İNÖNÜ ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

CROSSED MODÜLLER

CUMALİ YILDIRIM

98672

YÜKSEK LİSANS TEZİ
MATEMATİK ANABİLİM DALI

MALATYA
2000

"Fen Bilimleri Enstitüsü Müdürlüğüne"

İş bu çalışma, jürimiz tarafından Matematik Anabilim Dalında
YÜKSEK LİSANS TEZİ olarak kabul edilmiştir.

Başkan Doç. Dr. Rifat Güneş

Üye Yrd. Doç. Dr. İlhan İçen

Üye Yrd. Doç. Dr. Erol Kılıç

Onay

Yukarıda imzaların adı geçen öğretim üyelerine ait olduğunu onaylarım.

..../..../2000

Prof.Dr. Satılmış Kaya
Enstitü Müdürü

ÖZET

Bu tez de crossed modüller ve grupoidler için *'actor crossed modüller'* elde edilmiştir.

Bölüm I de grupoid, crossed modüller için temel tanım ve kavramlar verilmiştir, örneğin crossed modül, grupoid ve kategorileri.

Bölüm II de crossed modüller için actor crossed modül elde edilmiştir.

Son olarak Bölüm III, bu tezin ana kısmını oluşturup, grupoidler için actor crossed modül elde edilmiştir.

ABSTRACT

This thesis investigates *'actor crossed modül'* for crossed modules and groupoids.

In Chapter I, it gives the main definitions and concepts such as crossed modules, groupoids and their cotegories.

In Chapter II, that gives actor crossed modules of crossed moduler,

In the last Chapter III, which is the main part of the thesis, that gives the actor crossed modules of groupoids.

TEŞEKKÜR

Bu tez konusunun seçiminde, makale ve kitapların temini konusunda yardımcı olan ve her adımında bilgi ve görüşlerini esirgemeyen sayın hocam Y.Doç.Dr. İlhan İçen ve ayrıca tezi titizlikle inceleyip bu seviyeye gelmesine sağlayan sayın hocam Y.Doç.Dr.Erol Kılıç'a teşekkürlerimi sunarım. Gerek Lisans ve gerekse yüksek lisans döneminde çalışmalarım boyunca büyük emeği olan hocalarım ,başta Matematik Bölüm başkanı çok değerli hocam sayın Prof.Dr. Sadık Keleş ve Bölüm Başkan yardımcıları Sayın Doç.Dr. Rıfat Güneş ve Sayın Y.Doç.Dr.Selçuk Kutluay'a sonsuz teşekkürlerimi sunarım. Ayrıca her zaman, çalışmamın her aşamasında bana yardımcı olan değerli arkadaşım Arş.Grv. A.Fatih Özcan'a, çalışmalarım esnasında desteklerini esirgemeyen sevgili aileme teşekkür ederim.

İÇİNDEKİLER

GİRİŞ

Crossed modül kavramı, J.H.C. Whitehead [42] in ikinci mertebeden homotopi gruplarının cebirsel yapılarını oluştururken verdiğinden bu yana geniş bir matematikci kitlesi tarafından yaygın bir biçimde kullanılmaktadır. Örnek olarak, grupların temsili teorisi [10], cebirsel K-teori [33], homoloji cebiri [26] ve şu günlerde bilgisayar paket programı GAP [1] verilmektedir. Crossed modüllerin 2-boyutlu grup olarak göz önüne alınmasından dolayı, grup toerisi tarafından verilen bir çok kavram crossed modüller için genelleştirilmiştir. Bunlardan en önemlilerden biride grupların *actor crossed* modülüdür. Bu basitce bir G grubu için, $G \rightarrow Aut(G)$ olarak tanımlanır. Bu kavram crossed modülere K.J. Norrie [38] tarafından taşınmıştır. Herhangi bir (C, G, δ) crossed modülü için, Whitehead [42] tarafından tanımlanan türetme fonksiyonlarının grubu $Der^*(C, G)$ ve otomorfizmlerin kümesi $Aut(C, G)$ olmak üzere ,

$$(C, G, \delta) \rightarrow Der^*(C, G)$$

actor crossed modül tanımlanmıştır.

Diğer taraftan grupoid kavramı 1926 da ilk defa Brant tarafından ortaya atılmıştır [9]. Fakat Brant extra şartla vererek tanımını vermiş, bu grupoidin transitive özelliğine karşılık gelmektedir. Daha sonraları bu kavram geniş bir matematikci kitlesi tarafından kullanılmıştır. Eilenberg ve Maclane [34] tarafından categorinin tanımıyla gruboid formülize edilmiştir.

Şimdi grupoid, ergodic teori ve fonsiyonel analizden homotopi teori, cebirsel geometri, differansiyel geometri, differansiyel topoloji, grup teori gibi matematiğin geniş bir yelpazesi tarafından kullanılmaktadır. Daha geniş bilgi için Ronald Brown'nın 'From Groups To Groupoids: A Brief Survey' adlı makaleye bakılabilir [9].

Actor crossed modül kavramı grupoide R.Brown,N.D.Gilbert ve J. Shrimpton [16] tarafından ispatsız verilmiştir.

Bir G grupoidi için Ehresmann [22] tarafından tanımlanan 'uygun kesitleri' in grubu M(G) ve G grupoidlerinin otomorfizmleri grubu Aut(G) için,

$$M(G) \to Aut(G)$$

bir grupoidlerin actor crossed modülü tanımlar.

Bu tez de ilk defa grupoidler için actor crossed modülün açık bir ispatı verilmiş ve Whitehead ve Ehresmann teorileri bir arada düşünülerek grupoidlerin crossed modülleri için otomorfizm teorisi elde edilmiştir.

İ.İçen [28] Whitehead ve Ehresmann teorilerini bir arada düşünülerek grupoidlerin otomorfizm teorisi kullanılarak, actor pre-crossed modüle elde edilmiştir. Yani crossed modülün ilk şartı sağlanamıştır.

Sonuç olarak, yukarda yapılanlar crossed modüllere denk olan kategoriler düşünülürse, bu tezde verilen bir çok kavram ve teorem denk kategorilere aktarılabir[33,13,18,7,43].

I.BÖLÜM

TEMEL KAVRAMLAR

I.1. GRUPOİDLER

Grupoid kavramı 1926 da ilk defa Brant [5] tarafından ortaya atılmıştır [9]. Fakat Brant extra şartla vererek tanımını vermiş, bu grupoidin transitive özelliğine karşılık gelmektedir. Daha sonraları bu kavram geniş bir matematikci kitlesi tarafından kullanılmıştır.Eilenberg ve Maclane [34] tarafından categorinin tanımıyla gruboid formülize edilmiştir.

Şimdi grupoid, ergodic teori ve fonsiyonel analizden homotopi teori, cebirsel geometri, differansiyel geometri, differansiyel topoloji, grup teori gibi matematiğin geniş bir yelpazesi tarafından kullanılmaktadır. Daha geniş bilgi için Ronald Brown'nın 'From Groups To Groupoıds: A Brıef Survey' adlı makaleye bakılabilir [9].

Bölümün bu kısmında kategori tanımı verilmiştir. Çünkü grupoid morfizimleri bir izomorfizm olan kategoridir. Dolayısıyla bu kavram için açık tanım ve örnekleri verilmiştir. Cebirsel topoloji için önemli kavramlardan olan homotopy kavramı verilip, grupoid için İçen-Yıldız [30] ın örneği verilmiştir.

Tanım I.1.1

Bir kategori, morfizmlerinin cümlesi G, nesnelerinin cümlesi O_G ve aşağıdaki dönüşümlerden meydana gelir.

i) $s,t:G\rightarrow O_G$ iki dönüşüm, sırasıyla, kaynak (source) ve hedef (target) dönüşümü,

ii) Özdeş dönüşüm;1_x, $x\in O_G$' de özdeş eleman olduğunda $i:O_G\rightarrow G$, $x\rightarrow 1_x$ yazılır ,

iii) Bir kısmi çarpma dönüşümü; $m:G_s x_t G\rightarrow G$, $(g,h)\rightarrow gh$ dır, burada

$$G_s x_t G=\{(g,h)\in GxG \mid s(g)=t(h)\}.$$

Bu dönüşümler aşağıdaki şartları sağlar.

1) Her $(g,h)\in G_s x_t G$ için $s(gh)=s(h)$ ve $t(gh)=t(g)$,

2) Her $g,h,k\in G$ için $s(g)=t(h)$ ve $s(h)=t(k)$ olmak üzere $g(hk)=(gh)k$,

3) Her $g\in G$ için $g1_{s(g)}=g$ ve $1_{t(g)}g=g$,

4) Her $x\in O_G$ için $s(1_x)=t(1_x)=x$ dir [29].

Örnek I.1.2

Cümleler ve fonksiyonlar üzerinde tanımlanan ***Set*** kategorisini, gruplar ve homomorfizmler üzerinde tanımlanan ***Grp*** kategorisini, topolojik uzaylar ve sürekli fonksiyonlar üzerinde tanımlanan ***Top*** kategorisini verebiliriz .

Tanım I.1.3

G bir kategori olsun. Eğer her bir $g\in G$ nin bir g^{-1} tersi vardır, öyle ki

$$s(g)=t(g^{-1}) \text{ ve } t(g)=s(g^{-1})$$

$$g^{-1}g=1_{s(g)} \text{ ve } g\,g^{-1}=1_{t(g)}$$

şarları sağlanıyorsa G ye bir grupoid denir [39].

Yani, bir grupoid morfizmlerin G cümlesiyle verilen $(G=(G,O_G,s,t,m,i))$ bir kategoridir. Nesnelerin O_G cümlesi ve dört yapı dönüşümü,

$$G\mathrm{x}G \xrightarrow{m} G \;\underset{\xleftarrow[i]{}}{\overset{\xrightarrow{s}}{\xrightarrow{t}}}\; G$$

s ve t dönüşümleri, her bir $g\in G$ morfizmi için; onun kaynağı(tanım cümlesi) s(g) ve hedefi (değer cümlesi) t(g) ile verilir. m dönüşümü, $s(f)=t(g)$ şartını sağlayan f,g morfizmlerinin her hangi bir çifti için, bu çiftlerin kısmi çarpması

$$m(f,g)=f\circ g$$

şeklinde tanımlanır. Sonuç olarak i dönüşümüne özdeş dönüşüm denir ve $x\in O_G$'ye $1_x:x\rightarrow 1_x$ özdeş morfizmi karşılık getirir.

Bu dönüşümler aşağıdaki özdeşlikleri sağlar.

i) $s(1(x))=t(1(x))$,

ii) $(f\circ g)\circ h=f\circ(g\circ h)$,

iii) $s(f\circ g)=s(g)$,

iv) $f \circ 1(s(f))=f$,

v) $t(f \circ g)=t(f)$,

vi) $1(s(f)) \circ f=f$,

ve her bir $f \in G$, $f:x \to y$ için bir $g:y \to x$, $g \in G$ morfizmi vardır öyle ki $f \circ g=1(y)$ ve $g \circ f=1(x)$ olur [29] .

Tanım I.1.4

G bir grupoid ve $N \subset G$ olsun. Eğer aşağıdaki şartlar sağlanıyorsa N ye G'nin altgrupoidi denir.

N1) $s(N) \subseteq O_N$ ve $t(N) \subseteq O_N$, burada s,t sırasıyla G' nin kaynak ve hedef dönüşümleri.

N2) Her $x \in O_N$ için $1_x \in N$.

N3) N kısmi çarpma altında kapalı ve G' de inversiyondur [6] .

Tanım I.1.5

N, G grupoidinin altgrupoidi olsun.

1) Eğer $O_N=O_G$ ise N ye G nin genis (wide) altgrupoidi denir.

2) Eğer her bir $x,y \in O_N$ için $N(x,y)=G(x,y)$ ise N' ye G' nin tam (full) altgrupoidi denir.

3) Eğer N geniş ve her bir $x,y \in O_N$, $\lambda \in N(x,x)$ ve $g \in G(x,y)$ için $g\lambda g^{-1} \in N(y,y)$ ise N' ye G nin normal altgrupoidi denir[6] .

Tanım I.1.6

$G=(G, O_G,s,t,m,i)$ bir grupoid olsun. Eğer her $x,y \in O_G$ için

$$G(x,y)=\{f \in G: f:x \to y\}$$

cümlesi boş kümeden farklı ise G grupoidine geçişmelidir (transitive) denir.

Tanım I.1.7

Eğer her $x,y \in O_G$ için $G(x,y)$ bir tek elemana sahip ise G' ye tamamen geçişmelidir (totally transitive) denir.

Tanım I.1.8

Eğer O_G, açık U cümlelerinin bir tabanına sahip öyleki G nin U ya kısıtlanmışı geçişmeli ise G ye <u>yerel geçişmelidir</u> denir.

$G=(G,O_G,s,t,m,i)$ bir grupoid ve $a\in O_G$ olsun. $G(a,y)\neq\varnothing$ olacak şekildeki G' nin bütün $y\in O_G$ nesnelerinin M_a tam altgrupoidini alalım. Eğer $x,y\in O_G$ olduğunda, bazı $f\in G(x,a)$ ve $g\in G(a,y)$ için gf foksiyonu tanımlı olduğundan $G(x,y)$ boştan farklıdır. Böylece M_a geçişmelidir ve açıkça G nin en geniş geçişmeli altgrupoididir [43] .

Tanım I.1.9

$G=(G,O_G,s,t,m,i)$ ve $G=(G^*,O_G{}^*,s^*,t^*,m^*,i^*)$ iki grupoid olsun.

$$\phi:G\to G^*$$

grupoid morfizmine bir *funktor* denir. G ve G^* grupoidleri arasında ki bir grupoid morfizmi O_ϕ nesneler ve ϕ morfizmler olmak üzere aşağıdaki iki morfizmle verilir:

$$O_\phi=\phi:O_G\to O_G{}^*,\ \ \phi:G\to G^*.$$

Bu morfizmler grupoidin yapı dönüşümlerindeki gibi;

Her $x\in O_G$ $\phi(i(x))=i(\phi(x))$,

Her $g\in G$ için $\phi(s_i(g))=s_i(\phi(g))$ ve $\phi(t_i(g))=t_i(\phi(g))$, $i=0,1$,

Her $f,g\in G \ni s_i(f)=t_i(g)$ için $\phi(f\circ g)=\phi(f)\circ\phi(g)$,

şartlarını sağlar [29] .

Örnek I.1.10

G_i ler birer grupoid olsun.

$O_{Grd}=\{G_i : G_i \text{ bir grupoid}\}$ ve $Grd=\{F : F:G_i\to G_j,\ F, \text{ bir funktor}\}$

olmak üzere Grd bir grupoiddir. Burada kısmi çarpma işlemi funktorların bileşke işlemi, özdeş dönüşüm ise $1_{G_i}:\ G_i\to G_i$ dönüşümüdür [24] .

Örnek I.1.11

X bir cümle, K bir grup olsun. Aşağıdaki yolla X üzerinde X x K x X grupoidinin yapısını verebiliriz.

s , X x K x X ' in üçüncü faktörü üzerine izdüşümü ve t , birinci faktörü üzerine izdüşümüdür. Yani s(x,g,y) = y , t(x,g,y) = x şeklinde tanımlıdır. Birim dönüşüm;

$$x \to 1_x = (x,1,x)$$

dönüşümüdür. Kısmi çarpma işlemi;

$$(z,h,y)\,(y,g,x) = (z,hg,x)$$

şeklinde tanımlanır. Ayrıca (y,g,x)' in tersi (x, g^{-1},y) olur. Buna K grubu ile X üzerindeki trival grupoid denir [30] .

Şimdi vereceğimiz örnek cebirsel topolojinin önemli kavramlarından homotopi bağıntısıyla ilgilidir. Bunun için bu teori ile ilgili bazı temel teorem ve tanımları hatırlatalım.

HOMOTOPİ BAĞINTISI

Y bir topolojik uzay olsun. Kabaca Y' nin iki alt uzayı "homotoptur" denir, eğer birinden diğerine sürekli bir deformasyon ile geçilebiliyorsa.

Şimdi Y' deki basit eğrileri düşünelim. I={$x \in IR$: $0 \le x \le 1$ } kapalı aralık olmak üzere I' daki topoloji bilinen topoloji olsun. Yani $x,y \in I$ olmak üzere $d(x,y)=|x-y|$ metriği ile elde edilen topoloji olsun.

Basit eğri diye; $\alpha: I \longrightarrow Y$ sürekli fonksiyonunun Y topolojik uzayındaki görün-tüsüne denir. α,β iki basit eğri olmak üzere α, β' ya homotoptur denir eğer α sürekli olarak β' ya dönüştürülebiliyorsa.

$0\le x \le 1$ olsun. Bu kapalı aralığı J ile gösterelim. t parametresine bağlı Y' deki α_t eğri ailesini gözönüne alalım, öyleki $\alpha_0=\alpha$, $\alpha_1=\beta$ ve t, J' yi taradığında α_t sürekli olarak değişsin. Şimdi $F(x,t)=F: I \times J \longrightarrow Y$ fonksiyonunu tanımlayalım. Eğer F fonksiyonu sürekli ve t' nin her bir değerine bir α_t eğrisini karşılık getiriyor öyleki özel olarak $F(x,0)=\alpha_0=\alpha$ ve $F(x,1)=\alpha_1=\beta$ ise bu takdirde F fonksiyonu α_t eğrileri vasıtasıyla α' dan β' ya sürekli bir deformasyon tanımlar. Açık olarak, F fonksiyonu bir tek değildir. $\alpha_0=\alpha$ ve $\alpha_1=\beta$ şartını sağlayan herhangi bir α_t sürekli ailesi bulunabilir.

Eğer I, herhangi bir X topolojik uzayı olarak alınırsa homotopi kavramına en genel şekli verilebilir. $F:X\times J \longrightarrow Y$ sürekli fonksiyonunda, α sürekli olarak β' ya dönüştürüldüğünde, α_t ailesine ait her bir eğrinin uç noktaları y_1 ve y_2' dedir. Bu takdirde α ve β tanımlanarak fonksiyonlar Y' nin birer alt cümlesini teşkil eden y_1 ve y_2' ye göre homotopturlar denir. Yani $F:I\times J \longrightarrow Y$ fonksiyonu her $t\in J$ için $F(0,t)=y_1$, $F(1,t)=y_2$ ekstra şartları ile kısıtlanmıştır [2,26].

Şimdi bir homotopinin ve bir cümleye göre homotopinin genel tanımlarını verelim.

Tanım I.1.12

X,Y iki topolojik uzay ve $f,g:X \longrightarrow Y$ sürekli iki fonksiyon olsun. Eğer her $x\in X$ için $F(x,0)=f$ ve $F(x,1)=g$ olacak şekilde en az bir $F(x,t)=F:X\times J \longrightarrow Y$ sürekli fonksiyonu varsa f, g' ye homotoptur denir ve $f\sim g$ ile gösterilir. Burada F fonksiyonuna ise f 'den g' ye homotopi denir [2,26].

Teorem I.1.13

"$\sim$" homotopi bağıntısı bir eşdeğerlik bağıntısıdır.

İspat:

i) $f\sim f$ dir.Gerçekten $F:X\times J \longrightarrow Y$ fonksiyonu $F(x,t)=f(x)$ için, $F(x,0)=f(x)$, $F(x,1)=f(x)$ ve $f(x)$ sürekli olduğundan F' de süreklidir. O halde $f\sim f$ dir.

ii) $f\sim g$ olsun. $f\sim g$ ise en az bir $F:X\times J \longrightarrow Y$ sürekli fonksiyonu vardır öyleki ve $F(x,0)=f$, $F(x,1)=g$ yazılabilir. Şimdi bir G fonksiyonu $G(x,t)=F(x,1-t)$ şeklinde tanımlanmış olsun. Bu takdirde, $G(x,0)=F(x,1)=g$, $G(x,1)=F(x,0)=f$ olup G' de süreklidir. Dolayısıyla $g\sim f$ bulunur.

iii) f~g ve g~h olsun.

f~g ve g~h olduğundan sırasıyla

$$F(x,t):X\times J \longrightarrow Y \text{ ve } G(x,t):X\times J \longrightarrow Y$$

sürekli fonksiyonları var öyleki F(x,0)=f, F(x,1)=g ve G(x,0)=g, G(x,1)=h yazılabilir.

Şimdi $H(x,t):X\times J \longrightarrow Y$ fonksiyonu

$$H(x,t)=\begin{cases} F(x,2t) & ,0\le t\le 1/2 \\ G(x,2t-1) & ,1/2\le t\le 1 \end{cases}$$

şeklinde tanımlayalım. Bu takdirde H(x,t) süreklidir. Diğer taraftan H(x,0)=F(x,0)=f ve H(x,1)=G(x,1)=h olup f~h bulunur.

Demek ki X topolojik uzayından Y topolojik uzayına bütün $f:X \longrightarrow Y$ sürekli fonksiyonların cümlesi "~" bağıtısı altında eşdeğerlik sınıflarına ayrılmış bulunuyor. Bu eşdeğerlik sınıflarına homotopi sınıfları denir ve bütün homotopi sınıflarının cümlesi [X;Y] ile gösterilir. Eğer $f:X \longrightarrow Y$ ise f ' nin homotopi sınıfı [f] ile gösterilir.

Tanım I.1.14

X ve Y iki topolojik uzay, $X_0\subset X$ herhangi bir altcümle ve $f,g:X\rightarrow Y$ fonksiyonları her $x_0\in X_0$ için $f(x_0)=g(x_0)$ şartını sağlayan iki sürekli fonksiyon olsun. Eğer aşağıdaki şartları sağlayan bir $F(x,t)=F:X\times J \longrightarrow Y$ sürekli fonksiyonu varsa. f fonksi-yonu x_0 noktasına göre g fonksiyonuna homotoptur denir ve f~grelx_0 ile gösterilir,

i) Her $x\in X$ için F(x,0)=f, F(x,1)=g

ii) Her $x_0\in X_0$ için $F(x_0,t)=f(x_0)=g(x_0)$.

$X_0=\varnothing$ ise sadece f~g yazılır. Demek ki adi homotopi relatif homotopinin özel bir halidir [2,26].

Teorem I.1.15

f,g:X $\longrightarrow$ Y sürekli fonksiyonlar ve f~g olsun. Eğer h:Y $\longrightarrow$ Z sürekli bir fonksiyon ise, bu takdirde hf:X $\longrightarrow$ Z ve hg:X $\longrightarrow$ Z fonksiyonlarıda süreklidir ve hf~hg olur.

Tanım I.1.16

X ve Y iki topolojik uzay ve f:X $\longrightarrow$ Y sürekli bir fonksiyon olsun. Eğer aşağıdaki şartları sağlayan sürekli bir f ' :Y $\longrightarrow$ X fonksiyonu varsa f fonksiyonuna "homotopi eşdeğerlik" denir [2,26].

i) $ff' \sim 1_Y$

ii) $f'f \sim 1_X$.

Örnek I.1.17

X bir topolojik uzay olmak üzere $x \in X$ için (X,x) çiftine bir noktalı uzay denir. X üzerinde bir noktalı (X,x) $\longrightarrow$ (X,y) dönüşümü, iki noktalı uzay ve bir φ:X $\longrightarrow$ X dönüşüm, öyleki $\varphi(x)=y$ ile tanımlanır. Böylece noktalı uzayların χ kategorisini elde ederiz. Bu kategoride bir eşdeğerlik bağıntısı tanımlayalım. "$\cong$" homotopi bağıntısı olmak üzere

$$\varphi^{-1}\varphi \cong 1_{(X,x)} \quad \text{ve} \quad \varphi\,\varphi^{-1} \cong 1_{(X,y)}$$

olacak şekilde

$$\varphi^{-1}:(X,y) \longrightarrow (X,x)$$

dönüşümü var ise φ:(X,x) $\longrightarrow$ (X,y) dönüşümüne homotopi eşdeğerdir denir. Açık olarak bu bağıntı χ üzerinde bir eşdeğerlik bağıntısıdır. (X,x) $\longrightarrow$ (X,y) homotopi eşdeğer dönüşümlerinin bütün eşdeğerlik sınıflarını [(X,x);(X,y)] ile gösterelim.

$\varepsilon(X)_{(x,y)}=[(X,x),(X,y)]$, homotopi eşdeğer dönüşümlerinin noktalı homotopi sınıflarının cümlesidir. Yani

$$\varepsilon(X)= \bigcup_{x,y \in X} [(X,x);(X,y)]$$

kısmi çarpımı altında bir grupoiddir.

$$m:\varepsilon(X) \oplus \varepsilon(X) \longrightarrow \varepsilon(X)$$

$$([\varphi_1],[\varphi_2]) \longrightarrow [\varphi_1][\varphi_2]=[\varphi_1\varphi_2]$$

şeklinde tanımlayalım. Burada

$$\varepsilon(X)\oplus\varepsilon(X)=\{([\varphi_1],[\varphi_2]):s[\varphi_1]=t[\varphi_2]\} \text{ dir.}$$

Her bir $[\varphi]\in\varepsilon(X)_{(x,y)}=[(X,x);(X,y)]$ için kaynak ve hedef dönüşümleri $s[\varphi]=x$ ve $t[\varphi]=y$ ve özdeş dönüşüm $\varepsilon:X\longrightarrow\varepsilon(X)$, $x\longrightarrow[1_x]$ dır.. Sonuç olarak $\varepsilon(X)$ bir grupoiddir [30].

I.2.CROSSED MODÜL

Crossed Modül kavramı ilk kez 1949' da J.H.C. Whitehead [42]tarafından "*Combinatorial Homotopy Theory I, II*" isimli çalışmalarında yer aldı. Daha sonraları bu kavram matematiğin bir çok dalında kullanıldı. Örneğin Homotopi Teori, Grupların Homolojisi ve Cohomolojisi, Cebirsel K-Teori, Differansiyel Geometri [19,28,35] ve bu günlerde bilgisayar grup paketi olan GAP programına aktarılmıştır [1]. Crossed modüllerin kategorisi cebirsel olarak aşağıda verilen kategorilere denktir.

1) Cat^1-Gruplar [33],
2) Özel Çiftli Grupoid (Double Groupoid) [13],
3) Bir Uzunluklu Moore Kompleksli Simlicial Gruplar [33],
4) 2 Ranklı İndirgenmiş Simlicial T-kompleks [18],
5) Grup-Grupoid [7]
6) Topolojik Grup - Grupoid[43].

Dolayısıyla geniş bir uygulama sahası vardır. Crossed modüller için yapılanlar, yukarda verdiğimiz denk kategorilere aktarılabilir.

Bölümümüzün bu kısmında ise grupların crossed modülü ve grupoidlerin crossed modül kavramlarının tanımları verilerek, kategorileri oluşturulmuştur. Crossed modüller için elemeter örnekleri verilmiştir.

Tanım I.2.1

X bir cümle ve G bir grup olsun. G grubunun X üzerine etkisi aşağıdaki şartları sağlayan $\bullet : X \times G \longrightarrow X,\ (x,g) \longrightarrow x^g$ fonksiyonu ile tanımlıdır.

1) Her $x \in X$ için $x^e = x$,

2) Her $x \in X$ ve $g,h \in G$ için $(x^h)^g = x^{h+g}$ [21,43,38].

X ve G birer grup olsun. Eğer G=X ise X eşlenik işlemiyle kendi üzerinde bir etkidir. Yani $\bullet : X \times X \longrightarrow X$, $x,y \in X$ için $x^y = -y+x+y$ dir.

T ve G birer grup ve $\partial : T \longrightarrow G$ dönüşümü bir homomorfizm olsun. G, T üzerinde bir etkidir öyle ki $G \longrightarrow \mathrm{Aut}T$ homomorfizmi vardır. Böylece (T,G,∂) crossed modülünün tanımını verebiliriz.

Tanım I.2.2

T ve G birer grup, $\partial : T \longrightarrow G$ bir grup homomorfizmi ve G, T üzerinde bir etki olsun. Eğer aşağıdaki aksiyomlar sağlanıyorsa (T,G,∂) üçlüsüne bir crossed modül denir.

CM1) Her $g \in G$ ve $t \in T$ için $\partial(t^g) = -g + \partial(t) + g$

CM2) Her $s,t \in T$ için $s^{\partial(t)} = -t+s+t$

Burada ∂ homomorfizmine crossed modülün sınır dönüşümü (boundary map) denir [21,43,38].

Örnek I.2.3

T bir gurup ve AutT, T grubunun otomorfizmlerinin cümlesi olmak üzere $(T,\mathrm{Aut}T, \partial)$ bir crossed modüldür [38].

Gerçekten,

$$\partial : T \longrightarrow \mathrm{Aut}T$$

$$t \longrightarrow \partial(t) : T \longrightarrow T$$

$$s \longrightarrow \partial(t)(s) = -t+s+t$$

şeklinde tanımlayalım. $t,h \in T$ için $\partial(t+h) = \partial(t) \circ \partial(h)$ olduğunu gösterirsek ∂' nin bir grup homomorfizması olduğunu göstermiş oluruz.

$$(\partial(t)\circ\partial(h))(s)=\partial(t)(\partial(h)(s))=\partial(t)(-h+s+h)$$
$$=-t+(-h+s+h)+t=(-t-h)+s+(h+t)$$
$$=-(t+h)+s+(t+h)=\partial(t+h)(s).$$

T bir grup olduğundan birleşme özelliği vardır. Dolayısıyla bu yazdıklarımız anlamlıdır. Yani ∂ bir grup homomorfizmasıdır.

$$\bullet : T\times \mathrm{Aut}T \longrightarrow T$$
$$(t,\theta)\longrightarrow \theta(t)$$

şeklinde tanımlayalım.

i) $t\in T$ ve $1:T\longrightarrow T$ özdeş otomorfizm olmak üzere $t^{1}=1(t)=t$ olup ilk şart sağlanır.

ii) $g,h\in \mathrm{Aut}T$ ve $t\in T$ için $(t^{h})^{g}=(h(t))^{g}=g(h(t))=(g\circ h)(t)=t^{(g\circ h)}$ olup ikinci şartta sağlanır.

Böylece i ve ii' den AutT, T üzerinde bir etkidir. Şimdi de crossed modül aksiyomlarının sağlandığını gösterelim.

CM1) $\theta\in \mathrm{Aut}T$ ve $t\in T$ olsun.

$$\partial(t^{\theta})(s)=\partial(\theta(t))(s)=-\theta(t)+s+\theta(t) \qquad \text{(I.1)}$$
$$(\theta\circ\partial(t)\circ\theta^{-1})(s)=(\theta\circ\partial(t))(\theta^{-1}(s))=\theta(\partial(t)(\theta^{-1}(s)))$$
$$=\theta(-t+\theta^{-1}(s)+t)=\theta(-t)+(\theta\circ\theta^{-1})(s)+\theta^{-1}$$
$$=-\theta(t)+s+\theta^{-1}(t) \qquad \text{(II.2)}$$

olup I ve II'den $\partial(t^{\theta})=-\theta+\partial(t)+\theta^{-1}$ bulunur.

CM2) Her $t,s\in T$ için $s^{\partial(t)}=\partial(t)(s)=-t+s+t$ olup ikinci şartta sağlanır.

Sonuç olarak $(t,\mathrm{Aut}T,\partial)$ bir crossed modüldür.

Örnek I.2.4

G bir grup ve N, G grubunun normal altgrubu olsun. Bu takdirde $i:N\longrightarrow G$ dahil etme dönüşümü(inclusion map) ile (N,G,i) bir crossed modüldür. [38].

Örnek I.2.5

G bir grup, M bir sağ G-modül ve $o:M \longrightarrow G$, M' yi G' nin birim elemanına götüren sabit dönüşüm olsun. Bu takdirde (M,G,o) bir crossed modüldür. [38].

Örnek I.2.6

$\eta:M \longrightarrow N$, sol G-modül morfizmi ve $G \times N$ yarı direkt çarpımı verilsin. Bu GxN' den G' ye izdüşüm yardımıyla M üzerinde etki olan bir gruptur. 1, G' nin özdeş elemanı olmak üzere $\delta:M \longrightarrow G \times N$ morfizmini $\delta(m)=(1,\eta(m))$ şeklinde tanımlayacak olursak $(M,G \times N,\delta)$ bir crossed modüldür.

I.3.CROSSED MODÜL KATEGORİSİ

Kategori oldukca karmaşık bir yapı oluşturmasına rağmen çok sayıda örnekleri vardır. Herbir grupoid örneği aynı zamanda kategori örneğidir. Dolayısıyla bu örnekleri tekrarlamayacağız. Ama bu karmaşık kavramı, crossed modül notasyonlarını kullanarak bir daha hatırlatalım.

Bir *kategori* morfizmlerinin cümlesi C, nesnelerinin cümlesi O_C ve aşağıdaki dönüşümlerden meydana gelir [34,39].

i) $s:C \longrightarrow O_C$ kaynak (source) ve $t:C \longrightarrow O_C$ hedef (target) dönüşümü,

ii) Özdeş dönüşüm 1_x; $x \in O_C$' de özdeş eleman olduğunda $k:O_C \longrightarrow C$, $x \rightarrow 1_x$ yazılır ve

iii) $C_s \times_t C=\{(g,h) \in C \times C \mid s(g)=t(h)\}$,

olmak üzere $m:C_s \times_t C \longrightarrow C$, $(g,h) \longrightarrow gh$ ile tanımlanan kısmi çarpma dönüşümü olsun.

Bu dönüşümler aşağıdaki şartları sağlar.

1) Her $(g,h) \in C_s \times_t C$ için $s(gh)=s(h)$ ve $t(gh)=t(g)$,

2) Her $g,h,k \in C$ için $s(g)=t(h)$ ve $s(h)=t(k)$ olmak üzere $g(hk)=(gh)k$,

3) Her $g \in C$ için $g1_{s(g)}=g$ ve $1_{t(g)}g=g$,

4) Her $x \in O_C$ için $s(1_x)=t(1_x)=x$.

Tanım I.3.1

(T_1,C_1,∂_1) ve (T_2,C_2,∂_2) birer crossed modül olsun.

$$<\alpha,\phi>:(T_1,C_1,\partial_1)\longrightarrow(T_2,C_2,\partial_2)$$

bir crossed modül morfizmi $\alpha:T_1\longrightarrow T_2$ ve $\phi:C_1\longrightarrow C_2$ morfizmlerinin bir çiftidir öyleki

i)her $t\in T$ için $\partial_2\alpha(t)=\phi\partial_1(t)$

ii)her $g\in C_1$, $t\in T_1$ için $\alpha(t^g)=\alpha(t)^{\phi(g)}$

eşitlikleri sağlanır. Yani aşağıda verilen

$$\begin{array}{ccc} T_1 & \xrightarrow{\alpha} & T_2 \\ \downarrow & & \downarrow \\ C_1 & \xrightarrow{\phi} & C_2 \end{array} \qquad\qquad \begin{array}{ccc} C_1xT_1 & \longrightarrow & T_1 \\ \alpha x\phi\downarrow & & \downarrow \\ C_2xT_2 & \longrightarrow & T_2 \end{array}$$

diagramlar değişimlidir [38].

Tanım I.3.2

(T,C,∂) bir crossed modül olsun. Eğer

i) $S\subset T$ ve $H\subset C$ birer altgrup,

ii) $\partial^*=\partial|_S$ yani ∂^*, ∂' nin S ye kısıtlanışı ve

iii) H' nın S üzerine etkisi C' nin T üzerine etkisinden elde edilen bir etki,

ise (S,H,∂^*) crossed modülüne (T,C,∂) crossed modülünün altcrossed modülü denir [38].

Örnek I.3.3

(T,C,∂) bir crossed modül ve (S,H,∂^*)' da bu crossed modülün alt crossed modülü olsun. $i:S\longrightarrow T$ ve $j:H\longrightarrow C$ dahil etme dönüşümleri olmak üzere

$$<i,j>:(S,H,\partial^*)\longrightarrow(T,C,\partial)$$

morfizmi bir crossed modül morfizmidir.

Şimdi crossed modüllerin kategorisini oluşturalım ve bunu ***CrsM*** ile gösterelim.

Bu kategorinin nesnelerinin cümlesi;

$$O_{CrsM}=\{(T,C,\partial) : (T,C,\partial) \text{ bir crossed modül}\}$$

ve morfizmlerinin cümlesi de

$$CrsM=\{<\alpha,\phi> : <\alpha,\phi>:(T_1,C_1,\partial_1) \longrightarrow (T_2,C_2,\partial_2);\ \text{bir crossed modül morfizmi}\}$$

şeklinde tanımlanırsa ***CrsM*** bir kategoridir.

I.4 GRUPOİDLERİN CROSSED MODÜLÜ

G ve C aynı nesne cümlesi üzerinde tanımlı grupoidler ve C, tamamen geçişsiz (totally intransitive) olsun. G ' nin C üzerindeki bir etkisi,

$$C \text{x} G \to C \quad , (c,g) \to c^g$$

kısmen tanımlı fonksiyonu ile verilir ve aşağıdakileri sağlar.

1) c^g tanımlıdır ancak ve ancak $t(g) = s(c)$ ise ve $s(c^g) = s(g)$. Burada s ve t sırasıyla G grupoidinin hedef ve kaynak dönüşümleridir.

2) $(c_1.c_2)^g = c_1^g . \quad c_2^g$

3) Bütün $c_1,c_2 \in C(y,y)$, $g \in G(x,y)$, $h \in G(y,z)$ için $(c_1^{gh}) = (c^h{}_1)^g$ ve $x^e c_1= c_1$.

Tanım I.4.1

Grupoidlerin crossed modülü aynı nesne cümlesi üzerinde tanımlı G ve C grupoidlerinin bir çiftinden ibarettir öyleki G , C üzerinde bir etki , C tamamen geçişsiz (totally intransitive) ve nesne cümlesi üzerinde özdeş olan $\delta:C \to G$ funktoru aşağıdaki aksiyomları sağlar.

i) Her $c \in C(y,y)$, $g \in G(x,y)$ için $\delta(c^g) = g\delta(c)g^{-1}$

ii) Her $c, c_1 \in C(y,y)$, $g \in G(x,y)$ için $c^{\partial c_1} = c_1 c\, c_1{}^{-1}$.

Eğer yukarıdaki tanımda C ve G grupoidleri yerine grupları alırsak grupların crossed modülünü elde ederiz. Çünkü her grup aynı zamanda bir grupoid olduğundan, grupların crossed modülü, grupoidlerin crossed modülünün özel bir halidir [28] .

Örnek I.4.2

X üzerinde her G grupoidi onun iç grup demeti $IG = \cup G(x)$ ile birlikte bir grupoidlerin crossed modülünü oluşturur.Dahil etme $i{:}G \to G$ homo dönüşümü bir grupoid morfizmidir ve G, IG üzerinde aşağıdaki gibi etki yapar.

$$IG \times G \to IG$$

$$(c,a) \to c^a = -a+c+a,$$

Böylece (IG,G,I) bir grupoidlerin crossed modülüdür [28] .

Crossed modüllerin kategorisini oluştururken kullandığımız T ve G grupları yerine C ve G grupoidlerini alırsak grupoidlerin crossed modüllerinin CrsMod kategorisini oluşturabiliriz. Yani (C,G,δ) ve (C^*,G^*,δ^*) birer grupoidlerin crossed modülü $F{:}\ (C,G,\delta) \to (C^*,G^*,\delta^*)$ morfizmi, $f_1{:}C \to C^*$ ve $f_2{:}G \to G^*$ grupoid morfizmlerinin bir çiftinden meydana gelir öyleki aşağıdaki diagramlar değişimlidir.

$$\begin{tikzcd} C \arrow[r, "f_1"] \arrow[d, "\delta"'] & C^* \arrow[d, "\delta^*"] \\ G \arrow[r, "f_2"] & G^* \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} G \times C \arrow[r] \arrow[d, "f_2 \times f_1"'] & C \arrow[d, "f_1"] \\ G^* \times C^* \arrow[r] & C^* \end{tikzcd}$$

II.BÖLÜM

CROSSED MODÜLLERİN TÜRETMELERİ

Bu bölümde Whitehead [42] tarafından tanımlanan herhangi bir (C, G, δ) crossed modülü için tanımlanan, $C \to G$ türetme fonksiyonu ve Whitehead'in otomorfizm teorisi verilmiştir.

Ayrıca grup teoride var olan bazı yapıların crossed modüllerde karşılığı araştırılmıştır. Bunlardan en önemlilerden biride grupların *actor crossed* modülüdür. Bu basitce bir G grubu için, $G \to$ Aut(G) olarak tanımlanır. Bu kavram crossed modülere K.J. Norrie [38] tarafından taşınmıştır. Herhangi bir (C, G, δ) crossed modülü için, Whitehead [42] tarafından tanımlanan türetme fonksiyonlarının grubu Der*(C, G) ve otomorfizmlerin kümesi Aut(C, G) olmak üzere ,

$$(C, G, \delta) \to Der^*(C, G)$$

actor crossed modül tanımlanmıştır. Bu yapının açık bir ispatı verilmiştir.

II.1.TÜRETME FONKSİYONU(Derivation)

Bu bölümde grupların crossed modülleri için homotopy teoriyi veya Whithead ın ifadesiyle türetme fonksiyonu tanımlanmaktadır. Bu türetme fonksiyonu kullanarak crossed modüller için otomorfizmin tersini verilmektedir.

Hatırlatmak gerekirse bir crossed module *C=(C, G,δ), C* ve *G* iki grup ve $\delta : C \to G$ bir grup homomorfizmi, $\delta(c^a)=-a+\delta c+a$ ve $c^{\delta c'}=-c'+c+c'$ şartıyla verilir.

Tanım II.2.1

Bir *türetme* (derivation) aşağıdaki şartı sağlayan bir $s{:}G\to C$ fonksiyonuna denir, öyleki, her $a,b\in G$ için

$$s(a+b)=(sa)^b+(sb).$$

Tanımdan dolayı $s(0)=0$ ve $s(-a)^a=-(sa)$ olduğu kolaylıkla görülür [42].

$\mathbf{C}=(C,\ G,\delta)$ crossed modülünün s: $G\rightarrow C$ türetmelerin cümlesini $Der(G,C)$ ile gösterelim.

Teorem II.2.2

$\mathbf{C}=(C,\ G,\delta)$ bir crossed modülü için $s\in Der(G,C)$ olsun. Bu durumda her $a\in G$, $c\in C$ için

$$\phi_s(a)=a+(\delta sa),\quad \psi_s(c)=c+(s\delta c)$$

grup homomorfizimleri **C** nin bir endomorfizmini verir.

$$\begin{tikzcd} C \arrow[r, "\psi_s"] \arrow[d, "\delta"'] & C \arrow[d, "\delta"] \\ G \arrow[r, "\phi_s"'] & G \end{tikzcd}$$

İspat:

Göstermeliyiz ki , her a∈G ve c∈C için

$$\phi_s(a)=a+(\delta sa),\quad \psi_s(c)=c+(s\delta c)$$

dönüşümleri grup homomorfizmleri ve $\psi_s(c^a)==(\psi_s c)^{\phi_s a}$.

Öncelikle ψ_s nin etkiyi koruduğunu gösterelim.

$$\begin{aligned}
\psi_s(c^a)&=c^a+s(\delta c^a)\\
&=c^a+s(-a+(\delta c)+a)\\
&=c^a+(-(sa))^{(-a+(\delta c)+a)}+(s\delta c)^a+(sa)\\
&=c^a+(-(sa))^{\delta c^a}+(s\delta c)^a+(sa)\\
&=-(sa)+c^a+(s\delta c)^a+(sa)\\
&=-(sa)+(\psi_s c)^a+(sa)\\
&=(\psi_s)^{a+(\delta sa)}\\
&=(\psi_s c)^{\phi_s a}.
\end{aligned}$$

Şimdi ϕ_s, ψ_s dönüşümlerinin homomorfizm olduklarını görelim.

$$\begin{aligned}\phi_s(a+b) &= a+b+(\delta s(a+b))\\ &= a+b+\delta((sa)^b+(sb))\\ &= a+b-b+(\delta sa)+b+\delta sb\\ &= (\phi_s a)+(\phi_s b).\end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned}\psi_s(c'+c) &= c'+c+(s\delta c')^{\delta c'}+(s\delta c)\\ &= -a+c-c+(s\delta c')+c+(s\delta c)\\ &= (\psi_s c')+(\psi_s c).\end{aligned}$$

Teorem II.2.3

$\boldsymbol{C}=(C, G, \delta)$ bir crossed modül olsun. Bu durumda, $Der(G,C)$ üzerinde tanımlanan aşağıdaki çarpma işlemini ile bir monoid yapısı tanımlanır: her $a \in G$, $s, t \in Der(G,C)$ için

$$(s*t)(a)=(sa)+(\psi_s(ta)).$$

İspat:

Belirtelim ki,

$$\begin{aligned}(s*t)a &= (sa)+(ta)+(s\delta ta)\\ &= (ta)+(sa)^{\delta ta}+((s\delta)ta)\\ &= (ta)+s((ta)+(\delta ta)\\ &= (ta)+s(\phi_t ta)\end{aligned}$$

olur.

Şimdi $s*t$ nin bir türetme (derivation) olduğunu göstereceğiz.

$$\begin{aligned}(s*t)(a+b) &= s(a+b)+\psi_s t(a+b)\\ &= (sa)^b+(sb)+\psi_s((ta)^b+(tb))\\ &= (sa)^b+(sb)-(sb)+(\psi_s ta)^b+(sb)+(\psi_s tb)\\ &= ((sa)+(\psi_s ta))^b+(sb)+(\psi_s tb)\\ &= ((s*t)(a))^b+(s*t)(b).\end{aligned}$$

Şimdi ispatlayacağız ki

$$\varphi_{s*t}=\psi_s\psi_t, \qquad \phi_{s*t}=\phi_s\phi_t$$

dır. Yani,

$$\begin{aligned}
\varphi_{s*t}(c)&=c+(s*t)(\delta c)\\
&=c+(s\delta c)+(\psi_s t\delta c)\\
&=c+(s\delta c)+(t\delta c)+(s\delta t\delta c)\\
&=(\psi_s c)+(\psi_s(t\delta c)\\
&=\psi_s(c+(t\delta c))\\
&=\psi_s(\varphi_t(c)).
\end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned}
\phi_{s*t}(a)&=a+\delta((s*t)a))\\
&=a+\delta((sa)+(\phi_s ta))\\
&=a+(\delta sa)+(\phi_s\delta ta)\\
&=a+(\delta sa)+(\delta ta)+(\delta s\delta ta)\\
&=a+(\delta ta)+\delta((sa)^{\delta ta}+(s\delta ta))\\
&=a+(\delta ta)+\delta s(a+(\delta ta))\\
&=\phi_s(a+(\delta ta))\\
&=\phi_s(\phi_t a).
\end{aligned}$$

$Der(C,G)$ de ,$j(G)=\{1\}$ ile tanımlanan j çarpma işleminin birim elemanıdır.

$$\begin{aligned}
((s*t)*u)(a)&=(s*t)(a)+(ua)+(s*t)(\delta ua)\\
&=(sa)+(ta)+(s\delta ta)+(ua)+(s\delta a)+(t\delta ua)+(s\delta t\delta ua)\\
&=(sa)+(\phi_s ta)+(\phi_s ua)+(\phi_s t\delta ua)\\
&=(sa)+\phi_s((ta)+(ua)+(t\delta ua))\\
&=(sa)+\phi_s((t*u)a)\\
&=(s*(t*u))a.
\end{aligned}$$

bulunur. Böylece çarpma işleminin birleşme özelliği vardır.

Sonuç olarak *Der(G,C)* bir monoid olur ve

$$Der(G,C) \to \mathrm{End}(\mathcal{G}).$$

$$s \to (\phi_s, \psi_s)$$

dönüşümü monoidlerin bir morfizmdir.

Bu monoidin elemanlarının terslerinin grubu Der*(G,C) ile gösterilir.

Teorem II.1.1

$s \in Der(G,C)$ için aşağıdaki ifadeler denktir; [28,42].

(i) $s \in Der^*(G,C)$,

(ii) $\phi_s : G \to G$ bir otomorfizmdir.,

(iii) $\psi_s : C \to C$ bir otomorfizmdir.

İspat:

Gerçekten, φ, ϕ *End(C)* de morfizm olmasından dolayı (i)⇒(ii), (i)⇒(iii) açıktır. İspatlayacağız ki (ii)⇒(i). Kabul edelim ki ϕ_s nin tersi s' olsun.

$$s' : G \to C$$

$$a \to -(s\phi_s'(a)).$$

olarak tanımlanır.

İddia ediyoruz ki s' türetmedir. Herhangi $a \in G$ için $a' = \phi_s a$ olsun. O zaman $(a+b)' = a'+b'$, $s'(a) = -(sa')$ ve $a' + (\delta sa') = \phi_s(a') = a$. Bundan dolayı,

$$\begin{aligned}
\phi s'(a+b) &= -\,s(a'+b') \\
&= ((sa')^{b'} - (sb')) \\
&= -((sb') + (sa')^{b'+\delta sb'}) \\
&= -((sb') + (sa')^{b}) \\
&= (sa')^{-b} - s(b') \\
&= (s'a)^{b} + (s'b)
\end{aligned}$$

yazılabilir. Böylece

$$(s'*s)(a)=(sa)+s'(\phi_s a)$$
$$=(sa)-s(\phi_s'\phi_s a)$$
$$=1 \quad \text{dır.}$$

Sonuç olarak s nin tersi vardır.

(iii)⇒(i) ispatı benzer şekilde yapılır. Kabul edelimki ψ_s 'nin tersi ρ' olsun.

s": $G \to C$

$$s''a=-\rho'(sa)$$

olarak tanımlanır.

O zaman $\psi_s(s''(a)) = -(sa)$ ve

$$\psi_s((s''a)^b+(s''b))=-(sb)+(\psi_s(s''a))^b+(sb)\,\psi_s(s''b)$$
$$=-(sb)-((sa))^b$$
$$=-(s(a+b))$$
$$=\psi_s s''(a+b).$$

Sonuç olarak s" bir türetmedir. Ayrıca

$$(s*s'')(a) = (sa)+(\psi_s s''(a))=1.$$

Der(G,C) monoidinde s'nin tersi s" dir.

Sonuç II.1.2

$$\mathrm{Der}^*(G,C) \to \mathrm{Aut}(G)$$
$$s \to \phi_s = \phi$$
$$\mathrm{Der}^*(G,C) \to \mathrm{Aut}(C)$$
$$s \to \varphi_s = \varphi$$

ile tanımlanan grup homomorfizmi vardır.

Bu grup homomorfizleri (C,G,δ) crossed modüllerinin otomorfizmlerin grubu Aut(C,G,δ) grubu ile Der*(G,C) grupları arasında

$$\Delta : \mathrm{Der}^*(G,C) \to \mathrm{Aut}(C,G,\delta)$$

$$s \to (\varphi_s = \phi)$$

homomorfizm tanımlanır.

Üstelik $Der^{*}(G,C)$ üzerinde $Aut(C,G,\delta)$ bir etkisi

$$s^{(\alpha,\beta)} = \alpha^{-1} s \beta$$

şeklinde tanımlanır.

Böylece $(Der^{*}(G,C), Aut(C,G,\delta), \Delta)$ bir crossed mödül olur.Bu crossed modüle (C,G,δ) crossed modülünün *'actor crossed modülü'* denir. Crossed modüller için actor crossed modül kavramı ilk defa K.J.Norrie [38] tarafından genişce ispatı verilmiştir. Bu grup teoride ki, herhangi bir G grubu için verilen $G \to Aut(G)$ actor crossed modülünün, crossed modüller için bir genelleştirmesidir.

III.BÖLÜM

ACTOR CROSSED MODÜLLER

Bu bölümde, grupların kategorilerisi ***Grp*** den bir actor crossed modül, grupoidlerin kategorilerisi ***Grpd*** içine nasıl yükseltileceğini göreceğiz. Bu Brown-Gılbert-Shrimpton [16] tarafından gösterildi. Önemli bir nokta ***Grpd*** kategorisi ile ***Grp*** kategorisi eşit değildir ve kartezyenleri kapalıdır.

Hatırlatalım ki kapalı kartezyen ***C*** kategorisi $\boldsymbol{C}^{op}\times\boldsymbol{C}\rightarrow\boldsymbol{C}$, $(A,B)\rightarrow B^{A}$ ile tanımlı ve exponential funktor diye adlandırılan bifunktoru ile verilir. Bu funktor $A\rightarrow B$ morfizmlerin cümlesinin ***C*** deki internal analizi denir. Eğer A ***C*** nin bir nesnesi ise A^{A} ya A nın endomorfizlerinin nesnesi denir ve END(A) ile gösterilir. Bundan dolayı her hangi bir G grupoidi için ***Grpd*** kategorisindeki bir monoid nesne olan internal endomorfizm nesne END(G) vardır. Bu monoid nesne, nesne grubu Aut(G) olan bir maksimal altgrup AUT(G) ye sahiptir. Şimdi gruboidlerdeki grup nesnelerin kategorisi gruplar üstünde crossed modüllerin kategorisine denk olduğunu biliyoruz. Bundan dolayı AUT(G),

$$K_G: M(G)\rightarrow Aut(G)$$

şeklinde bir crossed modül ile verilir.

Bu bölümde, G bir grupoid olmak üzere, Ehresmenn tarafından tanımlanan uygun kesitlerin cümlesi M(G) bir grup olduğu ve G grupoidinin otomorfizmlerinin grubu Aut(G) alınarak $M(G)\rightarrow Aut(G)$ nin grupoidlerin *actor crossed modülü* olduğu gösterilmiştir. Ayrıca grupoidler için otomorfizm teorimi verilmiştir [28].

III.1 GRUPOİDLERİN ACTOR CROSSED MODÜLLERİ

Tanım III.1.1

X cümlesi üzerinde G bir grupoid olsun. Bir *uygun kesit*, hedef (target) β: $G\rightarrow X$ dönüşümünün sağ tersidir öyle ki

$$\alpha s: X\rightarrow X$$

bire-bir ve örtendir. Yani bir *uygun kesit*

$$S: G \to X$$

bir dönüşümdür öyle ki

i) $\beta s = I_X$,

ii) $\alpha s: X \to X$ bire-bir ve örtendir.

Önerme III.1.1

X üzerinde bir grupoid G olsun. G nin uygun kesitlerinin cümlesi, $x \in X$ için

$$(s*t)(x)=s(\alpha(t(x)))+t(x)$$

şeklinde tanımlı, özdeş elemanı, $I: x \to 1_x$ nesne dönüşümü ve $s^{-1}(x)=-s((\alpha s)^{-1}(x))$ tersi ile $*$ işlemine göre bir gruptur.

İspat:

Bunu göstermek için $s,t: X \to G$, G nin uygun kesitleri iken $s*t$ ve s^{-1}, G nin uygun kesitleridir. s ve t yukarıda ki gibi olsun. Böylece tanımdan s ve t, $\alpha s, \alpha t$: $X \to X$ bire bir ve örten ve $\beta s=\beta t=I_X$ sağlanır. Bütün $x \in X$

$$\beta(s*t)(x)=\beta(t(\alpha s(x))+s(x))=\beta s(x)=x$$

olur ki buda $s*t$ nin β: $G \to X$ dönüşümünün sağ tersi olduğunu verir.

$$\alpha(s*t)(X)=\alpha(s(X)+(\alpha s(X))=\alpha t(\alpha s(X))=\alpha s(X)=X$$

olduğundan $\alpha(s*t)$ bire-bir ve örtendir.

s,t ve αs,bire-bir ve örten olduğundan $t(\alpha s)$: $X \to G$,

$$(s,t(\alpha s))(x)=t(\alpha(s(x))+s(x)$$

ile verilen

$$(s,t(\alpha s)): X \to G \times G$$

indirgenmiş dönüşümdür. $\beta t = I_X$ olduğundan $\beta(t(\alpha s)(x)=\alpha(s(x))=\alpha(s(x))$, ve böylece $G \times_{\alpha=\beta} G$, G deki birleştirilebilir çiftlerinin cümlesi olmak üzere $(s,t(\alpha s))(x) \subseteq G \times_{\alpha=\beta} G$ dir. Buradan $(s,t(\alpha s))$: $X \to G \times_{\alpha=\beta} G$ dir. Fakat G grupoiddir. Bundan dolayı , kısmi çarpım dönüşümü

$$y : G \times_{\alpha=\beta} G \to G$$

$y(s(x),t(\alpha s)(x))=t(\alpha s)(x)+s(x)$ ile verir. Böylece $st(\alpha s))=y(st(\alpha s))$: $X \to G$ Bundan dolayı $s*t$ G' nin bir uygun kesitidir.

Gerçektende $I(x)=1_x$ özdeş dönüşümdür:

$$(I*s)(x)=s(I(x))+I(x)=s(x)+I(x)=s(x)$$

ve

$$(I*s)(x)=I(s(x))+s(x)=\alpha s(x)+s(x)=s(x)$$

olup $\beta s^{-1}(x)=I_X$ ve αs^{-1} bire-bir ve örten olduğundan s^{-1}, $s(x)$ in ters elemanıdır. Gerçekten

$$\begin{aligned}(s^{-1}*s)(x) &= s^{-1}(\alpha s)(x)+s(x)\\ &= -s((\alpha s)^{-1}(\alpha s)(x))+s(x)\\ &= -s(x)+s(x)\\ &= 1_x\end{aligned}$$

Ayrıca

$$\begin{aligned}(s*s^{-1})(x) &= s((\alpha s)^{-1})(x)+s^{-1}(x)\\ &= s(\alpha s)^{-1}(x)+s(\alpha s)^{-1}(x)\\ &= 1_x\end{aligned}$$

bulunur.

G groupoidinin uygun kesitlerinin grubunu M(G) ile gösterecegiz.

Teorem III.1.2

G grupoidinin uygun kesitlerinin grubu M(G) olsun.O zaman

$$\delta : M(G) \to Aut(G)$$

fonksiyonu $a \in G$ için

$$\delta(a)=s(\beta a)+a-s(\alpha a)$$

ile tanımlanır. Bu fonksiyon bir group homomorfizmdir ve $(s^f)(x)=f^{-1}sf(x)$ ile $f \in Aut(G)$ nin $s \in M(G)$ üzerine bir etkisi vardır.

Bununla beraber $\delta(s^f)(a)=f^{-1}\delta sf(a)$ ve $s^{\delta t}=t^{-1}st$ şartları sağlanır.

İspat:

İlk olarak gösterebiliriz ki δ grupların bir homomorfizmdir. Yani her $s, \in M(G)$ için $\delta_{s*t} = \delta_s\, \delta_t$ dir. $a \in G(x,y)$ olsun.

$$\begin{aligned}\delta_{s*t}(a) &= (s*t)(\alpha a)+a-(s*t)(\beta a)\\ &= s(\alpha t(x))+t(x)+a-t(y)-s(\alpha t(y)\\ &= s(\alpha t(x))+\delta\,(a)-s(\alpha t(y))\\ &= \delta_s\,(\delta_t\,(a)).\end{aligned}$$

Bundan dolayı δ bir group homomorfizmdir. Aut(G) nin M(G) üzerinde bir group etkisi olduğunu gösterelim, etkinin ilk şartından

$$(s^I)(x) = I^{-1}\, sI(x) = s(x)$$

olduğu açıktır. Ikinci şartıda aşağıdaki gibi gösterilir:

$$\begin{aligned}(s^{fh})(x) &= (fh)^{-1}\, s(fh)(x)\\ &= h^{-1}\, f^{-1}\, sfh(x)\\ &= h^{-1}\, s^f\, h(x)\\ &= (s^f)^h\,(x).\end{aligned}$$

Biz şimdi δ nin aşağıdaki özellikleri sağladığını gösterelim.

1. $\delta(s^f)(a) = f^{-1}\,\delta sf(a)$

2. $s^{\delta t} = t^{-1}\, st$

$a \in G(x,y)$ ve $b = f(a) \in G(f(x), f(y))$ olsun. O zaman, $s,t \in M(G)$ ve $a \in G(x,y)$ için,

$$\begin{aligned}f^{-1}\,\delta sf(a) &= f^{-1}\,\delta s(f(a))\\ &= f^{-1}\,((s\alpha(f(a))+a-s(\beta f(a))\\ &= f^{-1}\,((s\alpha(f(x))+a-s(\beta f(x))\\ &= f^{-1}\, sf(x)+(a)-f^{-1}\, sf(x)\\ &= f^{-1}\, sf(x)+(a)-f^{-1}\, sf(x))\\ &= s^f\,(x)+a-s^f\,(y)\\ &= \delta(s^f)(a) \text{ dır.}\end{aligned}$$

Üstelik $t^{-1}\,(x) = -t(\alpha t)^{-1}\,(x)$ olduğundan,

$$\begin{aligned}\alpha t^{-1}\,(x) &= \alpha(-t(\alpha t)^{-1}\,(x)\\ &= \beta(t(\alpha t)^{-1}\,(x)\end{aligned}$$

$$= (\alpha t)^{-1} (x)$$

elde ederiz.

Bundan başka, eğer $t \in M(G)$, o zaman $\delta t \in Aut(G)$ ve $(\delta t)(a) = f(a)$ olduğundan, kolayca göstere biliriz ki

$$(\delta t)(x) = (\alpha t)(x)$$

dir. Diğer taraftan

$$\begin{aligned}(t^{-1} * s * t)(x) &= (t^{-1} * s) * t(x) \\ &= (t^{-1} * s)(\alpha t(x)) + t(x) \\ &= t^{-1} (\alpha s(\alpha t))(x) + s(\alpha t(x)) + t(x) \quad ...(*)\end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned}s^{\delta t} (x) &= (\delta t)^{-1} s(\delta t)(x) \\ &= (\delta t)^{-1}(s(\alpha t))(x), \ (\alpha t)(x) = (\delta t)(x) \\ &= t^{-1} (\alpha s(\alpha t)(x) + s(\alpha t)(x) - t^{-1}(\beta s(\alpha t)(x), \ (\beta s(\alpha t)(x) = (\alpha t)(x) \\ &= t^{-1}(\alpha s(\alpha t)(x) + s(\alpha t)(x) - t^{-1}(\alpha t)(x) \\ &= t^{-1}(\alpha s(\alpha t)(x) + s(\alpha t)(x) - (-t(\alpha t)^{-1}(\alpha t)(x)) \\ &= t^{-1}(\alpha s(\alpha t)(x) + s(\alpha t)(x) + t(x). \quad ...(**)\end{aligned}$$

(*) ve (**) dan $(s^{\delta t})(x) = (t^{-1} * s * t)(x)$ bulunur.

Tanım III.1.3

G grupoidinin uygun kesitlerinin grubu M(G) ve grup homomorfizmi

$$\delta : M(G) \to Aut(G)$$

$a \in G$ için

$$\delta (a) = s(\beta a) + a - s(\alpha a)$$

olmak üzere $(M(G), Aut(G), \delta)$ crossed modülüne grupoidlerin *actor crossed modül* denir.

Tanım III.1.4 []

(C, G, δ) , X üzerinde grupoidlerin crossed modülü olsun. Eğer $s_0: :X \to G$, $s_1 : G \to C$ dönüşümleri

$$\beta(s_0\, x) = \quad , x \in X$$

$$\beta(s_1\, a) = \beta(a), \quad a \in G,$$

$$s_1(a+b) = s_1(a)^b + s_1(b)$$

şartlarını sağlıyorsa s_0 , s_1 çiftine s nin *serbest türetmesi* denir.

F Der(C), C nin serbest türetmelerinin cümlesi olsun. Her bir $s \in$ *F Der(C)* için *C* nin bir *endomorfizmini* oluşturabiliriz.

$$\begin{tikzcd}
C \arrow[r, "f_2"] \arrow[d, "\delta"'] & C \arrow[d, "\delta"] \\
G \arrow[r, "f_1"] \arrow[ur, "s_1"] \arrow[d] & G \arrow[d] \\
X \arrow[r, "f_0"] \arrow[ur, "s_0"] & X
\end{tikzcd}$$

Burada

$$f_2(c) = (c+s_1\,\delta c)^{-s_0(\beta)c}$$

$$f_1(a) = s_0(\alpha a)+a+\delta s_1(a) - s_0(\beta a),$$

$$f_0(a) = \alpha s_0(x)$$

dir.

Teorem III.1.5 [28]

C crossed modülünün bir free türetmesi s yardımıyla verilen $f = (f_0, f_1, f_2)$ morfizmi ***C*** nin bir crossed modül morfizmidir, burada

$$f_2(c) = (c+s_1\,\delta c)^{-s_0(\beta)c}$$

$$f_1(a) = s_0(\alpha a)+a+\delta s_1(a) - s_0(\beta a),$$

$$f_0(a) = \alpha s_0(x)$$

dir.

İspat:

Biz göstere biliriz ki f_1 ve f_2 groupoid homomorfizmidir ve $c \in C(x), a \in G(x,y)$ için $f_2(c^a) = f_2(c)^{f_1(a)}$

$$f_1(a+b) = s_0(x) + a + b + \delta s_1(a+b) - s_0(z)$$

$$= s_0(x) + a + b + \delta(s_1(a)^b + s_1(b)) - s_0(z)$$

$$= s_0(x) + a + b - b + \delta s_1(a) + s_1(b) - s_0(z)$$

$$= s_0(x) + a + \delta s_1(a) - s_0(y) + s_0(y) + b + \delta s_1(b) - s_0(z)$$

$$= f_1(a) + f_1(b)$$

ve

$$f_2(c+c') = (c + c' + s_1\,\delta(c + c'))^{-s_0(x)}$$

$$= (c + c' + s_1(\delta c + \delta c'))^{-s_0(x)}$$

$$= (c + c' - c' + s\,\delta c + c' + s\delta c')^{-s_0(x)}$$

$$= (c + s\,\delta c + c' + s\,\delta c')^{-s_0(x)}$$

$$= f_2(c) + f_2(c').$$

$c \in C(x), a \in G(x,y)$ olsun. O zaman $\beta(c^a) = \beta a$, $\beta c = y$. Böylece

$$f_2(c^a) = (c^a + s_1\,\delta(c^a))^{-s_0(\beta c^a) = -s_0(y)}$$

$$= (c^a + s_1(-a + \delta c + a))^{-s_0(y)}$$

$$= (c^a + s_1(-a)^{\delta c + a} + s_1(\delta c)^a + s_1(a))^{-s_0(y)}$$

$$= (c^a - (s_1 a)^{-a\delta c + a} + (s_1\,\delta c)^a + s_1 a)^{-s_0(y)}$$

$$= (c^a - s_1 a^{\delta c^a} + (s_1\,\delta c)^a + s_1 a)^{-s_0(y)}$$

$$= (-s_1(a) + c^a + (s_1\delta c)^a + s_1(a))^{-s_0(y)}$$

$$= (-s_1 a + (c + s_1\delta c)^a + s_1(a))^{-s_0(y)}$$

$$= (-s_1(a) + (f_2(c)^{s_0(x)})^a + s_1(a))^{-s_0(y)}$$

$$= (f_2(c))^{s_0 x + a + \delta s_1 s - s_0 y}$$

$$= f_2(c)^{f_{1(a)}}$$

dır.

Yukardaki teoremin açık ispatı İçen [28] nin doktora tezinde verilmiştir. Şimdi serbest türetmeler için bir çarpma tanımlayalım.

Şimdi *F Der(C)* de bir çarpmayı aşağıdaki gibi tanımlayalım.

$$s * t = \begin{cases} (s * t)_1(a) = t_1(a) + (s_1 g_1(a))^{s_0(\beta a)} & , a \in G(x, y) \\ (s * t)_0(x) = (s_0 g_0(a)) + t_0(x) & , x \in X \end{cases}$$

Y.Teorem III.1.6

Groupoidler üzerinde bir croossed modül $C = (C, G, \delta)$ olsun. O zaman *FDer(C)* üzerinde bir a monoid yapısı çarpma işlemi ile tanımlıdır.

İspat:

Açıktır ki β(s∗t)(x)=x ve β(s∗t)(a)=β(a). Biz göstere biliriz ki (s∗t) bir türetme dönüşümüdür.

Birleşme özelliği için s,t,u ∈ *F Der(C)* ve f =Δ(s) , g = Δ(t) , h = Δ(u) olsun. O zaman

$$\begin{aligned}(u_1 * (s_1 * t_1))a &= (s_1 * t_1)a + u_1(fg(a))^{(s*t)_0(x)} \\ &= t_1 a + (s_1 ga)^{t_0(y)} + (u_1 fga)^{(s*t)_0(x)} \\ &= t_1 a + (s*u)_1(ga)^{t_0(y)} \\ &= ((u*s)_1 * t_1)a\end{aligned}$$

olur. Dolayısıyla *FDer(C)* bir monoid olur.

Sonuç III.1.7

FDer(C) ve *End(C)* yukarda tanımlandığı anlamda monoidler olsun. O zaman

$$\Delta : F\,Der(C) \to End(C)$$
$$s \to f.$$

bir monoid morfizmdir.

Fder (C)* bu monoidlerin ters elemanlarının grubu olarak tanımlansın.

Teorem III.1.8

$s \in FDer(C)$ ve $f=\Delta(s)$ olsun. O zaman aşağıdaki şartlar denktir.

(i) $s \in F\,Der^{*}(C)$,

(ii) $f_1 \in Aut(G)$,

(iii) $f_2 \in Aut(G)$.

İspat:

(i)⇒(ii) , (ii)⇒(iii) f gerçekten de aşağıdaki $End(C)$ de morfizmdir. İspat ederiz ki **(ii)⇒(i).** Farz edelim ki f tersi s $.s_0' : X \to G$, $s_1' : G \to C$ olarak tanımlansın ve

$$s_0^{-1} = -s_0(f^{-1}(x)) \quad s_1^{-1}(a) = -s_1\,(f^{-1}(a))^{s_0^{-1}(y)}$$

olsun.

Biz gösterebiliriz ki s_1^{-1} bir türetme dönüşümüdür. a ,b ,$a+b \in G$ ve $\beta b = z$, $fa=a'$, $fb=b'$ olmak üzere

$$\begin{aligned} s_1^{-1}(a+b) &= -(s_1\,f(a+b))^{-s_0(\beta(a+b)=z)} \\ &= -(s_1\,(fa+fb))^{-s_0(z)} \\ &= -((s_1 a)^{b'} + s_1\,(b'))^{-s_0(z)} \\ &= -(s_1\,(b') + (s_1\,a')^{b})^{-s_0(z)} \\ &= -((s_1 fa)^{b})^{-s_0(y)} - (s_1^{-1}\,b)^{-s_0(z)} \\ &= s_1\,(a)^{b} + s(b) \end{aligned}$$

dir.

Kolayca ispat ederiz ki $s*s^{-1}=c$ ve $s^{-1}*s=c$ dir.

$$\begin{aligned} (s*s^{-1})(a) &= s^{-1}(a) + s(f^{-1}\,(a))^{s_0^{-1}(y)} \\ &= -sf^{-1}\,(a)^{\,s_0^{-1}(y)} + s(f^{1}(a))^{s_0^{-1}(y)} \\ &= c \end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned} (s^{-1}*s)(a) &= s(a) + s^{-1}(f(a))^{s_0(y)} \\ &= s(a) - s(f^{1}(f(a))^{s_0(y)})^{\,s_0^{-1}(y)} \\ &= s(a) - s(a) = c \end{aligned}$$

elde edilir.

Bu teorem, aslında Whitehead [42] tarafından verilen ve Norrie [38], Brown –Gilbert tarafından geliştirilen grupların crossed modüllerinin otomorfizm teorisidir. Bu teori İçen [28] tarafından yukardaki anlamda grupoidlerin crossed modülleri için geliştirilmiştir. Daha önce belirttiğimiz gibi crosssed modüle denk bir çok kategori vardır. Bunlar göz önüne alındığında yukarda yapılanların denk kategorilere taşınması topolojide, cebirsel topolojide ve bunlara yakın dallarda yeni ufuklar açacaktır.

KAYNAKLAR

[1] Alp,M., Crossed moduls ın GAPS, Unıversty of Wales, Ph.D Thesis, 1997

[2] Balcı S., Homotopi ve Bir Uzayın Esas Grubu, Ankara Üniversitesi(Y. Lisans Tezi) (1978)

[3] Blyth T.S., Categories, University of St. Andrews, Scotland (1986)

[4] Bolton C.E. Crossed Module, University of London, Ph.D. Thesis

[5] Brant H., Über Eine Verallgemeinerung des Gruppen Begriffes, Math. Ann. 96, 360-366 (1926)

[6] Brown, R., Topology:A Geometric Account of General Topology, Homotopy Types and the Fundamental Groupoid, Ellis Horwood, Chester (1988)

[7] Brown R. and Spencer C.B. G-Groupoids, Crossed Modules and the Fundamental Groupoid of a Topological Group, Proc. Kon. Ned. Akad. V. Wet. 7, 296-302 (1976)

[8] Brown R. and Mucuk O. Covering Groups of Non-Connected Topological Groups Revisited, Math. Proc. Camb. Phil. Soc. 97-110 (1994)

[9] Brown R. From Groups to Groupoids: A Brief Survey, Bull. London Math. Soc. 19 113-134 (1987)

[10] Brown R. and Huebschmann J. Identities among relations, in Low Dimentional Topology,London Math.Soc.Lect.Notes,t.48,Cambridge Univ.Press, 1982,p.153-202.

[11] Brown R. and Danesh-Naruie G., The Fundamental Groupoid as a Topological Groupoid, Proceeding of the Edinburgh Mathematical Society, Vol. 19 (Series 2) Part 3, 237-244 (1975)

[12] Brown R. and Hardy J.P.L., Topological Groupoids I: Universal Constructions, Math. Nachr. 71, 273-286, (1976)

[13] Brown R. and Spencer C.B., Double Groupoids and Crossed Modules, Cah. Top. Geom. Dif. 17, 343-362, (1976)

[14] Brown R., Higher dimensional group theory,in Low Dimensional

Topology,Lond.Math.Soc.Lect.Notes,48,Cambridge Univ.Press,1982,p.215-238

[15] Brown R., Danesh-Naruie G. and Hardy J.P.L., Topological Groupoids II-Covering Morphisms and G-Spaces, Math. Nachr. 74, 143-156, (1976)

[16] Brown R, Gilbert N.D, Shrimpton J, Symmetry objects in closed categories U.C.N.W. Maths Preprint University of Wales 1989.12

[17] Danesh-Naruie G., Topological Groupoids, Ph.D. Thesis Southampton University (1970)

[18] Dakin K., Multiple Compositions for Higer Dimensional Groupoids, Ph.D. Thesis, University of Wales (1977)

[19] Douady L. And Lazard M., Espaces Fibres en Algebres de Lie et en Groupes, Ivent.Math. 1, 133-151 (1966)

[20] Duskin J., Preliminary Remarks on Groups, Unpublished Notes, Tulane University (1969)

[21] Ellis G. Crossed modules, I.M.S. Bulletin (1988)

[22] Ehresmann C, Categories topologiques I.II.III,Proc.Nederl.Akad.Van Wetensch.Amsterdam.69 (1966).133-175.

[23] Hardy J.P.L., Topological Groupoids, M.A. Dissertation, University of Wales (1972)

[24] Higgins P.J., Categories and Groupoids, Van. Nostrand, New York (1971)

[25] Higgins P.J. and Taylor J., The Fundamental Groupoid and Homotopy Crossed Complex of an Orbit Space, Category Theory Proceedings, Gummers Bach, 1981 Lecture Notes in Math. 962 (ed. K.H. Kamps et Al.,Springer, Berlin) pp. 115-122 (1982)

[26] HUEBSCHMANN J. Crossed n-fold eztensions of groups and cohomology,Comment.Math.Helvetici,t.55,1980,p.302-314.

[27] İçen İ., Demetler Üzerine, İnönü Üniversitesi Fen Bilimleri Enst.(Y.Lisans Tezi) (1989)

[28] İçen İ. A 2-Dimensional Version of Holonomy, University of Wales, Ph.D Thesis (1995)

[29] İçen İ. Sheaves, Local Subgroupoids and Holonomy Groupoids, University of

Wales, Report (1996)

[30] İçen İ. and Yıldız C. The Topological Groupoid of the Groups Formed by H-Groups over Topological space, Journal of the Institute of Science and Technology of Gazi University 24-31 (1993)

[31] İçen İ. ,Özcan A.F. ,Yıldırım C. Topolojiye Giriş (Ders Notları), Malatya (1997)

[32] Kosniowski C., A First Course in Algebric Topology; Cambridge University Press (1980)

[33] Loday J.-L., Spaces mith Finitely Many Non-trivial Homotopy Groups, J. Pure Appl. Algebra 24, 179-202 (1982)

[34] Mac Lane S., Categories for the Working Mathematician, Springer, Berlin (1971)

[35] Macknezie K.C.H., Lie Groupoids and Lie Algebroids in Differential Geometry, Cambridge University Press (1987)

[36] Mucuk O., Covering Groups of Non-connected Topological Group and the Monodromy Groupoid of a Locally Topological Groupoid, Ph.D. Thesis University of Wales, Bangor (1993)

[37] Mucuk O., Locally Topological Groupoids, Tr. J. Of Math. 21, 235-243 (1997)

[38] Norrie K.J. Crossed Module and Analogues of Group Theorems, University of London, Ph.D.

[39] Nuruşev H. Topolojik Grupoidler (Y.Lisans Tezi), Gazi Üniversitesi (1995)

[40] Pontryagın L.S., Topological Groups, Translated From the Russian by Arlen Brown (1966)

[41] Seda A.K., Topological Groupoids, Measures and Representation, Ph.D. Thesis, University of Wales (1974)

[42] Whitehead J.H.C. Commbinatorial Homotopy Theory II. Bull. Amer. Math. Soc. 55, 453-496 (1949)

[43] Özcan A.F, Topolojik Crossed Modüller , (Y.Lisans Tezi) İnönü Üniversitesi,1998

ÖZGEÇMİŞ

1972 yılında Malatya'da doğdu. İlk ve orta öğrenimini Malatya'da tamamladıktan sonra, 1991-1992 öğretim yılında İnönü Üniversitesi Fen-Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümüne kayıt yaptırdı ve 1995-1996 öğretim yılında mezun oldu. 1994 yılı yazında İngiltere'de üç aylık İngilizce kursuna katıldı. 1997 yılında İnönü Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim dalında yüksek lisans başladı. Aynı yıl Yrd. Doç.Dr İlhan İçen ve Arş.Grv A.Fatih Özcan'la birlikte 'Topolojiye Giriş-Ders Notları' kitabı çıktı. Halen Battalgazi Lisesinde matematik öğretmeni olarak çalışmaktadır.