T.C
İNÖNÜ ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

TOPOLOJİK 2-GRUPOİDLER

MUSTAFA HABİL GÜRSOY

YÜKSEK LİSANS TEZİ
MATEMATİK ANABİLİM DALI

MALATYA
2002

Fen Bilimleri Enstitüsü Müdürlüğü'ne

Bu çalışma Jürimiz tarafından Matematik Anabilim Dalında YÜKSEK LİSANS TEZİ olarak kabul edilmiştir.

Prof.Dr. Sadık KELEŞ

Başkan

Doç.Dr. İlhan İÇEN

Üye

Yrd.Doç.Dr. Erol KILIÇ

Üye

ONAY

Yukarıdaki imzaların adı geçen öğretim üyelerine ait olduğunu onaylarım.

26/9/2002

Doç.Dr.Özfer YEŞİLADA

Enstitü Müdürü

ÖZET

Yüksek Lisans Tezi

TOPOLOJİK 2-GRUPOİDLER

Mustafa Habil GÜRSOY

İnönü Üniversitesi

Fen Bilimleri Enstitüsü

Matematik Anabilim Dalı

v+58 Sayfa

2002

Danışman:Doç.Dr. İlhan İÇEN

Bu çalışmada, kategori teorideki bazı cebirsel kavramların topolojik versiyonunu tanıttık ve İçen [16] tarafından verilen " 2-grupoidler ve grupoidler üzerinde crossed modüllerin kategorilerinin denkliği " nin topolojik versiyonunu ispatladık.

Bu çalışma üç bölümden oluşmaktadır.

Birinci bölümde, diğer bölümlerin daha iyi anlaşılması için kategori teorinin temel kavramları ve bunların bazı özellikleri verildi.

İkinci bölümde, birinci bölümde verilen tanımların topolojik versiyonları tanımlandı ve böylece ilk defa topolojik 2-grupoid tanımlandı .

Son bölümde ise, çalışmanın esasını oluşturan topolojik 2-grupoidler ile topolojik crossed modüller kategorilerinin denkliği verildi.

Anahtar Kelimeler: Kategori , Funktor , Doğal Transformasyon , Grupoid , 2-Grupoid , Crossed Modül.

ABSTRACT

M.Sc.Thesis

TOPOLOGICAL 2-GROUPOIDS

Mustafa Habil GÜRSOY

İnönü University

Graduate School of Natural and Applied Sciences

Department of Mathematics

v+58 pages

2002

Supervisor:Assoc.Prof.Dr.İlhan İÇEN

In this work,we introduce topological version of some algebraic concepts in Category Theory and prove topological version of " the equivalance of categories 2-groupoids and crossed modules over groupoids " given by Içen **[16]**.

This work consists of three chapters.

In the first chapter, fundamental concepts of category theory and its some properties are given so that other chapters more understood.

In the second chapter, topological versions of definitions in the first chapter are defined. First time, topological 2-groupoid is introduced.

In the last chapter, the equivalence categories of topological 2-groupoids and topological crossed modules, which is the main work of the thesis, is given.

Key Words: Category, Functor, Natural Transformation, Groupoid, 2-Groupoid, Crossed Modul.

TEŞEKKÜR

Tez konumu veren ve çalışmalarımın her adımında bilgi ve görüşlerini esirgemeyen danışman hocam Sayın Doç.Dr. İlhan İÇEN' e, gerek lisans gerek yüksek lisans'ta üzerimde büyük emekleri olduğunu düşündüğüm başta bölüm başkanım, hocam Sayın Prof.Dr. Sadık KELEŞ 'e ve diğer bölüm hocalarıma, çalışmalarımın her aşamasında bilgi ve görüşlerinden yararlandığım değerli arkadaşım Arş. Gör. Abdullah Fatih ÖZCAN' a, tezimin yazımı esnasında bilgilerini ve vaktini esirgemeyen değerli arkadaşım Arş. Gör. Mustafa Kemal ÖZDEMİR' e, haklarını asla ödeyemeyeceğim sevgili anne ve babama teşekkürlerimi sunarım.

İÇİNDEKİLER

GİRİŞ

Günümüzde başta kategori teori olmak üzere matematiğin pek çok dalında grupoidlerin önemli bir yeri vardır. Grupoidler ilk defa 1926 yılında Alman matematikçi H.Brandt'ın " Über eine Verallgemeinerrung des Grup penbergiffes " isimli makalesinde matematik dünyasına sunulmuştur. Fakat, Brandt bir extra şart koymuştur;

$$\text{her } x, y \in ObG \text{ için } Mor(x, y) \neq \emptyset.$$

Günümüzde özel olarak bu şartı sağlayan grupoidlere geçişli (transitive) grupoidler diyoruz.

Aynı tarihlerde, A. Loewy cisimlerin genişletmeleri arasındaki izomorfizmleri incelemek için, " Neue elementare Begrün dug und Erweiterung der Galoisschen Theorie " isimli makalesinde grupoidlere benzer " bileşik grupları" kullanmış, daha sonra R. Baer," Beitrage zur Galoisschen Theorie " isimli makalesinde Loewy' nin fikirlerini geliştirmiştir. Bu da beraberinde grupoidlerin modern halkaların Galois teorisinde geniş bir uygulamasını getirmiştir.

1950 yılında S.Eilenberg ve S.MacLane " The general theory of natural equivalences " isimli makalede kategorinin tanımını vermişlerdir. Grupoid, kategorinin özel bir durumudur. Şöyle ki, bir kategoride herbir morfizmin tersi varsa yani herbir morfizm izomorfizm ise grupoiddir. Bundan sonra grupoidlere olan ilgi daha da büyüdü . 1950'den sonra C.Ehresmann grupoidlerin kullanım alanını genişletti. Bugün homotopi teori, ergodic teorisi, fibre bundle teorisi, foliant teorisi, fonksiyonel analiz, diferensiyal geometri gibi matematiğin pek çok dalında grupoidler yerini almıştır.

Diğer taraftan yüksek boyutlu kategori değişik matematikçiler tarafından genişçe ele alınmıştır [**6,9,13,24,26**]. Yüksek boyutlu kategorilerden biri de 2-kategoridir. 2-kategori, 1963' de Ehresmann tarafından literatüre kazandırılmıştır. 2-grupoid de bunun özel bir halidir. Bir 2-grupoid, bütün morfizmlerinin tersi olan bir 2-kategoridir. Daha sonra 1974' de Kelly ve Street [**13**], J.W. Gray [**26**], 1981' de R.Brown ve P.J.Higgins, 1995' de İ. İçen [**16**] 2-grupoidler üzerine çalışmışlardır.

Bu tezin temelini oluşturan bir diğer cebirsel kavram crossed modüldür. Crossed modül kavramı, ilk kez 1949 yılında J.H.C. Whitehead [**33**]' ın "Combinatorial Homotopy Theory I,II " isimli çalışmasıyla literatüre girmiştir. Whitehead ikinci mertebeden homotopi gruplarının cebirsel yapılarını oluştururken bu kavramı vermiştir. Daha sonra geniş bir matematikçi kitlesi tarafından matematiğin farklı dallarında kullanılmıştır.

İlk olarak gruplar üzerinde tanımlanan crossed modüller sonraki yıllarda değişik cebirsel yapılar üzerinde tanımlanmıştır. Mesela 1966' da Gerstenhaber ve 1967' de Licthttenbaum-Schlessinger komutatif cebirler ve asosyatif cebirler üzerinde çalışmışlardır. Bununla birlikte 1986' da T. Porter komutatif cebirler için literatüre uygun bir biçimde crossed modül kavramını tanımlamıştır. 1982' de Brown ve Higgins grupoidler üzerinde crossed modül tanımını vermişlerdir. Bizim ele alacağımız crossed modül de grupoidler üzerindeki crossed modüldür.

Crossed modüllerin denk olduğu en az altı kategori vardır. Bunların literatürde ayrıntılı ispatları verilmiştir [**20,35**]. Bunlardan en önemlilerden birisi de 2-grupoide denkliğidir. Bu denklik en genel haliyle Brown-Higgins tarafından verilmiştir. Fakat bu ispat oldukça karmaşıktır. Ancak bu denkliğin ayrıntılı ispatı İçen [6] tarafından verilmiştir. Bu tezin orjinal kısmı da bu ispatın topolojik versiyonunu içermektedir.

BÖLÜM I

1 TEMEL KAVRAMLAR

1.1 Kategori

Kategori teori son otuz yılda ortaya çıkan ve kendi başına gelişen matematiğin bir dalıdır. Kendi orjinal tanımları vardır. Gelişimini cebirsel topoloji yardımıyla sağlamıştır. Kategori, funktor, doğal transformasyon, doğal eşdeğerlik tanımları Eilenberg ve MacLane tarafından verildikten sonra hemen topolojide kullanılan cebirsel yapıların çerçevesi oluşturulmuştur. Bugün oldukça geniş bir uygulama alanı vardır. Bu kavramın kullanılmadığı matematiğin hemen hemen hiç bir dalı yoktur. Biz de şimdi kategori tecrinin temel tanım ve kavramlarını verelim. Bu kavramlar literatürde sabittir **[1,12]**.

1.1.1 Tanım:

Bir $\mathcal{C}$ **kategorisi** iki sınıf ve bu sınıflar arası dönüşümlerden oluşan bir sistemdir. Bu sınıflar; elemanlarına nesne ismi verilen Ob($\mathcal{C}$) ve elemanlarına morfizm ismi verilen Mor($\mathcal{C}$) ile gösterilir.

$\mathcal{C}$ nin her bir morfizmine, tanım ve değer bölgesi olarak adlandırılan iki nesne karşılık gelmektedir. $x, y \in Ob(\mathcal{C})$ nesnelerini sırasıyla tanım ve değer bölgesi olarak kabul eden bütün morfizmlerin kümesi $Mor(x, y)$ veya $\mathcal{C}(x, y)$ ile gösterilir, $f \in Mor(x, y)$ için

$$f : x \to y$$

yazılır.

Bir $\mathcal{C}$ kategorisi için dönüşümler;

i) **kaynak(source) dönüşümü,**

$$s : Mor(x,y) \to Ob(\mathcal{C})$$
$$f \longmapsto s(f) = x$$

ii) **hedef(target) dönüşümü,**

$$t : Mor(x,y) \to Ob(\mathcal{C})$$
$$f \longmapsto t(f) = y$$

iii) **nesne dönüşümü,**

$$\epsilon : Ob(\mathcal{C}) \to Mor(x,x)$$
$$x \longmapsto \epsilon(x) = \tilde{x} = id_x = I_x$$

ve son olarak

iv) kısmi çarpım işlemi

$x, y, z \in Ob(\mathcal{C})$ ve $s(f) = t(g)$ olmak üzere

$$m : Mor(x,y) * Mor(y,z) \to Mor(x,z)$$

şeklinde tanımlanır.

Yukarıda tanımladığımız dönüşümler şu aksiyomları sağlar:

KAT.1.(Birleşme)

Eğer $f \in Mor(x,y), g \in Mor(y,z), h \in Mor(z,t)$ ise

$$h * (g * f) = (h * g) * f$$

dir.

KAT.2.(Özdeş morfizmin varlığı)

Her $x \in Ob(\mathcal{C})$ için öyle bir $I_x \in Mor(x,x)$ var ve $g \in Mor(x,y)$, $f \in Mor(y,x)$ ise

$$I_x * f = f \text{ ve } g * I_x = g$$

dir[5].

Kısaca bir kategori $\mathcal{C}$=($Mor(\mathcal{C})$,Ob($\mathcal{C}$),s,t,ϵ, m) ile gösterilir.

1.1.2 Örnek:

Kümeler ve bu kümeler arasındaki morfizmler bir kategori oluşturur. Gerçekten, morfizmlerin kümesi, kümeler arası fonksiyonlar,

$$\text{Mor}(\mathcal{C})=\{\text{f}|\text{f:X}\rightarrow\text{Y fonksiyon ; X,Y birer küme}\}$$

ve nesnelerin kümesi,

$$Ob(\mathcal{C})=\{X\ |\text{X bir küme}\}$$

olmak üzere,

$f \in Mor(\mathcal{C})$, $f : X \longrightarrow Y$ için , kaynak ve hedef dönüşümleri, sırasıyla

$$s(f) = X \text{ ve } t(f) = Y,$$

nesne dönüşümü

$$\epsilon(X) = id_X : X \longrightarrow X$$

ve kısmi çarpım işlemi

$$Mor(\mathcal{C})*\text{Mor}(\mathcal{C})=\{(g,f)\in\text{Mor}(\mathcal{C})\times\text{Mor}(\mathcal{C})|\ \text{t(f)=s(g)}\}$$

ile birlikte ($Mor(\mathcal{C})$,Ob($\mathcal{C}$),s,t,ϵ,m) bir kategori oluşturur[1].

1.1.3 Örnek:

Topolojik uzaylar ve aralarında sürekli fonksiyonlar bir kategori oluşturur. Gerçekten, morfizmlerin kümesi topolojik uzaylar arası sürekli dönüşümler,

$$\text{Mor}(\mathcal{C})=\{f|f:X\rightarrow Y \text{ sürekli dönüşümler ; } X,Y \text{ topolojik uzaylar}\}$$

ve nesnelerin kümesi,

$$Ob(\mathcal{C})=\{X \mid X \text{ bir topolojik uzay}\}$$

olmak üzere,

$f \in Mor(\mathcal{C})$, $f : X \overset{sürekli}{\longrightarrow} Y$ için , kaynak ve hedef dönüşümleri, sırasıyla

$$s(f) = X \quad \text{ve} \quad t(f) = Y,$$

nesne dönüşümü

$$\epsilon(X) = id_X : X \overset{sürekli}{\longrightarrow} X$$

ve kısmi çarpım işlemi

$$Mor(\mathcal{C})*\text{Mor}(\mathcal{C})=\{(g,f)\in\text{Mor}(\mathcal{C})\times\text{Mor}(\mathcal{C})| \ t(f)=s(g)\}$$

ile birlikte ($Mor(\mathcal{C})$,Ob($\mathcal{C}$),s,t,ϵ,m) bir kategori oluşturur[**1**].

1.1.4 Örnek:

M bir monoid olsun. Bu takdirde M bir kategori oluşturur öyle ki $Ob(M) = \{e\}$ (e, monoidin birim elemanı), $Mor(M) = M$, kompozisyon ise M'nin monoid işlemi ve özdeş morfizmi de M'nin birim elemanıdır [**1**].

1.1.5 Tanım:

$\mathcal{C}$ ve $\mathcal{D}$ iki kategori olsun. Aşağıdaki şartlar sağlanıyorsa $\mathcal{D}$' ye $\mathcal{C}$'nin **altkategorisi** denir;

1) $\mathcal{D}$' nin herbir nesnesi $\mathcal{C}$'nin de bir nesnesi, yani, $Ob(\mathcal{D}) \subseteq Ob(\mathcal{C})$.
2) $\forall x, y \in Ob(\mathcal{D})$ için $\mathcal{D}(x,y) \subseteq \mathcal{C}(x,y)$,
3) $\mathcal{D}$ 'deki morfizmlerin kompozisyonu $\mathcal{C}$ 'deki kompozisyon ile aynı,
4) $\forall x \in Ob(\mathcal{D})$ için $\mathcal{D}(x,x)$ özdeşliği $\mathcal{C}(x,x)$ özdeşliğidir [1].

1.1.6 Tanım:

$\mathcal{D}$, $\mathcal{C}$ 'nin altkategorisi olsun.

1) Eğer $Ob(\mathcal{D}) = Ob(\mathcal{C})$ ise $\mathcal{D}$'ye $\mathcal{C}$'nin **geniş** (wide) altkategorisi denir.
2) Eğer herbir $x, y \in Ob(\mathcal{D})$ için $\mathcal{D}(x,y)$=$\mathcal{C}(x,y)$ ise $\mathcal{D}$' ye $\mathcal{C}$' nin **tam** (full) altkategorisi denir [1].

1.2 Eğrilerin homotopisi

Y bir topolojik uzay olsun. Kabaca Y'nin iki alt uzayı " **homotoptur**" denir, eğer birinden diğerine sürekli bir deformasyon ile geçilebiliyorsa.

Şimdi Y'deki basit eğrileri düşünelim. $I = \{x \in IR : 0 \leq x \leq 1\}$ kapalı aralık olmak üzere I'daki topoloji bilinen topoloji olsun. Yani $x, y \in I$ olmak üzere $d(x,y) = |x-y|$ metriği ile elde edilen topoloji olsun.

Basit eğri diye; $\alpha : I \to Y$ sürekli fonksiyonunun Y topolojik uzayındaki görüntüsüne denir. α, β iki basit eğri olmak üzere α, β' ya homotoptur denir, eğer α sürekli olarak β' ya dönüştürülebiliyorsa.

$0 \leq t \leq 1$ olsun. Bu kapalı aralığı J ile gösterelim. t parametresine bağlı Y' deki α_t eğri ailesini gözönüne alalım, öyle ki $\alpha_0 = \alpha$, $\alpha_1 = \beta$ ve t, J' yi taradığında α_t sürekli olarak değişsin. Şimdi

$$F(x,t) = F : I \times J \to Y$$

fonksiyonunu tanımlayalım. Eğer F fonksiyonu sürekli ve t'nin her bir değerine bir α_t eğrisini karşılık getiriyor öyle ki özel olarak $F(x,0) = \alpha_0 = \alpha$ ve $F(x,1)$=$\alpha_1 = \beta$ ise bu takdirde F fonksiyonu α_t eğrileri vasıtasıyla α' dan β' ya sürekli bir deformasyon tanımlar. Açık olarak, F fonksiyonu bir tek değildir. $\alpha_0 = \alpha$ ve $\alpha_1 = \beta$ şartını sağlayan herhangi bir α_t sürekli eğri ailesi bulunabilir.

Eğer I herhangi bir X topolojik uzayı olarak alınırsa homotopi kavramına en genel şekli verilebilir. $F : X \times J \to Y$ sürekli fonksiyonunda, α sürekli olarak β' ya dönüştürüldüğünde, α_t ailesine ait her bir eğrinin uç noktaları y_1 ve y_2' dedir. Bu takdirde α ve β tanımlanarak fonksiyonlar Y' nin birer alt kümesini teşkil eden y_1 ve y_2' ye göre homotopturlar denir. Yani $F : I \times J \to Y$ fonksiyonu her $t \in J$ için $F(0,t) = y_1$, $F(1,t) = y_2$ ekstra şartları ile kısıtlanmıştır **[3,15]**.

Şimdi bir homotopinin ve bir kümeye göre homotopinin genel tanımlarını verelim.

1.2.1 Tanım:

X, Y iki topolojik uzay ve $f, g : X \to Y$ sürekli iki fonksiyon olsun. Eğer her $x \in X$ için $F(x,0) = f$ ve $F(x,1) = g$ olacak şekilde en az bir

$$F(x,t) = F : X \times J \to Y$$

sürekli fonksiyonu varsa f, g' ye homotoptur denir ve $f \sim g$ ile gösterilir. Burada F fonksiyonuna ise f' den g' ye **homotopi** denir [**3,17**].

1.2.2 Teorem:

"$\sim$" homotopi bağıntısı bir eşdeğerlik bağıntısıdır.

İspat.

i) $f \sim f$ dir. Gerçekten $F : X \times J \to Y$ fonksiyonu $F(x,t) = f(x)$ için, $F(x,0) = f(x)$, $F(x,1) = f(x)$ ve $f(x)$ sürekli olduğundan F de süreklidir. O halde $f \sim f$ dir.

ii) $f \sim g$ olsun. $f \sim g$ ise en az bir $F : X \times J \to Y$ sürekli fonksiyonu vardır öyle ki $F(x,0) = f(x)$ ve $F(x,1) = g(x)$ yazılabilir. Şimdi bir G fonksiyonu $G(x,t) = F(x,1-t)$ şeklinde tanımlanmış olsun. Bu takdirde, $G(x,0) = F(x,1) = g(x)$, $G(x,1) = F(x,0) = f(x)$ olup G de süreklidir. Dolayısıyla $g \sim f$ bulunur.

iii) $f \sim g$ ve $g \sim h$ olsun.

$f \sim g$ ve $g \sim h$ olduğundan, sırasıyla,

$$F(x,t) : X \times J \to Y \text{ ve } G(x,t) : X \times J \to Y$$

sürekli fonksiyonları var öyleki $F(x,0) = f(x)$, $F(x,1) = g(x)$ ve $G(x,0) = g(x)$, $G(x,1) = h(x)$ yazılabilir. Şimdi $H : X \times J \to Y$ fonksiyonunu

$$\mathrm{H(x,t)}=\begin{cases} \mathrm{F(x,2t)} & , 0 \leq t \leq 1/2 \\ \mathrm{G(x,2t\text{-}1)} & , 1/2 \leq t \leq 1 \end{cases}$$

şeklinde tanımlayalım. Bu takdirde $H(x,t)$ süreklidir. Diğer taraftan

$$H(x,0) = F(x,0) = f$$

ve

$$H(x,1) = G(x,1) = g$$

olup $f \sim h$ bulunur. Demek ki X topolojik uzayından Y topolojik uzayına bütün $f : X \to Y$ sürekli fonksiyonların kümesi " $\sim$ " bağıntısı altında eşdeğerlik sınıflarına ayrılmış bulunuyor. Bu eşdeğerlik sınıflarına homotopi sınıfları denir ve bütün homotopi sınıflarının kümesi $[X;Y]$ ile gösterilir. Eğer $f : X \to Y$ ise f' nin homotopi sınıfı $[f]$ ile gösterilir **[3]**.

1.2.3 Tanım:

X ve Y iki topolojik uzay, $X_0 \subset X$ herhangi bir altküme ve $f, g : X \to Y$ fonksiyonları her $x_0 \in X_0$ için $f(x_0) = g(x_0)$ şartını sağlayan iki sürekli fonksiyon olsun. Eğer aşağıdaki şartları sağlayan bir

$$F(x,t) = F : X \times J \to Y$$

sürekli fonksiyonu varsa f fonksiyonu x_0 noktasına göre g fonksiyonuna homotoptur denir ve $f \sim g \; rel \; x_0$ ile gösterilir,

i) Her $x \in X$ için $F(x,0) = f$, $F(x,1) = g$

ii) Her $x_0 \in X_0$ için $F(x_0,t) = f(x_0) = g(x_0)$.

$X_0 = \emptyset$ ise sadece $f \sim g$ yazılır. Demek ki adi homotopi relatif homotopinin özel bir halidir **[3,17]**.

1.2.4 Tanım:

X ve Y iki topolojik uzay, $f, g : X \to Y$sürekli iki fonksiyon ve $f \sim g$ olsun. Eğer g' nin resmi bir noktadan ibaret ise, yani g sabit bir fonksiyon ise bu takdirde f, bir **sabite homotoptur** denir [3].

1.2.5 Tanım:

X bir topolojik uzay olsun. Eğer $1_X : X \to X$ özdeş fonksiyonu bir sabite homotop ise X uzayına **büzülebilirdir** denir [3].

1.2.6 Örnek:

$R^n = \{x \in R^n : x = (x_1, x_2, ..., x_n), x_i \in R\}$ n-boyutlu Öklid uzayının

$$E^n = \{x \in R^n : x_1^2 + x_2^2 + ... + x_n^2 \leq 1\}$$

birim küresi R^n uzayının büzülebilir bir alt uzayıdır. Gerçekten,

$$F(x,t) = F : E^n \times J \to E^n$$

$$F(x,t) = (1-t)x = ((1-t)x_1, (1-t)x_2, ..., (1-t)x_n)$$

fonksiyonu sürekli olup $F(x,0) = x = 1_{E^n}$, $F(x,1) = 0 = (0,0,...,0) = \hat{0}$ şartlarını sağlar. Dolayısıyla $1_{E^n} : E^n \to E^n$ özdeş fonksiyonu bütün $x \in E^n$ için $\hat{0}(x) = 0$ sabit fonksiyonuna homotoptur. Yani E^n dolu birim küresi büzülebilirdir [3].

1.2.7 Teorem:

Eğer Y büzülebilir topolojik uzay ise her bir $f : X \to Y$ sürekli fonksiyonu bir sabite homotoptur.

İspat: Bakınız [3].

1.2.8 Teorem:

$f, g : X \to Y$ sürekli fonksiyonlar ve $f \sim g$ olsun. Eğer $h : Y \to Z$ sürekli bir fonksiyon ise bu takdirde $hf : X \to Z$ ve $hg : X \to Z$ fonksiyonları da süreklidir ve $hf \sim hg$ olur.

İspat: Bakınız **[3,17]**.

1.2.9 Tanım:

X ve Y iki topolojik uzay ve $f : X \to Y$ sürekli bir fonksiyon olsun. Eğer aşağıdaki şartları sağlayan sürekli bir $f' : Y \to X$ fonksiyonu varsa f fonksiyonuna " **homotopi eşdeğerlik**" denir **[3,17]**:

i) $ff' \sim 1_Y$

ii) $f'f \sim 1_X$

1.2.10 Tanım:

Y' deki α ve β eğrilerinin başlangıç ve bitim noktaları aynı olsun. Eğer α ve β , I 'nın $(0,1)$ altkümesine göre homotop iseler bu iki eğriye "**homotoptur**" denir ve $\alpha \sim \beta$ şeklinde gösterilir. Yani $\alpha \sim \beta$' dan kasıt $\alpha \sim \beta \; rel \; (0,1)$ demektir **[3]**.

Aşağıda vereceğimiz teoremlerin ispatları herhangi bir cebirsel topoloji kitabında bulunabilir **[3,17]**.

1.2.11 Teorem:

α, β, γ ve δ Y' de eğriler olsun. $\alpha \sim \gamma$, $\beta \sim \delta$ ve $\alpha\beta$ tanımlı ise $\gamma\delta$ tanımlıdır ve $\alpha\beta \sim \gamma\delta \; rel \; (0,1)$ olur.

1.2.12 Teorem:

$\alpha \sim \beta$ ise $\alpha^{-1} \sim \beta^{-1}$ olur.

1.2.13 Teorem:

α bir eğri ve β sıfır eğri öyleki $\alpha\beta$ tanımlı olsun. Bu takdirde $\alpha\beta \sim \alpha$ olur. Benzer şekilde γ sıfır eğri öyleki $\gamma\alpha$ tanımlı ise $\gamma\alpha \sim \alpha$ olur.

1.2.14 Teorem:

α, β ve γ, $\alpha\beta$ ve $\beta\gamma$ tanımlı olacak şekilde Y' deki üç eğri olsun. Bu takdirde $(\alpha\beta)\gamma$ ve $\alpha(\beta\gamma)$ tanımlıdır. Ayrıca $(\alpha\beta)\gamma \sim \alpha(\beta\gamma)$ olur.

1.2.15 Teorem:

α, Y' de bir eğri ise, $\alpha\alpha^{-1}$ ve $\alpha^{-1}\alpha$ eğrileri sıfır eğriye homotoptur.

1.3 Esas Grup

Y bir topolojik uzay ve $y_0 \in Y$ sabit bir nokta olsun. Y' deki y_0 noktasında başlayıp y_0' da biten bütün kapalı eğrilerin kümesini gözönüne alalım. y_0 noktasına, eğriler için taban nokta, eğrilere ise y_0' da eğriler denir. α, y_0' da bir eğri ise α' ya homotop y_0' daki bütün eğrilerin sınıfını $[\alpha]$ ile göstereceğiz.

$[\alpha]$, $[\beta]$ gibi iki sınıfın çarpımı

$$[\alpha]\,[\beta] = [\alpha\beta]$$

şeklinde tanımlanır. Bu şekilde tanımlanan çarpım 1.2.11 'den dolayı sınıfların temsilcisine bağlı değildir.

Gerçekten $\alpha \sim \gamma$ ve $\beta \sim \delta$ ise $\alpha\beta \sim \gamma\delta$ olduğundan

$$[\gamma][\delta] = [\gamma\delta] = [\alpha\beta]$$

yazılır. Dolayısıyla $[\alpha]$ $[\beta]$ çarpımı $[\alpha]$ ve $[\beta]$ tarafından bir tek olarak tanımlanan çarpım anlamlıdır.

Şimdi y_0' daki bütün eğrileri gözönüne alalım. Homotopi bağıntısı bu eğrilerin kümesini ayrık homotopi sınıflarına ayırır. Yukarıda tanımlanan çarpım işlemi, homotopi sınıflarının kümesinde bir grup yapısı tanımlar. Gerçekten yukarıda verdiğimiz teoremler yardımıyla grup aksiyomlarının sağlandığı görülür.

y_0' daki eğrilerin homotopi sınıflarının kümesi çarpım işlemine göre kapalıdır.
α , β ve γ y_0' daki eğriler olsun. Bu durumda

$$([\alpha][\beta])[\gamma] = [\alpha\beta][\gamma] = [(\alpha\beta)\gamma] = [\alpha(\beta\gamma)]$$

olur. Halbuki 1.2.14 'den dolayı

$$(\alpha\beta)\gamma \sim \alpha(\beta\gamma) \Rightarrow [(\alpha\beta)\gamma] = [\alpha(\beta\gamma)] \Rightarrow ([\alpha][\beta])[\gamma] = [\alpha]([\beta][\gamma])$$

olur. Yani birleşim özelliği sağlanır.

y_0' daki sıfır eğrilerin homotopi sınıfını [1] ile gösterirsek 1.2.13'den dolayı$[\alpha][1] = [\alpha]$ olur. O halde [1] özdeş elemandır.

1.2.15'den dolayı $[\alpha][\alpha^{-1}] = [\alpha\alpha^{-1}] = [1]$ dir. Yani her bir homotopi sınıfının tersi vardır.

Dolayısıyla y_0' daki eğrilerin bütün homotopi sınıflarının kümesi tanımlanan çarpma işlemine göre bir gruptur. Bu gruba y_0' daki **esas grup** denir ve $\Pi_1(Y, y_0)$ ile gösterilir. **[3,15]**

1.4 FUNKTORLAR

1.4.1 Tanım:

$\mathcal{C}$ ve $\mathcal{D}$ iki kategori olsun. F: $\mathcal{C} \to \mathcal{D}$ dönüşümüne **funktor** denir, eğer $\mathcal{C}$' ye ait her bir x nesnesine $\mathcal{D}$' de $F(x)$ nesnesi ve $f : x \to y$ morfizmine $\mathcal{D}$' de $F(f) : F(x) \to F(y)$ morfizmi tanımlar , öyle ki

1) Eğer $I_x : x \to x$, $\mathcal{C}$' de özdeş morfizm ise, $F(I_x) : F(x) \to F(x)$, $\mathcal{D}$' de özdeş morfizmdir. Yani,

$$F(I_x) = I_{F(x)}$$

2) Eğer $f : x \to y$ ve $g : y \to z$, $\mathcal{C}$' de morfizmler ise,

$$F(g * f) = F(g) * F(f)$$

dir. (Burada $F(f)$' e f' nin oluşturduğu morfizm denir) [**5**].

1.4.2 Örnek:

Eğer $\mathcal{C}$, bir $\mathcal{D}$ kategorisinin alt kategorisi ise, $\mathcal{C}$' deki her morfizm için $I(f) = f$ ve $\mathcal{C}$' deki her x nesnesi için $I(x) = x$ olacak şekilde bir $I : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ dönüşümü tanımlanır. Açıkça, I bir funktordur ve $\mathcal{C}$' den $\mathcal{D}$' ye **dahil etme funktoru** denir [**1**].

1.4.3 Örnek:

$\mathcal{C}$ bir kategori olmak üzere $\mathcal{C}$' nin her x nesnesi için

$$I_C(x) = x$$

ve C' nin her f morfizmi için

$$I_C(f) = f$$

şeklinde belirlenen

$$I_C : C \to C$$

dönüşümü bir funktordur. Özel olarak buna C üzerinde **özdeş (birim) funktor** denir [1].

1.4.4 Örnek:

Grupların Grp kategorisinden kümelerin Set kategorisine aşağıdaki gibi tanımlanan bir

$$U : Grp \to Set$$

dönüşümünü alalım. Her G grubu için onun grup yapısının ihmal edildiği UG kümesini ve her $\alpha : G \to H$ grup morfizmi için $U\alpha : UG \to UH$ dönüşümünü düşündüğümüzde, U bir funktordur. Bu funktora **unutkan funktor** denir [1].

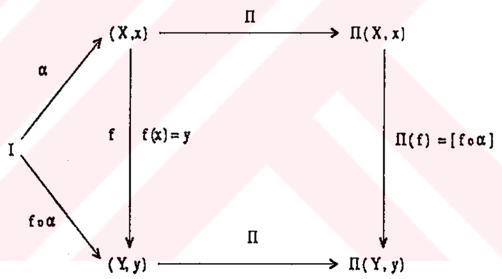
1.4.5 Örnek:

İki ucu x' de olan yani başlangıç ve bitim noktası x olan X' deki kapalı eğrilerin kümesi $L(X, x)$ olsun. $L(X, x)$ kümesi üzerindeki bir denklik bağıntısının homotopik bağıntı olduğunu daha önce söylemiştik. Denklik sınıflarının kümesini $\Pi(X, x)$ ile gösterelim. Homotopik eğrilerin herbir denklik sınıfına eğrilerin bir homotopi sınıfı denir ve bir f eğrisinin denklik sınıfı $[f]$ ile gösterilir. Buradan $[f_0] = [f_1]$ dir gerek ve yeter şart f_0 ve f_1 eğrileri homotopik ise. Böylece

$$\Pi(X,x) = \{[f] : f \in L(X,x), x \in X\}$$

dir. $\Pi(X,x)$ bir gruptur ve buna x'deki esas grup denir. Geniş açıklaması için 1.3 kısmına bakınız.

Şimdi Top_0 kategorisini tanımlayalım. Top_0, nesneleri (X,x) ikilisi ve morfizmleri $f : X \to Y$ sürekli fonksiyonlar olan bir kategoridir. Burada X, Y topolojik uzaylar, x ve y sırasıyla X ve Y nin esas noktalarıdır öyleki $f(x) = y$ dir.



Top_0' ın nesneleri üzerinde Π' nin etkisini biliyoruz. Şimdi göstermeliyiz ki

$$f : X \to Y$$

sürekli bir fonksiyon ise

$$\Pi(f) : \Pi(X,x) \to \Pi(Y,y)$$

grup homomorfizmi tanımlar.

$$\begin{aligned} \Pi(f) : \Pi(X,x) &\to \Pi(Y,y) \\ [g] &\mapsto (\Pi(f))[g] = [f \circ g] \end{aligned}$$

şeklinde tanımlanan $\Pi(f)$'nin bir homomorfizm olduğunu gösterelim. Bunun için göstermeliyiz ki herhangi $[g_1],[g_2] \in \Pi(X,x)$ için $\Pi(X,x)$ ve $\Pi(Y,y)$ gruplarında " . " ikili işlemi için

$$\Pi(f)([g_1].[g_2]) = \Pi(f)([g_1]).\Pi(f)([g_2])$$

sağlanır. Şimdi $\Pi(f)$'in tanımını kullanarak

$$[g_1].[g_2] = [g_1.g_2]$$

olduğunu göstermeliyiz. Şöyle ki,

$$[f \circ (g_1.g_2)] = [(f \circ g_1).(f \circ g_2)].$$

Gerçekten $f \circ (g_1.g_2) = (f \circ g_1).(f \circ g_2)$ dir. Çünkü

$$f \circ (g_1.g_2) : I \to Y$$

$$t \mapsto f \circ (g_1.g_2)$$

bir eğriydi. Burada

$$g_1.g_2 : \quad I \mapsto X$$

$$\begin{cases} t \mapsto g_1(2t) & ,0 \leq t \leq 1/2 \\ t \mapsto g_2(2t-1) & ,1/2 \leq t \leq 1 \end{cases}$$

eğridir.

$$f \circ (g_1.g_2) : \quad I \mapsto Y$$

$$\begin{cases} t \mapsto (f \circ g_1)(2t) & ,0 \leq t \leq 1/2 \\ t \mapsto (f \circ g_2)(2t-1) & ,1/2 \leq t \leq 1 \end{cases}$$

şeklinde tanımlanır ve $(f \circ g_1).(f \circ g_2)$ de aynı eğridir. Buradan

$$\Pi(f) : \Pi(X,x) \to \Pi(Y,y)$$

bir homomorfizmdir. Son olarak funktor olma şartlarını gösterelim.

1)

$$\begin{aligned}\Pi(I_{(X,x)})[\alpha] &= [I \circ \alpha] \\ &= [\alpha] \\ &= I_{\Pi(X,x)}.\end{aligned}$$

2)

$$\begin{aligned}\Pi(g \circ f)[\alpha] &= [(g \circ f) \circ \alpha] \\ &= [g \circ f \circ \alpha] \qquad ...(*)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(\Pi(g) \circ \Pi(f))[\alpha] &= \Pi(g)(\Pi(f)[\alpha]) \\ &= \Pi(g)([f \circ \alpha]) \\ &= [(g \circ f) \circ \alpha] \\ &= [g \circ f \circ \alpha] \qquad ...(**)\end{aligned}$$

(*) ve (**)' dan $\Pi(g \circ f)[\alpha] = (\Pi(g) \circ \Pi(f))[\alpha]$ dır. Sonuç olarak Π bir funktordur **[3]**.

1.5 Doğal Transformasyon

$\mathcal{C}$ ve $\mathcal{D}$ iki kategori ve $F, G : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ iki funktor olsun. Bir $\alpha : F \to G$ **doğal transformasyonu** (natural transformation, functorial morfizm) $\mathcal{C}$' nin her bir nesnesine $\mathcal{D}$' de bir $\alpha X : FX \to GX$ morfizmi karşılık getirir öyleki $\mathcal{C}$' deki her $f : X \to Y$ için aşağıdaki diyagram değişimlidir.

$$
\begin{tikzcd}
FX \arrow[r, "\alpha X"] \arrow[d, "Ff"'] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowleft"] & GX \arrow[d, "Gf"] \\
FY \arrow[r, "\alpha Y"] & GY
\end{tikzcd}
$$

Her $X \in Ob(\mathcal{C})$ için αX bir izomorfizm ise α' ya bir **doğal denklik** (natural equivalence) denir [**14**].

1.5.1 Önerme:

$\mathcal{C}, \mathcal{D}, \mathcal{E}$ kategori, $F, G, H : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ ve $K, L : \mathcal{D} \to \mathcal{E}$ funktorlar ve $\alpha : F \to G$, $\beta : G \to H$, $\theta : K \to L$ doğal transformasyonlar olsun. Bu takdirde

a)

$$\beta \circ \alpha : F \to H$$

$$X \to (\beta \circ \alpha)X = (\beta X) \circ (\alpha X)$$

b) $KF : \mathcal{C} \to \mathcal{E}$, $(KF)X = K(FX)$ ve $(KF)f = K(Ff)$

c) $\theta F : KF \to LF$, $(\theta F)X = \theta(FX)$

d) $K\alpha : KF \to KG$, $(K\alpha)X = K(\alpha X)$

e) $\theta\alpha : KF \to LG$, $\theta\alpha = \theta G \circ K\alpha = L\alpha \circ \theta F$

f) Eğer α bir doğal denklik ise $\alpha^{-1} : G \to F$, $\alpha^{-1}X = (\alpha X)^{-1}$ şeklinde tanımlanır [**14**].

$$\begin{tikzcd} FX \arrow[r, "\alpha X"] \arrow[dr, "(\beta \circ \alpha) X"'] & GX \arrow[d, "\beta X"] \\ & HX \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} C \arrow[r, bend left=60, "F"] \arrow[r, "G" description] \arrow[r, bend right=60, "H"'] & D \end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd} KFX \arrow[r, "(K\alpha) X"] \arrow[d, "(\theta F) X"'] \arrow[dr, "(\theta \alpha) X"] & KGX \arrow[d, "(\theta G) X"] \\ LFX \arrow[r, "(L\alpha) X"'] & LGX \end{tikzcd}$$

1.6 GRUPOİD

1.6.1 Tanım:

Bir G **grupoidi**, sırasıyla nesnelerin kümesi (taban) Ob(G) ve morfizmlerin kümesi (grupoid) Mor(G)' den, **kaynak** ve **hedef** dönüşümleri

$$s\ ,\ t : \mathrm{Mor(G)} \rightarrow \mathrm{Ob(G)},$$

nesne dönüşümü

$$\begin{aligned} \epsilon : \mathrm{Ob(G)} &\rightarrow \mathrm{Mor(G)}, \\ x &\longmapsto \epsilon(x) = \tilde{x} = id_x \end{aligned}$$

invers dönüşümü

$$\begin{aligned} i: \mathrm{Mor(G)} &\rightarrow \mathrm{Mor(G)} \\ f &\longmapsto f^{-1} \end{aligned}$$

ve

$$\text{Mor(G)} *\text{Mor(G)}=\{(g,f)\in\text{Mor(G)}\times\text{Mor(G)}|\text{t(f)=s(g)}\}$$

üzerinde tanımlı " . " **kısmi çarpım işlemin**den oluşur öyle ki bu dönüşümler şu aksiyomları sağlar:

i) $\forall(g,f) \in$ Mor(G)*Mor(G) için s(g.f)=s(f) ve t(g.f)=t(g),

ii) $\forall f,g,h \in Mor(\text{G})$ öyle ki, $s(h) = t(g)$ ve $s(g) = t(f)$ için

$$h.(g.f) = (h.g).f$$

iii) $\forall x \in Ob(\text{G})$ için $\text{s}(\tilde{x}) = s(id_x) = x = t(\tilde{x}) = t(id_x)$

iv) $\forall f \in Mor(\text{G})$ için $f.\widetilde{s(f)} = f$ ve $\widetilde{t(f)}.f = f$,

v) $\forall f \in$ Mor(G) için iki taraflı f^{-1} ters elemanı vardır öyle ki

$$s(f^{-1}) = t(f) \quad , \quad t(f^{-1}) = s(f)$$
$$f^{-1}.f = \widetilde{s(f)} \quad , \quad f.f^{-1} = \widetilde{t(f)}$$

Ob(G)' nin elemanlarına, G grupoidinin **nesneleri** ; Mor(G)' nin elemanlarına G' nin **okları (morfizmleri)** ; x ∈Ob(G)' ye karşı gelen Mor(G)' de $\tilde{x} = id_x$ ' e x' in **birim** veya **özdeşliği** denir **[7,8,10,18,19,20]**.

Kısaca, grupoid, morfizmlerinin tersi olan bir kategoridir.

1.6.2 Önerme:

Ob(G) tabanlı bir grupoid G olsun. $s(f) = x$ ve $t(f) = y$ olacak şekilde bir f∈Mor(G) alalım.

1) Eğer g∈Mor(G), $s(g) = y$ ve $g.f = f$ ise $g = \tilde{y} = id_y$ dir.

2) Eğer $h \in$Mor(G), $t(h) = x$ ve $f.h = f$ ise $h = \tilde{x} = id_x$ dir.

3) Eğer $g \in$Mor(G), $s(g) = y$ ve $g.f = \tilde{x}$ ise $g = f^{-1}$ dir.

4) Eğer $h \in$Mor(G), $t(h) = x$ ve $f.h = \tilde{y}$ ise $h = f^{-1}$ dir[8]

1.6.3 Tanım:

G bir grupoid ve $N \subset G$ olsun. Eğer aşağıdaki şartlar sağlanıyorsa N' ye G' nin **altgrupoidi** denir.

N1) s ve t sırasıyla G' nin kaynak ve hedef dönüşümleri olmak üzere

$$s(N) \subseteq Ob(N) \text{ ve } t(N) \subseteq Ob(N),$$

N2) Her $x \in Ob(N)$ için $1_x \in N$,

N3) N, kısmi çarpım altında kapalıdır **[10,19,21,22,23]**.

1.6.4 Tanım:

N, G grupoidinin altgrupoidi olsun.

1) Eğer $Ob(N) = Ob(G)$ ise N' ye G' nin **geniş (wide) altgrupoidi** denir.

2) Eğer her bir $x, y \in Ob(N)$ için $N(x,y) = G(x,y)$ ise N' ye G' nin **tam (full) altgrupoidi** denir.

3) Eğer N geniş ve her bir $x, y \in Ob(N)$, $\lambda \in N(x,x)$ ve $g \in G(x,y)$ için $g\lambda g^{-1} \in N(y,y)$ ise N' ye G' nin **normal altgrupoidi** denir **[8,10,19,21,22,23]**.

1.6.5 Tanım:

$G = (Mor(G), Ob(G), s, t, \epsilon, i, m)$ bir grupoid olsun. Eğer her $x, y \in Ob(G)$ için

$$G(x,y) = \{f \in Mor(G) : f : x \to y\}$$

kümesi boştan farklı ise G grupoidine **geçişmelidir** (transitive)denir **[8,21,23]**.

1.6.6 Tanım:

Eğer her $x, y \in Ob(G)$ için $G(x,y)$ bir tek elemana sahipse G' ye **tamamen geçişmelidir** denir. Aksi halde **tamamen geçişmesizdir** denir **[8,21,23]**.

1.6.7 Tanım:

Eğer $Ob(G)$, açık U kümelerinin bir tabanına sahip öyleki G' nin U' ya kısıtlanması geçişmeli ise G' ye **yerel geçişmelidir** denir **[8,21,23]**.

1.6.8 Tanım:

G ve H iki grupoid olsun. G' nin her bir x nesnesini H' nın bir $f(x)$ nesnesine ve her bir $\alpha \in G(x,y)$ elemanını $f(\alpha) \in H(f(x), f(y))$ elemanına götüren bir $f : G \to H$ morfizmine G' den H' ya bir grupoid morfizmi denir, eğer

1) Eğer $I_x \in G(x,x)$ $x \in G$' de özdeş morfizm ise $f(I_x) = I_{f(x)}$, $f(x) \in H$'da özdeş morfizmdir,

2) Eğer $\alpha : x \to y$ ve $\beta : y \to z$ G' de morfizmler ise $f(\beta\alpha) = f(\beta).f(\alpha)$ **[8,22,25]**.

Kategoriler için verdiğimiz Örnek.1.1.2 yi sürekli dönüşümleri, homeomorfizmler alarak grupoid örneği olarak da verebiliriz:

1.6.9 Örnek:

Topolojik uzaylar ve bu uzaylar arasındaki homeomorfizmler kategorisi bir grupoid oluşturur. Gerçekten,morfizmlerin kümesi topolojik uzaylar arası homeomorfizmler, yani

$$\text{Mor(G)}=\{f|f: X \to Y \text{ homeomorfizmler,X,Y topolojik uzaylar}\}$$

ve nesnelerin kümesi,

$$\text{Ob(G)}=\{X \ |\text{X bir topolojik uzay}\}$$

olmak üzere,

f∈Mor(G), f :X$\xrightarrow{homeo}$ Y için , kaynak ve hedef dönüşümleri

$$s(f) = X \text{ ve } t(f) = Y,$$

invers dönüşümü

$$i\text{:Mor(G)}\to\text{Mor(G)}$$

$$f \longmapsto f^{-1}$$

nesne dönüşümü

$$\epsilon(X) = id_X : X \to X$$

ve kısmi çarpım işlemi

$$\text{Mor(G)}*\text{Mor(G)}=\{(\text{g}, f)\in\text{Mor(G)}\times\text{Mor(G)}|\ \text{t(f)=s(g)}\}$$

ile birlikte, (Mor(G),Ob(G),s,t,i,ϵ,m) bir grupoid oluşturur.

1.6.10 Örnek:

G birim elemanı e olan bir grup olsun. $\{e\}$ kümesi ve grubun ikili işlemi ile birlikte G bir grupoiddir. Grupoidin yapı dönüşümleri başlangıç ve bitiş noktası e olan G'nin $g : e \to e$ elemanlarıdır. Yani birim elemanı e olan bir G grubu nesneler kümesi tek elemanlı $Ob(e)$ kümesi olan bir grupoiddir.[7,8,25]

1.6.11 Örnek:

B bir küme ve G bir grup olsun. B×G×B kümesi B üzerinde bir grupoiddir. Gerçekten, kaynak ve hedef dönüşümleri

$$\text{s,t:B}\times G\times B\to B \quad , \quad s(b_1,g,b_2)=b_2$$

$$\text{t}(\text{b}_1,g,b_2)=b_1,$$

nesne dönüşümü

$$\epsilon : B\to B\times G\times B \quad , \quad \epsilon(b)=(b,I_g,b)$$

kısmi çarpım ,

$$(z,h,y').(y,g,x)=(z,hg,x)\Longleftrightarrow y'=y$$

şeklinde tanımlanır ve

(x,g,y)' nin tersi (y,g^{-1},x)

dir [8].

1.6.12 Örnek :

X herhangi bir küme ve $G\subset X\times X$ öyleki X üzerinde bir denklik bağıntısı olsun. Yani, $x,x_1,x_2,x_3\in X$ için

i) $\forall x\in X$ için $(x,x)\in G$,

ii) Eğer $(x_1,x_2)\in G$ ise $(x_2,x_1)\in G$,

iii) Eğer $(x_1,x_2)\in G$ ve $(x_2,x_3)\in G$ ise $(\text{x}_1,x_3)\in G$ dir.

G , X üzerinde aşağıdaki anlamda bir grupoiddir.

Ob(G) olarak X' i alalım. Eğer $(x,y)\in\ G$ ise,

$$\{(x,y) : x\ R\ y\ ,\ x,y\in X\}= G(x,y) =\ \{(x,y)\}$$

olarak tanımlarız. $(x,y)\in G$ için ,
kaynak ve hedef dönüşümleri

$$s(x,y) = y \text{ ve } t(x,y) = x$$

ve kısmi çarpım işlemi

$$(z,y).(y,x) = (z,x)$$

şeklinde tanımlanır. G' nin nesne dönüşümü $\forall\ x\in X$ için $\epsilon(x) = (x,x)$ ve (x,y)' nin tersi (y,x) dir. Geriye kalan grupoid aksiyomlarını sağlamak oldukça kolaydır [10].

1.6.13 Örnek:

Grupoidler ve grupoidler arasındaki morfizmlerin *Grpd* kategorisini şu şekilde verebiliriz.
Nesnelerin kümesi $Ob(Grpd) = \{G : G\ \text{ grupoidler}\}$ ve morfizmlerin kümesi $Mor(Grpd) = \{F : F : G \to H, F \text{ funktorlar}\}$ dur. Kısmi çarpım işlemi funktorların bileşke işlemi ve özdeş dönüşüm ise $1_G : G \to G$ dönüşümüdür [20].

1.7 2-KATEGORİ

Bu bölümdeki kavramlar standarttır.

2-Kategori tanımı Ehresmann' a [12] aittir. Daha sonra bu kavram, Kelly ve Street [13] tarafından geliştirilmiştir.

1.7.1 Tanım:

Bir $(A, A_0, A_1, s_0, t_0, o_0, s_1, t_1, o_1)$ **2-kategorisi**, aşağıdaki şartları sağlayan (A, s_0, t_0, o_0) ve (A, s_1, t_1, o_1) kategorilerinden ibarettir ;

i) $s_0 = s_0 s_1 = s_0 t_1$, $t_0 = t_0 s_1 = t_0 t_1$,

ii) $\alpha, \alpha' \in A$ için $s_0(\alpha') = t_0(\alpha)$ ise

$$s_1(\alpha' \; o_0 \; \alpha) = s_1(\alpha') \; o_0 \; s_1(\alpha)$$

$$t_1(\alpha' \; o_0 \; \alpha) = t_1(\alpha') \; o_0 \; t_1(\alpha).$$

iii) $\alpha, \alpha', \beta, \beta' \in A$ için $s_0(\alpha') = t_0(\alpha)$, $s_0(\beta') = t_0(\beta)$, $s_1(\beta) = t_1(\alpha)$, $s_1(\beta') = t_1(\alpha')$ ise

$$(\beta o_1 \alpha) o_0 (\beta' o_1 \alpha') = (\alpha' o_0 \alpha) o_1 (\beta' o_0 \beta)$$

dır. Bu kurala **iç değişme kuralı** (interchange law) denir.

$$\begin{tikzcd} x \arrow[r, bend left=50, "f"] \arrow[r, bend right=50, "g"'] \arrow[r, phantom, "\Downarrow\alpha"] & y \end{tikzcd}$$

diyagramında $\alpha \in A$ için

$$s_1(\alpha) = f \ , \ \ t_1(\alpha) = g$$

$$s_0(\alpha) = x \ , \ \ t_0(\alpha) = y$$

dir [**11**].

1.8 2-GRUPOİD

1.8.1 Tanım:

Bir $\mathcal{H}$=(H_0, H_1, H_2) **2-grupoidi** aşağıda verilen özellikleri sağlayan $H_0 = (\mathcal{H}\ ,\ s_0\ ,\ t_0\ ,\ +_0)$ ve H_1 =$(\mathcal{H}\ ,\ s_1\ ,\ t_1\ ,\ +_1)$ grupoidlerinden oluşur, burada H_2 de $\mathcal{H}$' nın morfizmlerinin kümesidir. H_0 ve H_1 grupoid yapılarının nesneleri $\mathcal{H}$' nın elemanları olarak düşünülür ve H_0, H_1' in özdeş morfizmleriyle çakışır.

Bunlar arasındaki uyumluluk şartları şunlardır:

1) $s_0 = s_0 s_1 = s_0 t_1$, $t_0 = t_0 s_1 = t_0 t_1$,

2) $\alpha, \alpha' \in \mathcal{H}$ ve $\alpha' +_0 \alpha$ tanımlı olmak üzere

$$s_1(\alpha' \ +_0 \ \alpha) = s_1(\alpha') \ +_0 \ s_1(\alpha)$$

$$t_1(\alpha' \ +_0 \ \alpha) = t_1(\alpha') \ +_0 \ t_1(\alpha)$$

3) iç değişme kuralı: $\beta, \beta', \alpha, \alpha' \in \mathcal{H}$ olmak üzere

$$(\beta \ +_0 \ \beta') \ +_1 \ (\alpha \ +_0 \ \alpha') = (\beta \ +_1 \ \alpha) \ +_0 \ (\beta' \ +_1 \ \alpha')$$

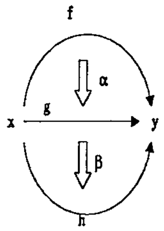
dir [**6**].

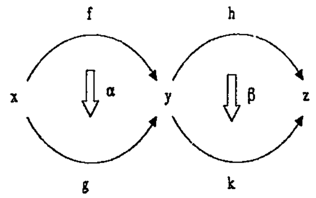
Yani bir 2-grupoidde, x ler 0-hücre' ler ya da nesneler, $f : x \to y$ gibi 1-hücre' ler ya da oklar ve oklar arasındaki 2-hücre' ler ya da deformasyonlar vardır.

Bu kavramları ve kuralları daha iyi anlamak için şu şekilleri verebiliriz:

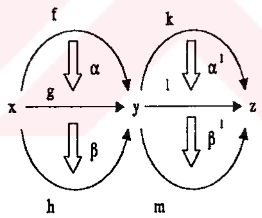
$$\begin{tikzcd} x \arrow[r, bend left=60, "f"] \arrow[r, bend right=60, "g"'] \arrow[r, phantom, "\Downarrow\alpha"] & y \end{tikzcd}$$

Bu diyagramda x ve y' ye nesne, f ve g' ye ok ve α' ya da f' den g' ye bir deformasyon denir. 2-grupoidlerde dikey ve yatay bileşke için de şu diyagramları çizebiliriz:





ve son olarak iç değişme kuralını şu şekilde resmedebiliriz:



Kısaca, 2-grupoid, bütün morfizmlerinin ve deformasyonlarının tersi alınabilen bir 2-kategoridir.

1.8.2 Tanım:

$\mathcal{C}$ ve $\mathcal{D}$ iki 2-grupoid olsun. Bir $F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ **2-grupoid morfizmi** (2-funktoru), $\mathcal{C}$' nin nesnelerini $\mathcal{D}$' nin nesnelerine, $\mathcal{C}$' nin oklarını $\mathcal{D}$' nin oklarına ve $\mathcal{C}$' nin deformasyonlarını $\mathcal{D}$' nin deformasyonlarına götüren, tanım ve görüntü kümelerini, özdeşlikleri ve kompozisyonları koruyan bir morfizmdir [**1,13**].

Yani 2-grupoidler arasındaki funktora bir 2-grupoid morfizmi denir. Bir 2-groupoid morfizmini şu şekilde çizebiliriz [**24**]:

$$\begin{tikzcd} x \arrow[r, bend left, "f"] \arrow[r, bend right, "g"'] \arrow[r, phantom, "\Downarrow\alpha"] & y \arrow[r, "F"] & F(x) \arrow[r, bend left, "F(f)"] \arrow[r, bend right, "F(g)"'] \arrow[r, phantom, "\Downarrow F(\alpha)"] & F(y) \end{tikzcd}$$

1.8.3 Örnek:

Her bir basit G grupoidi sadece özdeş deformasyonlarla bir 2-grupoid gibi düşünülebilir [**11**].

$$\begin{tikzcd} x \arrow[r, bend left, "f"] \arrow[r, bend right, "f"'] \arrow[r, phantom, "\Downarrow I_f"] & y \end{tikzcd}$$

1.8.4 Örnek:

X bir topolojik uzay, $Y \subseteq X$ bir alt uzay ve $S \subseteq Y$, esas noktaların bir kümesi olsun. S kümesi üzerinde Y' nin $\Pi_1(Y,S)$ esas grupoidinin nesneleri S' nin noktaları ve x' ten y' ye oklar da Y' de x' ten y' ye eğrilerin homotopi sınıflarıdır. $\Pi_1(Y,S)$, bir $W(X,Y,S)$ 2-grupoidinin temelini oluşturan grupoiddir.

$W(X,Y,S)$' nin deformasyonları $I \times I$ karesinden X' e giden dönüşümlerin denklik sınıflarıdır, ki bu dönüşümler S' deki değerlerle dik kenarlar ve yatay kenarlar boyunca Y içine doğru sabittirler. Böyle bir deformasyonun tanım ve değer bölgesi, sırasıyla $I \times 0$ ve $I \times 1$' e sınırlamasıyla verilir. Böylece $\Pi_1(Y,S)$' de $x \in S$' den $y \in S$' ye $[a]$ ve $[b]$ okları için bir

$$[\alpha] = ([a],[b])$$

deformasyonu (2-hücre), bir

$$[\alpha] : I \times I \to X$$

dönüşümü ile gösterilir. Homotopi uzatma özelliğini kullanarak bu verilenlerin iyi tanımlı bir W 2-grupoidini gerçeklediği gösterilebilir. Bu 2-grupoide $W(X,Y,S)$ **Whitehead 2-grupoidi** denir [9].

1.9 GRUPOİDLERİN CROSSED MODÜLÜ

1.9.1 Tanım:

G ve C aynı nesne kümesi üzerinde tanımlı grupoidler ve C tamamen geçişsiz olsun. G' nin C üzerindeki bir **etkisi** aşağıdaki şartları sağlayan

$$C \times G \longrightarrow C \quad , (c,g) \longmapsto c^g$$

kısmen tanımlı fonksiyonu ile verilir:

1) c^g tanımlıdır gerek ve yeter şart $t(c) = s(g)$ ise ve bu durumda $t(c^g) = t(g)$ dir. Burada s ve t sırasıyla G grupoidinin kaynak ve hedef dönüşümleridir.

2) Her $c_1, c_2 \in C(x,x)$, $g \in G(x,y)$ için

$$(c_1 + c_2)^g = c_1^g + c_2^g ,$$

3) Her $c_1 \in C(x,x)$, $g \in G(x,y)$, $h \in G(y,z)$ için

$$c_1^{g+h} = (c_1^g)^h \text{ ve } c_1^{e_x} = c_1$$

dir.

1.9.2 Tanım:

Grupoidlerin **crossed modülü** aynı nesne kümesi üzerinde tanımlı G ve C grupoidlerinin bir çiftinden ibarettir öyleki G, C üzerinde bir etki, C tamamen geçişsiz (totally intransitive) ve nesne kümesi üzerinde özdeş olan $\delta : C \longrightarrow G$ grupoid morfizmi aşağıdaki aksiyomları sağlar:

1) Her $c \in C(x,x), g \in G(x,y)$ için $\delta(c^g) = -g + \delta(c) + g$,

2) Her $c, c_1 \in C(x,x)$ için $c^{\delta(c_1)} = -c_1 + c + c_1$ dir.

Grupoidlerin crossed modülünü $\mathcal{C}=(C,G,\delta)$ ile gösteriyoruz.

Eğer yukarıdaki tanımda C ve G grupoidleri yerine grupları alırsak grupların crossed modülünü elde ederiz. Çünkü her grup aynı zamanda bir grupoid olduğundan, grupların crossed modülü, grupoidlerin crossed modülünün özel bir halidir. Crossed modüllerin yaygın uygulama alanları vardır **[16,34,35]**.

1.9.3 Örnek:

X üzerinde her G grupoidi ve onun iç grubu $IG = \bigcup G(x)$ ile birlikte grupoidlerin bir crossed modülü oluşur. $i : IG \to G$ dahil etme dönüşümü bir grupoid morfizmidir ve G , IG üzerinde aşağıdaki gibi etki yapar.

$$IG \times G \to IG$$

$$(c, a) \to c^a = -a + c + a$$

Böylece (IG, G, I) grupoidlerin bir crossed modülüdür [**16**].

Daha çok örnek için [**2,16,25**] tezlerine bakınız.

BÖLÜM 2

2 TOPOLOJİK GRUPOİD VE CROSSED MODÜLLER

Topolojik grupoidler, grupoidlerin uygulamasında önemli bir yere sahiptir. Topolojik grupoid kavramı , C.Ehresmann **[12]** tarafından diferensiyel topoloji ve geometrinin bir uygulaması olarak verilmiştir. Bu kavram, kapsamlı olarak R. Brown, J.P. Hardy ve G. Danesh-Naruie **[30]**'nin ortak çalışmaları sonucunda 1970-1976 yıllarında çıkan makaleler dizisinde tanımlanmıştır. Sonraki yıllarda pek çok matematikçi topolojik grupoidler üzerinde çalışmalar yapmıştır. Özellikle 1985' de K. Mackenzie [8]' nin diferensiyel topoloji alanında topolojik grupoidler üzerine yaptığı çalışmalar önemli bir yer tutar.

2.1 Topolojik Grupoid

Bir G **topolojik grupoidi**, $Mor(G)$ ve $Ob(G)$ kümeleri topolojik uzaylar ve aşağıdaki yapı dönüşümleri sürekli olan bir G grupoididir:

i) kaynak dönüşümü ,

$$s : Mor(x,y) \to Ob(G)$$

$$f \longmapsto s(f) = x$$

ii) hedef dönüşümü ,

$$t : Mor(x,y) \to Ob(G)$$

$$f \longmapsto t(f) = y$$

iii) nesne dönüşümü ,

$$\epsilon : Ob(G) \to Mor(G)$$

$$x \mapsto \epsilon(x) = I_x$$

iv) invers dönüşüm,

$$i : Mor(G) \to Mor(G)$$

$$f \mapsto i(f) = f^{-1}$$

v) ve kısmi çarpım işlemi $x, y, z \in Ob(G)$ ve $s(f) = t(g)$ olmak üzere

$$m : Mor(x,y) * Mor(y,z) \to Mor(x,z)$$

$$(f,g) \mapsto fg$$

dönüşümleri süreklidirler[**10,27,28,29,30,31**].

2.1.1 Tanım:

G bir topolojik grupoid, $H \subseteq G$ olsun. Eğer aşağıdaki şartlar sağlanıyorsa H' ya G' nin **topolojik altgrupoidi** denir;

1) $Ob(H)$ ve H, sırasıyla $Ob(G)$ ve G' nin topolojik alt uzayları ,

2) $s(H) \subseteq Ob(H)$ ve $t(H) \subseteq Ob(H)$,

3) Her $x \in Ob(H)$ için $1_x \in H$,

4) H kısmi çarpma işlemi altında kapalı ve G' de tersleri var,

5) s, t, ϵ, m ve i yapı dönüşümleri H' da sürekli [**8,10**].

2.1.2 Tanım:

Eğer her $x, y \in Ob(G)$ için $G(x, y) \neq \emptyset$ ise G topolojik grupoidine **geçişmelidir** (transitive) ve eğer her $x, y \in Ob(G)$ için $G(x, y)$ bir tek elemana sahip ise G' ye **tamamen geçişmelidir** (totaly transitive) denir. Ayrıca, her $x, y \in Ob(G)$ için, $G(x, y) = \emptyset$ ise G' ye **tamamen geçişmesizdir** denir [8,10,23].

2.1.3 Tanım:

H , G' nin topolojik altgrupoidi olsun.

1) Eğer $Ob(H) = Ob(G)$ ise H' ya G' nin **geniş** (wide) topolojik altgrupoidi denir.

2) Eğer her bir $x, y \in Ob(H)$ için $H(x, y) = G(x, y)$ ise H' ya G' nin **tam** (full) topolojik altgrupoidi denir [8].

2.1.4 Tanım:

Eğer N, G' nin topolojik altgrupoidi ve her $x, y \in Ob(N)$, $\lambda \in N(x, x)$ ve $g \in G(x, y)$ için $g\lambda g^{-1} \in N(y, y)$ ise N' ye G' nin **topolojik normal altgrupoidi** denir [8].

2.1.5 Örnek:

X bir topolojik uzay olsun. Bu takdirde X üzerinde bir topolojik grupoid tanımlanabilir. Bu grupoidin nesnelerinin ve morfizmlerinin kümesi X ve yapı dönüşümleri $s = t = i = 1_X$ birim dönüşümüdür.

2.1.6 Örnek:

Örneğe geçmeden önce kullanacağımız bazı kavramları verelim.

Bir G grubu aynı zamanda bir topolojik uzay ve aşağıda tanımlanan fonksiyonlar sürekli ise G' ye **topolojik grup** denir [32].

$$G \times G \to G \quad , \quad G \to G$$

$$(x, y) \mapsto xy \quad , \quad x \mapsto x^{-1}$$

Eğer G grubu üzerindeki işlem toplama işlemi ise,

$$G \times G \to G \quad , \quad G \to G$$

$$(x, y) \mapsto x + y \quad , \quad x \mapsto -x$$

yazılır.

G' nin bir topolojik grup olması için gerek ve yeter şart

$$G \times G \to G \quad , \quad (x, y) \mapsto x - y$$

fonksiyonunun sürekli olmasıdır.

O halde bir G grubu (aynı zamanda topolojik uzayı) verildiğinde G' nin topolojik grup olduğunu göstermek için $G \times G \to G$, $(x, y) \to x - y$ fonksiyonunun sürekli olduğunu göstermek yeterli olacaktır.

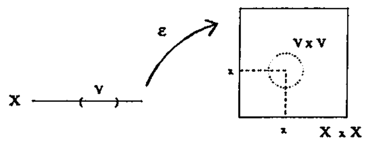
G bir topolojik grup ve H, G' nin bir alt kümesi olsun. Eğer H, G' deki grup işlemine göre topolojik grup ise H' ya G' nin **topolojik alt grubu** denir [32].

Şimdi artık örneği verebiliriz:

G bir topolojik grup olsun, yani (G, τ) bir topolojik uzay öyleki her $(x, y) \in G \times G$ için $\mu : (G \times G, \tau \times \tau) \to (G, \tau)$, $\mu(x, y) = x + y$ ve her $x \in G$ için $\nu : (G, \tau) \to (G, \tau)$, $\nu(x) = -x$ fonksiyonları süreklidir. Bir G grubunun bir grupoid oluşturduğunu göstermiştik. Şimdi topolojik grupoid oluşturduğunu gösterelim. $Ob(G) = \{e\}$ kümesine G'nin alt uzay topolojisini verelim. $Mor(G) = G$ üzerinde topoloji vardır. $s, t : Mor(G) \to Ob(G)$, $g \mapsto e$ ve $\epsilon : Ob(G) \to Mor(G)$, $e \mapsto e$ fonksiyonları sabittirler ve dolayısıyla süreklidirler. $k : P = Mor(G) * Mor(G) \to Mor(G)$, $Mor(G) = G$, $P \subset G \times G$, fonksiyonu μ fonksiyonunun P'ye kısıtlanmasıdır ve topolojik grubun tanımından μ sürekli olduğundan $k = \mu|_P$ süreklidir. Dolayısıyla G topolojik grubunun oluşturduğu G grupoidi topolojiktir.

2.1.7 Örnek:

X bir topolojik uzay olmak üzere daha önce verdiğimiz grupoid örneği olan $G \subseteq X \times X$ denklik bağıntısı aynı zamanda bir topolojik grupoiddir. Bunun için s, t, ϵ ve m kompozisyonunun sürekli olduğunu göstermeliyiz. Açıkça s ve t kaynak ve hedef dönüşümleri izdüşüm fonksiyonları olduğundan süreklidir. $\epsilon : X \to G$ nesne dönüşümünün sürekliliğini aşağıdaki gibi gösterebiliriz.



$(x,x) \in X \times X$ için $(x,x) \in V \times V$ olacak şekilde bir $V \times V$ açık komşuluğunu aldığımızda bunun ϵ'nun ters fonksiyonu altındaki görüntüsü $\epsilon^{-1}(V \times V) = V$ açık olduğundan ϵ nesne dönüşümü süreklidir.

Kompozisyon fonksiyonunun sürekliliği aşağıdaki diyagramda açıkça görülür. Bu diyagram değişimlidir.

$$
\begin{tikzcd}
G \times G \arrow[r, "m"] \arrow[d, "p_2"'] & G \arrow[d, "p_1"] \\
G \arrow[r, "p_1"'] & X
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
G \times G \arrow[r, "m"] \arrow[dr, "p_1 p_2"'] & G \arrow[d, "p_1"] \\
& X
\end{tikzcd}
$$

Burada p_1 ve p_2 izdüşüm fonksiyonları olduğundan süreklidir. O halde $p_1 p_2$ süreklidir. Bu diyagram değişimli olduğundan $p_1 m = p_1 p_2$ olur. Dolayısıyla $p_1 m$ süreklidir. Buradan m kompozisyonu süreklidir.

2.2 Grupoidler İçin Topolojik Etki

G ile C, X nesne kümesi üzerinde iki topolojik grupoid olsun. C tamamen geçişsiz olmak üzere G' nin C üzerindeki **topolojik etkisi**,

$$C \times G \to C$$

$$(c, g) \mapsto c^g$$

kısmen tanımlı sürekli fonksiyonu ile verilir ve aşağıdakileri sağlar:

1) c^g tanımlıdır $\Leftrightarrow$t(c)=s(g) ve dolayısıyla t(c^g) $= t(g)$ dir. (Burada s ve t G' nin kaynak ve hedef dönüşümleridir.)

2) Her $c_1, c_2 \in C(y, y), g \in G(x, y)$ için

$$(c_1 + c_2)^g = c_1^g + c_2^g$$

3) Her $c \in C(x, x), g \in G(x, y), h \in G(y, z)$ için

$$c^{g+h} = (c^g)^h \qquad \text{ve} \qquad c^{e_x} = c.$$

2.3 Grupoidlerin Topolojik Crossed Modülü

Grupoidlerin **topolojik crossed modülü** aynı nesne kümesi üzerinde tanımlı G ve C topolojik grupoidlerinin bir çiftinden ibarettir öyleki G, C üzerinde bir topolojik etki, C tamamen geçişsiz (totally intransitive) ve nesne kümesi üzerinde özdeş olan $\delta : C \longrightarrow G$ grupoid morfizmi sürekli olup aşağıdaki aksiyomları sağlar:

1) Her $c \in C(x, x), g \in G(x, y)$ için $\delta(c^g) = -g + \delta(c) + g$

2) Her $c, c_1 \in C(x, x)$ için $c^{\delta(c_1)} = -c_1 + c + c_1$ dir.

Eğer yukarıdaki tanımda C ve G topolojik grupoidleri yerine topolojik grupları alırsak, topolojik grupların crossed modülünü elde ederiz. Çünkü her topolojik grup aynı zamanda bir topolojik grupoid olduğundan grupların topolojik crossed modülü, grupoidlerin topolojik crossed modülünün özel bir halidir.

2.3.1 Örnek:

X üzerindeki her G topolojik grupoidi onun iç grubu $IG = \cup G(x)$ ile birlikte bir grupoidlerin topolojik crossed modülünü oluşturur. $i : IG \to G$ sürekli dahil etme dönüşümü bir grupoid morfizmidir ve G , IG üzerinde aşağıdaki gibi sürekli bir etki yapar.

$$IG \times G \to IG$$

$$(c, a) \mapsto c^a = -a + c + a$$

Böylece (IG, G, I) grupoidlerin bir topolojik crossed modülüdür.

2.4 Grupoidler Üzerinde Topolojik Crossed Modüllerin Kategorisi

2.4.1 Tanım:

(T_1, G_1, δ_1) ve (T_2, G_2, δ_2) birer topolojik grupoidlerin crossed modülü olsun. Bir

$$< \alpha, \phi >: (T_1, G_1, \delta_1) \to (T_2, G_2, \delta_2)$$

topolojik crossed modül morfizmi $\alpha : T_1 \to T_2$ ve $\phi : G_1 \to G_2$ sürekli morfizmlerinin bir çiftidir öyleki

i) Her $t \in T_1$ için $\delta_2(\alpha(t)) = \phi(\delta_1(t))$

ii) Her $g \in G_1, t \in T_1$ için $\alpha(t^g) = \alpha(t)^{\phi(g)}$

eşitlikleri sağlanır. Yani aşağıdaki diyagramlar değişimlidir.

$$
\begin{tikzcd}
T_1 \arrow[r, "\alpha"] \arrow[d] & T_2 \arrow[d] \\
G_1 \arrow[r, "\phi"] & G_2
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
T_1 x G_1 \arrow[r] \arrow[d, "\alpha x \phi"'] & T_1 \arrow[d, "\alpha"'] \\
T_2 x G_2 \arrow[r] & T_2
\end{tikzcd}
$$

Şimdi topolojik crossed modüllerin kategorisini oluşturalım ve bunu $TCrsM$ ile gösterelim. Bu kategorinin nesnelerinin kümesi;

$$Ob(TCrsM) = \{(T, G, \delta) : (T, G, \delta)\text{bir topolojik crossed modül}\}$$

ve morfizmlerinin kümesi de

$$Mor(TCrsM) = \{< \alpha, \phi > : < \alpha, \phi >: (T_1, G_1, \delta_1) \to (T_2, G_2, \delta_2) \textit{sürekli}\}$$

şeklinde tanımlanırsa $TCrsM$ bir kategori olur.

2.5 Topolojik 2-Grupoid

Bir $\mathcal{H} = (H_0, H_1, H_2)$ **topolojik 2-grupoidi** aşağıda verilen özellikleri sağlayan $H_0 = (\mathcal{H}\ , s_0\ , t_0\ , +_0)$ ve $H_1 = (\mathcal{H}\ , s_1\ , t_1\ , +_1)$ topolojik grupoidlerinden oluşur, burada H_2 de $\mathcal{H}$' nın morfizmlerinin kümesidir.

Bunlar arasındaki uyumluluk şartları şunlardır:

1)$s_0 = s_0s_1 = s_0t_1$, $t_0 = t_0s_1 = t_0t_1$

2)$\alpha, \alpha' \in H$ ve $\alpha' +_0 \alpha$ tanımlı olmak üzere

$$s_1(\alpha' \ +_0 \ \alpha) = s_1(\alpha') \ +_0 \ s_1(\alpha)$$

$$t_1(\alpha' \ +_0 \ \alpha) = t_1(\alpha') \ +_0 \ t_1(\alpha)$$

3) iç değişme kuralı:

$\beta, \beta', \alpha, \alpha' \in \mathcal{H}$ olmak üzere

$$(\beta \ +_0 \ \beta') \ +_1 \ (\alpha \ +_0 \ \alpha') = (\beta \ +_1 \ \alpha) \ +_0 \ (\beta' \ +_1 \ \alpha')$$

dir.

Son olarak topolojik 2-grupoidlerin kategorisini oluşturalım.

2.6 Topolojik 2-Grupoidlerin Kategorisi

Topolojik 2-grupoidlerin kategorisi nesneleri topolojik 2-grupoidler, morfizmleri topolojik 2-grupoidler arasındaki sürekli 2-grupoid morfizmleri (2-funktor) olan bir kategoridir. Yani nesnelerin kümesi

$$Ob(2-TGrpd) = \{\mathcal{H} : \mathcal{H} = (\ H_0, H_1, H_2) \text{ bir topolojik 2-grupoid } \}$$

ve morfizmlerin kümesi

$$Mor(2-TGrpd) = \{F : F : \mathcal{H} \to \mathcal{G} \ \text{ bir sürekli topolojik 2-grupoid morfizmi } \}$$

dir.

BÖLÜM 3

3 TOPOLOJİK 2-GRUPOİDLER VE CROSSED MODÜLLERİN DENKLİĞİ

Yüksek boyutlu kategori değişik matematikçiler tarafından genişçe ele alınmıştır [**6,9,13,24,26**]. Yüksek boyutlu kategorilerden biri de 2-kategoridir. Bu kategori bilindiği gibi 2-grupoid kategorisini içerir. 2-grupoid bütün morfizmlerinin tersi olan bir 2-kategoridir. Bu kategori en az üç kategoriye denktir. Bunlardan özel double grupoidleri ve grupoidlerin crossed modülünü verebiliriz[**16**]. Biz burada İçen [**16**] tarafından açık ispatı verilen 2-grupoid kategorisi ve grupoidlerin crossed modülü kategorisi arasındaki denkliğin topolojik opsiyonunu vereceğiz.

3.1 Teorem:

$\mathcal{H}$=(H_0, H_1, H_2) bir topolojik 2-grupoid olsun. Bu takdirde $\mathcal{H}$, bir $\mathcal{C}$=$(C, G, \delta) = \lambda\mathcal{H}$ topolojik crossed modülü tanımlar.

İspat: Bir $\mathcal{H}$ topolojik 2-grupoidini gözönüne alalım ve $X = H_0$, $G = H_1$ ve

$$C(x) = \{n \in H_2 : t_1(n) = 1_x\}$$

ile $\mathcal{C} = \lambda\mathcal{H}$' yı tanımlayalım.

(1). uyumluluk şartından görülür ki $n \in C(x)$ ise

$$s_0(n) = s_0t_1(n) = x$$

dir. Böylece, alternatif olarak

$$C(x) = \{n \in H_2 : s_0(n) = t_0(n) = x\}$$

dir.

C, $\{C(x)\}_{x\in X}$ ailesi olsun ve $n \in C(x)$ için $\delta(n) = s_1(n)$'yi tanımlayalım. O halde,

$$s_0(n) = s_0 t_1(n) = x$$

olduğundan $\delta(n) \in G$ dir. Yani $n \in C$ için

$$\delta : C \to G$$

$$n \mapsto \delta(n) = s_1(n)$$

ve

$$s, t : G \to X$$

$s = s_0$, $t = t_0$ şeklinde tanımlayalım.

Açıkça G, $+_1$ kompozisyonuna göre X üzerinde bir topolojik grupoiddir. Ayrıca her bir $x \in X$ için $C(x)$, $+_0$ kompozisyonuna göre, x sıfır elemanıyla birlikte bir topolojik gruptur. Eğer $m, n \in C(x)$ ise o zaman

$$n +_0 m = m +_0 n$$

olduğunu görürüz.
$n \in C(x)$ ve $a \in G(x, y)$ olsun.

$$n^a = -a +_0 n +_0 a$$

yı tanımlayalım. Öyleyse,

$$\begin{aligned} t_1(n^a) &= -t_1(a) +_0 t_1(n) +_0 t_1(a) \\ &= -a +_0 n +_0 a = y \end{aligned}$$

ve $s_0(n) = s_0(a) = x$ dir. Böylece $n^a \in C(y)$ dir ve G'nin C üzerinde bir topolojik etkisini elde ederiz. Bu etki

$$\begin{aligned} \delta(n^a) &= -s_1(a) +_0 s_1(n) +_0 s_1(a) \\ &= -a +_0 \delta(n) +_0 a \end{aligned}$$

olarak korunmuştur.

Ayrıca , eğer $m \in C(x)$, $u \in \mathcal{H}$ ve $s_0(u) = x$ ise

$$-u +_0 m +_0 u = m^{s_1(u)}$$

dur.

(1)'den $m, n \in C(x)$ ise $-m +_0 n +_0 m = n^{\delta(m)}$ olduğunu görürüz.

Bu, $\mathcal{C}$=(C, G, δ)'nın $\lambda\mathcal{H}$ şeklinde gösterdiğimiz bir topolojik crossed modül olduğunu verir.

Bu topolojik crossed modülün, tamamiyle $\mathcal{H}$ topolojik 2-grupoidi içinde ihtiva edildiğini ve $\mathcal{H}$' nın kaynak ve hedef dönüşümlerinin farklı s_i, t_i ler tarafından üretilirken, topolojik crossed modülün kompozisyonlarının $+_0$ ile üretildiğini görürüz. Eğer $x \neq y$ ise $C(x)$ ve $C(y)$ topolojik grupları ayrıktır.

Şimdi amacımız bir topolojik crossed modülden bir topolojik 2-grupoid elde etmektir. Bunu aşağıdaki teoremle verelim.

3.2 Teorem:

$\mathcal{C}$ = (C,G, δ) grupoidler üzerinde bir topolojik crossed modül olsun. Bu takdirde $\mathcal{C}$, bir $\mathcal{K}$ = (K$_0$,K_1,K_2) topolojik 2-grupoidi tanımlar.

İspat : $\mathcal{C}$ =(C,G,δ) grupoidler üzerinde bir topolojik crossed modül olsun. $\mathcal{K} = \theta(\mathcal{C})$ topolojik 2-grupoidi için,

$$G \triangle C = \{(a, c) : a \in G, c \in C(t(a))\}$$

kümesini düşünelim. Bu küme $G \times C$ topolojik uzayının alt uzayıdır. s_0 ve t_0'ı

$$s_0(a, c) = s(a) \text{ ve } t_0(a, c) = t(a)$$

şeklinde tanımlayalım. s ve t G' nin kaynak ve hedef dönüşümleri olduğundan süreklidir. O halde $K_0 = s_0(\mathcal{K}) = \mathrm{t}_0(\mathcal{K})$ olur.

Şimdi kabul edelim ki $m = (a, c)$, $n = (b, c')$ öyleki

$$t_0(m) = s_0(n),$$

yani, $t(a) = s(b)$ olsun.

$\mathcal{K}$' nın elemanları için $+_0$ işlemini

$$m +_0 n = (a, c) +_0 (b, c') = (a + b, c^b + c')$$

şeklinde tanımlarız. $+$, topolojik grupoid işlemi olduğundan $+_0$ süreklidir.

Benzer şekilde kaynak ve hedef dönüşümlerini

$$s_1(a, c) = a \text{ ve } t_1(a, c) = a + \delta(c)$$

şeklinde tanımlarız. s_1, birinci izdüşüm ve t_1 de δ sürekli fonksiyonu ve $+$ işlemi olduğundan süreklidir. $t_1(m) = s_1(n)$ olmak üzere $\mathcal{K}$' nın yine bir $+_1$ işlemini

$$m +_1 n = (a, c) +_1 (b, c') = (a, c + c')$$

şeklinde tanımlarız. Bu da $+$ sürekli olduğundan süreklidir. Burada $b = a + \delta(c)$ dir.

Ayrıca,

$$s_1(m +_0 n) = s_1(m) +_0 s_1(n)$$

$$t_1(m +_0 n) = t_1(m) +_0 t_1(n)$$

olduğunu göstermeliyiz.

$m = (a, c)$, $n = (b, c')$, $m +_0 n \in G \triangle C$ olsun. Bu takdirde

$$\begin{aligned} s_1(m +_0 n) &= s_1((a, c) +_0 (b, c')) \\ &= s_1(a + b, c^b + c') \\ &= a + b \\ &= s_1(a, c) +_0 s_1(b, c') \\ &= s_1(m) +_0 s_1(n) \end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned} t_1(m +_0 n) &= t_1((a, c) +_0 (b, c')) \\ &= t_1(a + b, c^b + c') \\ &= a + b + \delta(c^b + c') \\ &= a + b + \delta(c^b) + \delta(c') \\ &= a + b - b + \delta(c) + b + \delta(c') \\ &= a + \delta(c) + b + \delta(c') \\ &= t_1(a, c) +_0 t_1(b, c') \end{aligned}$$

olur. Böylece s_1 ve t_1 grupoid morfizmleridir. Buradan $+_0$, $+_1$ kompozisyonlarının, kaynak ve hedef dönüşümleri olarak s_0, s_1, t_0, t_1 ve özdeşlikler kümesi olarak K_0, K_1 ile birlikte K üzerinde grupoid yapıları tanımladığı kolayca görülebilir.

Son olarak iç değişim kuralı aşağıdaki gibi ispatlanabilir.
$(b,d) +_1 (b_1,d_1)$ için $b_1 = b + \delta(d)$ olmak üzere

$$\begin{aligned}((a,c) +_1 (a_1,c_1)) +_0 ((b,d) +_1 (b_1,d_1)) &= (a, c+c_1) +_0 (b, d+d_1) \\ &= (a+b, (c+c_1)^b + d + d_1)\end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned}((a,c) +_0 (b,d)) +_1 ((a_1,c_1) +_0 (b_1,d_1)) &= (a+b, c^b + d) +_1 (a_1 + b_1, c_1^{b_1} + d_1) \\ &= (a+b, c^b + d + c_1^{b_1} + d_1)\end{aligned}$$

elde edilir. Bu iki ifadenin eşit olması için gerek ve yeterşart $c_1^b + d = d + c_1^{b_1}$ olmasıdır. ($c_1^{b_1} = c_1^{b+\delta(d)} = -d + c_1^b + d$).

İç değişim kuralının tam olarak topolojik crossed modüllerin ikinci kuralına denk olduğunu söyleyebiliriz.

Şimdi ana teoremi verelim.

3.3 Teorem:

Yukarıda tanımlanan

$$\lambda : 2 - TGrpd \to TCrsM$$

$$\theta : TCrsM \to 2 - TGrpd$$

funktorları ters denktirler.

İspat. Bir $\mathcal{H}$ topolojik 2-grupoidini gözönüne alalım. $\mathcal{K} = \theta\lambda\mathcal{H}$ topolojik 2-grupoidi doğal olarak (naturally)

$$(a, c) \to 1_a +_0 c$$

dönüşümü ile $\mathcal{H}$' ya izomorfiktir. Burada $a \in G$, $c \in (\lambda\mathcal{H})$' dır.

Yukarıdaki bire-bir ve örten dönüşüm $\mathcal{K} = \theta\lambda\mathcal{H}$ üzerinde yapı tanımlar. Bu bizi $\theta(\mathcal{C})$ üzerinde topolojik 2-grupoid tanımlamaya götürür. Hatırlayacak olursak

$$s_1(a, c) = a \ , \ t_1(a, c) = a + \delta(c)$$

şeklinde tanımlanmıştı . $\theta\lambda$ dönüşümü $+_0$ ve $+_1$'i korur;

$$\begin{aligned}
\theta\lambda((a, c) +_0 (b, d)) &= \theta\lambda(a + b, c^b + d) \\
&= \theta\lambda(a + b, -1_b + c + 1_b + d) \\
&= 1_{a+b} - 1_b +_0 c +_0 1_b +_0 d \\
&= 1_a +_0 c +_0 1_b +_0 d \\
&= \theta\lambda(a, c) +_0 \theta\lambda(b, d)
\end{aligned}$$

Diğer taraftan , eğer $\mathcal{C}$ bir topolojik crossed modül , $\mathcal{H} = \theta(\mathcal{C})$ ve $D = \lambda\theta(\mathcal{C})$ ise $\mathcal{C}$, $m = (a, c)$ elemanından oluşur ve böylece

$$D = \{m \in C : s_1(m) = 1_x\},$$

$m = (1_x, c)$ elemanlarından oluşur, burada $c \in C(x)$'dir. Kolayca görülür ki

$$C \to D$$

$$c \mapsto (1_x, c) \ , \ c \in C(x)$$

şeklinde tanımlanan dönüşüm doğal bir

$$C \to \lambda\theta C$$

izomorfizmi verir. $\lambda\theta$ morfizmi yapıları korur. Gerçekten

$$\begin{aligned} \lambda\theta(c +_0 d) &= (1_x, c + d) \\ &= (1_x + 1_x, c^{1_x} + d) \\ &= (1_x, c) + (1_x, d) \\ &= \lambda\theta(c) +_0 \lambda\theta(d) \end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned} \lambda\theta(c +_1 d) &= (1_x, c + d) \\ &= \lambda\theta(c) +_1 \lambda\theta(d) \end{aligned}$$

dir.

O halde topolojik 2-grupoidler kategorisi ile topolojik grupoidlerin crossed modül kategorisi denktir.

KAYNAKLAR

[1] S.MacLane, Categories for the Working Mathematician, Springer, Berlin, (1971)

[2] C.Yıldırım, Crossed Modüller (Y.Lisans Tezi), İnönü Üniversitesi, (2000)

[3] S. Balcı , Homotopi ve Bir Uzayın Esas Grubu (Y.Lisans Tezi), Ankara Üniversitesi, (1978)

[4] S.Balcı , Bir Topolojik Uzayın Esas Gruplarının Demeti ve İlgili Karakterizasyonlar (Doktora Tezi), Ankara Üniversitesi, (1981)

[5] T.S. Blyth , Categories, University of St. Andrews, Scotland, (1986)

[6] İ. İçen , The Equivalence of 2-Groupoids and Crossed Modules,Comm.Fac.Sci.Univ.Ankara,Ser.A1,49,pp.39-48, (2000)

[7] M. İlhan , Local Topolojik Grupoidler (Y.Lisans Tezi), İnönü Üniversitesi, (1999)

[8] K. Mackenzie , Lie Groupoids and Lie Algebroids in Differential Geometry, Cambridge University Press, (1987)

[9]I. Moerdjik and J.A. Svensson, Algebraic Classification of Equivariant Homotopy 2-types, I, Journal of Pure and Applied Algebra 89, 187-216, (1993)

[10]H.Nuruşev, Topolojik Grupoidler (Y.Lisans Tezi), Gazi Üniversitesi, (1995)

[11]R. Street , The Algebra of Oriented Simplexes, Macquarie University, (1984)

[12]C. Ehresmann, Caté gories structures, Ann.Sci.Ecole Norm. Sunp.(3),80, pp.349-426, (1963) ; also in: A.C.Ehresmann,ed., Charles Ehresmann:Oeuores completes et commentées [Seven volumes](Imprimerie Evrard,Amiens,1984),PartieIII-1

[13]G.M.Kelly and R.Street, Review of the elements of 2-categories,

Lecture Notes in Mathematics,Vol 420 Springer, Berlin,pp.75-103, (1974)
[14]R.Vogt , Boardman's Stable Homotopy Category, Lectures, Spring, (1969)
[15]İ. İçen , Demetler Üzerine (Y.Lisans Tezi), İnönü Üniversitesi, (1989)
[16]İ. İçen , A 2-Dimensional Version of Holonomy Groupoids Ph.D. Thesis, University of Wales, (1996)
[17]C. Kosniowski , A First Course in Algebraic Topology, Cambridge University Press, (1980)
[18]R.Brown , Elements of Modern Topology, McGraw-Hill, London, (1968)
[19]R.Brown , "From groups to groupoids:a brief survey" Bull London Math. Soc.,19,113-134, (1987)
[20]P.J. Higgins ,Notes on Categories and Groupoids, Van Nostrand Reinhold Math. Studies, 32, Van Nostrand Reinhold, London, (1971)
[21]R.Brown ,Topology: A Geometric Account of General Topology, Homotopy Types and the Fundamental Groupoid, Ellis Horwood, Chester, (1988)
[22]İ. İçen , Sheaves and Local Subgroupoids, University of Wales, Math. Preprint,00.16 (2000)
[23]O. Mucuk , Covering Groups of Non-connected Topological Group and the Monodramy Groupoidof a Locally Topological Groupoid, Ph.D. Thesis , University of Wales, Bangor, (1993)
[24]J.C. Baez, An introduction to n-Categories,7th Conference on Category Theory and Computer Science,eds. E. Moggi and G. Rosolini, Lecture Notes in Computer Science vol.1290, Springer, Berlin,pp.1-33, (1997)
[25]A.F.Özcan ,Topolojik Crossed Modüller (Y.Lisans Tezi),İnönü Üniversitesi, (1998)
[26]J.W.Gray , Formal Category Theory Adjointness for 2-categories,

Lecture Notes in Math. 391,Springer-Verlag, (1974)
[**27**]J.P.L.Hardy, Topological Groupoids, M.A. Dissertation, University of Wales, (1972)
[**28**]G. Danesh-Naruie , Topological Groupoids, Ph.D. Thesis, Southampton University, (1970)
[**29**]R.Brown and J.P.L Hardy , Topological Groupoida I:Universal Constructions, Math. Nachr. 71, 273-286, (1976)
[**30**]R.Brown, G. Danesh-Naruie and J.P.L Hardy , Topological Groupoid II- Covering Morphisms and G-Spaces, Math. Nachr. 74, 143-156, (1976)
[**31**]A.K. Seda, Topological Groupoids, Measures and Representation, Ph.D. Thesis, University of Wales, (1974)
[**32**]L.S. Pontryagın, Topological Groups, Translated From thr Russian by Arlen Brown, (1966)
[**33**]J.H.C. Whitehead, Combinatorial Homotopy Theory II. Bull. Amer. Math. Soc. 55, 453-496, (1949)
[**34**]Z. Arvasi, Applications in Commutative Algebra of The Moore Complex of A Simplicial Algebra, Ph.D. Thesis, University College of North Wales, Bangor, (1994)
[**35**]M. Alp,GAP, Crossed modules, Cat1-groups - applications of computational group theory, Ph.D. Thesis, Bangor, (1997)
[**35**]R. Brown and C.B. Spencer, Double Groupoids and Crossed Modules, Cahiers de Top. et Geom. Diff., 17, pp.343-362, (1976)

ÖZGEÇMİŞ

25.11.1977 tarihinde Adıyaman'da doğdu. İlk ve orta öğrenimini Bursa, Erzurum ve Adıyaman'da tamamladı. 1995 yılında İnönü Üniversitesi Fen Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümüne girdi. 1999 yılında Matematik Lisans programını bitirdi. Aynı yıl açılan Araştırma Görevliliği sınavlarını kazandı. Halen İnönü Üniversitesi Fen-Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümünde araştırma görevlisi olarak çalışmaktadır.