İNÖNÜ ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

F_A-TOPLANABİLME VE F_A-ÇEKİRDEK

Celal ÇAKAN

DOKTORA TEZİ
MATEMATİK ANABİLİM DALI

MALATYA
2001

FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ MÜDÜRLÜĞÜNE

İş bu tez çalışması Matematik Anabilimdalı' nda doktora tezi olarak kabul edilmiştir.

Başkan ...Prof...Dr.......Rıfat......ÇOLAK

Üye ...Prof...Dr.....İhsan....SOLAK

Üye Prof...Dr.......Feyzi......BAŞAR

Üye ..Yrd..Doç..Dr.....Hüsamettin ÇOŞKUN

Üye ...Yrd...Doç..Dr......Yakup....BALCI

ONAY

Yukarıdaki imzaların adı geçen öğretim üyelerine ait olduğunu onaylarım.

Prof. Dr. Satılmış KAYA
Enstitü Müdürü
2[illegible]/2001

İÇİNDEKİLER

TEŞEKKÜR

Yüksek lisans eğitimimden beri danışmanlığımı üstlenen, bu tezin hazırlanmasında gerekli maddi ve manevi imkanları sağlayarak bana yardımcı olan, hiç bir zaman yakın ilgi ve alakalarını esirgemeyen, değerli hocam sayın Yrd. Doç. Dr. Hüsamettin ÇOŞKUN' a; matematiği sevdirerek lisansüstü çalışmalara beni teşvik eden, her türlü problemimde kıymetli fikirleriyle yardımcı olan değerli hocam sayın Prof. Dr. Feyzi BAŞAR' a ve tezin yazımında yardımcı olan kıymetli arkadaşım sayın Arş. Gör. Bilal ALTAY' a minnet ve şükranla teşekkür etmeyi bir borç bilirim.

ÖZET

Bu tez çalışması üç bölümden oluşmaktadır. Birinci bölümde, sonraki bölümlerde kullanacağımız bazı temel tanım, kavram ve teoremlere yer verildi.

Orijinal bölümlerin ilki olan ikinci bölümün ilk kısmında, Lorentz' in yaptığı F_A-toplanabilmenin tanımı verildikten sonra, A' nın özel durumlarında F_A-toplanabilen dizilerin uzayı (F_A)' nın c' yi ve V_σ' yı kapsayacağı gösterildi. Ayrıca; m, c, F ve V_σ' yı (F_A)' ya dönüştüren sonsuz matrisler karakterize edildi. Bu bölümün ikinci kısmında ise, sınırlı bir dizinin F_A-çekirdeği tanımlandı ve daha önceden bilinen Knopp (K), Banach (B) ve σ-çekirdekleri ile olan kapsama ilişkisi incelendi.

Üçüncü ve son bölümün birinci kısmında, her $x \in m$ alındığında F_A-çek$(Bx) \subseteq$ K-çek(x), F_A-çek$(Bx) \subseteq \sigma$-çek(x) ve F_A-çek$(Bx) \subseteq B$-çek(x) kapsama bağıntılarının geçerli olması için B matrisinin taşıması gereken şartlar belirlendi. İkinci kısımda ise, R özel toplanabilme metodu olan Riesz dönüşümünün matrisini göstermek üzere, her $x \in m$ için K-çek$(Ax) \subseteq K$-çek(Rx), F_A-çek$(Bx) \subseteq K$-çek(Rx), F_A-çek$(Bx) \subseteq \sigma$-çek(Rx) ve F_A-çek$(Bx) \subseteq B$-çek(Rx) kapsama bağıntılarının şartları belirlendi.

ABSTRACT

This thesis has three chapters. In the first chapter some preliminary definitions, concepts and theorems are given which will be useful in the next chapters.

In the first part of the second chapter which is the first original part of thesis, in the special case of A, the relations between the spaces c, V_σ and the space (F_A) introduced by Lorentz are given. Further, the infinite matrix transforming the spaces m, c, F and V_σ into the space (F_A) are characterized. In the second part, F_A-core of a bounded number sequence is defined and the relations between the concepts F_A-core and well-known Knoop (K), Banach (B), σ-core are investigated.

In the first part of the final chapter, necessary and sufficient conditions for a matrix B to yield F_A-core$(Bx) \subseteq K$-core(x), F_A-core$(Bx) \subseteq B$-core(x) and F_A-core$(Bx) \subseteq \sigma$-core(x) for all $x \in m$ are determined. In the second part, necessary and sufficient conditions are determined in order to K-core$(Ax) \subseteq K$-core(Rx), F_A-core$(Bx) \subseteq K$-core(Rx), F_A-core$(Bx) \subseteq B$-core(Rx) and F_A-core$(Bx) \subseteq \sigma$-core(Rx) for all $x \in m$, where R is the matrix of the particular summability method Riesz.

SEMBOLLER

$\mathbb{R}$: Reel sayıların cümlesi

$\mathbb{N}$: Doğal sayıların cümlesi

m: Reel terimli sınırlı dizilerin uzayı

c: Reel terimli yakınsak dizilerin uzayı

c_0: Reel terimli sıfıra yakınsak dizilerin uzayı

V_σ: Reel terimli σ-yakınsak dizilerin uzayı

$V_{0\sigma}$: Reel terimli sıfıra σ-yakınsak dizilerin uzayı

F: Reel terimli hemen hemen yakınsak dizilerin uzayı

F_0: Reel terimli sıfıra hemen hemen yakınsak dizilerin uzayı

(F_A): Reel terimli F_A-yakınsak dizilerin uzayı

$(F_A)_0$: Reel terimli sıfıra F_A-yakınsak dizilerin uzayı

K-çek: Reel terimli sınırlı bir dizinin K-çekirdeği

B-çek: Reel terimli sınırlı bir dizinin B-çekirdeği

σ-çek: Reel terimli sınırlı bir dizinin σ-çekirdeği

F_A-çek: Reel terimli sınırlı bir dizinin F_A-çekirdeği

GİRİŞ

Dizinin çekirdeği kavramı, günümüzde toplanabilme teorisi üzerinde çalışan matematikçiler tarafından ilgiyle takip edilen, toplanabilmenin önemli konularından biridir. Bu kavramın ilk kullanım tarihi 1920' li yıllar olmakla beraber, özellikle 1990' dan sonra ilgi görmeye başladı.

İlk olarak Knopp 1926 yılında, yakınsaklık kavramından hareketle dizinin çekirdeğini (K-çekirdek) tanımladı. Knopp daha sonra, kendi adıyla anılan ve dönüşüm dizisinin çekirdeğinin esas dizinin çekirdeği içinde kalmasını ifade eden teoremi verdi. 1979 yılında Knopp Çekirdek Teoremi' nin, Maddox tarafından bir eşitsizlik problemi olarak görülüp yeniden ispatlanmasından sonra, bu kavram ilgi görmeye başladı.

1948 yılında Lorentz, Banach limitlerinden hareketle hemen hemen yakınsaklık denilen yeni bir yakınsaklık kavramı tanımladı. Das, hemen hemen yakınsaklığın karakterizasyonuna dayanarak, 1987' de sınırlı bir dizinin Banach çekirdeğini (B-çekirdek) tanımladı. Sonraki yıllarda K ve B-çekirdekleriyle ilgili bir çok çalışma yapıldı.

Raimi 1963 yılında, özel halde Banach limitlerine indirgenen σ-limit kavramını tanımladı ve σ-yakınsaklığın karakterizasyonunu verdi. Bu kararkterizasyonu kullanarak Mishra, Satapathy ve Rath 1994 yılında σ-çekirdeği tanımladılar. σ, K ve B-çekirdekleri ile ilgili olarak bir çok matematikçi tarafından çalışma yapıldı.

Bu tez çalışmasında; Lorentz tarafından verilen ve hemen hemen yakınsaklığı genelleştiren F_A-yakınsaklıktan hareketle sınırlı bir dizinin F_A-çekirdeği tanımlandı (bu tanım özel halde B- çekirdeğe indirgenir) ve bu çekirdek ile K, B ve çekirdekleri arasındaki kapsama bağıntıları incelendi. Bunun için de önce ilgili matris dönüşümleri karakterize edildi. Ayrıca; x sınırlı bir dizi olmak üzere, x' in, özel bir toplanabilme matrisi olan Riesz matrisiyle elde edilen Rx dönüşüm dizisi ve sonsuz bir matrisle elde edilen dönüşüm dizisinin yukarıda bahsi edilen çekirdekleri karşılaştırıldı.

Bölüm 1

MATRİS DÖNÜŞÜMLERİ

Bu bölümde, sonraki bölümlerde kullanılacak olan bazı temel tanım ve kavramlar verildi.

1.1 Matris Dönüşümleri

Tanım 1.1.1 ([10], sf. 71). X boş olmayan bir cümle olmak üzere,

$$+ : X \times X \longrightarrow X, \quad (x, y) \longrightarrow x + y$$

ve

$$. : \mathbb{R} \times X \longrightarrow X, \quad (\lambda, x) \longrightarrow \lambda x$$

fonksiyonlarını tanımlayalım. Eğer; $x, y, z \in X$ ve $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ için

$l1)$ $x + y = y + x$,
$l2)$ $(x + y) + z = x + (y + z)$,
$l3)$ $x + \theta = x$ olacak şekilde bir $\theta \in X$ var,
$l4)$ $x + (-x) = \theta$ olacak şekilde bir $-x \in X$ var,
$l5)$ $1.x = x$,

$l6)\ \lambda(x+y) = \lambda x + \lambda y,$

$l7)\ (\lambda+\mu)x = \lambda x + \mu x,$

$l8)\ \lambda(\mu x) = (\lambda\mu)x,$

şartları sağlanıyorsa, X' e $\mathbb{R}$ üzerinde bir lineer uzay veya reel lineer uzay denir.

X bir lineer uzay ve $Y \subset X$ ise, Y' nin de lineer uzay olması için $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ ve $y_1, y_2 \in Y$ alındığında $\lambda y_1 + \mu y_2 \in Y$ sağlanması yeterlidir.

$\forall n \in \mathbb{N}$ için $x_n \in \mathbb{R}$ olmak üzere, bütün (x_n) dizilerinin cümlesi w ile gösterilir. w, dizilerin skalarla çarpma ve koordinatsal toplama işlemine göre reel sayılar cismi üzerinde bir lineer uzaydır. w' nın herhangi bir alt uzayına dizi uzayı denir.

Tanım 1.1.2 ([10], sf. 94). X bir lineer uzay ve $\|.\| : X \longrightarrow \mathbb{R}$ olsun. Eğer

$$\|x\| = 0 \Longleftrightarrow x = 0, \tag{1.1.1}$$

$$\|\lambda x\| = |\lambda|\|x\|, \tag{1.1.2}$$

$$\|x+y\| \leq \|x\| + \|y\|, \tag{1.1.3}$$

şartları sağlanıyorsa, $\|.\|$ fonksiyonuna X üzerinde bir norm ve $(X, \|.\|)$ ikilisine de normlu uzay denir.

Tanım 1.1.3 ([10], sf. 96). $(X, \|.\|)$ bir normlu uzay olsun. Eğer $\|x_m - x_n\| \longrightarrow 0$ $(m, n \longrightarrow \infty)$ oluyorsa, $(x_n) \subset X$ dizisine bir Cauchy dizisi denir.

Tanım 1.1.4 ([10], sf. 96). $(X, \|.\|)$ bir normlu uzay olsun. Eğer $\|x_n - x\| \longrightarrow 0$ $(n \longrightarrow \infty)$ olacak şekilde bir $x \in X$ varsa, $(x_n) \subset X$ dizisi x'e yakınsaktır denir.

Tanım 1.1.5 ([10], sf. 96). Eğer $(X, \|.\|)$ normlu uzayındaki her Cauchy dizisi yakınsak ise, X' e tam normlu uzay veya Banach uzayı denir.

Tanım 1.1.6 ([19], sf. 10). (q_n), elemanlarının hepsi sıfır olmayan, pozitif sayıların bir dizisi ve

$$Q_n = q_1 + q_2 + ... + q_n, \quad q_1 > 0, \quad n = 1, 2, ...$$

olsun. Bu durumda;

$$t_n = \frac{q_1 x_1 + q_2 x_2 + ... + q_n x_n}{Q_n}$$

ile tanımlı dönüşüme, x' in Riesz dönüşümü denir. Riesz matrisi,

$$r_{nk} = \begin{cases} \frac{q_k}{Q_n} & , \quad k \leq n \\ 0 & , \quad - \end{cases}$$

ile verilir. Eğer her n için $q_n = 1$ alınırsa, birinci mertebeden Cesaro matrisi denilen ve $(C, 1)$ ile gösterilen

$$c_{nk} = \begin{cases} \frac{1}{n+1} & , \quad k \leq n \\ 0 & , \quad - \end{cases}$$

matrisi elde edilir.

$A = (a_{nk})$ reel terimli bir sonsuz matris ve $x = (x_k)$ bir dizi olsun. Eğer her n için,

$$A_n(x) = \sum_k a_{nk} x_k$$

serileri yakınsak ise, $(A_n(x))$ dizisine (x_k) dizisinin A matrisi ile elde edilen dönüşüm dizisi denir.

E ve F herhangi iki dizi uzayı ve A da bir sonsuz matris olsun. Eğer her $x \in E$ için $(A_n(x)) \in F$ ise, A matrisi E' den F' ye tanımlıdır denir ve $A \in (E, F)$ yazılır. E' den F' ye tanımlı bütün matrislerin sınıfı (E, F) ile gösterilir.

Eğer E ve F üzerinde limit veya toplam mevcut ise, (E, F)' nin elemanlarının limit veya toplamı koruması halinde $(E, F)_{reg}$ yazılır. Mesela; $A \in (c, c)_{reg}$ ise, her

$x \in c$ için $Ax \in c$ ve $\lim x = \lim A_n(x)$' dir. Bu sınıftaki matrislere regüler matrisler denir. Bir A matrisinin regüler olması için gerek ve yeter şartlar aşağıdaki gibi verildi:

Teorem 1.1.1 ([10], sf. 165). *Bir A matrisinin regüler olması için gerek ve yeter şart*

$$\|A\| = \sup_n \sum_k |a_{nk}| < \infty, \tag{1.1.4}$$

$$\lim_n a_{nk} = 0, \text{ her } k \text{ için}, \tag{1.1.5}$$

$$\lim_n \sum_k a_{nk} = 1, \tag{1.1.6}$$

olmasıdır.

Teorem 1.1.2 ([10], sf. 174). *$A \in (m,m)$ olması için gerek ve yeter şart (1.1.4)' ün sağlanmasıdır.*

Teorem 1.1.3 ([10], sf. 169). *$A \in (m,c)$ olması için gerek ve yeter şart $\sum_k |a_{nk}|$ serisinin n' ye göre düzgün yakınsak ve $\lim_n a_{nk} = 0$ olmasıdır.*

Teorem 1.1.4 ([10], sf. 18). *(f_n), $I \subseteq \mathbb{R}$ aralığı üzerinde f fonksiyonuna noktasal yakınsak olan bir fonksiyon dizisi olsun. Bu durumda; (f_n)' nin I üzerinde düzgün yakınsak olması için gerek ve yeter şart*

$$\lim_n \sup_{x \in I} |f_n(x) - f(x)| = 0$$

sağlanmasıdır.

Teorem 1.1.5 ([10], sf. 20). *(Weierstrass Testi) $\sum_k f_k(x)$ bir $I \subseteq \mathbb{R}$ aralığı üzerinde tanımlı bir fonksiyon serisi olsun. Eğer $|f_k(x)| \leq a_k$ şartını sağlayan ve yakınsak olan bir $\sum_k a_k$ serisi varsa, $\sum_k f_k(x)$ serisi I üzerinde düzgün yakınsaktır.*

1.2 Hemen Hemen Yakınsaklık

Bu kısımda hemen hemen yakınsaklık tanıtıldıktan sonra, ilgili matris dönüşümlerini karakterize eden teoremler verildi.

Tanım 1.2.1. X, $\mathbb{R}$ üzerinde bir lineer uzay olmak üzere, $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$ dönüşümüne bir reel fonksiyonel denir. Her $x, y \in X$ için,

$$f(x+y) \leq f(x) + f(y)$$

ise, f' ye alttoplamsal;

$$f(x+y) = f(x) + f(y)$$

ise f' ye toplamsaldır denir.

Eğer $\alpha \geq 0$ ve her $x \in X$ için $f(\alpha x) = \alpha f(x)$ ise f' ye homojendir denir.

Alttoplamsal ve homojen bir fonksiyonele altlineer, toplamsal ve her $\alpha \in \mathbb{R}$ için homojen olan bir fonksiyonele de lineerdir denir.

Tanım 1.2.2. [9] $L : m \longrightarrow \mathbb{R}$ lineer olsun. Eğer,

i) $x = (x_n)$ olmak üzere her n için $x_n \geq 0$ ise $L(x) \geq 0$,
ii) $e = (1, 1, 1, ...)$ için $L(e) = 1$,
iii) $(Sx)_n = x_{n+1}$ olmak üzere $L[(Sx)_n] = L(x)$,

şartları sağlanıyorsa, L' ye bir Banach limiti denir.

Bütün Banach limitleri eşit olan diziye hemen hemen yakınsaktır denir.

Hemen hemen yakınsak dizilerin uzayı F, sıfıra hemen hemen yakınsak dizilerin uzayı da F_0 ile gösterilir. Eğer x dizisi bir s değerine hemen hemen yakınsak ise, $F - \lim x = s$ yazılır.

Teorem 1.2.1. *[9] $F-\lim x = s$ olması için gerek ve yeter şart, n' ye göre düzgün olarak*

$$\lim_p \frac{1}{p+1}\sum_{i=0}^{p} x_{n+i} = s$$

olmasıdır.

Tanım 1.2.3. Eğer $A \in (F,c)_{reg}$ ise, A' ya kuvvetli regülerdir denir.

Teorem 1.2.2. *[9] Regüler bir A matrisinin kuvvetli regüler olması için gerek ve yeter şart*

$$\lim_n \sum_k |a_{nk} - a_{n,k+1}| = 0$$

olmasıdır.

Tanım 1.2.4. Eğer $A \in (c,F)_{reg}$ ise, A' ya hemen hemen regülerdir denir.

Teorem 1.2.3. *[8] Bir A matrisinin hemen hemen regüler olması için gerek ve yeter şart (1.1.4) ile birlikte*

$$F-\lim_n a_{nk} = 0, \ \textit{her } k \ \textit{için}, \tag{1.2.1}$$

$$F-\lim_n \sum_k a_{nk} = 1, \tag{1.2.2}$$

şartlarının sağlanmasıdır.

Tanım 1.2.5. Eğer $A \in (F,F)_{reg}$ ise, A' ya F-regülerdir denir.

Teorem 1.2.4. *[7] Bir A matrisinin F-regüler olması için gerek ve yeter şart (1.1.4), (1.2.1) ve (1.2.2) ile birlikte n' ye göre düzgün olarak*

$$\lim_p \sum_k \frac{1}{p+1} \Big| \sum_{i=0}^{p} (a_{n+i,k} - a_{n+i,k+1}) \Big| = 0$$

şartının sağlanmasıdır.

1.3 σ- yakınsaklık

Bu kısımda σ-yakınsaklığın tanımından sonra, ilgili matris dönüşümlerini karakterize eden teoremler verildi.

Tanım 1.3.1. [21] $\sigma : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ bire-bir bir dönüşüm olsun. Eğer $\phi : m \longrightarrow \mathbb{R}$ lineer-sürekli fonksiyoneli

$i)$ Her n için $x_n \geq 0$ ise $\phi(x) \geq 0$,

$ii)$ $e = (1, 1, 1, ...)$ için $\phi(e) = 1$,

$iii)$ $\phi[(x_{\sigma(n)})] = \phi(x)$,

şartlarını sağlıyorsa, ϕ' ye bir σ-limit denir. Bütün σ-limitlerin cümlesi M_σ ile gösterilir. Her $\phi \in M_\sigma$ için $\phi(x) = s$ olan diziye σ-yakınsaktır denir ve $\sigma - \lim x = s$ yazılır.

Bütün σ-yakınsak dizilerin uzayı V_σ, sıfıra σ- yakınsak dizilerin uzayı da $V_{0\sigma}$ ile gösterilir. Özel olarak $\sigma(n) = n + 1$ alınırsa, σ-limit Banach limitine ve V_σ da F' ye indirgenir. Bu çalışma boyunca σ-dönüşümlerini her $p \geq 1$ ve $n \geq 0$ için $\sigma^p(n) \neq n$ olacak şekilde alacağız. Bu durumda her σ-limit, c üzerindeki limit fonksiyonelinin m' ye genişletilmesidir. Dolayısıyla $c \subset V_\sigma$ olur, [15].

Tanım 1.3.2. [14] $\lambda \in \mathbb{R}$ için $\lambda^- = maks\{-\lambda, 0\}$ olmak üzere eğer,

$$\sigma - \lim_n \sum_k a_{nk}^- = 0$$

ise, A matrisine σ- düzgün pozitifdir denir.

Şimdi, σ-yakınsaklık ve V_σ uzayı ile ilgili bilinen teoremleri sıralayalım.

Teorem 1.3.1. *[21] Bir sınırlı dizinin σ-yakınsak olması için gerek ve yeter şart*

$$t_{pn}(x) = \frac{1}{p+1} \sum_{i=0}^{p} x_{\sigma^i(n)}$$

olmak üzere, n' ye göre düzgün olarak

$$\lim_p t_{pn}(x) = s$$

sağlanmasıdır.

Tanım 1.3.3. Eğer $A \in (c, V_\sigma)_{reg}$ ise, A' ya σ-regülerdir denir.

Teorem 1.3.2. *[21] Bir A matrisinin σ-regüler olması için gerek ve yeter şart (1.1.4) ile birlikte,*

$$\sigma - \lim_n a_{nk} = 0, \text{ her } k \text{ için }, \tag{1.3.1}$$

$$\sigma - \lim_n \sum_k a_{nk} = 1, \tag{1.3.2}$$

şartlarının sağlanmasıdır.

Teorem 1.3.3. *[20] A regüler bir matris olsun. Bu durumda; $A \in (V_\sigma, c)_{reg}$ olması için gerek ve yeter şart*

$$\lim_n \sum_k |a_{nk} - a_{n,\sigma(k)}| = 0$$

sağlanmasıdır.

Tanım 1.3.4. Eğer $A \in (V_\sigma, V_\sigma)_{reg}$ ise, A' ya V_σ- regülerdir denir.

Teorem 1.3.4. *[3] Bir A matrisinin V_σ-regüler olması için gerek ve yeter şart A' nın σ-regüler olması ve n' ye göre düzgün olarak*

$$\lim_p \sum_k \frac{1}{p+1} \left| \sum_{i=0}^{p} (a_{\sigma^i(n),k} - a_{\sigma^i(n),\sigma(k)}) \right| = 0$$

sağlanmasıdır.

μ, σ gibi bir dönüşüm olmak üzere Teorem 1.3.4 aşağıdaki gibi genelleştirildi.

Teorem 1.3.5. *[2] $A \in (V_\mu, V_\sigma)_{reg}$ olması için gerek ve yeter şart A' nın σ-regüler olması ve n' ye göre düzgün olarak*

$$\lim_p \sum_k \frac{1}{p+1} \left| \sum_{i=0}^{p} (a_{\sigma^i(n),k} - a_{\sigma^i(n),\mu(k)}) \right| = 0$$

sağlanmasıdır.

$\mu(n) = n+1$ ve $\sigma(n) = n+1$ özel hallerinde Theorem 1.3.5 sırasıyla, aşağıdaki iki sonuca indirgenir.

Teorem 1.3.6. *[2] $A \in (F, V_\sigma)_{reg}$ olması için gerek ve yeter şart A' nın σ-regüler olması ve n' ye göre düzgün olarak*

$$\lim_p \sum_k \frac{1}{p+1} \left| \sum_{i=0}^{p} (a_{\sigma^i(n),k} - a_{\sigma^i(n),k+1}) \right| = 0$$

sağlanmasıdır.

Teorem 1.3.7. *[2] $A \in (V_\mu, F)_{reg}$ olması için gerek ve yeter şart A' nın hemen hemen regüler olması ve n' ye göre düzgün olarak*

$$\lim_p \sum_k \frac{1}{p+1} \left| \sum_{i=0}^{p} (a_{n+i,k} - a_{n+i,\mu(k)}) \right| = 0$$

sağlanmasıdır.

1.4 Çekirdek Kavramı

Bu kısımda; sınırlı bir dizinin Knopp (kısaca K-çek), Banach (kısaca B-çek) ve σ-çekirdeklerinin (kısaca σ-çek) tanımından sonra çekirdekler arasındaki kapsama bağıntılarını gösteren teoremler verildi.

Tanım 1.4.1 ([1], sf. 138). (K-çekirdek): Sınırlı bir x dizisinin K-çekirdeği

$$L(x) = \limsup x, \quad l(x) = \liminf x$$

olmak üzere, $[l(x), L(x)]$ kapalı aralığıdır.

Bu tanımdan sonra Knopp, kendi adıyla anılan ve dönüşüm dizisinin çekirdeğinin esas dizinin çekirdeği içinde kaldığını ispatlayan aşağıdaki teoremi verdi.

Teorem 1.4.1 ([1], sf. 138). *Eğer A matrisi regüler ve pozitif terimli ise, her $x \in m$ için K- çek$(Ax) \subseteq K$- çek(x) olur.*

Eğer her $x \in m$ için $L(Ax) \leq L(x)$ ise, $l(x) \leq l(Ax) \leq L(Ax) \leq L(x)$ eşitsizliği elde edilir. Böylece $L(Ax) \leq L(x)$ olması, K- çek$(Ax) \subseteq K$- çek(x) ile aynı anlamdadır. Buna dayanarak Maddox, 1979 yılında Knopp' un çekirdek teoremini bir eşitsizlik problemi olarak ele aldı ve aşağıdaki gibi ispatladı:

Teorem 1.4.2. *[11] $L(Ax) \leq L(x)$ olması için gerek ve yeter şart A' nın regüler olması ve*

$$\lim_n \sum_k |a_{nk}| = 1, \tag{1.4.1}$$

şartını sağlamasıdır.

Tanım 1.4.2. [4] (B-çekirdek): P ve Q, sırasıyla, m üzerinde alt-lineer ve lineer fonksiyoneller olsunlar. Eğer her $x \in m$ alındığında $Q(x) \leq P(x)$ eşitsizliği Q' nün

Banach limiti olmasını gerektiriyorsa, P' ye Banach limitlerini üretir denir. Eğer her Q Banach limiti için her $x \in m$ alındığında $Q(x) \leq P(x)$ oluyorsa, P' ye Banach limitlerine baskındır denir.

Eğer P hem Banach limitlerini üretir hem de Banach limitlerine baskın ise, bir $x \in m$ dizisinin hemen hemen yakınsak olması için gerek ve yeter şart $-P(-x) = P(x)$ olmasıdır. Ayrıca; sınırlı bir x dizisinin Banach çekirdeği (kısaca B-çek)

$$[-P(-x), P(x)]$$

kapalı aralığı ile tanımlanır.

$$q(x) = \inf_{n_1, n_2, \ldots, n_p} \limsup_k \frac{1}{p} \sum_{i=1}^{p} x_{k+n_i}$$

ile tanımlanan q alt-lineer fonksiyoneli hem Banach limitlerini üretir hem de Banach limitlerine baskındır, [9]. Dolayısıyla; sınırlı bir x dizisinin B-çekirdeği $[-q(-x), q(x)]$ kapalı aralığı ile tanımlanır,[4].

Ayrıca, m üzerinde

$$L^*(x) = \limsup_p \sup_n \frac{1}{p+1} \sum_{i=0}^{p} x_{n+i}$$

şeklinde tanımlanan altlineer fonksiyoneli de Banach limitlerine baskındır ve Banach limitlerini üretir. Bu nedenle dizinin B-çekirdeği aynı zamanda $[-L^*(-x), L^*(x)]$ olarak da verilir, [18].

Her $x \in m$ için $L^*(x) \leq L(x)$ olduğundan, B-çek$(x) \subseteq K$-çek(x) kapsama bağıntısı sağlanır, [18].

P, m üzerinde bir alt lineer fonksiyonel olmak üzere, her $x \in m$ için $Q(x) \leq P(x)$ olacak şekildeki Q lineer fonksiyonellerinin cümlesi $\{m, P\}$ ile gösterilir. Eğer $\{m, P\} \subset M_\sigma$ ise P' ye σ-limitlerini üretir, $M_\sigma \subset \{m, P\}$ ise P' ye σ-limitlerine baskındır denir. Böylece; $M_\sigma = \{m, P\}$ olması halinde, $x \in V_\sigma \iff -P(-x) = P(x)$' dir.

Tanım 1.4.3. [14] (σ-Çekirdek): P, m üzerinde tanımlı alt-lineer bir fonksiyonel olsun. Eğer $M_\sigma = \{m, P\}$ ise, sınırlı bir x dizisinin σ-çekirdeği $[-P(-x), P(x)]$ kapalı aralığı olarak tanımlanır.

m üzerinde,

$$V(x) = \sup_n \limsup_p \frac{1}{p+1} \sum_{i=0}^{p} x_{\sigma^i(n)}$$

ile tanımlanan V alt-lineer fonksiyoneli için $\{m, V\} = M_\sigma$ olduğundan $x \in m$' nin σ-çekirdeği

$$\sigma - \text{çek}(x) = [-V(-x), V(x)]$$

olarak tanımlanır, [14].

Ayrıca,

$$q_\sigma(x) = \lim_p \sup_n \sup \frac{1}{p+1} \sum_{i=0}^{p} x_{\sigma^i(n)}$$

ile tanımlanan q_σ altlineer fonksiyoneli için de $\{m, q_\sigma\} = M_\sigma$' dır, [17]. Böylece $x \in m$ için σ- çek$(x) = [-q_\sigma(-x), q_\sigma(x)]$ ile de tanımlanır.

Her $x \in m$ için $V(x) \leq L(x)$ olduğundan σ- çek$(x) \subset K$- çek(x) sağlanır.

Şimdi sınırlı bir x dizisi ve onun Ax dönüşüm dizisinin, yukarıda tanımlanan üç çekirdek anlamında, çekirdekleri arasındaki kapsama bağıntılarını veren teoremleri sıralıyalım.

Teorem 1.4.3. *[11] Her $x \in m$ alındığında K- çek$(Ax) \subseteq K$- çek(x) olması için gerek ve yeter şart A' nın regüler olması ve (1.4.1)' i sağlamasıdır.*

Teorem 1.4.4. *[18] Her $x \in m$ alındığında K- çek$(Ax) \subseteq B$- çek(x) olması için gerek ve yeter şart A' nın kuvvetli regüler olması ve (1.4.1)' in sağlanmasıdır.*

Teorem 1.4.5. *[18] Her $x \in m$ alındığında B- çek$(Ax) \subseteq K$- çek(x) sağlanmasının gerek ve yeter şartı A' nın hemen hemen regüler ve*

$$\lim_p \sup_n \sum_k \frac{1}{p+1} \Big| \sum_{i=0}^{p} a_{n+i,k} \Big| = 1, \tag{1.4.2}$$

olmasıdır.

Teorem 1.4.6. *[18] Her $x \in m$ alındığında B- çek$(Ax) \subseteq B$- çek(x) sağlanmasının gerek ve yeter şartı (1.4.2) ile birlikte A' nın F-regüler olmasıdır.*

Teorem 1.4.7. *[14] Her $x \in m$ alındığında σ- çek$(Ax) \subseteq K$- çek(x) sağlanmasının gerek ve yeter şartı A' nın σ-regüler ve σ-düzgün pozitif olmasıdır.*

Teorem 1.4.8. *[14] Her $x \in m$ alındığında σ- çek$(Ax) \subseteq \sigma$- çek(x) sağlanmasının gerek ve yeter şartı A' nın V_σ-regüler ve σ-düzgün pozitif olmasıdır.*

Teorem 1.4.9. *[2] $A \in (V_\mu, V_\sigma)_{reg}$ olsun. Her $x \in m$ alındığında σ- çek$(Ax) \subseteq \mu$-çek(x) olmasının gerek ve yeter şartı A' nın σ-düzgün pozitif olmasıdır.*

Teorem 1.4.10. *[2] $A \in (V_\mu, F)_{reg}$ olsun. Her $x \in m$ alındığında B- çek$(Ax) \subseteq \sigma$-çek(x) olmasının gerek ve yeter şartı A' nın σ-düzgün pozitif olmasıdır.*

Teorem 1.4.11. *[2] $A \in (F, V_\sigma)_{reg}$ olsun. Her $x \in m$ alındığında σ- çek$(Ax) \subseteq B$-çek(x) olmasının gerek ve yeter şartı (1.4.2)' nin sağlanmasıdır.*

Bölüm 2

F_A- TOPLANABİLME

Bu bölümün ilk kısmında; F_A-toplanabilmenin tanımı verildikten sonra, A' nın özel halinde (F_A)' nın c ve V_σ' yı kapsayacağı gösterildi ve m, c, F, V_σ' dan (F_A) içine olan dönüşümler karakterize edildi. İkinci kısımda da, F_A- yakınsaklıktan hareketle bir dizinin F_A-çekirdeği tanımlandı.

2.1 F_A-Toplanabilme

Tanım 2.1.1. [9] $A = (a_{nk})$ bir sonsuz matris ve $x = (x_k) \in m$ olsun. Eğer $p = 0, 1, 2, ...$ için p' ye göre düzgün olarak,

$$\lim_n \sum_k a_{nk} x_{k+p} = l$$

ise, x dizisi l' ye F_A-toplanabilirdir (veya F_A-yakınsaktır) denir.

Dikkat edilirse F_A-toplanabilme F toplanabilme de denilen hemen hemen yakınsaklığın bir genelleştirilmesidir. Çünkü A matrisi yerine özel olarak $(C, 1)$ matrisi alınırsa hemen hemen yakınsaklığın tanımı elde edilir. Özel olarak $p = 0$ seçilirse F_A -toplanabilme A- toplanabilmeye indirgenir.

(F_A) ile, F_A- yakınsak olan bütün sınırlı dizilerin uzayı, $(F_A)_0$ ile de 0' a F_A-yakınsak olan dizilerin uzayı gösterilir. A yerine $(C,1)$ alınırsa, (F_A) uzayı F uzayına indirgenir.

Lemma 2.1.1. *[9] Eğer A regüler ise, $(F_A) \subset F$' dir.*

Lemma 2.1.2. *[9] Eğer A kuvvetli regüler ise, $(F_A) = F$' dir.*

Şimdi c ile (F_A) arasındaki kapsamayı verelim:

Teorem 2.1.1. *Eğer A regüler ise, $c \subset (F_A)$ olur.*

İspat. A regüler olsun. $x \in c$ alalım ve $\lim x = l$ diyelim. Bu durumda; her $p \in \mathbb{N}$ için $(x_{k+p} - l)$ bir sıfır dizisi olacağından,

$$\sum_k a_{nk} x_{k+p} = \sum_k a_{nk}(x_{k+p} - l) + l \sum_k a_{nk} \tag{2.1.1}$$

yazılabilir. Burada; A' nın regülerliği dikkate alınarak $n \longrightarrow \infty$ için limit alınırsa,

$$\lim_n \sum_k a_{nk} x_{k+p} = l \tag{2.1.2}$$

elde edilir.

Şimdi; (2.1.2)' deki yakınsamanın p' ye göre düzgün olduğunu gösterelim:

Her bir sabit n için $f_k(p) = a_{nk} x_{k+p}$ olmak üzere, $|f_k(p)| \leq \|x\| |a_{nk}|$ sağlandığından, Weierstrass testine göre $\sum_k f_k(p)$ serisi p' de düzgün yakınsaktır.

O halde; (2.1.2)' den, $F_A - \lim x = l$ ve $c \subset (F_A)$ bulunur. □

Teorem 2.1.2. *Eğer $A \in (V_\sigma, c)_{reg}$ ise, $V_\sigma \subset (F_A)$ olur.*

İspat. $A \in (V_\sigma, c)_{reg}$ olduğundan A aynı zamanda regülerdir. Şimdi, $x \in V_\sigma$ ve $\sigma - \lim x = l$ olsun. Bu durumda; (2.1.1) yazılabileceğinden, önceki teoremde olduğu gibi $F_A - \lim x = l$ bulunur. Böylece; $x \in (F_A)$ ve $V_\sigma \subset (F_A)$ elde edilir. □

Şimdi m, c, V_σ ve F uzaylarını (F_A) uzayına dönüştüren matris sınıflarını karakterize eden teoremleri verelim. Bu teoremlerde A matrisi yerine özel olarak $(C,1)$ alındığında, daha önceden bilinen (m,F), (c,F), $(c,F)_{reg}$, (V_σ,F), $(V_\sigma,F)_{reg}$, (F,F) ve $(F,F)_{reg}$ sınıflarının karakterizasyonuna ulaşılır.

Teorem 2.1.3. *$\|A\| < \infty$ olsun. $B \in (m,(F_A))$ olması için gerek ve yeter şart, limitler p' de düzgün olmak üzere,*

$$\|B\| = \sup_n \sum_k |b_{nk}| < \infty, \tag{2.1.3}$$

$$\lim_m \sum_n a_{mn} b_{n+p,k} = \alpha_k, \text{ her } k \text{ için}, \tag{2.1.4}$$

$$\lim_m \sum_k \Big| \sum_n a_{mn} b_{n+p,k} - \alpha_k \Big| = 0, \tag{2.1.5}$$

sağlanmasıdır. Bu şartlar sağlandığında, her $x \in m$ için $F_A-\lim B_n(x) = \sum_k \alpha_k x_k$'dır.

İspat. (Gereklilik): $B \in (m,(F_A))$ olsun. Bu durumda; her $x \in m$ için $B_n(x) = \sum_k b_{nk} x_k$ dönüşüm dizisi mevcut ve $\in (F_A)$' dır. Böylece, $(F_A) \subset m$ olduğundan (2.1.3) sağlanmak zorundadır. Ayrıca, özel olarak $x = e_k$ seçilirse, her k için $e_k \in m$ olduğundan, (2.1.4) elde edilir. Diğer taraftan,

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{N} |\alpha_k| &= \sum_{k=1}^{N} \Big| \lim_m \sum_n a_{mn} b_{n+p,k} \Big| \\
&\leq \limsup_m \sum_{k=1}^{N} \sum_n |a_{mn}| |b_{n+p},k| \\
&\leq \|A\| \|B\| \\
&< \infty
\end{aligned}$$

olduğundan, $\sum_k \alpha_k$ serisi mutlak yakınsaktır. Buna göre; her p için

$$c_{mk} = \Big(\sum_n a_{mn} b_{n+p,k} - \alpha_k\Big)$$

olarak seçilirse, $C \in (m,c)$ olur. Böylece; Teorem 1.1.3' den (2.1.5) elde edilir.

(Yeterlilik): Şartlar sağlansın ve $x \in m$ alalım.

$$\begin{aligned}|\sum_k \sum_n a_{mn} b_{n+p,k} x_k - \sum_k \alpha_k x_k| &= |\sum_k (\sum_n a_{mn} b_{n+p,k} - \alpha_k) x_k| \\ &\leq \|x\| \sum_k |\sum_n a_{mn} b_{n+p,k} - \alpha_k|\end{aligned}$$

eşitsizliğinde $m \longrightarrow \infty$ yapılırsa, (2.1.5)'den dolayı p' ye düzgün olarak

$$\lim_m \sum_n \sum_k a_{mn} b_{n+p,k} x_k = \sum_k \alpha_k x_k$$

bulunur. Bu ise $F_A - \lim B_n(x) = \sum_k \alpha_k x_k$ olması demektir. □

Teorem 2.1.4. $\|A\| < \infty$ *olsun.* $B \in (c, (F_A))$ *olması için gerek ve yeter şart (2.1.3) ve (2.1.4) ile birlikte* p*' ye göre düzgün olarak*

$$\lim_m \sum_n \sum_k a_{mn} b_{n+p,k} = \alpha, \tag{2.1.6}$$

sağlanmasıdır. Bu şartlar sağlandığında, her $x \in c$ *için* $F_A - \lim B_n(x) = \sum_k \alpha_k x_k + l(\alpha - \sum_k \alpha_k)$*' dir.*

İspat. (Gereklilik): $B \in (c, (F_A))$ olsun. Bu durumda; (2.1.3) ve (2.1.4) şartlarının gerekliliği bir önceki teoremde olduğu gibi elde edilir. Ayrıca; özel olarak $x = e$ seçilirse, (2.1.6) şartının da gerekliliği bulunur.

(Yeterlilik): Şartlar sağlansın. $x \in c$ alalım ve $\lim x = l$ olsun. Bu durumda; her $\epsilon > 0$ için $k \geq N$ olduğunda $|x_k - l| \leq \epsilon/(\|A\|\|B\| + M)$ (burada M, $\sum_k \alpha_k < M$ şartını sağlayan bir sayıdır) olacak şekilde bir $N \in \mathbb{N}$ vardır. Şimdi;

$$\sum_n \sum_k a_{mn} b_{n+p,k} x_k = \sum_n \sum_k a_{mn} b_{n+p,k}(x_k - l) + l \sum_n \sum_k a_{mn} b_{n+p,k} \tag{2.1.7}$$

yazalım.

Ayrıca;

$$
\begin{aligned}
\Big|\sum_n\sum_k a_{mn}b_{n+p,k}(x_k-l)-\sum_k\alpha_k x_k\Big| &= \Big|\sum_k\Big(\sum_n a_{mn}b_{n+p,k}-\alpha_k\Big)(x_k-l)\Big| \\
&\leq \sum_{k=1}^{N}\Big|\sum_n a_{mn}b_{n+p,k}-\alpha_k\Big||x_k-l|+ \\
&\quad +\sum_{k>N}\Big|\sum_n a_{mn}b_{n+p,k}-\alpha_k\Big||x_k-l| \\
&\leq \|x\|\sum_{k=1}^{N}\Big|\sum_n a_{mn}b_{n+p,k}-\alpha_k\Big| \\
&\quad +\frac{\epsilon}{2\|A\|\|B\|+M}\Big(\sum_k\sum_n|a_{mn}||b_{n+p,k}| \\
&\quad +\sum_k|\alpha_k|\Big) \\
&\leq \|x\|\sum_{k=1}^{N}\Big|\sum_n a_{mn}b_{n+p,k}-\alpha_k\Big|+ \\
&\quad +\frac{\epsilon}{2\|A\|\|B\|+M}2(\|A\|\|B\|+M) \\
&= \|x\|\sum_{k=1}^{N}\Big|\sum_n a_{mn}b_{n+p,k}-\alpha_k\Big|+\epsilon
\end{aligned}
$$

eşitsizliğinde hipotez dikkate alınarak $m \longrightarrow \infty$ için limit alınırsa p' ye göre düzgün olarak

$$\lim_m\sum_n\sum_k a_{mn}b_{n+p,k}(x_k-l)=\sum_k\alpha_k(x_k-l)$$

bulunur. Böylece; (2.1.7)' de (2.1.6) dikkate alınarak $m \longrightarrow \infty$ için limit alındığında p' ye göre düzgün olarak

$$\lim_m\sum_n\sum_k a_{mn}b_{n+p,k}x_k=\sum_k\alpha_k x_k+l\Big(\alpha-\sum_k\alpha_k\Big)$$

elde edilir. Bu ise $F_A-\lim B_n(x)=\sum_k\alpha_k x_k+l\big(\alpha-\sum_k\alpha_k\big)$ olmasıdır. □

Teorem 2.1.4' ün özel bir sonucu olarak $(c,(F_A))_{reg}$ sınıfının kararterizasyonuna aşağıdaki gibi ulaşılır:

Teorem 2.1.5. $\|A\| < \infty$ *olsun.* $B \in (c, (F_A))_{reg}$ *olmasının gerek ve yeter şartı; (2.1.3) ile birlikte (2.1.4)' ün her bir* $k \in \mathbb{N}$ *alındığında* $\alpha_k = 0$ *ve (2.1.6)' nın* $\alpha = 1$ *için sağlanmasıdır.*

Şimdi V_σ' nın elemanlarını (F_A) uzayına taşıyan matrisleri karakterize edelim.

Teorem 2.1.6. $\|A\| < \infty$ *olsun.* $B \in (V_\sigma, (F_A))$ *olması için gerek ve yeter şart (2.1.3) ve (2.1.6) ile birlikte* $B(T - I) \in (m, (F_A))$ *olmasıdır (Burada* $T : m \longrightarrow m, Tx = (Tx_n) = (x_{\sigma(n)})$ *ile tanımlı sınırlı bir dönüşümdür).*

İspat. (Gereklilik): $B \in (V_\sigma, (F_A))$ olsun. Bu durumda; $c \subset V_\sigma$ olduğundan, Teorem 2.1.4' den (2.1.3) ve (2.1.6) elde edilir. Ayrıca; her $x \in m$ için $(Tx - x) \in V_{0\sigma}$ [20] olduğundan, $B(Tx - x) = B(T - I)x \in F_A$' dır. Bu ise $B(T - I) \in (m, (F_A))$ olmasıdır.

(Yeterlilik): $x \in V_\sigma$ alalım ve $\sigma-\lim x = s$ olsun. Bu durumda; $x = (Tx - x) + se$ yazılabildiğinden [20]

$$Bx = B(Tx - x) + sB(e) = B(T - I)x + s\sum_k b_{nk} \tag{2.1.8}$$

olur. Hipotez dikkate alınarak (2.1.8)' de $F_A - \lim$ alındığında, $Bx \in (F_A)$ bulunur. Bu da $B \in (V_\sigma, (F_A))$ olmasıdır. □

$(V_\sigma, (F_A))$ sınıfının bir alt sınıfı olan $(V_\sigma, (F_A))_{reg}$' in karakterizasyonu da şu şekilde verilir: :

Teorem 2.1.7. $\|A\| < \infty$ *olsun.* $B \in (V_\sigma, (F_A))_{reg}$ *olmasının gerek ve yeter şartı (2.1.3),* $\alpha = 1$ *için (2.1.6) ile birlikte* $B(T - I) \in (m, (F_A)_0)$ *olmasıdır.*

$\sigma(n) = n + 1$ özel seçiminde Teorem 2.1.6 ve Teorem 2.1.7 aşağıdaki sonuçlara indirgenir.

Teorem 2.1.8. $\|A\| < \infty$ *olsun.* $B \in (F, (F_A))$ *olması için gerek ve yeter şart (2.1.3) ve (2.1.6) ile birlikte* $B(S - I) \in (m, (F_A))$ *olmasıdır, (Burada* $S : m \longrightarrow m, S(x) = S((x_n)) = x_{n+1}$ *ile tanımlı kaydırma operatörüdür).*

Teorem 2.1.9. $\|A\| < \infty$ *olsun.* $B \in (F, (F_A))_{reg}$ *olmasının gerek ve yeter şartlar (2.1.3),* $\alpha = 1$ *için (2.1.6) ile birlikte* $S(T - I) \in (m, (F_A)_0)$ *olmasıdır.*

2.2 F_A-Çekirdek

Bu kısımda; sınırlı bir dizi için F_A-çekirdek diye adlandırdığımız, yeni bir çekirdek kavramı tanıtıldı. Ayrıca; F_A-çekirdek ile daha önceden bilinen K, B ve σ-çekirdek arasındaki ilişki incelendi.

$S(x) = \limsup_n \sup_p \sum_k a_{nk} x_{k+p}$ olmak üzere (F_A) uzayı, $S(x) = -S(-x)$ olacak şekildeki sınırlı dizilerin cümlesi olarak da karakterize edildi, [16]. Burada $-S(-x) = \liminf_n \sup_p \sum_k a_{nk} x_{k+p}$' dir.

Bu karakterizasyon ve K, B ve σ-çekirdek tanımları dikkate alındığında, sınırlı bir dizinin F_A-çekirdeği aşağıdaki gibi tanımlanabilir:

Tanım 2.2.1. Sınırlı bir x dizisinin F_A-çekirdeği

$$F_A - \text{çek}(x) = [-S(-x), S(x)]$$

kapalı aralığıdır.

$x \in m$' nin F_A-çekirdeği kısaca F_A-çek(x) ile gösterilir. Tanıma gore; F_A-çek$(x) = \{l\}$ olması için gerek ve yeter şart $-S(-x) = S(x) = l$, yani $x \in (F_A)$ olmasıdır.

A yerine $(C,1)$ matrisi alınırsa, F_A-çekirdek tanımı Das [4] tarafından tanıtılan B-çekirdek tanımına indirgenir.

Teorem 2.2.1. *Eğer $x, y \in m$ için $F_A - \lim |x-y| = 0$ ise, F_A-çek$(x) = F_A$-çek(y)' dir.*

İspat. $S(x) = S(y)$ olduğunu göstermek ispat için yeterlidir. $F_A - \lim |x-y| = 0$ olduğundan, $F_A - \lim(x-y) = 0$ ve $F_A - \lim(-(x-y)) = 0$' dır. Bu durumda; (F_A)' nın tanımından, $S(x-y) = -S(-(x-y)) = 0$ olur. S' nin alt lineerliği kullanılırsa,

$$0 = -S(-x+y) \leq -S(-x) - S(y) \Rightarrow S(y) \leq -S(-x)$$

bulunur. Her zaman $-S(-x) \leq S(x)$ sağlandığından $S(y) \leq S(x)$ elde edilir.

Benzer olarak $S(x) \leq S(y)$ olduğu da gösterilebilir. Böylece $S(y) = S(x)$ bulunur. □

Teorem 2.2.2. *Eğer A matrisi regüler ise, her $x \in m$ için B-çek$(x) \subseteq F_A$-çek(x) olur.*

İspat. A regüler olduğundan, Lemma 2.1.1'den $(F_A) \subset F$ 'dir. Bu durumda; F ve (F_A) uzaylarının tanımı gereğince her $x \in m$ için $L^*(x) \leq S(x)$ olmak zorundadır. Aksi halde; yani her $x \in m$ için $L^*(x) > S(x)$ ise, $(F_A) \subset F$ olmasına çelişki bulunur. Böylece B-çek$(x) \subseteq F_A$-çek(x) elde edilir. □

Teorem 2.2.3. *Eğer A regüler ise, her $x \in m$ için F_A-çek$(x) \subseteq K$-çek(x) olur.*

İspat. A regüler olduğundan Teorem 2.1.2' den $c \subset (F_A)$' dır. Bu durumda; c ve (F_A) uzaylarının tanımından her $x \in m$ için $S(x) \leq L(x)$ olmalıdır. Aksi halde; yani $L(x) > S(x)$ ise $c \subset (F_A)$ olmasıyla çelişki bulunur. Böylece F_A-çek$(x) \subseteq K$-çek(x) elde edilir. □

Teorem 2.2.4. *Eğer A matrisi kuvvetli regüler ise, her $x \in m$ için F_A-çek$(x) = B$-çek(x) olur.*

İspat. A matrisi kuvvetli regüler olduğundan Lemma 2.1.2' den $(F_A) = F$' dir. Böylece F ve (F_A) uzaylarının tanımından F_A-çek$(x) = B$-çek(x) elde edilir. □

Teorem 2.2.5. *Eğer $A \in (V_\sigma, c)_{reg}$ ise, her $x \in m$ için F_A-çek$(x) \subseteq \sigma$-çek(x) olur.*

İspat. $A \in (V_\sigma, c)_{reg}$ olduğundan Teorem 2.1.2' ye göre $V_\sigma \subset (F_A)$' dır. V_σ ve (F_A) uzaylarının tanımından her $x \in m$ için $S(x) \leq q_\sigma(x)$ olmak zorundadır. Aksi halde; yani $q_\sigma(x) > S(x)$ ise, $V_\sigma \subset (F_A)$ olmasıyla çelişir. Bu ise, her $x \in m$ için F_A-çek$(x) \subseteq \sigma$-çek(x) olmasıdır. □

Bölüm 3

ÇEKİRDEK TEOREMLERİ

3.1 Sonsuz Matrisler İçin Çekirdek Teoremleri

Bu kısımda; sınırlı bir x dizisinin K, B ve σ-çekirdeği ile x' in Bx dönüşüm dizisinin F_A-çekirdeği arasındaki ilişkiyi inceleyen teoremler verildi. Bu teoremlerde A matrisi yerine özel olarak $(C,1)$ matrisi alınırsa sırasıyla $L^*(Bx) \leq L(x)$ [18], $L^*(Bx) \leq q_\sigma(x)$ [2] ve $L^*(Bx) \leq L^*(x)$ [18] eşitsizliklerine ulaşılır.

Önce, sonuçlarımızda kullanacağımız ve [4]' te yer alan bir lemmayı verelim.

Lemma 3.1.1. *$\mathcal{B} = (b_{nk}(i))$ bir matris dizisi olsun. Eğer $\|\mathcal{B}\| < \infty$ ve $\lim_n \sup_i |b_{nk}(i)| = 0$ ise,*

$$\lim_n \sup \sup_i \sum_k b_{nk}(i) y_k = \lim_n \sup \sup_i \sum_k |b_{nk}(i)| \tag{3.1.1}$$

ve $\|y\| \leq 1$ olacak şekilde en az bir $y \in m$ vardır.

Teorem 3.1.1. *$\|A\| < \infty$ ve $B \in (c,(F_A))_{reg}$ olsun. Bu durumda; her $x \in m$ alındığında F_A-çek$(Bx) \subseteq K$-çek(x) olmasının gerek ve yeter şartı*

$$\lim_m \sup_p \sum_k \Big| \sum_n a_{mn} b_{n+p,k} \Big| = 1, \tag{3.1.2}$$

dır.

İspat. (Gereklilik): $\forall x \in m$ için F_A-çek$(Bx) \subseteq K$-çek(x) olsun. Bu durumda; $\forall x \in m$ için $S(Bx) \leq L(x)$' dir. Eğer her n için,

$$c_{mk}(p) = \sum_n a_{mn} b_{n+p,k}$$

olmak üzere $\mathcal{C} = (c_{mk}(p))$ alınırsa, $\mathcal{C}$ matrisi Lemma 3.1.1' in şartlarını sağlar. Böylece; hipotez de dikkate alındığında,

$$\begin{aligned} 1 \leq \liminf_m \sup_p \sum_k |c_{mk}(p)| &\leq \limsup_m \sup_p \sum_k |c_{mk}(p)| \\ &= \limsup_m \sup_p \sum_k c_{mk}(p) y_k \\ &= S(\mathcal{B}y) \\ &\leq L(y) \\ &\leq \|y\| \\ &\leq 1, \end{aligned}$$

bulunur. Buradan (3.1.2) elde edilir.

(Yeterlilik): (3.1.2) sağlansın. Herhangi bir $x \in m$ için, $\epsilon > 0$ verildiğinde ve $k > k_0$ olduğunda $x_k < L(x) + \epsilon$ olacak şekilde bir $k_0 \in \mathbb{N}$ vardır.

$\lambda \in \mathbb{R}$ için $\lambda^+ = \text{maks}\{0, \lambda\}$ ve $\lambda^- = \text{maks}\{-\lambda, 0\}$ olmak üzere

$$\begin{aligned} \sum_k c_{mk}(p) x_k &= \sum_{k<k_0} c_{mk}(p) x_k + \sum_{k \geq k_0} (c_{mk}(p))^+ x_k - \sum_{k \geq k_0} (c_{mk}(p))^- x_k \\ &\leq \|x\| \sum_{k<k_0} |c_{mk}(p)| + (L(x) + \epsilon) \sum_k |c_{mk}(p)| + \|x\| \sum_k (|c_{mk}(p)| - c_{mk}(p) \end{aligned}$$

yazılabilir. Hipotez dikkate alınarak yukarıdaki eşitsizliğe $\limsup_m \sup_p$ operatörü uygulanırsa

$$S(Bx) \leq L(x) + \epsilon$$

elde edilir. ϵ keyfi olduğundan, $S(Bx) \leq L(x)$ bulunur. Bu ise; $\forall x \in m$ için F_A-çek$(Bx) \subseteq K$-çek(x) olmasıdır.

Teorem 3.1.2. *$\|A\| < \infty$ ve $B \in (V_\sigma, (F_A))_{reg}$ olsun. Bu durumda; her $x \in m$ alındığında F_A-çek$(Bx) \subseteq \sigma$-çek(x) olmasının gerek ve yeter şartı (3.1.2)' nin sağlanmasıdır.*

İspat. (Gereklilik): $\forall x \in m$ için F_A-çek$(Bx) \subseteq \sigma$-çek(x) sağlansın. Bu; $\forall x \in m$ için, $S(Bx) \leq q_\sigma(x)$ olmasıdır. Bu durumda; her $x \in m$ için, $q_\sigma(x) \leq L(x)$ olduğundan $S(Bx) \leq L(x)$' dir. Böylece; Teorem 3.1.1' den (3.1.2) elde edilir.

(Yeterlilik): (3.1.2) sağlansın. Bu durumda; Teorem 3.1.1' den $S(Bx) \leq L(x)$' dir. Çünkü $c \subset V_\sigma$ olduğundan, $B \in (c, (F_A))_{reg}$' dir. Şimdi

$$\inf_{z \in V_{0\sigma}} S(Bx + Bz) \leq \inf_{z \in V_{0\sigma}} L(x + z) = W(x) \tag{3.1.3}$$

yazılabilir. Diğer taraftan $\inf_{z \in V_{0\sigma}} S(Bz) = 0$ olduğundan,

$$\inf_{z \in V_{0\sigma}} S(Bx + Bz) \geq S(Bx) + \inf_{z \in V_{0\sigma}} S(Bz) = S(Bx)$$

dir. Bu (3.1.3) ile birleştirilirse

$$S(Bx) \leq W(x)$$

elde edilir. Her $x \in m$ için $W(x) = q_\sigma(x)$ [14] olduğundan $S(Bx) \leq W(x)$ bulunur. Böylece; her $x \in m$ için F_A-çek$(Bx) \subseteq \sigma$-çek(x)' dir. □

$\sigma(n) = n + 1$ özel halinde Teorem 3.1.2' den aşağıdaki sonuç elde edilir:

Teorem 3.1.3. *$\|A\| < \infty$ ve $B \in (F, (F_A))_{reg}$ olsun. Bu durumda; her $x \in m$ alındığında F_A-çek$(Bx) \subseteq B$- çek(x) olmasının gerek ve yeter şartı (3.1.2)' nin sağlanmasıdır.*

3.2 Riesz Matrisi İçin Çekirdek Teoremleri

Sınırlı bir x dizisinin A ve $(C,1)$ dönüşümünün Knopp çekirdeği arasındaki ilişki [5]' de Davydov tarafından verildi. Bu kısımda; $(C,1)$ yerine R Riesz matrisi alınarak Davydov' un sonucu genelleştirildi. Ayrıca $x \in m$ için Bx dönüşüm dizisinin F_A-çekirdeği ile Rx dönüşüm dizisinin sırasıyla K, σ ve B-çekirdekleri arasındaki ilişki incelendi.

Tanımdan Riesz matrisi pozitif terimli ve $Q_n \longrightarrow \infty$ için regüler olduğundan ([19], s.10), Knopp çekirdek teoremine göre her $x \in m$ alındığında $L(Rx) \leq L(x)$ sağlanır. Buna göre; aşağıdaki teoremleri verebiliriz.

Teorem 3.2.1. *R matrisi regüler olsun. Herhangibir regüler A matrisi verildiğinde her $x \in m$ için K-çek$(Ax) \subseteq K$-çek(Rx) olmasının gerek ve yeter şartı*

$$\text{Her } n \text{ için } \lim_k \frac{a_{nk}}{q_k} = 0 \tag{3.2.1}$$

ve

$$\lim_n \sum_k \left| \frac{a_{nk}}{q_k} - \frac{a_{n,k+1}}{q_{k+1}} \right| Q_k = 1, \tag{3.2.2}$$

sağlanmasıdır.

İspat. $y_n = \sum_k a_{nk} x_k$ ve $t_n = \sum_{k=1}^{n} r_{nk} x_k$ olsun. Bu durumda;

$$x_k = \frac{Q_k t_k - Q_{k-1} t_{k-1}}{q_k}$$

olacağından,

$$y_n = \sum_k a_{nk} \left(\frac{Q_k t_k - Q_{k-1} t_{k-1}}{q_k} \right) \tag{3.2.3}$$

elde edilir.

(Gereklilik): Her $x \in m$ için K-çek$(Ax) \subseteq K$-çek(Rx) ise $L(Ax) \leq L(Rx)$' dir. Diğer taraftan her $x \in m$ için $L(Rx) \leq L(x)$ olduğundan $L(Ax) \leq L(x)$ bulunur.

Şimdi; $\lim_k \epsilon_k = 0$ olmak üzere (t_k) dizisi $k \in \mathbb{N}$ için $t_k = (-1)^k \epsilon_k$ şeklinde seçilirse $\lim_k t_k = 0$' dır. Buna göre; (3.2.3)' daki seri yakınsak olacağından her n için

$$\lim_k (-1)^k a_{nk} \frac{Q_k \epsilon_k + Q_{k-1}\epsilon_{k-1}}{q_k} = 0$$

ve dolayısıyla

$$\lim_k a_{nk} \frac{Q_k}{q_k} \epsilon_k = 0$$

bulunur. (ϵ_k) keyfi bir sıfır dizisi olduğundan, $(\frac{a_{nk}Q_k}{q_k})$ dizisi sınırlı olmak zorundadır. R' nin regülerliği dolayısıyla $\lim_k Q_k = \infty$ olduğundan, her n için

$$\lim_k \frac{a_{nk}}{q_k} = 0$$

sağlanmalıdır. Bu ise (3.2.1)' ün gerekliliğini verir.

(3.2.2)' in gerekliliğini göstermek için,

$$\sum_{k=1}^{m} a_{nk} \left(\frac{Q_k t_k - Q_{k-1} t_{k-1}}{q_k}\right) = \sum_{k=1}^{m-1} \left(\frac{a_{nk}}{q_k} - \frac{a_{n,k+1}}{q_{k+1}}\right) Q_k t_k + \frac{a_{nm} Q_m}{q_m} t_m$$

yazalım. Burada (3.2.1) dikkate alınarak $m \longrightarrow \infty$ için limit alınırsa

$$\sum_k a_{nk} \left(\frac{Q_k t_k - Q_{k-1} t_{k-1}}{q_k}\right) = \sum_k \left(\frac{a_{nk}}{q_k} - \frac{a_{n,k+1}}{q_{k+1}}\right) Q_k t_k \tag{3.2.4}$$

elde edilir. Böylece hipotez ve Knopp çekirdek teoremi birlikte kullanıldığında, her n, k için

$$b_{nk} = \left(\frac{a_{nk}}{q_k} - \frac{a_{n,k+1}}{q_{k+1}}\right) Q_k \tag{3.2.5}$$

ile tanımlı $B = (b_{nk})$ matrisinin (3.2.2)' i sağlayacağı görülür.

(Yeterlilik): Şartlar sağlansın. Bu durumda; (3.2.5) ile tanımlı B matrisi regüler olacağından ([19],s.10), Knoop çekirdek teoremine göre $L(y_n) \leq L(t_n)$ elde edilir. Bu ise her $x \in m$ için $L(Ax) \leq L(Rx)$ olmasıdır. □

Her n için $q_n = 1$ alınırsa, Riesz matrisi $(C, 1)$ Cesaro matrisine indirgendiğinden aşağıdaki sonuç elde edilir:

Teorem 3.2.2. *$C = (C, 1)$ ve A herhangibir regüler matris olsun. Bu durumda; her $x \in m$ için $L(Ax) \leq L(Cx)$ sağlanmasının gerek ve yeter şartı*

$$\lim_{n} \sum_{k} k|a_{nk} - a_{n,k+1}| = 1,$$

olmasıdır.

Teorem 3.2.3. *$B \in (c, (F_A))_{reg}$ ve R matrisi regüler olsun. Bu durumda; her $x \in m$ için F_A-çek$(Bx) \subseteq K$-çek(Rx) sağlanmasının gerek ve yeter şartı (3.2.1) ile birlikte*

$$\lim_{m} \sup_{p} \sum_{k} |\sum_{n} a_{mn}(\frac{b_{n+p,k}}{q_k} - \frac{b_{n+p,k+1}}{q_{k+1}})|Q_k = 1, \tag{3.2.6}$$

sağlanmasıdır.

İspat. (Gereklilik): F_A-çek$(Bx) \subseteq K$-çek(Rx) ise her $x \in m$ için $S(Bx) \leq L(Rx)$' dir. Bu durumda; (3.2.1)' ün gerekliliği Teorem 3.2.1' deki gibi gösterilebilir. Ayrıca; $D = (d_{nk})$ matrisi her n, k için

$$d_{nk} = (\frac{b_{nk}}{q_k} - \frac{b_{n,k+1}}{q_{k+1}})Q_k \tag{3.2.7}$$

ile tanımlı olmak üzere, D' nin (3.2.6)' yı sağladığı Teorem 3.1.1 kullanılarak görülebilir.

(Yeterlilik): Şartlar sağlansın. $B \in (c, (F_A))_{reg}$ olduğundan D, (3.2.7) ile tanımlı olmak üzere $D \in (c, (F_A))_{reg}$ olduğu kolayca görülebilir. Böylece; Teorem 3.1.1' den $S(y_n) \leq L(t_n)$ elde edilir. Bu ise, her $x \in m$ için F_A-çek$(Bx) \subseteq K$-çek(Rx) olmasıdır. □

Bu teoremden aşağıdaki sonuç elde edilir:

Teorem 3.2.4. *$C = (C,1)$ ve $B \in (c,(F_A))_{reg}$ olsun. Bu durumda; her $x \in m$ alındığında F_A-çek$(Bx) \subseteq K$-çek(Cx) olmasının gerek ve yeter şartı*

$$\lim_m \sum_k k \Big| \sum_n a_{mn}(b_{n+p,k} - b_{n+p,k+1}) \Big| = 1, \tag{3.2.8}$$

sağlanmasıdır.

Teorem 3.2.5. *R regüler ve $B \in (V_\sigma,(F_A))_{reg}$ olsun. Bu durumda; her $x \in m$ için F_A-çek$(Bx) \subseteq \sigma$-çek(Rx) olmasının gerek ve yeter şartı (3.2.1) ve (3.2.6)' nın sağlanmasıdır.*

İspat. Teorem 3.1.2 kullanılarak Teorem 3.2.3' deki gibi ispat yapılabilir. □

Bu teoremden aşağıdaki sonuçlar elde edilir:

Teorem 3.2.6. *$C = (C,1)$ ve $B \in (V_\sigma,(F_A))_{reg}$ olsun. Bu durumda; her $x \in m$ için F_A-çek$(Bx) \subseteq \sigma$-çek(Cx) olmasının gerek ve yeter şartı (3.2.8)' in sağlanmasıdır.*

Teorem 3.2.7. *R regüler ve $B \in (F,(F_A))_{reg}$ olsun. Bu durumda; her $x \in m$ için F_A-çek$(Bx) \subseteq B$-çek(Rx) olmasının gerek ve yeter şartı (3.2.1) ve (3.2.6)' nın sağlanmasıdır.*

Teorem 3.2.8. *$C = (C,1)$ ve $B \in (F,(F_A))_{reg}$ olsun. Bu durumda; her $x \in m$ için F_A-çek$(Bx) \subseteq B$-çek(Cx) olmasının gerek ve yeter şartı (3.2.8)' in sağlanmasıdır.*

Kaynaklar

[1] R.G., COOKE, *Infinite matrices and sequence spaces*, Macmillan, 1950.

[2] H., ÇOŞKUN/C.,ÇAKAN, *Infinite matrices and σ-core*, Demonstratio Math. 4 vol.34 (2001) (çıkacak)

[3] H., ÇOŞKUN, *Invariant means and dual summability methods*, (yazışma safhasında)

[4] G., DAS, *Sublinear functionals and a class of conservative matrices*, Bull. Inst. Math. Acad. Sinica, 15(1987)89-106.

[5] N. A. DAVYDOV, *Inclusion of kernels of sequences, given with the help of regular matrices*, Ukrainskii Math. Zhurnal, vol. 21, no. 4 (1979) 421-425.

[6] S. L., DEVI, *Banach limits and infinite matrices*, J. London Math. Soc., 12 (1976)397-401.

[7] J. E., DURAN, *Infinite matrices and almost convergence*, Math. Zeit., 128(1972)75-83.

[8] J. P., KING, *Almost summable sequences*, Proc. Amer. Math. Soc., 26(1972)75-83.

[9] G. G., LORENTZ, *A contribution to the theory of divergent sequences*, Acta Math., 80(1948)167-190.

[10] I. J., MADDOX, *Elements of functional analysis*, Cambridge University, (1970).

[11] I. J., MADDOX, *Some analogues of Knopp's core theorem*, Internat. J. Math.and Math. Sci., vol. 2 No.4(1979)605-614.

[12] I. J., MADDOX, *On strong almost convergence*, Math. Proc. Camb. Phill. Soc., 85(1979).

[13] I. J., MADDOX, *A new type of convergence*, Math. Proc. Camb. Phill. Soc., 83(1978).

[14] S. L., MISHRA/B., SATAPATHY/N., RATH, *Invariant means and σ-core*, J. Indian Math. Soc., 60(1994)151-158.

[15] MURSALEEN, *On some new invariant matrix methods of summability*, Quart. J. Math. Oxford, 2,34(1983), 77-86.

[16] MURSALEEN/Q.A., KHAN, *Strong F_A-summability*, Tamkang J. of Math., 24,2,(1993).

[17] MURSALEEN/ A. K., GAUR/ T. A., GHISTI, *On some new sequence spaces of invariant means*, Acta Math. Hungar., 75(3)(1997).

[18] C., ORHAN, *Sublinear functionals and Knopp's core theorem*, Internat. J. Math. and Math. Sci., 3(1990)461-468.

[19] G.M., PETERSEN, *Regular matrix transformation*, Mc.Graw-Hill(1966).

[20] R., RAIMI, *Invariant means and invariant matrix methods of summability*, Duke Math. J. 30(1963), 81-94.

[21] P., SCHAEFER, *Infinite matrices and invariant means*, Proc. Of The Amer. Math. Soc., 36(1972)104-110.

[22] S., SIMONS, *Banach limits, infinite matrices and sublinear functionals*, J. Math. Anal. and Apply., 26(1969)640-655.

ÖZGEÇMİŞ

1974 yılında Malatya' nın Kale ilçesi Tepebaşı Köyü' nde doğdu. İlk ve orta okulu burada bitirdikten sonra liseyi, merkez Hacı Ahmet Akıncı Lisesi' nde okudu. 1991 yılında İnönü Üniversitesi Eğitim Fakültesi Matematik Eğitimi Bölümü' nü kazandı ve 1995 yılında bu bölümden mezun oldu. Aynı yıl aynı bölümde araştırma görevlisi olarak çalışmaya ve İnönü Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü' nde yüksek lisans eğitimine başladı. 1997 yılında yüksek lisans eğitimini tamamladı.

Evli ve bir çocuk babasıdır.

YAYINLARI

1. C. ÇAKAN / H. ÇOŞKUN, *Konservatif matrisler ve σ-çekirdek*, F. Ü. Fen ve Müh. Bilimleri Dergisi 11(3), 1999, 187-192.

2. H. ÇOŞKUN / C. ÇAKAN, *σ-core theorems for real bounded sequences*, Far East J. Math. Sci.(FJMS) 2 (1) (2000), 79-86.

3. H. ÇOŞKUN / C. ÇAKAN, *Infinite matrices and σ-core*, Demonstratio Math. No 4 Vol. 34 (2001) (çıkacak)

4. H. ÇOŞKUN / C. ÇAKAN, *Core theorems for multiplicative matrices*, (yazışma safhasında).

5. H. ÇOŞKUN / C. ÇAKAN / MURSALEEN, *On the statistical and σ-cores*, (yazışma safhasında).