

T.C.
İNÖNÜ ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

BURGERS DENKLEMİNİN ÇÖZÜMÜNE BİR
VARYASYONEL YAKLAŞIM

EMİNE NESLİGÜL AKSAN

131184

DOKTORA TEZİ


MATEMATİK ANABİLİM DALI

MALATYA
Ekim 2003

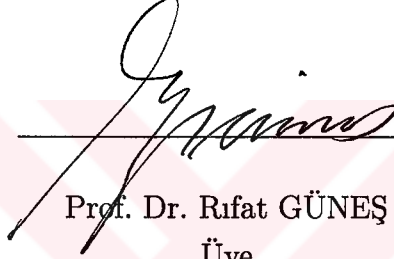
131184
İNÖNÜ ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
MATEMATİK ANABİLİM DALI

Fen Bilimleri Enstitüsü Müdürlüğü'ne,


Bu çalışma Jürimiz tarafından Matematik Anabilim dalında DOKTORA TEZİ olarak kabul edilmiştir.



Prof. Dr. Turgut ÖZİŞ
Başkan



Prof. Dr. Rifat GÜNEŞ
Üye



Doç. Dr. Ali ÖZDEŞ
Üye



Doç. Dr. Selçuk KUTLUAY
Üye



Doç. Dr. A. Refik BAHADIR
Üye

Onay

Yukarıdaki imzaların adı geçen öğretim üyelerine ait olduğunu onaylarım.

18/11/2023

Doç. Dr. Ali SAHİN
Enstitü Müdürü



Sevgili ođlum Meriç'e ...



1.9. MÜHÜRLEMEK İÇİN
DOKÜMANIYI BURAYA
KÖYÜMÜZ MÜHÜRLEMEK İÇİN

ÖZET

Doktora Tezi

BURGERS DENKLEMİNİN ÇÖZÜMÜNE BİR VARYASYONEL YAKLAŞIM

Emine Nesligül AKSAN
İnönü Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Anabilim Dalı
61 + xi sayfa
2003

Tez Danışmanı : Doç. Dr. Ali Özdeş

Bu tez beş bölümden oluşmaktadır.

Birinci bölümde, Burgers denkleminin tarihçesi sunulmaktadır.

İkinci bölümde, konuyla ilgili temel tanım ve teoremler, denklem sistemlerinin çözümleri, zamanı ayrıştırma yöntemi ve en küçük kareler yöntemi verilmektedir.

Üçüncü bölümde, Burgers denklemi ile ısı denklemi arasındaki ilişki göz önüne alınarak denklemin analitik çözümü verilmektedir.

Dördüncü bölüm tezin orjinal kısmıdır. Bu bölümde, bir boyutlu non-lineer kısmi diferansiyel denklem olan Burgers denklemi, zamanı ayrıştırma yöntemi kullanılarak p -*tane* non-lineer adi diferansiyel denkleme dönüştürülmüştür. Bu denklemlerden her biri bir varyasyonel yöntem olan en küçük kareler yöntemiyle çözülmüştür.

Beşinci bölüm dördüncü bölümün nümerik sonuçlarına ayrılmıştır. $\varepsilon > 0.01$ için değişik zaman adımlarında elde edilen nümerik çözümler ile analitik çözümler tablolar ve grafikler verilerek karşılaştırıldı. Bunların mükemmel uyum içinde oldukları görüldü. $\varepsilon \leq 0.01$ için küçük zaman adımlarında analitik çözüm çalışmamasına

rağmen $\varepsilon = 0.00001$ için küçük zaman adımlarında elde edilen nümerik çözümlerde problemin matematiksel yapısının bozulmadığı gösterilmiştir.

ANAHTAR KELİMELELER: Burgers Denklemi, Zamanı Ayrıştırma Yöntemi, En Küçük Kareler Yöntemi, Non-linear Denklem Sistemlerinin Çözümünde Newton Yöntemi.



ABSTRACT
Ph. D. Thesis

A VARIATIONAL APPROXIMATION TO THE SOLUTION OF THE BURGERS' EQUATION

Emine Nesligül AKSAN,
İnönü University
Graduate School of Natural and Applied Sciences
Department of Mathematics
61 + xi pages
2003

Supervisor : Doç. Dr. Ali Özdeş

This thesis consists of five chapters.

In chapter 1, the history of the Burgers' equation was presented.

Chapter 2 was devoted to the presentation of the solutions of the systems of equations and the method of discretization in time and the least squares method and general concepts and theorems concerning with the subject .

In Chapter 3, by considering the relation between Burgers' equation and heat equation the exact solution of the Burgers' equation was given.

Chapter 4 is the original part of this thesis. In this chapter, Burgers' equation which is one dimensional nonlinear partial differential equation was converted to p nonlinear ordinary differential equations by using the method of discretization in time. Each of them was solved by the least squares method which is a variational method.

Chapter 5 is devoted to the numerical results of Chapter 4. For $\varepsilon > 0.01$ at different time steps, the obtained numerical solutions were compared with the exact

solutions by giving tables and graphs. It was seen that both of them were in excellent agreement. While the exact solution of the equation could not be computed for $\varepsilon \leq 0.01$ at small time steps, it was shown that the mathematical structure of the problem for the obtained numerical solutions for $\varepsilon = 0.00001$ at small time steps did not decay .

KEYWORDS: Burgers' Equation, The Method of Discretization in Time, The Least Squares Method, The Newton Method for Solving Nonlinear Systems of Equations.



TEŞEKKÜR

Bu tezin hazırlanmasında benden her türlü destek ve yardımlarını esirgemeyen danışman hocam Doç. Dr. Ali ÖZDEŞ' e, sayın bölüm başkanımız Prof. Dr. Sadık KELEŞ' e ve Matematik Bölümünün bütün değerli elemanlarına, SuSE ve Lyx kullanımı ile ilgili yardımlarından dolayı Fizik Bölümünden Arş. Grv. Olgun Adem KAYA' ya, doktora süresince bana her türlü desteği veren başta eşim Arş. Grv. Dr. Mehmet Ali AKSAN olmak üzere; anneme, babama, ve kardeşlerime teşekkür etmeyi bir borç bilirim.

Ayrıca, bu tezi 2002/09' nolu proje ile destekleyen İnönü Üniversitesi Araştırma Projeleri Birimi' ne ve verdikleri doktora bursu için TÜBİTAK-BAYEG' na teşekkür ederim.

İçindekiler

| | |
|--|------|
| Özet | iv |
| Abstract | vi |
| TEŞEKKÜR | viii |
| Çizelgeler Dizini | x |
| Şekiller Dizini | xi |
| 1. GİRİŞ | 1 |
| 2. KURAMSAL TEMELLER | 4 |
| 2.1 Temel Tanım ve Teoremler | 4 |
| 2.2 Denklem Sistemlerinin Çözümü | 7 |
| 2.2.1 Lineer Denklem Sistemlerinin Çözümleri | 8 |
| 2.2.2 Lineer Olmayan Denklem Sistemlerinin Çözümleri | 9 |
| 2.2.2.1 Non-Linear Denklem Sistemlerinin Çözümü İçin Newton Yöntemi | 10 |
| 2.3 En Küçük Kareler Yöntemi | 11 |
| 2.4 Zamanı Ayrıştırma Yöntemi | 15 |
| 3. BURGERS DENKLEMİNİN ANALİTİK ÇÖZÜMÜ | 18 |
| 3.1 Burgers Denklemi ve Hopf-Cole Dönüşümü | 18 |
| 3.2 Burgers Denklemine Analitik Çözümü | 22 |
| 4. BURGERS DENKLEMİNİN NÜMERİK ÇÖZÜMÜ | 26 |
| 5. SONUÇ VE TARTIŞMA | 41 |
| 6. Kaynaklar | 56 |
| Özgeçmiş | 61 |

Çizelgeler Dizini

| | | |
|------|--|----|
| 2.1 | Örnek 2.3.1' de verilen problemin iki-terim E.K.K.M. ile elde edilen nümerik çözümünün analitik çözüm ve Reedy [48]' nin bir-terim E.K.K.M. ile elde ettiği nümerik çözüm ile karşılaştırılması. | 14 |
| 2.2 | Örnek 2.4.1' de verilen problemin $x = \pi/2$ ' de farklı Δt değerleri için elde edilen nümerik çözümler ile analitik çözümün karşılaştırılması. | 17 |
| 5.1 | $\varepsilon = 0.05$, $\Delta t = 0.0001$ için $t = 0.0001, 0.001, 0.01$ zaman adımlarında elde edilen nümerik çözümlerin analitik çözümlerle karşılaştırılması. | 43 |
| 5.2 | $\varepsilon = 0.1$, $\Delta t = 0.0001$ için $t = 0.0001, 0.001, 0.01$ zaman adımlarında elde edilen nümerik çözümlerin analitik çözümlerle karşılaştırılması. | 43 |
| 5.3 | $\varepsilon = 1.0$, $\Delta t = 0.0001$ için $t = 0.0001, 0.001, 0.01$ zaman adımlarında elde edilen nümerik çözümlerin analitik çözümlerle karşılaştırılması. | 44 |
| 5.4 | $\varepsilon = 1.0$, $\Delta t = 0.0001$ için farklı $t = 0.1, 0.2, 0.3$ zaman adımlarında elde edilen nümerik çözümlerin analitik çözümlerle karşılaştırılması. | 44 |
| 5.5 | $\varepsilon = 0.7$, $\Delta t = 0.0001$ için $t = 0.1, 0.2, 0.3$ zaman adımlarında elde edilen nümerik çözümlerin analitik çözümlerle karşılaştırılması. | 45 |
| 5.6 | $\varepsilon = 0.5$, $\Delta t = 0.0001$ için $t = 0.1, 0.2, 0.3$ zaman adımlarında elde edilen nümerik çözümlerin analitik çözümlerle karşılaştırılması. | 45 |
| 5.7 | $\varepsilon = 0.3$, $\Delta t = 0.0001$ için $t = 0.1, 0.2, 0.3$ zaman adımlarında elde edilen nümerik çözümlerin analitik çözümlerle karşılaştırılması. | 46 |
| 5.8 | $\varepsilon = 0.1$, $\Delta t = 0.0001$ için $t = 0.1, 0.2, 0.3$ zaman adımlarında elde edilen nümerik çözümlerin analitik çözümlerle karşılaştırılması. | 46 |
| 5.9 | $\varepsilon = 0.05$ ve $\Delta t = 0.002$ için $t = 2.0, 2.5, 3.0$ zaman adımlarında elde edilen nümerik çözümlerin analitik çözümlerle karşılaştırılması. | 47 |
| 5.10 | $\varepsilon = 0.1$, $\Delta t = 0.0001$ için $t = 0.1$ ' de farklı sayıda baz elemanı alarak elde edilen nümerik çözümlerin analitik çözümle karşılaştırılması. | 47 |
| 5.11 | $\varepsilon = 1.0$, $t = 0.1$ ' de farklı Δt değerleri için elde edilen nümerik çözümlerin analitik çözümle karşılaştırılması. | 48 |
| 5.12 | $\Delta t = 0.00005$ alarak farklı zaman adımlarında farklı viskozite değerleri için elde edilen nümerik çözümler. | 48 |

Şekiller Dizini

| | | |
|------|--|----|
| 5.1 | $\varepsilon = 1.0, \Delta t = 0.0001$ için $t = 0.001, 0.005, 0.1, 0.5'$ de elde edilen nümerik çözümlerin analitik çözümlerle karşılaştırılması. | 49 |
| 5.2 | $\varepsilon = 1.0, \Delta t = 0.001$ için $t = 0.8, 1.0'$ da elde edilen nümerik çözümlerin analitik çözümlerle karşılaştırılması. | 49 |
| 5.3 | $\varepsilon = 0.5, \Delta t = 0.0001$ için $t = 0.001, 0.1, 0.3, 0.5'$ de elde edilen nümerik çözümlerin analitik çözümlerle karşılaştırılması. | 50 |
| 5.4 | $\varepsilon = 0.5, \Delta t = 0.001$ için $t = 0.5, 0.8, 1.0'$ da elde edilen nümerik çözümlerin analitik çözümlerle karşılaştırılması. | 50 |
| 5.5 | $\varepsilon = 0.1, \Delta t = 0.0001$ için $t = 0.001, 0.1, 0.3, 0.5'$ de elde edilen nümerik çözümlerle analitik çözümlerin karşılaştırılması. | 51 |
| 5.6 | $\varepsilon = 0.1, \Delta t = 0.001$ için $t = 1.0, 2.0, 3.0'$ da elde edilen nümerik çözümlerle analitik çözümlerin karşılaştırılması. | 51 |
| 5.7 | $\varepsilon = 0.05, \Delta t = 0.0001$ için $t = 0.001, 0.1, 0.3, 0.5'$ de elde edilen nümerik çözümlerle analitik çözümlerin karşılaştırılması. | 52 |
| 5.8 | $\varepsilon = 0.05, \Delta t = 0.001$ için $t = 2.0, 2.5, 3.0'$ da elde edilen nümerik çözümlerle analitik çözümlerin karşılaştırılması. | 52 |
| 5.9 | $\varepsilon = 0.03, \Delta t = 0.0002$ için $t = 0.1, 0.2, 0.3'$ de elde edilen nümerik çözümlerin analitik çözümlerle karşılaştırılması. | 53 |
| 5.10 | $\varepsilon = 0.04, \Delta t = 0.002$ için $t = 2.0, 2.5, 3.0'$ de elde edilen nümerik çözümlerin analitik çözümlerle karşılaştırılması. | 53 |
| 5.11 | $\varepsilon = 0.01, \Delta t = 0.0001$ için $t = 0.15'$ de nümerik çözümle analitik çözümün karşılaştırılması. | 54 |
| 5.12 | $\varepsilon = 0.01, \Delta t = 0.0001$ için $t = 0.25'$ de elde edilen nümerik çözümle analitik çözümün karşılaştırılması. | 54 |
| 5.13 | $\varepsilon = 0.00001, \Delta t = 0.0001$ için $t = 0.05, 0.1, 0.2'$ de elde edilen nümerik çözümler. | 55 |
| 5.14 | $\varepsilon = 0.00001, \Delta t = 0.0002$ için $t = 0.3, 0.4, 0.5'$ de elde edilen nümerik çözüm. | 55 |

1. GİRİŞ

Burgers denklemi olarak bilinen

$$\frac{\partial U}{\partial t} + U \frac{\partial U}{\partial x} = \varepsilon \frac{\partial^2 U}{\partial x^2}$$

bir boyutlu non-lineer parabolik kısmi diferansiyel denklem ilk olarak 1915' de Bateman' ın makalesinde görülmüştür [1]. Denklemin bilim dünyasında popüler olması 1939-1965 yılları arasında denkleme ismini veren J. M. Burgers' in turbulans teorisi üzerine yaptığı çalışmalar sayesinde olmuştur [2-11]. Burgers turbulansın değişik yönlerini inceleyerek, bir boyutlu turbulans ve şok dalgaları için denklemi model olarak kullanmayı önermiştir [4]. Daha sonraki yıllarda denklem bir çok alanda model problem olarak kullanılmıştır. Lagerstrom vd. [12] denklemin küçük bir parametreyle " ε " çarpılmış yüksek mertebeden türevleri içermesinden dolayı denklemin Navier- Stokes denklemlerine benzediğini vurgulamıştır. Cole [13] denklemin şok dalga teorisi ve turbulans teorisi ile ilişkisini vermiştir. Denklemin sonlu genlikli enine hidromagnetik dalgalarla olan ilişkisi Goldberg [14], izotropik katılardaki elastik dalgalarla ilişkisi Pospelov [15], termoviskos sıvılarda sonlu genlikli dalgalarla ilişkisi Blackstock [16], Keck ve Bayer [17], Mendousse [18], Soluyan ve Khokhlov [19] ve sayılar teorisi ile olan ilişkisi ise Van der Pol [20] tarafından verilmiştir.

Bir çok araştırmacı problemin çözümü için değişik yollar önermiştir. Denklemin analitik çözümleri ile ilgili oldukça kapsamlı bir çalışma Benton ve Platzman [21] tarafından yapılmıştır. Burgers denkleminin en ilginç çözümlerinden biri Fay [22] tarafından verilmiştir. Bu çözüm Fubini-Ghiron [23]' un çalışması ile akustik literatürde Fubini çözümü olarak bilinmektedir. Fay' ın bu çözümü daha sonra probleme bir başlangıç şartı eklenerek Cole [13] tarafından tekrar ele alınarak geliştirilmiştir. Bu başlangıç şartıyla birlikte göz önüne alınan denklemin tam çözümü Benton tarafından verilmiştir [24-25]. Blackstock [26] Burgers denkleminin Fay tarafından

verilen çözümleri ile bir boyutlu pistonun sinüzoidal hareketiyle meydana gelen ses alanı arasındaki ilişkiyi ortaya koymuştur. Yaklaşık olarak aynı zamanda fakat birbirlerinden bağımsız olarak Hopf [27] ve Burgers [6] denklemin çözümü için

$$U = t^{-1/2}S(z), z = (4\epsilon t)^{-1/2}x$$

benzerlik dönüşümünü kullanmışlardır. Bu benzerlik dönüşümü altında Burgers denkleminin Ricatti denklemine dönüştüğü Rodin [28] tarafından gösterilmiştir. Bu dönüşümün yanısıra bir çok çalışmada Hopf-Cole dönüşümü olarak bilinen

$$U = -2\epsilon \frac{\theta_x}{\theta}$$

dönüşümü ile problemin çözümü aranmıştır. Bu dönüşüm, Burgers denklemi ile ısı denklemi arasındaki yakın ilişkiyi göstermektedir. Hopf-Cole dönüşümü ilk olarak Lagerstrom vd. [12] ait bir teknik raporda görülmüş ve daha sonra Cole [13] tarafından yayınlanmıştır. Ayrıca, Hopf-Cole dönüşümünün hidrodinamik uygulamaları Ames [29], Chu [30], Shvets ve Meleshko [31] tarafından tartışılmıştır.

Bir çok fiziksel olayın matematiksel modeli olarak karşımıza çıkan Burgers denklemi matematiksel açıdan da ilginç özellikler taşımaktadır. Burgers denklemi ϵ' un çok küçük olması durumunda parabolik yapısını yitirerek hiperbolik bir yapı kazanır. Bu sebepten dolayı bir çok araştırmacı, özellikle ϵ' nun küçük değerleri için denklemin matematiksel yapısını koruyacak çözümler üretmeye çalışmış ve çeşitli nümerik teknikler önermiştir. Örneğin Miller [32] predictor-corrector metodunu, Varoğlu vd. [33] ağırlıklı rezidü metodunu, Caldwell vd. [34], Arminjon vd [35], T. Öziş vd. [36] sonlu elaman yöntemini, Evans vd. [37] group explicit metodu , Mittal vd. [38] Galerkin metodunu , S. Kutluay vd. [39], A. Bahadır [40] sonlu fark yöntemlerini, T. Öziş vd. [41] direkt varyasyonel metodu, G. W. Wei vd. [42] conjugate filter yaklaşımını kullanarak çeşitli ϵ değerleri için problemin nümerik çözümlerini elde ettiler.

Bu çalışmada bir non-linear kısmi diferansiyel denklem olan Burgers denklemi zamanı ayrıştırma metodu ile ardışık olarak çözülmesi gereken p -tane non-linear adi

diferansiyel denkleme dönüştürüldü ve bu şekilde oluşturulan her bir denklemin çözümleri için bir varyasyonel yöntem olan en küçük kareler yöntemi uygulandı. Sonuçta her bir denklemin çözümünde ortaya çıkan non-lineer cebirsel denklem sistemi için Newton yöntemi uygulanarak nümerik çözüm elde edildi. Viskositenin değişik değerleri ile elde edilen nümerik çözümler problemin analitik çözümü ile karşılaştırıldı ve viskosite, ε , için bir alt sınır belirlenmeye çalışıldı.



2. KURAMSAL TEMELLER

Bu bölümde çalışmalarımıza temel teşkil eden bazı tanım ve teoremler ile birlikte denklem sistemlerinin çözümleri, model probleme ardışık olarak uygulayacağımız zamanı ayrıştırma yöntemi ve en küçük kareler yöntemi verilmektedir.

2.1 Temel Tanım ve Teoremler

Tanım 2.1.1: Elemanları fonksiyonlar olan bir M cümlesini göz önüne alalım. Her $u_1(x), u_2(x) \in M$ ve a_1, a_2 keyfi reel sabitler olmak üzere

$$a_1u_1(x) + a_2u_2(x) \in M$$

ise M 'ye *lineer cümle* denir [43].

Tanım 2.1.2: \overline{G} , düzlemde herhangi bir G bölgesinin kapanışı olmak üzere; L, \overline{G} bölgesinde tanımlı bütün sürekli fonksiyonların lineer cümlesi olsun. $u(x), v(x) \in L$ fonksiyonlarının *iç çarpımı*

$$\int_G u(x)v(x) dx \quad (2.1)$$

integrali ile tanımlanır ve (u, v) ile gösterilir [43].

Teorem 2.1.1: $u(x), v(x), u_1(x), u_2(x), L'$ nin keyfi fonksiyonları ve a_1, a_2 keyfi reel sabitler olsun. (2.1) iç çarpımı

$$(u, v) = (v, u),$$

$$(a_1u_1 + a_2u_2, v) = a_1(u_1, v) + a_2(u_2, v),$$

$$(u, u) \geq 0,$$

$$(u, u) = 0 \Leftrightarrow u(x) \equiv 0$$

özelliklerine sahiptir [43].

Tanım 2.1.3: L lineer cümlesindeki herhangi bir $u(x)$ fonksiyonunun *normu*

$$\|u\| = \sqrt{(u, u)} = \sqrt{\left(\int_G u^2(x) dx\right)} \quad (2.2)$$

şeklinde tanımlanır [43].

Teorem 2.1.2: $u(x)$ ve $v(x)$ L 'nin keyfi fonksiyonları, a keyfi reel sabit olsun. (2.2) normu

$$\|u\| \geq 0,$$

$$\|u\| = 0 \Leftrightarrow u(x) \equiv 0,$$

$$\|au\| = |a| \cdot \|u\| ,$$

$$|(u, v)| \leq \|u\| \cdot \|v\| ,$$

$$\|u + v\| \leq \|u\| + \|v\| ,$$

$$|\|u\| - \|v\|| \leq \|u - v\|$$

özelliklerine sahiptir [43].

Tanım 2.1.4: L lineer cümlesindeki $u(x)$ ve $v(x)$ fonksiyonları arasındaki *uzaklık*

$$d(u, v) = \|u - v\| \quad (2.3)$$

olarak verilir [43].

Teorem 2.1.3: $u(x)$, $v(x)$ ve $z(x)$ L 'nin keyfi fonksiyonları olsun. (2.3) bağıntısı

$$d(u, v) \geq 0 ,$$

$$d(u, v) = 0 \Leftrightarrow u(x) \equiv v(x) ,$$

$$d(u, v) = d(v, u) ,$$

$$d(u, v) \leq d(u, z) + d(z, v)$$

özelliklerine sahiptir [43].

Tanım 2.1.5: (2.2) normu ve (2.3) metriği ile birlikte lineer L cümlesine *pre-Hilbert uzayı* denir ve S ile gösterilir [43].

Tanım 2.1.6: $N \subseteq S$ olsun. Eğer $\overline{N} = S$ ise N cümlesine S uzayında *yoğun cümle* denir [43].

Tanım 2.1.7: S uzayında en az bir sayılabilir yoğun cümle varsa S uzayına *ayrılabilir* denir [43].

Tanım 2.1.8: S uzayında her $\{u_n\}$ Cauchy dizisi $u \in S$ elemanına yakınsıyorsa S uzayına *tamdır* denir [43].

Tanım 2.1.9: S pre-Hilbert uzayı tam ise S uzayına *Hilbert uzayı* denir ve H ile gösterilir [43].

Tanım 2.1.10: Herhangi iki M_1 ve M_2 cümlesi verilsin. Her $u \in M_1$ elemanını bir $v \in M_2$ elemanına dönüştüren ve

$$v = Au$$

şeklinde tanımlı A kuralına M_1 den M_2 ye bir *operatör* denir [43].

Tanım 2.1.11: Bir A operatörünün tanım bölgesi D_A olsun. $u_1, u_2, \dots, u_N \in D_A$ bölgesindeki keyfi elemanlar ve a_1, a_2, \dots, a_N keyfi reel sabitler olmak üzere

$$A(a_1u_1 + a_2u_2 + \dots + a_Nu_N) = a_1Au_1 + a_2Au_2 + \dots + a_NAu_N$$

oluyor ise A operatörüne *lineerdir* denir [43].

Tanım 2.1.12: Bir A operatörünün tanım bölgesi D_A olsun. Her $u \in D_A$ için

$$\| Au \| \leq K \| u \|$$

olacak şekilde $K \geq 0$ sayısı varsa A operatörüne *sınırlıdır* denir [43].

Tanım 2.1.13: D_A, H Hilbert uzayında yoğun bir lineer cümle ve A operatörü lineer olsun. Her $u, v \in D_A$ için

$$(Au, v) = (u, Av)$$

oluyorsa A operatörüne D_A bölgesinde *simetrik* denir [43].

Tanım 2.1.14: A operatörü D_A tanım bölgesinde simetrik olsun. Her $u \in D_A$ için D_A bölgesinde

$$(Au, u) \geq 0$$

ve

$$(Au, u) = 0 \Rightarrow u = 0$$

oluyorsa A operatörüne D_A bölgesinde *pozitif* denir [43].

Tanım 2.1.15: A operatörü D_A tanım bölgesinde pozitif olsun. Her $u \in D_A$ için

$$(Au, u) \geq C^2 \| u \|^2$$

olacak şekilde $C > 0$ sayısı varsa, A operatörüne D_A bölgesinde *pozitif tanımlıdır* denir [43].

2.2 Denklem Sistemlerinin Çözümü

Denklem sistemlerinin çözümü nümerik hesaplamalarda en çok karşılaşılan problemlerden biridir. Genel olarak denklem sistemleri, göz önüne alınan problemin varyasyonel yöntemlerle, sonlu fark yöntemleriyle yada sonlu eleman yöntemleriyle

çözümleri gibi çeşitli alanlarda ortaya çıkarlar. Denklem sistemlerinin çözümlerini lineer denklem sistemlerinin çözümleri ve lineer olmayan denklem sistemlerinin çözümleri olmak üzere iki gruba ayırmak mümkündür. Bunlardan en çok kullanılan belli başlıklar aşağıda verilmiştir.

2.2.1 Lineer Denklem Sistemlerinin Çözümleri

Bir lineer denklem sistemi a_{ij} ($1 \leq i, j \leq n$), b_i ($1 \leq i \leq n$)' ler reel sabitler ve x_i ($1 \leq i \leq n$)' ler bilinmeyenler olmak üzere;

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n &= b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n &= b_2 \\ &\dots\dots\dots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \dots + a_{nn}x_n &= b_n \end{aligned}$$

veya matris formunda $\mathbf{A} = [a_{ij}]_{n \times n}$, $\mathbf{x} = [x_i]_{n \times 1}$, $\mathbf{b} = [b_i]_{n \times 1}$ olmak üzere;

$$\mathbf{Ax} = \mathbf{b} \quad (2.4)$$

şeklinde gösterilir. (2.4) denklem sisteminde \mathbf{b} vektörünün sıfır olması halinde denklem sistemi *homojen denklem sistemi* adını alır ve böyle bir sistemin her zaman *aşıkâr* yani *sıfır çözümü* vardır. Eğer bundan başka bir çözümü varsa o çözüme *aşıkâr olmayan çözüm* denir. Eğer \mathbf{b} vektörü sıfırdan farklı ise o zaman (2.4) denklem sistemine *homojen olmayan denklem sistemi* denir ve homojen olmayan denklem sistemlerinin çözümleri için kullanılan yöntemler *direkt yöntemler* ve *iteratif yöntemler* olarak ikiye ayrılır [44]. En sık kullanılan direkt ve iteratif yöntemler de aşağıdaki gibi gruplandırılabilir.

Direkt Yöntemler

Cramer yöntemi

Yok etme yöntemleri

- Gauss eleme yöntemi
- Gauss-Jordan Yöntemi

LU ayrıştırma yöntemleri

- Doolittle yöntemi
- Crout yöntemi
- Cholesky yöntemi

İteratif Yöntemler

Jacobi yöntemi

Gauss-Seidel yöntemi

S.O.R (Successive Over Relaxation) yöntemi

Bu yöntemlerin herbiri hizmet ettikleri amaçlara göre kendi içlerinde avantajlara ve dezavantajlara sahiptir. Yöntem seçimi yapılırken yöntemin çözüm sırasında gerektirdiği işlem sayısı, yöntemin kolay programlanabilir olması, mümkün olduğunca az yuvarlama hatalarına yol açması göz önüne alınması gereken önemli noktalardır [45].

2.2.2 Lineer Olmayan Denklem Sistemlerinin Çözümleri

Lineer olmayan bir denklem sistemi $f_i (1 \leq i \leq n)$; x_1, x_2, \dots, x_n reel değişkenlerine bağlı ve reel değerler alan fonksiyonlar olmak üzere

$$f_1(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0$$

$$f_2(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0$$

.....

$$f_n(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0$$

veya kapalı formda $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)^t \in R^n$, $\mathbf{0} = (0, 0, \dots, 0)^t \in R^n$ ve $\mathbf{F}(\mathbf{x}) = (f_1(\mathbf{x}), f_2(\mathbf{x}), \dots, f_n(\mathbf{x}))^t$ olmak üzere;

$$\mathbf{F}(\mathbf{x}) = \mathbf{0} \tag{2.5}$$

olarak gösterilir. Burada $\mathbf{F} : R^n \rightarrow R^n$ bir dönüşümdür.

Fizik ve mühendislikteki bir çok olayın matematiksel modellenmesi yapıldığında lineer olmayan (*non-linear*) denklem sistemleri karşımıza çıkar. Non-linear denklem sistemlerinin çözümleri lineer denklem sistemlerinin çözümlerine göre daha zordur. Ancak günümüzde, geliştirilmiş iteratif yöntemler sayesinde bu tür sistemlerin çözümü kolaylaşmıştır [46]. Bu iteratif yöntemler arasında en sık kullanılanlar aşağıda verilecektir.

Non-Linear Denklem Sistemlerinin Çözümleri için İteratif Yöntemler

Basit iterasyon yöntemi

Seidel yöntemi

Newton yöntemi

Bu çalışmada ağırlıklı olarak Newton yöntemi kullanıldığından burada Newton yönteminden kısaca bahsetmekte fayda vardır.

2.2.2.1 Non-Linear Denklem Sistemlerinin Çözümü İçin Newton Yöntemi

(2.5) non-linear denklem sistemi verilsin. (2.5) sisteminin *Jacobian matrisi* olarak adlandırılan matris

$$\mathbf{J}(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial f_2}{\partial x_n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1} & \frac{\partial f_n}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial f_n}{\partial x_n} \end{bmatrix}$$

şeklinde tanımlanır. (2.5) non-linear denklem sisteminin Newton yöntemi ile çözümü

$$\mathbf{J}(\mathbf{x}^{(k-1)})(\mathbf{x}^{(k)} - \mathbf{x}^{(k-1)}) = -\mathbf{F}(\mathbf{x}^{(k-1)}), \quad k = 1, 2, \dots$$

ile verilir. Burada $\mathbf{x}^{(0)} = (x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, \dots, x_n^{(0)})^t$, başlangıç vektörüdür. Newton yöntemi çözüme kuadratik olarak yakınsadığından iyi bir başlangıç vektörünün seçimiyle çözüme ulaşmak için oldukça etkilidir [47].

2.3 En Küçük Kareler Yöntemi

Düzlemin bir Ω bölgesinde,

$$Au = f \quad (2.6)$$

operatör denklemini göz önüne alalım. Burada A ayrılabilir bir H Hilbert uzayında yoğun bir D_A lineer cümlesi üzerinde tanımlı bir operatör ve $f \in H$ dir. $\phi_k \in D_A$, ($k = 1, 2, \dots$) D_A nın bir bazı olsun. Bu durumda (2.6) denkleminin $u_N \in D_A$ yaklaşık çözümü

$$u_N = \sum_{i=1}^N c_i \phi_i$$

şeklinde yazılabilir. Burada c_i bilinmeyen sabitlerdir. En küçük kareler metodunda amaç

$$\|R_N\|_H = \|Au_N - f\|_H = \left\| \sum_{i=1}^N A(c_i \phi_i) - f \right\|_H = \min \quad (2.7)$$

olacak biçimde c_i sabitlerini belirlemektir. (2.7) 'nin sağlanması için gerekli şart c_k , ($k = 1, 2, \dots, N$) bilinmeyenleri için

$$0 = \frac{\partial}{\partial c_k} \|R_N\|_H = \frac{\partial}{\partial c_k} \sqrt{(R_N, R_N)_H} = \left(R_N, \frac{\partial R_N}{\partial c_k} \right)_H \frac{1}{\|R_N\|_H}$$

denklemlerinin sağlanmasıdır. $\|R_N\|_H \neq 0$ olduğundan, son yazılan ifade

$$\left(R_N, \frac{\partial R_N}{\partial c_k} \right)_H = 0$$

denklem sistemine denktir ($k = 1, 2, \dots, N$). Yani (2.6) denkleminin u_N yaklaşık çözümünü en küçük kareler metodu ile bulmak için

$$\left(Au_N - f, \frac{\partial}{\partial c_k} (Au_N) \right)_H = 0 \quad (2.8)$$

denklem sistemi çözülmelidir [48].

Eğer A operatörü lineer ise,

$$\sum_{i=1}^N (A\phi_i, A\phi_k)_H c_i = (f, A\phi_k)_H$$

denklem sistemi oluşur. Bu durumda oluşan denklem sisteminin katsayılar matrisi, $G_{ij} = (A\phi_i, A\phi_j)_H$, her A operatörü için simetrik olur. G matrisinin tersinin olması için gerek ve yeter şart $\{A\phi_i\}$ cümlesinin lineer bağımsız olmasıdır. A operatörü lineer ve $\{\phi_i\}$ cümlesi lineer bağımsız ise $\{A\phi_i\}$ lineer bağımsızdır. Gerçekten bu durumu ispatlamak için $\{A\phi_i\}$ cümlesinin lineer bağımlı olduğunu kabul edelim. Bu taktirde hepsi birden sıfır olmayan α_i sabitleri için

$$\sum_{i=1}^N \alpha_i A\phi_i = 0$$

yazabiliriz. A operatörü lineer olduğundan, son yazılan ifade

$$A \left(\sum_{i=1}^N \alpha_i \phi_i \right) = 0$$

olarak yazılabilir. Bu ifadeden de $\sum_{i=1}^N \alpha_i \phi_i = 0$ yazabiliriz. $\{\phi_i\}$ cümlesi lineer bağımsız olduğundan her $i = 1, 2, \dots, N$ için $\alpha_i = 0$ dır. Bu bir çelişkidir. Bu çelişkiye $\{A\phi_i\}$ cümlesinin lineer bağımlı olduğunu kabul ettiğimizden düştük. Sonuç olarak $\{A\phi_i\}$ cümlesi lineer bağımsızdır. Yöntemin yakınsaklığı ile ilgili olarak aşağıdaki teoremi verebiliriz [48].

Teorem 2.3.1: A ayrılabilir bir H Hilbert uzayında yoğun bir D_A lineer cümlesi üzerinde pozitif tanımlı bir operatör ve $f \in H$ olsun. Eğer $\{A\phi_i\}$ cümlesi H 'nin bir bazı ise

$$\|Au_N - f\|_H = \min$$

şartı ile tek olarak belirlenmiş c_i katsayıları ile birlikte $u_N = \sum_{i=1}^N c_i \phi_i$ elemanlarının dizisi H 'de $Au = f$ operatör denkleminin genelleştirilmiş u çözümüne yakınsar. Bu H 'de

$$\lim_{N \rightarrow \infty} Au_N \rightarrow f$$

şeklinde gösterilir [48].

Örnek 2.3.1:

$$u \frac{d^2u}{dx^2} + \left(\frac{du}{dx} \right)^2 = 1 \quad 0 < x < 1 \quad (2.9)$$

$$u'(0) = 0, \quad u(1) = \sqrt{2} \quad (2.10)$$

sınır değer problemini en küçük kareler yöntemi ile çözelim.

Burada,

$$Au = u \frac{d^2u}{dx^2} + \left(\frac{du}{dx} \right)^2$$

operatörünün tanım bölgesi, $[0, 1]$ aralığında kendisi ve ikinci mertebeye kadar türevleri sürekli, (2.10) sınır şartlarını sağlayan fonksiyonların D_A lineer cümlesi ve $f = 1$ dir.

Problemin yaklaşık çözümünün,

$$u_2 = \sqrt{2}x^2 + c_1(1 - x^2) + c_2(1 - x^3) \quad (2.11)$$

formunda olduğunu kabul edelim. Bu durumda

$$\begin{aligned} Au_2 - f &= 12x^2 + (2\sqrt{2} - 12\sqrt{2}x^2)c_1 + (2\sqrt{2} - 20\sqrt{2}x^3)c_2 + (6x^2 - 2)c_1^2 \\ &\quad + (15x^4 - 6x)c_2^2 + (20x^3 - 6x - 2)c_1c_2 - 1 \end{aligned}$$

ve

$$\frac{\partial}{\partial c_1} (Au_2) = (2\sqrt{2} - 12\sqrt{2}x^2) + (12x^2 - 4)c_1 + (20x^3 - 6x - 2)c_2$$

$$\frac{\partial}{\partial c_2} (Au_2) = (2\sqrt{2} - 20\sqrt{2}x^3) + (30x^4 - 12x)c_2 + (20x^3 - 6x - 2)c_1$$

olarak elde edilir. Bunlar (2.8) sisteminde yerlerine yazıldığında,

$$\begin{aligned}
& -\frac{94\sqrt{2}}{5} + \frac{232}{5}c_1 + 66c_2 - \frac{96\sqrt{2}}{5}c_1^2 - 48\sqrt{2}c_1c_2 - \frac{216\sqrt{2}}{7}c_2^2 + \frac{32}{5}c_1^3 + 21c_1^2c_2 \\
& + \frac{174}{7}c_1c_2^2 + \frac{21}{2}c_2^3 = 0 \\
& -29\sqrt{2} + 66c_1 + \frac{684}{7}c_2 - 24\sqrt{2}c_1^2 - \frac{432\sqrt{2}}{7}c_1c_2 - \frac{81\sqrt{2}}{2}c_2^2 + 7c_1^3 + \frac{174}{7}c_1^2c_2 \\
& + \frac{63}{2}c_1c_2^2 + 14c_2^3 = 0
\end{aligned}$$

non-linear denklem sistemi elde edilir. Bu sistem Newton yöntemi ile çözümlerse, (2.11) yaklaşık çözümü

$$u_2 = \sqrt{2}x^2 + 0.87778(1 - x^2) + 0.12201(1 - x^3)$$

olarak elde edilir. (2.9)-(2.10) probleminin tam çözümü $u(x) = \sqrt{x^2 + 1}$ dir [48].

Tablo 2.1: Örnek 2.3.1' de verilen problemin iki-terim E.K.K.M. ile elde edilen nümerik çözümünün analitik çözüm ve Reedy [48]' nin bir-terim E.K.K.M. ile elde ettiği nümerik çözüm ile karşılaştırılması.

| x | Nümerik Çözümler | | Analitik Çözüm |
|-----|------------------|-----------|----------------|
| | Bir-terim[48] | İki-terim | |
| 0.0 | 1.0885 | 0.9998 | 1.0000 |
| 0.1 | 1.0918 | 1.0050 | 1.0050 |
| 0.2 | 1.1015 | 1.0203 | 1.0198 |
| 0.3 | 1.1178 | 1.0448 | 1.0440 |
| 0.4 | 1.1406 | 1.0778 | 1.0770 |
| 0.5 | 1.1699 | 1.1186 | 1.1180 |
| 0.6 | 1.2085 | 1.1666 | 1.1661 |
| 0.7 | 1.2481 | 1.2208 | 1.2207 |
| 0.8 | 1.2969 | 1.2806 | 1.2806 |
| 0.9 | 1.3523 | 1.3454 | 1.3450 |
| 1.0 | 1.4142 | 1.4142 | 1.4142 |

Verilen problemin yaklaşık çözümünü kurarken Reedy [48]' nin çözümüne sadece bir terim ilave etmek bile analitik çözüme daha yakın sonuçlar elde etmeye yetti. Bu da baz elemanları sayısının çözüm üzerindeki etkisini gösterir. Problemin çözümü için $\mathbf{c}^{(0)} = (c_1^{(0)}, c_2^{(0)})^t$ başlangıç vektörü $\mathbf{c}^{(0)} = (0, 0)^t$ olarak alındı. Yöntem $\|\mathbf{c}^{(k)} - \mathbf{c}^{(k-1)}\|_\infty = \max_{1 \leq i \leq 2} |c_i^{(k)} - c_i^{(k-1)}| \leq 0.00001$ olduğunda durduruldu.

2.4 Zamanı Ayrıştırma Yöntemi

$\Omega \times (0, T)$ bölgesinde

$$\frac{\partial u}{\partial t} + Au = f \quad (2.12)$$

verilmiş kısmi diferansiyel denklem, Ω' da

$$u(x, 0) = u_0(x) \quad (2.13)$$

başlangıç şartı ve $\Gamma \times (0, T)$ ' de

$$\begin{aligned} B_i u &= g_i \\ C_i u &= h_i \end{aligned} \quad (2.14)$$

sınır şartları ile tanımlanan sınır-değer problemini göz önüne alalım. Burada B_i ve C_i ; A operatörü ile ilişkili sınır operatörleri ve T ; toplam zamandır. Zamanı ayrıştırma metodunda $[0, T]$ aralığı uzunluğu Δt olan $I_j = [t_{j-1}, t_j]$ olmak üzere p alt aralığa bölünür. Burada $t_0 = 0$ dir. $j = 1, 2, \dots, p$ için $t = t_j$ noktalarında (2.12) denklemindeki $\frac{\partial u}{\partial t}$ türevi yerine

$$\frac{z_j - z_{j-1}}{\Delta t}$$

ifadesinin yazılması ile

$$Az_j + \frac{1}{\Delta t} z_j = \frac{1}{\Delta t} z_{j-1} + f \quad (2.15)$$

denklemini elde edilir [49]. Bu denklem

$$z_0 = u_0 \quad (2.16)$$

alınarak, $j = 1, 2, \dots, p$ için ardışık olarak çözülür. Bu yöntem ile (2.12)-(2.14) denklemleri ile göz önüne alınan parabolik başlangıç sınır-değer probleminin çözümü, (2.15) denklemleri ve (2.14) sınır şartlarına karşılık gelen sınır şartları ile birlikte p tane adi diferansiyel denklemin çözümüne indirgenmiş olur.

Örnek 2.4.1: $\Omega = (0, \pi) \times (0, 1)$ bölgesinde

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \sin x \quad (2.17)$$

$$u(x, 0) = 0 \quad (2.18)$$

$$u(0, t) = u(\pi, t) = 0 \quad (2.19)$$

problemini göz önüne alalım.

Burada A operatörü $A = -\frac{\partial^2}{\partial x^2}$ dir. (2.17)-(2.19) başlangıç- sınır değer problemi, (2.17) denkleminde $\frac{\partial U}{\partial t}$ yerine $\frac{(z_j - z_{j-1})}{\Delta t}$ ifadesinin yazılması ile $j = 1, 2, \dots, p$ için

$$-\frac{d^2 z_j}{dx^2} + \frac{1}{\Delta t} z_j = \frac{1}{\Delta t} z_{j-1} + \sin x \quad (2.20)$$

$$z_j(0) = z_j(\pi) = 0$$

sınır değer problemlerine dönüşür. Burada (2.16)' den $z_0 = 0$ dır .

$j = 1$ için (2.20) denkleminde

$$-\frac{d^2 z_1}{dx^2} + \frac{1}{\Delta t} z_1 = \frac{1}{\Delta t} z_0 + \sin x, \quad z_1(0) = z_1(\pi) = 0$$

olarak elde edilen sınır değer probleminin çözümü

$$z_1(x) = \left(1 - \frac{1}{1 + \Delta t}\right) \sin x$$

olup, $z_2(x)$ ' yi elde etmek için $j = 2$ alınarak (2.20) probleminde $z_1(x)$ ' in yerine yazılması ile,

$$-\frac{d^2 z_2}{dx^2} + \frac{1}{\Delta t} z_2 = \left(\frac{2 + \Delta t}{1 + \Delta t}\right) \sin x, \quad z_2(0) = z_2(\pi) = 0$$

problemi elde edilir. Bu problemin çözümü de

$$z_2(x) = \left(1 - \frac{1}{(1 + \Delta t)^2}\right) \sin x$$

olarak bulunur. Bu şekilde devam ederek, (2.20) probleminin çözümü $j = 1, 2, \dots, p$ için

$$z_j(x) = \left(1 - \frac{1}{(1 + \Delta t)^j}\right) \sin x$$

olarak genelleştirilebilir. (2.17)-(2.19) probleminin tam çözümü

$$u(x, t) = (1 - \exp(-t)) \sin x$$

dir [49].

Tablo 2.2: Örnek 2.4.1' de verilen problemin $x = \pi/2$ ' de farklı Δt değerleri için elde edilen nümerik çözümler ile analitik çözümün karşılaştırılması.

| t | Nümerik Çözümler | | | Analitik Çözüm |
|-----|------------------|-------------------|--------------------|----------------|
| | $\Delta t = 0.2$ | $\Delta t = 0.02$ | $\Delta t = 0.002$ | |
| 0.2 | 0.1667 | 0.1797 | 0.1811 | 0.1813 |
| 0.4 | 0.3056 | 0.3270 | 0.3294 | 0.3297 |
| 0.6 | 0.4213 | 0.4479 | 0.4509 | 0.4512 |
| 0.8 | 0.5177 | 0.5471 | 0.5503 | 0.5507 |
| 1.0 | 0.5981 | 0.6285 | 0.6318 | 0.6321 |

3. BURGERS DENKLEMİNİN ANALİTİK ÇÖZÜMÜ

Burgers denklemi bir non-linear kısmi diferansiyel denklem olduğu için denklemin analitik çözümünün bilinen yöntemlerle direkt olarak bulunması oldukça güçtür. Ancak, Burgers denklemi bir dönüşüm yardımı ile lineer hale getirilip çözülebilen çok az sayıdaki non-linear denklemlerden biridir. Bu bölümde, Burgers denkleminin Hopf-Cole dönüşümü ile ilişkisi verilerek, denklem bu dönüşüm altında lineer hale getirildikten sonra analitik çözümü elde edilecektir.

3.1 Burgers Denklemi ve Hopf-Cole Dönüşümü

$$\frac{\partial U}{\partial t} + U \frac{\partial U}{\partial x} = \varepsilon \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} \quad (3.1)$$

Burgers denklemini göz önüne alalım. 1950 yılında Hopf [27] ve 1951 yılında Cole [13] tarafından bağımsız olarak tanımlanan

$$U = -2\varepsilon \frac{\theta_x}{\theta} \quad (3.2)$$

dönüşümü literatürde Hopf-Cole dönüşümü olarak bilinir. Burada $\theta(x, t)$,

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} = \varepsilon \frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} \quad (3.3)$$

ısı denkleminin bir çözümüdür. (3.1) Burgers denklemi ile (3.3) ısı denklemindeki bu ilişki 1951 yılında Cole [13] tarafından aşağıdaki teoremlerin ispatıyla gösterilmiştir.

Teorem 3.1.1: $\theta(x, t)$, (3.3) ısı denkleminin bir çözümü olsun. Bu durumda (3.2) Hopf-Cole dönüşümündeki $U(x, t)$, (3.1) Burgers denkleminin çözümüdür.

İspat: $f = f(x, t)$ kendisi ve her mertebeden kısmi türevleri sürekli bir fonksiyon ve

$$U(x, t) = f_x(x, t) \quad (3.4)$$

olsun. (3.4) denklemini, (3.1) Burgers denkleminde yerine yazılırsa

$$f_{xt} + f_x f_{xx} = \varepsilon f_{xxx}$$

elde edilir. Bu ifadenin her iki tarafının x' e göre integrali alınırsa

$$\begin{aligned} \int f_{xt} dx + \int f_x f_{xx} dx &= \varepsilon \int f_{xxx} dx \\ f_t + \frac{1}{2} (f_x)^2 &= \varepsilon f_{xx} \end{aligned} \quad (3.5)$$

bulunur. $\theta(x, t)$, (3.3) ısı denkleminin bir çözümü olmak üzere,

$$f(x, t) = F(\theta(x, t))$$

olsun. Bu durumda (3.5) denklemini

$$F'(\theta)\theta_t + \frac{1}{2} (F'(\theta)\theta_x)^2 = \varepsilon F''(\theta)\theta_x^2 + \varepsilon F'(\theta)\theta_{xx}$$

olur. Elde edilen bu son denklemin sol tarafında (3.3) ısı denklemini kullanılırsa

$$\varepsilon F'(\theta)\theta_{xx} + \frac{1}{2} (F'(\theta)\theta_x)^2 = \varepsilon F''(\theta)\theta_x^2 + \varepsilon F'(\theta)\theta_{xx}$$

bulunur. Gerekli düzenlemenin yapılması ile

$$(F'(\theta))^2 = 2\varepsilon F''(\theta)$$

elde edilir. Burada

$$P(\theta) = F'(\theta)$$

denilirse,

$$(P(\theta))^2 = 2\varepsilon P'(\theta)$$

yada daha açık gösterim ile

$$\frac{dP}{d\theta} = \frac{1}{2\varepsilon} (P(\theta))^2$$

değişkenlerine ayrılabilir adi diferansiyel denklem bulunur. Bu diferansiyel denklemin çözümü

$$P = -2\varepsilon (\theta + c)^{-1}$$

olup, $P(\theta) = F'(\theta)$ olduğu göz önüne alınırsa, $F(\theta)$

$$F(\theta) = -2\varepsilon \ln(\theta + c) + k$$

olarak elde edilir. Burada c ve k sabittir. $f(x, t) = F(\theta)$ olduğundan (3.4) denklemini kullanılırsa

$$U = -2\varepsilon \frac{\theta_x}{\theta}$$

olarak bulunur (burada $c = 0$ alınmıştır). Böylece, teoremin ispatı tamamlanmış olur.

Şimdi $\theta(x, 0)$ başlangıç değerini bulmak için (3.2) dönüşümünde $x = \xi$ değişken değişimi yaparak 0' dan x' e kadar integral alınır

$$\begin{aligned} \int_0^x U(\xi, t) d\xi &= -2\varepsilon \ln \theta(\xi, t) \Big|_0^x \\ &= -2\varepsilon \ln \left(\frac{\theta(x, t)}{\theta(0, t)} \right) \end{aligned}$$

bulunur. Elde edilen bu son denklem basit bir düzenlemeyle

$$\theta(x, t) = \theta(0, t) \exp \left(-(2\varepsilon)^{-1} \int_0^x U(\xi, t) d\xi \right) \quad (3.6)$$

olarak elde edilir. Şimdi kabul edelim ki $U(x, t)$ ' nin başlangıç değeri

$$U(x, 0) = U_0(x)$$

olsun. Bu durumda $\theta(x, t)$ ' nin başlangıç şartı

$$\theta(x, 0) = \theta_0(x) = c_0 \exp \left(- (2\varepsilon)^{-1} \int_0^x U_0(\xi) d\xi \right) \quad (3.7)$$

olarak elde edilir. Burada $c_0 = \theta(0, 0)$ dır. Ancak (3.2)' den dolayı c_0 degeri (3.1) denklemi için elde edilen çözüm üzerinde etkili değildir.

Teorem 3.1.2: (3.1) Burgers denkleminin (3.2) Hopf-Cole dönüşümü ile verilen çözümü tektir.

İspat: (3.1) Burgers denkleminin herhangi bir $U(x, t)$ çözümü, (3.6) ile belli olan ve (3.3) denklemini sağlayan bir $\theta(x, t)$ fonksiyonu tanımlar.

Kabul edelim ki (3.1) Burgers denkleminin $U(x, t)$ ve $V(x, t)$ gibi iki çözümü olsun. Başlangıç şartından dolayı $U(x, 0) = V(x, 0)$ dır. $\theta(x, t)$ ' nin başlangıç değeri (3.7) ile bir c_0 sabitine bağlı olarak verilir. $\theta(x, 0)$ sadece $U(x, 0) = V(x, 0)$ ' a bağlı olduğundan $\theta(x, 0)$ her iki durumda da aynıdır. Aynı şekilde sınır değerleri için her iki çözüm aynı olduğundan ısı denkleminin $\theta(x, t)$ çözümü her iki durum için aynı olur. Fakat hem $U(x, t)$ hem de $V(x, t)$, (3.2) Hopf-Cole dönüşümünden elde edilirler. Böylece

$$U(x, t) = V(x, t)$$

dir.

Sonuç olarak (3.1) Burgers denklemi yerine (3.3) ısı denklemi çözülerek, (3.2) Hopf-Cole dönüşümü ile (3.1) Burgers denkleminin çözümü elde edilebilir. Burada (3.1) Burgers denklemi için verilen başlangıç ve sınır şartlarının (3.2) Hopf-Cole dönüşümü yardımıyla (3.3) ısı denkleminin başlangıç ve sınır şartlarının elde edileceği açıktır.

3.2 Burgers Denkleminin Analitik Çözümü

(3.1) Burgers denklemini

$$U(x, 0) = U_0(x) = \sin(\pi x) \quad (3.8)$$

başlangıç şartı ve

$$U(0, t) = U(1, t) = 0 \quad (3.9)$$

sınır şartları ile birlikte göz önüne alalım.

Bu problemin tanım bölgesi, $D = \{(x, t) : 0 \leq x \leq 1, 0 \leq t \leq T\}$ ' dir. Denklemin analitik çözümü (3.3) ısı denklemine karşılık gelen (3.2) Hopf-Cole dönüşümü ile elde edilir. $\theta(x, t)$ ' nin başlangıç şartını elde etmek için (3.8) başlangıç şartı (3.7) denkleminde yerine yazılırsa, $\theta(x, t)$ ' nin başlangıç şartı

$$\theta(x, 0) = \theta_0(x) = c_0 \exp\left(- (2\varepsilon\pi)^{-1} (1 - \cos \pi x)\right)$$

olarak elde edilir. (3.2) Hopf-Cole dönüşümü ve (3.9) sınır şartlarının kullanılması ile $\theta(x, t)$ ' nin sınır şartları

$$\theta_x(0, t) = \theta_x(1, t) = 0$$

olarak bulunur. Böylece (3.1), (3.8), (3.9) problemi yerini

$$\theta_t = \varepsilon \theta_{xx}$$

$$\theta(x, 0) = c_0 \exp\left(- (2\varepsilon\pi)^{-1} (1 - \cos \pi x)\right)$$

$$\theta_x(0, t) = \theta_x(1, t) = 0$$

problemine bırakır.

(3.3) Isı denkleminin çözümü;

$$\theta(x, t) = X(x)T(t)$$

olsun.

$$\frac{\partial \theta}{\partial x} = X'(x)T(t)$$

$$\frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} = X''(x)T(t)$$

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} = X(x)T'(t)$$

eşitlikleri (3.3) ısı denkleminde yerine yazılırsa,

$$X(x)T'(t) = \varepsilon X''(x)T(t)$$

elde edilir. Gerekli düzenlemeler yapılırsa,

$$\frac{X''}{X} = \frac{1}{\varepsilon} \frac{T'}{T} = -\lambda^2$$

bulunur. Burada, λ sabittir. Elde edilen bu son denklemden

$$X'' + \lambda^2 X = 0$$

$$T' + \lambda^2 \varepsilon T = 0$$

şeklinde iki adi diferansiyel denklem bulunur. Bu denklemlerin çözümleri sırasıyla

$$X = A_1 \cos(\lambda x) + B_1 \sin(\lambda x)$$

$$T = c \exp(-\lambda^2 \varepsilon t)$$

dır. Böylece $\theta(x, t)$,

$$\theta(x, t) = (A_1 \cos(\lambda x) + B_1 \sin(\lambda x)) (c \exp(-\lambda^2 \varepsilon t))$$

olarak bulunur. Burada $A = cA_1$, $B = cB_1$ dersek ve sınır şartlarını uygulamak için bu ifadenin x ' e göre türevini alırsak,

$$\frac{\partial \theta}{\partial x}(x, t) = \exp(-\lambda^2 \varepsilon t) (-A\lambda \sin(\lambda x) + B\lambda \cos(\lambda x))$$

elde ederiz. Bu ifadeye sol sınır şartı uygulanırsa,

$$\frac{\partial \theta}{\partial x}(0, t) = B\lambda \exp(-\lambda^2 \varepsilon t) = 0$$

bulunur. Bu ise $B = 0$ olmasını gerektirir. Böylece

$$\theta(x, t) = \exp(-\lambda^2 \varepsilon t) (A \cos(\lambda x))$$

olur. Bu durumda $\theta_x(x, t)$,

$$\frac{\partial \theta}{\partial x}(x, t) = \exp(-\lambda^2 \varepsilon t) (-A\lambda \sin(\lambda x))$$

olup, sağ sınır şartının kullanılması ile

$$\frac{\partial \theta}{\partial x}(1, t) = -A\lambda \exp(-\lambda^2 \varepsilon t) \sin(\lambda) = 0$$

elde edilir. Bu ise

$$\sin(\lambda) = 0$$

$$\lambda = n\pi, (n = 1, 2, \dots)$$

olmasını gerektirir. Böylece, $\theta(x, t)$

$$\theta(x, t) = A_n \exp(-\varepsilon n^2 \pi^2 t) \cos(n\pi x) \quad (3.10)$$

olarak elde edilir. (3.10) denklemini sınır şartlarını sağlar. Verilen başlangıç şartını da sağlaması gerektiğinden

$$\theta(x, t) = A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \exp(-\varepsilon n^2 \pi^2 t) \cos(n\pi x) \quad (3.11)$$

olmalıdır. Burada A_0, A_1 Fourier katsayıları olup,

$$A_0 = \int_0^1 \theta_0(x) dx = c_0 \int_0^1 \exp(-(2\pi\varepsilon)^{-1} (1 - \cos(\pi x))) dx$$

$$A_n = 2c_0 \int_0^1 \exp(-(2\pi\varepsilon)^{-1} (1 - \cos(\pi x))) \cos(n\pi x) dx$$

şeklinde hesaplanır. Böylece, (3.11) denkleminin (3.2) Hopf-Cole dönüşümünde yerine yazılması ile problemin analitik çözümü

$$U(x, t) = 2\pi\varepsilon \frac{\sum_{n=1}^{\infty} n A_n \exp(-\varepsilon n^2 \pi^2 t) \sin(n\pi x)}{\sum_{n=0}^{\infty} A_n \exp(-\varepsilon n^2 \pi^2 t) \cos(n\pi x)}$$

olarak elde edilir.

4. BURGERS DENKLEMİNİN NÜMERİK ÇÖZÜMÜ

Matematiksel fizik, elastikiyet teorisi ve hidrodinamik problemleri genel olarak kısmi diferansiyel denklemler veya çok nadiren de olsa adi diferansiyel denklemler olarak karşımıza çıkarlar. Bu problemlerin çözümü için pratik açıdan nümerik değerlendirme her ne kadar bir yaklaşık çözüm verse de, gerekli özelliklerin değerlendirilmesi için oldukça önemlidir. Belki de bu amaç için en iyi araçlardan biri varyasyonel yöntemlerin kullanılmasıdır.

Bu bölümde zamanı ayrıştırma yöntemi ile non-lineer kısmi diferansiyel denklem olan Burgers denklemi ardışık olarak çözülmesi gereken p tane non-lineer adi diferansiyel denkleme dönüştürülecek ve her bir denklemin çözümü en küçük kareler yöntemi ile elde edilecektir.

$$U_t + UU_x = \varepsilon U_{xx}$$

Burgers denklemini

$$U(x, 0) = \sin(\pi x)$$

başlangıç şartı ve

$$U(0, t) = U(1, t) = 0$$

sınır şartları ile birlikte göz önüne alalım.

Bu başlangıç sınır değer problemine Bölüm 2.4' de ayrıntıları ile anlatılan zamanı ayrıştırma yöntemi uygulandığında

$$-\varepsilon z_j'' + z_j z_j' + \frac{z_j - z_{j-1}}{\Delta t} = 0 \quad (4.1)$$

$$z_j(0) = 0 \quad , \quad z_j(1) = 0 \quad (4.2)$$

sınır değer problemi elde edilir. Burada $j = 1, 2, \dots, p$ olup, $j = 1$ için $z_0(x)$,

$$z_0(x) = \sin(\pi x) \quad (4.3)$$

dir. Her j için (4.1) bir non-linear adi diferansiyel denklem ifade eder. Burada (4.1)-(4.3) sınır değer problemlerinin çözümleri en küçük kareler yöntemi kullanılarak oluşturulacaktır.

En küçük kareler yönteminde amaç,

$$Au = f$$

gibi bir operatör denklemini verildiğinde, bu denklemin yaklaşık çözümü

$$u_N = \sum_{n=1}^N c_n \phi_n$$

olmak üzere $k = 1, 2, \dots, N$ için

$$\left((Au_N - f), \frac{\partial}{\partial c_k} (Au_N - f) \right) = 0$$

sistemini oluşturmaktır.

Eğer (4.1) denklemini

$$-\varepsilon z_j'' + z_j z_j' + \frac{1}{\Delta t} z_j = \frac{1}{\Delta t} f$$

olarak düşünülürse, Az_j ' nin

$$Az_j = -\varepsilon z_j'' + z_j z_j' + \frac{1}{\Delta t} z_j \quad (4.4)$$

ve f ' nin

$$f = z_{j-1}$$

olduğu açıktır. (4.1) denkleminin yaklaşık çözümü

$$z_j^N = \sum_{n=1}^N c_n^j \phi_n(x)$$

olsun. Burada $\phi_n(x)$ baz fonksiyonlarıdır. (4.4) denklemi ile verilen operatörün tanım bölgesi, $[0, 1]$ aralığında kendisi ve ikinci mertebeye kadar türevleri sürekli, (4.2) sınır şartlarını sağlayan fonksiyonların D_A lineer cümlesidir. Baz fonksiyonlarının göz önüne alınan problemin sınır şartlarını sağlaması ve D_A ' da tam olması gerektiğinden, baz fonksiyonları $\phi_n(x) = \sin(n\pi x)$ şeklinde seçilebilir. Bu durumda (4.1) denkleminin yaklaşık çözümü

$$z_j^N = \sum_{n=1}^N c_n^j \sin(n\pi x) \quad (4.5)$$

olup, $(z_j^N)'$ ve $(z_j^N)''$ türevleri de sırasıyla

$$(z_j^N)' = \pi \sum_{n=1}^N n c_n^j \cos n\pi x \quad (4.6)$$

$$(z_j^N)'' = -\pi^2 \sum_{n=1}^N n^2 c_n^j \sin n\pi x \quad (4.7)$$

olarak elde edilir. Burada $j = 1, \dots, p$ dir. (4.5)-(4.7) denklemleri (4.1) de yerine yazılır ve $z_{j-1} = f$ denilirse (4.1) denklemi

$$\varepsilon \pi^2 \sum_{n=1}^N n^2 c_n^j \sin n\pi x + \pi \sum_{n=1}^N c_n^j \sin n\pi x \sum_{m=1}^N m c_m^j \cos m\pi x + \frac{1}{\Delta t} \sum_{n=1}^N c_n^j \sin n\pi x - \frac{1}{\Delta t} f = 0$$

şekline dönüşmüş olur. Şimdi $k = 1, 2, \dots, N$ için

$$\left(\left(A z_j^N - \frac{1}{\Delta t} f \right), \frac{\partial}{\partial c_k^j} \left(A z_j^N - \frac{1}{\Delta t} f \right) \right) = 0 \quad (4.8)$$

en küçük kareler sistemi oluşturulmalıdır. Burada

$$Az_j^N - \frac{1}{\Delta t}f = \varepsilon\pi^2 \sum_{n=1}^N n^2 c_n^j \sin n\pi x + \pi \sum_{n=1}^N c_n^j \sin n\pi x \sum_{m=1}^N m c_m^j \cos m\pi x + \frac{1}{\Delta t} \sum_{n=1}^N c_n^j \sin n\pi x - \frac{1}{\Delta t}f \quad (4.9)$$

ve

$$\frac{\partial}{\partial c_k^j} \left(Az_j^N - \frac{1}{\Delta t}f \right) = \left(\varepsilon\pi^2 k^2 + \frac{1}{\Delta t} \right) \sin k\pi x + \pi \sin k\pi x \sum_{m=1}^N m c_m^j \cos m\pi x + \pi k \cos k\pi x \sum_{n=1}^N c_n^j \sin n\pi x \quad (4.10)$$

dir . (4.9) ve (4.10); (4.8) de yerlerine yazıldığında,

$$\left(\varepsilon\pi^2 \sum_{n=1}^N n^2 c_n^j \sin n\pi x + \pi \sum_{n=1}^N \sum_{m=1}^N m c_n^j c_m^j \sin n\pi x \cos m\pi x + \frac{1}{\Delta t} \sum_{n=1}^N c_n^j \sin n\pi x - \frac{1}{\Delta t}f, \right. \\ \left. \left(\varepsilon\pi^2 k^2 + \frac{1}{\Delta t} \right) \sin k\pi x + \pi \sin k\pi x \sum_{i=1}^N i c_i^j \cos i\pi x + k\pi \cos k\pi x \sum_{i=1}^N c_i^j \sin i\pi x \right) = 0$$

elde edilir. Burada $k = 1, 2, \dots, N$ dir. Bu son denklem iç çarpımın özelliklerinden yararlanılarak daha açık şekilde,

$$\left(\varepsilon^2 \pi^4 k^2 + \frac{\varepsilon \pi^2}{\Delta t} \right) \left(\sum_{n=1}^N n^2 c_n^j \sin n\pi x, \sin k\pi x \right) \\ + \varepsilon \pi^3 \left(\sum_{n=1}^N n^2 c_n^j \sin n\pi x, \sin k\pi x \sum_{i=1}^N i c_i^j \cos i\pi x \right) \\ + k \varepsilon \pi^3 \left(\sum_{n=1}^N n^2 c_n^j \sin n\pi x, \cos k\pi x \sum_{i=1}^N c_i^j \sin i\pi x \right) \\ + \left(k^2 \varepsilon \pi^3 + \frac{\pi}{\Delta t} \right) \left(\sum_{n=1}^N \sum_{m=1}^N m c_n^j c_m^j \sin n\pi x \cos m\pi x, \sin k\pi x \right)$$

$$\begin{aligned}
& +\pi^2 \left(\sum_{n=1}^N \sum_{m=1}^N m c_n^j c_m^j \sin n\pi x \cos m\pi x, \sin k\pi x \sum_{i=1}^N i c_i^j \cos i\pi x \right) \\
& +k\pi^2 \left(\sum_{n=1}^N \sum_{m=1}^N m c_n^j c_m^j \sin n\pi x \cos m\pi x, \cos k\pi x \sum_{i=1}^N c_i^j \sin i\pi x \right) \\
& + \left(\frac{\varepsilon\pi^2 k^2}{\Delta t} + \frac{1}{(\Delta t)^2} \right) \left(\sum_{n=1}^N c_n^j \sin n\pi x, \sin k\pi x \right) \\
& + \frac{\pi}{\Delta t} \left(\sum_{n=1}^N c_n^j \sin n\pi x, \sin k\pi x \sum_{i=1}^N i c_i^j \cos i\pi x \right) \\
& + \frac{k\pi}{\Delta t} \left(\sum_{n=1}^N c_n^j \sin n\pi x, \cos k\pi x \sum_{i=1}^N c_i^j \sin i\pi x \right) \\
& - \left(\frac{\varepsilon\pi^2 k^2}{\Delta t} + \frac{1}{(\Delta t)^2} \right) (f, \sin k\pi x) \\
& - \frac{\pi}{\Delta t} \left(f, \sin k\pi x \sum_{i=1}^N i c_i^j \cos i\pi x \right) \\
& - \frac{k\pi}{\Delta t} \left(f, \cos k\pi x \sum_{i=1}^N c_i^j \sin i\pi x \right) = 0
\end{aligned} \tag{4.11}$$

olarak yazılabilir. Burada, $k = 1, 2, \dots, N$ için

$$\left(\sum_{n=1}^N n^2 c_n^j \sin n\pi x, \sin k\pi x \right) = \frac{1}{2} \begin{cases} n^2 c_n^j, & n = k \\ 0, & n \neq k \end{cases}$$

$$\left(\sum_{n=1}^N n^2 c_n^j \sin n\pi x, \sin k\pi x \sum_{i=1}^N i c_i^j \cos i\pi x \right) = \frac{1}{4} \sum_{n,i=1}^N \begin{cases} n^2 i c_n^j c_i^j, & n = k + i \\ -n^2 i c_n^j c_i^j, & n = i - k \\ n^2 i c_n^j c_i^j, & n = k - i \\ 0, & \text{diğer durumlarda} \end{cases}$$

$$\left(\sum_{n=1}^N n^2 c_n^j \sin n\pi x, \cos k\pi x \sum_{i=1}^N c_i^j \sin i\pi x \right) = \frac{1}{4} \sum_{n,i=1}^N \begin{cases} n^2 c_n^j c_i^j, & n = k + i \\ -n^2 c_n^j c_i^j, & n = k - i \\ n^2 c_n^j c_i^j, & n = i - k \\ 0, & \text{diger durumlarda} \end{cases}$$

$$\left(\sum_{n=1}^N \sum_{m=1}^N m c_n^j c_m^j \sin n\pi x \cos m\pi x, \sin k\pi x \right) = \frac{1}{4} \sum_{n,m=1}^N \begin{cases} m c_n^j c_m^j, & n + m = k \\ -m c_n^j c_m^j, & m - n = k \\ m c_n^j c_m^j, & n - m = k \\ 0, & \text{diger durumlarda} \end{cases}$$

$$\left(\sum_{n=1}^N \sum_{m=1}^N m c_n^j c_m^j \sin n\pi x \cos m\pi x, \sin k\pi x \sum_{i=1}^N i c_i^j \cos i\pi x \right) = \frac{1}{8} \sum_{n,m,i=1}^N \begin{cases} m i c_n^j c_m^j c_i^j, & n + m = k + i \\ -m i c_n^j c_m^j c_i^j, & n + m = i - k \\ m i c_n^j c_m^j c_i^j, & n + m = k - i \\ -m i c_n^j c_m^j c_i^j, & m - n = k + i \\ m i c_n^j c_m^j c_i^j, & n - m = k + i \\ -m i c_n^j c_m^j c_i^j, & n - m = i - k \\ m i c_n^j c_m^j c_i^j, & n - m = k - i \\ 0, & \text{diger durumlarda} \end{cases}$$

$$\left(\sum_{n=1}^N \sum_{m=1}^N m c_n^j c_m^j \sin n\pi x \cos m\pi x, \cos k\pi x \sum_{i=1}^N c_i^j \sin i\pi x \right) = \frac{1}{8} \sum_{n,m,i=1}^N \begin{cases} m c_n^j c_m^j c_i^j, & n + m = k + i \\ -m c_n^j c_m^j c_i^j, & n + m = k - i \\ m c_n^j c_m^j c_i^j, & n + m = i - k \\ -m c_n^j c_m^j c_i^j, & m - n = k + i \\ m c_n^j c_m^j c_i^j, & n - m = k + i \\ -m c_n^j c_m^j c_i^j, & n - m = k - i \\ m c_n^j c_m^j c_i^j, & n - m = i - k \\ 0, & \text{diger durumlarda} \end{cases}$$

$$\left(\sum_{n=1}^N c_n^j \sin n\pi x, \sin k\pi x \right) = \frac{1}{2} \begin{cases} c_n^j, & n = k \\ 0, & n \neq k \end{cases}$$

$$\left(\sum_{n=1}^N c_n^j \sin n\pi x, \sin k\pi x \sum_{i=1}^N i c_i^j \cos i\pi x \right) = \frac{1}{4} \sum_{n,i=1}^N \begin{cases} i c_n^j c_i^j, & n = k + i \\ -i c_n^j c_i^j, & n = i - k \\ i c_n^j c_i^j, & n = k - i \\ 0, & \text{diğer durumlarda} \end{cases}$$

$$\left(\sum_{n=1}^N c_n^j \sin n\pi x, \cos k\pi x \sum_{i=1}^N c_i^j \sin i\pi x \right) = \frac{1}{4} \sum_{n,i=1}^N \begin{cases} c_n^j c_i^j, & n = k + i \\ -c_n^j c_i^j, & n = k - i \\ c_n^j c_i^j, & n = i - k \\ 0, & \text{diğer durumlarda} \end{cases}$$

şeklinindedir. (4.11) denklemindeki son üç terim ise f' nin durumuna göre incelenmelidir. f $j = 1, \dots, p$ için

$$f = z_{j-1}$$

dır. $j = 1$ için f , (4.3) ile verilirken; $j > 1$ için f ,

$$f = \sum_{n=1}^N c_n^{j-1} \sin n\pi x \quad (4.12)$$

şeklinde olacaktır. Dolayısıyla $j = 1$ için

$$(f, \sin k\pi x) = \frac{1}{2} \begin{cases} 1, & k = 1 \\ 0, & k \neq 1 \end{cases} \quad (4.13)$$

$$\left(f, \sin k\pi x \sum_{i=1}^N i c_i^j \cos i\pi x \right) = \frac{1}{4} \sum_{i=1}^N \begin{cases} -i c_i^j, & i - k = 1 \\ i c_i^j, & k - i = 1 \\ 0, & \text{diğer durumlarda} \end{cases} \quad (4.14)$$

$$\left(f, \cos k\pi x \sum_{i=1}^N c_i^j \sin i\pi x \right) = \frac{1}{4} \sum_{i=1}^N \begin{cases} -c_i^j, & k - i = 1 \\ c_i^j, & i - k = 1 \\ 0, & \text{diğer durumlarda} \end{cases} \quad (4.15)$$

ve $j > 1$ için

$$(f, \sin k\pi x) = \frac{1}{2} \begin{cases} c_n^{j-1}, & n = k \\ 0, & n \neq k \end{cases} \quad (4.16)$$

$$\left(f, \sin k\pi x \sum_{i=1}^N i c_i^j \cos i\pi x \right) = \frac{1}{4} \sum_{n,i=1}^N \begin{cases} i c_n^{j-1} c_i^j, & n = k + i \\ -i c_n^{j-1} c_i^j, & n = i - k \\ i c_n^{j-1} c_i^j, & n = k - i \\ 0, & \text{diğer durumlarda} \end{cases} \quad (4.17)$$

$$\left(f, \cos k\pi x \sum_{i=1}^N c_i^j \sin i\pi x \right) = \frac{1}{4} \sum_{n,i=1}^N \begin{cases} c_n^{j-1} c_i^j, & n = k + i \\ -c_n^{j-1} c_i^j, & n = k - i \\ c_n^{j-1} c_i^j, & n = i - k \\ 0, & \text{diğer durumlarda} \end{cases} \quad (4.18)$$

olur. $j > 1$ için tanımlı (4.12) denklemi, $j = 1$ için de $c_1^0 = 1, c_2^0 = 0, \dots, c_N^0 = 0$ alınarak tanımlanırsa (4.16)-(4.18) denklemlerinin (4.13)-(4.15) deklemlerini kapsadığı görülür.

Eğer $N = 10$ alınıp, (4.11) denklem sistemi açık olarak yazılırsa;

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{2} \left(\pi^4 \varepsilon^2 + \frac{2\varepsilon\pi^2}{\Delta t} + \frac{1}{(\Delta t)^2} \right) c_1^j + \frac{\varepsilon\pi^3}{4} (6c_1^j c_2^j + 18c_2^j c_3^j + 36c_3^j c_4^j + 60c_4^j c_5^j + 90c_5^j c_6^j \\
& + 126c_6^j c_7^j + 168c_7^j c_8^j + 216c_8^j c_9^j + 270c_9^j c_{10}^j) + \frac{\pi^2}{8} (2(c_1^j)^3 - 6(c_1^j)^2 c_3^j - 22c_1^j c_2^j c_4^j \\
& - 36c_1^j c_3^j c_5^j - 54c_1^j c_4^j c_6^j - 76c_1^j c_5^j c_7^j - 102c_1^j c_6^j c_8^j - 132c_1^j c_7^j c_9^j - 166c_1^j c_8^j c_{10}^j + 10c_1^j (c_2^j)^2 \\
& + 9(c_2^j)^2 c_3^j - 17(c_2^j)^2 c_5^j + 30c_2^j c_3^j c_4^j - 50c_2^j c_3^j c_6^j + 46c_2^j c_4^j c_5^j - 70c_2^j c_4^j c_7^j + 66c_2^j c_5^j c_6^j - 94c_2^j c_5^j c_8^j \\
& + 90c_2^j c_6^j c_7^j - 122c_2^j c_6^j c_9^j + 118c_2^j c_7^j c_8^j - 154c_2^j c_7^j c_{10}^j + 150c_2^j c_8^j c_9^j + 186c_2^j c_9^j c_{10}^j + 20c_1^j (c_3^j)^2 \\
& + 22(c_3^j)^2 c_5^j - 34(c_3^j)^2 c_7^j + 62c_3^j c_4^j c_6^j - 90c_3^j c_4^j c_8^j + 84c_3^j c_5^j c_7^j - 116c_3^j c_5^j c_9^j + 110c_3^j c_6^j c_8^j - 146c_3^j c_6^j c_{10}^j \\
& + 140c_3^j c_7^j c_9^j + 174c_3^j c_8^j c_{10}^j + 34c_1^j (c_4^j)^2 + 41(c_4^j)^2 c_7^j - 57(c_4^j)^2 c_9^j + 106c_4^j c_5^j c_8^j - 142c_4^j c_5^j c_{10}^j \\
& + 134c_4^j c_6^j c_9^j + 166c_4^j c_7^j c_{10}^j + 52c_1^j (c_5^j)^2 + 66(c_5^j)^2 c_9^j + 162c_5^j c_6^j c_{10}^j + 74c_1^j (c_6^j)^2 + 100c_1^j (c_7^j)^2 \\
& + 130c_1^j (c_8^j)^2 + 164c_1^j (c_9^j)^2 + 202c_1^j (c_{10}^j)^2) - \frac{\pi}{4\Delta t} (2c_2^{j-1} c_1^j - c_1^{j-1} c_2^j + 3c_3^{j-1} c_2^j - 2c_2^{j-1} c_3^j \\
& + 4c_4^{j-1} c_3^j - 3c_3^{j-1} c_4^j + 5c_5^{j-1} c_4^j - 4c_4^{j-1} c_5^j + 6c_6^{j-1} c_5^j - 5c_5^{j-1} c_6^j + 7c_7^{j-1} c_6^j - 6c_6^{j-1} c_7^j + 8c_8^{j-1} c_7^j \\
& - 7c_7^{j-1} c_8^j + 9c_9^{j-1} c_8^j - 8c_8^{j-1} c_9^j + 10c_{10}^{j-1} c_9^j - 9c_9^{j-1} c_{10}^j) - \frac{1}{2} \left(\frac{\pi^2 \varepsilon}{\Delta t} + \frac{1}{(\Delta t)^2} \right) c_1^{j-1} = 0
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{2} \left(\pi^4 \varepsilon^2 2^4 + \frac{2\varepsilon\pi^2 2^2}{\Delta t} + \frac{1}{(\Delta t)^2} \right) c_2^j + \frac{\varepsilon\pi^3}{4} (3(c_1^j)^2 + 18c_1^j c_3^j + 48c_2^j c_4^j + 90c_3^j c_5^j + 144c_4^j c_6^j \\
& + 210c_5^j c_7^j + 288c_6^j c_8^j + 378c_7^j c_9^j + 480c_8^j c_{10}^j) + \frac{\pi^2}{8} (10(c_1^j)^2 c_2^j - 11(c_1^j)^2 c_4^j + 18c_1^j c_2^j c_3^j \\
& - 34c_1^j c_2^j c_5^j + 30c_1^j c_3^j c_4^j - 50c_1^j c_3^j c_6^j + 46c_1^j c_4^j c_5^j - 70c_1^j c_4^j c_7^j + 66c_1^j c_5^j c_6^j - 94c_1^j c_5^j c_8^j + 90c_1^j c_6^j c_7^j \\
& - 122c_1^j c_6^j c_9^j + 118c_1^j c_7^j c_8^j - 154c_1^j c_7^j c_{10}^j + 150c_1^j c_8^j c_9^j + 186c_1^j c_9^j c_{10}^j + 8(c_2^j)^3 - 24(c_2^j)^2 c_6^j \\
& - 66c_2^j c_3^j c_7^j - 88c_2^j c_4^j c_8^j - 114c_2^j c_5^j c_9^j - 144c_2^j c_6^j c_{10}^j + 26c_2^j (c_3^j)^2 + 19(c_3^j)^2 c_4^j - 43(c_3^j)^2 c_8^j + 54c_3^j c_4^j c_5^j
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& -110 c_3^j c_4^j c_9^j + 74 c_3^j c_5^j c_6^j - 138 c_3^j c_5^j c_{10}^j + 98 c_3^j c_6^j c_7^j + 126 c_3^j c_7^j c_8^j + 158 c_3^j c_8^j c_9^j + 194 c_3^j c_9^j c_{10}^j \\
& + 40 c_2^j (c_4^j)^2 + 36 (c_4^j)^2 c_6^j - 68 (c_4^j)^2 c_{10}^j + 94 c_4^j c_5^j c_7^j + 120 c_4^j c_6^j c_8^j + 150 c_4^j c_7^j c_9^j + 184 c_4^j c_8^j c_{10}^j \\
& + 58 c_2^j (c_5^j)^2 + 59 (c_5^j)^2 c_8^j + 146 c_5^j c_6^j c_9^j + 178 c_5^j c_7^j c_{10}^j + 80 c_2^j (c_6^j)^2 + 88 (c_6^j)^2 c_{10}^j + 106 c_2^j (c_7^j)^2 \\
& + 136 c_2^j (c_8^j)^2 + 170 c_2^j (c_9^j)^2 + 208 c_2^j (c_{10}^j)^2 - \frac{\pi}{4\Delta t} (-c_1^{j-1} c_1^j + 3c_3^{j-1} c_1^j + 4c_4^{j-1} c_2^j - c_1^{j-1} c_3^j \\
& + 5c_5^{j-1} c_3^j - 2c_2^{j-1} c_4^j + 6c_6^{j-1} c_4^j - 3c_3^{j-1} c_5^j + 7c_7^{j-1} c_5^j - 4c_4^{j-1} c_6^j + 8c_8^{j-1} c_6^j - 5c_5^{j-1} c_7^j + 9c_9^{j-1} c_7^j \\
& - 6c_6^{j-1} c_8^j + 10c_{10}^{j-1} c_8^j - 7c_7^{j-1} c_9^j - 8c_8^{j-1} c_{10}^j) - \frac{1}{2} \left(\frac{\pi^2 \varepsilon 2^2}{\Delta t} + \frac{1}{(\Delta t)^2} \right) c_2^{j-1} = 0
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{2} \left(\pi^4 \varepsilon^2 3^4 + \frac{2\varepsilon \pi^2 3^2}{\Delta t} + \frac{1}{(\Delta t)^2} \right) c_3^j + \frac{\varepsilon \pi^3}{4} (18c_1^j c_2^j + 36c_1^j c_4^j + 90c_2^j c_5^j + 162c_3^j c_6^j + 252c_4^j c_7^j \\
& + 360c_5^j c_8^j + 486c_6^j c_9^j + 630c_7^j c_{10}^j) + \frac{\pi^2}{8} (-2(c_1^j)^3 + 20(c_1^j)^2 c_3^j - 18(c_1^j)^2 c_5^j + 9c_1^j (c_2^j)^2 \\
& + 30c_1^j c_2^j c_4^j - 50c_1^j c_2^j c_6^j + 44c_1^j c_3^j c_5^j - 68c_1^j c_3^j c_7^j + 62c_1^j c_4^j c_6^j - 90c_1^j c_4^j c_8^j + 84c_1^j c_5^j c_7^j - 116c_1^j c_5^j c_9^j \\
& + 110c_1^j c_6^j c_8^j - 146c_1^j c_6^j c_{10}^j + 140c_1^j c_7^j c_9^j + 174c_1^j c_8^j c_{10}^j + 26(c_2^j)^2 c_3^j - 33(c_2^j)^2 c_7^j + 38c_2^j c_3^j c_4^j \\
& - 86c_2^j c_3^j c_8^j + 54c_2^j c_4^j c_5^j - 110c_2^j c_4^j c_9^j + 74c_2^j c_5^j c_6^j - 138c_2^j c_5^j c_{10}^j + 98c_2^j c_6^j c_7^j + 126c_2^j c_7^j c_8^j + 158c_2^j c_8^j c_9^j \\
& + 194c_2^j c_9^j c_{10}^j + 18(c_3^j)^3 - 54(c_3^j)^2 c_9^j - 134c_3^j c_4^j c_{10}^j + 50c_3^j (c_4^j)^2 + 33(c_4^j)^2 c_5^j + 86c_4^j c_5^j c_6^j + 110c_4^j c_6^j c_7^j \\
& + 138c_4^j c_7^j c_8^j + 170c_4^j c_8^j c_9^j + 206c_4^j c_9^j c_{10}^j + 68c_3^j (c_5^j)^2 + 54(c_5^j)^2 c_7^j + 134c_5^j c_6^j c_8^j + 164c_5^j c_7^j c_9^j \\
& + 198c_5^j c_8^j c_{10}^j + 90c_3^j (c_6^j)^2 + 81(c_6^j)^2 c_9^j + 194c_6^j c_7^j c_{10}^j + 116c_3^j (c_7^j)^2 + 146c_3^j (c_8^j)^2 + 180c_3^j (c_9^j)^2 \\
& + 218c_3^j (c_{10}^j)^2 - \frac{\pi}{4\Delta t} (-2c_2^{j-1} c_1^j + 4c_4^{j-1} c_1^j - c_1^{j-1} c_2^j + 5c_5^{j-1} c_2^j + 6c_6^{j-1} c_3^j - c_1^{j-1} c_4^j \\
& + 7c_7^{j-1} c_4^j - 2c_2^{j-1} c_5^j + 8c_8^{j-1} c_5^j - 3c_3^{j-1} c_6^j + 9c_9^{j-1} c_6^j - 4c_4^{j-1} c_7^j + 10c_{10}^{j-1} c_7^j - 5c_5^{j-1} c_8^j \\
& - 6c_6^{j-1} c_9^j - 7c_7^{j-1} c_{10}^j) - \frac{1}{2} \left(\frac{\pi^2 \varepsilon 3^2}{\Delta t} + \frac{1}{(\Delta t)^2} \right) c_3^{j-1} = 0
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{2} \left(\pi^4 \varepsilon^2 4^4 + \frac{2\varepsilon\pi^2 4^2}{\Delta t} + \frac{1}{(\Delta t)^2} \right) c_4^j + \frac{\varepsilon\pi^3}{4} (36c_1^j c_3^j + 60c_1^j c_5^j + 24(c_2^j)^2 + 144c_2^j c_6^j + 252c_3^j c_7^j \\
& + 384c_4^j c_8^j + 540c_5^j c_9^j + 720c_6^j c_{10}^j) + \frac{\pi^2}{8} (-11(c_1^j)^2 c_2^j + 34(c_1^j)^2 c_4^j - 27(c_1^j)^2 c_6^j + 30c_1^j c_2^j c_3^j \\
& + 46c_1^j c_2^j c_5^j - 70c_1^j c_2^j c_7^j + 62c_1^j c_3^j c_6^j - 90c_1^j c_3^j c_8^j + 82c_1^j c_4^j c_7^j - 114c_1^j c_4^j c_9^j + 106c_1^j c_5^j c_8^j \\
& - 142c_1^j c_5^j c_{10}^j + 134c_1^j c_6^j c_9^j + 166c_1^j c_7^j c_{10}^j + 40(c_2^j)^2 c_4^j - 44(c_2^j)^2 c_8^j + 19c_2^j (c_3^j)^2 + 54c_2^j c_3^j c_5^j \\
& - 110c_2^j c_3^j c_9^j + 72c_2^j c_4^j c_6^j - 136c_2^j c_4^j c_{10}^j + 94c_2^j c_5^j c_7^j + 120c_2^j c_6^j c_8^j + 150c_2^j c_7^j c_9^j + 184c_2^j c_8^j c_{10}^j \\
& + 50(c_3^j)^2 c_4^j - 67(c_3^j)^2 c_{10}^j + 66c_3^j c_4^j c_5^j + 86c_3^j c_5^j c_6^j + 110c_3^j c_6^j c_7^j + 138c_3^j c_7^j c_8^j + 170c_3^j c_8^j c_9^j \\
& + 206c_3^j c_9^j c_{10}^j + 32(c_4^j)^3 + 82c_4^j (c_5^j)^2 + 51(c_5^j)^2 c_6^j + 126c_5^j c_6^j c_7^j + 154c_5^j c_7^j c_8^j + 186c_5^j c_8^j c_9^j \\
& + 222c_5^j c_9^j c_{10}^j + 104c_4^j (c_6^j)^2 + 76(c_6^j)^2 c_8^j + 182c_6^j c_7^j c_9^j + 216c_6^j c_8^j c_{10}^j + 130c_4^j (c_7^j)^2 + 107(c_7^j)^2 c_{10}^j \\
& + 160c_4^j (c_8^j)^2 + 194c_4^j (c_9^j)^2 + 232c_4^j (c_{10}^j)^2) - \frac{\pi}{4\Delta t} (-3c_3^{j-1} c_1^j + 5c_5^{j-1} c_1^j - 2c_2^{j-1} c_2^j + 6c_6^{j-1} c_2^j \\
& - c_1^{j-1} c_3^j + 7c_7^{j-1} c_3^j + 8c_8^{j-1} c_4^j - c_1^{j-1} c_5^j + 9c_9^{j-1} c_5^j - 2c_2^{j-1} c_6^j + 10c_{10}^{j-1} c_6^j - 3c_3^{j-1} c_7^j - 4c_4^{j-1} c_8^j \\
& - 5c_5^{j-1} c_9^j - 6c_6^{j-1} c_{10}^j) - \frac{1}{2} \left(\frac{\pi^2 \varepsilon 4^2}{\Delta t} + \frac{1}{(\Delta t)^2} \right) c_4^{j-1} = 0
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{2} \left(\pi^4 \varepsilon^2 5^4 + \frac{2\varepsilon\pi^2 5^2}{\Delta t} + \frac{1}{(\Delta t)^2} \right) c_5^j + \frac{\varepsilon\pi^3}{4} (60c_1^j c_4^j + 90c_1^j c_6^j + 90c_2^j c_3^j + 210c_2^j c_7^j + 360c_3^j c_8^j \\
& + 540c_4^j c_9^j + 750c_5^j c_{10}^j) + \frac{\pi^2}{8} (-18(c_1^j)^2 c_3^j + 52(c_1^j)^2 c_5^j - 38(c_1^j)^2 c_7^j - 17c_1^j (c_2^j)^2 + 46c_1^j c_2^j c_4^j \\
& + 66c_1^j c_2^j c_6^j - 94c_1^j c_2^j c_8^j + 22c_1^j (c_3^j)^2 + 84c_1^j c_3^j c_7^j - 116c_1^j c_3^j c_9^j + 106c_1^j c_4^j c_8^j - 142c_1^j c_4^j c_{10}^j \\
& + 132c_1^j c_5^j c_9^j + 162c_1^j c_6^j c_{10}^j + 58(c_2^j)^2 c_5^j - 57(c_2^j)^2 c_9^j + 54c_2^j c_3^j c_4^j + 74c_2^j c_3^j c_6^j - 138c_2^j c_3^j c_{10}^j \\
& + 94c_2^j c_4^j c_7^j + 118c_2^j c_5^j c_8^j + 146c_2^j c_6^j c_9^j + 178c_2^j c_7^j c_{10}^j + 68(c_3^j)^2 c_5^j + 33c_3^j (c_4^j)^2 + 86c_3^j c_4^j c_6^j \\
& + 108c_3^j c_5^j c_7^j + 134c_3^j c_6^j c_8^j + 164c_3^j c_7^j c_9^j + 198c_3^j c_8^j c_{10}^j + 82(c_4^j)^2 c_5^j + 102c_4^j c_5^j c_6^j + 126c_4^j c_6^j c_7^j \\
& + 154c_4^j c_7^j c_8^j + 186c_4^j c_8^j c_9^j + 222c_4^j c_9^j c_{10}^j + 50(c_5^j)^3 + 122c_5^j (c_6^j)^2 + 73(c_6^j)^2 c_7^j + 174c_6^j c_7^j c_8^j
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + 206 c_6^j c_8^j c_9^j + 242 c_6^j c_9^j c_{10}^j + 148 c_5^j (c_7^j)^2 + 102 (c_7^j)^2 c_9^j + 238 c_7^j c_8^j c_{10}^j + 178 c_5^j (c_8^j)^2 \\
& + 212 c_5^j (c_9^j)^2 + 250 c_5^j (c_{10}^j)^2 - \frac{\pi}{4\Delta t} (-4 c_4^{j-1} c_1^j + 6 c_6^{j-1} c_1^j - 3 c_3^{j-1} c_2^j + 7 c_7^{j-1} c_2^j - 2 c_2^{j-1} c_3^j \\
& + 8 c_8^{j-1} c_3^j - c_1^{j-1} c_4^j + 9 c_9^{j-1} c_4^j + 10 c_{10}^{j-1} c_5^j - c_1^{j-1} c_6^j - 2 c_2^{j-1} c_7^j - 3 c_3^{j-1} c_8^j - 4 c_4^{j-1} c_9^j - 5 c_5^{j-1} c_{10}^j) \\
& - \frac{1}{2} \left(\frac{\pi^2 \varepsilon 5^2}{\Delta t} + \frac{1}{(\Delta t)^2} \right) c_5^{j-1} = 0
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{2} \left(\pi^4 \varepsilon^2 6^4 + \frac{2\varepsilon \pi^2 6^2}{\Delta t} + \frac{1}{(\Delta t)^2} \right) c_6^j + \frac{\varepsilon \pi^3}{4} (90 c_1^j c_5^j + 126 c_1^j c_7^j + 144 c_2^j c_4^j + 288 c_2^j c_8^j \\
& + 81 (c_3^j)^2 + 486 c_3^j c_9^j + 720 c_4^j c_{10}^j) + \frac{\pi^2}{8} (-27 (c_1^j)^2 c_4^j + 74 (c_1^j)^2 c_6^j - 51 (c_1^j)^2 c_8^j - 50 c_1^j c_2^j c_3^j \\
& + 66 c_1^j c_2^j c_5^j + 90 c_1^j c_2^j c_7^j - 122 c_1^j c_2^j c_9^j + 62 c_1^j c_3^j c_4^j + 110 c_1^j c_3^j c_8^j - 146 c_1^j c_3^j c_{10}^j + 134 c_1^j c_4^j c_9^j \\
& + 162 c_1^j c_5^j c_{10}^j - 8 (c_2^j)^3 + 80 (c_2^j)^2 c_6^j - 72 (c_2^j)^2 c_{10}^j + 74 c_2^j c_3^j c_5^j + 98 c_2^j c_3^j c_7^j + 36 c_2^j (c_4^j)^2 \\
& + 120 c_2^j c_4^j c_8^j + 146 c_2^j c_5^j c_9^j + 176 c_2^j c_6^j c_{10}^j + 90 (c_3^j)^2 c_6^j + 86 c_3^j c_4^j c_5^j + 110 c_3^j c_4^j c_7^j + 134 c_3^j c_5^j c_8^j \\
& + 162 c_3^j c_6^j c_9^j + 194 c_3^j c_7^j c_{10}^j + 104 (c_4^j)^2 c_6^j + 51 c_4^j (c_5^j)^2 + 126 c_4^j c_5^j c_7^j + 152 c_4^j c_6^j c_8^j + 182 c_4^j c_7^j c_9^j \\
& + 216 c_4^j c_8^j c_{10}^j + 122 (c_5^j)^2 c_6^j + 146 c_5^j c_6^j c_7^j + 174 c_5^j c_7^j c_8^j + 206 c_5^j c_8^j c_9^j + 242 c_5^j c_9^j c_{10}^j \\
& + 170 c_6^j (c_7^j)^2 + 99 (c_7^j)^2 c_8^j + 230 c_7^j c_8^j c_9^j + 266 c_7^j c_9^j c_{10}^j + 200 c_6^j (c_8^j)^2 + 132 (c_8^j)^2 c_{10}^j + 234 c_6^j (c_9^j)^2 \\
& + 72 (c_6^j)^3 + 272 c_6^j (c_{10}^j)^2) - \frac{\pi}{4\Delta t} (-5 c_5^{j-1} c_1^j + 7 c_7^{j-1} c_1^j - 4 c_4^{j-1} c_2^j + 8 c_8^{j-1} c_2^j - 3 c_3^{j-1} c_3^j \\
& + 9 c_9^{j-1} c_3^j - 2 c_2^{j-1} c_4^j + 10 c_{10}^{j-1} c_4^j - c_1^{j-1} c_5^j - c_1^{j-1} c_7^j - 2 c_2^{j-1} c_8^j - 3 c_3^{j-1} c_9^j - 4 c_4^{j-1} c_{10}^j) \\
& - \frac{1}{2} \left(\frac{\pi^2 \varepsilon 6^2}{\Delta t} + \frac{1}{(\Delta t)^2} \right) c_6^{j-1} = 0
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{2} \left(\pi^4 \varepsilon^2 7^4 + \frac{2\varepsilon \pi^2 7^2}{\Delta t} + \frac{1}{(\Delta t)^2} \right) c_7^j + \frac{\varepsilon \pi^3}{4} (126 c_1^j c_6^j + 168 c_1^j c_8^j + 210 c_2^j c_5^j + 378 c_2^j c_9^j \\
& + 252 c_3^j c_4^j + 630 c_3^j c_{10}^j) + \frac{\pi^2}{8} (-38 (c_1^j)^2 c_5^j + 100 (c_1^j)^2 c_7^j - 66 (c_1^j)^2 c_9^j - 70 c_1^j c_2^j c_4^j + 90 c_1^j c_2^j c_6^j
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& +118 c_1^j c_2^j c_8^j - 154 c_1^j c_2^j c_{10}^j - 34 c_1^j (c_3^j)^2 + 84 c_1^j c_3^j c_5^j + 140 c_1^j c_3^j c_9^j + 41 c_1^j (c_4^j)^2 + 166 c_1^j c_4^j c_{10}^j \\
& - 33 (c_2^j)^2 c_3^j + 106 (c_2^j)^2 c_7^j + 98 c_2^j c_3^j c_6^j + 126 c_2^j c_3^j c_8^j + 94 c_2^j c_4^j c_5^j + 150 c_2^j c_4^j c_9^j + 178 c_2^j c_5^j c_{10}^j \\
& + 116 (c_3^j)^2 c_7^j + 110 c_3^j c_4^j c_6^j + 138 c_3^j c_4^j c_8^j + 54 c_3^j (c_5^j)^2 + 164 c_3^j c_5^j c_9^j + 194 c_3^j c_6^j c_{10}^j + 130 (c_4^j)^2 c_7^j \\
& + 126 c_4^j c_5^j c_6^j + 154 c_4^j c_5^j c_8^j + 182 c_4^j c_6^j c_9^j + 214 c_4^j c_7^j c_{10}^j + 148 (c_5^j)^2 c_7^j + 73 c_5^j (c_6^j)^2 + 174 c_5^j c_6^j c_8^j \\
& + 204 c_5^j c_7^j c_9^j + 238 c_5^j c_8^j c_{10}^j + 170 (c_6^j)^2 c_7^j + 198 c_6^j c_7^j c_8^j + 230 c_6^j c_8^j c_9^j + 266 c_6^j c_9^j c_{10}^j \\
& + 98 (c_7^j)^3 + 226 c_7^j (c_8^j)^2 + 129 (c_8^j)^2 c_9^j + 294 c_8^j c_9^j c_{10}^j + 260 c_7^j (c_9^j)^2 + 298 c_7^j (c_{10}^j)^2 \\
& - \frac{\pi}{4\Delta t} (-6 c_6^{j-1} c_1^j + 8 c_8^{j-1} c_1^j - 5 c_5^{j-1} c_2^j + 9 c_9^{j-1} c_2^j - 4 c_4^{j-1} c_3^j + 10 c_{10}^{j-1} c_3^j - 3 c_3^{j-1} c_4^j \\
& - 2 c_2^{j-1} c_5^j - c_1^{j-1} c_6^j - c_1^{j-1} c_8^j - 2 c_2^{j-1} c_9^j - 3 c_3^{j-1} c_{10}^j) - \frac{1}{2} \left(\frac{\pi^2 \varepsilon 7^2}{\Delta t} + \frac{1}{(\Delta t)^2} \right) c_7^{j-1} = 0
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{2} \left(\pi^4 \varepsilon^2 8^4 + \frac{2\varepsilon \pi^2 8^2}{\Delta t} + \frac{1}{(\Delta t)^2} \right) c_8^j + \frac{\varepsilon \pi^3}{4} (168 c_1^j c_7^j + 216 c_1^j c_9^j + 288 c_2^j c_6^j + 360 c_3^j c_5^j \\
& + 192 (c_4^j)^2 + 480 c_2^j c_{10}^j) + \frac{\pi^2}{8} (-51 (c_1^j)^2 c_6^j + 130 (c_1^j)^2 c_8^j - 83 (c_1^j)^2 c_{10}^j - 94 c_1^j c_2^j c_5^j \\
& + 118 c_1^j c_2^j c_7^j + 150 c_1^j c_2^j c_9^j - 90 c_1^j c_3^j c_4^j + 110 c_1^j c_3^j c_6^j + 174 c_1^j c_3^j c_{10}^j + 106 c_1^j c_4^j c_5^j - 44 (c_2^j)^2 c_4^j \\
& + 136 (c_2^j)^2 c_8^j - 43 c_2^j (c_3^j)^2 + 126 c_2^j c_3^j c_7^j + 158 c_2^j c_3^j c_9^j + 120 c_2^j c_4^j c_6^j + 184 c_2^j c_4^j c_{10}^j + 59 c_2^j (c_5^j)^2 \\
& + 146 (c_3^j)^2 c_8^j + 138 c_3^j c_4^j c_7^j + 170 c_3^j c_4^j c_9^j + 134 c_3^j c_5^j c_6^j + 198 c_3^j c_5^j c_{10}^j + 160 (c_4^j)^2 c_8^j + 154 c_4^j c_5^j c_7^j \\
& + 186 c_4^j c_5^j c_9^j + 76 c_4^j (c_6^j)^2 + 216 c_4^j c_6^j c_{10}^j + 178 (c_5^j)^2 c_8^j + 174 c_5^j c_6^j c_7^j + 206 c_5^j c_6^j c_9^j + 238 c_5^j c_7^j c_{10}^j \\
& + 200 (c_6^j)^2 c_8^j + 99 c_6^j (c_7^j)^2 + 230 c_6^j c_7^j c_9^j + 264 c_6^j c_8^j c_{10}^j + 226 (c_7^j)^2 c_8^j + 258 c_7^j c_8^j c_9^j + 294 c_7^j c_9^j c_{10}^j \\
& + 128 (c_8^j)^3 + 290 c_8^j (c_9^j)^2 + 163 (c_9^j)^2 c_{10}^j + 328 c_8^j (c_{10}^j)^2) - \frac{\pi}{4\Delta t} (-7 c_7^{j-1} c_1^j + 9 c_9^{j-1} c_1^j \\
& - 6 c_6^{j-1} c_2^j + 10 c_{10}^{j-1} c_2^j - 5 c_5^{j-1} c_3^j - 4 c_4^{j-1} c_4^j - 3 c_3^{j-1} c_5^j - 2 c_2^{j-1} c_6^j - c_1^{j-1} c_7^j - c_1^{j-1} c_9^j \\
& - 2 c_2^{j-1} c_{10}^j) - \frac{1}{2} \left(\frac{\pi^2 \varepsilon 8^2}{\Delta t} + \frac{1}{(\Delta t)^2} \right) c_8^{j-1} = 0
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{2} \left(\pi^4 \varepsilon^2 9^4 + \frac{2\varepsilon\pi^2 9^2}{\Delta t} + \frac{1}{(\Delta t)^2} \right) c_9^j + \frac{\varepsilon\pi^3}{4} (216 c_1^j c_8^j + 270 c_1^j c_{10}^j + 378 c_2^j c_7^j + 486 c_3^j c_6^j \\
& + 540 c_4^j c_5^j) + \frac{\pi^2}{8} (-66(c_1^j)^2 c_7^j + 164 (c_1^j)^2 c_9^j - 122 c_1^j c_2^j c_6^j + 150 c_1^j c_2^j c_8^j + 186 c_1^j c_2^j c_{10}^j \\
& - 116 c_1^j c_3^j c_5^j + 140 c_1^j c_3^j c_7^j - 57 c_1^j (c_4^j)^2 + 134 c_1^j c_4^j c_6^j + 66 c_1^j (c_5^j)^2 - 57 (c_2^j)^2 c_5^j + 170 (c_2^j)^2 c_9^j \\
& - 110 c_2^j c_3^j c_4^j + 158 c_2^j c_3^j c_8^j + 194 c_2^j c_3^j c_{10}^j + 150 c_2^j c_4^j c_7^j + 146 c_2^j c_5^j c_6^j - 18 (c_3^j)^3 + 180 (c_3^j)^2 c_9^j \\
& + 170 c_3^j c_4^j c_8^j + 206 c_3^j c_4^j c_{10}^j + 164 c_3^j c_5^j c_7^j + 81 c_3^j (c_6^j)^2 + 194 (c_4^j)^2 c_9^j + 186 c_4^j c_5^j c_8^j + 222 c_4^j c_5^j c_{10}^j \\
& + 182 c_4^j c_6^j c_7^j + 212 (c_5^j)^2 c_9^j + 206 c_5^j c_6^j c_8^j + 242 c_5^j c_6^j c_{10}^j + 102 c_5^j (c_7^j)^2 + 234 (c_6^j)^2 c_9^j + 230 c_6^j c_7^j c_8^j \\
& + 266 c_6^j c_7^j c_{10}^j + 260 (c_7^j)^2 c_9^j + 129 c_7^j (c_8^j)^2 + 294 c_7^j c_8^j c_{10}^j + 290 (c_8^j)^2 c_9^j + 326 c_8^j c_9^j c_{10}^j + 162 (c_9^j)^3 \\
& + 362 c_9^j (c_{10}^j)^2) - \frac{\pi}{4\Delta t} (-8 c_8^{j-1} c_1^j + 10 c_{10}^{j-1} c_1^j - 7 c_7^{j-1} c_2^j - 6 c_6^{j-1} c_3^j - 5 c_5^{j-1} c_4^j - 4 c_4^{j-1} c_5^j \\
& - 3 c_3^{j-1} c_6^j - 2 c_2^{j-1} c_7^j - c_1^{j-1} c_8^j - c_1^{j-1} c_{10}^j) - \frac{1}{2} \left(\frac{\pi^2 \varepsilon 9^2}{\Delta t} + \frac{1}{(\Delta t)^2} \right) c_9^{j-1} = 0
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{2} \left(\pi^4 \varepsilon^2 10^4 + \frac{2\varepsilon\pi^2 10^2}{\Delta t} + \frac{1}{(\Delta t)^2} \right) c_{10}^j + \frac{\varepsilon\pi^3}{4} (270 c_1^j c_9^j + 480 c_2^j c_8^j + 630 c_3^j c_7^j + 720 c_4^j c_6^j \\
& + 375 (c_5^j)^2) + \frac{\pi^2}{8} (-83(c_1^j)^2 c_8^j + 202 (c_1^j)^2 c_{10}^j - 154 c_1^j c_2^j c_7^j + 186 c_1^j c_2^j c_9^j - 146 c_1^j c_3^j c_6^j \\
& + 174 c_1^j c_3^j c_8^j - 142 c_1^j c_4^j c_5^j + 166 c_1^j c_4^j c_7^j + 162 c_1^j c_5^j c_6^j - 72 (c_2^j)^2 c_6^j + 208 (c_2^j)^2 c_{10}^j - 138 c_2^j c_3^j c_5^j \\
& + 194 c_2^j c_3^j c_9^j - 68 c_2^j (c_4^j)^2 + 184 c_2^j c_4^j c_8^j + 178 c_2^j c_5^j c_7^j + 88 c_2^j (c_6^j)^2 - 67 (c_3^j)^2 c_4^j + 218 (c_3^j)^2 c_{10}^j \\
& + 206 c_3^j c_4^j c_9^j + 198 c_3^j c_5^j c_8^j + 194 c_3^j c_6^j c_7^j + 232 (c_4^j)^2 c_{10}^j + 222 c_4^j c_5^j c_9^j + 216 c_4^j c_6^j c_8^j \\
& + 107 c_4^j (c_7^j)^2 + 250 (c_5^j)^2 c_{10}^j + 242 c_5^j c_6^j c_9^j + 238 c_5^j c_7^j c_8^j + 272 (c_6^j)^2 c_{10}^j + 266 c_6^j c_7^j c_9^j \\
& + 132 c_6^j (c_8^j)^2 + 298 (c_7^j)^2 c_{10}^j + 294 c_7^j c_8^j c_9^j + 328 (c_8^j)^2 c_{10}^j + 163 c_8^j (c_9^j)^2 + 362 (c_9^j)^2 c_{10}^j \\
& + 200 (c_{10}^j)^3) - \frac{\pi}{4\Delta t} (-9 c_9^{j-1} c_1^j - 8 c_8^{j-1} c_2^j - 7 c_7^{j-1} c_3^j - 6 c_6^{j-1} c_4^j - 5 c_5^{j-1} c_5^j - 4 c_4^{j-1} c_6^j \\
& - 3 c_3^{j-1} c_7^j - 2 c_2^{j-1} c_8^j - c_1^{j-1} c_9^j) - \frac{1}{2} \left(\frac{\pi^2 \varepsilon 10^2}{\Delta t} + \frac{1}{(\Delta t)^2} \right) c_{10}^{j-1} = 0
\end{aligned}$$

elde edilir. Burada $j = 1, \dots, p$ dir. Görüldüğü gibi sonuçta her bir j için bir non-linear denklem sistemi ortaya çıkmıştır. Bu denklem sistemleri herhangi bir nümerik yöntem uygulanarak çözülebilir.

Bu çalışmada, elde edilen her bir denklem sistemi non-linear denklem sistemlerinin çözümleri için oldukça etkili bir yöntem olan Newton Yöntemi kullanılarak çözüldü. ε' nun değişik değerleri için elde edilen nümerik çözümlerin, analitik çözümlerle olan uyumu tablolar ve grafikler üzerinde Bölüm 5' de verildi.



5. SONUÇ VE TARTIŞMA

Genel olarak adi diferansiyel denklemlerin çözümlerine ulaşmak kısmi diferansiyel denklemlerin çözümlerine ulaşmaktan daha kolaydır. Bu sebepten dolayı göz önüne aldığımız (3.1), (3.8) ve (3.9) başlangıç sınır değer problemi zamanı ayırma yöntemi ile ardışık olarak çözülmesi gereken (4.1) - (4.3) ile tanımlı $p - tane$ sınır değer problemine dönüştürüldü. Özellikle j ($j = 1, 2, \dots, p$) artarken elde edilen bu problemlerin çözümlerine ulaşmak kolay değildir. Üstelik elde edilmeye çalışılan çözümlerin bir pograma aktarılabilmeleri için belli bir kural bulmak da oldukça zordur. Bütün bu zorluklardan dolayı her j için elde edilen sınır değer problemleri en küçük kareler yöntemi ile çözüldü. Bu yöntemin her bir denkleme uygulanmasında da karşımıza bir non-linear denklem sistemi çıktı. Elde edilen non-linear denklem sistemleri 2.2.2.1' de verilen Newton yöntemi kullanılarak çözüldü. Newton yönteminin seçilmesindeki sebep yöntemin bu tip problemlerin çözümlerine hızlı yakınsaması ve elde ettiğimiz non-linear denklem sistemi için yöntemin algoritmasındaki Jakobian matrisinin simetrik olarak bulunmasıdır. Burada belirtilmesi gereken bir diğer önemli nokta da Jakobian matrisin simetrik olmasının nedeni non-linear denklem sisteminin en küçük kareler yöntemi ile oluşturulmasıdır. Bu matrisin simetrik olarak elde edilmesi işlem yükünü hemen hemen yarıya indirdi. Newton yönteminde başlangıç vektörünün seçimi oldukça önemlidir. Yaptığımız hesaplamalarda $j = 1$ için elde edilen denklem sisteminin çözümünde başlangıç vektörü olarak $\mathbf{c}^{1,(0)} = (c_1^{1,(0)}, c_2^{1,(0)}, \dots, c_N^{1,(0)})^t = (0, 0, \dots, 0)^t$ alındı. $j = 2, 3, \dots, p$ için elde edilen denklem sistemlerinin çözümlerinde ise bir önceki denklem sisteminin çözümü başlangıç vektörü olarak alındı. Yöntemin algoritmasında ortaya çıkan lineer denklem sisteminin çözümünde Gauss-eleme yöntemi kullanıldı. Newton yöntemi $\|\mathbf{c}^{j,(k)} - \mathbf{c}^{j,(k-1)}\|_\infty = \max_{1 \leq i \leq N} |c_i^{j,(k)} - c_i^{j,(k-1)}| \leq 0.00001$ olduğunda durduruldu. Her bir denklem sisteminin çözümünde ortalama 2 iterasyon yapılması durdurma kriterinin sağlaması için yeterli oldu. Burada $\mathbf{c}^{j,(k)}$ ve $\mathbf{c}^{j,(k-1)}$, sırasıyla j . denklem

sisteminin k . ve $k - 1$. iterasyonda elde edilen çözüm vektörleridir.

Elde edilecek çözümlerde yeterli hassasiyetin sağlanması için $N = 10$ seçilerek viskozitenin $0.05 \leq \varepsilon \leq 1.0$ değerleri için değişik zaman adımlarında elde edilen çözümler ayrıntılı olarak Tablo 5.1- 5.9' da verildi: Nümerik çözümlerin özellikle çok küçük zaman adımlarında ($t = 0.0001, 0.001, 0.01$) analitik çözümle çakıştığı görüldü (Tablo 5.1- 5.3). İlerleyen zaman adımlarında da ($t = 0.1, 0.2, 0.3$) nümerik çözümle analitik çözümün oldukça uyumlu oldukları Tablo 5.4- 5.8' de gösterildi. $\varepsilon = 0.05$ ve $t = 2.0, 2.5, 3.0$ için elde edilen nümerik çözümlerle analitik çözümlerin uyumu Tablo 5.9' da gösterildi. Baz elemanlarının sayısının çözüm üzerindeki etkisi $\varepsilon = 0.1$ için $t = 0.1$ ' de $N = 2, 3, 5, 10$ alınarak elde edilen nümerik çözümlerle analitik çözüm karşılaştırılması Tablo 5.10' da verildi. Baz elemanları sayısının artması elde edilen nümerik çözümleri analitik çözüme yakınlaştırdı. Δt ' nin nümerik çözüm üzerindeki etkisi Tablo 5.11' de verildi (Δt küçüldükçe nümerik çözüm analitik çözüme yaklaşıyor). Viskozitenin farklı değerleri için ($\varepsilon = 0.1, 0.01, 0.001, 0.0001, 0.00001$) farklı zaman adımlarında elde edilen nümerik çözümler Tablo 5.12' de verildi.

Analitik çözümün $\varepsilon \leq 0.01$ ve $t \leq 0.2$ için çalışmamasına rağmen $\varepsilon = 0.01$ için $t = 0.15$ ve $t = 0.25$ alınarak elde edilen nümerik çözümle analitik çözümün karşılaştırılması Şekil 5.11- 5.12 de verildi. Nümerik çözümün problemin matematiksel yapısını koruduğu gözlemlendi.

Ayrıca, bu çalışmanın amaçlarından biri olan çok küçük viskozite değerlerinde denklemin matematiksel ve fiziksel yapısını bozmadan çözüm elde etmek olduğu göz önüne alınacak olunursa bu amaca $t = 0.01, 0.05, 0.10, 0.15, 0.20$ zaman adımlarında $\varepsilon = 0.00001$ alınarak ulaşılmıştır (Tablo 5.12 ve Şekil 5.13). Ancak $t = 0.3$ ' den sonra küçük viskozite değerleri için bu yapı bozulmaya başlamaktadır (Şekil 5.14).

Bu çalışmada başlangıç şartı olarak (3.8) denklemi alınmıştır. Değişik başlangıç şartları altında da yöntemin uygulanabileceği açıktır. Bu yöndeki uygulamalar ileriki çalışmalarda düşünülmektedir.

Sonuç olarak, bilim ve mühendislikte popüler bir denklem olan Burgers denkleminin çözümü için denklemin non-linear yapısını koruyan ve çok küçük viskozite

değerlerinde de geçerli olan bir yöntem sunulmuştur.

Burgers denkleminin çözümü için uygulanan bu yöntemin bu tip denklemlerin çözümünde kolaylıkla kullanılabileceği açıktır.

Tablo 5.1: $\varepsilon = 0.05$, $\Delta t = 0.0001$ için $t = 0.0001, 0.001, 0.01$ zaman adımlarında elde edilen nümerik çözümlerin analitik çözümlerle karşılaştırılması.

| x | $t=0.0001$ | | $t=0.001$ | | $t=0.01$ | |
|-----|------------|-----------|-----------|-----------|-----------|-----------|
| | Nüm. Çöz. | Anl. Çöz. | Nüm. Çöz. | Anl. Çöz. | Nüm. Çöz. | Anl. Çöz. |
| 0.1 | 0.30891 | 0.30891 | 0.30795 | 0.30795 | 0.29865 | 0.29865 |
| 0.2 | 0.58761 | 0.58761 | 0.58601 | 0.58601 | 0.57045 | 0.57044 |
| 0.3 | 0.80883 | 0.80883 | 0.80713 | 0.80713 | 0.79034 | 0.79034 |
| 0.4 | 0.95092 | 0.95092 | 0.94966 | 0.94966 | 0.93696 | 0.93696 |
| 0.5 | 0.99995 | 0.99995 | 0.99950 | 0.99950 | 0.99459 | 0.99460 |
| 0.6 | 0.95110 | 0.95110 | 0.95151 | 0.95151 | 0.95513 | 0.95513 |
| 0.7 | 0.80913 | 0.80913 | 0.81011 | 0.81011 | 0.81975 | 0.81976 |
| 0.8 | 0.58791 | 0.58790 | 0.58899 | 0.58899 | 0.59988 | 0.59988 |
| 0.9 | 0.30909 | 0.30910 | 0.30979 | 0.30979 | 0.31685 | 0.31686 |

Tablo 5.2: $\varepsilon = 0.1$, $\Delta t = 0.0001$ için $t = 0.0001, 0.001, 0.01$ zaman adımlarında elde edilen nümerik çözümlerin analitik çözümlerle karşılaştırılması.

| x | $t=0.0001$ | | $t=0.001$ | | $t=0.01$ | |
|-----|------------|-----------|-----------|-----------|-----------|-----------|
| | Nüm. Çöz. | Anl. Çöz. | Nüm. Çöz. | Anl. Çöz. | Nüm. Çöz. | Anl. Çöz. |
| 0.1 | 0.30889 | 0.30889 | 0.30779 | 0.30779 | 0.29726 | 0.29726 |
| 0.2 | 0.58758 | 0.58758 | 0.58572 | 0.58572 | 0.56778 | 0.56777 |
| 0.3 | 0.80879 | 0.80879 | 0.80673 | 0.80673 | 0.78659 | 0.78659 |
| 0.4 | 0.95087 | 0.95087 | 0.94919 | 0.94919 | 0.93245 | 0.93244 |
| 0.5 | 0.99990 | 0.99990 | 0.99901 | 0.99901 | 0.98971 | 0.98971 |
| 0.6 | 0.95105 | 0.95106 | 0.95103 | 0.95104 | 0.95034 | 0.95035 |
| 0.7 | 0.80909 | 0.80909 | 0.80971 | 0.80971 | 0.81557 | 0.81558 |
| 0.8 | 0.58788 | 0.58788 | 0.58870 | 0.58870 | 0.59678 | 0.59678 |
| 0.9 | 0.30908 | 0.30908 | 0.30964 | 0.30964 | 0.31520 | 0.31520 |

Tablo 5.3: $\varepsilon = 1.0$, $\Delta t = 0.0001$ için $t = 0.0001, 0.001, 0.01$ zaman adımlarında elde edilen nümerik çözümlerin analitik çözümlerle karşılaştırılması.

| x | $t=0.0001$ | | $t=0.001$ | | $t=0.01$ | |
|-----|------------|-----------|-----------|-----------|-----------|-----------|
| | Nüm. Çöz. | Anl. Çöz. | Nüm. Çöz. | Anl. Çöz. | Nüm. Çöz. | Anl. Çöz. |
| 0.1 | 0.30862 | 0.30862 | 0.30509 | 0.30509 | 0.27327 | 0.27324 |
| 0.2 | 0.58706 | 0.58706 | 0.58057 | 0.58057 | 0.52162 | 0.52156 |
| 0.3 | 0.80807 | 0.80807 | 0.79963 | 0.79962 | 0.72192 | 0.72185 |
| 0.4 | 0.95003 | 0.95003 | 0.94082 | 0.94082 | 0.85465 | 0.85459 |
| 0.5 | 0.99901 | 0.99902 | 0.99018 | 0.99018 | 0.90576 | 0.90571 |
| 0.6 | 0.95021 | 0.95021 | 0.94261 | 0.94261 | 0.86836 | 0.86833 |
| 0.7 | 0.80837 | 0.80837 | 0.80252 | 0.80252 | 0.74411 | 0.74410 |
| 0.8 | 0.58735 | 0.58736 | 0.58346 | 0.58347 | 0.54382 | 0.54382 |
| 0.9 | 0.30880 | 0.30880 | 0.30688 | 0.30688 | 0.28700 | 0.28700 |

Tablo 5.4: $\varepsilon = 1.0$, $\Delta t = 0.0001$ için farklı $t = 0.1, 0.2, 0.3$ zaman adımlarında elde edilen nümerik çözümlerin analitik çözümlerle karşılaştırılması.

| x | $t=0.1$ | | $t=0.2$ | | $t=0.3$ | |
|-----|-----------|-----------|-----------|-----------|-----------|-----------|
| | Nüm. Çöz. | Anl. Çöz. | Nüm. Çöz. | Anl. Çöz. | Nüm. Çöz. | Anl. Çöz. |
| 0.1 | 0.10959 | 0.10954 | 0.04197 | 0.04193 | 0.01585 | 0.01583 |
| 0.2 | 0.20990 | 0.20979 | 0.08007 | 0.07999 | 0.03018 | 0.03014 |
| 0.3 | 0.29204 | 0.29190 | 0.11073 | 0.11062 | 0.04161 | 0.04155 |
| 0.4 | 0.34809 | 0.34792 | 0.13095 | 0.13082 | 0.04903 | 0.04896 |
| 0.5 | 0.37176 | 0.37158 | 0.13861 | 0.13847 | 0.05169 | 0.05161 |
| 0.6 | 0.35922 | 0.35905 | 0.13271 | 0.13258 | 0.04928 | 0.04921 |
| 0.7 | 0.31006 | 0.30991 | 0.11358 | 0.11347 | 0.04202 | 0.04196 |
| 0.8 | 0.22793 | 0.22782 | 0.08292 | 0.08284 | 0.03058 | 0.03054 |
| 0.9 | 0.12075 | 0.12069 | 0.04373 | 0.04369 | 0.01610 | 0.01607 |

Tablo 5.5: $\varepsilon = 0.7$, $\Delta t = 0.0001$ için $t = 0.1, 0.2, 0.3$ zaman adımlarında elde edilen nümerik çözümlerin analitik çözümlerle karşılaştırılması.

| x | $t=0.1$ | | $t=0.2$ | | $t=0.3$ | |
|-----|-----------|-----------|-----------|-----------|-----------|-----------|
| | Nüm. Çöz. | Anl. Çöz. | Nüm. Çöz. | Anl. Çöz. | Nüm. Çöz. | Anl. Çöz. |
| 0.1 | 0.14265 | 0.14261 | 0.07344 | 0.07341 | 0.03767 | 0.03764 |
| 0.2 | 0.27434 | 0.27426 | 0.14071 | 0.14064 | 0.07193 | 0.07188 |
| 0.3 | 0.38424 | 0.38413 | 0.19587 | 0.19578 | 0.09960 | 0.09953 |
| 0.4 | 0.46199 | 0.46187 | 0.23361 | 0.23350 | 0.11799 | 0.11791 |
| 0.5 | 0.49844 | 0.49832 | 0.24966 | 0.24954 | 0.12514 | 0.12505 |
| 0.6 | 0.48683 | 0.48672 | 0.24141 | 0.24129 | 0.12005 | 0.11997 |
| 0.7 | 0.42452 | 0.42442 | 0.20850 | 0.20840 | 0.10294 | 0.10286 |
| 0.8 | 0.31473 | 0.31467 | 0.15335 | 0.15328 | 0.07526 | 0.07521 |
| 0.9 | 0.16767 | 0.16764 | 0.08127 | 0.08123 | 0.03973 | 0.03970 |

Tablo 5.6: $\varepsilon = 0.5$, $\Delta t = 0.0001$ için $t = 0.1, 0.2, 0.3$ zaman adımlarında elde edilen nümerik çözümlerin analitik çözümlerle karşılaştırılması.

| x | $t=0.1$ | | $t=0.2$ | | $t=0.3$ | |
|-----|-----------|-----------|-----------|-----------|-----------|-----------|
| | Nüm. Çöz. | Anl. Çöz. | Nüm. Çöz. | Anl. Çöz. | Nüm. Çöz. | Anl. Çöz. |
| 0.1 | 0.16809 | 0.16806 | 0.10392 | 0.10390 | 0.06527 | 0.06524 |
| 0.2 | 0.32453 | 0.32447 | 0.20026 | 0.20021 | 0.12527 | 0.12523 |
| 0.3 | 0.45746 | 0.45738 | 0.28139 | 0.28131 | 0.17490 | 0.17484 |
| 0.4 | 0.55483 | 0.55474 | 0.33975 | 0.33966 | 0.20941 | 0.20934 |
| 0.5 | 0.60492 | 0.60484 | 0.36833 | 0.36824 | 0.22480 | 0.22472 |
| 0.6 | 0.59769 | 0.59763 | 0.36159 | 0.36150 | 0.21838 | 0.21830 |
| 0.7 | 0.52718 | 0.52714 | 0.31684 | 0.31676 | 0.18943 | 0.18935 |
| 0.8 | 0.39471 | 0.39469 | 0.23585 | 0.23579 | 0.13982 | 0.13976 |
| 0.9 | 0.21170 | 0.21169 | 0.12598 | 0.12595 | 0.07427 | 0.07424 |

Tablo 5.7: $\varepsilon = 0.3$, $\Delta t = 0.0001$ için $t = 0.1, 0.2, 0.3$ zaman adımlarında elde edilen nümerik çözümlerin analitik çözümlerle karşılaştırılması.

| x | $t=0.1$ | | $t=0.2$ | | $t=0.3$ | |
|-----|-----------|-----------|-----------|-----------|-----------|-----------|
| | Nüm. Çöz. | Anl. Çöz. | Nüm. Çöz. | Anl. Çöz. | Nüm. Çöz. | Anl. Çöz. |
| 0.1 | 0.19542 | 0.19541 | 0.14062 | 0.14061 | 0.10576 | 0.10575 |
| 0.2 | 0.37916 | 0.37911 | 0.27364 | 0.27360 | 0.20544 | 0.20541 |
| 0.3 | 0.53885 | 0.53878 | 0.39077 | 0.39070 | 0.29250 | 0.29245 |
| 0.4 | 0.66111 | 0.66105 | 0.48247 | 0.48241 | 0.35953 | 0.35948 |
| 0.5 | 0.73146 | 0.73144 | 0.53779 | 0.53775 | 0.39835 | 0.39830 |
| 0.6 | 0.73527 | 0.73526 | 0.54488 | 0.54484 | 0.40060 | 0.40054 |
| 0.7 | 0.66043 | 0.66042 | 0.49312 | 0.49307 | 0.35956 | 0.35950 |
| 0.8 | 0.50274 | 0.50276 | 0.37772 | 0.37770 | 0.27328 | 0.27324 |
| 0.9 | 0.27283 | 0.27287 | 0.20583 | 0.20584 | 0.14807 | 0.14806 |

Tablo 5.8: $\varepsilon = 0.1$, $\Delta t = 0.0001$ için $t = 0.1, 0.2, 0.3$ zaman adımlarında elde edilen nümerik çözümlerin analitik çözümlerle karşılaştırılması.

| x | $t=0.1$ | | $t=0.2$ | | $t=0.3$ | |
|-----|-----------|-----------|-----------|-----------|-----------|-----------|
| | Nüm. Çöz. | Anl. Çöz. | Nüm. Çöz. | Anl. Çöz. | Nüm. Çöz. | Anl. Çöz. |
| 0.1 | 0.22334 | 0.22345 | 0.17610 | 0.17671 | 0.14574 | 0.14672 |
| 0.2 | 0.43581 | 0.43580 | 0.34764 | 0.34780 | 0.28971 | 0.29004 |
| 0.3 | 0.62529 | 0.62512 | 0.50770 | 0.50694 | 0.42720 | 0.42601 |
| 0.4 | 0.77777 | 0.77772 | 0.64624 | 0.64605 | 0.54959 | 0.54930 |
| 0.5 | 0.87715 | 0.87728 | 0.75321 | 0.75381 | 0.65079 | 0.65173 |
| 0.6 | 0.90420 | 0.90425 | 0.81288 | 0.81303 | 0.71906 | 0.71932 |
| 0.7 | 0.83701 | 0.83692 | 0.79747 | 0.79697 | 0.72745 | 0.72670 |
| 0.8 | 0.65730 | 0.65731 | 0.66806 | 0.66786 | 0.63141 | 0.63100 |
| 0.9 | 0.36560 | 0.36575 | 0.39258 | 0.39330 | 0.38383 | 0.38387 |

Tablo 5.9: $\varepsilon = 0.05$ ve $\Delta t = 0.002$ için $t = 2.0, 2.5, 3.0$ zaman adımlarında elde edilen nümerik çözümlerin analitik çözümlerle karşılaştırılması.

| x | $t=2.0$ | | $t=2.5$ | | $t=3.0$ | |
|-----|-----------|-----------|-----------|-----------|-----------|-----------|
| | Nüm. Çöz. | Anl. Çöz. | Nüm. Çöz. | Anl. Çöz. | Nüm. Çöz. | Anl. Çöz. |
| 0.1 | 0.04111 | 0.04158 | 0.03343 | 0.03359 | 0.02740 | 0.02746 |
| 0.2 | 0.08253 | 0.08285 | 0.06653 | 0.06665 | 0.05415 | 0.05422 |
| 0.3 | 0.12334 | 0.12329 | 0.09838 | 0.09842 | 0.07926 | 0.07931 |
| 0.4 | 0.16163 | 0.16185 | 0.12741 | 0.12755 | 0.10122 | 0.10130 |
| 0.5 | 0.19568 | 0.19625 | 0.15132 | 0.15157 | 0.11779 | 0.11792 |
| 0.6 | 0.22136 | 0.22163 | 0.16596 | 0.16612 | 0.12561 | 0.12570 |
| 0.7 | 0.22855 | 0.22834 | 0.16423 | 0.16423 | 0.12009 | 0.12013 |
| 0.8 | 0.20061 | 0.20042 | 0.13722 | 0.13723 | 0.09679 | 0.09684 |
| 0.9 | 0.12185 | 0.12202 | 0.07983 | 0.07993 | 0.05473 | 0.05478 |

Tablo 5.10: $\varepsilon = 0.1$, $\Delta t = 0.0001$ için $t = 0.1$ ' de farklı sayıda baz elemanı alarak elde edilen nümerik çözümlerin analitik çözümlerle karşılaştırılması.

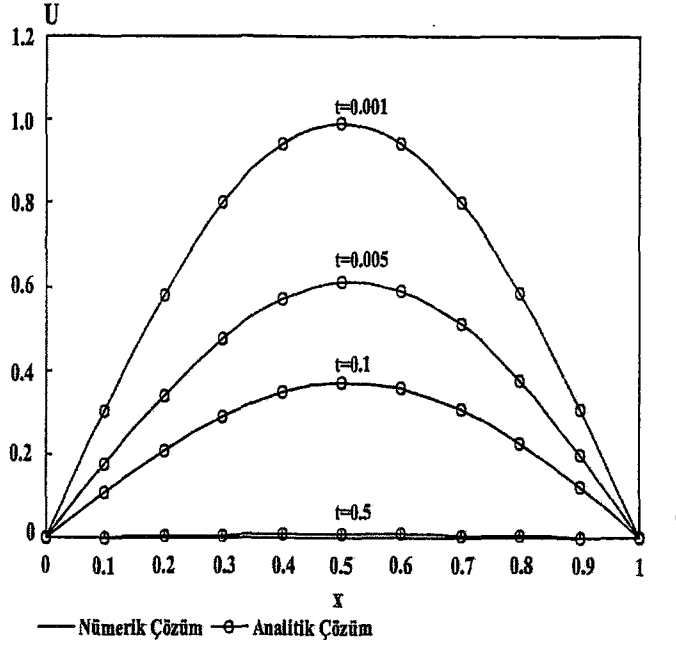
| x | Nümerik Çözümler | | | | Analitik Çözüm |
|-----|------------------|---------|---------|---------|----------------|
| | $N=2$ | $N=3$ | $N=5$ | $N=10$ | |
| 0.1 | 0.25769 | 0.22705 | 0.22365 | 0.22334 | 0.22345 |
| 0.2 | 0.49640 | 0.43862 | 0.43575 | 0.43581 | 0.43580 |
| 0.3 | 0.69663 | 0.62362 | 0.62501 | 0.62529 | 0.62512 |
| 0.4 | 0.83877 | 0.77369 | 0.77790 | 0.77777 | 0.77772 |
| 0.5 | 0.90505 | 0.87597 | 0.87734 | 0.87715 | 0.87728 |
| 0.6 | 0.88273 | 0.90770 | 0.90402 | 0.90420 | 0.90425 |
| 0.7 | 0.76777 | 0.84045 | 0.83696 | 0.83701 | 0.83692 |
| 0.8 | 0.56754 | 0.65545 | 0.65744 | 0.65730 | 0.65731 |
| 0.9 | 0.30166 | 0.36105 | 0.36553 | 0.36560 | 0.36575 |

Tablo 5.11: $\varepsilon = 1.0, t = 0.1$ ' de farklı Δt değerleri için elde edilen nümerik çözümlerin analitik çözümlle karşılaştırılması.

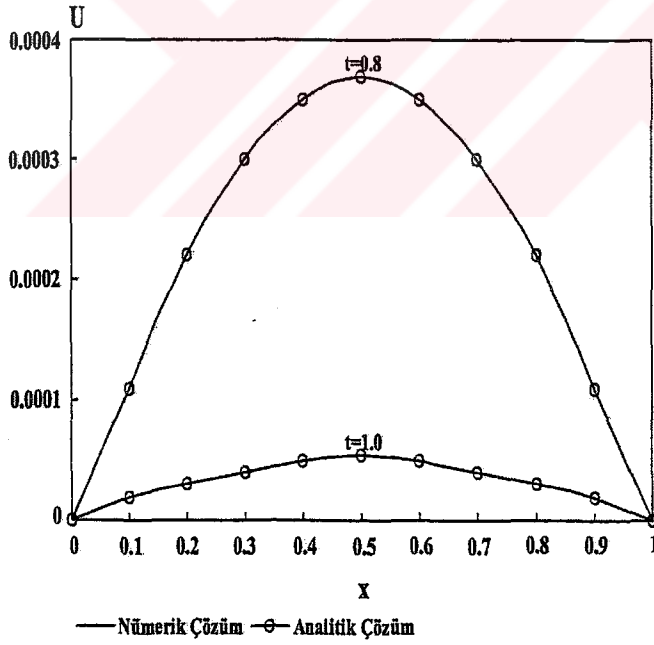
| x | Nümerik Çözümler | | | Analitik Çözüm |
|-----|---------------------|----------------------|----------------------|----------------|
| | $\Delta t = 0.0001$ | $\Delta t = 0.00005$ | $\Delta t = 0.00002$ | |
| 0.1 | 0.10959 | 0.10957 | 0.10955 | 0.10954 |
| 0.2 | 0.20990 | 0.20984 | 0.20981 | 0.20979 |
| 0.3 | 0.29204 | 0.29197 | 0.29193 | 0.29190 |
| 0.4 | 0.34809 | 0.34801 | 0.34796 | 0.34792 |
| 0.5 | 0.37176 | 0.37167 | 0.37161 | 0.37158 |
| 0.6 | 0.35922 | 0.35913 | 0.35908 | 0.35905 |
| 0.7 | 0.31006 | 0.30998 | 0.30994 | 0.30991 |
| 0.8 | 0.22793 | 0.22787 | 0.22784 | 0.22782 |
| 0.9 | 0.12075 | 0.12072 | 0.12070 | 0.12069 |

Tablo 5.12: $\Delta t = 0.00005$ olarak farklı zaman adımlarında farklı viskosite değerleri için elde edilen nümerik çözümler.

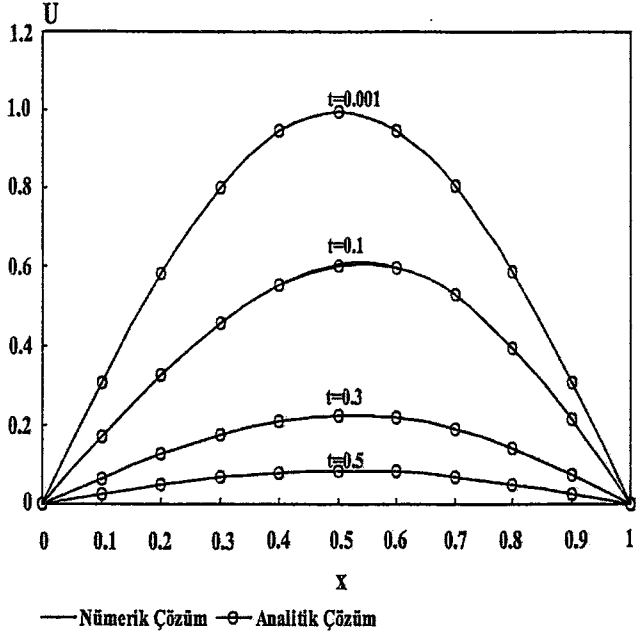
| x | t | $\varepsilon = 0.1$ | $\varepsilon = 0.01$ | $\varepsilon = 0.001$ | $\varepsilon = 0.0001$ | $\varepsilon = 0.00001$ |
|------|------|---------------------|----------------------|-----------------------|------------------------|-------------------------|
| 0.25 | 0.01 | 0.68508 | 0.69093 | 0.69151 | 0.69157 | 0.69158 |
| | 0.05 | 0.60877 | 0.63092 | 0.63315 | 0.63337 | 0.63340 |
| | 0.10 | 0.53424 | 0.56654 | 0.56975 | 0.57007 | 0.57011 |
| | 0.15 | 0.47617 | 0.51273 | 0.51621 | 0.51656 | 0.51659 |
| | 0.20 | 0.42969 | 0.46658 | 0.46893 | 0.46911 | 0.46913 |
| 0.50 | 0.01 | 0.98971 | 0.99852 | 0.99941 | 0.99949 | 0.99950 |
| | 0.05 | 0.94235 | 0.98331 | 0.98748 | 0.98790 | 0.98794 |
| | 0.10 | 0.87714 | 0.94703 | 0.95409 | 0.95479 | 0.95486 |
| | 0.15 | 0.81288 | 0.89837 | 0.90651 | 0.90732 | 0.90740 |
| | 0.20 | 0.75319 | 0.84305 | 0.84997 | 0.85061 | 0.85067 |
| 0.75 | 0.01 | 0.71557 | 0.72224 | 0.72291 | 0.72298 | 0.72298 |
| | 0.05 | 0.74326 | 0.78437 | 0.78865 | 0.78908 | 0.78912 |
| | 0.10 | 0.76189 | 0.86043 | 0.87118 | 0.87227 | 0.87237 |
| | 0.15 | 0.76296 | 0.92391 | 0.94158 | 0.94336 | 0.94353 |
| | 0.20 | 0.74966 | 0.96361 | 0.98497 | 0.98705 | 0.98726 |



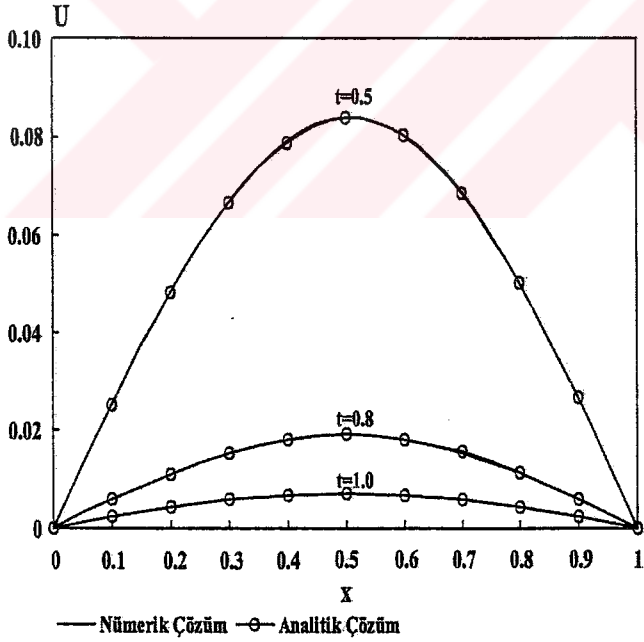
Şekil 5.1: $\varepsilon = 1.0$, $\Delta t = 0.0001$ için $t = 0.001, 0.005, 0.1, 0.5$ ' de elde edilen nümerik çözümlerin analitik çözümlerle karşılaştırılması.



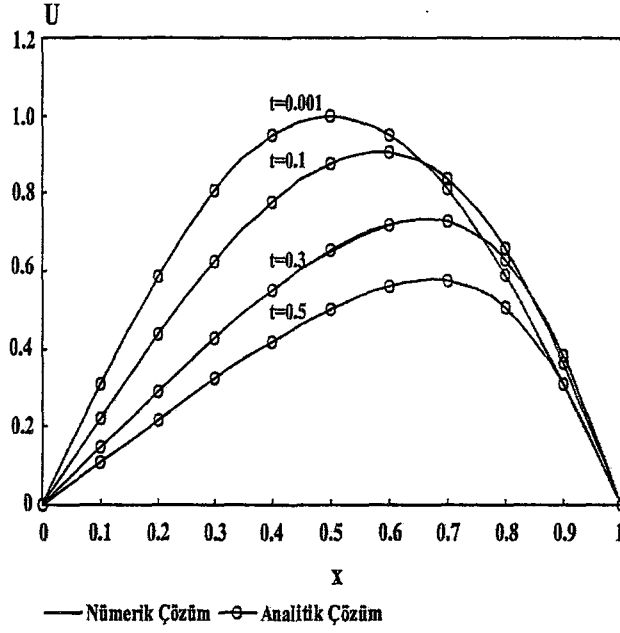
Şekil 5.2: $\varepsilon = 1.0$, $\Delta t = 0.001$ için $t = 0.8, 1.0$ ' da elde edilen nümerik çözümlerin analitik çözümlerle karşılaştırılması.



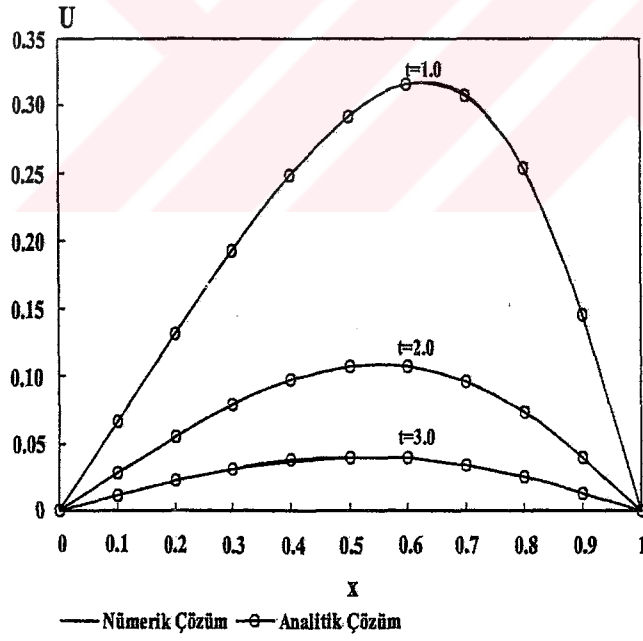
Şekil 5.3: $\varepsilon = 0.5$, $\Delta t = 0.0001$ için $t = 0.001, 0.1, 0.3, 0.5$ ' de elde edilen nümerik çözümlerin analitik çözümlerle karşılaştırılması.



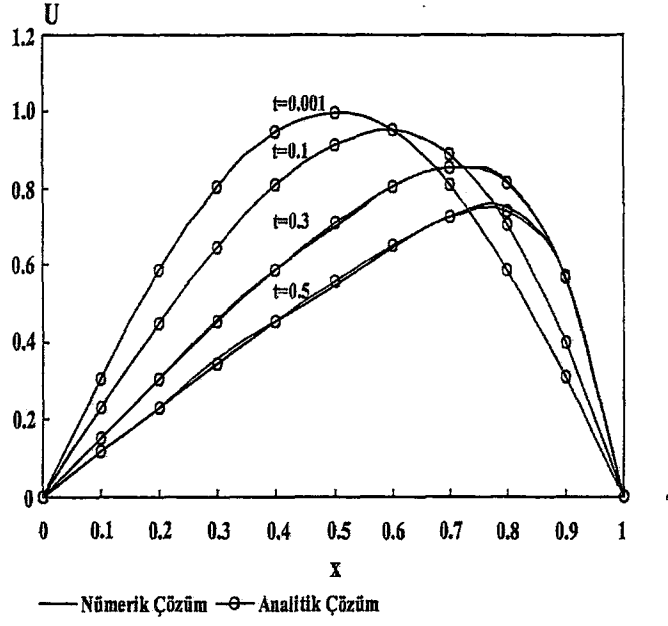
Şekil 5.4: $\varepsilon = 0.5$, $\Delta t = 0.001$ için $t = 0.5, 0.8, 1.0$ ' da elde edilen nümerik çözümlerin analitik çözümlerle karşılaştırılması.



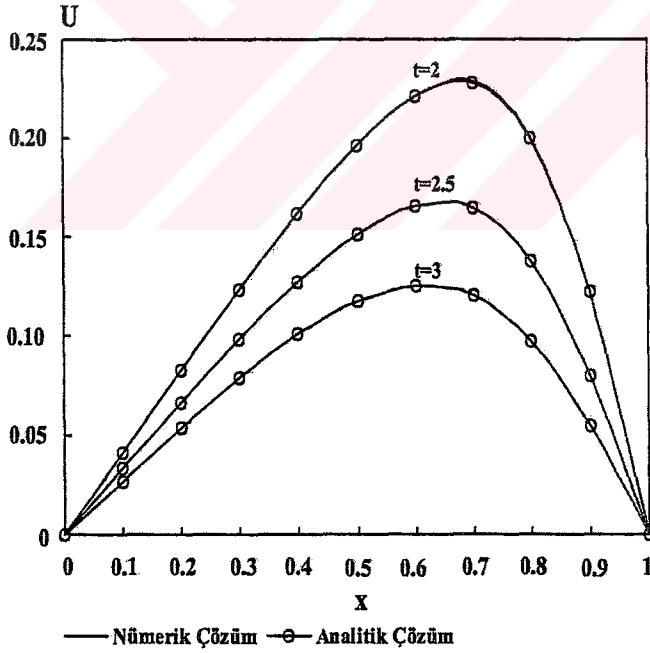
Şekil 5.5: $\varepsilon = 0.1$, $\Delta t = 0.0001$ için $t = 0.001, 0.1, 0.3, 0.5$ ' de elde edilen nümerik çözümlerle analitik çözümlerin karşılaştırılması.



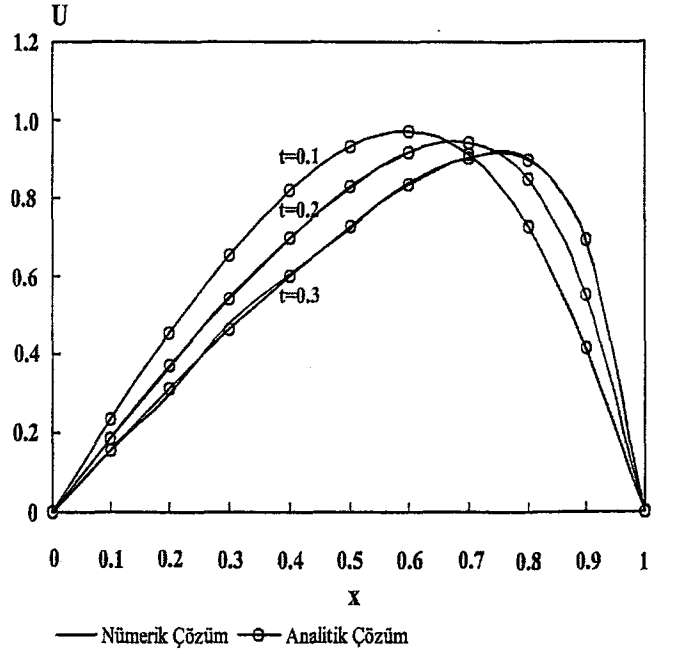
Şekil 5.6: $\varepsilon = 0.1$, $\Delta t = 0.0001$ için $t = 1.0, 2.0, 3.0$ ' da elde edilen nümerik çözümlerle analitik çözümlerin karşılaştırılması.



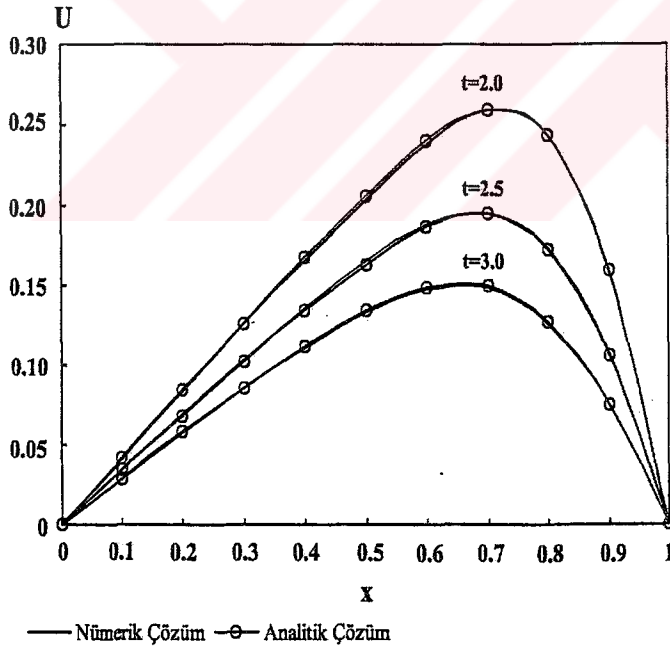
Şekil 5.7: $\varepsilon = 0.05$, $\Delta t = 0.0001$ için $t = 0.001, 0.1, 0.3, 0.5$ ' de elde edilen nümerik çözümlerle analitik çözümlerin karşılaştırılması.



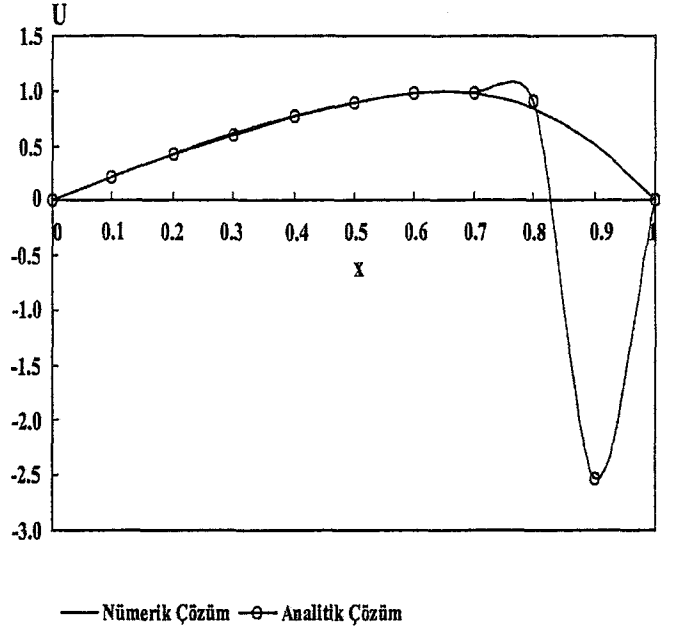
Şekil 5.8: $\varepsilon = 0.05$, $\Delta t = 0.001$ için $t = 2.0, 2.5, 3.0$ ' da elde edilen nümerik çözümlerle analitik çözümlerin karşılaştırılması.



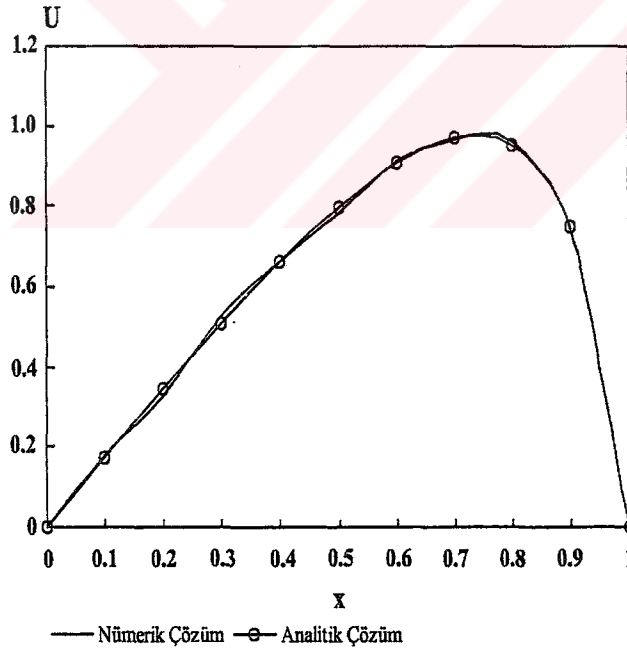
Şekil 5.9: $\varepsilon = 0.03$, $\Delta t = 0.0002$ için $t = 0.1, 0.2, 0.3$ ' de elde edilen nümerik çözümlerin analitik çözümlerle karşılaştırılması.



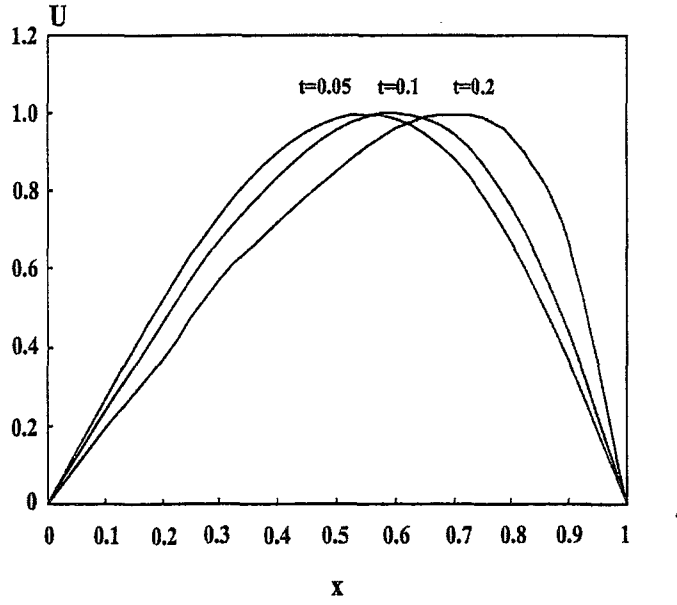
Şekil 5.10: $\varepsilon = 0.04$, $\Delta t = 0.002$ için $t = 2.0, 2.5, 3.0$ ' de elde edilen nümerik çözümlerin analitik çözümlerle karşılaştırılması.



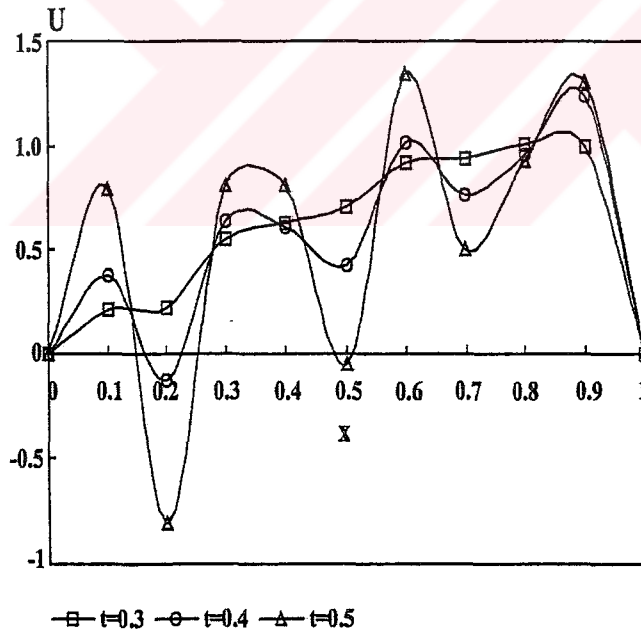
Şekil 5.11: $\varepsilon = 0.01$, $\Delta t = 0.0001$ için $t = 0.15$ ' de nümerik çözümle analitik çözümün karşılaştırılması.



Şekil 5.12: $\varepsilon = 0.01$, $\Delta t = 0.0001$ için $t = 0.25$ ' de elde edilen nümerik çözümle analitik çözümün karşılaştırılması.



Şekil 5.13: $\varepsilon = 0.00001$, $\Delta t = 0.0001$ için $t = 0.05, 0.1, 0.2$ ' de elde edilen nümerik çözümler.



Şekil 5.14: $\varepsilon = 0.00001$, $\Delta t = 0.0002$ için $t = 0.3, 0.4, 0.5$ ' de elde edilen nümerik çözüm.

6. Kaynaklar

- [1] H. Bateman, *Some recent researches on the motion of fluids*, Mon. Weather Rev., 43 (1915) 163-170
- [2] J. M. Burgers, *Mathematical examples illustrating relations occurring in the theory of turbulent fluid motion*, Trans. Roy. Neth. Acad. Sci., 17 (1939) 1-53
- [3] J. M. Burgers, *Application of a model system to illustrate some points of the statistical theory of free turbulence*, Proc. Roy. Neth. Acad. Sci., 43 (1940) 2-12
- [4] J. M. Burgers, *A Mathematical model illustrating the theory of turbulence*, Advances in Applied Mechanics 1, Academic Press, New York (1948)
- [5] J. M. Burgers, *The formation of vortex sheets in a simplified type of turbulence*, Proc. Roy. Neth. Acad. Sci., 53 (1950) 122-133
- [6] J. M. Burgers, *Correlation problems in a one-dimensional model of turbulence*, Proc. Roy. Neth. Acad. Sci., 53 (1950) 247-260, 393-406, 718-742
- [7] J. M. Burgers, *Statistical problems connected with the solution of a simple non-linear partial differential equation*, Proc. Roy. Neth. Acad. Sci., B57 (1954) 45-72, 159-169, 403-433
- [8] J. M. Burgers, *An approximate equation for correlation function connected with a non-linear problem*, Proceedings of the eighth international congress for applied mechanics (University of İstanbul, Turkey), 2 (1955) 89-103
- [9] J. M. Burgers, *A model for one-dimensional compressible turbulence with two sets of characteristics*, Proc. Roy. Neth. Acad. Sci., B58 (1955) 1-18
- [10] J. M. Burgers, *Statistical problems connected with the solution of a non-linear partial differential equation*, Non-Linear Problems of Engineering, Academic Press, New York, (1964)

- [11] J. M. Burgers, *Functions and integrals connected with the solution of the diffusion or heat flow equation*, The Institute for Fluid Dynamics Applied Mathematics, University of Maryland, Tech. Note BN-398, (1965)
- [12] P. A. Lagerstrom, J. D. Cole and L. Trilling, *Problems in the theory of viscous compressible fluids*, Calif. Inst. Tech., Tech. Note (1949)
- [13] J. D. Cole, *On a quasi-linear parabolic equation occurring in aerodynamics*, Quart. Apply. Math., 9 (1951) 225-236
- [14] A. Goldberg, *Finite amplitude waves in magnetohydrodynamics*, Soviet Phys. JETP, 15 (1962) 179-181
- [15] L. A. Pospelov, *Propagation of finite-amplitude elastic waves*, Soviet Phys. Acoust., 11 (1966) 302-304
- [16] D. T. Blackstock, *Thermoviscous attenuation of plane, periodic, finite-amplitude sound waves*, J. Acoust. Soc. Amer., 36 (1964) 534-542
- [17] W. Keck and R. T. Beyer, *Frequency spectrum of finite amplitude ultrasonic waves in liquids*, Phys. Fluids, 3 (1960) 346-352
- [18] J. S. Mendousse, *Nonlinear dissipative distortion of progressive sound waves at moderate amplitude*, J. Acoust. Soc. amer., 25 (1953) 51-54
- [19] S. I. Soluyan and R. V. Khokhlov, *Decay of finite-amplitude acoustic waves in a dissipative medium*, Vestnik Moskov. Univ. Ser. III. Fiz. Astronom., 3 (1961) 52-61
- [20] B. Van der Pol, *On a non-linear partial differential equation satisfied by the logarithm of the Jacobean theta-functions, with arithmetical applications*, Proc. Acad. Sci., A13 (1951) 261-284
- [21] E. R. Benton and G. W. Platzman, *A table of solution of the one-dimensional Burgers' equation*, Quart. Appl. Math., (1974)195-212

- [22] R. D. Fay, *Plane sound waves of finite amplitude*, J. Acoust. Soc. Amer. 3 (1931) 222-241
- [23] E. Fubini-Ghiron, *Anomalie nella propagazione di onde acustiche di grande ampiezza*, Alta Frequenza 4 (1935) 530-581
- [24] E. R. Benton, *Some new exact, viscous, nonsteady solutions of Burgers' equation*, Phys. Fluids 9 (1966) 1247-1248
- [25] E. R. Benton, *Solutions illustrating the decay of dissipation layers in Burgers' nonlinear diffusion equation*, Phys. Fluids 10 (1967) 2113-2119
- [26] D. T. Blackstock, *Connection between the Fay and Fubini solutions for plane sound waves of finite amplitude*, J. Acoust. Soc. Amer. 39 (1966) 1019-1026
- [27] E. Hopf, *The partial differential equation $u_t + uu_x = \mu u_{xx}$* , Comm. Pure. appl. Math., 3 (1950) 201-230
- [28] E. Y. Rodin, *A Riccati solution for Burgers' Equation*, Quart. Appl. Math., 27 (1974) 541-545
- [29] W. F. Ames, *Nonlinear partial differential equations in engineering*, Academic Press, New York, (1965)
- [30] C. W. Chu, *A class of reducible systems of quasi-linear partial differential equations*, Quart. Appl. Math., 23 (1965) 257-278
- [31] M. E. Shvets and V. P. Meleshko, *Numerical algorithm of a solution of the system equations of hydrodynamics of the atmosphere*, Izv. Acad. Sci. USSR Atmosphere Ocean. Phys., 1 (1965) 519-520
- [32] E. L. Miller, *Predictor-Corrector studies of Burgers' model of turbulent flow*, Master's Thesis, Univ. of Delaware, Newark (1966)
- [33] E. Varoğlu and W. D. L. Finn, *Space-time finite elements incorporating characteristics for the Burgers' equation*, Int. J. Num. Meth. Eng., 16 (1980) 171-184

- [34] J. Caldwell, P. Wanless and E. Cook, *A finite element approach to Burgers' equation*, Appl. Math. Modelling, 5 (1981) 189-193
- [35] P. Arminjon and Beauchamp, *A finite element method for Burgers' equation in hydrodynamics*, Int. J. Num. Meth. Eng., 12 (1978)415-428
- [36] T. Öziş, E. N. Aksan, A. Özdeş, *A finite element approach for solution of Burgers' equation*, Apply. Math. Comput., 139 (2003) 417-428
- [37] Evans and Abdullah, *The group explicit method for the solution of Burgers' equation*, Computing 32 (1984) 239-253
- [38] R. C. Mittal and P. Singhal, *Numerical solution of Burgers' equation*, Comm. Num. Meth. Eng., 9 (1993) 397-406
- [39] S. Kutluay, A. R. Bahadır, A. Özdeş, *Numerical solution of one-dimensional Burgers' equation: explicit and exact-explicit finite difference methods*, J. Comput. Appl. Math., 103 (1999) 251-261
- [40] A. R. Bahadır, *Numerical solutions for one-dimensional Burgers' equation using a fully implicit finite difference method*, Int. J. Appl. Math., 1 (1999) 897-909
- [41] T. Öziş, A. Özdeş, *A direct variational methods to Burgers' equation*, J. Comput. Appl. Math., 71(1996) 163-175
- [42] G. W. Wei, Yun Gu, *Conjugate filter approach for solving Burgers' equation*, J. Comput. Appl. Math., 149(2002) 439-456
- [43] K. Rektorys, *Variational Methods in Mathematics, Science and Engineering*, London, (1980)
- [44] R. J. Goult, R.F. Hoskins, J. A. Milner, M.J. Pratt, *Computational Methods in Linear Algebra*, Stanley Thornes, London, (1974)
- [45] Ziya Aktaş, Hilmi Öncül, Saim Ural, *Sayısal Çözümler*, O.D.T.Ü. Matbaası, Ankara, (1984)

- [46] Gabil Amirali, Hakkı Duru, *Nümerik Analiz*, Pegem A Yayıncılık, Ankara, (2002)
- [47] R. L. Burden, J. D. Faires, *Numerical Analysis*, PWS Publishers, America, (1985)
- [48] J. N. Reedy, *Applied Functional Analysis and Variational Methods in Engineering*, McGraw-Hill Book Com. New York (1986)
- [49] K. Rektorys, *The Method of Discretization in Time and Partial Differential Equations*, D. Reidel Publishing Company, Holland, (1982)



Özgeçmiş

1975 yılında Ankara' da doğdu İlk, Orta ve Lise öğrenimini Malatya ilinde tamamladı. 1992 yılında İnönü Üniversitesi, Fen-Edebiyat Fakültesi, Matematik Bölümüne girmeye hak kazandı. 1996 yılında aynı bölümden birincilikle mezun oldu. 1996 yılında İnönü Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü' nün Matematik Anabilim dalında açmış olduğu Yüksek Lisans sınavını kazandı. 1997 yılında İnönü Üniversitesi Fen-Edebiyat Fakültesi, Matematik Bölümünün açmış olduğu Araştırma Görevliliği sınavını kazandı. 1999 yılında Doç. Dr. Ali Özdeş' in danışmanlığında "Lineerleştirilmiş Burgers Denklemi İçin Sonlu Eleman Teknikleri" isimli Yüksek Lisans tezini tamamladı. 1999 yılında İnönü Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü' nün Matematik Anabilim dalında açmış olduğu Doktora sınavını kazandı. 2000 yılında yapılan Üniversiteler Arası Dil Sınavı (ÜDS)' ni başarıyla geçti. 2001 yılında TÜBİTAK-BAYEG tarafından doktora bursu almaya hak kazandı. 2001-2002 öğretim yılı güz döneminde doktora ders aşamasını bitirdi. 2001-2002 öğretim yılı bahar döneminde yeterlilik sınavını geçti.

Sürekli Adres: İnönü Üniversitesi, Fen-Edebiyat Fakültesi,
Matematik Bölümü, naksan@inonu.edu.tr

Bu tez L^AT_EX[†] ile Linux[§] işletim sisteminde hazırlanmıştır.

[†]L^AT_EX bilimsel rapor, tez, makale hazırlama programıdır

[§]Linux İnternet üzerinden geliştirilen ve serbestçe dağıtılan bir işletim sistemidir.