[T * \alpha T * \alpha t + t * T * \alpha T \right] \\ &= 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} g(T, N_2) &= \frac{1}{2}\left[T * \alpha N_2 + N_2 * \alpha T \right] \\ &= \frac{1}{2}\left[T * \alpha (n_1 * T) + (n_1 * T) * \alpha T \right] \\ &= \frac{1}{2}\left[T * \alpha T * \alpha n_1 + n_1 * T * \alpha T \right] \end{aligned}$$

$$=0$$

$$g(N_1,N_2)=\frac{1}{2}\left[N_1*\alpha N_2+N_2*\alpha N_1\right]$$

$$=\frac{1}{2}\left[(t*T)*\alpha(n_1*T)+(n_1*T)*\alpha(t*T)\right]$$

$$=\frac{1}{2}\left[t*T*\alpha T*\alpha n_1+n_1*T*\alpha T*\alpha t\right]$$

$$=\frac{1}{2}\left[-N(T)*t*\alpha n_1-N(T)*n_1*\alpha t\right]$$

$$=0$$

Burada, $t\,,n_1$ uzay kuaterniyonlarıdır.

Şimdi $N_2=n_1*T$ nin türevinde (III.2.6), (III.2.8) ve (III.2.9) un kullanılmasıyla aşağıdaki sonucu elde ederiz:

$$\dot{N}_2=\dot{n}_1*T+n_1*\dot{T}$$

$$=(k\,t+r\,n_2)*T+n_1*K\,N_1$$

$$=(k\,t*T)+r\,n_2*T+K\,n_1*N_1$$

$$=k\,t*T+r\,n_2*T+K\,n_1*(t*T)$$

$$=k\,N_1+r\,N_3+K(n_1*t)*T$$

$$=k\,N_1+r\,N_3-K\,n_2*T$$

$$\dot{N}_2=k\,N_1+(r-K)\,N_3 \qquad ...(III.2.11)$$

Burada, $N_3=n_2*T$ olarak alınmıştır.

Buna göre N_3 ün özellikleri aşağıdaki şekildedir:

i) $N(N_3)=1$ dir. Gerçekten,

$$g(N_3,N_3)=(n_2*T)*\alpha(n_2*T)$$

$$=n_2*T*\alpha T*\alpha n_2$$

$$=-N(T)*n_2*\alpha n_2$$

$$=1$$

T,N_1,N_2,N_3 karşılıklı olarak g-ortogonaldirler. Gerçekten de

$$g(T,N_3)=\frac{1}{2}[T*\alpha N_3+N_3*\alpha T]$$

$$=\frac{1}{2}[T*\alpha(n_2*T)+(n_2*T)*\alpha T]$$

$$=\frac{1}{2}[T*\alpha T*\alpha n_2+n_2*T*\alpha T]$$

$$=0$$

$$g(N_1,N_3)=\frac{1}{2}[N_1*\alpha N_3+N_3*\alpha N_1]$$

$$=\frac{1}{2}[(t*T)*\alpha(n_2*T)+(n_2*T)*\alpha(t*T)]$$

$$=\frac{1}{2}[t*T*\alpha T*\alpha n_2+n_2*T*\alpha T*\alpha t]$$

$$=0$$

$$g(N_2,N_3)=\frac{1}{2}[N_2*\alpha N_3+N_3*\alpha N_2]$$

$$=\frac{1}{2}[(n_1*T)*\alpha(n_2*T)+(n_2*T)*\alpha(n_1*T)]$$

$$=\frac{1}{2}[n_1*T*\alpha T*\alpha n_2+n_2*T*\alpha T*\alpha n_1]$$

$$=0$$

Sonuç olarak , N_3 ün türevinde (III.2.5) , (III.2.8) ve (III.2.9) un kullanılmasıyla;

$$\dot{N}_3=\dot{n}_2*T*n_2*\dot{T}$$

$$=-r\,n_1*T+n_2*K N_1$$

$$=-r N_2-K N_1*n_2$$

$$=-r N_2+K(T*t)*n_2$$

$$=-r N_2-K(T*n_1)$$

$$\dot{N}_3=-(r-K)N_2 \qquad \text{(III.2.12)}$$

elde edilir.

(III.2.8), (III.2.10) , (III.2.11) , (III.2.12) ifadeleri L_Q^4 de bir $\widetilde{X}$ time like pseudo kuaterniyonik Lorentz eğrisinin Serret-Frenet formüllerini verir. $(T,N_1,N_2,N_3,K,k,r-K)$ da bu Lorentz eğrisinin Serret-Frenet takımıdır.

III.3.Pseudo Kuaterniyonik Lorentz Eğilim Çizgileri İçin Karakterizasyonlar

III.3.1.Tanım: $M \subset L_Q^4$ eğrisinin birim teğet vektör alanı T ve L_Q^4 ün sabit birim vektörü $\vec{U}$ olsun. Eğer

$$g(T,\vec{U}) = ch\varphi = st. \qquad ...(III.3.1)$$

ise M eğrisine L_Q^4 de bir eğilim çizgisi, φ açısına M nin eğilim açısı ve $Sp\{\vec{U}\}$ uzayına da M nin eğilim ekseni denir.

III.3.1.Teorem: $M \subset L_Q^3$ eğrisi bir eğilim çizgisidir $\Leftrightarrow$ $\forall s \in I$ için $\dfrac{k_1}{k_2}$ = sabittir.

İspat :

$\Rightarrow$: M eğrisi bir eğilim çizgisi olsun. M nin birim teğeti t ve eğilim ekseni $\vec{U}$ olmak üzere,

$$\tilde{g}(t,\vec{U}) = st.$$

dir. Her iki tarafın türevi alınırsa,

$$\tilde{g}(D_t t,\vec{U}) = 0$$

$$\tilde{g}(k\, n_1,\vec{U}) = 0$$

$$\tilde{g}(n_1,\vec{U}) = 0$$

Yani, n_1 vektörü eğilim eksenine diktir.Bunun anlamı ; eğilim ekseninin sabit doğrultusu t ve n_2 nin belirttiği düzleme paraleldir. $\vec{U}$ nun t ile yaptığı açı sabit olduğundan n_2 ile de sabit açı yapar.

$$\vec{U} = ch\varphi\, t + sh\varphi\, n_2$$

yazabiliriz.

$\tilde{g}(n_1,\vec{U}) = 0$ ifadesinin türevi alınırak bu ifade de (III.2.6) değeri yerine yazılırsa,

$$\tilde{g}(D_t\, n_1,\vec{U}) = 0$$

$$\tilde{g}(k\, t + r\, n_2, ch\varphi\, t + sh\varphi\, n_2) = 0$$

$$-k\ ch\varphi + r\,sh\varphi = 0$$

$$\frac{k}{r} = \frac{sh\varphi}{ch\varphi} = th\varphi = st.$$

bulunur.

$\Leftarrow$: Kabul edelim ki, $\frac{k}{r} = st.$ olsun. Bu durumda $\frac{k}{r} = th\varphi$ yazabiliriz.

$$\vec{U} = t\,ch\varphi + n_2\ sh\varphi$$

olarak tanımlayalım. O halde

i) $\vec{U} = st.$

ii) M eğilim çizgisi ve $\vec{U}$ da M nin eğilim eksenidir.

Şimdi bunları gösterelim.

i) $\vec{U} = t\,ch\varphi + n_2\ sh\varphi$ ifadesinden türev alınarak

$$\frac{d\vec{U}}{ds} = D_t\ t\ ch\varphi + D_t\ n_2\ sh\varphi$$

$$\frac{d\vec{U}}{ds} = k\,n_1\ ch\varphi - r\,n_1\ sh\varphi$$

$$\frac{d\vec{U}}{ds} = (k\,ch\varphi - r\ sh\varphi)\,n_1$$

Ayrıca,

$$\frac{k}{r} = th\varphi \quad \Rightarrow k\,ch\varphi - r\ sh\varphi = 0$$

olduğundan

$$\frac{d\vec{U}}{ds} = 0$$

elde edilir.Bu ise $\vec{U}$ nun sabit olması demektir.

ii) $\bar{g}(\vec{U},t) = \bar{g}(t\,ch\varphi + n_2 sh\varphi, t)$

$$= -\,ch\varphi$$

$$\bar{g}(\vec{U},t) = st.$$

olur. O halde M bir eğilim çizgisidir.

III.3.2.Teorem : $X: I \to L_Q^3$ eğrisi eğilim çizgisidir $\Leftrightarrow$ $\det\left(\frac{d\,n_2}{ds}, \frac{d^2 n_2}{ds^2}, \frac{d^3 n_2}{ds^3}\right) = 0$

dır. Burada n_2 eğrinin binormalidir.

İspat :

$\Rightarrow$: $X: I \to L_Q^3$ eğrisi eğilim çizgisi olsun.

n = 3 özel hali için ;

$$\begin{cases} \dot{t} = \varepsilon_0 k\, n_1 \\ \dot{n}_1 = -\varepsilon_0 k\, t + \varepsilon_0 r\, n_2 \\ \dot{n}_2 = -\varepsilon_0 r\, n_1 \end{cases}$$

yazabiliriz.

$\dot{n}_2 = -\varepsilon_0 r\, n_1$ eşitliğinden türev alınarak

$\ddot{n}_2 = -\varepsilon_0 \dot{r}\, n_1 - \varepsilon_0 r\, \dot{n}_1$

bulunur. Burada, $\dot{n}_1$ yerine konulursa

$\ddot{n}_2 = \varepsilon_0 k\, r\, t - \varepsilon_0 \dot{r}\, n_1 - \varepsilon_0^2 r^2 n_2$

olup tekrar türev alınarak,

$\dddot{n}_2 = \varepsilon_0{}^2 \dot{k}\, r\, t + \varepsilon_0{}^2 k\, \dot{r}\, t + \varepsilon_0{}^2 k\, r\, \dot{t} - \varepsilon_0 \ddot{r}\, n_1 - \varepsilon_0 \dot{r}\, \dot{n}_1 - 2\,\varepsilon_0 \dot{k}\, r\, n_2 - \varepsilon_0 k_2^2 \dot{n}_2$

elde edilir. X bir eğilim çizgisi olduğundan $\frac{k}{r} = st.$ dir. Bu eşitlikten türev alınırsa;

$\dot{k}\, r = k\, \dot{r}$ bulunur. Burada $\dot{t}, \dot{n}_1, \dot{n}_2$ değerleri yerlerine yazılırsa,

$$\dddot{n}_2 = 3\,\varepsilon_0 \dot{k}\, r\, t + (\varepsilon_0 \ddot{r} + \varepsilon_0 k^2 r + \varepsilon_0 r^3)\, n_1 - 3\,\varepsilon_0{}^2 \dot{r}\, r\, n_2$$

bulunur. Şimdi $\det\left(\frac{d\,n_2}{ds}, \frac{d^2 n_2}{ds^2}, \frac{d^3 n_2}{ds^3}\right)$ yı hesaplayalım.

$$\det\left(\frac{d\,n_2}{ds}, \frac{d^2 n_2}{ds^2}, \frac{d^3 n_2}{ds^3}\right) = \begin{vmatrix} 0 & -\varepsilon_0 r & 0 \\ \varepsilon_0{}^2 k\, r & -\varepsilon_0 \dot{r} & -\varepsilon_0{}^2 r^2 \\ 3\,\varepsilon_0{}^2 \dot{k}\, r & \varepsilon_0 \ddot{r} + \varepsilon_0 k^2 r + \varepsilon_0 r^3 & -3\varepsilon_0{}^2 \dot{r}\, r \end{vmatrix}$$

$$= 3\,\varepsilon_0{}^5 r^3 (\dot{k}\, r - k\, \dot{r})$$

$$= 0$$

bulunur.

$\Leftarrow$: $\det\left(\dfrac{dn_2}{ds}, \dfrac{d^2 n_2}{ds^2}, \dfrac{d^3 n_2}{ds^3}\right) = 0$ ve $r \neq 0$ olsun.

$r^3(\dot{k}r - k\dot{r}) = 0$ veya $(\dot{k}r - k\dot{r}) = 0$

$\dfrac{\dot{k}}{k} = \dfrac{\dot{r}}{r}$ olur ve buradan integral alınırsa,

$$\ln k + \ln c_1 = \ln r + \ln c_2$$

$$k\,c_1 = r\,c_2 \Leftrightarrow \frac{k}{r} = \frac{c_2}{c_1} = C = st.$$

bulunur. Bu ise X' in eğilim çizgisi olduğunu gösterir.

III.3.2.Tanım : $M \subset L_Q^4$ eğrisi verilmiş olsun. M nin 1. ve 2.eğrilikleri sırasıyla K *ve* k ise ,

$$H_1 = \frac{K}{k} = \frac{1.\,eğrilik}{2.\,eğrilik}$$

şeklinde tanımlı H_1 fonksiyonuna , M nin Lorentz anlamında 1. Harmonik eğriliği denir.

III.3.3.Tanım : $M \subset L_Q^4$ eğrisi verilmiş olsun. M nin yüksek mertebeden eğrilikleri k_i olsunlar. M nin birim teğet vektör alanı V_1 olmak üzere;

$$H_i : I \to IR$$

$$H_i = \begin{cases} 0 & ,i = 0 \\ \dfrac{k_1}{k_2} & ,i = 1 \\ \{V_1[H_{i-1}]\}\dfrac{\varepsilon_0}{k_{i+1}} & ,\ i = 2 \end{cases} \qquad ...(III.3.2)$$

şeklinde tanımlı H_i fonksiyonuna, M nin i-yinci mertebeden Harmonik eğrilik fonksiyonu denir. Burada, $\varepsilon_0 = \pm 1$ dir.

III.3.4.Teorem : $M \subset L_Q^4$ bir eğilim çizgisi ve $Sp\{\vec{U}\}$ da M nin eğilim ekseni olsun. M nin Frenet vektörleri $V_1 = T$, $V_2 = N_1$, $V_3 = N_2$, $V_4 = N_3$ ve harmonik eğrilik fonksiyonları da H_1, H_2 olmak üzere,

$$g(V_{i+2}, \vec{U}) = -H_i(V_1, \vec{U}) \quad , \; i = 1,2 \qquad \text{...(III.3.3)}$$

dir .

İspat:

i) $g(N_2, \vec{U}) = -H_1\, g(T, \vec{U})$

ii) $g(N_3, \vec{U}) = -H_2\, g(T, \vec{U})$

olduğunu göstermeliyiz.

i) M nin eğilim açısı φ olsun. O zaman ,

$$g(T, \vec{U}) = ch\,\varphi$$

olur.Bu son eşitliğin her iki yanının türevini alarak,

$$T\left[g(T, \vec{U})\right] = T\left[ch\,\varphi\right]$$

$$g(D_T T, \vec{U}) = 0$$

$$g(K\, N_1, \vec{U}) = 0$$

$$K\, g(N_1, \vec{U}) = 0$$

$$g(N_1, \vec{U}) = 0$$

bulunur. Tekrar türev alınırsa,

$$g(D_T N_1, \vec{U}) = 0$$

$$g(K\,T + k\, N_2, \vec{U}) = 0$$

$$K\, g(T, \vec{U}) + k\, g(N_2, \vec{U}) = 0$$

$$g(N_2, \vec{U}) = -\frac{K}{k}\, g(T, \vec{U}) \quad ; \quad \frac{K}{k} = H_1$$

$$g(N_2, \vec{U}) = -H_1\, g(T, \vec{U})$$

olduğu görülür.

ii) $g(N_2,\bar{U}) = -H_1\, g(T,\bar{U})$

ifadesinden türev alınarak

$$T\left[g(N_2,\bar{U})\right] = -T\left[H_1\right]g(T,\bar{U}) - H_1 T\left[g(T,\bar{U})\right]$$

$$g(D_T N_2,\bar{U}) = -T\left[H_1\right]g(T,\bar{U}) - H_1 g(D_T T,\bar{U}) \quad , \; g(D_T T,\bar{U}) = 0$$

$$g(D_T N_2,\bar{U}) = -T\left[H_1\right]g(T,\bar{U})$$

olur.Burada (I.2.1) değeri yerine yazılırsa,

$$g(-\varepsilon_0 k_2 N_1 + \varepsilon_0 k_3 N_3,\bar{U}) = -T\left[H_1\right]g(T,\bar{U})$$

$$-\varepsilon_0 k_2 g(N_1,\bar{U}) + \varepsilon_0 k_3\, g(N_3,\bar{U}) = -T\left[H_1\right]g(T,\bar{U})$$

$$\varepsilon_0 k_3\, g(N_3,\bar{U}) = -\left\{-\varepsilon_0 k_2\, g(N_1,\bar{U}) + T\left[H_1\right]g(T,\bar{U})\right\}$$

$$g(N_3,\bar{U}) = -\left\{-\varepsilon_0 k_2\, g(N_1,\bar{U}) + T\left[H_1\right]g(T,\bar{U})\right\}\frac{\varepsilon_0}{k_3}$$

$$= -\left\{-\varepsilon_0 k_2\, H_0 + T\left[H_1\right]\right\}\frac{\varepsilon_0}{k_3}\, g(T,\bar{U})$$

elde edilir. Bu ise Tanım (III.3.3)'den dolayı

$$g(N_3,\bar{U}) = -H_2 g(T,\bar{U})$$

demektir.

Bir kuaterniyonik Lorentz eğrisinin eğrilikleri ile harmonik eğrilikleri arasındaki ilişki aşağıdaki teorem ile verilir.

III.3.5.Teorem: $\widetilde{X}: I \to L_Q^4$ s-yay parametresi ile verilen bir kuaterniyonik Lorentz eğilim çizgisi olsun. $\widetilde{X}(s)$ noktasındaki i-yinci eğrilik $k_i(s)$, i-yinci eğrilik yarıçapı $\sigma_i(s) = \dfrac{1}{k_i(s)}$, $1 \le i \le 3$ olarak verilsin. Bu eğrinin harmonik eğrilikleri de $H_1(s), H_2(s)$ olmak üzere,

$$H_1(s) = \frac{1.\,eğrilik}{2.\,eğrilik}$$

ve

$$H_2(s) = \dot{H}_1(s)\,\sigma_3(s) \qquad ...(III.3.4)$$

dir.

İspat: $\widetilde{X}: I \to L_Q^4$ regüler kuaterniyonik Lorentz eğilim çizgisi verilsin. $\vec{U}$ birim ve sabit bir uzay-kuaterniyonu ve $\widetilde{X}(s)$ noktasındaki Frenet 4-ayaklısı $\{T(s), N_1(s), N_2(s), N_3(s)\}$ olmak üzere,

$$g(T(s), \vec{U}) = st.$$

yazabiliriz. Bu ifadenin s-ye göre türevi alınırsa

$$g(\dot{T}(s), \vec{U}) + g(T(s), \dot{\vec{U}}) = 0$$

$$g(\dot{T}(s), \vec{U}) = 0 \qquad ...(III.3.5)$$

elde edilir. (III.3.5) de (III.2.1) in kullanılmasıyla $s \in I$ için,

$$g(K(s)\,N_1(s), \vec{U}) = 0 \qquad ...(III.3.6)$$

bulunur. Burada $K(s) \neq 0$ olacağından

$$g(N_1(s), \vec{U}) = 0 \qquad ...(III.3.7)$$

elde edilir. Bu ifadenin s-ye göre tekrar türevi alınırsa,

$$g(\dot{N}_1(s), \vec{U}) + g(N_1(s), \dot{\vec{U}}) = 0$$

$$g(\dot{N}_1(s), \vec{U}) = 0 \qquad ...(III.3.8)$$

bulunur. (III.3.8) de (III.2.3) ün kullanılmasıyla

$$g(K(s)\,T(s) + k(s)\,N_2(s), \vec{U}) = 0$$

veya

$$K(s)\,g(T(s), \vec{U}) + k(s)\,g(N_2(s), \vec{U}) = 0$$

bulunur. Ayrıca (III.3.1) ve $i = 1$ için (III.3.3) bu ifadede yerine konulursa

$$K(s)\,ch\,\varphi - k(s)\,H_1(s)\,ch\,\varphi = 0$$

bulunur. Bu son eşitlikten

$$H_1(s) = \frac{K(s)}{k(s)} = \frac{1.eğrilik}{2.eğrilik} \qquad ...(III.3.9)$$

elde edilir.

İkinci harmonik eğriliği ifade etmek içinse (III.3.3) ifadesinden i=1 için

$$g(N_2(s),\vec{U}) = -H_1(s)\,ch\,\varphi$$

elde edilir.Buradan s-ye göre türev alınırsa

$$g(\dot{N}_2(s),\vec{U}) + g(N_2(s),\dot{\vec{U}}) = -\dot{H}_1(s)\,ch\,\varphi \qquad ...(III.3.10)$$

bulunur. (III.2.4) ifadesi (III.3.10) da yerine yazılarak

$$g(K(s)\,N_1(s) + (r-K)(s)\,N_3(s),\vec{U}) = -\dot{H}_1(s)\,ch\,\varphi \qquad ...(III.3.11)$$

elde edilir. Burada (III.3.2) yerine yazılarak her iki tarafın $ch\,\varphi$ ile bölünmesiyle

$$K(s)\,H_0(s) - (r-K)(s)\,H_2(s) = -\dot{H}_1(s)$$

bulunur. Buradan da

$$H_2(s) = \dot{H}_1(s)\frac{1}{(r-K)(s)}$$

$$H_2(s) = \dot{H}_1(s)\,\sigma_3(s) \qquad ...(III.3.12)$$

elde edilir.

Böylece kuaterniyonik Lorentz eğilim çizgileri için Harmonik eğrilikler bu eğrinin eğrilikleri cinsinden elde edilmiş olur.

Şimdi $\dot{H}_2$ yı hesaplayalım: (III.3.3) de $i = 2$ alınırsa

$$g(N_3(s),\vec{U}) = -H_2(s)\,ch\,\varphi \qquad ...(III.3.13)$$

elde edilir. Bu ifadenin s-ye göre türevinin alınmasıyla

$$g(\dot{N}_3(s),\vec{U}) + g(N_3(s),\dot{\vec{U}}) = -\dot{H}_2(s)\,ch\,\varphi$$

$$g(\dot{N}_3(s),\vec{U}) = -\dot{H}_2(s)\,ch\,\varphi$$

bulunur. Burada (III.2.5) yerine konulursa

$$g(-(r-K)(s)N_2(s),\vec{U}) = -\dot{H}_2(s)\,ch\,\varphi$$

elde edilir. Bu ifadede (III.3.3) gözönüne alınırsa

$$\dot{H}_2(s) = -(r-K)(s)\,H_1(s)$$

...(III.3.14)

ifadesine ulaşılır.

Aşağıdaki teorem L_Q^4 deki pseudo kuaterniyonik Lorentz eğilim çizgileri için bir karakterizasyon verir.

III.3.6.Teorem: $M \subset L_Q^4$ time like eğrisinin Frenet 4- ayaklı alanı

$\{T, N_1, N_2, N_3\}$ ve harmonik eğrilikleri de H_1, H_2 olsun. Bu durumda,

$$M, L_Q^4 \text{ de bir eğilim çizgisidir} \Leftrightarrow \quad H_1^2 - H_2^2 = -th^2\varphi = st.$$

dir.

İspat:

$\Rightarrow$) M bir eğilim çizgisi olsun. M nin eğilim eksenini $\vec{U}$ ve eğilim açısını φ ile gösterelim. Bu durumda ,

$$g(T, \vec{U}) = ch\,\varphi = st.$$

yazabiliriz. Her iki tarafın türevini alarak,

$$\varepsilon_0 k_1\, g(N_1, \vec{U}) = 0$$

$$g(N_1, \vec{U}) = 0$$

elde edilir. Bu son eşitlikten ve Teorem (III.3.4)'den

$$g(N_3, \vec{U}) = -H_1\, g(T, \vec{U})$$

bulunur. $\{T, N_1, N_2, N_3\}$ ortonormal sistemi L_Q^4 ün bir ortonormal bazı olduğundan $\vec{U} \in Sp\ \{T, N_1, N_2, N_3\}$ veya

$$\begin{aligned}\vec{U} &= \varepsilon_0 g(T, \vec{U})\, T + \varepsilon_0\, g(N_1, \vec{U})\, N_1 + \varepsilon_0\, g(N_2, \vec{U})\, N_2 + \varepsilon_0\, g(N_3, \vec{U})\, N_3 \\ &= \varepsilon_0\, ch\varphi\, T - \varepsilon_0\, H_1\, ch\varphi\, N_2 - \varepsilon_0\, H_2\, ch\varphi\, N_3 \\ &= \varepsilon_0\, ch\varphi\, T - \varepsilon_0 \sum_{i=1}^{2} H_i\, ch\varphi\, N_{i+1}\end{aligned}$$

dir. X birim vektör alanı olduğundan;

$$N(\vec{U}) = +1$$

$$\begin{aligned}N(\vec{U}) &= \varepsilon_0^2\, ch^2\varphi + \varepsilon_0^2\, H_1^2\, ch^2\varphi - \varepsilon_0^2\, H_2^2\, ch^2\varphi\ , \quad \varepsilon_0{}^2 = 1 \\ &= ch^2\varphi + H_1^2 ch^2\varphi - H_2^2\, ch^2\varphi\end{aligned}$$

$$(H_1^2 - H_2^2)\, ch^2\varphi = 1 - ch^2\varphi$$

$$(H_1^2 - H_2^2)\, ch^2\varphi = -sh^2\varphi$$

$$(H_1^2 - H_2^2) = -\,th^2\varphi = st.$$

olur.

$\Leftarrow$: $M \subset L_Q^4$ harmonik eğrilikleri ile

$$H_1^2 - H_2^2 = st. = -th^2\varphi$$

olsun. O zaman

$$\bar{U} = \varepsilon_0 ch\,\varphi\, T - \varepsilon_0 \sum_{i=3}^{4} H_{i-2} ch\,\varphi\, N_{i-1}$$

vektör alanını gözönüne alalım. İlk olarak $\bar{U}$ nun T yönündeki türevini alalım:

$$\begin{aligned} D_T\bar{U} &= \varepsilon_0 D_T(ch\,\varphi\, T) - \varepsilon_0 \sum_{i=3}^{4} D_T(H_{i-2} ch\,\varphi\, N_{i-1}) \\ &= \varepsilon_0 ch\,\varphi\, \dot{T} - \varepsilon_0 \sum_{i=3}^{4} T\left[H_{i-2}\right] ch\,\varphi\, N_{i-1} + H_{i-2} ch\,\varphi\, \dot{N}_{i-1} \\ &= \varepsilon_0\, ch\,\varphi \left\{ \dot{T} - \sum_{i=3}^{4} T\left[H_{i-2}\right] N_{i-1} + H_{i-2}\, \dot{N}_{i-1} \right\} \\ &= \varepsilon_0\, ch\,\varphi \left\{ K N_1 - \sum_{i=3}^{4} T\left[H_{i-2}\right] N_{i-1} + H_{i-2}\, \dot{N}_{i-1} \right\} \qquad \text{...(III.3.15)} \end{aligned}$$

bulunur. Şimdi (III.3.15) eşitliğindeki

$$\sum_{i=3}^{4} T\left[H_{i-2}\right] N_{i-1} + H_{i-2}\, \dot{N}_{i-1}$$

ifadesini hesaplayalım:

$$\sum_{i=3}^{4} T\left[H_{i-2}\right] N_{i-1} + H_{i-2}\, \dot{N}_{i-1} = T[H_1]\, N_2 + H_1\, \dot{N}_2 + T[H_2]\, N_3 + H_2\, \dot{N}_3$$

burada (III.2.4), (III.2.5), (III.3.12) ve (III.3.14) kullanılarak

$$\begin{aligned} \sum_{i=3}^{4} T\left[H_{i-2}\right] N_{i-1} + H_{i-2}\, \dot{N}_{i-1} &= (r-K)\, H_2 N_2 + H_1 (k\, N_1 + (r-K)\, N_3) - (r-K)\, H_1 N_3 \\ &\quad - H_2 (r-K)\, N_2 \end{aligned}$$

...(III.3.16)

bulunur. Bu ifade (III.3.15) de yerine yazılırsa

$$D_T\bar{U} = \varepsilon_0 ch\varphi\{K N_1 - (r-K) H_2 N_2 - H_1 k N_1 - H_1 (r-K) N_3$$

$$+ (r-K) H_1 N_3 + H_2 (r-K) N_2\}$$

elde edilir. Burada $H_1 = \frac{K}{k}$ oluşu gözönüne alınırsa

$$D_T\bar{U} = \varepsilon_0 \, ch\varphi \left\{ \varepsilon_0 K N_1 - \sum_{i=3}^{4} T\left[H_{i-2}\right] N_{i-1} + H_{i-2} \dot{N}_{i-1} \right\}$$

$$= \varepsilon_0 ch\varphi \left\{ \varepsilon_0 K N_1 - \varepsilon_0 K N_1 \right\}$$

$$D_T\bar{U} = 0$$

bulunur.

Böylece $\bar{U} \in L_Q^4$ vektörünün sabit olduğu görülür. Diğer taraftan

$$N(\bar{U}) = \varepsilon_0^2 \, ch^2 \varphi + \varepsilon_0^2 \, H_1^2 \, ch^2 \varphi - \varepsilon_0^2 \, H_2^2 \, ch^2 \varphi \, , \ \ \varepsilon_0^{\,2} = 1$$

$$= ch^2 \varphi \, (1 + H_1^{\,2} - H_2^{\,2})$$

$$= ch^2 \varphi \, (1 - th^2 \varphi)$$

$$= ch^2 \varphi - sh^2 \varphi$$

$$= 1$$

olduğundan $\bar{U}$ birim vektör alanıdır. Üstelik,

$$g(T, \bar{U}) = ch\varphi = st.$$

olması M nin eğilim ekseni $Sp\{\bar{U}\}$ ve eğilim açısı da φ olan bir eğilim çizgisi olmasını gerektirir.

KAYNAKLAR

[1] O'Neill,B. Semi-Rimannian Geometry, Academic Press. New York (1983).

[2] Hacısalihoğlu,H.H.,Diferansiyel Geometri, İ.Ü., Fen Edebiyat Fakiltesi Yayınları, Mat. No=2, Malatya (1983).

[3] Yamada,K., Complate Space Like Surfaces With Conatant Mean Curvature in The Minkowski 3-Space, Tokyo J.Math.Vol.11.329-338 (1988).

[4] Chen,B.Y.,Some Classification Teorems For Submanifolds In Minkowski Space Time ,Arch. Math.Vol.62 , (1994).

[5] Beem,J.K. and Ehrlich,P.E.,Global Lorentzian Geometry,Marcel Dekker,Inc. New York (1981).

[6]Naber,G.L.,The Geometry Of Minkowski Space Time, Springer Verlag Inc.,NewYork (1992).

[7]Ergin,A.A. ve Hacısalihoğlu,H.H.,Lorentz Düzleminde Kinamatik Geometri,Doktora Tezi, Ankara (1989).

[8] Ekmekçi,N. ve Hacısalihoğlu,H.H.,Lorentz Manifoldları Üzerinde Eğilim Çizgileri, Doktora Tezi, Ankara (1993).

[9] Hacısalihoğlu, H.H., Hareket Geometrisi Ve Kuaterniyonlar Teorisi, G.Ü., Fen-Edebiyat Fakültesi Yayınları, Mat. No=2, Ankara (1983).

[10] Bharathi,K. and Nagaraj,M., Regularity For Quaternion Functions Of Several Complex Variables, Ind.J.Pure App.Math.,18(8):697-704 (1987).

[11] Bharathi,K. and Nagaraj,M., Quaternion Valued Function Of a Real Variable Serret-Frenet Formulae, İnd.J.P.App.Math. 18(6),507-511 (1987).

[12] Karadağ,M. Ve Sivridağ,A.İ.,Kuaterniyon Değerli Fonksiyonların Serret-Frenet Vektörleri Ve Eğilim Çizgileri,Yüksek Lisans Tezi, Malatya (1992).

[13] Sivridağ,A.İ.,Güneş,R. And Keleş,S.,The Serret-Frenet Formulae For Dual Quaternionic-Valued Functions Of A Single Real Variable, Mech. Mach. Theory Vol .29 No=5,pp.749-754,Great Britain (1994).

[14] Bharathi,K. and Nagaraj,M., Geometry Of Quaternionic And Pseudo Quaternionic Multiplications, Ind.J.Pure.App.Math.,16(7): 741-756 (1985).

[15] Öztürk,R. Doktora tezi K.Ü. Fen Bilimleri Enstitüsü (1980).

ÖZGEÇMİŞ

04.11.1968 yılında Malatya'da doğdu. İlk ve orta öğrenimini Malatya'da tamamlayarak 1985 yılında İnönü Üniversitesi Fen-Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümüne girmeye hak kazandı. 1989 da yüksek öğrenimini tamamladı. İki yıl öğretmen olarak görev yaptıktan sonra 1992'de İnönü Üniversitesi Fen-Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümünde Araştırma Görevlisi olarak işe başladı.1992 yılında 'Kuaterniyon Değerli Fonksiyonların Serret-Frenet Vektörleri Ve Eğilim Çizgileri' adlı tezi ile yüksek lisansı tamamladı. Halen bu görevi yapmakta olup evli ve bir çocuk annesidir.