T.C.
İNÖNÜ ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

İZOMORFİK DİZİ UZAYLARI VE SONSUZ MATRİSLER

CAFER AYDIN

DOKTORA TEZİ
MATEMATİK ANABİLİM DALI

MALATYA
Kasım 2002

FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ MÜDÜRLÜĞÜNE

İş bu tez çalışması Matematik Anabilim Dalı'nda doktora tezi olarak kabul edilmiştir.

Prof. Dr. Rifat ÇOLAK
Başkan

Prof. Dr. İhsan SOLAK
Üye

Prof. Dr. Feyzi BAŞAR
Üye

Prof. Dr. Eyüphan YAKINCI
Üye

Yrd. Doç. Dr. Hüsamettin ÇOŞKUN
Üye

ONAY

Yukarıdaki imzaların adı geçen öğretim üyelerine ait olduğunu onaylarım.

Doç. Dr. Özfer YEŞİLADA

Enstitü Müdürü V.
15./ 11 /2002

ÖZET

Doktora Tezi

İZOMORFİK DİZİ UZAYLARI VE SONSUZ MATRİSLER

Cafer Aydın

İnönü Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Anabilim Dalı

47+vi sayfa

2002

Danışman: Prof. Dr. Feyzi Başar

Dört bölümden oluşan bu çalışmada a_p^r dizi uzayı tanımlanarak bu uzayın bazı özellikleri incelenmiştir.

Birinci bölümde, daha sonraki bölümlerde kullanılacak olan bazı temel tanım ve teoremler verildi.

İkinci bölümde, izomorfik uzaylar hakkında bilgi verildi. Bazı dizi uzayları arasındaki izomorfizmler verilerek, β-dualleri incelendi.

Üçüncü bölümde; a_p^r dizi uzayı tanımlanıp, bu uzayın Banach uzayı olduğu gösterildi ve Schauder tabanı verildi. Ayrıca a_p^r uzayı ile diğer bazı dizi uzayları arasındaki kapsama bağıntıları incelendi ve bu uzayın α-, β- ve γ-dualleri bulundu.

Son bölümde ise önce yeni çeşit metod ikilileri hakkında bilgi verildi. Daha sonra da sonsuz matrislerin $(a_p^r : \ell_\infty)$, $(a_p^r : c)$, $(a_p^r : bs)$, $(a_p^r : c_0)$, $(a_p^r : cs)$, $(a_p^r : e_\infty^r)$, $(a_p^r : r_\infty^t)$, $(a_p^r : r_c^t)$, $(a_p^r : \ell_\infty(\triangle))$ ve $(a_p^r : c(\triangle))$ sınıfları karakterize edildi.

ANAHTAR KELİMELER: Dizi uzayı, izomorfizm, dual uzaylar, matris dönüşümleri

ABSTRACT

Ph.D. Thesis

ISOMORPHIC SEQUENCE SPACES AND INFINITE MATRICES

Cafer Aydın

İnönü University
Graduate School of Natural and Applied Sciences
Department of Mathematics

47+vi pages

2002

Supervisor: Prof. Dr. Feyzi Başar

In this study, we define the sequence space a_p^r and also examine some properties of this sequence space.

In the first chapter, the fundamental definitions and theorems were given which are needed in the next chapters.

In the second chapter, we give the definition of isomorphic spaces and determine the β-duals of some such spaces.

In the third chapter, we introduce the sequence space a_p^r and show that this sequence space is a Banach space. We also give the Schauder basis, inclusion theorems and the α-, β- and γ-duals of this sequence space.

In the last chapter, we defined the dual methods of the new type and characterize the matrix classes $(a_p^r : \ell_\infty)$, $(a_p^r : c)$, $(a_p^r : bs)$, $(a_p^r : c_0)$, $(a_p^r : cs)$, $(a_p^r : e_\infty^r)$, $(a_p^r : r_\infty^t)$, $(a_p^r : r_c^t)$, $(a_p^r : \ell_\infty(\triangle))$ and $(a_p^r : c(\triangle))$.

KEYWORDS: Sequence spaces, isomorphism, dual spaces, matrix transformations

TEŞEKKÜR

Bana bu tez konusunu veren ve çalışmanın düzenli bir şekilde yürütülmesinde gerekli maddi, manevi imkânları hiç bir zaman esirgemeyen, hep yakın ilgi ve alâkalarını gördüğüm kıymetli hocam Sayın Prof. Dr. Feyzi BAŞAR'a minnet ve şükranlarımı sunarım.

Gerek döküman temininde ve gerekse kendisine ihtiyaç duyduğum her konuda daima yardımcı olan değerli arkadaşım Sayın Dr. Bilâl ALTAY'a teşekkür etmeyi bir borç bilirim.

Cafer AYDIN

İçindekiler

GÖSTERİMLER

$\mathbb{C}$	:	Kompleks sayılar cümlesi
$\mathbb{N}$	:	Doğal sayılar cümlesi
$\mathbb{R}$	:	Reel sayılar cümlesi
w	:	Kompleks terimli bütün dizilerin uzayı
ℓ_∞	:	Kompleks terimli sınırlı dizilerin uzayı
c	:	Kompleks terimli yakınsak dizilerin uzayı
c_0	:	Kompleks terimli sıfıra yakınsak dizilerin uzayı
ℓ_p	:	p.kuvvetten mutlak yakınsak seri teşkil eden dizilerin uzayı
bs	:	Kısmî toplamları sınırlı olan bütün kompleks terimli serilerin uzayı
cs	:	Kısmî toplamları yakınsak olan bütün kompleks terimli serilerin uzayı
X_p	:	Cesàro toplanabilen p.kuvvetten mutlak yakınsak seri teşkil eden dizilerin uzayı
$\mathcal{F}$	:	Doğal sayılar cümlesinin bütün sonlu alt cümlelerinin ailesi
λ^α	:	λ dizi uzayının α-duali
λ^β	:	λ dizi uzayının β-duali
λ^γ	:	λ dizi uzayının γ-duali
$\triangle(a_{nk})$	:	$a_{nk} - a_{n,k+1}$
$a(n,k)$	:	$\sum_{j=0}^{n} a_{jk}$
$\triangle a(n,k)$	:	$a(n,k) - a(n,k+1)$
$\tilde{a}_{nk}$	:	$\left(\frac{a_{nk}}{1+r^k} - \frac{a_{n,k+1}}{1+r^{k+1}}\right)(k+1)$

GİRİŞ

Bütün kompleks terimli dizilerin uzayını w ile gösterelim. w uzayının herhangi bir alt uzayı, bir dizi uzayı olarak adlandırılır. Toplanabilme teorisinde genel olarak dizi uzayları ile ilgili problemler incelenir.

Toplanabilme teorisinde dizi uzayları ile ilgili olarak yapılan nitelikli çalışmalar;

(a) Yeni bir dizi uzayı inşa etmek,

(b) Bu uzayın, üzerinde tanımlanan bir norm veya paranormla tamlığını göstermek,

(c) Bu uzayla, bilinen dizi uzayları arasındaki kapsama bağıntılarını incelemek,

(d) Varsa uzayın Schauder tabanını belirlemek,

(e) Uzayın α-, β- ve γ-duallerini hesaplamak,

(f) Bu uzaydan, bilinen dizi uzaylarına ve bilinen uzaylardan, bu uzaya matris dönüşümlerini karakterize etmek

gibi problemlerin bir veya birkaçını ele alarak çözüme kavuşturur.

λ bir dizi uzayı ve $A = (a_{nk})$ reel terimli bir sonsuz matris olmak üzere, $x = (x_k) \in \lambda$ için $(Ax)_n = \sum_{k=0}^{\infty} a_{nk}x_k$ $(n \in \mathbb{N})$ serileri yakınsak ise $Ax = ((Ax)_n)$ dizisine x dizisinin A-dönüşümü denir.

A-dönüşümü λ dizi uzayında yatan dizilerin

$$\lambda_A = \{x = (x_k) \in w : Ax \in \lambda\}$$

cümlesi, A matrisinin λ etki alanı olarak adlandırılır. λ_A cümlesi, dizilerin toplama ve skalarla çarpma işlemleriyle vektör uzayı teşkil ettiğinden bir dizi uzayıdır. Bu düşünce ile yeni dizi uzayları inşa etmek üzere birtakım çalışmalar yapıldı. 1978 yılında Ng ve Lee [13], 1.mertebeden Cesàro ortalamasının ℓ_p etki alanını kullanarak

X_p uzayını inşa etti ve bu uzayı inceledi. Aynı yıl Wang **[16]**, Nörlund ortalamasını kullanarak $(\ell_p)_{N_q}$, 1997 yılında Malkowsky **[12]**, Riezs ortalamasını kullanarak $(\ell_\infty)_{R^t} = r_\infty^t$, $c_{R^t} = r_c^t$ ve $(c_0)_{R^t} = r_0^t$ uzaylarını inşa ettiler. Bu uzayların, üzerinde tanımladıkları normla Banach uzayı olduklarını ve β-duallerini hesaplayarak, yeni dizi uzaylarından standart dizi uzaylarına bazı matris sınıflarını karakterize ettiler. Yukarıda adı geçen yazarlar genel olarak inşa ettikleri yeni dizi uzaylarının özelliklerini klâsik metodlarla incelediler. Fakat Altay, Başar ve Mursaleen **[1]**, $0 < r < 1$ olmak üzere r.mertebeden Euler ortalamasını kullanarak, inşa ettikleri $(\ell_p)_{E^r} = e_p^r$ dizi uzayının özelliklerini izomorfizm yardımıyla incelediler. Burada p, $1 < p < \infty$ alınmış, $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ olduğu kabul edilmiştir.

Bu tezin amacı, $0 < r < 1$ olmak üzere $A_r = (a_{nk}^r)$ matris ailesi yardımıyla ℓ_p dizi uzayına izomorf yeni bir dizi uzayı inşa etmek ve yukarıda ifade edilen problem türleri üzerine çalışmaktır.

BÖLÜM 1

TEMEL TANIM VE TEOREMLER

Bu bölümde, daha sonraki bölümlere hazırlık olması bakımından gerekli görülen tanım, teorem ve eşitsizliklere yer verildi.

Tanım 1.1. X boş olmayan bir cümle ve $\mathbb{C}$ kompleks sayıların cismi olsun.

$$+ : X \times X \longrightarrow X$$

ve

$$\cdot : \mathbb{C} \times X \longrightarrow X$$

olmak üzere eğer $x, y, z \in X$ ve $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ için;

L1) $x + y = y + x$,

L2) $(x + y) + z = x + (y + z)$,

L3) $x + \theta = x$ olacak şekilde bir $\theta \in X$ vardır,

L4) $x + (-x) = \theta$ olacak şekilde bir $-x \in X$ vardır,

L5) $1 \cdot x = x$,

L6) $\alpha(x + y) = \alpha x + \alpha y$,

L7) $(\alpha + \beta)x = \alpha x + \beta x$,

L8) $\alpha(\beta x) = (\alpha\beta)x$

şartları sağlanıyorsa, X cümlesine $\mathbb{C}$ cismi üzerinde bir lineer (vektör) uzay denir, [**11**, sf. 69].

X, $\mathbb{C}$ cismi üzerinde bir lineer uzay ve $Y \subset X$ olsun. Bu durumda; $x, y \in Y$ vektörleri ve $\alpha \in \mathbb{C}$ skaları için $\alpha x + y \in Y$ olması hâlinde Y, X uzayının bir alt uzayıdır denir.

Tanım 1.2. X bir lineer uzay ve $\|\cdot\|: X \to \mathbb{R}$ bir fonksiyon olsun. Eğer her $x, y \in X$ ve her α skaları için;

N1) $\| x \| = 0 \Leftrightarrow x = \theta$,

N2) $\| \alpha x \| = |\alpha| \, \| x \|$,

N3) $\| x + y \| \leq \| x \| + \| y \|$

şartları sağlanıyorsa, $\|\cdot\|$ fonksiyonuna X üzerinde bir norm ve $(X, \|\cdot\|)$ ikilisine de normlu uzay denir, [**11**, sf. 103].

Tanım 1.3. X bir lineer uzay olmak üzere $\|\cdot\|: X \to \mathbb{R}$ fonksiyonu ve $p > 0$ sayısı verilsin. Eğer her $x, y \in X$ ve her α skaları için;

PN1) $\| x \| = 0 \Leftrightarrow x = \theta$,

PN2) $\| \alpha x \| = |\alpha|^p \| x \|$,

PN3) $\| x + y \| \leq \| x \| + \| y \|$

şartları sağlanıyorsa X'e (veya $(X, \|\cdot\|, p)$ üçlüsüne) p-normlu uzay denir, [**11**, sf. 103].

Tanım 1.4. $(X, \|\cdot\|)$ normlu uzay ve (x_n) de bu uzayda bir dizi olsun. Bu durumda,

$$\| x_m - x_n \| \to 0, \quad (m, n \to \infty)$$

ise, (x_n) dizisine X uzayında bir Cauchy dizisi denir.

Eğer $(X, \|\cdot\|)$ normlu uzayı tam ise, yani bu uzaydaki her Cauchy dizisi bu uzayın bir noktasına yakınsıyorsa, bu normlu uzaya Banach uzayı adı verilir, [**11**, sf. 104].

Teorem 1.1. (Banach-Steinhaus Teoremi) *X Banach uzayından Y normlu uzayına sınırlı lineer dönüşümlerin bir dizisi (T_n) olsun. Eğer her $x \in X$ için*

$$\sup_n \| T_n(x) \| < \infty$$

ise o zaman $\sup_n \| T_n \| < \infty$. Yani, $(\| T_n \|)$ normlar dizisi sınırlıdır, [**11**, sf. 123].

Tanım 1.5. X bir normlu uzay olsun. Her $x \in X$ için

$$\| x - (\alpha_0 e_0 + \alpha_1 e_1 + \cdots + \alpha_n e_n) \| \to 0, \quad (n \to \infty)$$

olacak şekilde skalar cisimde birtek (α_n) dizisi mevcutsa bu durumda $(e_n) \subset X$ dizisi, X için bir Schauder tabandır (veya kısaca tabandır) denir, [**11**, sf. 98].

Tanım 1.6. λ bir dizi uzayı olsun. Bu durumda;

$$\lambda^\alpha = \{a = (a_k) \in w : \text{her } x \in \lambda \text{ için } ax \in \ell_1\},$$

$$\lambda^\beta = \{a = (a_k) \in w : \text{her } x \in \lambda \text{ için } ax \in cs\},$$

$$\lambda^\gamma = \{a = (a_k) \in w : \text{her } x \in \lambda \text{ için } ax \in bs\}$$

cümlelerine sırasıyla λ uzayının α-, β- ve γ-duali denir. λ^α, λ^β ve λ^γ birer dizi uzayı olup, $\phi \subset \lambda^\alpha \subset \lambda^\beta \subset \lambda^\gamma$ kapsamaları mevcuttur. Burada ϕ ile sonlu sayıda terimi sıfır olmayan dizilerin uzayı gösterilmektedir. $\eta = \alpha$, β veya γ olmak üzere $\lambda \subset \mu$ ise $\mu^\eta \subset \lambda^\eta$ kapsaması geçerlidir, [7].

1. Bazı Eşitsizlikler

Burada, daha sonraki bölümlerde kullanacağımız bazı eşitsizlikleri vereceğiz.

$x = (x_k)$, $y = (y_k) \in \ell_p$ olsun. Bu durumda;

$$\sum_{k=0}^{\infty} |x_k + y_k|^p \leq \sum_{k=0}^{\infty} |x_k|^p + \sum_{k=0}^{\infty} |y_k|^p, \quad (0 < p \leq 1)$$

ile

$$\left(\sum_{k=0}^{\infty} |x_k + y_k|^p\right)^{1/p} \leq \left(\sum_{k=0}^{\infty} |x_k|^p\right)^{1/p} + \left(\sum_{k=0}^{\infty} |y_k|^p\right)^{1/p}, \quad (p \geq 1)$$

eşitsizliği geçerlidir ve Minkowski eşitsizliği olarak bilinir, [**11**, sf. 21].

$x = (x_k) \in \ell_p$, $y = (y_k) \in \ell_q$ ve $p > 1$ olsun. O zaman $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ olmak üzere,

$$\sum_{k=0}^{\infty} |x_k y_k| \leq \left(\sum_{k=0}^{\infty} |x_k|^p\right)^{1/p} \left(\sum_{k=0}^{\infty} |y_k|^q\right)^{1/q}$$

eşitsizliği geçerlidir ve Hölder eşitsizliği olarak bilinir, [**11**, sf. 21].

Teorem 1.2. *$p > 1$, $a_n \geq 0$ ve $A_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n$ olsun. a_n değerlerinin hepsi birden sıfır olmamak üzere*

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{A_n}{n}\right)^p < \left(\frac{p}{p-1}\right)^p \sum_{n=1}^{\infty} a_n^p$$

eşitsizliği vardır, [**9**, sf. 239].

2. Matris Dönüşümleri

Bu kısımda; dizi uzayları arasındaki matris dönüşümleri tanımlanarak, ileri bölümlerde kullanılacak olan Stieglitz ve Tietz [**15**] ve K. Goswin, G. Erdmann [**8**] tarafından mevcut literatüre kazandırılan matris dönüşümleri ile ilgili teoremler ispatsız olarak verilecektir.

Tanım 1.7. $A = (a_{nk})$ reel terimli bir sonsuz matris ve $x = (x_k)$ herhangi bir dizi olsun. Eğer her $n \in \mathbb{N}$ için

$$(Ax)_n = \sum_{k=0}^{\infty} a_{nk}x_k$$

serileri yakınsak ise $\big((Ax)_n\big)$ dizisine (x_k) dizisinin A matrisi ile elde edilen dönüşüm dizisi denir.

λ ve μ herhangi iki dizi uzayı ve A da bir sonsuz matris olsun. Eğer her $x \in \lambda$ için $\big((Ax)_n\big)$ dönüşüm dizisi mevcut ve μ uzayında ise A matrisi, λ uzayından μ uzayına tanımlıdır denir. λ uzayından μ uzayına tanımlı bütün matrislerin sınıfı $(\lambda : \mu)$ ile gösterilir.

Şimdi önemli limitleme metodlarından Cesàro ve Nörlund ortalamalarını verelim.

Tanım 1.8. Birinci mertebeden Cesàro dönüşümü, $C_1 = (a_{nk})$ matrisi ile verilir. Burada a_{nk};

$$a_{nk} = \begin{cases} \frac{1}{n+1} & , \quad (0 \leq k \leq n) \\ 0 & , \quad (k > n) \end{cases} \quad ; \quad (k,\ n \in \mathbb{N})$$

şeklindedir, [**11**, sf. 216].

Tanım 1.9. $q_0 > 0$ olmak üzere $q = (q_n)$, negatif olmayan reel sayıların bir dizisi ve $Q_n = \sum_{k=0}^{n} q_k$ olsun. $(N, q_n) = (a_{nk})$ Nörlund dönüşümüne karşılık gelen matris,

$$a_{nk} = \begin{cases} \frac{q_{n-k}}{Q_n} & , \quad (0 \le k \le n) \\ 0 & , \quad (k > n) \end{cases} \quad ; \quad (k,\ n \in \mathbb{N})$$

ile tanımlanır, [**17**, sf. 32].

Tanım 1.10. $c \subset c_A$ olan bir A matrisine, yapıyı koruyan matris denir. Eğer A, yapıyı koruduğu gibi üstelik limiti de koruyorsa o zaman A bir regüler matris olarak adlandırılır, [**17**, sf. 3].

Tanım 1.11. Sınırlı dizilerden sınırlı dizilere tanımlı lineer dönüşüme limitleme metodu denir, [**14**, sf. 2].

Tanım 1.12. A ve B iki limitleme metodu olsun. Eğer her B-limitlenebilen dizi aynı limite A-limitlenebiliyorsa bu taktirde A metodu, B metodundan daha kuvvetlidir denir ve $B \subseteq A$ yazılır, [**14**, sf. 11].

Tanım 1.13. A metodu, B metodundan daha kuvvetli ise ve bunun tersi de doğruysa, A ve B metodlarına denk metodlar denir, [**14**, sf. 11].

Teorem 1.3. *Bir A regüler matrisinin Cesàro matrisinden daha kuvvetli olması için gerek ve yeter şart, her $n \in \mathbb{N}$ için*

$$\sum_{k=0}^{\infty} (k+1) \left| a_{n,k} - a_{n,k+1} \right| < K \tag{1.1}$$

eşitsizliğini sağlayan bir K sabitinin mevcut bulunmasıdır, [**14**, sf. 13].

Bu çalışmada kullanacağımız $A_r = (a_{nk}^r)$ matrisi, Başar [**5**] tarafından, $0 < r < 1$ olmak üzere

$$a_{nk}^r = \begin{cases} \frac{1+r^k}{1+n} & , \quad (0 \le k \le n) \\ 0 & , \quad (k > n) \end{cases} \quad ; \quad (k,\ n \in \mathbb{N}) \tag{1.2}$$

ile tanımlandı. A_r matrisinin regüler ve Cesàro matrisinden daha kuvvetli olduğu gösterildi, [**5**]. Şimdi, bu teoremi verelim.

Teorem 1.4. *Regüler matrislerin (1.2) ile tanımlanan* $A_r = (a_{nk}^r)$ *ailesi, Cesàro matrisinden daha kuvvetlidir,* [5].

Şimdi, bazı matris sınıflarının karakterizasyonlarını veren teoremleri ispatsız olarak sunalım.

Teorem 1.5. $1 < p < \infty$ *olsun. Bu durumda;* $A \in (\ell_p : \ell_1)$ *olması için*

$$\sup_{N\in\mathcal{F}} \sum_{k=0}^{\infty} \left| \sum_{n\in N} a_{nk} \right|^q < \infty, \quad \left(\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1\right) \tag{1.3}$$

şartının sağlanması gerek ve yeterdir, [15].

Teorem 1.6. $1 < p < \infty$ *olsun. Bu durumda;* $A \in (\ell_p : c)$ *olması için*

$$\lim_{n\to\infty} a_{nk} \ \textit{mevcut}\,, \quad (k \in \mathbb{N}) \tag{1.4}$$

ve

$$\sup_{n\in\mathbb{N}} \sum_{k=0}^{\infty} |a_{nk}|^q < \infty\,, \quad \left(\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1\right) \tag{1.5}$$

şartlarının sağlanması gerek ve yeterdir, [15].

Teorem 1.7. $1 < p < \infty$ *olsun. Bu durumda;* $A \in (\ell_p : \ell_\infty)$ *olması için (1.5) şartının sağlanması gerek ve yeterdir,* [15].

Teorem 1.8. $0 < p \le 1$ *olsun. O zaman* $A \in (\ell_p : \ell_1)$ *olması için*

$$\sup_{N\in\mathcal{F}} \sup_{k\in\mathbb{N}} \left| \sum_{n\in N} a_{nk} \right| < \infty \tag{1.6}$$

şartının sağlanması gerek ve yeterdir, [8].

Teorem 1.9. $0 < p \le 1$ *olsun. Bu durumda;* $A \in (\ell_p : c)$ *olması için (1.4) ve*

$$\sup_{k,n\in\mathbb{N}} |a_{nk}| < \infty, \tag{1.7}$$

$$\sup_{k,n\in\mathbb{N}} |a_{nk} - \alpha_k| < \infty \quad \textit{olacak şekilde } (\alpha_k) \in w \textit{ mevcut} \tag{1.8}$$

şartlarının sağlanması gerek ve yeterdir, [8].

Teorem 1.10. $0 < p \leq 1$ *olsun. O zaman* $A \in (\ell_p : \ell_\infty)$ *olması için (1.7) şartının sağlanması gerek ve yeterdir,* [8].

BÖLÜM 2

İZOMORFİK DİZİ UZAYLARI

Bu bölümde, önce λ dizi uzayına bağlı olarak λs dizi uzayı inşa edilecek, daha sonra da λ ile λs dizi uzayları arasında bir izomorfizm kurularak λs dizi uzayının dualinin belirlenmesiyle ilgili bir metod verilecektir. Ayrıca Ng ve Lee **[13]** tarafından inşa edilen ve ℓ_p uzayına izomorf olan X_p uzayının duali, yeni metodla bulunacaktır. Son olarak izomorf uzaylar ile yeni çeşit metod ikilileri arasındaki ilişkiden kısaca bahsedilecektir.

Tanım 2.1. X ve Y, aynı cisim üzerinde iki lineer uzay olsun. Eğer $x_1, x_2 \in X$ ve α_1, α_2 skalarları için

$$T(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2) = \alpha_1 T x_1 + \alpha_2 T x_2$$

oluyorsa $T : X \to Y$ dönüşümü lineerdir denir. $T : X \to Y$ lineer dönüşümü, bire-bir ve örten ise bu T dönüşümüne bir izomorfizm denir. Bu durumda, X ve Y uzayları lineer olarak izomorfik uzaylar adını alır ve $X \cong Y$ yazılır, **[11**, sf. 71].

1. λ ve λs Uzayları Arasındaki İzomorfizm

$\lambda \neq \emptyset$ olmak üzere $\lambda \subset w$, üzerinde yakınsaklık veya sınırlılık kavramı tanımlı bir dizi uzayı olsun. Bu durumda, kısmî toplamları λ uzayında yatan serilerin cümlesini λs ile ifade edeceğiz, yani

$$\lambda s = \left\{ x \in w : \left(\sum_{k=0}^{n} x_k \right) \in \lambda \right\}.$$

λs cümlesinin, dizilerin adi toplama ve skalar çarpma işlemleri altında bir dizi uzayı olduğu gösterilebilir. λ dizi uzayı ℓ_∞, c ve c_0 alınırsa λs dizi uzayı sırasıyla bs, cs ve cs_0 olur.

Şimdi λ ile λs uzaylarının izomorf olduklarına dair teoremi verelim.

Teorem 2.1. *λs uzayı, λ uzayına lineer olarak izomorftur.*

İSPAT. Bunun için λs ve λ uzayları arasında birebir, örten bir lineer dönüşümün varlığını göstermeliyiz.

$$\begin{aligned} T : \lambda s &\longrightarrow \lambda \\ x &\longmapsto Tx = y, \quad y = (y_n), \quad y_n = \sum_{k=0}^{n} x_k \,; \quad (n \in \mathbb{N}) \end{aligned}$$

dönüşümünü göz önüne alalım.

$x = (x_k)$, $u = (u_k) \in \lambda s$ ve $\alpha \in \mathbb{C}$ için

$$T(x+u) = \left\{ \sum_{k=0}^{n} (x_k + u_k) \right\} = \left(\sum_{k=0}^{n} x_k \right) + \left(\sum_{k=0}^{n} u_k \right) = Tx + Tu$$

ve

$$T(\alpha x) = \left(\sum_{k=0}^{n} \alpha x_k \right) = \alpha \left(\sum_{k=0}^{n} x_k \right) = \alpha Tx$$

olduğundan T dönüşümü lineerdir.

T dönüşümünün birebir olduğunu göstermek için; $Tx = Tu$ olduğunu kabul ederek $x = u$ olduğunu gösterelim. Buna göre;

$$Tx = Tu \;\Rightarrow\; Tx - Tu = \theta$$

ve T dönüşümü lineer olduğundan $T(x-u) = \theta$ elde edilir. Böylece

$n = 0$ için $\quad x_0 - u_0 = 0$ eşitliğinden $x_0 = u_0$,

$n = 1$ için $\quad x_0 - u_0 + x_1 - u_1 = 0$ eşitliğinden $x_1 = u_1$,

$\vdots$

$n = k$ için $\quad x_0 - u_0 + x_1 - u_1 + x_2 - u_2 + \cdots + x_k - u_k = 0$ eşitliğinden $x_k = u_k$

çıkar ki buradan da $x = u$ elde edilir.

Şimdi T dönüşümünün örten olduğunu görelim. Bunun için her $y \in \lambda$ için enaz bir $x \in \lambda s$ elemanının var olduğunu göstereceğiz. $y \in \lambda$ alalım ve

$$x_n = y_n - y_{n-1} \quad (n \in \mathbb{N}, \; y_{-1} \equiv 0)$$

ile $x = (x_n)$ dizisini tanımlayalım. Bu durumda,

$$\sum_{k=0}^{n} x_k = \sum_{k=0}^{n} (y_k - y_{k-1}) = y_n$$

olduğundan $(\sum_{k=0}^{n} x_k) \in \lambda$ elde edilir ki bu $x \in \lambda s$ olduğunu gösterir. Dolayısıyla T örtendir. □

Bu teoremin tabii bir sonucu olarak ℓ_∞ ile bs, c ile cs ve c_0 ile cs_0 uzayları lineer olarak izomorfturlar.

Şimdi, izomorfizmden faydalanarak λs uzayının β-dualini veren teoremi ifade ve ispat edelim.

Teorem 2.2. *λ herhangi bir dizi uzayı olmak üzere, λs uzayının β duali*

$$(\lambda s)^\beta = \{a \in w : \ B \in (\lambda : c)\}$$

cümlesidir. Burada $B = (b_{nk})$ matrisi,

$$b_{nk} = \begin{cases} a_k - a_{k+1} & , \quad (0 \le k \le n-1) \\ a_n & , \quad (k = n) \\ 0 & , \quad (k > n) \end{cases} \quad ; \quad (k, \ n \in \mathbb{N})$$

şeklinde tanımlanmıştır.

İSPAT. $a \in w$, $x \in \lambda s$ alalım ve $z = (z_n)$ dizisini

$$z_n = \sum_{k=0}^{n} a_k x_k \tag{2.1}$$

ile tanımlayalım. Diğer taraftan T,Teorem 2.1'de tanımlanan dönüşüm olmak üzere $x \in \lambda s$ iken $y = Tx \in \lambda$ olup buradan

$$x = T^{-1} y \in \lambda s \tag{2.2}$$

elde edilir. Bu

$$x_k = y_k - y_{k-1} \ , \ (k \in \mathbb{N}, \ y_{-1} \equiv 0) \tag{2.3}$$

değeri (2.1) eşitliğinde yerine yazılırsa

$$z_n = \sum_{k=0}^{n} a_k(y_k - y_{k-1}) = \sum_{k=0}^{n-1}(a_k - a_{k+1})y_k + a_n y_n = (By)_n \tag{2.4}$$

bulunur. (2.4) eşitliğinde her $x \in \lambda s$ için $(a_k x_k) \in cs$ olması, her $y \in \lambda$ için By dizisinin yakınsak olmasını gerektirir. Bu ise, $B \in (\lambda : c)$ olması demektir. O hâlde λs uzayının β duali;

$$(\lambda s)^\beta = \{a = (a_k) \in w : \ B \in (\lambda : c)\}$$

cümlesidir. □

Yukarıdaki düşüncenin ışığı altında bs ve cs dizi uzaylarının β-dualleri, sırasıyla $(\ell_\infty : c)$ ve $(c : c)$ matris sınıflarından

$$(bs)^\beta = bv_0 \text{ ve } (cs)^\beta = bv$$

olarak bulunur.

Ayrıca T izomorfizmi yerine C_1 aritmetik ortalaması alınırsa, Ng ve Lee **[13]** tarafından inşaa edilen X_p $(1 \leq p < \infty)$ uzayı, ℓ_p uzayına lineer olarak izomorf olup, Teorem 2.2'ye parelel düşüncelerle, $a \in w$ ve $x \in X_p$ için

$$\sum_{k=0}^{n} a_k x_k = \sum_{k=0}^{n-1}(k+1)(a_k - a_{k+1})y_k + (n+1)a_n y_n$$

eşitliğinden X_p uzayının β-duali;

$$X_p^\beta = \left\{a = (a_k) \in w : \sum_{k=0}^{\infty} |(k+1)\Delta(a_k)|^q < \infty \text{ ve } \{(k+1)a_k\} \in \ell_\infty\right\}$$

şeklinde bulunur.

İzomorf λs ve λ uzayları için $Tx = y$, $Ax = z$ ve $By = z$ olacak şekilde dönüşüm mevcut olduğundan $Ax = (BoT)(x)$ eşitliği vardır. Bu ise, $A = BoT$ olduğunu belirtir. Böylece $T = (t_{nk})$,

$$t_{nk} = \begin{cases} 1 \ , & (0 \leq k \leq n) \\ 0 \ , & (k > n) \end{cases} \quad ; \qquad (k, \ n \in \mathbb{N})$$

olduğu dikkate alınırsa $A = (a_{nk})$ ve $B = (b_{nk})$ matrislerinin terimleri arasında

$$a_{nk} = \sum_{i=0}^{\infty} b_{ni} t_{ik} = \sum_{i=k}^{\infty} b_{ni} \; ; \quad (k,\ n \in \mathbb{N}) \tag{2.5}$$

ilişkisi mevcuttur. A ile B sonsuz matrisleri arasındaki bu ilişki metod ikilileri fikrini akla getirmektedir. Dördüncü bölümde, yeni çeşit metod ikilileri üzerinde durulacaktır.

BÖLÜM 3

a_p^r DİZİ UZAYI VE BAZI ÖZELLİKLERİ

$1 \le p < \infty$ olmak üzere

$$\ell_p = \left\{ x = (x_k) \in w : \sum_{k=0}^{\infty} |x_k|^p < \infty \right\}$$

ve

$$\ell_\infty = \left\{ x = (x_k) \in w : \sup_{k \in \mathbb{N}} |x_k| < \infty \right\}$$

uzaylarının sırasıyla

$$\| x \|_{\ell_p} = \left(\sum_{k=0}^{\infty} |x_k|^p \right)^{1/p} \quad \text{ve} \quad \| x \|_{\ell_\infty} = \sup_{k \in \mathbb{N}} |x_k|$$

normlarıyla tam oldukları bilinmektedir. Ng ve Lee **[13]** ve Wang **[16]**, sırasıyla 1.mertebeden Cesàro ve Nörlund ortalamalarını kullanarak;

$$X_p = \left\{ x = (x_k) \in w : \sum_{n=0}^{\infty} \left| \frac{1}{1+n} \sum_{k=0}^{n} x_k \right|^p < \infty \right\},$$

$$X_\infty = \left\{ x = (x_k) \in w : \sup_{n \in \mathbb{N}} \left| \frac{1}{1+n} \sum_{k=0}^{n} x_k \right| < \infty \right\}$$

ve

$$X_{a(p)} = \left\{ x = (x_k) \in w : \sum_{n=0}^{\infty} \left| \frac{1}{A_n} \sum_{k=0}^{n} a_{n-k} x_k \right|^p < \infty \right\},$$

$$X_{a(\infty)} = \left\{ x = (x_k) \in w : \sup_{n \in \mathbb{N}} \left| \frac{1}{A_n} \sum_{k=0}^{n} a_{n-k} x_k \right| < \infty \right\}$$

uzaylarını inşa edip, bu uzayların sırasıyla

$$\| x \|_{X_p} = \left(\sum_{n=0}^{\infty} \left| \frac{1}{1+n} \sum_{k=0}^{n} x_k \right|^p \right)^{1/p}, \quad \| x \|_{X_\infty} = \sup_{n \in \mathbb{N}} \left| \frac{1}{1+n} \sum_{k=0}^{n} x_k \right|$$

ve

$$\| x \|_{a(p)} = \left(\sum_{n=0}^{\infty} \left| \frac{1}{A_n} \sum_{k=0}^{n} a_{n-k} x_k \right|^p \right)^{1/p}, \quad \| x \|_{a(\infty)} = \sup_{n \in \mathbb{N}} \left| \frac{1}{A_n} \sum_{k=0}^{n} a_{n-k} x_k \right|$$

normlarıyla Banach uzayı olduklarını gösterdiler.

Bu bölümde; A_r dönüşümünü kullanarak a_p^r uzayını inşa edip, bazı özelliklerini inceleyeceğiz.

1. a_p^r Uzayı

$A_r = (a_{nk}^r)$ matrisi, (1.2) ile tanımlı olmak üzere A_r-dönüşümü c_0 ve c uzaylarında yatan dizilerin a_0^r ve a_c^r uzayları, Aydın ve Başar tarafından [3]'de tanımlanarak incelendi. Daha sonra a_0^r ve a_c^r dizi uzaylarının $a_0^r(\Delta)$ ve $a_c^r(\Delta)$ fark uzayları da aynı yazarlar tarafından [4]'de ele alındı. Bu bölümde, A_r-dönüşümü ℓ_p uzayında yatan dizilerin a_p^r cümlesi tanımlanıp, bu cümlenin bir dizi uzayı olduğu ve üzerinde kurulan norm ile Banach uzayı teşkil ettiği gösterilecektir. Daha sonra a_p^r ile ℓ_p uzaylarının; lineer olarak izomorf oldukları ispat edilip, a_p^r uzayının bir tabanı verilecektir.

$0 < p < \infty$ olmak üzere a_p^r cümlesini;

$$a_p^r = \left\{ x = (x_k) \in w : \sum_{n=0}^{\infty} \left| \frac{1}{1+n} \sum_{k=0}^{n} (1+r^k) x_k \right|^p < \infty \right\}$$

ve a_∞^r cümlesini de;

$$a_\infty^r = \left\{ x = (x_k) \in w : \sup_{n \in \mathbb{N}} \left| \frac{1}{1+n} \sum_{k=0}^{n} (1+r^k) x_k \right| < \infty \right\}$$

olarak tanımlayalım.

Teorem 3.1. *a_p^r cümlesi, dizilerin toplama ve skalarla çarpma işlemlerine göre bir lineer uzaydır.*

İSPAT. $\theta = (0) \in a_p^r$ olduğundan, a_p^r cümlesi boş değildir. $x, y \in a_p^r$ ve $\alpha \in \mathbb{C}$ olsun. Şimdi, $\alpha x + y \in a_p^r$ olduğunu gösterelim.

Üçgen eşitsizliği ile,

$$\left|\frac{1}{1+n}\sum_{k=0}^{n}(1+r^k)(\alpha x_k+y_k)\right| = \left|\frac{1}{1+n}\sum_{k=0}^{n}(1+r^k)\alpha x_k + \frac{1}{1+n}\sum_{k=0}^{n}(1+r^k)y_k\right|$$
$$\leq \left|\frac{1}{1+n}\sum_{k=0}^{n}(1+r^k)\alpha x_k\right| + \left|\frac{1}{1+n}\sum_{k=0}^{n}(1+r^k)y_k\right|$$

olur. Buradan,

$$\sum_{n=0}^{\infty}\left|\frac{1}{1+n}\sum_{k=0}^{n}(1+r^k)(\alpha x_k+y_k)\right|^p$$
$$\leq \sum_{n=0}^{\infty}\left[\left|\frac{1}{1+n}\sum_{k=0}^{n}(1+r^k)\alpha x_k\right| + \left|\frac{1}{1+n}\sum_{k=0}^{n}(1+r^k)y_k\right|\right]^p$$

yazılabilir. $0 < p < 1$ için Minkowski eşitsizliği ile

$$\sum_{n=0}^{\infty}\left|\frac{1}{1+n}\sum_{k=0}^{n}(1+r^k)(\alpha x_k+y_k)\right|^p$$
$$\leq \sum_{n=0}^{\infty}\left|\frac{1}{1+n}\sum_{k=0}^{n}(1+r^k)\alpha x_k\right|^p + \sum_{n=0}^{\infty}\left|\frac{1}{1+n}\sum_{k=0}^{n}(1+r^k)y_k\right|^p$$
$$= |\alpha|^p\sum_{n=0}^{\infty}\left|\frac{1}{1+n}\sum_{k=0}^{n}(1+r^k)x_k\right|^p + \sum_{n=0}^{\infty}\left|\frac{1}{1+n}\sum_{k=0}^{n}(1+r^k)y_k\right|^p < \infty$$

ve $1 \leq p < \infty$ için yine Minkowski eşitsizliğini kullanarak;

$$\left[\sum_{n=0}^{\infty}\left|\frac{1}{1+n}\sum_{k=0}^{n}(1+r^k)(\alpha x_k+y_k)\right|^p\right]^{1/p}$$
$$\leq \left[\sum_{n=0}^{\infty}\left|\frac{1}{1+n}\sum_{k=0}^{n}(1+r^k)\alpha x_k\right|^p\right]^{1/p} + \left[\sum_{n=0}^{\infty}\left|\frac{1}{1+n}\sum_{k=0}^{n}(1+r^k)y_k\right|^p\right]^{1/p}$$
$$= |\alpha|\left[\sum_{n=0}^{\infty}\left|\frac{1}{1+n}\sum_{k=0}^{n}(1+r^k)x_k\right|^p\right]^{1/p} + \left[\sum_{n=0}^{\infty}\left|\frac{1}{1+n}\sum_{k=0}^{n}(1+r^k)y_k\right|^p\right]^{1/p} < \infty$$

elde edilir. Bu ise, $\alpha x + y \in a_p^r$ olduğunu gösterir. □

Teorem 3.2. $0 < p < 1$ *olmak üzere* a_p^r *uzayı,*

$$\| x \|_{a_p^r} = \sum_{n=0}^{\infty}\left|\frac{1}{1+n}\sum_{k=0}^{n}(1+r^k)x_k\right|^p$$

ile bir p-normlu uzaydır.

İSPAT. Bunun için p-norm şartlarının sağlandığını göstereceğiz.

$x \in a_p^r$ olsun. Bu durumda,

$$\begin{aligned}
\| x \|_{a_p^r} = 0 &\Leftrightarrow \sum_{n=0}^{\infty} \left| \frac{1}{1+n} \sum_{k=0}^{n} (1+r^k) x_k \right|^p = 0 \\
&\Leftrightarrow \frac{1}{1+n} \sum_{k=0}^{n} (1+r^k) x_k = 0 \ , \quad (n = 0, 1, 2, \dots) \\
&\Leftrightarrow \sum_{k=0}^{n} (1+r^k) x_k = 0 \ , \quad (n = 0, 1, 2, \dots) \\
&\Leftrightarrow x_n = 0 \ , \quad (n = 0, 1, 2, \dots)
\end{aligned}$$

olduğundan (PN1) aksiyomu sağlanır.

$x \in a_p^r$ ve $\alpha \in \mathbb{C}$ için,

$$\begin{aligned}
\| \alpha x \|_{a_p^r} &= \sum_{n=0}^{\infty} \left| \frac{1}{1+n} \sum_{k=0}^{n} (1+r^k) \alpha x_k \right|^p \\
&= |\alpha|^p \sum_{n=0}^{\infty} \left| \frac{1}{1+n} \sum_{k=0}^{n} (1+r^k) x_k \right|^p \\
&= |\alpha|^p \| x \|_{a_p^r}
\end{aligned}$$

bulunduğundan (PN2) aksiyomu sağlanır.

$x, y \in a_p^r$ için,

$$\begin{aligned}
\| x + y \|_{a_p^r} &= \sum_{n=0}^{\infty} \left| \frac{1}{1+n} \sum_{k=0}^{n} (1+r^k)(x_k + y_k) \right|^p \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \left| \frac{1}{1+n} \sum_{k=0}^{n} (1+r^k) x_k + \frac{1}{1+n} \sum_{k=0}^{n} (1+r^k) y_k \right|^p
\end{aligned}$$

Üçgen eşitsizliğinden;

$$\| x + y \|_{a_p^r} \leq \sum_{n=0}^{\infty} \left[\left| \frac{1}{1+n} \sum_{k=0}^{n} (1+r^k) x_k \right| + \left| \frac{1}{1+n} \sum_{k=0}^{n} (1+r^k) y_k \right| \right]^p$$

ve Minkowski eşitsizliğinden;

$$\| x+y \|_{a_p^r} \leq \sum_{n=0}^{\infty} \left| \frac{1}{1+n} \sum_{k=0}^{n} (1+r^k) x_k \right|^p + \sum_{n=0}^{\infty} \left| \frac{1}{1+n} \sum_{k=0}^{n} (1+r^k) y_k \right|^p$$
$$= \| x \|_{a_p^r} + \| y \|_{a_p^r}$$

çıktığından (PN3) aksiyomu sağlanır. Şu hâlde $0 < p < 1$ için a_p^r, bir p-normlu uzaydır. □

Teorem 3.3. $1 \leq p < \infty$ *olmak üzere* a_p^r *uzayı,*

$$\| x \|_{a_p^r} = \left(\sum_{n=0}^{\infty} \left| \frac{1}{1+n} \sum_{k=0}^{n} (1+r^k) x_k \right|^p \right)^{1/p} \tag{3.1}$$

ile bir Banach uzayıdır.

İSPAT. Bunun için önce norm şartlarının sağlandığını göstereceğiz.

$x \in a_p^r$ olsun. Bu durumda,

$$\| x \|_{a_p^r} = 0 \Leftrightarrow \left(\sum_{n=0}^{\infty} \left| \frac{1}{1+n} \sum_{k=0}^{n} (1+r^k) x_k \right|^p \right)^{1/p} = 0$$
$$\Leftrightarrow \frac{1}{1+n} \sum_{k=0}^{n} (1+r^k) x_k = 0\,, \quad (n = 0,1,2,\ldots)$$
$$\Leftrightarrow \sum_{k=0}^{n} (1+r^k) x_k = 0\,, \quad (n = 0,1,2,\ldots)$$
$$\Leftrightarrow x_n = 0\,, \quad (n = 0,1,2,\ldots)$$

bulunduğundan (N1) aksiyomu sağlanır.

$x \in a_p^r$ ve $\alpha \in \mathbb{C}$ için,

$$\| \alpha x \|_{a_p^r} = \left(\sum_{n=0}^{\infty} \left| \frac{1}{1+n} \sum_{k=0}^{n} (1+r^k) \alpha x_k \right|^p \right)^{1/p}$$
$$= |\alpha| \left(\sum_{n=0}^{\infty} \left| \frac{1}{1+n} \sum_{k=0}^{n} (1+r^k) x_k \right|^p \right)^{1/p}$$
$$= |\alpha| \, \| x \|_{a_p^r}$$

olduğundan (N2) aksiyomu sağlanır.

$x, y \in a_p^r$ için,

$$\| x + y \|_{a_p^r} = \left(\sum_{n=0}^{\infty} \left| \frac{1}{1+n} \sum_{k=0}^{n} (1 + r^k)(x_k + y_k) \right|^p \right)^{1/p}$$

$$= \left(\sum_{n=0}^{\infty} \left| \frac{1}{1+n} \sum_{k=0}^{n} (1 + r^k) x_k + \frac{1}{1+n} \sum_{k=0}^{n} (1 + r^k) y_k \right| \right)^{1/p}$$

Üçgen eşitsizliğinden

$$\| x + y \|_{a_p^r} \leq \left(\sum_{n=0}^{\infty} \left[\left| \frac{1}{1+n} \sum_{k=0}^{n} (1 + r^k) x_k \right| + \left| \frac{1}{1+n} \sum_{k=0}^{n} (1 + r^k) y_k \right| \right]^p \right)^{1/p}$$

ve Minkowski eşitsizliğinden;

$$\| x + y \|_{a_p^r} \leq \left(\sum_{n=0}^{\infty} \left| \frac{1}{1+n} \sum_{k=0}^{n} (1 + r^k) x_k \right|^p \right)^{1/p} + \left(\sum_{n=0}^{\infty} \left| \frac{1}{1+n} \sum_{k=0}^{n} (1 + r^k) y_k \right|^p \right)^{1/p}$$

$$= \| x \|_{a_p^r} + \| y \|_{a_p^r}$$

elde edildiğinden dolayı da (N3) aksiyomu geçerlidir. Şu hâlde a_p^r, bir normlu uzaydır.

Şimdi a_p^r uzayının (3.1) ile tanımlanan norma göre tam olduğunu gösterelim. $x^i = \{x_0^i, x_1^i, x_2^i, \dots\}$ olmak üzere $(x^i)_{i \in \mathbb{N}} \subset a_p^r$ bir Cauchy dizisi olsun. Bu durumda verilen her $\varepsilon > 0$ sayısı için bir $n_0(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ vardır öyleki her $i, j > n_0(\varepsilon)$ için

$$\left\| x^i - x^j \right\|_{a_p^r} = \left\| A_r x^i - A_r x^j \right\|_{\ell_p} < \varepsilon$$

olur. Bu taktirde

$$\left| (A_r x^i)_k - (A_r x^j)_k \right| \leq \left(\sum_{k=0}^{\infty} \left| (A_r x^i)_k - (A_r x^j)_k \right|^p \right)^{1/p} = \left\| (A_r x^i)_k - (A_r x^j)_k \right\|_{\ell_p} < \varepsilon$$

olur. Böylece her bir $k \in \mathbb{N}$ için $\{(A_r x^i)_k\}_{i \in \mathbb{N}}$, $\mathbb{C}$ üzerinde bir Cauchy dizisidir. $\mathbb{C}$ tam olduğundan her bir $k \in \mathbb{N}$ için

$$(A_r x^i)_k \to (A_r x)_k, \quad (i \to \infty)$$

yakınsaktır. Şimdi $x \in a_p^r$ ve

$$\left\| x^i - x \right\|_{a_p^r} \to 0, \quad (i \to \infty)$$

olduğunu gösterelim. $A_r x^i \in \ell_p$ olduğundan

$$\|A_r x^i\|_{\ell_p} \leq K$$

eşitsizliğini sağlayan enaz bir $K > 0$ sayısı mevcuttur. Bu durumda herhangi bir $m \in \mathbb{N}$ için

$$\left(\sum_{k=0}^{m} |(A_r x^i)_k|^p\right)^{1/p} < \|A_r x^i\|_{\ell_p} \leq K$$

yazılabilir. Önce i, sonra da m üzerinden limit alınırsa

$$\left(\sum_{k=0}^{\infty} |(A_r x)_k|^p\right)^{1/p} \leq K$$

bulunur ki bu ise $x = (x_k) \in a_p^r$ olduğunu gösterir. Şimdi

$$\|x^i - x\| \to 0 \,, \quad (i \to \infty)$$

olduğunu gösterelim. $\varepsilon > 0$ verilsin. O zaman,

$$\|A_r x^i - A_r x^j\|_{\ell_p} < \varepsilon \,, \quad (i, j \geq n_0)$$

olacak şekilde $n_0 \in \mathbb{N}$ tamsayısı vardır. Böylece herhangi bir $m \in \mathbb{N}$ için

$$\left(\sum_{k=0}^{m} |(A_r x^i)_k - (A_r x^j)_k|^p\right)^{1/p} \leq \|A_r x^i - A_r x^j\|_{\ell_p} < \varepsilon, \quad (i, j \geq n_0)$$

olur. Buradan $j \to \infty$ için,

$$\left(\sum_{k=0}^{m} |(A_r x^i)_k - (A_r x)_k|^p\right)^{1/p} \leq \varepsilon \,, \quad (i \geq n_0)$$

elde edilir. m keyfi olduğundan, $m \to \infty$ için

$$\|x^i - x\|_{a_p^r} = \|A_r x^i - A_r x\|_{\ell_p} \leq \varepsilon \,, \quad (i \geq n_0)$$

kalır ki bu da ispatı tamamlar. □

a_p^r uzayı, mutlak değer özelliğine sahip değildir. Bunun için,

$$\|x\|_{a_p^r} \neq \||x|\|_{a_p^r} \tag{3.2}$$

olacak şekilde enaz bir $x \in a_p^r$ dizisinin mevcut olduğunu göstermeliyiz, burada $|x| = (|x_k|)$. Gerçekten de $x = (1, -1, 0, 0, 0, \ldots)$ olarak seçilirse (3.2) sağlanır. Bu da a_p^r uzayının mutlak olmayan tipten bir dizi uzayı olduğunu gösterir.

Teorem 3.4. *Mutlak olmayan tipten a_p^r dizi uzayı, ℓ_p uzayına lineer olarak izomorftur.*

İSPAT. Bunun için a_p^r ve ℓ_p uzayları arasında birebir, örten bir lineer dönüşümün varlığını göstermeliyiz.

$$\begin{aligned} T : a_p^r &\longrightarrow \ell_p \\ x &\longmapsto Tx = y, \quad y = (y_n), \quad y_n = \frac{1}{1+n}\sum_{k=0}^{n}(1+r^k)x_k \ ; \ (n \in \mathbb{N}) \end{aligned}$$

dönüşümünü göz önüne alalım. Bu durumda; $x = (x_k)$, $u = (u_k) \in a_p^r$ ve $\alpha \in \mathbb{C}$ için

$$\begin{aligned} T(x+u) &= \left\{\frac{1}{1+n}\sum_{k=0}^{n}(1+r^k)(x_k+u_k)\right\} \\ &= \left\{\frac{1}{1+n}\sum_{k=0}^{n}(1+r^k)x_k\right\} + \left\{\frac{1}{1+n}\sum_{k=0}^{n}(1+r^k)u_k\right\} \\ &= Tx + Tu \end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned} T(\alpha x) &= \left\{\frac{1}{1+n}\sum_{k=0}^{n}(1+r^k)\alpha x_k\right\} = \alpha\left\{\frac{1}{1+n}\sum_{k=0}^{n}(1+r^k)x_k\right\} \\ &= \alpha Tx \end{aligned}$$

bulunduğundan T dönüşümü lineerdir.

Şimdi T dönüşümünün birebir ve örten olduğunu gösterelim.

T dönüşümü birebirdir:

$Tx = Tu$ olduğunu kabul edelim. $x = u$ olduğunu göstereceğiz. Buna göre;

$$Tx = Tu \ \Rightarrow \ Tx - Tu = \theta$$

ve T dönüşümü lineer olduğundan $T(x-u)=\theta$ elde edilir. Böylece

$n=0$ için $2(x_0-u_0)=0$ eşitliğinden $x_0=u_0$,

$n=1$ için $\frac{1}{2}[2(x_0-u_0)+(1+r)(x_1-u_1)]=0$ eşitliğinden $x_1=u_1$,

$\vdots$

$n=k$ için $\frac{1}{1+k}[2(x_0-u_0)+(1+r)(x_1-u_1)+\cdots+(1+r^k)(x_k-u_k)]=0$

eşitliğinden $x_k=u_k$ çıkar ki buradan da $x=u$ elde edilir.

T dönüşümü örtendir:

Bunun için, herbir $y\in \ell_p$ için enaz bir $x\in a_p^r$ elemanının var olduğunu göstereceğiz.

$y=(y_k)\in \ell_p$ alalım ve $x=(x_k)$ dizisini,

$$x_k=\frac{1}{1+r^k}[(k+1)y_k-ky_{k-1}]\ ;\quad (k\in\mathbb{N})$$

ile tanımlayalım. Bu durumda; sırasıyla $0<p<1$ ve $1\le p<\infty$ hâlleri için,

$$\begin{aligned}\|x\|_{a_p^r} &= \sum_{n=0}^{\infty}\left|\frac{1}{1+n}\sum_{k=0}^{n}(1+r^k)x_k\right|^p\\ &= \sum_{n=0}^{\infty}\left|\frac{1}{1+n}\sum_{k=0}^{n}[(k+1)y_k-ky_{k-1}]\right|^p\\ &= \sum_{n=0}^{\infty}|y_n|^p=\|y\|_{\ell_p}\end{aligned}$$

ve

$$\|x\|_{a_p^r}=\left(\sum_{n=0}^{\infty}\left|\frac{1}{1+n}\sum_{k=0}^{n}(1+r^k)x_k\right|^p\right)^{1/p}=\|y\|_{\ell_p}$$

elde edilir. Bu ise, $x\in a_p^r$ olduğunu ve üstelik T dönüşümünün normu koruduğunu gösterir. O hâlde, a_p^r uzayı ℓ_p uzayına izometrik olarak izomorftur. □

Teorem 3.5. *$p\neq 2$ için a_p^r uzayı üzerindeki (3.1) normu, bir iç çarpımdan elde edilemez.*

İSPAT. $x = (x_n)$, $y = (y_n)$ dizilerini a_2^r uzayından alalım. O zaman,

$$< x, y > = \sum_{k=0}^{\infty} (A_r x)_k \overline{(A_r y)}_k$$

olarak tarif edilirse a_2^r bir iç çarpım uzayıdır. Şimdi,

$$\|x\| = < x, x >^{1/2} = \left(\sum_{n=0}^{\infty} \left| \frac{1}{1+n} \sum_{k=0}^{n} (1+r^k) x_k \right|^2 \right)^{1/2}$$

iç çarpım normunu düşünelim. Teorem 3.3'den a_p^r uzayının (3.1) normuyla Banach uzayı olduğunu biliyoruz. O hâlde, a_2^r bir Hilbert uzayıdır.

Öte yandan,

$$u = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{1+r}, \frac{-2}{1+r^2}, 0, 0, \ldots \right)$$

ve

$$v = \left(\frac{1}{2}, \frac{-3}{1+r}, \frac{2}{1+r^2}, 0, 0, \ldots \right)$$

olarak seçilirse

$$u + v = \left(1, \frac{-2}{1+r}, 0, 0, , 0 \ldots \right)$$

ve

$$u - v = \left(0, \frac{4}{1+r}, \frac{-4}{1+r^2}, 0, 0, \ldots \right)$$

elde edilir. Böylece

$$\|u\|_{a_p^r} = \left(\sum_{n=0}^{\infty} \left| \frac{1}{1+n} \sum_{k=0}^{n} (1+r^k) u_k \right|^p \right)^{1/p} = 2^{1/p},$$

$$\|v\|_{a_p^r} = \left(\sum_{n=0}^{\infty} \left| \frac{1}{1+n} \sum_{k=0}^{n} (1+r^k) v_k \right|^p \right)^{1/p} = 2^{1/p}$$

ve

$$\|u+v\|_{a_p^r} = \left(\sum_{n=0}^{\infty} \left| \frac{1}{1+n} \sum_{k=0}^{n} (1+r^k) (u+v)_k \right|^p \right)^{1/p} = 2,$$

$$\|u-v\|_{a_p^r}=\left(\sum_{n=0}^{\infty}\left|\frac{1}{1+n}\sum_{k=0}^{n}(1+r^k)(u-v)_k\right|^p\right)^{1/p}=2$$

olup buradan

$$\|u+v\|_{a_p^r}^2+\|u-v\|_{a_p^r}^2=4+4=8\neq 4.2^{1/p}=2\left(\|u\|_{a_p^r}^2+\|v\|_{a_p^r}^2\right),\quad (p\neq 2)$$

bulunur. Yani $p\neq 2$ için paralelkenar özdeşliği sağlanmaz. Bu da a_p^r uzayının normunun $p\neq 2$ iken iç çarpımdan elde edilemeyeceğini gösterir. Böylece a_p^r uzayının bir Banach uzayı olduğu hâlde $p\neq 2$ için bir iç çarpım uzayı ve dolayısıyla Hilbert uzayı olmadığı sonucuna varılır. □

Şimdi a_p^r uzayının tabanını veren teoremi ifade ve ispat edelim.

Teorem 3.6. $1\le p<\infty$ *olmak üzere* a_p^r *uzayının elemanlarının* $\{b_n^{(k)}(r)\}_{n\in\mathbb{N}}=b^{(k)}(r)$ *dizisini*

$$b_n^{(k)}(r)=\begin{cases}(-1)^{n-k}\frac{1+k}{1+r^n}, & (k\le n\le k+1)\\ 0, & (n<k \text{ veya } n>k+1)\end{cases};\quad (k,\ n\in\mathbb{N})$$

olarak tanımlayalım. Bu taktirde, $\{b^{(k)}(r)\}_{k\in\mathbb{N}}$ *dizisi,* a_p^r *uzayı için bir tabandır ve her* $x\in a_p^r$ *için*

$$\lambda_k(r)=(A_rx)_k=\sum_{i=0}^{k}a_{ki}^r x_i\ ;\quad (k\in\mathbb{N})$$

olmak üzere;

$$x=\sum_{k=0}^{\infty}\lambda_k(r)b^{(k)}(r)\tag{3.3}$$

şeklinde birtek gösterime sahiptir.

İSPAT.

$$A_rb^{(k)}(r)=e^{(k)}\in\ell_p\ ,\ (k=0,1,2,\ldots)\tag{3.4}$$

olduğundan $\{b^{(k)}(r)\}\subset a_p^r$ 'dir. Burada $e^{(k)}$, $k\in\mathbb{N}$ için k.terimi 1, diğer terimleri sıfır olan dizidir.

$x \in a_p^r$ verilsin. Her $m > 0$ tamsayısı için

$$x^{[m]} = \sum_{k=0}^{m} \lambda_k(r) b^{(k)}(r) \tag{3.5}$$

olsun. Şimdi, (3.4) eşitliğini aklımızda tutarak (3.5) eşitliğine A_r matrisini uygulayalım. Böylece,

$$A_r x^{[m]} = \sum_{k=0}^{m} \lambda_k(r) A_r b^{(k)}(r) = \sum_{k=0}^{m} (A_r x)_k e^{(k)} .$$

ve

$$\left[A_r(x - x^{[m]})\right]_i = \begin{cases} 0 & , \quad (0 \leq i \leq m) \\ (A_r x)_i & , \quad (i > m) \end{cases} \quad ; \quad (i,\ m \in \mathbb{N})$$

elde ederiz. $\varepsilon > 0$ verilsin. Bu durumda öyle bir m_0 tamsayısı vardır ki $m \geq m_0$ için

$$\left(\sum_{i=m}^{\infty} \left|(A_r x)_i\right|^p \right)^{1/p} < \frac{\varepsilon}{2}$$

kalır. Buradan her $m \geq m_0$ için

$$\left\|x - x^{[m]}\right\|_{a_p^r} = \left[\sum_{i=m}^{\infty} \left|(A_r x)_i\right|^p \right]^{1/p} \leq \left[\sum_{i=m_0}^{\infty} \left|(A_r x)_i\right|^p \right]^{1/p} < \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon$$

olduğu görülür. Bu ise $x \in a_p^r$ noktasının (3.3) gösterimine sahip olduğunu belirtir.

Şimdi bu gösterimin tekliğini ispat edelim. Aksine farzedelim ki x dizisinin

$$x = \sum_{k=0}^{\infty} \mu_k(r) b^{(k)}(r) \tag{3.6}$$

şeklinde başka bir gösterimi vardır. (3.4) eşitliğini aklımızda tutarak (3.6) eşitliğine A_r matrisini uyguladığımızda,

$$(A_r x)_n = \sum_{k=0}^{\infty} \mu_k(r) [A_r b^{(k)}(r)]_n = \sum_{k=0}^{\infty} \mu_k(r) e_n^{(k)} = \mu_n(r) \ ; \ (n \in \mathbb{N})$$

elde ederiz. Hâlbuki bu, $(A_r x)_n = \lambda_n(r)$ olması kabulü ile çelişir. O hâlde $x \in a_p^r$ dizisinin (3.3) gösterimi birtektir. $\square$

2. Kapsama Bağıntıları

Bu kısımda, a_p^r uzayı ile diğer bazı dizi uzayları arasındaki kapsama bağıntıları verilecektir.

Teorem 3.7. $1 < p < \infty$ *için* $\ell_p \subset a_p^r$ *kesin kapsaması vardır.*

İSPAT. Bunun için,

$$\| x \|_{a_p^r} \leq K \| x \|_{\ell_p}$$

eşitsizliğini sağlayan bir $K > 0$ sayısının her $x \in a_p^r$ için mevcut bulunduğunu göstermeliyiz. $x \in \ell_p$ olsun. Bu durumda,

$$\begin{aligned}
\left| \sum_{k=0}^{n} \frac{1+r^k}{1+n} x_k \right|^p &= \left| \frac{2}{1+n} x_0 + \frac{1+r}{1+n} x_1 + \frac{1+r^2}{1+n} x_2 + \cdots + \frac{1+r^n}{1+n} x_n \right|^p \\
&\leq \left[2 \left(\frac{|x_0|}{1+n} + \frac{|x_1|}{1+n} + \frac{|x_2|}{1+n} + \cdots + \frac{|x_n|}{1+n} \right) \right]^p \\
&= \left[2 \sum_{k=0}^{n} \frac{|x_k|}{1+n} \right]^p
\end{aligned}$$

olup Teorem 1.2 den

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left| \sum_{k=0}^{n} \frac{1+r^k}{1+n} x_k \right|^p < 2^p \left(\frac{p}{p-1} \right)^p \sum_{n=0}^{\infty} |x_n|^p$$

elde edilir. Böylece

$$\| x \|_{a_p^r} < \frac{2p}{p-1} \| x \|_{\ell_p}$$

olur ki bu da $\ell_p \subset a_p^r$ kapsamasının geçerli bulunduğunu gösterir.

Diğer taraftan

$$x_k = \frac{(-1)^k}{1+r^k}, \quad (k = 0, 1, 2, \ldots)$$

olarak tanımlanırsa

$$\begin{aligned}
\sum_{n=0}^{\infty} \left| \sum_{k=0}^{n} \frac{1+r^k}{1+n} x_k \right|^p &= \sum_{n=0}^{\infty} \left| \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{1+n} (-1)^k \right|^p \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \left| \frac{1+(-1)^n}{2(1+n)} \right|^p < \infty
\end{aligned}$$

çıktığından $x \in a_p^r - \ell_p$ olduğu anlaşılır. Bu da $\ell_p \subset a_p^r$ kapsamasının kesin olduğunu ifade eder ve böylece teoremin ispatı tamamlanır. □

Teorem 3.8. *$1 \leq p \leq s < \infty$ için $a_p^r \subset a_s^r$ kapsaması vardır.*

İSPAT. $x \in a_p^r$ olsun. Bu durumda, $A_r x \in \ell_p$ olduğu aşikârdır. Ayrıca $\ell_p \subset \ell_s$ olduğundan $A_r x \in \ell_s$ elde edilir. Bu ise, $x \in a_s^r$ olduğunu gösterir. Yani $a_p^r \subset a_s^r$ kapsaması mevcuttur. □

Teorem 3.9. *$1 \leq p < \infty$ olsun. O zaman a_∞^r uzayı, ℓ_∞ ve a_p^r uzaylarını kapsar.*

İSPAT. Bunun için,

$$\| x \|_{a_\infty^r} \leq K \| x \|_{\ell_\infty}$$

eşitsizliğini sağlayan bir $K > 0$ sayısının her $x \in a_\infty^r$ için mevcut olduğunu göstermeliyiz. $x \in \ell_\infty$ olsun. Böylece,

$$\begin{aligned}
\| x \|_{a_\infty^r} &= \sup_{n\in\mathbb{N}} \left| \sum_{k=0}^{n} \frac{1+r^k}{1+n} x_k \right| \\
&\leq \| x \|_{\ell_\infty} \sup_{n\in\mathbb{N}} \sum_{k=0}^{n} \frac{1+r^k}{1+n} \\
&= \| x \|_{\ell_\infty} \sup_{n\in\mathbb{N}} \left[1 + \frac{1-r^{n+1}}{(1+n)(1-r)} \right] \leq 2 \| x \|_{\ell_\infty}
\end{aligned}$$

elde edilir ki bu da $x \in a_\infty^r$ olduğunu belirtir.

Diğer taraftan

$$x_k = \frac{(-1)^k(2k+1)}{1+r^k}, \ (k = 0, 1, 2, \ldots)$$

olarak tanımlanırsa

$$\begin{aligned}
\sup_{n\in\mathbb{N}} \left| \sum_{k=0}^{n} \frac{1+r^k}{1+n} x_k \right| &= \sup_{n\in\mathbb{N}} \left| \frac{1}{1+n} \sum_{k=0}^{n} (-1)^k(2k+1) \right| \\
&= \sup_{n\in\mathbb{N}} \left| (-1)^n \right| = 1
\end{aligned}$$

çıktığından $x \in a_\infty^r - \ell_\infty$ olduğu anlaşılır. Dolayısıyla $\ell_\infty \subset a_\infty^r$ kapsaması kesindir.

$x \in a_p^r$ olsun. $A_r x \in \ell_p \subset \ell_\infty$ olup, buradan $A_r x \in \ell_\infty$ elde edilir. O hâlde $a_p^r \subset a_\infty^r$ kapsaması vardır. Bunun yanında $x = (1,1,1,\ldots)$ dizisi, a_∞^r uzayında fakat a_p^r uzayında değildir. Bu ise, $a_p^r \subset a_\infty^r$ kapsamasının kesin olduğunu gösterir. □

Teorem 3.10. *$1 \leq p < \infty$ için a_p^r uzayı, ℓ_∞ uzayını kapsamaz.*

İSPAT. Bunun için, $\ell_\infty - a_p^r$ cümlesinin boş olmadığını göstermeliyiz. Aşikâr olarak $x = (1,1,1,\ldots)$ dizisi, ℓ_∞ uzayındadır. Ancak

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{\infty}\left|\frac{1}{1+n}\sum_{k=0}^{n}(1+r^k)\right|^p &= \sum_{n=0}^{\infty}\left[\frac{1}{1+n}\left(n+1+\frac{1-r^{n+1}}{1-r}\right)\right]^p \\ &= \sum_{n=0}^{\infty}\left[1+\frac{1-r^{n+1}}{(1+n)(1-r)}\right]^p = \infty\end{aligned}$$

çıktığından x dizisi a_p^r uzayında değildir. Şu hâlde; a_p^r uzayı, ℓ_∞ uzayını kapsamaz. □

3. Dual Uzaylar

Bu bölümde; $0 < p < \infty$ için mutlak olmayan tipten a_p^r uzayının sırasıyla α-, β- ve γ-dualleri belirlenecektir.

Teorem 3.11. *d_1^r ve d_2^r cümlelerini*

$$d_1^r = \left\{a = (a_k) \in w : \sup_{k\in\mathbb{N}}\left|\frac{1+k}{1+r^k}a_k\right| < \infty\right\}$$

ve

$$d_2^r = \left\{a = (a_k) \in w : \sum_{k=0}^{\infty}\left|\frac{1+k}{1+r^k}a_k\right|^q < \infty\right\}$$

olarak tanımlayalım. Bu durumda,

$$\left(a_p^r\right)^\alpha = \begin{cases} d_1^r\,, & (0 < p \leq 1) \\ d_2^r\,, & (1 < p < \infty)\end{cases} \tag{3.7}$$

eşitliği geçerlidir.

İSPAT. İspatı, $0 < p \leq 1$ hâli için yapacağız. Paralel tartışmalarla $1 < p < \infty$ için de ispat yapılabileceğinden bu hâlin ayrıntılı ispatı verilmeyecektir. $a = (a_n) \in w$ alalım.

$$y_n = \frac{1}{1+n}\sum_{k=0}^{n}(1+r^k)x_k \tag{3.8}$$

olduğu hatırda tutulursa

$$a_n x_n = \sum_{k=n-1}^{n}(-1)^{n-k}\frac{1+k}{1+r^n}a_n y_k = (By)_n\ ; \quad (n \in \mathbb{N}) \tag{3.9}$$

elde edilir. Burada $B = (b^r_{nk})$ matrisi,.

$$b^r_{nk} = \begin{cases} (-1)^{n-k}\frac{1+k}{1+r^n}a_n & , \quad (n-1 \leq k \leq n) \\ 0 & , \quad (0 \leq k < n-1 \text{ veya } k > n) \end{cases}\ ; \ (k,\ n \in \mathbb{N}) \tag{3.10}$$

şeklinde tanımlanmıştır. O hâlde (3.9) ile "$x = (x_n) \in a^r_p$ için $ax = (a_n x_n) \in \ell_1$ olması, ancak ve ancak $y = (y_n) \in \ell_p$ için $By \in \ell_1$ olmasıyla mümkündür" çift gerektirmesine sahip oluruz. Böylece, Teorem 1.8 gereği

$$\sup_{k \in \mathbb{N}}\left|\frac{1+k}{1+r^k}a_k\right| < \infty$$

elde edilir ki bu ise $\left(a^r_p\right)^\alpha = d^r_1$ olduğunu gösterir. □

Teorem 3.12. *d^r_3 cümlesi*

$$d^r_3 = \left\{a = (a_k) \in w : \sum_{k=0}^{\infty}\left|\Delta\left(\frac{a_k}{1+r^k}\right)(k+1)\right|^q < \infty\right\}$$

şeklinde tanımlansın. Bu durumda,

$$\left(a^r_p\right)^\beta = \left(a^r_p\right)^\gamma = \begin{cases} d^r_1 & , \quad (0 < p \leq 1) \\ d^r_1 \cap d^r_3 & , \quad (1 < p < \infty) \end{cases} \tag{3.11}$$

eşitlikleri geçerlidir.

İSPAT. $0 < p \leq 1$ hâli için benzer olan ispatı vermeksizin teoremi bu defa da $1 < p < \infty$ hâli için ispat edeceğiz. $a = (a_n) \in w$ alalım. x ile y dizileri arasındaki

(3.8) ilişkisi hatırda tutulursa

$$\sum_{k=0}^{n} a_k x_k = \sum_{k=0}^{n-1} (k+1)\Delta\left(\frac{a_k}{1+r^k}\right) y_k + \frac{1+n}{1+r^n} a_n y_n = (Ty)_n \ ; \quad (n \in \mathbb{N}) \qquad (3.12)$$

elde edilir. Burada $T = (t^r_{nk})$ matrisi,

$$t^r_{nk} = \begin{cases} (k+1)\Delta\left(\frac{a_k}{1+r^k}\right) & , \quad (0 \le k \le n-1) \\ \frac{n+1}{1+r^n} a_n & , \quad (k = n) \\ 0 & , \quad (k > n) \end{cases} \ ; \quad (k,\ n \in \mathbb{N}) \qquad (3.13)$$

şeklinde tanımlanmıştır. O hâlde (3.12) ile "$x = (x_n) \in a^r_p$ için $ax = (a_n x_n) \in cs$ olması, ancak ve ancak $y = (y_n) \in \ell_p$ için $Ty \in c$ olmasıyla mümkündür" çift gerektirmesine sahip oluruz. Bu durumda Teorem 1.6 ile

$$\left\{\Delta\left(\frac{a_k}{1+r^k}\right)(k+1)\right\} \in \ell_q$$

ve

$$\left(\frac{1+k}{1+r^k} a_k\right) \in \ell_\infty$$

elde edilir. Bu ise, $\left(a^r_p\right)^\beta = d^r_1 \cap d^r_3$ olduğunu gösterir.

Yine (3.12) eşitliğinden "$x = (x_n) \in a^r_p$ için $ax = (a_n x_n) \in bs$ olması ancak ve ancak $y = (y_n) \in \ell_p$ için $Ty \in \ell_\infty$ olmasıyla mümkündür" çift gerektirmesine sahip oluruz. Böylece Teorem 1.7 den $\left(a^r_p\right)^\gamma = d^r_1 \cap d^r_3$ sonucunu çıkarırız. □

BÖLÜM 4

MATRİS DÖNÜŞÜMLERİ

Bu bölümde, yeni çeşit metod ikilileri hakkında bilgi verilecek ayrıca bazı matris sınıfları karakterize edilecektir.

1. Yeni Çeşit Metod İkilileri

Bu kısımda, Başar [6] tarafından X_p ve ℓ_p uzaylarına uygulanan metodlar için verilen toplama metodu ikilisi kavramını, a_p^r ve ℓ_p uzaylarına uygulanan metodlar bakımından tanımlayacağız.

$x = (x_k)$ ve $y = (y_k)$ dizileri,

$$y_n = \frac{1}{1+n}\sum_{k=0}^{n}(1+r^k)x_k \ ; \quad (n \in \mathbb{N})$$

bağıntısı ile birbirlerine bağlı olsunlar. $x = (x_k)$ dizisinin A dönüşümü $z = (z_n)$ ve $y = (y_k)$ dizisinin B dönüşümü de $t = (t_n)$ olsun. Yani;

$$z_n = (Ax)_n = \sum_{k=0}^{\infty} a_{nk}x_k \ , \quad (n = 0, 1, 2, \ldots) \tag{4.1}$$

ve

$$t_n = (By)_n = \sum_{k=0}^{\infty} b_{nk}y_k \ , \quad (n = 0, 1, 2, \ldots) \tag{4.2}$$

olsun. Uygun bir yolla (z_n) dizisi, (t_n) dizisine (veya (t_n) dizisi, (z_n) dizisine) dönüştürülebiliyorsa o zaman "A ve B, yeni çeşit bir metod ikilisidir" diyeceğiz. Burada A ile B matrislerinin elemanları arasında

$$a_{nk} = \sum_{i=k}^{\infty} \frac{1+r^k}{1+i} b_{ni} \ \text{ veya } \ b_{nk} = \Delta\left(\frac{a_{nk}}{1+r^k}\right)(k+1) \ ; \quad (k,\ n \in \mathbb{N})$$

bağıntısı vardır.

$t = (t_n)$ dizisi, $z = (z_n)$ dizisine aşağıdaki yolla dönüştürülebilir:

$$\begin{aligned} t_n = \sum_{k=0}^{\infty} b_{nk} y_k &= \sum_{k=0}^{\infty} b_{nk} \left(\frac{1}{1+k} \sum_{i=0}^{k} (1+r^i) x_i \right) \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \left(\sum_{i=k}^{\infty} \frac{1+r^k}{1+i} b_{ni} \right) x_k \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} a_{nk} x_k = z_n. \end{aligned}$$

Ancak toplamın sırasını değiştirmek daima mümkün olmayabilir. Bu sebeple A ve B metodları denk olmak zorunda değildir. (4.1) ve (4.2) sonsuz serilerinin kısmî toplamları arasında

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{m} a_{nk} x_k &= \sum_{k=0}^{m} a_{nk} \left\{ \frac{1}{1+r^k} \left[(1+k) y_k - k y_{k-1} \right] \right\} \\ &= \sum_{k=0}^{m-1} \triangle \left(\frac{a_{nk}}{1+r^k} \right) (k+1) y_k + \frac{1+m}{1+r^m} a_{nm} y_m \end{aligned} \tag{4.3}$$

bağıntısı mevcuttur. Şu hâlde, her bir $n \in \mathbb{N}$ için (4.1) ve (4.2) serilerinden biri yakınsarken diğeri de ancak ve ancak

$$\lim_{m \to \infty} \frac{1+m}{1+r^m} a_{nm} y_m = u_n \tag{4.4}$$

mevcut olması hâlinde yakınsar. (4.4) eşitliğinin sağlanması şartıyla (4.3) eşitliğinde $m \to \infty$ için limit alarak

$$z_n = t_n + u_n \tag{4.5}$$

eşitliğine sahip oluruz. Demekki (y_n) dizisi, A ve B metodlarından birisi ile toplanabiliyorsa diğeri ile de ancak ve ancak her bir $n \in \mathbb{N}$ için (4.5) eşitliğinin sağlanması ve

$$\lim_{n \to \infty} u_n = \alpha \tag{4.6}$$

mevcut olması hâlinde toplanabilir. Böylece A ve B metodlarından birinin limitlediği bir dizinin A ve B limitleri, ancak ve ancak (4.6) eşitliğinin $\alpha = 0$ ile sağlanması hâlinde çakışır. $\alpha \neq 0$ ise A ve B metodları tutarsızdır ve bunun tersi de doğrudur.

2. Bazı Matris Sınıflarının Karakterizasyonu

Bu kısımda; $(a_p^r : \ell_\infty)$, $(a_p^r : c)$, $(a_p^r : bs)$ sınıflarını karakterize eden teoremler ifade ve ispat edilecek, $(a_p^r : c_0)$, $(a_p^r : cs)$, $(a_p^r : e_\infty^r)$, $(a_p^r : r_\infty^t)$, $(a_p^r : r_c^t)$, $(a_p^r : \ell_\infty(\Delta))$ ve $(a_p^r : c(\Delta))$ sınıflarındaki matrislerin terimleri üzerindeki gerek ve yeter şartları belirleyen teoremler ispatsız olarak verilecektir.

Teorem 4.1. *$1 < p < \infty$ olsun. Bu durumda; $A \in (a_p^r : \ell_\infty)$ olması için*

$$\sup_{k\in\mathbb{N}} \left| \frac{1+k}{1+r^k} a_{nk} \right| < \infty \; ; \quad (n \in \mathbb{N}) \tag{4.7}$$

ve

$$\sup_{n\in\mathbb{N}} \sum_{k=0}^{\infty} |\tilde{a}_{nk}|^q < \infty \tag{4.8}$$

şartlarının sağlanması gerek ve yeterdir.

İSPAT. (4.7) ve (4.8) şartları sağlansın. Bu durumda herbir sabit $n \in \mathbb{N}$ için $(a_{nk})_{k\in\mathbb{N}} \in (a_p^r)^\beta$ olacağından

$$(Ax)_n = \sum_{k=0}^{\infty} a_{nk} x_k \; ; \quad (n \in \mathbb{N})$$

serileri her $x \in a_p^r$ için yakınsaktır. Bu ise, Ax dönüşüm dizisinin mevcut olduğunu gösterir. Şimdi, $x \in a_p^r$ için $Ax \in \ell_\infty$ olduğunu gösterelim.

$$\sum_{k=0}^{m} a_{nk} x_k = \sum_{k=0}^{m-1} \tilde{a}_{nk} y_k + \frac{1+m}{1+r^m} a_{nm} y_m \tag{4.9}$$

eşitliğinde (4.7) şartının varlığı akılda tutularak $m \to \infty$ için limit alınırsa

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_{nk} x_k = \sum_{k=0}^{\infty} \tilde{a}_{nk} y_k \tag{4.10}$$

olur. (4.10) eşitliğine Hölder eşitsizliği uygulanırsa

$$\begin{aligned} |(Ax)_n| = \left| \sum_{k=0}^{\infty} a_{nk} x_k \right| &\le \sum_{k=0}^{\infty} |\tilde{a}_{nk}| \, |y_k| \\ &\le \| y \|_{\ell_p} \left(\sum_{k=0}^{\infty} |\tilde{a}_{nk}|^q \right)^{1/q} \end{aligned} \tag{4.11}$$

elde edilir. (4.11) eşitsizliğinde $n \in \mathbb{N}$'ler üzerinden supremum alınırsa

$$\sup_{n\in\mathbb{N}} |(Ax)_n| \leq \| y \|_{\ell_p} \sup_{n\in\mathbb{N}} \left(\sum_{k=0}^{\infty} |\tilde{a}_{nk}|^q \right)^{1/q} < \infty$$

bulunur. Bu ise $Ax \in \ell_\infty$ ve dolayısıyla $A \in (a_p^r : \ell_\infty)$ olduğunu gösterir.

Tersine $A \in (a_p^r : \ell_\infty)$ olsun. Hipotezden dolayı, her $x \in a_p^r$ için Ax dönüşüm dizisi mevcut ve sınırlıdır. Böylece her $n \in \mathbb{N}$ için $(a_{nk})_{k\in\mathbb{N}} \in (a_p^r)^\beta$ olur ki $\tilde{a}_n = \{\tilde{a}_{nk}\}_{k\in\mathbb{N}}$ şeklinde tanımlanırsa (4.7) ve

$$\|\tilde{a}_n\|_q < \infty$$

sağlanır. Böylece (4.9) eşitliğinden, (4.7) şartı da akılda tutularak (4.10) eşitliği elde edilir. Diğer taraftan $a_n = (a_{nk})_{k\in\mathbb{N}}$ dizileri a_p^r üzerinde

$$f_n(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_{nk} x_k \ ; \quad (n \in \mathbb{N})$$

şeklinde sürekli lineer fonksiyonellerini tanımlar. a_p^r ve ℓ_p uzayları lineer olarak izomorfik olduklarından

$$\| f_n \| = \| \tilde{a}_n \|_{\ell_q}$$

elde edilir. Ayrıca, $(f_n(x)) = (f_1(x),\ f_2(x), \ldots, f_n(x), \ldots) \in \ell_\infty$ olduğundan

$$\sup_{n\in\mathbb{N}} |f_n(x)| < \infty.$$

Böylece Banach-Steinhaus Teoremi gereğince

$$\sup_{n\in\mathbb{N}} \|f_n\| = \sup_{n\in\mathbb{N}} \|\tilde{a}_n\|_{\ell_q} = \sup_{n\in\mathbb{N}} \left(\sum_{k=0}^{\infty} |\tilde{a}_{nk}|^q \right)^{1/q} < \infty$$

elde edilir ki bu da (4.8) şartının gerekliliğini gösterir. □

Teorem 4.2. *$1 < p < \infty$ olsun. O zaman; $A \in (a_p^r : c)$ olması için (4.7), (4.8) ve*

$$\lim_{n\to\infty} \tilde{a}_{nk} = \delta_k \ ; \quad (k \in \mathbb{N}) \tag{4.12}$$

şartlarının sağlanması gerek ve yeterdir.

İSPAT. (4.7), (4.8) ve (4.12) şartları sağlansın. Bu durumda; (4.7) ve (4.8) şartlarından her $n \in \mathbb{N}$ için $(a_{nk})_{k\in\mathbb{N}} \in (a_p^r)^\beta$ ve böylece her $x \in a_p^r$ için

$$(Ax)_n = \sum_{k=0}^{\infty} a_{nk}x_k \ ; \quad (n \in \mathbb{N})$$

serileri yakınsak olacağından Ax dönüşüm dizisi mevcuttur. (4.12) ile

$$|\tilde{a}_{nk}|^q \to |\delta_k|^q \ , \quad (n \to \infty)$$

elde edilir. Her $m > 0$ tamsayısı için

$$\left(\sum_{k=0}^{m} |\tilde{a}_{nk}|^q\right)^{1/q} \leq \sup_{n\in\mathbb{N}} \left(\sum_{k=0}^{\infty} |\tilde{a}_{nk}|^q\right)^{1/q} = \beta$$

olduğundan $n \to \infty$ için

$$\left(\sum_{k=0}^{m} |\delta_k|^q\right)^{1/q} \leq \sup_{n\in\mathbb{N}} \left(\sum_{k=0}^{\infty} |\tilde{a}_{nk}|^q\right)^{1/q}$$

elde edilir. Bu, her $m > 0$ tamsayısı için doğru olduğundan

$$\left(\sum_{k=0}^{\infty} |\delta_k|^q\right)^{1/q} < \infty$$

bulunur. Her $x \in a_p^r$ dizisi için

$$y_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{1+r^k}{1+n} x_k \to 0 \ , \quad (n \to \infty)$$

dır. $\varepsilon > 0$ verilsin. Bu taktirde $x \in a_p^r$ dizisine karşılık gelen $y \in \ell_p$ dizisi için

$$\left(\sum_{k=N}^{\infty} |y_k|^p\right)^{1/p} < \frac{\varepsilon}{4\beta}$$

olacak şekilde $N > 0$ sayısı mevcuttur. (4.12) ile her $n \geq N_1$ için

$$\left|\sum_{k=0}^{N} \{\tilde{a}_{nk} - \delta_k\} y_k\right| < \frac{\varepsilon}{2}$$

olacak şekilde N_1 tam sayısı vardır. Şimdi, $n \geq N_1$ için

$$\begin{aligned} \left|\sum_{k=0}^{\infty}\{\tilde{a}_{nk}-\delta_k\}y_k\right| &\leq \left|\sum_{k=0}^{N}\{\tilde{a}_{nk}-\delta_k\}y_k\right| + \left|\sum_{k=N+1}^{\infty}\{\tilde{a}_{nk}-\delta_k\}y_k\right| \\ &< \frac{\varepsilon}{2} + \left(\sum_{k=N+1}^{\infty}[|\tilde{a}_{nk}|+|\delta_k|]^q\right)^{1/q}\left(\sum_{k=N+1}^{\infty}|y_k|^p\right)^{1/p} \\ &< \frac{\varepsilon}{2} + 2\beta\frac{\varepsilon}{4\beta} = \varepsilon \end{aligned}$$

elde edilir. Böylece,

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=0}^{\infty}\tilde{a}_{nk}y_k = \sum_{k=0}^{\infty}\delta_k y_k$$

olur. Buradan da

$$\lim_{n\to\infty}(Ax)_n = \lim_{n\to\infty}\sum_{k=0}^{\infty}\tilde{a}_{nk}y_k = \sum_{k=0}^{\infty}\delta_k y_k$$

elde edilir ki bu $Ax \in c$, dolayısıyla $A \in (a_p^r : c)$ olduğunu gösterir.

Tersine $A \in (a_p^r : c)$ olsun. (4.7) ve (4.8) şartlarının gerekliliği, $c \subset \ell_\infty$ olduğundan Teorem 4.1'den derhâl elde edilir. Şimdi, (4.12) şartının gerekliliğini ispatlayalım. Herbir sabit $k \in \mathbb{N}$ için

$$x_j^{(k)} = \begin{cases} \frac{1+k}{1+r^k} & , \quad (j=k) \\ -\frac{1+k}{1+r^{k+1}} & , \quad (j=k+1) \\ 0 & , \quad (\text{diğer hallerde}) \end{cases} \quad ; \quad (j,\ k \in \mathbb{N})$$

ile $\left\{x_j^{(k)}\right\}$ dizisini tanımlayalım. Bu durumda,

$$y_j^{(k)} = \sum_{i=0}^{j} a_{ji}x_i^{(k)} = \begin{cases} 1 & , \quad (j=k) \\ 0 & , \quad (j\neq k) \end{cases} \quad ; \quad (j,\ k \in \mathbb{N})$$

olur. Bu şekilde tanımlanan $x^{(k)}$ dizisi için $Ax^{(k)} \in c$ olduğundan

$$\begin{aligned}\left(Ax^{(k)}\right)_n &= \sum_{j=0}^{\infty} a_{nj}x_j^{(k)} \\ &= (1+k)\left(\frac{a_{nk}}{1+r^k} - \frac{a_{n,k+1}}{1+r^{k+1}}\right) \\ &= \tilde{a}_{nk} \to \delta_k \ , \quad (n \to \infty)\end{aligned}$$

elde edilir. Böylece (4.12) sağlanır. Bu da ispatı tamamlar. □

Teorem 4.3. *$1 < p < \infty$ olsun. O zaman; $A \in (a_p^r : bs)$ olması için*

$$\sup_{k\in\mathbb{N}} \left|\frac{1+k}{1+r^k} a(n,k)\right| < \infty \ ; \quad (n \in \mathbb{N}) \tag{4.13}$$

ve

$$\sup_{n\in\mathbb{N}} \sum_{k=0}^{\infty} \left|\Delta\left\{\frac{1}{1+r^k} a(n,k)\right\}(k+1)\right|^q < \infty \tag{4.14}$$

şartlarının sağlanması gerek ve yeterdir.

İSPAT. $A \in (a_p^r : bs)$ ve $x \in a_p^r$ olsun. Her $k, n \in \mathbb{N}$ için $B = (b_{nk})$ matrisini $b_{nk} = a(n,k)$ eşitliği ile tanımlayalım. $\sum_{j=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} a_{jk}x_k$ serisinin n, m.kısmî toplamından

$$\sum_{j=0}^{n} \sum_{k=0}^{m} a_{jk}x_k = \sum_{k=0}^{m} b_{nk}x_k \ ; \quad (n \in \mathbb{N}) \tag{4.15}$$

eşitliği elde edilir. (4.15) eşitliğinde $m \to \infty$ için limite geçilirse,

$$\sum_{j=0}^{n} \sum_{k=0}^{\infty} a_{jk}x_k = \sum_{k=0}^{\infty} b_{nk}x_k \ ; \quad (n \in \mathbb{N}) \tag{4.16}$$

elde edilir. Ayrıca bs ve ℓ_∞ uzaylarının lineer olarak izomorfik oldukları hatırda tutulursa buradan "her $x \in a_p^r$ için $Ax \in bs$ olması ancak ve ancak her $x \in a_p^r$ için $Bx \in \ell_\infty$ olmasıyla mümkündür" çift gerektirmesine ulaşılır. Böylece teoremin ispatı, Teorem 4.1'de a_{nk} yerine b_{nk} koymakla kolayca elde edilir. □

$(a_p^r : c_0)$ ve $(a_p^r : cs)$ sınıfları, sırasıyla Teorem 4.2 ve Teorem 4.3'deki yolla ispat edilebileceğinden onları karakterize eden teoremleri ispatsız olarak aşağıda vereceğiz.

Teorem 4.4. $1 < p < \infty$ *olsun. Bu durumda;* $A \in (a_p^r : c_0)$ *olması için (4.7), (4.8) şartlarının ve her* $k \in \mathbb{N}$ *için* $\delta_k = 0$ *ile (4.12) şartının sağlanması gerek ve yeterdir.*

Teorem 4.5. $1 < p < \infty$ *olsun. Bu durumda;* $A \in (a_p^r : cs)$ *olması için (4.13), (4.14) ve*

$$\lim_{n\to\infty} \Delta \left\{ \frac{1}{1+r^k} a(n,k) \right\} (k+1) = \alpha_k \ ; \quad (k \in \mathbb{N}) \tag{4.17}$$

şartlarının sağlanması gerek ve yeterdir.

Altay, Başar ve Mursaleen [1, Lemma 6.6] tarafından verilen aşağıdaki temel lemma, birçok matris sınıfını karakterize etmek için oldukça kullanışlıdır.

Lemma 4.1. λ *ve* μ *herhangi iki dizi uzayı,* A *bir sonsuz ve* B *de bir üçgen matris olsun. O zaman,* $A \in (\lambda : \mu_B)$ *olması için gerek ve yeter şart* $BA \in (\lambda : \mu)$ *olmasıdır.*

Şimdi, Lemma 4.1 yardımıyla bazı matris sınıflarını karakterize eden teoremleri verelim.

Teorem 4.6. $A = (a_{nk})$ *bir sonsuz matris ve* $C = (c_{nk})$ *matrisi de,*

$$c_{nk} = \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} (1-r)^{n-j} r^j a_{jk} \ ; \quad (k,\ n \in \mathbb{N})$$

eşitliği ile tanımlansın. Bu durumda; $A \in (a_p^r : e_\infty^r)$ *olması için*

$$\sup_{k\in\mathbb{N}} \left| \frac{1+k}{1+r^k} c_{nk} \right| < \infty \ ; \quad (n \in \mathbb{N}) \tag{4.18}$$

ve

$$\sup_{n\in\mathbb{N}} \sum_{k=0}^{\infty} \left| \Delta \left\{ \frac{c_{nk}}{1+r^k} \right\} (k+1) \right|^q < \infty \tag{4.19}$$

şartlarının sağlanması gerek ve yeterdir.

Burada e_∞^r dizi uzayı, Altay, Başar ve Mursaleen [1] tarafından tanımlanan ve E^r-dönüşümü ℓ_∞ uzayında olan dizilerin uzayıdır.

$A = (a_{nk})$ bir sonsuz matris ve $t = (t_k)$ pozitif terimli bir dizi olsun.

$$T_n = \sum_{k=0}^{n} t_k \; ; \quad (n \in \mathbb{N})$$

olmak üzere $D = (d_{nk})$ matrisi de

$$d_{nk} = \frac{1}{T_n} \sum_{j=0}^{n} t_j a_{jk} \; ; \quad (k,\ n \in \mathbb{N})$$

ile tanımlansın. Böylece, Teorem 4.1 ve Teorem 4.2'den aşağıdaki teoremleri elde ederiz.

Teorem 4.7. *$1 < p < \infty$ olsun. Bu durumda; $A \in (a_p^r : r_\infty^t)$ olması için*

$$\sup_{k \in \mathbb{N}} \left| \frac{1+k}{1+r^k} d_{nk} \right| < \infty \; ; \quad (n \in \mathbb{N}) \tag{4.20}$$

ve

$$\sup_{n \in \mathbb{N}} \sum_{k=0}^{\infty} \left| \Delta \left\{ \frac{d_{nk}}{1+r^k} \right\} (k+1) \right|^q < \infty \tag{4.21}$$

şartlarının sağlanması gerek ve yeterdir.

$r_\infty^t(p)$ dizi uzayı, Altay va Başar [2] tarafından tanımlanan ve R^t-dönüşümü $\ell_\infty(p)$ uzayında olan dizilerin uzayıdır. Burada, her $k \in \mathbb{N}$ için $p_k = 1$ alınarak r_∞^t normlu uzayı elde edilmektedir.

$t = e$ durumunda r_∞^t uzayı, mutlak olmayan tipten X_∞ Cesàro dizi uzayına indirgenir. Bu sebeple Teorem 4.7 aynı zamanda $(a_p^r : X_\infty)$ sınıfının karakterizasyonunu da ihtiva etmektedir.

Teorem 4.8. *$1 < p < \infty$ olsun. Bu durumda; $A \in (a_p^r : r_c^t)$ olması için (4.20), (4.21) ve*

$$\lim_{n \to \infty} \Delta \left\{ \frac{d_{nk}}{1+r^k} \right\} (k+1) = \alpha_k \; ; \quad (k \in \mathbb{N}) \tag{4.22}$$

şartlarının sağlanması gerek ve yeterdir.

$A = (a_{nk})$ bir sonsuz matris ve $E = (e_{nk})$ matrisi de

$$e_{nk} = a_{nk} - a_{n+1,\ k} \ ; \quad (k,\ n \in \mathbb{N})$$

şeklinde tanımlansın. Böylece, Teorem 4.1 ve Teorem 4.2'den aşağıdaki teoremleri elde ederiz.

Teorem 4.9. $1 < p < \infty$ *olsun. Bu durumda;* $A \in (a_p^r : \ell_\infty(\triangle))$ *olması için*

$$\sup_{k \in \mathbb{N}} \left| \frac{1+k}{1+r^k} e_{nk} \right| < \infty \ ; \quad (n \in \mathbb{N}) \tag{4.23}$$

ve

$$\sup_{n \in \mathbb{N}} \sum_{k=0}^{\infty} \left| \triangle \left\{ \frac{e_{nk}}{1+r^k} \right\} (k+1) \right|^q < \infty \tag{4.24}$$

şartlarının sağlanması gerek ve yeterdir.

Teorem 4.10. $1 < p < \infty$ *olsun. Bu durumda;* $A \in (a_p^r : c(\triangle))$ *olması için (4.23), (4.24) ve*

$$\lim_{n \to \infty} \triangle \left\{ \frac{e_{nk}}{1+r^k} \right\} (k+1) = \alpha_k \ ; \quad (k \in \mathbb{N}) \tag{4.25}$$

şartlarının sağlanması gerek ve yeterdir.

Burada $\ell_\infty(\triangle)$ ve $c(\triangle)$, Kızmaz [10] tarafından tanımlanan sırasıyla bütün sınırlı ve yakınsak fark dizilerinin uzaylarını göstermektedir.

Kaynakça

[1] B. ALTAY, F. BAŞAR, MURSALEEN, *On the Euler sequence spaces which include the ℓ_p and ℓ_∞*, (yazışma safhasında).

[2] B. ALTAY, F. BAŞAR, *On the paranormed Riesz sequence spaces of non-absolute type*, Southeast Asian Bull. Math., **26**(2002), (çıkacak).

[3] C. AYDIN, F. BAŞAR, *On the new sequence spaces which include the spaces c_0 and c*, (yazışma safhasında).

[4] C. AYDIN, F. BAŞAR, *Some new difference sequence spaces*, (yazışma safhasında).

[5] F. BAŞAR, *A note on the triangle limitation methods*, Fırat Ün. Fen ve Müh. Bilimleri Dergisi **5**(1)(1993), 113-117.

[6] F. BAŞAR, *Matrix transformations between certain sequence spaces of X_p and ℓ_p*, Soochow J. Math. **26**(2)(2000), 191-204.

[7] D. J. H. GARLING, *The β- and γ-duality of sequence spaces*, Proc. Camb. Phil. Soc., **63**(1967), 963-981.

[8] K. -G. GROSS- ERDMANN, *Matrix transformations between the sequence spaces of Maddox*, J. Math. Anal. Appl., **180**(1993), 223-238.

[9] G. H. HARDY, J. E. LITTLEWOOD, G. POLYA, *Inequalities*, Cambridge University Press, 1952.

[10] H. KIZMAZ, *On certain sequence spaces*, Canad. Math. Bull., **24**(2)(1981), 169-176.

[11] I. J. MADDOX, *Elements of Functional Analysis*, Cambridge University Press 2nd ed., 1988.

[12] E. MALKOWSKY, *Recent results in the theory of matrix transformations in sequence spaces*, Mat. Vesnik, **49**(1997), 187-196.

[13] N. PENG-NUNG, L. PENG-YEE, *Cesàro sequence spaces of non-absolute type*, Comment. Math. Prace Mat., **20**(2)(1978), 193-197.

[14] G. M. PETERSEN, *Regular Matrix Transformations*, McGraw-Hill Publishing Company Limited, London, 1966.

[15] M. STIEGLITZ, H. TIETZ, *Matrix transformationen von folgenräumen eine ergebnisübersicht*, Math. Z., **154**(1977), 1-16.

[16] CHUNG-SHIN WANG, *On Nörlund sequence spaces, Tamkang J. Math.*, **9**(1978), 269-274.

[17] A. WILANSKY, *Summability through Functional Analysis*, North-Holland Mathematics Studies, **85**, Amsterdam-Newyork-Oxford, 1984.

ÖZGEÇMİŞ

1959 yılında Yusufeli'de doğdu. İlkokul, ortaokul ve liseyi burada okudu. 1985 yılında Atatürk Üniversitesi Fen-Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümü'nden mezun oldu. 1986-1993 yıllarında Diyarbakır'da öğretmenlik ve idarecilik yaptı. 1993 yılında Kahramanmaraş Sütçü İmam Üniversitesi'nde araştırma görevliliğine başladı. 1996 yılında Harran Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü'nde yüksek lisansını tamamladı. Evli ve üç çocuk babasıdır.

Cafer AYDIN