

151953

T.C.
İNÖNÜ ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

151953

LORENTZ YÜZEYLERİ ÜZERİNE

Ali İhsan BORAN

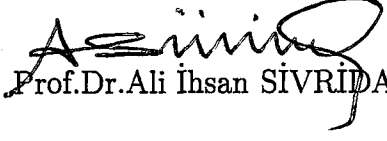
YÜKSEK LİSANS TEZİ
MATEMATİK ANABİLİM DALI

MALATYA

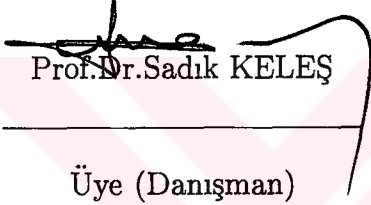
Ocak 2004

Fen Bilimleri Enstitüsü Müdürlüğü'ne,

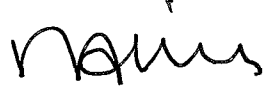
Bu çalışma, Jürimiz tarafından Matematik Anabilim Dalı'nda YÜKSEK LİSANS TEZİ olarak kabul edilmiştir.


Prof. Dr. Ali İhsan SİVRİDAĞ

Başkan


Prof. Dr. Sadık KELEŞ

Üye (Danışman)


Yrd. Doç. Dr. Bayram ŞAHİN

Üye

Onay

Yukarıdaki imzaların adı geçen öğretim üyelerine ait olduğunu onaylarım.

..11 / ..1 / ..2024


(İmza)
Doç. Dr. Ali ŞAHİN
Enstitü Müdürü

Babama ve tüm sevdiklerine ...



ÖZET

Yüksek Lisans Tezi

LORENTZ YÜZEYLERİ ÜZERİNE

Ali İhsan BORAN

İnönü Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Anabilim Dalı

71+viii sayfa

2004

Danışman: Prof. Dr. Sadık KELEŞ

Bu çalışma üç bölümden oluşmaktadır.

Birinci bölümde; bir vektör uzayı üzerinde tanımlanan simetrik bilinear formla ilgili temel kavramlar verildi. Pozitif definit metriklerle tanımlanan Riemannian manifold ve indefinit metriklerle tanımlanan Lorentzian manifoldlar için temel kavramlar tanıtıldı.

İkinci bölümde; Lorentzian metriklerin global özellikleri incelendi.

Üçüncü bölümde, ilk olarak Öklid ve Minkowski düzlemleri ele alındı. Daha sonra 3 boyutlu Öklid ve Minkowski uzaylarındaki lokal yüzeyler karşılıklı olarak incelendi. Bu inceleme sonunda bu lokal yüzeyleri oluşturan Öklidyen ve Minkowski invaryantlar (Gauss ve ortalama eğrilikler, temel formlar, ...) arasındaki ilişkileri gösteren sonuçlar verildi.

ANAHTAR KELİMELELER: Lorentzian manifold, Riemannian manifold, indefinit metrik, Öklid düzlemi, Minkowski düzlemi, lokal yüzey, Öklid-3 Uzay, Minkowski-3 Uzay

ABSTRACT

Master Thesis

ON THE LORENTZ SURFACES

Ali İhsan BORAN

İnönü University
Graduate School of Natural and Applied Sciences
Department of Mathematics

71+viii pages

2004

Supervisor: Prof. Dr. Sadık KELEŞ

This thesis consists of three chapters.

In the first chapter; the basic notions which are defined by a symmetric bilinear form on a vector space are given. The basic notions for Riemannian manifold which is defined by positive definite metrics and Lorentzian manifold which is defined by indefinite metrics are introduced.

In the second chapter; global properties of Lorentzian metrics are studied.

In the third chapter; firstly Euclidean planes and Minkowski planes are considered. Then, local surfaces on the Euclidean-3 spaces and Minkowski-3 spaces are mutually examined. The end of the examination, results indicated the relations between Euclidean and Minkowski invariant (Gauss and mean curvatures, fundamental forms, ...) which compose this local surface are given.

KEY WORDS: Lorentzian manifold, Riemannian manifold, indefinite metric, Euclidean plane, Minkowski plane, local surface, Euclidean-3 space, Minkowski-3 space

TEŞEKKÜR

Bu çalıőmanın her aőamasında öneri ve desteğini esirgemeden beni yönlendiren tez danışman hocam Sayın Prof.Dr. Sadık KELEŞ'e; çalışma boyunca karőılaőtıęım problemleri tartıőmak için bana değerli zamanımı ayırıp yardımcı olan ve bu çalıőmanın yazım aőamasında tüm imkanlarını tarafıma sunan ikinci tez danışman hocam Yrd. Doç. Dr. Recep ASLANER'e; bu çalıőmanın Latex programında yazımı için bana yardımcı olan hocalarım Arő.Grv.Dr. Bilal ALTAY'a ve Arő.Grv.Dr. Kemal ÖZDEMİR'e; ayrıca tüm hayatım boyunca olduğu gibi yüksek lisans çalıőmalarım süresince de benden yardım ve desteklerini esirgemeyen Babam'a ve Annem'e sonsuz teőekkürlerimi ve őükranlarımı sunarım.



İÇİNDEKİLER

ÖZET	i
ABSTRACT	ii
TEŞEKKÜR	iii
İÇİNDEKİLER	iv
ŞEKİLLER DİZİNİ	v
SİMGELER	vi
1 TEMEL KAVRAMLAR	1
1.1 Temel Tanımlar ve Teoremler	1
2 LORENTZİAN METRİKLERİN GLOBAL ÖZELLİKLERİ	12
2.1 Lorentz Yüzeyleri ve Kutu Yüzeyleri Arasındaki İlişki	12
2.2 Yardstickler ve Time-Orientability	15
2.3 Intrinsic (Esas) Eğrilik, Geodezik ve Pregeodezik	18
3 ÖKLİD VE MINKOWSKI 3-UZAYINDA LOKAL YÜZEYLER	20
3.1 Öklid ve Minkowski Düzlemleri	20
3.2 Öklid 3-Uzayında Lokal Yüzeyler	31
3.3 Minkowski 3-Uzayında Lokal Yüzeyler	48
KAYNAKLAR	69
ÖZGEÇMİŞ	71

ŞEKİLLER DİZİNİ

Şekil 1.1	Düzlemde timlike ve spacelike bölgeler	5
Şekil 1.2	Null Doğrultular	9
Şekil 2.1	Koordinat Komşulukları	14
Şekil 2.2	Future-directed ve past-directed koniler	16
Şekil 3.1	Minkowski Düzleminde Vektörler	23
Şekil 3.2	Minkowski Düzleminde Dik Vektörler	24
Şekil 3.3	$E^{2,1}$ Uzayında Lorentz ve Hiperbolik Birim Çemberler	25
Şekil 3.4	$E^{2,1}$ Uzayında Zaman Yönlendirmesi	26
Şekil 3.5	Öklidyen ve Lorentzian anlamda açılar	27
Şekil 3.6	Hiperbolik Açılı	28
Şekil 3.7	Öklid Uzayında Vektörel Çarpımın Geometrik İfadesi	34
Şekil 3.8	Bir Yüzey Üzerinde Noktaların Gauss Eğriliğine Göre Sınıflandırılması	41
Şekil 3.9	Vektörlerin Işık Konisine Göre Durumları	48
Şekil 3.10	Düzlemin Causal Karakterleri	49
Şekil 3.11	\mathbb{R}^3 'de İki Vektör	51
Şekil 3.12	\mathbb{R}^3 'de Minkowski ve Öklidyen Birim Normal Vektörlerin Birbirlerine Göre Durumları	58
Şekil 3.13	$E^{3,1}$ Uzayında Birim Küreler	59
Şekil 3.14	Minkowski Birim Küresi Üzerindeki Geodezikler	64

SİMGELER

β	Simetrik Bilineer Form
T	Lineer İzomorfizm
V	n-boyutlu reel vektör uzayı
\mathbb{R}	Reel Sayılar kümesi
S	C^∞ 2 manifold
S_p	S'nin p noktasındaki tanjant uzayı
$\vec{\delta}_u _p, \vec{\delta}_v _p$	S_p tanjant uzayının bazı
h_p	p noktasındaki skalar çarpım
$ A $	A matrisinin determinanı
Z_p	yönlendirilmiş doğrultu
X_p, Y_p	null doğrultular
$\mathcal{T}(\vec{t})$	\vec{t} timelike vektörünün time konisi
$\mathcal{C}(\vec{t})$	\vec{t} timelike vektörünün causal konisi
Λ	Işık koni
M	C^∞ n- manifold
\mathcal{G}	M üzerinde tanımlı metrik
$\chi(M)$	M üzerindeki vektör alanlarının uzayı
M_p	M'nin p noktasındaki tanjant uzayı
P	\mathbb{R} 'de bir aralık
γ	eğri (veya ışın veya yay)
U	p noktasının bir komşuluğu
\vec{Z}	vektör alanı
λ	S üzerinde C^∞ fonksiyon
$[h]$	h metriğinin konformal denklik sınıfı
$\mathcal{R} = \mathcal{R}(S, [h])$	Riemann Yüzey
$\mathcal{L} = (S, [h])$	Lorentz Yüzey
\mathcal{A}	C^∞ tam Atlas

$\chi, \hat{\chi}$	Koordinat Komşulukları
C^{hol}	Kompleks analitik
A^{hol}	Kompleks analitik atlas
\mathcal{A}_{max}^{hol}	Maksimal kompleks analitik atlas
C^\square	C-kutu
\mathcal{A}^\square	C-kutu atlas
$\mathcal{A}_{max}^\square$	Maksimal C-kutu atlas
$K(h)$	Intrinsic(esas) eğrilik
Γ_{ij}^k	Christoffel semboller
E^2	Öklid düzlemi
$E^{2,1}$	Minkowski düzlemi
$S^{1,1}$	Minkowski düzleminde Lorentzian birim çember
$H^{1,1}$	Minkowski düzleminde Hiperbolik birim çember
$A(\varphi)$	Öklid düzleminde dönme matrisi
$A(\phi)$	Minkowski düzleminde dönme matrisi
F	İzometri
$GL(3, R)$	Genel lineer grup
$O(n)$	Ortogonal grup
$O_1(n)$	Pseudo-ortogonal grup
Z	Patch
E^3	Öklid uzay
$E^{3,1}$	Minkowski uzay
S	Weingarten dönüşümü
I_ϵ	Öklid 1. temel form
I	Minkowski 1. temel form
II_ϵ	Öklid 2. temel form
II	Minkowski 2. temel form
III_ϵ	Öklid 3. temel form
III	Minkowski 3. temel form
n_ϵ	Öklid birim normal vektör alanı
n	Minkowski birim normal vektör alanı

K_ϵ	Öklid Gauss Eğriliği
K	Minkowski Gauss Eğriliği
H_ϵ	Öklid Ortalama eğriliği
H	Minkowski Ortalama eğriliği
k_1, k_2	Asli eğrilikler
S'	S yüzeyinin umbilik olmayan kısmı
H'	Skew eğrilik
I', II', III'	Skew temel formlar
S^2	Öklid uzayında birim küre
$S^{2,1}$	Minkowski uzayında Lorentz birim küre
H_+^2, H_-^2	Minkowski uzayında Hiperbolik birim küre



BÖLÜM 1

TEMEL KAVRAMLAR

1.1 Temel Tanımlar ve Teoremler

Tanım 1.1.1. V , n boyutlu bir reel vektör uzayı olmak üzere $\beta : V \times V \rightarrow \mathbb{R}$ bilineer fonksiyonu, $\forall \vec{v}, \vec{w} \in V$ için $\beta(\vec{v}, \vec{w}) = \beta(\vec{w}, \vec{v})$ özelliğini sağlıyorsa β 'ya V üzerinde bir simetrik bilineer form denir. [6]

Tanım 1.1.2. V üzerinde bir simetrik bilineer form β olsun. Bu durumda,

- (i) $\forall \vec{w} \in V, \vec{w} \neq \vec{0}$ için $\beta(\vec{w}, \vec{w}) > 0$ ise β 'ya pozitif definit,
- (ii) $\forall \vec{w} \in V, \vec{w} \neq \vec{0}$ için $\beta(\vec{w}, \vec{w}) < 0$ ise β 'ya negatif definit,
- (iii) $\forall \vec{z} \in V, \beta(\vec{w}, \vec{z}) = 0$ olması $\vec{w} = \vec{0}$ olmasına gerektiriyorsa, β 'ya non-dejenere,
- (iv) $\beta(\vec{w}, \vec{w}) > 0$ ve $\beta(\vec{z}, \vec{z}) < 0$ olacak şekilde $\vec{w}, \vec{z} \in V$ mevcut ise β 'ya indefinitir denir. [1]

Tanım 1.1.3. Bir non-dejenere β bilineer formuna skalar çarpım denir. [1]

Tanım 1.1.4. V üzerinde bir indefinit β skalar çarpımı için,

- (i) $\beta(\vec{w}, \vec{w}) > 0$ veya $\vec{w} = \vec{0}$ ise \vec{w} 'ya spacelike,
- (ii) $\vec{w} \neq \vec{0}$ iken $\beta(\vec{w}, \vec{w}) < 0$ ise \vec{w} 'ya timelike,
- (iii) $\vec{w} \neq \vec{0}$ iken $\beta(\vec{w}, \vec{w}) = 0$ ise \vec{w} 'ya null vektör denir. [1]

Yukarıdaki bu özelliklere bir \vec{w} vektörünün causal karakterleri denir. [1]

Tanım 1.1.5. $T : V \rightarrow V$ bir lineer dönüşüm ve β, V üzerinde bir skalar çarpım olmak üzere $\forall \vec{w}, \vec{z} \in V$ için $\beta(T\vec{w}, T\vec{z}) = \beta(\vec{w}, \vec{z})$ ise T 'ye lineer izomorfizm adı verilir. [1]

V üzerinde bir β skalar çarpımı için; $\vec{w} \in V$ olmak üzere $\|\vec{w}\| = |\beta(\vec{w}, \vec{w})|^{1/2}$ sayısına \vec{w} 'nın uzunluğu(boyu) adı verilir. Uzunluğu bir birim olan vektöre birim

vektör denir. $\vec{w}, \vec{z} \in V$ için $\beta(\vec{w}, \vec{z}) = 0$ ise bu iki vektöre ortogonaldır denir. $\vec{0}$ vektörü tüm vektörlere ortogonaldır. Eğer β indefinite ise herhangi bir null vektörü kendisine ortogonaldır. V 'deki lineer bağımsız vektörlerin sayısına V 'nin boyutu adı verilir. Bu vektörlerin kümesi V için bir baz oluşturur. Sonlu boyutlu her vektör uzayı için bir baz mevcuttur ve bu baz ortonormal hale getirilebilir. [1]

Teorem 1.1.1. *V üzerinde sıfırdan farklı iki \vec{v} ve \vec{w} null vektörleri birbirine paralel ise (yani bir $k \in \mathbb{R}$ için $\vec{v} = k\vec{w}$ ise) bu iki null vektör ortogonaldır. [16]*

V üzerinde pozitif definit bir skalar çarpıma iç çarpım adı verilir. Bir β iç çarpımı için,

$$|\beta(\vec{w}, \vec{z})| \leq \|\vec{w}\| \|\vec{z}\|$$

Schwarz eşitsizliği geçerlidir. Bu eşitsizlik yardımıyla iki vektör arasındaki açı tanımlanabilir.

Tanım 1.1.6. *$\vec{w} \neq \vec{0}$ ve $\vec{z} \neq \vec{0} \in V$ vektörleri arasındaki açının ölçüsü,*

$$\cos \theta = \frac{\beta(\vec{w}, \vec{z})}{\|\vec{w}\| \|\vec{z}\|} \quad (0 \leq \theta \leq \pi)$$

ifadesinden hesaplanan θ reel sayıdır. [1]

Eğer V 2-boyutlu ve yönlendirilmiş bir düzlem ise θ açısı için \vec{w} 'dan \vec{z} 'ye bir yönden bahsedilebilir. $(-\pi \leq \theta \leq \pi)$

Tanım 1.1.7. *V üzerinde iki indefinit $\beta, \hat{\beta}$ skalar çarpım ve $c > 0$ bir sabit olmak üzere $\hat{\beta} = c\beta$ ise V 'deki her vektöre karşılık gelen causal karakter β ve $\hat{\beta}$ için aynıdır. [1]*

Bu çalışma boyunca klasik diferansiyel geometriden iyi bilinen paracompact, yönlendirilmiş, irtibatlı bir C^∞ 2-manifoldunu S ile gösterilecektir.

Böylece S üzerindeki $u = \text{sabit}$ ve $v = \text{sabit}$ eğrilerinin herhangi bir p noktasındaki C^∞ teğet vektörleri, S_p tanjant uzayının $\{\frac{\partial}{\partial u}|_p, \frac{\partial}{\partial v}|_p\} = \{\vec{\partial}_u|_p, \vec{\partial}_v|_p\}$ bazını; dolayısıyla $\{\vec{\partial}_u, \vec{\partial}_v\}$ teğet vektör alanları da S 'nin bir bazını oluşturur. S_p üzerindeki yönlendirmeye göre verilen bir sıralı $\{\vec{w}, \vec{z}\}$ bazı ile S_p 'nin $\{\vec{\partial}_u|_p, \vec{\partial}_v|_p\}$ bazı arasındaki dönüşüm;

$$\left. \begin{aligned} \vec{w} &= \alpha \vec{\partial}_u|_p + \beta \vec{\partial}_v|_p \\ \vec{z} &= \gamma \vec{\partial}_u|_p + \delta \vec{\partial}_v|_p \end{aligned} \right\}$$

ise,

$$\begin{bmatrix} \vec{w} \\ \vec{z} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \vec{\partial}_u|_p \\ \vec{\partial}_v|_p \end{bmatrix}$$

dir ve $\alpha\delta - \beta\gamma > 0$ iken bu iki baz aynı yönlüdür. Böylece S_p , $\{\vec{w}, \vec{z}\}$ bazı yardımıyla \mathbb{R}^2 ile özdeşleştirilebilir. Yani, $\vec{t} = \xi\vec{w} + \eta\vec{z} \in S_p$ vektörüne (ξ, η) gibi bakılabilir. S_p üzerindeki bir h_p skalar çarpımı, S_p 'nin $\{\vec{w}, \vec{z}\}$ bazı yardımıyla $a = h_p(\vec{w}, \vec{w})$, $b = h_p(\vec{w}, \vec{z})$, $c = h_p(\vec{z}, \vec{z})$ değerlerine bağlı olarak tanımlanabilir. Çünkü herhangi iki $\vec{t}, \vec{s} \in S_p$ için $\vec{t} = \gamma\vec{w} + \delta\vec{z}$ ve $\vec{s} = \alpha\vec{w} + \beta\vec{z}$ ise,

$$h_p(\vec{s}, \vec{t}) = \begin{bmatrix} \alpha & \beta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & b \\ b & c \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \gamma \\ \delta \end{bmatrix}$$

yazılır. $\vec{s} = \vec{t}$ için $h_p(\vec{t}) = h_p(\vec{t}, \vec{t})$ ile verilen $h_p : S_p \rightarrow \mathbb{R}$ non-dejenere, quadratik formunu gösterir. Böylece $a = h_p(\vec{w})$, $b = (h_p(\vec{w} + \vec{z}) - h_p(\vec{w} - \vec{z}))/4$ ve $c = h_p(\vec{z})$ sayıları ile S_p tanjant uzayındaki herhangi bir $\vec{t} = \alpha\vec{w} + \beta\vec{z}$ vektörü için,

$$h_p(\vec{t}) = a\alpha^2 + 2b\alpha\beta + c\beta^2$$

elde edilir. [1]

Lemma 1.1.1. S_p üzerinde, S_p 'nin $\{\vec{w}, \vec{z}\}$ bazı yardımıyla $a = h_p(\vec{w}, \vec{w})$, $b = h_p(\vec{w}, \vec{z})$, $c = h_p(\vec{z}, \vec{z})$ değerlerine bağlı olarak tanımlanan h_p skalar çarpımı;

- (i) $a > 0$ olmak üzere $ac - b^2 > 0$ ise pozitif definit,
- (ii) $a < 0$ olmak üzere $ac - b^2 > 0$ ise negatif definit,
- (iii) $ac - b^2 < 0$ ise indefinit

dir. [1]

Bir yönlendirilmiş Z_p doğrultusu; S_p 'nin bir boyutlu lineer alt uzayı olup, yönlendirilmiş doğrultu olarak ele alınır.

Tanım 1.1.8. S_p üzerinde bir h_p indefinit skalar çarpımı verilmiş olsun. Bir Z_p doğrultusuna;

(i) $\forall \vec{t} \in Z_p$ spacelike ise Z_p 'ye spacelike,

(ii) $\forall \vec{t} \neq 0 \in Z_p$ timelike ise Z_p 'ye timelike,

(iii) $\forall \vec{t} \neq 0 \in Z_p$ null ise Z_p 'ye null doğrultu

denir. [1]

Bu tanımdaki spacelike, timelike ve null sınıflandırılmasına Z_p 'nin causal karakteri denir. [1]

Teorem 1.1.2. S_p üzerindeki tüm null vektörler, S_p üzerinde iki farklı null doğrultu üzerinde uzanır. [1]

İspat. Herhangi bir $\vec{t} = \alpha\vec{w} + \beta\vec{z} \in S_p$ null vektörü için $\alpha, \beta \neq 0$ olmak üzere,

$$h_p(\vec{t}) = a\alpha^2 + 2b\alpha\beta + c\beta^2 = 0$$

elde edilir. Bu eşitlikte β bilinmeyen olarak alınırsa, bu quadratik formun çözümünden,

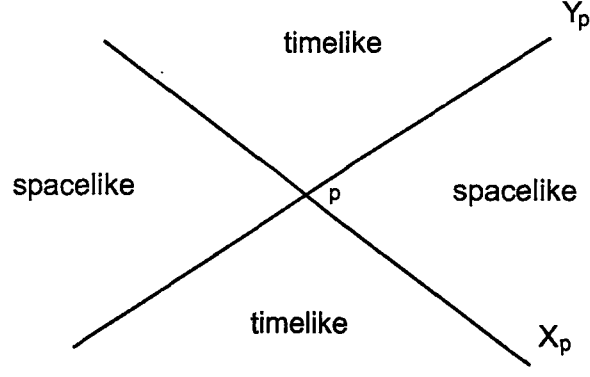
$$\beta = \frac{-b\alpha \mp \alpha(b^2 - ac)^{1/2}}{c}$$

ya da,

$$\frac{\beta}{\alpha} = \frac{-b \mp (b^2 - ac)^{1/2}}{c}$$

sonucu elde edilir. h_p indefinit olduğundan, lemma 1.1.1'den $b^2 - ac > 0$ olup β/α 'nın iki farklı değeri vardır. Bu değerler \vec{t} null vektörünün eğimlerini verir. Bu da gösterir ki; S_p üzerindeki herhangi bir null vektörü, iki farklı null doğrultu üzerinde bulunur. [1] □

Bu null doğrultular sırasıyla X_p ve Y_p ile gösterilirse; p noktası etrafında pozitif yönde yapılan yeteri miktarda bir dönme hareketi ile biri spacelike, diğeri timelike olur. X_p ve Y_p null doğrutuları S_p düzlemini dört ayrık, açık alt bölgeye ayırır. Bu bölgeler karşılıklı olarak spacelike (veya timelike) bölgelerdir (Şekil 1.1).



Şekil 1.1. S_p düzleminin timelike ve spacelike bölgeleri

Tanım 1.1.9. β , bir V vektör uzayı üzerinde tanımlı indefinit skalar çarpım ve $\vec{t} \in V$ herhangi bir timelike vektör için,

$$\mathcal{T}(\vec{t}) = \{\vec{v} \in V \mid \beta(\vec{v}, \vec{t}) < 0 \text{ ve } \vec{v} \text{ timelike vektör}\}$$

kümesine \vec{t} 'nin time-konisi denir. [1]

V üzerindeki bir \vec{t} timelike vektör için ; $\mathcal{T}(\vec{t})$ time-konisi ile $\mathcal{T}(-\vec{t})$ time-konisi sınırları üzerindeki tüm null vektörlerin birleşimi $\mathcal{C}(\vec{t})$ causal koniyi oluşturur. [1]

Tanım 1.1.10. β , bir V vektör uzayı üzerinde tanımlı indefinit skalar çarpım olsun.

$$\Lambda = \{\vec{n} \in V \mid \beta(\vec{n}, \vec{n}) = 0\}$$

kümesine β için null-koni (veya ışık koni) denir. [6]

Böylece şu sonuca sahip oluruz:

Sonuç 1.1.1. Herhangi bir p noktasındaki causal-koni o noktadaki time-koni ile null-koninin birleşimidir.

V vektör uzayı S yüzeyinin bir p noktasındaki S_p düzlemi olarak alınır; Şekil 1.1' den de görüleceği gibi $\mathcal{T}(\vec{t})$ time-koni \vec{t} timelike vektörünü içeren bir kesiti, Λ ışık koni ise p noktasındaki X_p, Y_p null doğrultularından oluşur.

Bir C^∞ n -manifold M üzerinde tanımlı bir \mathcal{G} metriği verildiğinde $\forall \vec{W}, \vec{Z} \in \chi(M)$ vektör alanları için, $\forall p \in M$ 'de;

$$\mathcal{G}(\vec{W}, \vec{Z})(p) = \mathcal{G}_p(\vec{W}_p, \vec{Z}_p)$$

eşitliği ile M_p tanjant uzayında bir $\mathcal{G}_p = \beta$ skalar çarpım tanımlanmış olur. [1]

Tanım 1.1.11. Bir C^∞ n -manifold M üzerinde tanımlı bir \mathcal{G} metriği verilmiş olsun. Buna göre;

- (i) $\forall p \in M$ için \mathcal{G}_p pozitif definit ise \mathcal{G} 'ye pozitif definit,
- (ii) $\forall p \in M$ için \mathcal{G}_p negatif definit ise \mathcal{G} 'ye negatif definit,
- (iii) $\forall p \in M$ için \mathcal{G}_p indefinit ise \mathcal{G} 'ye indefinit

denir. [1]

Tanım 1.1.12. Bir C^∞ n -manifold M üzerinde tanımlı bir \mathcal{G} metriği verilmiş olsun. Buna göre;

- (i) \mathcal{G} pozitif definit ise \mathcal{G} 'ye Riemannian,
- (ii) $\forall p \in M$ noktasındaki M_p tanjant uzayının her ortonormal bazı tamamen bir timelike vektör içeriyorsa \mathcal{G} 'ye Lorentzian

denir. [1]

Tanım 1.1.13. M bir C^∞ n -manifold olsun. Buna göre; M üzerinde,

- (i) bir \mathcal{G} Riemannian metriği tanımlı ise M 'ye Riemannian manifold,
- (ii) bir \mathcal{G} Lorentzian metriği tanımlı ise M 'ye Lorentzian manifold,
- (iii) herhangi bir \mathcal{G} metriği tanımlı ise M 'ye semi-Riemannian manifold

denir ve (M, \mathcal{G}) ile gösterilir. [1]

Tanım 1.1.14. Bir M manifoldu üzerinde \mathcal{G} ve $\hat{\mathcal{G}}$ iki metrik olsun. M üzerinde bir C^∞ , $\lambda > 0$ fonksiyonu için $\mathcal{G} = \lambda \hat{\mathcal{G}}$ ise bu iki metriğe konformal olarak denktir denir. [1]

Bir M manifoldu yerine bir S yüzeyi alınır; bu yüzey üzerinde tanımlanan bir h metriği de S_p düzlemi üzerinde bir h_p skalar çarpımını belirtir. S üzerindeki \vec{W}, \vec{Z} C^∞ vektör alanları için $h(\vec{W}, \vec{Z})(p) = h_p(\vec{W}_p, \vec{Z}_p)$ eşitliği S üzerindeki her p noktasında bir non-dejenere quadratik form tanımlar. S üzerindeki bu h metriği, U tanım kümesinin u ve v koordinatlarına göre;

$$h = Adu^2 + 2Bdudv + Cdv^2 \quad (1.1.1)$$

şeklinde yazılır. Burada $A = h(\vec{\partial}_u, \vec{\partial}_u)$, $B = h(\vec{\partial}_u, \vec{\partial}_v)$ ve $C = h(\vec{\partial}_v, \vec{\partial}_v)$ dir. $AC - B^2$ 'nin işareti S üzerinde sabittir. [1]

U üzerindeki herhangi iki d_u ve d_v C^∞ fonksiyonları ile verilen $d_u\vec{\partial}_u + d_v\vec{\partial}_v$ vektör alanı için h 'nın değeri (1.1.1) eşitliği ile bellidir. h , S üzerinde ya pozitif tanımlı, ya negatif tanımlı veya indefinittir. [1]

Tanım 1.1.15. h , S üzerinde bir indefinit metrik olsun. S üzerindeki bir \vec{Z} vektör alanı için;

- (i) $\forall p \in S$ için \vec{Z}_p spacelike ise \vec{Z} 'ye spacelike vektör alanı,
- (ii) $\forall p \in S$ için \vec{Z}_p timelike ise \vec{Z} 'ye timelike vektör alanı,
- (iii) $\forall p \in S$ için \vec{Z}_p null ise \vec{Z} 'ye null vektör alanı

denir. [1]

Tanım 1.1.16. S yüzeyi üzerindeki bir h metriği için $\vec{\partial}_u$ ve $\vec{\partial}_v$ vektör alanları null ise S yüzeyi üzerindeki u, v koordinatlarına null koordinatlar denir. [1]

Buna göre S üzerindeki bir h metriği, u, v null koordinatlarının U tanım kümesi üzerinde $h = 2Bdudv$ şeklindedir.

Tanım 1.1.17. M bir C^∞ n -manifold ve $P \subset \mathbb{R}$ bir aralık olsun. Lokal olarak birebir süreklili bir $\gamma : P \rightarrow M$ dönüşümüne,

- (i) P açık bir aralık ise eğri,
- (ii) P iki taraftan sınırlı ve kapalı bir aralık ise yay,
- (iii) P yarı kapalı bir aralık ise ışın

denir. [1]

$k = 1, 2, \dots; \infty$ için her C^k , $\gamma : P \rightarrow M$ eğrisi regüler, yani $\forall t \in P$ için $\gamma'(t) \neq \vec{0}$ olsun. Bir $\gamma : P \rightarrow M$ yayı veya ışınının C^k sınıfında olması için gerek ve yeter şart γ 'nın $P \subset \hat{P}$, $\hat{\gamma} : \hat{P} \rightarrow M$ C^k eğrisinin P 'ye kısıtlanması olmasıdır. Eğer P sonlu çoklukta kapalı alt aralıklara parçalanabilir ve γ yayı bunların herbiri üzerinde C^k sınıfından ise γ yayına parçalı C^k sınıfındadır denir. $\gamma(a) = \gamma(b)$ olması durumunda $\gamma : [a, b] \rightarrow M$ yayına kapalıdır, $[a, b]$ üzerinde birebir ise basit yay adı verilir. γ 'nın bir $\epsilon > 0$ için $\hat{\gamma} : (a - \epsilon, b + \epsilon) \rightarrow M$ 'ya C^k genişletmesi yoksa $\gamma : [a, b] \rightarrow M$ yayına C^k kapalı yayı denilmez. [1]

Tanım 1.1.18. (M, \mathcal{G}) bir C^∞ Lorentzian manifold olsun. S üzerindeki bir h indefinit metriğine göre $k = 1, 2, \dots; \infty$ için bir C^k $\gamma : P \rightarrow (M, \mathcal{G})$ eğrisine (veya yayına veya ışınına); $\forall t \in P$ için $\gamma'(t) = \gamma_*(\vec{\partial}_t)$ teğet vektörü,

- (i) spacelike ise spacelike eğri (veya yay veya ışın),
- (ii) timelike ise timelike eğri (veya yay veya ışın),
- (iii) null ise null eğri (veya yay veya ışın)

denir. [1]

Tanım 1.1.19. S bir yüzey ve $\forall p \in S$ için Z_p, S_p üzerinde yönlendirilmiş doğrultu olsun. $\forall p \in S$ için S_p 'deki yönlendirilmiş bir Z_p doğrultusunu veren Z 'ye S üzerinde yönlendirilmiş doğrultu alanı denir. [1]

Tanım 1.1.20. Z, S üzerinde yönlendirilmiş bir doğrultu alanı olsun. Bu durumda Z 'ye $\forall p \in S$ için Z_p ,

- (i) spacelike ise yönlendirilmiş spacelike doğrultu alanı,
- (ii) timelike ise yönlendirilmiş timelike doğrultu alanı,
- (iii) null ise yönlendirilmiş null doğrultu alanı

denir. [1]

S yüzeyindeki herhangi bir h metriği, S üzerinde iki farklı C^∞ null doğrultu alanı tanımlar. Burada S 'nin yüzey tanımı gereği yönlendirilmiş olması yeterlidir. [1]

Lemma 1.1.2. h bir S yüzeyi üzerinde bir indefinit metrik olsun. h metriği S üzerinde farklı C^∞ X, Y null doğrultu alanlarının bir doğal sıralı çiftini belirtir. [1]

İspat. X ve Y, S üzerinde null doğrultu alanları olsun. X ve Y, S üzerindeki herhangi bir p noktasında X_p, Y_p null doğrultu sıralı çiftine karşılık gelir. Gösterilecek ki X ve $Y C^\infty$ 'dur. S üzerindeki herhangi bir p noktasının bir U komşuluğunda $\vec{\partial}_u$ spacelike ve $\vec{\partial}_v$ timelike olacak şekilde u, v koordinatları kullanılsın. Bu durumda h indefinit metrik, $A = h(\vec{\partial}_u, \vec{\partial}_u) > 0$ ve $C = h(\vec{\partial}_v, \vec{\partial}_v) < 0$ olmak üzere U üzerinde;

$$h = Adu^2 + 2Bdudv + Cdv^2$$

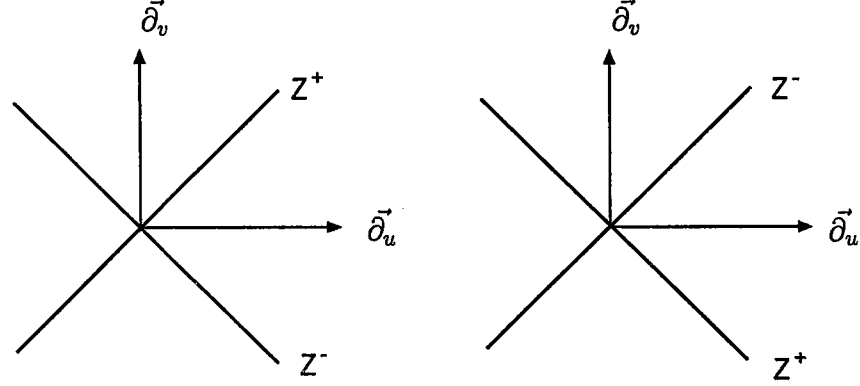
eşitliği ile bellidir. U üzerindeki h için null doğrultular, eğimleri

$$\frac{dv}{du} = \frac{-B \pm (B^2 - AC)^{1/2}}{C} \quad (1.1.2)$$

olan $du\vec{\partial}_u + dv\vec{\partial}_v$ vektörleri içerir. $du \equiv 1$ alınırsa (1.1.2)'de artı (veya eksi) işaret kullanarak elde edilen dv 'ler ile U 'daki $\vec{\partial}_u + dv\vec{\partial}_v$ C^∞ vektör alanları \vec{Z}^+ , (veya \vec{Z}^-)

olarak alınsın. $|B| < (B^2 - AC)^{1/2}$ ve $dv \neq 0$ olduğundan \vec{Z}^+ ve \vec{Z}^- zıt işaretlere sahiptir.

Böylece U 'daki \vec{Z}^+ ve \vec{Z}^- tarafından belirtilen Z^+ ve Z^- doğrultu alanları Şekil 1.2'deki gibidir. İlk durumda $Z^+ = X$ ve $Z^- = Y$, ikinci durumda $Z^- = X$ ve $Z^+ = Y$ 'dir. Her iki durumda da S yüzeyinin herhangi bir noktasının herhangi bir komşuluğunda X ve Y boyunca C^∞ vektör alanları bulunur. [1] \square



Şekil 1.2.

Bundan sonra; X ve Y sembolleri ile S üzerindeki bir h indefinit metriğin sıralı null doğrultu çifti ifade edilecektir.

Tanım 1.1.21. S bir yüzey ve h ile \hat{h} , S üzerinde birer metrik olsun. S üzerinde bir $C^\infty \lambda > 0$ fonksiyonu için $h = \lambda \hat{h}$ ise h ve \hat{h} metriklerine konformal olarak denktir denir ve $h \sim \hat{h}$ ile gösterilir. [1]

Lemma 1.1.3. S üzerinde h ve \hat{h} metrikleri konformal olarak denk olsun. Buna göre;

- (i) h Riemannian metrik ise \hat{h} 'ya Riemannian metrik,
- (ii) h Lorentzian metrik ise \hat{h} 'ya Lorentzian metrik

denir. [1]

h ve \hat{h} , S üzerinde birer Riemannian metrik olsun. $\forall p \in S$ için S_p tanjant uzayı üzerinde h tarafından belirtilen yönlendirilmiş açı ölçüsü, \hat{h} tarafından belirtilen yönlendirilmiş açı ölçüsüyle aynı ise h ve \hat{h} metrikleri konformal olarak denktir. [1]

S üzerinde h ve \hat{h} Lorentzian metrikleri için; S 'ye teğet herhangi bir \bar{z} vektörünün h ile ifade edilen causal karakteri, \hat{h} için de aynı ise h ve \hat{h} metrikleri konformal olarak denktir. [1]

S üzerinde bir h metriğinin konformal denklik sınıfı $[h]$ ile gösterilir. Yani;

$$[h] = \{ \hat{h} \mid h \sim \hat{h} \text{ ve } \hat{h}, S \text{ üzerinde bir metrik} \}$$

dır.

Tanım 1.1.22. S yüzeyi üzerinde bir h Riemannian metriği verilsin. x, y 'nin tanım kümesi üzerinde h metriği $h \sim dx^2 + dy^2$ şeklinde tanımlı ise, S üzerinde h tarafından belirtilen x, y koordinatlarına x, y isothermal (veya h -isothermal) koordinatlar denir. [1]

S yüzeyindeki açık kümeler üzerinde tanımlı x, y ve \hat{x}, \hat{y} ; h - isothermal koordinatları arasındaki ilişkiyi gösteren $x = x(\hat{x}, \hat{y})$ ve $y = y(\hat{x}, \hat{y})$ fonksiyonları $\hat{x}_x = \hat{y}_y$ ve $\hat{x}_y = -\hat{y}_x$ Cauchy-Riemann şartlarını sağlar. Böylece S üzerindeki tüm h - isothermal koordinatlarının koordinat komşulukları S üzerinde bir kompleks analitik atlas belirtir. S yüzeyi üzerinde h Riemannian metriği ile belirtilen \mathcal{R} Riemannian yüzeyi aynı zamanda bir 1-komplex boyutlu manifolddur. Üstelik S üzerinde tanımlı her 1-komplex boyutlu bir manifold, S üzerinde bir h Riemannian metriği için bir \mathcal{R} Riemannian yüzeyidir. S yüzeyi üzerinde bir h Riemannian metriğine konformal olarak denk tüm metrikler aynı isothermal koordinatları belirttiğinden, S üzerindeki Riemann yüzeyi $\mathcal{R} = \mathcal{R}(S, [h])$ şeklinde gösterilir. S 'nin tüm özelliklerini ve $[h]$ 'daki tüm metrikler için ortak olan özellikler \mathcal{R} 'ye taşınır. Yani; S basit irtibatlı ise \mathcal{R} basit irtibatlı, h için isothermal koordinatlar \mathcal{R} üzerinde isothermal koordinatlardır vs. \mathcal{R} üzerindeki her bir p noktasında \mathcal{R} 'ye teğet \mathcal{R}_p uzayı S_p ile özdeş tutulur. [1]

Bir Lorentz yüzeyi, bir Riemann yüzeyine benzer olarak bir indefinit metriği ile tanımlanır. S yüzeyi üzerindeki bir h Lorentzian metriği tarafından tanımlı $\mathcal{L} = (S, [h])$ sıralı çiftine Lorentz yüzeyi denir. Riemann yüzeyinde olduğu gibi S 'nin tüm özellikleri ve $[h]$ 'daki tüm metrikler için ortak olan özellikler \mathcal{L} 'ye taşınır. Yani; S basit irtibatlı ise \mathcal{L} basit irtibatlı, h için null koordinatlar \mathcal{L} üzerinde

null koordinatlarıdır vs. \mathcal{L} üzerindeki her bir p noktasında \mathcal{L} 'ye teğet \mathcal{L}_p uzayı S_p ile özdeş tutulur. \mathcal{L}_p 'deki \vec{z} vektörünün causal karakteri, h (veya herhangi bir $\hat{h} \sim h$) tarafından belirtilen causal karakter olduğundan; $\mathcal{L} = (S, [h])$ Lorentz yüzeyi üzerinde spacelike, timelike, null veya causal eğriler incelenebilir. \mathcal{L} üzerinde $h = 2Bdx dy$ ile belirtilen uygun null koordinatlar tanımlıdır. [1]

Tanım 1.1.23. U, \mathbb{R}^2 'nin açık alt kümesi olsun. Dif.bilir bir $x : U \rightarrow \mathbb{R}^n$ dönüşümüne bir Patch (veya lokal yüzey) denir. [19]

Tanım 1.1.24. U, \mathbb{R}^2 'nin açık alt kümesi ve $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ dif.bilir bir fonksiyon olsun.

$$x(u, v) = (u, v, f(u, v))$$

formundaki bir patch'a Monge patch denir. [19]

Bu bölümde son olarak daha sonra kullanacağımız Egregium Teoremi'ni verelim.

Teorem 1.1.3. (Egregium Teoremi): E^n , n -boyutlu öklid uzayının $(n - 1)$ -alt manifoldunun Gauss anlamındaki eğrilik operatörü birinci mertebeden bir diferansiyel formdur. [12]

BÖLÜM 2

LORENTZIAN METRİKLERİN GLOBAL ÖZELLİKLERİ

2.1 Lorentz Yüzeyleri ve Kutu Yüzeyleri Arasındaki İlişki

Lorentz ve Riemann yüzeyler arasındaki benzerliklerden bahsetmek için S yüzeyi üzerindeki, bir 1-kompleks boyutlu manifold kullanılır.

Tanım 2.1.1. $z = x + iy$ ve $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ fonksiyonu z_0 'ı ihtiva eden bir G bölgesi üzerinde tanımlı olsun. Eğer $f(z)$ Cauch-Riemann şartlarını sağlıyorsa ve z_0 'da birinci kısmi türevleri sürekli ise bu taktirde $f'(z_0)$ mevcuttur ve

$$f'(z_0) = \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}$$

şeklinde gösterilir. Bu f fonksiyonuna kompleks diferansiyellenebilir (veya kompleks analitik veya kompleks holomorfik) fonksiyon denir. [20]

S yüzeyini bir C^∞ 2-manifold içine götüren; tam, C^∞ yönlendirilmiş atlas \mathcal{A} olsun. $U \cap \hat{U} \neq \emptyset$ olmak üzere \mathcal{A} 'daki $\chi : U \rightarrow \mathbb{R}^2$ ve $\hat{\chi} : \hat{U} \rightarrow \mathbb{R}^2$ koordinat komşulukları kompleks analitik olarak bağlantılıdır (veya C^{hol} bağlantılıdır) $\iff \hat{\chi} \circ \chi^{-1} : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$, $\chi(U \cap \hat{U})$ üzerinde kompleks analitiktir. Benzer şekilde $\chi \circ \hat{\chi}^{-1}$ de $\hat{\chi}(U \cap \hat{U})$ üzerinde kompleks analitiktir. $U \cap \hat{U} = \emptyset$ olduğu zaman χ ve $\hat{\chi}$ daima C^{hol} bağlantılıdır. [1]

\mathcal{A} atlasının, içinde herhangi iki koordinat komşuluğunun C^{hol} bağlantılı olduğu alt atlasına S üzerinde bir kompleks analitik atlas denir ve \mathcal{A}^{hol} ile gösterilir. S üzerinde bir kompleks analitik atlas daha büyük kompleks analitik atlas tarafından içerilmiyorsa maksimaldir denir ve \mathcal{A}^{hol}_{max} ile gösterilir. [1]

\mathcal{A}^{hol} daki her koordinat komşuluğuna C^{hol} bağlantılı olan \mathcal{A} 'daki bütün koordinat komşuluklarının birleşimi S üzerinde bir tek maksimal atlas belirtir. S üzerinde bir

1-kompleks boyutlu manifold bir (S, \mathcal{A}^{hol}) sıralı ikilidir; burada \mathcal{A}^{hol} , S üzerinde bir maksimal C^{hol} atlasıdır. [1]

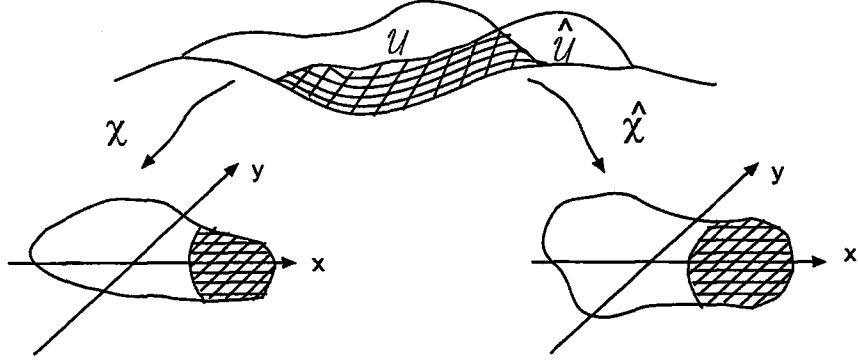
S üzerinde bir maksimal C^{hol} atlas örneği; S üzerindeki bir sabit g Riemannian metriği için g -isothermal koordinatlar tarafından üretilen \mathcal{A} 'daki tüm koordinat komşulukların \mathcal{A}_g^{hol} kümesidir. Böylece $g \sim \tilde{g}$ ise $\mathcal{A}_g^{hol} = \mathcal{A}_{\tilde{g}}^{hol}$ olduğu söylenir. $R = R(S, [g]) = (S, \mathcal{A}_g^{hol})$ yazılıp, R Riemann yüzeyi 1-kompleks boyutlu (S, \mathcal{A}_g^{hol}) manifoldu ile özdeşleştirilir. Buradan da her 1-kompleks boyutlu (S, \mathcal{A}_g^{hol}) manifoldu, S 'deki bir g Riemannian metriği için bir (S, \mathcal{A}_g^{hol}) Riemann yüzeyi olduğu sonucuna ulaşılır. [1]

S üzerindeki Riemann yüzeyleriyle ilgili \mathcal{A} 'nın C^{hol} alt atlasları kavramı, Lorentz yüzeylerinde \mathcal{A} 'nın C^\square alt atlasları kavramı şeklindedir. $U \cap \hat{U} \neq \emptyset$ olmak üzere \mathcal{A} 'daki $\chi : U \rightarrow \mathbb{R}^2$ ve $\hat{\chi} : \hat{U} \rightarrow \mathbb{R}^2$ koordinat komşulukları C^\square (C-kutu) bağlantılıdır $\iff (x, y)$ 'yi (\hat{x}, \hat{y}) 'ya götüren $\hat{\chi} \circ \chi^{-1}$ dönüşümü, $\chi(U \cap \hat{U})$ 'nin herhangi bir noktasının bir komşuluğunda $f'g' > 0$ olacak şekilde $\hat{x} = f(x)$ ve $\hat{y} = g(y)$ fonksiyonları (veya (\hat{x}, \hat{y}) 'yi (x, y) 'ye götüren $\chi \circ \hat{\chi}^{-1}$ dönüşümü, $\hat{\chi}(U \cap \hat{U})$ 'nin herhangi bir noktasının bir komşuluğunda $\hat{f}'\hat{g}' > 0$ olacak şekilde $x = \hat{f}(\hat{x})$ ve $y = \hat{g}(\hat{y})$ fonksiyonları) ile verilir. $U \cap \hat{U} = \emptyset$ olduğu zaman χ ve $\hat{\chi}$ daima C^\square -bağlantılıdır. C^\square -bağlantılı koordinat komşulukların bir esas özelliğini tanımlamak için; $-\infty \leq a < b \leq \infty$ ve $-\infty \leq c < d \leq \infty$ olmak üzere \mathbb{R}^2 'de $(a, b) \times (c, d)$ grid kutu kavramı ortaya konulur. a, b, c ve d sonlu ise $(a, b) \times (c, d)$ grid kutusu sonludur. C^\square -bağlantılı χ ve $\hat{\chi}$ koordinat komşulukları için $\hat{\chi} \circ \chi^{-1}$ (veya $\chi \circ \hat{\chi}^{-1}$) dönüşümü; $\chi(U \cap \hat{U})$ (veya $\hat{\chi}(U \cap \hat{U})$)'daki herhangi bir grid kutusunu, $\hat{\chi}(U \cap \hat{U})$ (veya $\chi(U \cap \hat{U})$)'daki grid kutusu üzerine dönüştürür. Bununla birlikte $\hat{\chi} \circ \chi^{-1}$ ve $\chi \circ \hat{\chi}^{-1}$ dönüşümlerinin grid kutularını grid kutularına dönüştürmesi \mathcal{A} 'daki χ ve $\hat{\chi}$ koordinat komşulukların C^\square -bağlantılı olmasını garanti etmez. [1]

S üzerinde bir C^\square atlas \mathcal{A}^\square , içinde herhangi iki koordinat komşuluğun C^\square bağlantılı olduğu \mathcal{A} atlasının bir alt atlasıdır. S üzerinde C^\square atlas \mathcal{A}^\square , S üzerinde daha büyük bir C^\square atlas tarafından içerilmiyorsa maksimaldir. [1]

S üzerinde her C^\square atlas \mathcal{A}^\square , \mathcal{A}^\square 'daki tüm koordinat komşuluklarına C^\square -bağlantılı olan \mathcal{A} 'daki bütün koordinat komşuluklarının birleşimi bir tek maksimal atlas belirtir ve $\mathcal{A}_{max}^\square$ ile gösterilir. S üzerindeki bir h Lorentz metriği ile oluşturulan tüm

uygun null koordinat komşulukların kümesi, $\mathcal{A}_h^\square = \mathcal{A}^\square([h])$, S üzerinde bir maksimal C^\square atlas örneğidir. [1]



Şekil 2.1. Koordinat komşulukları

\mathcal{A}^\square , S yüzeyi üzerinde bir maksimal C^\square atlas olmak üzere; bir (S, \mathcal{A}^\square) sıralı çifti bir kutu yüzeyidir. Kutu yüzeylerinin Lorentz metrikleriyle olan ilişkisi, 1-kompleks boyutlu manifoldların Riemann metrikleriyle olan ilişkisi gibidir. [1] Bunu aşağıdaki teoremle ifade edebiliriz.

Teorem 2.1.1. S üzerindeki (S, \mathcal{A}^\square) kutu yüzeyleri ile $(S, [h])$ Lorentz yüzeyleri arasında bir doğal birebir eşleme vardır. [1]

S üzerindeki bir C^\square atlas \mathcal{A}^\square 'daki bir koordinat komşuluğu $\chi : U \rightarrow \mathbb{R}^2$ olsun. Eğer $\chi(U)$, \mathbb{R}^2 'de bir sonlu grid kutusu ise χ 'ye bir kutu koordinat komşuluğu denir. \mathcal{A}^\square 'daki herhangi bir $\chi : U \rightarrow \mathbb{R}^2$ kutu koordinat komşuluğunun S üzerindeki U tanım kümesine, $\mathcal{L}(\mathcal{A}^\square)$ üzerinde bir kutu veya \mathcal{A}^\square için S üzerinde bir kutu veya (eğer $\mathcal{A}^\square = \mathcal{A}_h^\square$) ise (S, h) üzerinde bir kutu denir. Herhangi bir sabit kutu atlas \mathcal{A}^\square için; S üzerindeki kutular bir (S, h) Riemannian yüzeyi üzerinde açık disk metriklerinin yaptığı gibi S üzerindeki topoloji için bir baz oluşturur. [1]

2.2 Yardstickler ve Time-Orientability

Tanım 2.2.1. Bir (S, h) Lorentzian yüzeyi veya bir $\mathcal{L} = (S, [h])$ Lorentz yüzeyi üzerinde g bir Riemannian metrik olsun. h için X, Y null doğrultular, g için ortogonal ise g Riemannian metriğine yardstick denir. [1]

Lemma 2.2.1. Herhangi bir $\mathcal{L} = (S, [h])$ Lorentz yüzeyi üzerinde bir g yardsticki vardır. [1]

Tanım 2.2.2. (M, \mathcal{G}) bir Lorentzian manifold olsun. M üzerinde \mathcal{G} Lorentzian metriği için global olarak tanımlı bir $C^\infty \vec{T}$ timelike vektör alanı mevcutsa, (M, \mathcal{G}) Lorentzian manifolduna veya onun \mathcal{G} Lorentzian metriğine time-orientable (zaman yönlendirilebilir) denir. [1]

Zaman yönlendirilebilir olmayan (M, \mathcal{G}) Lorentzian manifold için; \mathcal{G} 'nin bir zaman yönlendirilebilir $\tilde{\mathcal{G}}$ metriğine lift edilmesiyle $(\tilde{M}, \tilde{\mathcal{G}})$ zaman yönlendirilebilir olacak şekilde M 'yi örten bir \tilde{M} örtü manifoldu mevcuttur. Ayrıca her basit irtibatlı Lorentzian manifold zaman yönlendirilebilirdir. [1]

M üzerinde \mathcal{G} için bir C^∞ timelike vektör alanı \vec{T} belirtilmiş ise, (M, \mathcal{G}) Lorentzian manifolduna time-oriented (zaman yönlendirilmiş) denir. $\forall p \in M$ için bir $\mathcal{T}(\vec{T}_p)$ time konisini seçmek için \vec{T} vektör alanı kullanılır. M üzerindeki $C^\infty \vec{T}$ ve \vec{T}' timelike vektör alanları; $\forall p \in M$ için aynı time koniyi belirtirse, \vec{T} ve \vec{T}' (M, \mathcal{G}) üzerinde aynı zaman yönlendirilmiş olur. Herhangi bir zaman yönlendirilebilir Lorentzian manifold üzerinde yalnızca iki farklı time-orientation (zaman yönlendirme) vardır. [1]

Bir irtibatlı, zaman yönlendirilmiş, $n \geq 2$ boyutlu C^∞ Lorentz manifolduna space time denir. [1] Bu tanım üzerinde çeşitli yazarların farklı yaklaşımları vardır. O'Neill space time'in 4-boyutlu olması gereğini savunur.

Lemma 2.2.2. Bir h Lorentzian metriği için S üzerinde bir C^∞ timelike vektör alanı vardır \iff

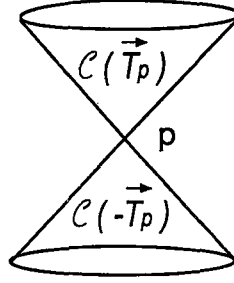
- (i) S üzerinde h için sıfır olmayan bir C^∞ spacelike vektör alanı
 - veya
 - (ii) S üzerinde h için bir C^∞ null vektör alanı
- vardır. [1]

Tanım 2.2.3. \vec{T} timelike vektör alanı, bir (M, \mathcal{G}) space-time üzerinde zaman yönlendirmeyi sağlasın. $\forall p \in M$ noktası için M_p 'de bir \vec{v} causal teğet vektörüne;

(i) $\vec{v}, C(\vec{T}_p)$ causal konisinde yatıyorsa future-directed,

(ii) $\vec{v}, C(-\vec{T}_p)$ causal konisinde yatıyorsa past-directed

denir. [1] (Şekil 2.2)



Şekil 2.2. Future ve past-directed koniler

Tanım 2.2.4. Bir $C^\infty \gamma : P \rightarrow (M, \mathcal{G})$ causal eğrisi, yayı veya ışınına; $\forall t \in P$ için $\gamma'(t)$ teğet vektörü,

(i) future-directed ise future-directed,

(ii) past-directed ise past-directed

denir. [1]

Bir 2-boyutlu space-time (S, h) üzerinde \vec{T} tarafından sağlanan zaman yönlendirme; X -null (veya Y -null) past-directed (veya future-directed) olacak şekilde yeni bir parametrizasyonu ile tanımlı null eğrileri üzerinde bir natural orientationu (doğal yönlendirmeyi) belirtir. Örneğin; $\vec{T}, E^{2,1} = (x, y$ düzlemi, $dx dy$) Minkowski 2-düzleminin her noktasında $\vec{j}-\vec{i}$ olarak alındığında zaman yönlendirilmiş ise o zaman tüm X -doğrular doğal olarak sağa, tüm Y -doğrular doğal olarak yukarı yönlendirilmiş olur. [1]

Bir $\mathcal{L} = (S, [h])$ Lorentz yüzeyi üzerinde bir \vec{T} timelike vektör alanı, \mathcal{L} üzerinde ve $\hat{h} \sim h$ olmak üzere her (S, \hat{h}) üzerinde zaman yönlendirmeyi tanımlar. Böylece zaman yönlendirilmiş bir \mathcal{L} üzerinde, zaman yönlendirilmiş $\mathcal{L} = (S, [h])$ Lorentz yüzeyi ile future-directed veya past-directed causal eğrileri, yayları veya ışınları konuşmak anlam kazanır. [1]

$\mathcal{L} = (S, [h])$ zaman yönlendirilmiş olduğu zaman; $\mathcal{A}_h^\square = \mathcal{A}^\square([h])$ kutu atlası $\mathcal{A}_h^+ = \mathcal{A}^+([h])$ ve $\mathcal{A}_h^- = \mathcal{A}^-([h])$ 'nin ayrık birleşimidir. $\chi : \mathcal{A}_h^\square \rightarrow \mathcal{A}^+([h])$ (veya $\mathcal{A}^-([h])$) bir koordinat komşuluğudur $\iff \chi$ tarafından verilen x, y uygun null koordinatların her ikisi sırasıyla $y \equiv \text{sabit}$ ve $x \equiv \text{sabit}$ null eğriler üzerinde doğal yönlendirmenin belirtilmesine neden olur. Ayrıca her basit irtibatlı $(S, [h])$ Lorentz yüzeyi daima zaman yönlendirilebilirdir. [1]



2.3 Intrinsic (Esas) Eğrilik, Geodezik ve Pregeodezik

Bir S yüzeyi üzerinde u, v lokal koordinatlar ve $h = Adu^2 + 2Bdudv + Cdv^2$ bir metrik olsun. h metriğinin $K(h)$ intrinsic (esas) eğriliği;

$$\begin{aligned} 4(AC - B^2)^2 K(h) = & A(A_v C_v - 2B_u C_v + C_u^2) + C(A_u C_u - 2A_u B_v + A_v^2) \\ & + B(A_u C_v - A_v C_u - 2A_v B_v + 4B_u B_v - 2B_u C_u) \quad (2.3.1) \\ & - 2(AC - B^2)(A_{vv} - 2B_{uv} + C_{uu}) \end{aligned}$$

u, v 'nin U tanım kümesi üzerinde formülü ile elde edilir. [1]

S üzerinde özel lokal koordinatlar kullanarak (2.3.1)'deki $K(h)$ daha sade bir hal alır.

S üzerindeki h metriğinin esas eğriliği $K(h) \equiv 0$ olması durumunda h metriğine flat metrik denir. h metriği flat ise (S, h) Lorentzian (veya Riemannian) yüzey flat yüzey olarak adlandırılır. [1]

$h = dx^2 + dy^2$ metriği ile xy -düzleminin herhangi bir açık irtibatlı alt kümesi $dx^2 + dy^2$ flat yardstikine sahiptir. [1] Gerçekten; $dx^2 + dy^2$ 'de $A \equiv C \equiv 1$ ve $B \equiv 0$ olduğundan $K \equiv 0$ olup $dx^2 + dy^2$ flattır ve $h = dx^2 + dy^2$ metriği için null olan X, Y doğrultular $dx^2 + dy^2$ için ortogonal olduğundan yardstiktir.

Tanım 2.3.1. $P \subset \mathbb{R}$ bir açık aralık ve $\gamma : P \rightarrow S$ bir C^∞ dönüşüm olsun. P 'deki herhangi bir t_0 ve $\gamma(t_0)$ 'in bir komşuluğu üzerindeki herhangi u, v koordinatları için, γ 'nın t_0 etrafındaki bir açık aralığa kısıtlanması,

$$\begin{aligned} u'' + \Gamma_{11}^1 (u')^2 + 2\Gamma_{12}^1 u'v' + \Gamma_{22}^1 (v')^2 &= 0 \\ v'' + \Gamma_{11}^2 (u')^2 + 2\Gamma_{12}^2 u'v' + \Gamma_{22}^2 (v')^2 &= 0 \end{aligned} \quad (2.3.2)$$

adi diferansiyel denklemlerini sağlayan $u(t)$ ve $v(t)$ fonksiyonları ile verilirse γ eğrisine S üzerindeki bir h metriği için bir geodezik denir. [1]

$h = Adu^2 + 2Bdudv + Cdv^2$ ve $W = AC - B^2$ olmak üzere (2.3.2)'daki Γ_{ij}^k christoffel semboller;

$$\begin{aligned} 2W\Gamma_{11}^1 &= CA_u - 2BB_u + BA_v, & 2W\Gamma_{11}^2 &= 2AB_u - AA_v - BA_u \\ 2W\Gamma_{12}^1 &= CA_v - BC_u, & 2W\Gamma_{12}^2 &= AC_u - BA_v \\ 2W\Gamma_{22}^1 &= 2CB_v - CC_u - BC_v, & 2W\Gamma_{22}^2 &= AC_v - 2BB_v + BC_u \end{aligned}$$

ile U üzerinde tanımlanır. Bir $\gamma : P \rightarrow S$ geodeziğin bir kapalı, sınırlı (veya yarı kapalı) $\hat{P} \subset P$ aralığına kısıtlanışına bir geodezik yay (veya geodezik ışın) denir. [1]

Bir $\gamma : P \rightarrow S$ geodeziğinin; \hat{P} 'nin bir alt aralığı P olacak şekilde bir $\gamma : \hat{P} \rightarrow S$ geodeziğine genişletilmesi yoksa, γ geodeziğine genişletilemez denir. $0 \in P$ için $\gamma(0) = p$ ve S_p 'deki \vec{v} başlangıç hız vektörü $\gamma'(0) = \vec{v}$ olacak şekilde p noktasına S üzerinde $\gamma : P \rightarrow S$ geodeziği için başlangıç noktası denir. $\gamma(t) \equiv p$ ile verilen sabit $\gamma : \mathbb{R} \rightarrow S$ geodeziği için \vec{v} , S_p 'de $\vec{0}$ vektörüdür. [1]

S üzerindeki herhangi bir h metriği için her $\gamma : P \rightarrow S$ geodeziği, P üzerinde $h(\gamma', \gamma')$ sabit fonksiyonuna sahiptir. Buna göre h indefinit olduğundan; γ' , γ geodeziği boyunca ya timelike yada spacelikedir. Böylece bir h Lorentzian metrik için S üzerindeki her geodezik sabit bir causal karaktere sahiptir. [1]

Örnek 2.3.1. $h = du^2 - dv^2$ Lorentzian metriği için c sabit olmak üzere $\gamma(t) = (t, ct)$ ile verilen $\gamma : \mathbb{R} \rightarrow (u, v \text{ düzlemi})$ geodeziği; $|c| < 1$ iken spacelike, $|c| > 1$ iken timelike ve $|c| = 1$ iken null eğrisidir. [1] Gerçekten; $\gamma'(t) = (1, c)$ olup $h(\gamma', \gamma') = 1 - c^2$ olduğundan; $|c| < 1$ için $h(\gamma', \gamma') > 0$ olup γ geodeziği spacelike eğri, $|c| > 1$ için $h(\gamma', \gamma') < 0$ olup γ geodeziği timelike eğri ve $|c| = 1$ için $h(\gamma', \gamma') = 0$ olup γ geodeziği null eğridir.

Tanım 2.3.2. Bir C^∞ $\gamma : P \rightarrow S$ eğrisi; yeni bir parametrizasyonla bir $\hat{\gamma} : \hat{P} \rightarrow S$ geodeziğini veriyorsa, γ eğrisine h için pregeodezik denir. [1]

Bir h Riemannian metriği için herhangi bir C^∞ $\gamma : P \rightarrow S$ eğrisi veya bir h Lorentzian metriği için herhangi bir C^∞ spacelike veya timelike $\gamma : P \rightarrow S$ eğrisi verilsin. Herhangi bir $t_0 \in P$ için, γ 'nın;

$$s = \int_{t_0}^t |h(\gamma'(t), \gamma'(t))|^{1/2} dt$$

yay uzunluğuyla ifadesi, $\hat{P} = s(P)$ üzerinde tanımlı h metriği için $\hat{\gamma} : \hat{P} \rightarrow S$ geodezik ise γ 'ya pregeodezik denir. Bir h Lorentzian metriği için her $\gamma : P \rightarrow S$ null eğrisi pregeodeziktir. [1]

BÖLÜM 3

ÖKLİD VE MINKOWSKİ 3-UZAYINDA LOKAL YÜZEYLER

3.1 Öklid ve Minkowski Düzlemleri

S , uv - düzlemine doğal yönlendirme ile hem bir yüzey, hem de bir vektör uzayı olarak bakılır. $\vec{i} = (1, 0)$, $\vec{j} = (0, 1)$ bazını $\forall p \in S$ için sırasıyla, $\vec{\partial}_u(p)$ ve $\vec{\partial}_v(p)$ 'ye karşılık tutulursa; S ile S_p arasında bir özdeşlik dönüşüm tanımlanmış olur. [1]

Tanım 3.1.1. S , uv - düzlemi olsun. S üzerinde $du^2 + dv^2$ Öklid metriği ile tanımlanan uzaya Öklid-2 uzayı (veya Öklid düzlemi) denir ve

$$E^2 = (S, [du^2 + dv^2]) \quad (3.1.1)$$

ile gösterilir. [1]

Öklid-2 uzayı, Öklid metriği ile tanımlanan Öklid iç çarpımı yardımıyla da aşağıdaki şekilde tanımlanabilir.

Tanım 3.1.2. $\forall \vec{A} = a_1\vec{i} + a_2\vec{j}$, $\vec{B} = b_1\vec{i} + b_2\vec{j} \in \mathbb{R}^2$ için,

$$\vec{A} \cdot \vec{B} = a_1b_1 + a_2b_2 \quad (3.1.2)$$

eşitliği ile tanımlanan iç çarpıma Öklid iç çarpım denir ve \mathbb{R}^2 vektör uzayı, üzerinde tanımlı öklid iç çarpımı ile Öklid-2 uzayı olarak adlandırılır ve E^2 ile gösterilir. [1]

Öklid iç çarpımı pozitif tanımlı bir metrik olduğundan E^2 Öklid uzayı aynı zamanda bir Riemannian 2-manifolddur. [1]

Tanım 3.1.3. S , uv - düzlemi olsun. S üzerinde $du^2 - dv^2$ Minkowski metriği ile tanımlanan uzaya Minkowski-2 uzayı (veya Minkowski düzlemi) denir ve

$$E^{2,1} = (S, [du^2 - dv^2]) \quad (3.1.3)$$

ile gösterilir.[1]

Minkowski-2 uzayı, Minkowski metriği ile tanımlanan Lorentz iç çarpımı yardımıyla da aşağıdaki şekilde tanımlanabilir.

Tanım 3.1.4. $\forall \vec{A} = a_1\vec{i} + a_2\vec{j}, \vec{B} = b_1\vec{i} + b_2\vec{j} \in \mathbb{R}^2$ için,

$$\vec{A} \cdot \vec{B} = a_1b_1 - a_2b_2 \quad (3.1.4)$$

eşitliği ile tanımlanan iç çarpıma Lorentz iç çarpımı denir ve \mathbb{R}^2 vektör uzayı bu iç çarpım ile Minkowski-2 uzayı olarak adlandırılır ve $E^{2,1}$ ile gösterilir.

S , uv - düzlemi üzerinde $du^2 + dv^2$ Öklid metriği ve $du^2 - dv^2$ Minkowski metriği için u, v lokal koordinatları global isothermal koordinatlar gibi kullanılabilir. $du^2 - dv^2$ Minkowski metriği S 'deki x, y global uygun null koordinatlar $x = u - v$, $y = u + v$ şeklinde ifade edilir. [1]

E^2 Öklid düzlemine;

$$E^2 = (uv - \text{düzlem}, [du^2 + dv^2])$$

gösterimi ile aynı zamanda bir Riemann yüzeyi olarak da bakılabilir. [1]

Benzer düşünce ile $E^{2,1}$ Minkowski düzlemi;

$$E^{2,1} = (uv - \text{düzlem}, [du^2 - dv^2]) = (xy - \text{düzlem}, [dxdy])$$

gösterimi ile aynı zamanda bir Lorentz yüzeyi olarak da bakılabilir. [1]

Lorentz iç çarpım pozitif tanımlı olmadığından, Minkowski-2 uzayındaki vektörler aşağıdaki şekilde sınıflandırılır.

Tanım 3.1.5. $E^{2,1}$ Minkowski-2 uzayında, $\vec{A} \in E^{2,1}$ için;

- (i) $\vec{A} \cdot \vec{A} > 0$ veya $\vec{A} = \vec{0}$ ise \vec{A} 'ya spacelike,
- (ii) $\vec{A} \cdot \vec{A} < 0$ ve $\vec{A} \neq \vec{0}$ ise \vec{A} 'ya timelike,
- (iii) $\vec{A} \cdot \vec{A} = 0$ ve $\vec{A} \neq \vec{0}$ ise \vec{A} 'ya null

vektör denir. [6]

Teorem 3.1.1. $E^{2,1}$ Minkowski-2 uzayında,

- (i) $\vec{A} \in E^{2,1}$ bir null vektör ise düzlemde 1. ve 2. açkırtaylar üzerinde,
- (ii) $\vec{B} \in E^{2,1}$ bir timelike vektör ise düzlemde 1. ve 2. açkırtaylar arasında,
- (iii) $\vec{C} \in E^{2,1}$ bir spacelike vektör ise düzlemde 1. ve 2. açkırtaylar dışında

bulunur. (Şekil 3.1)

İspat. (i) Herhangi bir $\vec{A} = (x, y) \in E^{2,1}$ null vektör olsun. O halde;

$$\begin{aligned}
 \vec{A} \cdot \vec{A} &= 0 \\
 (x, y) \cdot (x, y) &= 0 \\
 x^2 - y^2 &= 0 \\
 (x - y)(x + y) &= 0 \\
 (x - y) = 0 \quad \vee \quad (x + y) = 0 \\
 \underbrace{x = y} &\quad \vee \quad \underbrace{x = -y} \\
 \text{1.açıortay} &\quad \vee \quad \text{2.açıortay}
 \end{aligned}$$

elde edilir ki, bu da $\vec{A} = (x, y)$ null vektörünün düzlemde 1. veya 2. açıortay üzerinde olduğunu gösterir. (Şekil 3.1)

(ii) Herhangi bir $\vec{B} = (x, y) \in E^{2,1}$ timelike vektör olsun. O halde;

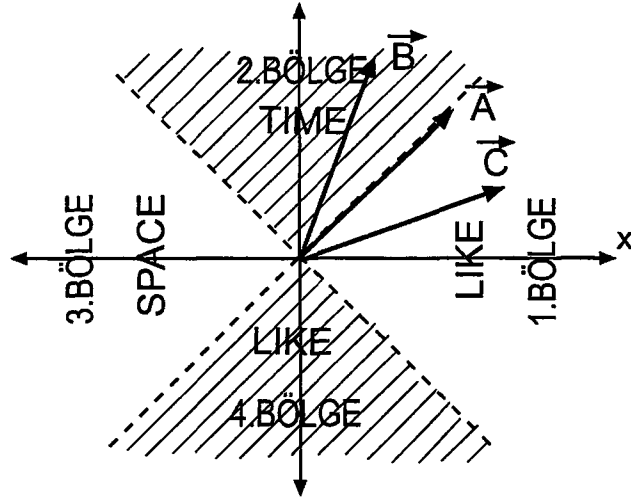
$$\begin{aligned}
 \vec{B} \cdot \vec{B} &< 0 \\
 x^2 - y^2 &< 0 \\
 (x - y)(x + y) &< 0 \\
 (x - y) > 0 \quad \wedge \quad (x + y) < 0 \quad \vee \quad (x - y) < 0 \quad \wedge \quad (x + y) > 0 \\
 \underbrace{x > y \quad \wedge \quad x < -y} &\quad \vee \quad \underbrace{x < y \quad \wedge \quad x > -y} \\
 \text{4.bölgede} &\quad \vee \quad \text{2.bölgede}
 \end{aligned}$$

elde edilir ki, bu da $\vec{B} = (x, y)$ timelike vektörünün düzlemde 1. ve 2. açıortay arasında olduğunu gösterir. (Şekil 3.1)

(iii) Herhangi bir $\vec{C} = (x, y) \in E^{2,1}$ spacelike vektör olsun. O halde;

$$\begin{aligned}
 \vec{C} \cdot \vec{C} &> 0 \\
 x^2 - y^2 &> 0 \\
 (x - y)(x + y) &> 0 \\
 (x - y) > 0 \quad \wedge \quad (x + y) > 0 \quad \vee \quad (x - y) < 0 \quad \wedge \quad (x + y) < 0 \\
 \underbrace{x > y \quad \wedge \quad x > -y} &\quad \vee \quad \underbrace{x < y \quad \wedge \quad x < -y} \\
 \text{1.bölgede} &\quad \vee \quad \text{3.bölgede}
 \end{aligned}$$

elde edilir ki, bu da $\vec{C} = (x, y)$ spacelike vektörünün düzlemde 1. ve 2. açıortay dışında olduğunu gösterir. (Şekil 3.1) \square



Şekil 3.1. Minkowski Düzlemindeki Vektörler

Tanım 3.1.6. $\vec{A} \in E^{2,1}$ için \vec{A} 'nin normu,

$$\|\vec{A}\| = \sqrt{|\vec{A} \cdot \vec{A}|} \quad (3.1.5)$$

şeklinde tanımlanır. [17]

Teorem 3.1.2. $\vec{A} \in E^{2,1}$ için;

- (i) \vec{A} vektörü bir null vektör ise $\|\vec{A}\| = 0$
- (ii) \vec{A} vektörü bir timelike vektör ise $\|\vec{A}\|^2 = -(\vec{A} \cdot \vec{A})$
- (iii) \vec{A} vektörü bir spacelike vektör ise $\|\vec{A}\|^2 = \vec{A} \cdot \vec{A}$

dir. [17]

Tanım 3.1.7. $E^{2,1}$ uzayında iki vektör \vec{A} ve \vec{B} olsun.

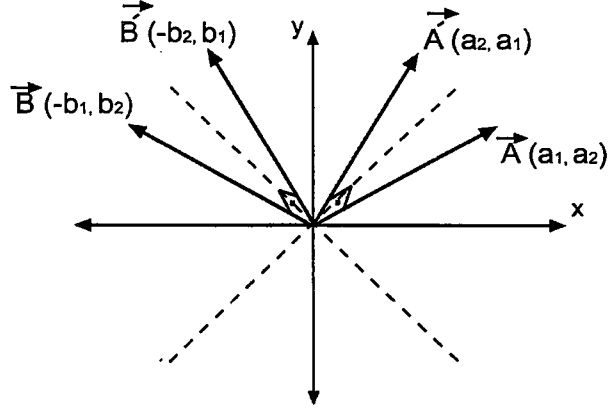
$$\vec{A} \cdot \vec{B} = 0$$

ise \vec{A} ve \vec{B} vektörlerine Lorentz anlamda dik vektörler denir. [17]

Teorem 3.1.3. \mathbb{R}^2 düzleminde 1. veya 2. açığortaya göre simetrik olan vektörler Lorentz anlamda diktir. [15] (Şekil 3.2)

İspat. Herhangi bir $\vec{A} = (a_1, a_2) \in \mathbb{R}^2$ vektörünün \mathbb{R}^2 düzlemindeki 1. açığortaya göre simetriği olan vektör $\vec{A}' = (a_2, a_1)$ olup,

$$\begin{aligned} \vec{A} \cdot \vec{A}' &= (a_1, a_2) \cdot (a_2, a_1) \\ &= a_1 a_2 - a_2 a_1 = 0 \end{aligned}$$



Şekil 3.2. Minkowski Düzlemindeki Dik Vektörler

ve benzer olarak herhangi bir $\vec{B} = (-b_1, b_2) \in \mathbb{R}^2$ vektörünün \mathbb{R}^2 düzlemindeki 2. açığortaya göre simetriği olan vektör $\vec{B}' = (-b_2, b_1)$ olup,

$$\begin{aligned}\vec{B} \cdot \vec{B}' &= (-b_1, b_2) \cdot (-b_2, b_1) \\ &= b_1 b_2 - b_2 b_1 = 0\end{aligned}$$

elde edilir. Bu da gösterir ki \mathbb{R}^2 düzleminde 1. veya 2. açığortaya göre simetrik olan vektörler Lorentz anlamda diktir. \square

Teorem 3.1.4. $E^{2,1}$ Minkowski Düzleminde iki timelike (veya spacelike) vektör dik olamaz. [15]

İspat. $\vec{A} = (a_1, a_2)$ ve $\vec{B} = (b_1, b_2) \in E^{2,1}$ herhangi iki timelike vektör olsun. O halde,

$$\left. \begin{aligned}\vec{A} \cdot \vec{A} < 0 &\implies a_1^2 - a_2^2 < 0 \implies a_1^2 < a_2^2 \\ \vec{B} \cdot \vec{B} < 0 &\implies b_1^2 - b_2^2 < 0 \implies b_1^2 < b_2^2\end{aligned} \right\}$$

eşitsizlikleri elde edilir ki, buradan hareketle

$$\begin{aligned}a_1^2 b_1^2 &< a_2^2 b_2^2 \\ \implies |a_1 b_1| &< |a_2 b_2| \\ \implies a_1 b_1 &\neq a_2 b_2 \\ \implies a_1 b_1 - a_2 b_2 &\neq 0 \\ \implies \vec{A} \cdot \vec{B} &\neq 0\end{aligned}$$

sonucuna ulaşılır. Bu sonuç herhangi iki \vec{A} ve \vec{B} timelike vektörün dik olmayacağını gösterir. Herhangi iki spacelike vektör için de benzer şekilde ispat yapılır. \square

Sonuç 3.1.1. Minkowski düzleminde herhangi iki vektörün dik olması vektörlerden biri timelike ise diğerinin spacelike olması ile mümkündür.

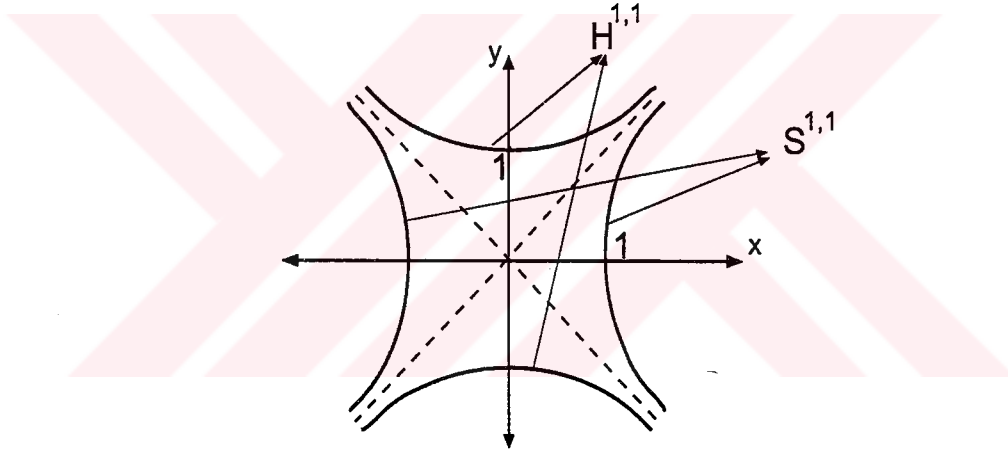
$E^{2,1}$ 'deki S^1 birim çemberine $E^{2,1}$ 'de $S^{1,1}$ ve $H^{1,1}$ gibi iki kuadratik form karşılık gelir. Bunlardan;

$$S^{1,1} = \{\vec{A} \in E^{2,1} \mid \vec{A} \cdot \vec{A} = 1\}$$

kümesine Lorentzian birim çember ve

$$H^{1,1} = \{\vec{A} \in E^{2,1} \mid \vec{A} \cdot \vec{A} = -1\}$$

kümesine de hiperbolik birim çember adı verilir. (Şekil 3.3)



Şekil 3.3. $E^{2,1}$ Uzayında Lorentz ve Hiperbolik Birim Çemberler

Teorem 3.1.5. $E^{2,1}$ Uzayında $S^{1,1}$ Lorentzian birim çemberin (veya $H^{1,1}$ Hiperbolik birim çemberin) teğetleri daima timelike (veya spacelike) vektörlerdir.

İspat. $E^{2,1}$ Uzayında $S^{1,1}$ Lorentzian birim çember üzerinde keyfi bir $P(x,y)$ noktasını orjinle birleştiren, $\vec{A}(x,y)$ vektörü alınsın. Bu vektör,

$$\begin{aligned} \vec{A} \cdot \vec{A} &= 1 \\ (x,y) \cdot (x,y) &= 1 \\ x^2 - y^2 &= 1 \end{aligned}$$

denklemini sağlar ki bu denklem, $E^{2,1}$ Uzayında $S^{1,1}$ Lorentzian birim çemberin kartezyen denklemidir. \vec{A} vektörünün yatayla yaptığı açı θ olmak üzere, $S^{1,1}$ Lorentzian birim çemberin parametrik denklemi;

$$\left. \begin{array}{l} x = \cosh \theta \\ y = \sinh \theta \end{array} \right\} \implies 0 < \theta \leq 2\pi$$

şeklindedir. Buna göre, $E^{2,1}$ Uzayında $S^{1,1}$ Lorentzian birim çember $\alpha(\theta) = (\cosh \theta, \sinh \theta)$ eğrisi ile ifade edilebilir. $S^{1,1}$ Lorentzian birim çemberin teğetleri, $\alpha'(\theta) = (\sinh \theta, \cosh \theta)$ şeklindedir. Buradan hareketle,

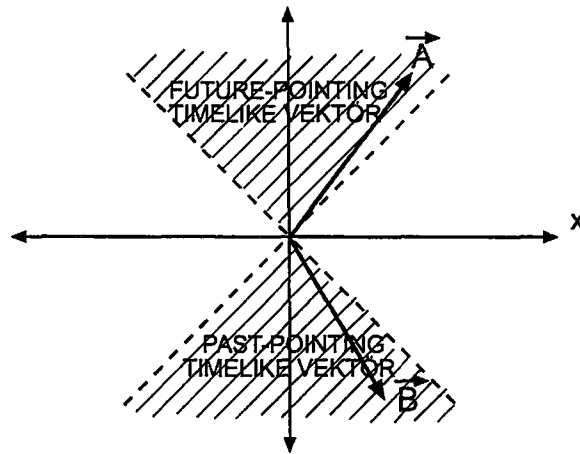
$$\begin{aligned} \alpha'(\theta) \cdot \alpha'(\theta) &= \underbrace{\sinh^2 \theta - \cosh^2 \theta}_{-1} \\ &= -1 < 0 \end{aligned}$$

sonucuna ulaşılır ki bu da $S^{1,1}$ Lorentzian birim çemberin teğetlerinin timelike vektörler olduğunu gösterir. Hiperbolik Birim Çemberler için benzer ispat yapılır. \square

Tanım 3.1.8. $\vec{A} \in E^{2,1}$ bir timelike vektör olsun. $\vec{\epsilon} = (0, 1)$ olmak üzere;

- (i) $\vec{A} \cdot \vec{\epsilon} < 0$ ise \vec{A} 'ya future-pointing timelike vektör,
- (ii) $\vec{A} \cdot \vec{\epsilon} > 0$ ise \vec{A} 'ya past-pointing timelike vektör

denir. [17] (Şekil 3.4)



Şekil 3.4. $E^{2,1}$ Uzayında Zaman Yönlendirmesi

Teorem 3.1.6. $\vec{A} = (a_1, a_2) \in E^{2,1}$ bir timelike vektör olsun.

(i) \vec{A} vektörü future-pointing timelike vektördür $\iff |a_1| < a_2$

(ii) \vec{A} vektörü past-pointing timelike vektördür $\iff a_1 < |a_2|$ [17]

Lemma 3.1.1. $\vec{A}, \vec{B} \in E^{2,1}$ future-pointing timelike vektörler olsun. Bu durumda;

(i) $\vec{A} \cdot \vec{B} \leq 0$

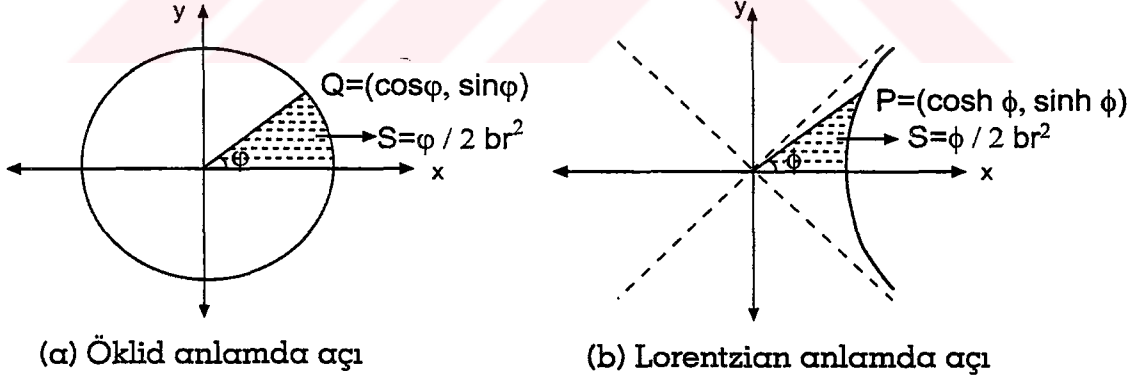
(ii) $\vec{A} + \vec{B}$ future-pointing timelike vektördür.

(iii) $-\vec{A} \cdot \vec{B} \geq \|\vec{A}\| \|\vec{B}\|$ (Minkowski uzayında Schwarz eşitsizliği)

(iv) $\|\vec{A} + \vec{B}\| \geq \|\vec{A}\| + \|\vec{B}\|$ (Minkowski uzayında üçgen eşitsizliği)

ifadeleri mevcuttur. [17]

$E^{2,1}$ uzayında açı kavramı ancak hiperbolik açı cinsinden ifade edilir. Öklidyen birim çember üzerindeki bir Q noktası $(\cos \varphi, \sin \varphi)$ ikilisi ile ifade edilirken, Lorentz birim çember üzerindeki bir P noktası $(\cosh \phi, \sinh \phi)$ ikilisi ile ifade edilir. Birim Öklidyen çember üzerindeki Q noktasının koordinatları için kullanılan φ radyanlık açı, Şekil 3.5a'deki taralı alanın iki katı olarak ifade edilen bir büyüklüktür. Benzer şekilde, birim Lorentz çemberi üzerindeki P noktasının koordinatları için kullanılan ϕ hiperbolik radyanlık açı, Şekil 3.5b'deki taralı alanın iki katı olarak ifade edilen bir büyüklüktür. [21]



Şekil 3.5.

E^2 2-boyutlu Öklid uzayındaki,

$$A(\varphi) = \begin{bmatrix} \cos \varphi & -\sin \varphi \\ \sin \varphi & \cos \varphi \end{bmatrix}$$

dönme matrisine karşılık, $E^{2,1}$ Minkowski-2 uzayındaki dönme matrisi,

$$A(\phi) = \begin{bmatrix} \cosh \phi & \sinh \phi \\ \sinh \phi & \cosh \phi \end{bmatrix}$$

şeklindedir. [17]

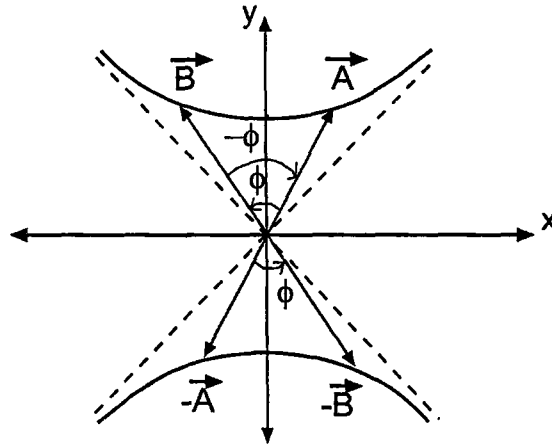
Lemma 3.1.2. $A(\phi)$ matrisi altında; timelike vektörler timelike vektörlere, spacelike vektörler spacelike vektörlere ve null vektörler null vektörlere dönüşür. Yani, $A(\phi)$ dönüşümü altında bir vektörün causal karakteri korunur. [17]

Lemma 3.1.3. $A(\phi)$ matrisi zaman yönlendirmesini korur. Yani, $\vec{B} \in E^{2,1}$ future-pointing (veya past-pointing) timelike vektör ise $A(\phi)\vec{B}$ de bir future-pointing (veya past-pointing) timelike vektördür. [17]

Tanım 3.1.9. $\vec{A} = (a_1, a_2)$ ve $\vec{B} = (b_1, b_2) \in E^{2,1}$ uzayında future pointing (veya past pointing) timelike iki birim vektör olsun.

$$\begin{bmatrix} \cosh \phi & \sinh \phi \\ \sinh \phi & \cosh \phi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix} \quad (3.1.6)$$

eşitliği sağlanacak şekilde $\phi \in R$ sayısına \vec{A} 'dan \vec{B} 'ye (yönlendirilmiş) hiperbolik açı denir ve $\phi = (\vec{A}, \vec{B})$ biçiminde gösterilir. [17] (Şekil 3.6)



Şekil 3.6. Hiperbolik Açı

Lemma 3.1.4. \vec{A} ve \vec{B} future-pointing timelike iki birim vektör olsun. ϕ , \vec{A} 'dan \vec{B} 'ye hiperbolik açı ise;

$$\cosh \phi = -\vec{A} \cdot \vec{B}$$

dir. [17]

Tanım 3.1.10. S, uv -düzlemi ve h, S üzerinde bir metrik olsun. $F : S \rightarrow S$ izometrisi; $\forall \vec{V}, \vec{W} \in S$ C^∞ vektör alanları için;

$$h(F_*\vec{V}, F_*\vec{W}) = h(\vec{V}, \vec{W}) \quad (3.1.7)$$

eşitliğini sağlıyorsa F 'ye S üzerinde bir C^∞ diffeomorfizm denir. [1]

Tanım 3.1.11. E^2 Öklid 2-uzayının (veya $E^{2,1}$ Minkowski 2-uzayının) orjin noktasını sabit bırakan herhangi bir izometrisine, E^2 (veya $E^{2,1}$)'in bir lineer izometrisi denir. [1]

Böylece E^2 (veya $E^{2,1}$) herhangi bir izometrisi; bir ötelemeden sonra bir lineer izometrinin bileşkesidir.

E^2 'deki tüm $g : E^2 \rightarrow E^2$ lineer izometrilere grubu $\mathcal{O}(2)$, $\{\vec{i}, \vec{j}\}$ bazına göre elde edilen katsayılar matrisinin kümesidir. $\mathcal{O}(2)$ ortogonal grup,

$$GL(3, R) = \{A \mid A = [a_{ij}] \in R_3^3, \det A \neq 0\}$$

grubunun kapalı bir alt grubudur ve ayrıca bir Lie gruptur. [1]

$\mathcal{O}(2)$ ortogonal grup irtibatlı iki $\mathcal{O}^+(2)$ ve $\mathcal{O}^-(2)$ bileşene sahiptir. (Yani; $\mathcal{O}(2) = \mathcal{O}^+(2) \cup \mathcal{O}^-(2)$ 'dür.) Bu bileşenlerden;

$$\mathcal{O}^+(2) = \{g \in \mathcal{O}(2) \mid \det g = 1\}$$

yönü koruyan izometrilere,

$$\mathcal{O}^-(2) = \{g \in \mathcal{O}(2) \mid \det g = -1\}$$

yönü tersine çeviren izometrilere içerir. [1]

$\mathcal{O}^+(2)$ 'deki herhangi bir lineer dönüşüm;

$$\begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix}, \quad 0 \leq \theta \leq 2\pi$$

katsayılar matrisine sahiptir. [1]

$E^{2,1}$ 'deki tüm $g : E^{2,1} \rightarrow E^{2,1}$ lineer izometrilere grubu $\mathcal{O}_1(2)$ (veya $\mathcal{O}(1,1)$) ise benzer şekilde $\{\vec{i}, \vec{j}\}$ bazına göre elde edilen katsayılar matrisinin kümesidir. $\mathcal{O}_1(2)$ pseudo ortogonal grup,

$$GL(3, R) = \{A \mid A = [a_{ij}] \in R_3^3, \det A \neq 0\}$$

grubunun kapalı bir alt grubudur. [1]

$\mathcal{O}_1(2)$ pseudo ortogonal grup irtibath dört $\mathcal{O}_1^{++}(2)$, $\mathcal{O}_1^{--}(2)$, $\mathcal{O}_1^{+-}(2)$ ve $\mathcal{O}_1^{-+}(2)$ bileşene sahiptir. Yani;

$$\mathcal{O}_1(2) = \mathcal{O}_1^{++}(2) \cup \mathcal{O}_1^{--}(2) \cup \mathcal{O}_1^{+-}(2) \cup \mathcal{O}_1^{-+}(2)$$

dir. $\mathcal{O}_1^{++}(2)$ özdeşliğe, $\mathcal{O}_1^{--}(2)$ eksi özdeşliğe, $\mathcal{O}_1^{+-}(2)$ u -eksenine göre yansımaya ve $\mathcal{O}_1^{-+}(2)$ de v -eksenine göre yansımaya karşılık gelen izometrilere içerir. [1]

$\mathcal{O}_1^{++}(2) \cup \mathcal{O}_1^{--}(2)$ 'deki izometrilere yönü korurken, $\mathcal{O}_1^{+-}(2) \cup \mathcal{O}_1^{-+}(2)$ 'deki izometrilere ise yönü tersine çevirir. [1]

$\mathcal{O}_1^{++}(2)$ 'deki herhangi bir lineer dönüşüm; $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ katsayılar matrisine, $\mathcal{O}_1^{--}(2)$ 'deki herhangi bir lineer dönüşüm; $\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$ katsayılar matrisine, $\mathcal{O}_1^{+-}(2)$ 'deki herhangi bir lineer dönüşüm; $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$ katsayılar matrisine ve $\mathcal{O}_1^{-+}(2)$ 'deki herhangi bir lineer dönüşüm ise $\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ katsayılar matrisine sahiptir.

3.2 Öklid 3-Uzayında Lokal Yüzeyler

$\mathbb{R}^3 = \{(x, y, z) | x, y, z \in \mathbb{R}\}$ kümesine bir vektör uzayı ve bir C^∞ manifold gibi bakılır. \mathbb{R}^3 'deki $\vec{i} = (1, 0, 0), \vec{j} = (0, 1, 0), \vec{k} = (0, 0, 1)$ vektörlerini $\forall p \in \mathbb{R}^3$ noktasında sırasıyla; $\vec{\partial}_x(p), \vec{\partial}_y(p)$ ve $\vec{\partial}_z(p)$ 'ye karşılık tutulursa; \mathbb{R}^3 ve \mathbb{R}_p^3 arasında bir özdeşlik dönüşüm tanımlanmış olur. [1]

Tanım 3.2.1. $\forall \vec{A} = a_1\vec{i} + a_2\vec{j} + a_3\vec{k}, \vec{B} = b_1\vec{i} + b_2\vec{j} + b_3\vec{k} \in \mathbb{R}^3$ için,

$$\vec{A} \cdot \vec{B} = a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3 \quad (3.2.1)$$

ile tanımlı $\cdot : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ dönüşümüne \mathbb{R}^3 'de bir iç çarpım denir ve bu iç çarpım Öklid iç çarpım olarak adlandırılır. [1]

\mathbb{R}^3 vektör uzayı, üzerinde tanımlı öklid iç çarpımı ile Öklid uzayı olarak adlandırılır ve E^3 ile gösterilir. Öklid iç çarpımı pozitif tanımlı bir metrik olduğundan E^3 Öklid uzayı aynı zamanda bir Riemannian 3-manifolddur.

Tanım 3.2.2. $\forall \vec{A} = a_1\vec{i} + a_2\vec{j} + a_3\vec{k}, \vec{B} = b_1\vec{i} + b_2\vec{j} + b_3\vec{k} \in E^3$ için

$\times : E^3 \times E^3 \rightarrow E^3$

$$\vec{A} \times \vec{B} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix} \quad (3.2.2)$$

ile tanımlanan işleme E^3 'de bir vektörel çarpım denir. [1]

Bu vektörel çarpım;

(i) $\vec{B} \times \vec{A} = -(\vec{A} \times \vec{B})$

(ii) $\vec{A} \times \vec{B} \perp \vec{A}$ ve $\vec{A} \times \vec{B} \perp \vec{B}$

(iii) $\vec{A} \times \vec{B} = \vec{0} \iff \vec{A}$ ve \vec{B} lineer bağımlı

özelliklerine sahiptir. [1]

Bir \vec{A} vektörünün boyu $\|\vec{A}\| = (\vec{A} \cdot \vec{A})^{1/2}$ şeklinde tanımlı olup $\vec{A}, \vec{B} \in \mathbb{R}^3$ vektörleri arasındaki açı θ ise $\vec{A} \cdot \vec{B}$ 'nin geometrik olarak ifadesi;

$$\vec{A} \cdot \vec{B} = \|\vec{A}\| \|\vec{B}\| \cos \theta$$

şeklindedir. [14]

Teorem 3.2.1. E^3 uzayında herhangi dört vektör; $\vec{A} = (a_1, a_2, a_3)$, $\vec{B} = (b_1, b_2, b_3)$, $\vec{C} = (c_1, c_2, c_3)$ ve $\vec{D} = (d_1, d_2, d_3)$ olsun. Bu durumda;

$$(i) \quad (\vec{A} \times \vec{B}) \cdot \vec{C} = \det(\vec{A}, \vec{B}, \vec{C})$$

$$(ii) \quad (\vec{A} \times \vec{B}) \times \vec{C} = (\vec{A} \cdot \vec{C})\vec{B} - (\vec{B} \cdot \vec{C})\vec{A}$$

$$(iii) \quad (\vec{A} \times \vec{B}) \cdot \vec{A} = \vec{0} \text{ ve } (\vec{A} \times \vec{B}) \cdot \vec{B} = \vec{0}$$

$$(iv) \quad (\vec{A} \times \vec{B}) \cdot (\vec{C} \times \vec{D}) = (\vec{A} \cdot \vec{C})(\vec{B} \cdot \vec{D}) - (\vec{A} \cdot \vec{D})(\vec{B} \cdot \vec{C})$$

dir. [14]

İspat. (i) Vektörel çarpım ve iç çarpım tanımlarını kullanarak;

$$\begin{aligned} (\vec{A} \times \vec{B}) \cdot \vec{C} &= (a_2b_3 - b_2a_3, b_1a_3 - a_1b_3, a_1b_2 - b_1a_2) \cdot (c_1, c_2, c_3) \\ &= a_2b_3c_1 - b_2a_3c_1 + b_1a_3c_2 - a_1b_3c_2 + a_1b_2c_3 - b_1a_2c_3 \quad \dots (1) \end{aligned}$$

(1) eşitliği ile

$$\begin{aligned} \det(\vec{A}, \vec{B}, \vec{C}) &= \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} \\ &= a_1(b_2c_3 - c_2b_3) - a_2(b_1c_3 - c_1b_3) + a_3(b_1c_2 - b_2c_1) \\ &= a_1b_2c_3 - a_1c_2b_3 - a_2b_1c_3 + a_2c_1b_3 + a_3b_1c_2 - a_3b_2c_1 \quad \dots (2) \end{aligned}$$

(2) eşitlikleri elde edilir. (1) ve (2)'den $(\vec{A} \times \vec{B}) \cdot \vec{C} = \det(\vec{A}, \vec{B}, \vec{C})$ sonucuna ulaşılır.

$$\begin{aligned} (ii) \quad (\vec{A} \times \vec{B}) \times \vec{C} &= \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a_2b_3 - b_2a_3 & b_1a_3 - a_1b_3 & a_1b_2 - b_1a_2 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} \\ &= (b_1a_3c_3 - a_1b_3c_3 - a_1b_2c_2 + b_1a_2c_2)\vec{i} + (a_1b_2c_1 - b_1a_2c_1 - a_2b_3c_3 + b_2a_3c_3)\vec{j} + \\ &+ (a_2b_3c_2 - b_2a_3c_2 - b_1a_3c_1 + a_1b_3c_1)\vec{k} \end{aligned}$$

elde edilir. Elde edilen $(\vec{A} \times \vec{B}) \times \vec{C}$ vektörünün ilk bileşenine $a_1b_1c_1$, ikinci bileşenine $a_2b_2c_2$ ve üçüncü bileşenine $a_3b_3c_3$ eklenip çıkarılırsa;

$$\begin{aligned} (\vec{A} \times \vec{B}) \times \vec{C} &= (b_1a_3c_3 - a_1b_3c_3 - a_1b_2c_2 + b_1a_2c_2 + a_1b_1c_1 - a_1b_1c_1)\vec{i} \\ &+ (a_1b_2c_1 - b_1a_2c_1 - a_2b_3c_3 + b_2a_3c_3 + a_2b_2c_2 - a_2b_2c_2)\vec{j} \\ &+ (a_2b_3c_2 - b_2a_3c_2 - b_1a_3c_1 + a_1b_3c_1 + a_3b_3c_3 - a_3b_3c_3)\vec{k} \\ &= (a_1c_1b_1 + a_2c_2b_1 + b_1a_3c_3, a_1c_1b_2 + b_2a_3c_3 + a_2b_2c_2, a_2b_3c_2 + a_1b_3c_1 + a_3b_3c_3) \\ &- (a_1b_3c_3 + a_1b_2c_2 + a_1b_1c_1, b_1c_1a_2 + b_2c_2a_2 + b_3c_3a_2, b_1c_1a_3 + b_2c_2a_3 + a_3b_3c_3) \\ &= (\vec{A} \cdot \vec{C})\vec{B} - (\vec{B} \cdot \vec{C})\vec{A} \end{aligned}$$

sonucuna ulaşılır.

(iii)

$$\begin{aligned}(\vec{A} \times \vec{B}) \cdot \vec{A} &= (a_2b_3 - b_2a_3, b_1a_3 - a_1b_3, a_1b_2 - b_1a_2) \cdot (a_1, a_2, a_3) \\ &= a_2b_3a_1 - b_2a_3a_1 + b_1a_3a_2 - a_1b_3a_2 + a_1b_2a_3 - b_1a_2a_3 \\ &= 0\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(\vec{A} \times \vec{B}) \cdot \vec{B} &= (a_2b_3 - b_2a_3, b_1a_3 - a_1b_3, a_1b_2 - b_1a_2) \cdot (b_1, b_2, b_3) \\ &= a_2b_3b_1 - b_2a_3b_1 + b_1a_3b_2 - a_1b_3b_2 + a_1b_2b_3 - b_1a_2b_3 \\ &= 0\end{aligned}$$

(iv) $(\vec{C} \times \vec{D}) = \vec{C}$ olarak alınıp (i), (ii) ve determinant fonksiyonun özelliklerinden;

$$\begin{aligned}(\vec{A} \times \vec{B}) \cdot (\vec{C} \times \vec{D}) &= \det(\vec{A}, \vec{B}, \vec{C}) = \det(\vec{A}, \vec{B}, \vec{C} \times \vec{D}) \\ &= -\det(\vec{A}, \vec{C} \times \vec{D}, \vec{B}) \\ &= \det(\vec{C} \times \vec{D}, \vec{A}, \vec{B}) \\ &= [(\vec{C} \times \vec{D}) \times \vec{A}] \cdot \vec{B} \\ &= [(\vec{C} \cdot \vec{D})\vec{D} - (\vec{D} \cdot \vec{A})\vec{C}] \cdot \vec{B} \\ &= (\vec{C} \cdot \vec{A})(\vec{D} \cdot \vec{B}) - (\vec{D} \cdot \vec{A})(\vec{C} \cdot \vec{B}) \\ &= (\vec{A} \cdot \vec{C})(\vec{B} \cdot \vec{D}) - (\vec{A} \cdot \vec{D})(\vec{B} \cdot \vec{C})\end{aligned}$$

bulunur. □

$\forall \vec{A}, \vec{B}, \vec{C}, \vec{D} \in \mathbb{R}^3$ için doğru olan bu,

$$(\vec{A} \times \vec{B}) \cdot (\vec{C} \times \vec{D}) = (\vec{A} \cdot \vec{C})(\vec{B} \cdot \vec{D}) - (\vec{A} \cdot \vec{D})(\vec{B} \cdot \vec{C}) \quad (3.2.3)$$

özdeşliğe Lagrange özdeşliği denir. [14]

Lagrange özdeşliğinde; \vec{C} yerine \vec{A} ve \vec{D} yerine \vec{B} alınırsa:

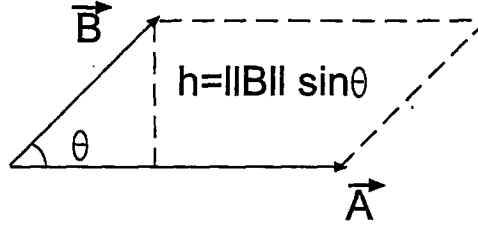
$$\begin{aligned}(\vec{A} \times \vec{B}) \cdot (\vec{A} \times \vec{B}) &= (\vec{A} \cdot \vec{A})(\vec{B} \cdot \vec{B}) - (\vec{A} \cdot \vec{B})(\vec{B} \cdot \vec{A}) \\ \|\vec{A} \times \vec{B}\|^2 &= \|\vec{A}\|^2\|\vec{B}\|^2 - (\vec{A} \cdot \vec{B})^2 \\ &= \|\vec{A}\|^2\|\vec{B}\|^2 - (\|\vec{A}\|^2\|\vec{B}\|^2 \cos^2 \theta) \\ &= \|\vec{A}\|^2\|\vec{B}\|^2(1 - \cos^2 \theta) \\ &= \|\vec{A}\|^2\|\vec{B}\|^2 \sin^2 \theta\end{aligned}$$

veya $\|\vec{A} \times \vec{B}\| = \|\vec{A}\|\|\vec{B}\| \sin \theta$ eşitliğini elde ederiz.

Şekil 3.7'de görüldüğü gibi;

$$\begin{aligned}\|\vec{A} \times \vec{B}\| &= \|\vec{A}\| \underbrace{\|\vec{B}\| \sin \theta}_h \\ &= \|\vec{A}\| h\end{aligned}$$

eşitliğine sahip olunur ki, bu da $\|\vec{A} \times \vec{B}\|$ uzunluğunun \vec{A} ve \vec{B} tarafından gerilen paralelkenarın öklidyen alanını vermektedir.



Şekil 3.7. $\|\vec{A} \times \vec{B}\|$ 'nin geometrik ifadesi

Tanım 3.2.3. $F : E^3 \rightarrow E^3$ izometrisi; $\forall \vec{V}, \vec{W} \in E^3$ C^∞ vektör alanları için;

$$F_*\vec{V} \cdot F_*\vec{W} = \vec{V} \cdot \vec{W} \quad (3.2.4)$$

eşitliğini sağlıyorsa F 'ye E^3 üzerinde bir C^∞ diffeomorfizm denir. [1]

Tanım 3.2.4. E^3 Öklid 3-uzayının orjin noktasını sabit bırakan herhangi bir izometrisine E^3 'ün bir lineer izometrisi denir. [1]

Böylece E^3 'ün herhangi bir izometrisi; bir ötelemeden sonra bir lineer izometrinin bileşkesidir.

E^3 'deki tüm $g : E^3 \rightarrow E^3$ lineer izometrilerinin grubu $\mathcal{O}(3)$, $\{\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\}$ bazına göre elde edilen katsayılar matrislerinin kümesidir. $\mathcal{O}(3)$ ortogonal grup,

$$GL(3, R) = \{A \mid A = [a_{ij}] \in R_3^3, \det A \neq 0\}$$

grubunun kapalı bir alt grubudur. [1]

$\mathcal{O}(3)$ ortogonal grup irtibatlı iki $\mathcal{O}^+(3)$ ve $\mathcal{O}^-(3)$ bileşene sahiptir. (Yani ; $\mathcal{O}(3) = \mathcal{O}^+(3) \cup \mathcal{O}^-(3)$ 'dür.) Bu bileşenlerden;

$$\mathcal{O}^+(3) = \{g \in \mathcal{O}(3) \mid \det g = 1\}$$

yönü koruyan izometrileri,

$$\mathcal{O}^-(3) = \{g \in \mathcal{O}(3) \mid \det g = -1\}$$

yönü tersine çeviren izometrileri içerir. [1]

$\mathcal{O}(3)$ 'deki herhangi bir lineer dönüşüm;

$$\begin{bmatrix} \cos \theta & \sin \theta & 0 \\ -\sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

katsayılar matrisine sahiptir. [1]

Tanım 3.2.5. uv - düzleminin bir açık alt U kümesi için, $Z : U \rightarrow E^3$ birebir ve C^∞ bir dönüşüm olsun. $Z_u = Z_*(\vec{\partial}_u)$ ve $Z_v = Z_*(\vec{\partial}_v)$ olmak üzere $\forall p \in U$ için $Z_u \times Z_v \neq \vec{0}$ ise Z 'ye bir patch denir. [1]

Yani; $Z : U \rightarrow E^3$ bir patch'dır $\iff \forall p \in U$ için $(Z_*)_p$, $E^3_{Z(p)}$ 'deki görüntüsü üzerine birebir ve örtendir. [1]

$S = Z(U)$ üzerinde tanımlanan topoloji ile E^3 'den S 'ye indirgenen topoloji aynı ise Z patch'ına proper denir. Herhangi bir $Z : U \rightarrow E^3$ patch'ının U 'daki herhangi bir noktanın küçük bir V komşuluğuna kısıtlanması bir $Z : U \rightarrow E^3$ proper patch'ını oluşturur. [1]

Tanım 3.2.6. Koordinat düzlemlerinin birindeki bölgeler üzerine C^∞ fonksiyonlarının grafiklerini tanımlayan $Z : U \rightarrow E^3$ patch'ına Monge patch denir ve $Z : U \rightarrow E^3$ Monge patch'ı $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu için;

$$Z(u, v) = (u, v, f(u, v))$$

$$Z(u, v) = (u, f(u, v), v)$$

$$Z(u, v) = (f(u, v), u, v)$$

formlarından herhangi birine sahiptir. [1]

E^3 'de lokal yüzeyler teorisini incelemek için $Z : U \rightarrow E^3$ patch'ı alınır ve $Z(U) = S$, bir yüzey olarak düşünülür. Z, U 'dan S üzerine yönü koruyan bir C^∞ diffeomorfizm olduğundan bazen S üzerindeki kavramlara karşılık olarak U üzerindeki kavramlar kullanılır. Bu nedenle S üzerinde bir f fonksiyonu U üzerinde bir $f(u, v)$ fonksiyonu gibi düşünülür. [1]

S üzerinde $Z_u = Z_*(\vec{\partial}_u)$ ve $Z_v = Z_*(\vec{\partial}_v)$ C^∞ vektör alanları U üzerindeki $\vec{\partial}_u$ ve $\vec{\partial}_v$ 'ye karşılık tutulduğunda; $Z_*(du\vec{\partial}_u + dv\vec{\partial}_v)$ C^∞ vektör alanı için $dZ = Z_u du + Z_v dv$ gösterimi kullanılır. Burada du ve dv , U (veya S) üzerinde reel değerli C^∞ fonksiyonlardır. [1]

Tanım 3.2.7. $Z : U \rightarrow E^3$ bir patch olsun. $S = Z(U)$ üzerinde birinci temel form;

$$\begin{aligned}
 I &= dZ \cdot dZ = (Z_u du + Z_v dv) \cdot (Z_u du + Z_v dv) \\
 &= (Z_u \cdot Z_u) du^2 + 2(Z_u \cdot Z_v) dudv + (Z_v \cdot Z_v) dv^2 \\
 &= Edu^2 + 2Fdudv + Gdv^2 \\
 &= \begin{bmatrix} du & dv \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E & F \\ F & G \end{bmatrix} \begin{bmatrix} du \\ dv \end{bmatrix}
 \end{aligned} \tag{3.2.5}$$

şeklinde tanımlanır. Burada $E = Z_u \cdot Z_u$, $F = Z_u \cdot Z_v$, $G = Z_v \cdot Z_v$ C^∞ fonksiyonlardır. [1]

Bu tanım S üzerinde I . temel formun Riemann metrik olduğunu gösterir.

Teorem 3.2.2. $Z : U \rightarrow E^3$ bir patch olsun.

$$|Z_u \times Z_v| = \sqrt{EG - F^2} = (\det I)^{1/2} \tag{3.2.6}$$

dir. Burada $E = (Z_u \cdot Z_u)$, $F = (Z_u \cdot Z_v)$, ve $G = (Z_v \cdot Z_v)$ 'dir.

İspat. (3.2.3) Lagrange özdeşliği dikkate alınırsa;

$$\begin{aligned}
 (Z_u \times Z_v)^2 &= (Z_u \times Z_v) \cdot (Z_u \times Z_v) \\
 &= \underbrace{(Z_u \cdot Z_u)}_E \underbrace{(Z_v \cdot Z_v)}_G - \underbrace{(Z_u \cdot Z_v)}_F \underbrace{(Z_u \cdot Z_v)}_F \\
 &= EG - F^2
 \end{aligned}$$

veya

$$|Z_u \times Z_v| = \sqrt{EG - F^2} = (\det I)^{1/2}$$

elde edilir. □

Tanım 3.2.8. $Z : U \rightarrow E^3$ bir patch olsun. $|Z_u \times Z_v| = \sqrt{EG - F^2} = (\det I)^{1/2}$ olmak üzere; S üzerindeki birim normal vektör alanı,

$$n = \frac{Z_u \times Z_v}{|Z_u \times Z_v|} \tag{3.2.7}$$

şeklinde tanımlanır. [1]

n , S üzerinde koordinat değişiminden bağımsızdır.

n 'nin herhangi bir değerine E^3 'de bir vektör olarak bakıldığında, $n : S \rightarrow S^2$ (S^2 , $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ birim küresi) Gauss dönüşümünü tanımlamak için, (3.2.7) eşitliği kullanılır. n_u , n_v sembolleri sırasıyla $n_*(Z_u)$ ve $n_*(Z_v)$ vektörlerini göstermek için kullanılır. [1]

$n : S \rightarrow S^2$ Gauss dönüşümü lokal bile olsa birebir olmak zorunluluğu olmadığından, $dZ = Z_u du + Z_v dv$ 'nin n_* altındaki görüntüsü $dn = n_u du + n_v dv$, $n(S)$ üzerinde bir vektör olmasını gerektirmez. Ayrıca $\forall p \in S$ için $S_{n(p)}^2$, S_p 'ye paralel olduğundan, $dn = n_u du + n_v dv$ 'ye S üzerinde bir vektör alanı olarak bakılabilir. [1] Böylece aşağıdaki tanım verilir.

Tanım 3.2.9. $Z : U \rightarrow E^3$ bir patch ve n , $S = Z(U)$ üzerinde birim normal vektör alanı olsun. S üzerindeki ikinci temel form;

$$\begin{aligned}
II = -dn \cdot dZ &= -(n_u du + n_v dv) \cdot (Z_u du + Z_v dv) \\
&= \underbrace{-(n_u \cdot Z_u)}_{L} du^2 - \underbrace{(n_u \cdot Z_v)}_{M} dudv - \underbrace{(n_v \cdot Z_u)}_{M} dudv - \underbrace{(n_v \cdot Z_v)}_{N} dv^2 \\
&= Ldu^2 + 2Mdudv + Ndv^2 \\
&= \begin{bmatrix} du & dv \end{bmatrix} \begin{bmatrix} L & M \\ M & N \end{bmatrix} \begin{bmatrix} du \\ dv \end{bmatrix}
\end{aligned} \tag{3.2.8}$$

şeklinde tanımlanır. Burada $L = -n_u \cdot Z_u$, $M = -n_u \cdot Z_v = -n_v \cdot Z_u$, ve $N = -n_v \cdot Z_v$ C^∞ fonksiyonlardır. [1]

$\forall p \in S$ için $n \cdot Z_u = 0$ ve $n \cdot Z_v = 0$ olup, bu eşitliklerin u ve v 'ye göre türevleri alındığında;

$$\begin{aligned}
n_u \cdot Z_u + n \cdot Z_{uu} &= 0 \implies n \cdot Z_{uu} = -n_u \cdot Z_u = L \\
n_v \cdot Z_u + n \cdot Z_{uv} &= 0 \implies n \cdot Z_{uv} = -n_v \cdot Z_u = M \\
n_u \cdot Z_v + n \cdot Z_{vu} &= 0 \implies n \cdot Z_{vu} = -n_u \cdot Z_v = M \\
n_v \cdot Z_v + n \cdot Z_{vv} &= 0 \implies n \cdot Z_{vv} = -n_v \cdot Z_v = N
\end{aligned} \tag{3.2.9}$$

II. temel formun C^∞ katsayılar fonksiyonları elde edilir. [1]

Z_u, Z_v S_p 'de baz olmak üzere, $n \cdot n$ 'nin Z_u ve Z_v yönündeki türevleri alınır; $Z_u[n \cdot n] = 0$ ve $Z_v[n \cdot n] = 0$ olup,

$Z_u[n \cdot n] = D_{Z_u} n \cdot n + n \cdot D_{Z_u} n = n_u \cdot n + n \cdot n_u = 2n \cdot n_u = 0 \implies n \cdot n_u = 0$ olduğundan $n_u \perp n$ 'dir. [13] Yani, $n_u \in S_p$ olacağından $n_u = aZ_u + bZ_v$ şeklinde yazılır.

$Z_v[n \cdot n] = D_{Z_v}n \cdot n + n \cdot D_{Z_v}n = n_v \cdot n + n \cdot n_v = 2n \cdot n_v = 0 \implies n \cdot n_u = 0$ olduğundan $n_v \perp n$ 'dir. [13] Yani, $n_v \in S_p$ olacağından $n_v = cZ_u + dZ_v$ şeklinde yazılır.

$$\begin{aligned} n_u &= aZ_u + bZ_v \\ n_v &= cZ_u + dZ_v \end{aligned} \quad (3.2.10)$$

eşitlikleri alınsın. Bu eşitlikleri Z_u ve Z_v ile iç çarpıma tabi tutup, (3.2.9) dikkate alınırsa;

$$\begin{aligned} \underbrace{Z_u \cdot n_u}_{-L} &= a \underbrace{Z_u \cdot Z_u}_E + b \underbrace{Z_u \cdot Z_v}_F & \underbrace{Z_v \cdot n_u}_{-M} &= a \underbrace{Z_v \cdot Z_u}_F + b \underbrace{Z_v \cdot Z_v}_G \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \underbrace{Z_u \cdot n_v}_{-M} &= c \underbrace{Z_u \cdot Z_u}_E + d \underbrace{Z_u \cdot Z_v}_F & \underbrace{Z_v \cdot n_v}_{-N} &= c \underbrace{Z_u \cdot Z_v}_F + d \underbrace{Z_v \cdot Z_v}_G \end{aligned}$$

eşitlikleri elde edilir. Bu eşitlikler;

$$- \begin{bmatrix} L & M \\ M & N \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E & F \\ F & G \end{bmatrix} \quad (3.2.11)$$

matris çarpımı şeklinde yazılır. (3.2.11) eşitliğinde $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ çekilirse,

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} L & M \\ M & N \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E & F \\ F & G \end{bmatrix}^{-1} \quad (3.2.12)$$

elde edilir.

$$\begin{bmatrix} E & F \\ F & G \end{bmatrix}^{-1} = \frac{1}{EG - F^2} \begin{bmatrix} G & -F \\ -F & E \end{bmatrix}$$

ifadesi (3.2.12)'de yerine yazılırsa,

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{MF-LG}{EG-F^2} & \frac{LF-ME}{EG-F^2} \\ \frac{NF-MG}{EG-F^2} & \frac{MF-NE}{EG-F^2} \end{bmatrix} \quad (3.2.13)$$

eşitliğine sahip olunur. (3.2.13) eşitliği (3.2.10)'da yerine yazılırsa,

$$n_u = aZ_u + bZ_v = \left(\frac{MF-LG}{EG-F^2} \right) Z_u + \left(\frac{LF-ME}{EG-F^2} \right) Z_v$$

ve

$$n_v = cZ_u + dZ_v = \left(\frac{NF - MG}{EG - F^2} \right) Z_u + \left(\frac{MF - NE}{EG - F^2} \right) Z_v$$

Weingarten denklemleri elde edilir.

E^3 'de $S = Z(U)$ yüzeyinin şekli hakkında bilgi edinmek için aşağıdaki tanımlardan faydalanılır.

Tanım 3.2.10. $Z : U \rightarrow E^3$ bir patch olsun. $S = Z(U)$ yüzeyi üzerindeki K Gauss Eğriliği;

$$K = \det \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \frac{LN - M^2}{EG - F^2} = \frac{\det II}{\det I} \quad (3.2.14)$$

şeklinde tanımlanır. [1]

$\det I = EG - F^2 > 0$ olduğundan K ve $\det II$ 'nin işareti aynıdır.

Tanım 3.2.11. $Z : U \rightarrow E^3$ bir patch olsun. $S = Z(U)$ yüzeyi üzerindeki H Ortalama Eğriliği;

$$\begin{aligned} H &= \frac{1}{2} iz \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \frac{2MF - LG - NE}{2(EG - F^2)} \\ &= -\frac{1}{2(EG - F^2)} iz \begin{bmatrix} G & -F \\ -F & E \end{bmatrix} \begin{bmatrix} L & M \\ M & N \end{bmatrix} \\ &= -\frac{1}{2} iz(I^{-1}II) = -\frac{1}{2} tr_1 II \end{aligned} \quad (3.2.15)$$

şeklinde tanımlanır. [1]

Tanım 3.2.12. S, E^3 'de bir yüzey, K Gauss Eğriliği ve II , S üzerinde ikinci temel form olsun. II .temel form;

(i) S üzerinde $K > 0$ olan yerlerde definit,

(ii) S üzerinde $K < 0$ olan yerlerde indefinit

olarak tanımlıdır. [1]

Bir $p \in S$ için $K(p) > 0$ olduğu zaman S üzerindeki p ' nin yeteri kadar küçük delinmiş tüm komşulukları S_p ' nin bir tarafındadır. $K(p) < 0$ olduğu zaman S üzerindeki p ' nin keyfi küçük komşulukları S_p ' nin diğer tarafındaki noktaları içerir. [1]

S yüzeyinin noktaları K Gauss eğriliğine göre sınıflandırılır. Herhangi bir $p \in S$ noktası için;

- (i) $K(p) > 0$ ise p 'ye eliptik tipten nokta,
- (ii) $K(p) < 0$ ise p 'ye hiperbolik tipten nokta,
- (iii) $K(p) = 0$ ise p 'ye parabolik tipten nokta

denir. [13]

Bu üç ihtimalin dışında özel olarak 4. bir durum daha vardır. Bu da II . temel formun C^∞ katsayılar fonksiyonu $L = N = M = 0$ olması durumudur. Bu noktalara da yayılma noktaları denir. Parabolik tipten noktalarda L, N ve M 'nin en az biri farklı sıfır iken $K = 0$ olan noktalar kastedilir. Aşıkarak yayılma noktalarında $K = 0$ ' dir. [13]

Tanım 3.2.13. K Gauss eğriliği her noktasında;

- (i) pozitif olan S yüzeyine synclastic yüzey,
- (ii) negatif olan S yüzeyine anticlastic yüzey

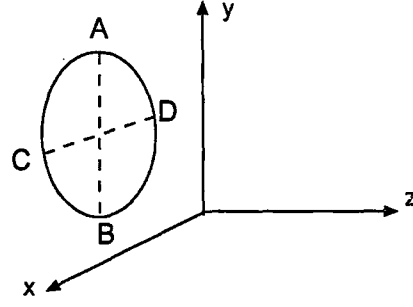
denir. [19]

Koni, silindir, düzlem, yarım küre ve kürenin gauss eğriliği sabittir. [19]

S üzerindeki herhangi bir noktada $E = G = 1$ ve $F = 0$ olacak şekilde uv -düzleminde afin koordinat değişimi yapılabilir. Bu noktada $H^2 \geq K$ dir.

Örnek 3.2.1. Şekil 3.8'deki çemberin z -ekseni etrafında döndürülmesiyle elde edilen tor yüzeyi dikkate alınsın. A noktasının geometrik yeri olan çember üstündeki noktalar hiperbolik noktalardır. B noktasının geometrik yeri olan çember üstündeki noktalar eliptik noktalardır. C noktasının geometrik yeri olan çember üstündeki noktalar parabolik noktalardır. [11]

Tanım 3.2.14. S , E^3 'de bir yüzey ve S üzerinde K Gauss Eğriliği, H da Ortalama Eğrilik olsun. S 'nin bir p noktasında $H^2 = K$ ise $c = H(p)$ olmak üzere $II(p) = cI(p)$ 'dir. Bu p noktasına umbilik nokta denir. [1]



Şekil 3.8.

Tanım 3.2.15. S , E^3 'de bir yüzey ve S üzerinde K Gauss Eğriliği, H da Ortalama Eğrilik olsun.

(i) $H' = \sqrt{H^2 - K}$ eğriliğine skew eğrilik,

(ii) $k_1 = H + H'$ ve $k_2 = H - H'$ eğriliklerine principal (asli) eğrilik denir. [1]

$k_1 = k_2$ ise (yani $H' = 0$) S yüzeyi umbilik karakterdedir. Yukarıdaki tanımdan hareketle;

$$\left. \begin{aligned} k_1 + k_2 &= H + H' + H - H' = 2H \\ k_1 - k_2 &= H + H' - H + H' = 2H' \\ k_1 \cdot k_2 &= (H + H') \cdot (H - H') = K \end{aligned} \right\} \quad (3.2.16)$$

sonuçlarına sahip olunur. [1]

$T_p : S_p \rightarrow S_p$, $p \in S$ noktasındaki $dZ = Z_u du + Z_v dv$ ' nin değerini yine aynı noktadaki $-dn = -n_u du - n_v dv$ ' nin değerine taşıyan lineer dönüşüm olsun. Weingarten denklemleri kullanılarak, T_p lineer dönüşümünün $\{Z_u(p), Z_v(p)\}$ bazına göre katsayılar matrisinin;

$$\frac{1}{EG - F^2} \begin{bmatrix} LG - MF & MG - NF \\ ME - LF & NE - MF \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -a & -c \\ -b & -d \end{bmatrix} = S \quad (3.2.17)$$

şeklinde olduğu görülür. Bu matris, T_p lineer dönüşümünün,

$$\lambda^2 - 2H\lambda + K = 0 \quad (3.2.18)$$

karakteristik denklemini sağlar. Gerçekten,

$$H = \frac{1}{2} iz \quad S = \frac{1}{2}(-a - d) = -\frac{1}{2} \frac{LG + NE - 2MF}{EG - F^2} = \frac{2MF - LG - NE}{2(EG - F^2)}$$

$$K = \det S = ad - bc = \frac{LN - M^2}{EG - F^2}$$

sonuçları (3.2.14) ve (3.2.15)'i sağlar.

(3.2.18)'deki T_p lineer dönüşümünün karakteristik denkleminin kökleri $k_1(p)$ ve $k_2(p)$ ile verilir. Gerçekten; (3.2.16)'daki $H = \frac{k_1+k_2}{2}$ ve $K = k_1k_2$ eşitlikleri (3.2.18)'de yerine yazılırsa,

$$\begin{aligned} \lambda^2 - 2H\lambda + K &= \lambda^2 - 2\left(\frac{k_1+k_2}{2}\right)\lambda + k_1k_2 = 0 \\ \implies \lambda^2 - 2(k_1 + k_2)\lambda + k_1k_2 &= 0 \\ \implies (\lambda - k_1)(\lambda - k_2) &= 0 \\ \implies \lambda = k_1 \text{ ve } \lambda = k_2 & \end{aligned}$$

olur.

T_p 'nin karakteristik değerlerine karşılık gelen vektörler asli (principal) doğrultular, p 'deki,

$$\begin{vmatrix} dv^2 & -dudv & du^2 \\ E & F & G \\ L & M & N \end{vmatrix} = 0 \quad (3.2.19)$$

eşitliğini sağlayan S_p 'deki $dZ = Z_u du + Z_v dv$ sıfır olmayan vektörler tarafından belirtilir. [1]

Bir umbilik noktada tüm doğrultular asli doğrultudur. Fakat umbilik olmayan herhangi bir noktada (S_p 'de) birbirine dik iki asli doğrultu vardır. [1]

Tanım 3.2.16. Bir $P \subset R$ açık alt aralığında $\gamma : P \rightarrow S$ bir C^∞ dönüşüm olsun. $\gamma(t)$ üzerinde $\vec{T}(t) = \gamma'(t) / |\gamma'(t)|$ birim teğet vektör alanının yay parametrisine göre türevi daima S 'ye ortogonal ise $\gamma : P \rightarrow S$ dönüşümüne S üzerinde I . temel form için geodezik denir. [1]

Yani; $\forall t \in P$ için $\gamma''(t) \in T_S^\perp(\alpha(t))$ ise $\gamma : P \rightarrow S$ dönüşümü S üzerinde I . temel form için geodeziktir. Buna göre, S üzerinde yay parametresi ile verilen herhangi bir doğru parçası S üzerinde geodeziktir. Benzer olarak $x^2 + y^2 + z^2 = 1$

denklemleri ile verilen S^2 birim küresi üzerinde ki büyük çember parçaları geodezik eğrilerdir.

Klasik yüzeyler teorisinden biliniyor ki Z_u, Z_v ve n 'nin S üzerindeki her noktadaki değerleri E_p^3 'yi gerer. Böylece Z_{uu}, Z_{uv} ve Z_{vv} vektörleri Z_u, Z_v ve n 'nin birer lineer birleşimi olarak yazılabilir. Bu ise S üzerindeki,

$$\left. \begin{aligned} Z_{uu} &= aZ_u + bZ_v + cn \\ Z_{uv} &= dZ_u + eZ_v + fn \\ Z_{vv} &= gZ_u + hZ_v + jn \end{aligned} \right\} \dots (1)$$

Gauss denklemlerini verir.

Bu eşitliklerin herbiri Z_u, Z_v ve n ile iç çarpıma tabi tutup, (3.2.9) eşitlikleri dikkate alınır;

$$\begin{aligned} Z_{uu} \cdot Z_u &= a = \Gamma_{11}^1 & Z_{uv} \cdot Z_u &= d = \Gamma_{12}^1 & Z_{vv} \cdot Z_u &= g = \Gamma_{22}^1 \\ Z_{uu} \cdot Z_v &= b = \Gamma_{11}^2 & Z_{uv} \cdot Z_v &= e = \Gamma_{12}^2 & Z_{vv} \cdot Z_v &= h = \Gamma_{22}^2 \\ Z_{uu} \cdot n &= c = L & Z_{uv} \cdot n &= f = M & Z_{vv} \cdot n &= j = N \end{aligned}$$

sonuçlarına ulaşılır. Bu sonuçlar, (1)'de yerine yazılırsa;

$$\left. \begin{aligned} Z_{uu} &= \Gamma_{11}^1 Z_u + \Gamma_{11}^2 Z_v + Ln \\ Z_{uv} &= \Gamma_{12}^1 Z_u + \Gamma_{12}^2 Z_v + Mn \\ Z_{vv} &= \Gamma_{22}^1 Z_u + \Gamma_{22}^2 Z_v + Nn \end{aligned} \right\} (3.2.20)$$

eşitlikleri bulunur ki, bu eşitliklere Gauss Denklemleri denir. [1] Burada Γ_{ij}^k 'lar I . temel form için Christoffel sembolleridir. (3.2.20)'deki ilk iki denklemden v 'ye, son iki denklemden u 'ya göre türev alınır;

$$\left. \begin{aligned} Z_{uvv} &= \Gamma_{11}^1 Z_{uv} + \Gamma_{11}^2 Z_{vv} + L_v n + Ln_v \\ Z_{uvv} &= \Gamma_{12}^1 Z_{uv} + \Gamma_{12}^2 Z_{vv} + M_v n + Mn_v \\ Z_{uvu} &= \Gamma_{12}^1 Z_{uu} + \Gamma_{12}^2 Z_{vu} + M_u n + Mn_u \\ Z_{vuu} &= \Gamma_{22}^1 Z_{uu} + \Gamma_{22}^2 Z_{vu} + N_u n + Nn_u \end{aligned} \right\} (3.2.21)$$

denklemleri elde edilir.(3.2.10) Weingarten denklemleri ve (3.2.20) Gauss denklemleri (3.2.21)'de göz önüne alınır,

$$\left. \begin{aligned}
Z_{uvv} &= (\Gamma_{11}^1 \Gamma_{12}^1 + \Gamma_{11}^1 \Gamma_{22}^1 + cL)Z_u + (\Gamma_{11}^1 \Gamma_{12}^2 + \Gamma_{11}^2 \Gamma_{22}^2 + dL)Z_v + (\Gamma_{11}^1 M + \Gamma_{11}^2 N + L_v)n \\
Z_{uvv} &= (\Gamma_{12}^1 \Gamma_{12}^1 + \Gamma_{12}^2 \Gamma_{22}^1 + cM)Z_u + (\Gamma_{12}^1 \Gamma_{12}^2 + \Gamma_{12}^2 \Gamma_{22}^2 + dM)Z_v + (\Gamma_{12}^1 M + \Gamma_{12}^2 N + M_v)n \\
Z_{uvu} &= (\Gamma_{11}^1 \Gamma_{12}^1 + \Gamma_{12}^2 \Gamma_{12}^1 + Ma)Z_u + (\Gamma_{12}^1 \Gamma_{12}^2 + \Gamma_{12}^2 \Gamma_{12}^2 + bM)Z_v + (\Gamma_{12}^1 L + \Gamma_{12}^2 M + M_u)n \\
Z_{vvu} &= (\Gamma_{11}^1 \Gamma_{22}^1 + \Gamma_{12}^2 \Gamma_{22}^1 + aN)Z_u + (\Gamma_{11}^2 \Gamma_{22}^2 + \Gamma_{12}^2 \Gamma_{22}^2 + bN)Z_v + (\Gamma_{22}^1 L + \Gamma_{22}^2 M + N_u)n
\end{aligned} \right\} (3.2.22)$$

denklemleri elde edilir ki bu da Z_{uvv} , Z_{uvv} , Z_{uvu} ve Z_{vvu} 'lerin $\{Z_u, Z_v, n\}$ bazı cinsinden yazılabileceğini gösterir.

$$Z_{uvv} = Z_{uvu} \quad ve \quad Z_{uvv} = Z_{vvu} \quad (3.2.23)$$

alınır ve elde edilen denklemlerin her iki yanındaki n 'nin katsayıları eşitlenirse, (3.2.22)'den;

$$\left. \begin{aligned}
\Gamma_{11}^1 M + \Gamma_{11}^2 N + L_v &= \Gamma_{12}^1 L + \Gamma_{12}^2 M + M_u \\
\Rightarrow L_v - M_u &= L\Gamma_{12}^1 + M(\Gamma_{12}^2 - \Gamma_{11}^1) - N\Gamma_{11}^2 \\
\Gamma_{12}^1 M + \Gamma_{12}^2 N + M_v &= \Gamma_{22}^1 L + \Gamma_{22}^2 M + N_u \\
\Rightarrow M_v - N_u &= L\Gamma_{22}^1 + M(\Gamma_{22}^2 - \Gamma_{12}^1) - N\Gamma_{12}^2
\end{aligned} \right\} (3.2.24)$$

denklemlerini elde edilir ki bu denklemlere Codazzi-Mainardi denklemleri denir. [1]

(3.2.23)'deki her bir denklemin her iki tarafında Z_u ve Z_v 'nin katsayılarını eşit alınarak;

$$K = K(I) \quad (3.2.25)$$

Egregium denklik teoremine sahip olunur. Egregium denklik teoremi, S yüzeyi üzerindeki K Gauss Eğriliğinin birinci mertebeden bir diferansiyel form olduğunu ifade eder. Yani; (3.2.25) ile K Gauss eğriliğinin daha önce tanımlanan $K(I)$ intrinsic (esas) eğriliği ile çakıştığını gösterip, bu da (3.2.14)' de II . temel formun determinantının I . temel formun determinantına oranı olarak tanımlanan K Gauss eğriliğinin, I . temel form tarafından da belirtilebileceği anlamına gelir. Böylece; S yüzeyi üzerindeki K Gauss eğriliği, I . temel form tarafından tanımlanan intrinsic geometrinin bir parçasıdır. Bu inceleme herhangi bir semi-Riemannian manifold üzerinde Riemann eğrilik tensör tanımının mümkün olabileceğini gösterir. [1]

$Cod(I, II)$ ile $det \neq 0$ olmak üzere (3.2.24)'deki Codazzi-Mainardi denklemlerini sağlayan I ve II reel quadratik formları gösterir.

Teorem 3.2.3. (*E³'deki Yüzeyler İçin Temel Teorem*): uv - düzleminin bir V açık kümesi üzerinde $EG - F^2 > 0$, $E > 0$, $\text{Cod}(I, II)$ ve $\det II / \det I = K$ olmak üzere;

$$I = Edu^2 + 2Fdudv + Gdv^2 \quad \text{ve} \quad II = Ldu^2 + 2Mdudv + Ndv^2$$

C^∞ reel quadratik formlar olup, V 'nin herhangi bir noktasının bir U komşuluğunda I. ve II. temel formlar ile bir S yüzeyi tanımlayan bir $Z : U \rightarrow E^3$ patch'ı vardır. Üstelik Z patch'ı, U üzerinde E^3 'ün yönü koruyan izometrilere oluşumu ile bir tek olarak bellidir. [1]

Tanım 3.2.17. $Z : U \rightarrow E^3$ bir patch ve $S = Z(U)$ yüzeyi üzerinde n birim normal vektör alanı olsun.

$$III = dn \cdot dn \tag{3.2.26}$$

eşitliği ile tanımlanan quadratik forma S yüzeyi üzerinde üçüncü temel form denir. [1]

S yüzeyi üzerinde III. temel form $K \neq 0$ olduğu yerlerde pozitif definitir. [1]

Tanım 3.2.18. Bir S yüzeyi üzerinde tanımlanan H' skew eğriliğinin sıfırdan farklı olduğu noktaların kümesine S yüzeyinin umbilik free (umbilik olmayan) kısmı denir ve

$$S' = \{p \in S \mid H'(p) \neq 0\} \tag{3.2.27}$$

ile gösterilir. [1]

Tanım 3.2.19. Bir S yüzeyi üzerinde I, II ve III temel formlar, K Gauss eğriliği, H Ortalama eğrilik ve H' de skew eğrilik olsun.

$$\left. \begin{aligned} H'I' &= II - HI \\ H'II' &= HII - KI \\ III' &= 2HII' - KI' \end{aligned} \right\} \tag{3.2.28}$$

eşitlikleri ile tanımlanan I' , II' ve III' formlarına S' üzerinde skew temel formlar denir. [1]

Tanım 3.2.20. S' üzerinde I', II' ve III' skew temel formlar olsun.

- (i) I' indefinit,
- (ii) II' , $K < 0$ olan yerlerde definit, $K > 0$ olan yerlerde indefinit,
- (iii) III' , $K \neq 0$ olan yerlerde indefinit

dir. [1]

Tanım 3.2.21. Herhangi bir S yüzeyi üzerinde teğetleri daima asli eğrilik doğrultusu olan eğriye eğrilik çizgisi (line of curvature) denir. Eğrilik çizgi denklemi;

$$\begin{vmatrix} dv^2 & -dudv & du^2 \\ E & F & G \\ L & M & N \end{vmatrix} = 0$$

ile verilir. [19]

E^3 uzayında sıkça kullanılan özel lokal koorninatlar şunlardır:

(i) u, v ortogonal koordinatlar: S yüzeyi üzerinde herhangi bir noktanın bir komşuluğunda $F \equiv 0$ ile karakterize edilir. Bu noktalarda $u \equiv$ sabit parametre eğrileri, $v \equiv$ sabit parametre eğrilerine ortogonaldir. [1]

(ii) u, v eğrilik çizgi koordinatları: S yüzeyi üzerinde herhangi bir umbilik olmayan noktanın bir komşuluğunda $F \equiv M \equiv 0$ ile karakterize edilir. Buralarda tüm $u \equiv$ sabit ve $v \equiv$ sabit parametre eğrileri eğrilik çizgileridir. S üzerinde $F = M = 0$ olan yerlerde ;

$$K = \frac{LN}{EG}, \quad H = \frac{EN + GL}{2EG} \quad \text{ve} \quad H' = \sqrt{H^2 - K} = \frac{|EN - GL|}{2EG}$$

olduğundan; $k_1 = H + H' = \frac{L}{E}$ $k_2 = H - H' = \frac{N}{G}$ olup, $\frac{L}{E}$ ile $\frac{N}{G}$ asli eğriliklerdir. Eğrilik çizgi koordinatları $L = k_1 E$ ve $N = k_2 G$ gibi kullanıldığında, k_1 ve k_2 yeniden indekslenirse, Coddazzi-Mainardi denklemleri;

$$\left. \begin{aligned} E = Z_u \cdot Z_u &\implies E_v = Z_{uv} \cdot Z_u + Z_u \cdot Z_{uv} = 2Z_{uv} \cdot Z_u \implies Z_{uv} \cdot Z_u = E_v/2 \\ F = Z_u \cdot Z_v = 0 &\implies F_u = Z_{uu} \cdot Z_v + Z_u \cdot Z_{vu} = 0 \implies Z_{uu} \cdot Z_v = -Z_u \cdot Z_{vu} = -E_v/2 \\ G = Z_v \cdot Z_v &\implies G_u = Z_{vu} \cdot Z_v + Z_v \cdot Z_{vu} = 2Z_v \cdot Z_{vu} \implies Z_v \cdot Z_{vu} = G_u/2 \\ F = Z_u \cdot Z_v = 0 &\implies F_v = Z_{uv} \cdot Z_v + Z_u \cdot Z_{vv} = 0 \implies Z_u \cdot Z_{vv} = -Z_{uv} \cdot Z_v = -G_u/2 \end{aligned} \right\}$$

eşitlikleri dikkate alınarak,

$$\begin{aligned}
L_v &= L\Gamma_{12}^1 - N\Gamma_{11}^2 & -N_u &= L\Gamma_{22}^1 - N\Gamma_{12}^2 \\
&= LZ_{uv} \cdot Z_u - NZ_{uu} \cdot Z_v & &= LZ_{vv} \cdot Z_u - NZ_{uv} \cdot Z_v \\
&= HE_v & &= -HG_u
\end{aligned}$$

formuna dönüşür. Böylece asli eğriliklerle türevleri arasındaki ilişkilerin;

$$\begin{aligned}
L &= k_1 E & N &= k_2 G \\
L_v &= (k_1)_v E + k_1 E_v = E_v H & N_u &= (k_2)_u G + k_2 G_u = G_u H \\
&\implies (k_1)_v = \frac{E_v}{2E} (k_2 - k_1) & &\implies (k_2)_u = \frac{G_u}{2G} (k_1 - k_2)
\end{aligned}$$

şeklinde olduğu görülür. [1]

(iii) *u, v asimptotik koordinatlar*: S yüzeyi üzerinde $\det II < 0$ olan herhangi bir noktasının bir komşuluğunda $L \equiv N \equiv 0$ ile karakterize edilen koordinatlardır. Bu noktalarda $u \equiv$ sabit ve $v \equiv$ sabit parametre eğrileri II için null olup, S üzerinde asimptotik eğriler olarak adlandırılır. [1]

(iv) *u, v isothermal koordinatlar*: S yüzeyi üzerinde herhangi bir noktanın bir komşuluğunda $E \equiv G \equiv 1$ ve $F \equiv 0$ ile karakterize edilen koordinatlardır. Bu koordinatlar I için isothermaldir, öyleki $w = u + iv$, $R_I = (S, [I])$ üzerinde bir konformal parametredir. [1]

(v) *u, v Tchebychev koordinatlar*: S yüzeyi üzerinde herhangi bir noktanın bir komşuluğunda $E \equiv G \equiv 1$ ile karakterize edilen koordinatlardır, öyleki u (veya v) her $v \equiv$ sabit (veya $u \equiv$ sabit) eğrisi boyunca bir yay uzunluğu parametresidir. [1]

3.3 Minkowski 3-Uzayında Lokal Yüzeyler

$\mathbb{R}^3 = \{(x, y, z) | x, y, z \in \mathbb{R}\}$ kümesine bir vektör uzayı ve bir C^∞ manifold gibi bakılır. \mathbb{R}^3 'deki $\vec{i} = (1, 0, 0)$, $\vec{j} = (0, 1, 0)$, $\vec{k} = (0, 0, 1)$ vektörlerini $\forall p \in \mathbb{R}^3$ için sırasıyla, $\vec{\partial}_x(p)$, $\vec{\partial}_y(p)$ ve $\vec{\partial}_z(p)$ karşılık tutulursa \mathbb{R}^3 ve \mathbb{R}_p^3 arasında bir özdeşlik dönüşüm tanımlanmış olur. [1]

Tanım 3.3.1. $\forall \vec{A} = a_1\vec{i} + a_2\vec{j} + a_3\vec{k}$, $\vec{B} = b_1\vec{i} + b_2\vec{j} + b_3\vec{k} \in \mathbb{R}^3$ için,

$$\vec{A} \cdot \vec{B} = a_1b_1 + a_2b_2 - a_3b_3 \quad (3.3.1)$$

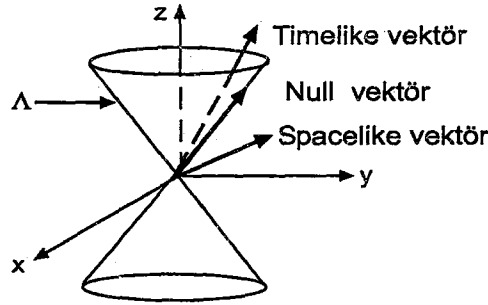
ile tanımlı $\cdot : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ dönüşümüne \mathbb{R}^3 'de bir skalar çarpım denir ve bu skalar çarpım Minkowski iç çarpım olarak adlandırılır. [1]

\mathbb{R}^3 vektör uzayı, üzerinde tanımlı Minkowski çarpımı ile Minkowski uzayı olarak adlandırılır ve $E^{3,1}$ ile gösterilir. $E^{3,1}$ Minkowski uzayı aynı zamanda bir Lorentz 3-manifolddur. [1]

Tanım 3.3.2. $E^{3,1}$ Minkowski uzayında $\vec{A} \in E^{3,1}$ vektörü için;

- (i) $\vec{A} \cdot \vec{A} > 0$ veya $\vec{A} = \vec{0}$ ise \vec{A} 'ya spacelike,
- (ii) $\vec{A} \cdot \vec{A} < 0$ ve $\vec{A} \neq \vec{0}$ ise \vec{A} 'ya timelike,
- (iii) $\vec{A} \cdot \vec{A} = 0$ ve $\vec{A} \neq \vec{0}$ ise \vec{A} 'ya null vektör

denir. [1]



Şekil 3.9. Vektörlerin Işık Konisine Göre Durumları

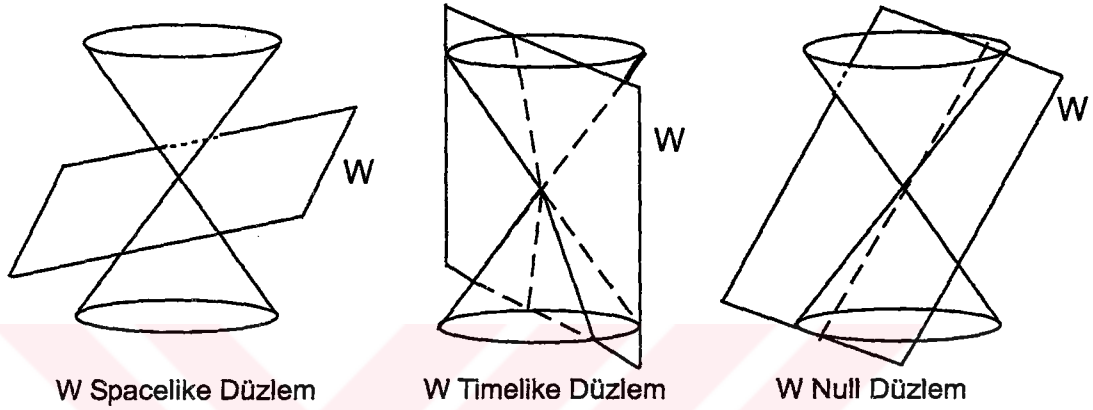
Bu tanımdan hareketle Şekil 3.9'da görüldüğü gibi timelike vektörler Λ ışık(time) konisinin içinde, null vektörler Λ ışık konisinin üzerinde ve spacelike vektörler ise Λ ışık konisinin dışında bulunur.

Tanım 3.3.3. $E^{3,1}$ Minkowski uzay ve W , $E^{3,1}$ 'de 2-boyutlu bir alt uzay (düzlem) olsun. W düzleminin öklidyen birim normalleri;

- (i) timelike ise W 'ya spacelike,
- (ii) spacelike ise W 'ya timelike,
- (iii) null ise W 'ya null düzlem

denir. [6]

Yukarıdaki özelliklere W düzleminin causal karakterleri denir. [6] (Şekil 3.10)



Şekil 3.10. W Düzleminin Causal Karakterleri

Lemma 3.3.1. W , $E^{3,1}$ Minkowski uzayında 2-boyutlu bir alt uzay olsun. Buna göre, aşağıdaki ifadeler birbirine denktir.

- (1) W , timelike ise W bir Lorentz vektör uzayıdır,
- (2) W lineer bağımsız null vektör içerir,
- (3) W bir timelike vektör içerir. [6]

Tanım 3.3.4. $\forall \vec{A} = a_1\vec{i} + a_2\vec{j} + a_3\vec{k}$, $\vec{B} = b_1\vec{i} + b_2\vec{j} + b_3\vec{k} \in E^{3,1}$ için
 $\times : E^{3,1} \times E^{3,1} \rightarrow E^{3,1}$

$$\vec{A} \times \vec{B} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & -\vec{k} \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix} \quad (3.3.2)$$

ile tanımlanan işleme $E^{3,1}$ 'de bir vektörel çarpım denir. [1]

Bu vektörel çarpım;

$$(i) \vec{B} \times \vec{A} = -(\vec{A} \times \vec{B})$$

$$(ii) \vec{A} \times \vec{B} \perp \vec{A} \text{ ve } \vec{A} \times \vec{B} \perp \vec{B}$$

$$(iii) \vec{A} \times \vec{B} = \vec{0} \Leftrightarrow \vec{A} \text{ ve } \vec{B} \text{ lineer bağımlı}$$

özelliklerine sahiptir. $\vec{A} \times \vec{B} \neq \vec{0}$; \vec{A} ve \vec{B} tarafından gerilen düzlemde yatıyorsa bu düzlem nulldur. [6]

\mathbb{R}^3 vektör uzayı üzerinde tanımlı E^3 Öklid uzayı ve $E^{3,1}$ Minkowski uzayında kullanılan ortak işlemlerin karıştırılmaması için; E^3 Öklid uzayındaki işlemlerin sağ alt köşesine " ϵ " sembolü konulur. Yani; $\vec{A}, \vec{B} \in \mathbb{R}^3$ için,

$$\vec{A} \cdot \vec{B} \rightarrow \text{Minkowski İç Çarpım}$$

$$\vec{A} \cdot_{\epsilon} \vec{B} \rightarrow \text{Öklid İç Çarpım}$$

$$\vec{A} \times \vec{B} \rightarrow \text{Minkowski Vektörel Çarpım}$$

$$\vec{A} \times_{\epsilon} \vec{B} \rightarrow \text{Öklid Vektörel Çarpım}$$

$$|\vec{A}| \rightarrow \vec{A}'\text{nin Minkowski Uzunluğu}$$

$$|\vec{A}|_{\epsilon} \rightarrow \vec{A}'\text{nin Öklid Uzunluğu}$$

Tanım 3.3.5. $\vec{A} = a_1\vec{i} + a_2\vec{j} + a_3\vec{k} \in \mathbb{R}^3$ vektörü için,

$$(i) a_1 = a_2 = 0 \text{ ise } \vec{A} \text{ vektörü dikey,}$$

$$(ii) a_3 = 0 \text{ ise } \vec{A} \text{ vektörü yatay}$$

vektör olarak adlandırılır. [1]

Bu tanım E^3 ve $E^{3,1}$ için ortak bir tanımdır.

Tanım 3.3.6. $W \subset \mathbb{R}^3$ düzlemi için, W 'nin keyfi iki noktasını birleştiren vektör

$$(i) \text{ yatay ise } W \text{ düzlemi yatay,}$$

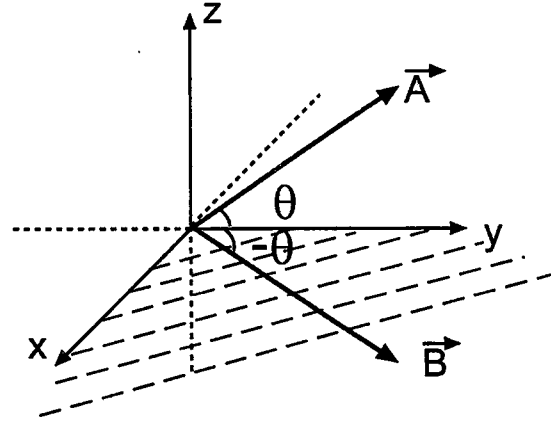
$$(ii) \text{ düşey ise } W \text{ düzlemi dikey}$$

düzlem olarak adlandırılır. [6]

Teorem 3.3.1. Herhangi bir $\vec{A} \neq \vec{0} \in \mathbb{R}^3$ vektörü için, \vec{A}' 'nin $|\vec{A}|$ Minkowski uzunluğu ile $|\vec{A}|_{\epsilon}$ Öklidyen uzunluğu arasında ,

$$|\vec{A}| = |\vec{A}|_{\epsilon} |\cos 2\theta|^{1/2} \quad (3.3.3)$$

eşitliği vardır. Burada θ , \vec{A} vektörü ile herhangi bir yatay düzlem arasındaki açığı göstermektedir.



Şekil 3.11.

İspat. $\vec{A} = a\vec{i} + b\vec{j} + c\vec{k} \neq \vec{0}$ ve $\vec{B} = a\vec{i} + b\vec{j} - c\vec{k} \neq \vec{0} \in \mathbb{R}^3$ vektörleri alınsın. \vec{A} vektörünün xy -yatay düzlemi ile yaptığı açığı θ denirse, \vec{B} vektörünün xy -yatay düzlemi ile yaptığı açı Şekil 3.11'de görüleceği gibi $-\theta$ olur.

\vec{A} ve \vec{B} vektörlerinin öklidyen uzunlukları;

$$\left. \begin{aligned} |\vec{A}|_{\epsilon} &= (\vec{A} \cdot_{\epsilon} \vec{A})^{1/2} = (a^2 + b^2 + c^2)^{1/2} \\ |\vec{B}|_{\epsilon} &= (\vec{B} \cdot_{\epsilon} \vec{B})^{1/2} = (a^2 + b^2 + c^2)^{1/2} \end{aligned} \right\}$$

şeklinde olup, böylece;

$$|\vec{A}|_{\epsilon} = |\vec{B}|_{\epsilon} \quad \dots\dots (1)$$

sonucuna ulaşılır. \vec{A} ile \vec{B} 'nin Öklidyen iç çarpımı ile \vec{A} 'nın kendisi ile Minkowski iç çarpımı;

$$\left. \begin{aligned} \vec{A} \cdot_{\epsilon} \vec{B} &= aa + bb + c(-c) = a^2 + b^2 - c^2 \\ \vec{A} \cdot \vec{A} &= aa + bb - cc = a^2 + b^2 - c^2 \end{aligned} \right\}$$

şeklinde olup, bu eşitlikler de;

$$\vec{A} \cdot_{\epsilon} \vec{B} = \vec{A} \cdot \vec{A} \quad \dots\dots (2)$$

sonucunu verir. $\forall \vec{X}, \vec{Y} \in \mathbb{R}^3$ vektörleri arasındaki açı β olmak üzere, E^3 Öklid uzayında;

$$\vec{X} \cdot_{\epsilon} \vec{Y} = |\vec{X}|_{\epsilon} |\vec{Y}|_{\epsilon} \cos \beta$$

eşitliği kullanılırsa, \vec{X} vektörü yerine \vec{A} vektörü ve \vec{Y} vektörü yerine \vec{B} vektörü alınıp \vec{A} ve \vec{B} vektörleri arasındaki açı 2θ olduğundan,

$$\vec{A} \cdot_{\epsilon} \vec{B} = |\vec{A}|_{\epsilon} |\vec{B}|_{\epsilon} \cos 2\theta \quad \dots (3)$$

sonucu elde edilir. (1) ve (2), (3)'de yerine yazılırsa,

$$\begin{aligned} \vec{A} \cdot_{\epsilon} \vec{B} &= |\vec{A}|_{\epsilon} |\vec{B}|_{\epsilon} \cos 2\theta \\ \vec{A} \cdot \vec{A} &= |\vec{A}|_{\epsilon} |\vec{A}|_{\epsilon} \cos 2\theta \\ |\vec{A}|^2 &= |\vec{A}|_{\epsilon}^2 \cos 2\theta \\ |\vec{A}| &= |\vec{A}|_{\epsilon} |\cos 2\theta|^{1/2} \end{aligned}$$

ifadesi elde edilir ki bu da ispatı tamamlar. □

$0 \leq |\cos 2\theta| \leq 1$ olduğundan (3.3.3)'den,

$$|\vec{A}| \leq |\vec{A}|_{\epsilon} \quad (3.3.4)$$

eşitsizliği elde edilir. Böylece şu sonucu verebiliriz:

Sonuç 3.3.1. \mathbb{R}^3 'de herhangi bir vektörün öklidyen uzunluğu Minkowski uzunluğundan daima büyük veya eşittir. Eşitlik durumu üçüncü bileşenin sıfır olmasıyla mümkündür.

Teorem 3.3.2. Herhangi iki $\vec{A} \neq \vec{0}$ ve $\vec{B} \neq \vec{0} \in \mathbb{R}^3$ lineer bağımsız vektörleri için, $\vec{A} \times \vec{B}$ 'nin Minkowski uzunluğu ile $\vec{A} \times_{\epsilon} \vec{B}$ 'nin Öklidyen uzunluğu arasında ,

$$|\vec{A} \times \vec{B}| = |\vec{A} \times_{\epsilon} \vec{B}|_{\epsilon} |\cos 2\theta|^{1/2} \quad (3.3.5)$$

ilişkisi vardır. Burada θ , $\vec{A} \times \vec{B}$ (veya $\vec{A} \times_{\epsilon} \vec{B}$)'nin yatay düzlemle yaptığı açığı göstermektedir.

İspat. $\vec{A} = a\vec{i} + b\vec{j} + c\vec{k} \neq \vec{0}$ ve $\vec{B} = a'\vec{i} + b'\vec{j} - c'\vec{k} \neq \vec{0} \in \mathbb{R}^3$ vektörleri alınsın. $\vec{A} \times \vec{B}$ vektörünün xy -yatay düzlemi ile yaptığı açı θ olsun. (3.3.3)'de \vec{A} vektörü yerine $\vec{A} \times \vec{B}$ vektörü alınır;

$$|\vec{A} \times \vec{B}| = |\vec{A} \times \vec{B}|_{\epsilon} |\cos 2\theta|^{1/2} \quad \dots (1)$$

eşitliği elde edilir. \vec{A} ve \vec{B} vektörlerinin Minkowski vektörel çarpımı ve Öklidyen vektörel çarpımı;

$$\vec{A} \times \vec{B} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & -\vec{k} \\ a & b & c \\ a & b & -c \end{vmatrix} = (-2bc, 2ac, 0) \quad \text{ve} \quad \vec{A} \times_{\epsilon} \vec{B} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a & b & c \\ a & b & -c \end{vmatrix} = (-2bc, 2ac, 0)$$

şeklinde olup, bu da;

$$\vec{A} \times \vec{B} = \vec{A} \times_{\epsilon} \vec{B} \quad \dots(2)$$

sonucunu verir. (2), (1) eşitliğinin sağ tarafında kullanırsa;

$$|\vec{A} \times \vec{B}| = |\vec{A} \times_{\epsilon} \vec{B}|_{\epsilon} |\cos 2\theta|^{1/2}$$

ifadesi elde edilir ki bu da ispatı tamamlar. □

$0 \leq |\cos 2\theta| \leq 1$ olduğundan (3.3.5)'den,

$$|\vec{A} \times \vec{B}| \leq |\vec{A} \times_{\epsilon} \vec{B}|_{\epsilon} \quad (3.3.6)$$

eşitsizliği elde edilir. Böylece şu sonucu verebiliriz:

Sonuç 3.3.2. \mathbb{R}^3 'de herhangi iki vektörün Minkowski vektörel çarpımlarının Minkowski uzunluğu, Öklidyen vektörel çarpımlarının Öklidyen uzunluğundan daima küçük veya eşittir.

Teorem 3.3.3. $\vec{A} \neq \vec{0}$ ve $\vec{B} \neq \vec{0} \in \mathbb{R}^3$ herhangi iki lineer bağımsız vektör olsun. $\vec{A} \times \vec{B}$ ve $\vec{A} \times_{\epsilon} \vec{B}$ vektörleri \vec{A} ve \vec{B} tarafından gerilen düzlemin;

- (i) $\vec{A} \times \vec{B}$ timelike ise aynı tarafında,
- (ii) $\vec{A} \times \vec{B}$ spacelike ise zıt taraflarında

yatar. [1]

Tanım 3.3.7. $F : E^{3,1} \rightarrow E^{3,1}$ izometrisi; $\forall \vec{V}, \vec{W} \in E^{3,1}$ C^{∞} vektör alanları için;

$$F_{\star} \vec{V} \cdot F_{\star} \vec{W} = \vec{V} \cdot \vec{W} \quad (3.3.7)$$

eşitliğini sağlıyorsa F 'ye $E^{3,1}$ üzerinde bir C^{∞} diffeomorfizm denir. [1]

Tanım 3.3.8. $E^{3,1}$ Minkowski uzayının orjin noktasını sabit bırakan herhangi bir izometrisine $E^{3,1}$ 'in bir lineer izometrisi denir. [1]

Böylece $E^{3,1}$ 'in herhangi bir izometrisi; bir ötelemeden sonra bir lineer izometrinin bileşkesidir.

$E^{3,1}$ 'deki tüm $g : E^{3,1} \rightarrow E^{3,1}$ lineer izometrilere grubu $\mathcal{O}_1(3)$ (veya $\mathcal{O}(2,1)$), $\{\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\}$ bazına göre elde edilen katsayılar matrislerinin kümesidir. $\mathcal{O}_1(3)$ pseudo ortogonal grup,

$$GL(3, R) = \{A \mid A = [a_{ij}] \in R_3^3, \det A \neq 0\}$$

grubunun kapalı bir alt grubudur. $\mathcal{O}_1(3)$ pseudo-ortogonal grup; $\mathcal{O}_1^{++}(3)$, $\mathcal{O}_1^{--}(3)$, $\mathcal{O}_1^{+-}(3)$ ve $\mathcal{O}_1^{-+}(3)$ gibi irtibatlı dört bileşene sahiptir. Yani;

$$\mathcal{O}_1(3) = \mathcal{O}_1^{++}(3) \cup \mathcal{O}_1^{--}(3) \cup \mathcal{O}_1^{+-}(3) \cup \mathcal{O}_1^{-+}(3)$$

dir. $\mathcal{O}_1^{++}(3)$ özdeşliğe, $\mathcal{O}_1^{--}(3)$ x-ekseni etrafında 180° dönmeye, $\mathcal{O}_1^{+-}(3)$ $z = 0$ düzleminde yansımaya ve $\mathcal{O}_1^{-+}(3)$ da $y = 0$ düzleminde yansımaya karşılık gelen izometrilere içerir. [1]

$\mathcal{O}_1(3)$ 'de yönü koruyan tüm izometrilere $\mathcal{O}_1^{++}(3) \cup \mathcal{O}_1^{--}(3)$ 'de yatarken, yönü tersine çeviren tüm izometrilere $\mathcal{O}_1^{+-}(3) \cup \mathcal{O}_1^{-+}(3)$ 'de yatar. [1]

$\mathcal{O}_1(3)$ 'deki herhangi bir lineer dönüşüm;

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cosh \theta & \sinh \theta \\ 0 & \sinh \theta & \cosh \theta \end{bmatrix}$$

katsayılar matrisine sahiptir. [1]

uv - düzleminin boş olmayan U açık alt kümesinin bir C^∞ $Z : U \rightarrow E^3$ dönüşümüne bir C^∞ $Z : U \rightarrow E^{3,1}$ dönüşümü olarak bakılabilir. Ayrıca U üzerinde $\vec{Z}_u \times \vec{Z}_v \neq \vec{0}$ olması için gerek ve yeter koşul U üzerinde $\vec{Z}_u \times_\epsilon \vec{Z}_v \neq \vec{0}$ olmasıdır. [1]

Tanım 3.3.9. $Z : U \rightarrow E^{3,1}$ bir patch olsun. $S = Z(U)$ üzerinde Minkowski birinci temel form;

$$\begin{aligned} I &= dZ \cdot dZ = (Z_u du + Z_v dv) \cdot (Z_u du + Z_v dv) \\ &= \underbrace{(Z_u \cdot Z_u)}_{E} du^2 + 2 \underbrace{(Z_u \cdot Z_v)}_{F} dudv + \underbrace{(Z_v \cdot Z_v)}_{G} dv^2 \\ &= Edu^2 + 2Fdudv + Gdv^2 \\ &= \begin{bmatrix} du & dv \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E & F \\ F & G \end{bmatrix} \begin{bmatrix} du \\ dv \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (3.3.8)$$

şeklinde tanımlanır. Burada $E = Z_u \cdot Z_u$, $F = Z_u \cdot Z_v$, $G = Z_v \cdot Z_v$ C^∞ fonksiyonlardır. [1]

Minkowski birinci temel form non-dejenere olmak zorundadır. Yani; $S = Z(U)$ üzerinde,

$$\det I = EG - F^2 \neq 0 \quad (3.3.9)$$

olmalıdır. [1]

Tanım 3.3.10. $Z : U \rightarrow E^{3,1}$ bir patch olsun. U üzerinde

$$|Z_u \times Z_v| = |\det I|^{1/2} \quad (3.3.10)$$

olmak üzere; S üzerindeki Minkowski birim normal vektör alanı,

$$n = \frac{Z_u \times Z_v}{|Z_u \times Z_v|} \quad (3.3.11)$$

şeklinde tanımlanır. [1]

n , S üzerindeki koordinat değişiminden bağımsızdır.

Tanım 3.3.11. $Z : U \rightarrow E^{3,1}$ bir patch ve I , $S = Z(U)$ üzerinde Minkowski birinci temel form, n de S üzerinde Minkowski birim normal vektör alanı olsun.

(i) $\forall p \in S$ noktasında $\det I_p > 0$ ise S_p 'ye spacelike, n 'ye timelike ve S yüzeyine de spacelike yüzey,

(ii) $\forall p \in S$ noktasında $\det I_p < 0$ ise S_p 'ye timelike, n 'ye spacelike ve S yüzeyine de timelike yüzey

denir. [1]

S yüzeyi spacelike yüzey olduğu zaman, $\forall p \in S$ noktasının bir komşuluğu $z = f(x, y)$ C^∞ fonksiyonunun grafiğidir. S yüzeyi timelike yüzey olduğu zaman, $\forall p \in S$ noktasının bir komşuluğu $y = f(x, z)$ veya $x = f(y, z)$ C^∞ fonksiyonlarından birinin grafiğidir. [1]

Teorem 3.3.4. $Z : U \rightarrow E^{3,1}$ (veya E^3) bir patch olsun. $S = Z(U)$ üzerinde Minkowski birinci temel form ve Öklidyen birinci temel form arasında;

$$|\det I| = |\cos 2\theta| \det I_e \quad (3.3.12)$$

eşitliği geçerlidir. Burada θ , n (veya n_ϵ)'nin $z = 0$ yatay düzlemi arasındaki öklidyen açıdır.

İspat. (3.3.5) ifadesinde \vec{A} vektörü yerine \vec{Z}_u ve \vec{B} vektörü yerine \vec{Z}_v alınır,

$$|\vec{Z}_u \times \vec{Z}_v| = |\vec{Z}_u \times_\epsilon \vec{Z}_v|_\epsilon |\cos 2\theta|^{1/2} \dots (1)$$

eşitliği elde edilir. Burada θ , $\vec{Z}_u \times \vec{Z}_v$ (veya $\vec{Z}_u \times_\epsilon \vec{Z}_v$)'nin yatay düzlemle yaptığı öklidyen açı olup dolayısıyla θ , n (veya n_ϵ)'nin yatay düzlemle yaptığı öklidyen açıdır.

(3.3.10) ve (3.2.6) eşitlikleri (1) eşitliğinde kullanılırsa,

$$\begin{aligned} \underbrace{|\vec{Z}_u \times \vec{Z}_v|}_{|det I|^{1/2}} &= \underbrace{|\vec{Z}_u \times_\epsilon \vec{Z}_v|_\epsilon}_{|det I_\epsilon|^{1/2}} \cdot |\cos 2\theta|^{1/2} \\ |det I|^{1/2} &= |det I_\epsilon|^{1/2} \cdot |\cos 2\theta|^{1/2} \dots (2) \end{aligned}$$

eşitliği elde edilir ki, bu eşitliğin her iki tarafının karesi alınır ve $det I_\epsilon > 0$ olduğu göz önüne alınır,

$$|det I| = det I_\epsilon \cdot |\cos 2\theta|$$

bulunur. Bu ise ispatı tamamlar. □

$0 \leq |\cos 2\theta| \leq 1$ olduğundan (3.3.12) 'den,

$$|det I| \leq det I_\epsilon \tag{3.3.13}$$

eşitsizliği elde edilir. Böylece şu sonucu verebiliriz:

Sonuç 3.3.3. \mathbb{R}^3 'de herhangi bir S yüzeyi üzerinde Minkowski birinci temel formun determinantının mutlak değeri, Öklidyen birinci temel formun determinantından daima küçük veya eşittir.

Teorem 3.3.5. $Z : U \rightarrow E^{3,1}$ (veya E^3) bir patch olsun. $S = Z(U)$ üzerinde Minkowski birim normal vektör alanı ile Öklidyen birim normal vektör alanı arasında;

$$n = \frac{(det I_\epsilon)^{1/2}}{|det I|^{1/2}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} n_\epsilon \tag{3.3.14}$$

bağıntısı vardır.

İspat. Herhangi iki $\vec{A} \neq \vec{0}$ ve $\vec{B} \neq \vec{0} \in \mathbb{R}^3$ vektörlerinin Minkowski ve Öklidyen vektör çarpımları arasında,

$$\vec{A} \times \vec{B} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \vec{A} \times_{\epsilon} \vec{B} \dots\dots (1)$$

eşitliği vardır. (1) eşitliğinde \vec{A} vektörü yerine Z_u , \vec{B} vektörü yerine Z_v alınır ve eşitliğin sağ tarafı $|Z_u \times_{\epsilon} Z_v|_{\epsilon}$ skaları ile çarpılır ve bölünürse,

$$\vec{Z}_u \times \vec{Z}_v = |Z_u \times_{\epsilon} Z_v|_{\epsilon} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \frac{Z_u \times_{\epsilon} Z_v}{|Z_u \times_{\epsilon} Z_v|_{\epsilon}} \dots\dots (2)$$

eşitliği elde edilir. (2) eşitliğinin her iki tarafı $|Z_u \times Z_v|$ skalar sayısına bölünürse,

$$\frac{\vec{Z}_u \times \vec{Z}_v}{|Z_u \times Z_v|} = \frac{|Z_u \times_{\epsilon} Z_v|_{\epsilon}}{|Z_u \times Z_v|} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \frac{Z_u \times_{\epsilon} Z_v}{|Z_u \times_{\epsilon} Z_v|_{\epsilon}} \dots\dots (3)$$

eşitliği elde edilir. (3.3.10), (3.3.11), (3.2.6) ve (3.2.7) eşitlikleri (3) eşitliğinde kullanılırsa;

$$n = \frac{(\det I_{\epsilon})^{1/2}}{|\det I|^{1/2}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} n_{\epsilon}$$

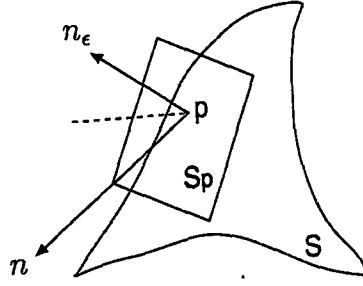
sonucuna ulaşılır ki bu da ispatı tamamlar. □

(3.3.13) ve (3.3.14)'den,

$$|n|_{\epsilon} \geq |n_{\epsilon}|_{\epsilon} \tag{3.3.15}$$

eşitsizliği elde edilir. Böylece şu sonucu verebiliriz:

Sonuç 3.3.4. \mathbb{R}^3 'de herhangi bir S yüzeyin Minkowski birim normal vektör alanının öklidyen uzunluğu, Öklidyen birim normal vektör alanının öklidyen uzunluğundan daima büyük veya eşittir. $|n|_{\epsilon} = |n_{\epsilon}|_{\epsilon}$ eşitlik hali S_p düzleminin yatay veya düşey olmasıyla mümkündür. (Şekil 3.12)



Şekil 3.12.

E^3 'deki S^2 birim küresinin $E^{3,1}$ 'de bir tek denkliği yoktur. $E^{3,1}$ 'deki birim küre $S^{2,1}$, H_+^2 ve H_-^2 gibi üç hiperkuadratiklerle tanımlıdır (Şekil 3.13). $E^{3,1}$ uzayındaki $S^{2,1}$ Lorentz küresi;

$$S^{2,1} = \{\vec{A} \in E^{3,1} \mid \vec{A} \cdot \vec{A} = 1\}$$

şeklinde tanımlı olup, $x^2 + y^2 - z^2 = 1$ eşitliğinde $y = 0$ alınarak elde edilen $x^2 - z^2 = 1$ hiperbolünün z -ekseni etrafında dönderilmesiyle elde edilir. [1]

$E^{3,1}$ uzayındaki H_+^2 veya H_-^2 birim küresi;

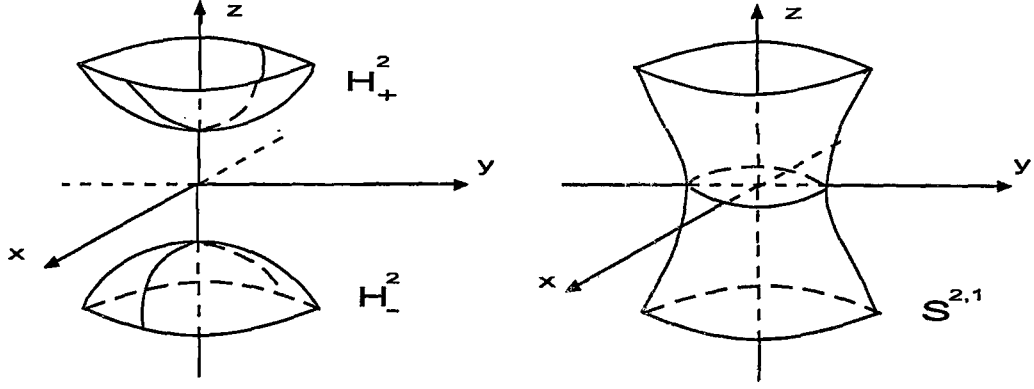
$$H_+^2 \cup H_-^2 = \{\vec{A} \in E^{3,1} \mid \vec{A} \cdot \vec{A} = -1\}$$

şeklinde tanımlı olup; $x^2 + y^2 - z^2 = -1$ eşitliğinde $y = 0$ alınarak elde edilen $x^2 - z^2 = -1$ (veya $z^2 - x^2 = 1$) hiperbolünün $z > 0$ üst kanadının z -ekseni etrafında dönderilmesiyle H_+^2 , $z < 0$ alt kanadının z -ekseni etrafında dönderilmesiyle H_-^2 elde edilir. [1]

$S^{2,1}$ Lorentz küresinin teğetleri timelike vektörler olduğundan, $S^{2,1}$ 'e timelike Lorentz küresi de denir. H_+^2 ve H_-^2 birim kürelerinin teğetleri spacelike olduğundan, H_+^2 ve H_-^2 'ye spacelike yüzey de denir. [1]

$E^{3,1}$ 'deki H_+^2 ve H_-^2 spacelike yüzeylerin birinci temel formları, esas eğrilik -1 olmak üzere tam ve Riemannian olduğundan hiperbolik-2 düzlem için modeller oluştururlar. Dolayısıyla H_+^2 ve H_-^2 spacelike yüzeyler hiperbolik birim küreler olarak da bilinir. [1]

Bir S spacelike yüzeyi üzerinde n birim normal vektör alanı, S üzerinde yöne göre $n : S \rightarrow H_+^2$ veya $n : S \rightarrow H_-^2$ Gauss dönüşümünü tanımlar. Bir S timelike



Şekil 3.13. $E^{3,1}$ 'de Birim Küre

yüzeyi üzerinde ise n birim normal vektör alanı $n : S \rightarrow S^{2,1}$ Gauss dönüşümünü tanımlar. [1]

Bir S yüzeyi ister spacelike, ister timelike olsun; S yüzeyi üzerinde n birim normal vektör alanı için $|n \cdot n| = 1$ eşitliği vardır ve bu eşitliğin türevinden $n \cdot dn = 0$ sonucuna sahip olunur ki bu da $dn = n_u du + n_v dv$ 'nin n 'ye dik olduğunu ve dolayısıyla dn 'ye S yüzeyi üzerinde bir vektör alanı gibi bakılmasını sağlar. [1] Böylece Minkowski ikinci temel formun tanımı şöyle verilir.

Tanım 3.3.12. $Z : U \rightarrow E^{3,1}$ bir patch ve n , $S = Z(U)$ üzerinde Minkowski birim normal vektör alanı olsun. S üzerindeki Minkowski ikinci temel form;

$$\begin{aligned}
 II &= -dZ \cdot dn = -(Z_u du + Z_v dv) \cdot (n_u du + n_v dv) \\
 &= \underbrace{-(n_u \cdot Z_u)} du^2 - \underbrace{(n_u \cdot Z_v)} dudv - \underbrace{(n_v \cdot Z_u)} dudv - \underbrace{(n_v \cdot Z_v)} dv^2 \\
 &= L du^2 + 2M dudv + N dv^2 \quad (3.3.16) \\
 &= \begin{bmatrix} du & dv \end{bmatrix} \begin{bmatrix} L & M \\ M & N \end{bmatrix} \begin{bmatrix} du \\ dv \end{bmatrix}
 \end{aligned}$$

şeklinde tanımlanır. [1]

Burada $L = -n_u \cdot Z_u$, $M = -n_u \cdot Z_v = -n_v \cdot Z_u$, ve $N = -n_v \cdot Z_v$ C^∞ fonksiyonlardır.

$\forall p \in S$ için $n \cdot Z_u = 0$ ve $n \cdot Z_v = 0$ olup, bu eşitliklerin u ve v 'ye göre türevleri alındığında;

$$\begin{aligned}
n_u \cdot Z_u + n \cdot Z_{uu} = 0 &\implies n \cdot Z_{uu} = -n_u \cdot Z_u = L \\
n_v \cdot Z_u + n \cdot Z_{uv} = 0 &\implies n \cdot Z_{uv} = -n_v \cdot Z_u = M \\
n_u \cdot Z_v + n \cdot Z_{vu} = 0 &\implies n \cdot Z_{vu} = -n_u \cdot Z_v = M \\
n_v \cdot Z_v + n \cdot Z_{vv} = 0 &\implies n \cdot Z_{vv} = -n_v \cdot Z_v = N
\end{aligned} \tag{3.3.17}$$

Minkowski II . temel formun C^∞ katsayılar fonksiyonları elde edilir. [1]

Teorem 3.3.6. $Z : U \rightarrow E^{3,1}$ (veya E^3) bir patch olsun. $S = Z(U)$ üzerinde Minkowski ikinci temel form ve Öklidyen ikinci temel form arasında;

$$|\det I|^{1/2} II = (\det I_\epsilon)^{1/2} II_\epsilon \tag{3.3.18}$$

bağıntısı vardır.

İspat. (3.3.17) ile verilen Minkowski II . temel formun C^∞ katsayı fonksiyonlarını alınsın. (3.3.14) ile verilen n Minkowski birim normal vektör alanını; bu katsayı fonksiyonlarında yerine yazıp, (3.2.9) ile verilen Öklidyen II . temel formun C^∞ katsayı fonksiyonlarını dikkate alırsa,

$$\begin{aligned}
L = n \cdot Z_{uu} &= \frac{(\det I_\epsilon)^{1/2}}{|\det I|^{1/2}} \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}}_{n_\epsilon \cdot \epsilon} n_\epsilon \cdot Z_{uu} \\
&= \frac{(\det I_\epsilon)^{1/2}}{|\det I|^{1/2}} n_\epsilon \cdot_\epsilon Z_{uu} \\
&= \frac{(\det I_\epsilon)^{1/2}}{|\det I|^{1/2}} L_\epsilon
\end{aligned}$$

eşitliğine ulaşılır. Benzer şekilde;

$$M = \frac{(\det I_\epsilon)^{1/2}}{|\det I|^{1/2}} M_\epsilon \quad \text{ve} \quad N = \frac{(\det I_\epsilon)^{1/2}}{|\det I|^{1/2}} N_\epsilon$$

eşitlikleri de elde edilir. Bu eşitlikler (3.3.16)'de göz önüne alırsa,

$$\begin{aligned}
II = Ldu^2 + 2Mdudv + Ndv^2 &= \frac{(\det I_\epsilon)^{1/2}}{|\det I|^{1/2}} \underbrace{(L_\epsilon du^2 + 2M_\epsilon dudv + N_\epsilon dv^2)}_{II_\epsilon} \\
&= \frac{(\det I_\epsilon)^{1/2}}{|\det I|^{1/2}} II_\epsilon
\end{aligned}$$

sonucuna ulaşılır. Buradan da,

$$|\det I|^{1/2} II = (\det I_\epsilon)^{1/2} II_\epsilon$$

eşitliği elde edilir ki bu da ispatı tamamlar. \square

Bir yüzey üzerinde Minkowski birinci temel formun determinanı $\det I \neq 0$ olduğundan $|\det I|^{1/2} > 0$ ve Öklidyen birinci temel formun determinanı $\det I_\epsilon > 0$ olduğundan $(\det I_\epsilon)^{1/2} > 0$ olur. Bu ifadeler (3.3.18)'de gözönüne alınırsa, aşağıdaki sonucu verebiliriz:

Sonuç 3.3.5. \mathbb{R}^3 ' de herhangi bir S yüzeyi üzerinde Minkowski ikinci temel form ile Öklidyen ikinci temel form aynı işarete sahiptir.

$S = Z(U)$ yüzeyi üzerinde H Minkowski ortalama eğriliğini ve K Minkowski Gauss eğriliği (3.2.14) ve (3.2.15) 'dekine benzer şekilde tanımlanır.

Tanım 3.3.13. $Z : U \rightarrow E^{3,1}$ bir patch olsun. $S = Z(U)$ yüzeyi üzerindeki K Minkowski Gauss Eğriliği;

$$K = \frac{LN - M^2}{EG - F^2} = \frac{\det II}{\det I} \quad (3.3.19)$$

dir. [1]

Tanım 3.3.14. $Z : U \rightarrow E^{3,1}$ bir patch olsun. $S = Z(U)$ yüzeyi üzerindeki H Minkowski Ortalama Eğriliği;

$$H = \frac{1}{2} \text{tr}_I II = \frac{EN + GL - 2MF}{2(EG - F^2)} \quad (3.3.20)$$

dir. [1]

Teorem 3.3.7. $Z : U \rightarrow E^{3,1}$ bir patch olsun. $S = Z(U)$ yüzeyi üzerindeki Minkowski Gauss Eğriliği ve Öklidyen Gauss Eğriliği arasında;

$$(\det I)^2 K = \pm (\det I_\epsilon)^2 K_\epsilon \quad (3.3.21)$$

bağıntısı vardır. Burada \pm , $\det I$ 'nin işaretidir.

İspat. (3.3.18) ile verilen,

$$|\det I|^{1/2} II = (\det I_\epsilon)^{1/2} II_\epsilon$$

eşitliği göz önüne alınsın. $\det I \neq 0$ ve $\det I_\epsilon > 0$ bir skalar olup bu eşitliğin her iki tarafının determinantı alınır;

$$\begin{aligned} \det[|\det I|^{1/2} II] &= \det[(\det I_\epsilon)^{1/2} II_\epsilon] \\ (|\det I|^{1/2})^2 \det II &= ((\det I_\epsilon)^{1/2})^2 \det II_\epsilon \\ |\det I| \det II &= (\det I_\epsilon) \det II_\epsilon \dots\dots\dots (1) \end{aligned}$$

sonucuna ulaşılır. (1) eşitliğinin her iki yanını $\det I \cdot \det I_\epsilon \neq 0$ skalarına bölüp, (3.2.14) ile verilen K_ϵ Öklidyen Gauss eğriliği ve (3.3.19) ile verilen K Minkowski Gauss eğriliği dikkate alınır,

$$\frac{|\det I| \cdot \det II}{\det I_\epsilon \cdot \det I} = \frac{(\det I_\epsilon) \cdot \det II_\epsilon}{\det I \cdot \det I_\epsilon}$$

$$\frac{|\det I|}{\det I_\epsilon} \cdot K = \frac{(\det I_\epsilon)}{\det I} \cdot K_\epsilon \dots(2)$$

bulunur. $|\det I| = \pm \det I$ olduğu (2)'de gözönüne alınır,

$$\begin{aligned} \underbrace{(\pm \det I) \cdot \det I \cdot K} &= \underbrace{(\det I_\epsilon) \cdot \det I_\epsilon \cdot K_\epsilon} \\ \pm (\det I)^2 \cdot K &= (\det I_\epsilon)^2 \cdot K_\epsilon \\ (\det I)^2 \cdot K &= \pm (\det I_\epsilon)^2 \cdot K_\epsilon \end{aligned}$$

eşitliği elde edilir ki bu da ispatı tamamlar. □

Şimdi (3.3.12) ile verilen,

$$|\det I| = |\cos 2\theta| \cdot \det I_\epsilon$$

eşitliğinin her iki yanının karesi (3.3.21)'de yerine yazılırsa,

$$\begin{aligned} \underbrace{(\det I)^2 \cdot K} &= \pm (\det I_\epsilon)^2 \cdot K_\epsilon \\ \cos^2 2\theta \cdot (\det I_\epsilon)^2 \cdot K &= \pm (\det I_\epsilon)^2 \cdot K_\epsilon \\ K \cdot \cos^2 2\theta &= \pm K_\epsilon \end{aligned} \tag{3.3.22}$$

olur. (θ , burada n veya n_ϵ ile herhangi bir yatay düzlem arasındaki açıdır.)

$0 \leq \cos^2 2\theta \leq 1$ olduğundan (3.3.22)'den,

$$K \geq \pm K_\epsilon \quad \text{veya} \quad |K| \geq |K_\epsilon| \quad (3.3.23)$$

eşitsizliği elde edilir. Böylece şu sonucu verebiliriz:

Sonuç 3.3.6. \mathbb{R}^3 'de herhangi bir S yüzeyi üzerindeki Minkowski Gauss eğriliğinin mutlak değeri, aynı yüzey üzerindeki Öklidyen Gauss eğriliğinin mutlak değerinden daima büyük veya eşittir.

$E^{3,1}$ 'de bir S yüzeyi spacelike (veya timelike) olsun. $p \in S$ noktasında;

(i) $K(p) > 0$ (veya $K(p) < 0$) ise p noktasının yeterince küçük delinmiş tüm komşulukları S_p 'nin bir tarafında kalır.

(ii) $K(p) < 0$ (veya $K(p) > 0$) ise p noktasının keyfi küçük komşulukları S_p 'nin diğer tarafındaki noktaları içerir. [1]

E^3 'deki herhangi bir yüzey üzerinde $H_\epsilon^2 \geq K_\epsilon$ olduğu halde, $E^{3,1}$ 'deki bir yüzey üzerinde $H^2 < K$ elde edilebilir. $E^{3,1}$ 'deki umbilik nokta kavramı; E^3 'de olduğu gibi, bir c sabiti için $II(p) = cI(p)$ eşitliğini veren p noktasıdır. Fakat $E^{3,1}$ 'de bir yüzey üzerinde $H_\epsilon^2 = K_\epsilon$ umbilik noktayı karakterize ederken, $E^{3,1}$ 'deki umbilik noktası olmayan bir timelike yüzey üzerinde $H_\epsilon^2 \equiv K_\epsilon$ elde edilebilir. Mesela; uv -düzleminin her bir noktası; birinci ve ikinci temel formları $I = du^2 + 2dudv$ ile $II = du^2$ olan bir S yüzeyini tanımlayan bir $Z : U \rightarrow E^{3,1}$ patchi için bir U komşuluğuna sahiptir. $\det I = EG - F^2 = 1.0 - 1^2 = -1 < 0$ olduğundan S yüzeyi bir timelike yüzeydir. S yüzeyi üzerindeki herhangi bir p noktası için $II(p) = cI(p)$ eşitliği yoktur. Dolayısıyla S timelike yüzeyinin umbilik noktası yoktur. Fakat S yüzeyi üzerindeki I . ve II . temel formlarda, $M = N = G = 0$ olduğundan Gauss, Ortalama, asli ve skew eğrilik tanımlarından; $H \equiv K \equiv k_1 \equiv k_2 \equiv H' \equiv 0$ elde edilir. Böylece şu sonucu verebiliriz:

Sonuç 3.3.7. $E^{3,1}$ Minkowski uzayının, herhangi bir S yüzeyi üzerinde $H^2 \equiv K$ olması umbilik nokta kavramını karakterize etmez.

$E^{3,1}$ 'deki asli eğrilikler E^3 de olduğu gibi;

$$k_1 = H + H' \quad k_2 = H - H'$$

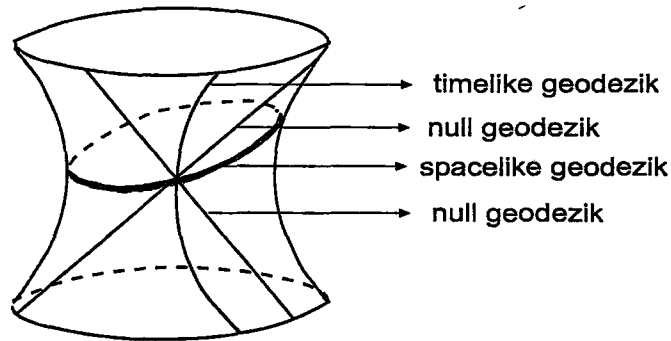
şeklinde tanımlanmasına rağmen, $H^2 < K$ olan yerlerde;

$$H' = \sqrt{H^2 - K}$$

skew eğrilik $i|H^2 - K|^{\frac{1}{2}}$ değeriyle verilir ve k_2, k_1 ' in kompleks eşleniği olur. $E^{3,1}$ 'de umbilik noktalarda $k_1 = k_2$ olması gerekirken, $E^{3,1}$ 'deki umbilik noktası olmayan timelike yüzey üzerinde $k_1 \equiv k_2$ mümkün olabilir. H, K, H', k_1 ve k_2 Minkowski eğrilik fonksiyonları; S üzerindeki lokal koordinat değişiminden bağımsızdır.

Bölüm 2'de verilen geodezik tanımında h yerine I alınırsa; I için herhangi bir $\gamma = \gamma(t)$ geodeziği, S üzerinde bir geodezik olarak adlandırılır. S üzerinde sabit olmayan bir spacelike veya timelike $\gamma = \gamma(t)$ eğrisi için; $\vec{T}(t) = \gamma'(t) / |\gamma'(t)|$ birim teğet vektör alanının $E^{3,1}$ yay parametrisine göre türevi daima S 'ye ortogonal ise γ eğrisine bir geodezik eğri denir. Böylece, S üzerinde yay parametresi ile ifade edilen herhangi bir spacelike veya timelike doğrunun S üzerinde bir geodezik olduğu söyleyenebilir. Yine S üzerinde her null doğrusu pregeodezik olup, bir lineer parametrizasyon ile tanımlanarak geodezik hale getirilir. [1]

Şekil 3.14' den de görüldüğü gibi bir H_+^2, H_-^2 veya $S^{2,1}$ hiperquadratığı üzerindeki her geodezik, $E^{3,1}$ 'deki orjin boyunca bir düzlem ile yüzeyin arakesitinden elde edilen bir eğri boyunca uzanır. H_+^2 ve H_-^2 üzerindeki sabit olmayan geodezikler ve $S^{2,1}$ üzerindeki sabit olmayan spacelike veya timelike geodezikler, $E^{3,1}$ 'de yay parametresinin herhangi bir $c \neq 0$ sabit katı olarak parametrize edilir. [6]



Şekil 3.14. Minkowski birim küre üzerindeki geodezikler

$E^{3,1}$ 'deki herhangi bir spacelike veya timelike yüzey üzerindeki Weingarten denklemleri; E^3 'dekine benzer şekilde elde edilir. Yani;

$$n_u = aZ_u + bZ_v = \left(\frac{MF - LG}{EG - F^2} \right) Z_u + \left(\frac{LF - ME}{EG - F^2} \right) Z_v$$

$$n_v = cZ_u + dZ_v = \left(\frac{NF - MG}{EG - F^2} \right) Z_u + \left(\frac{MF - NE}{EG - F^2} \right) Z_v$$

denklemleri $E^{3,1}$ 'deki spacelike veya timelike yüzeyler için Weingarten denklemleridir. Böylece $-dn_p$ ile tanımlanan $T_p : S_p \rightarrow S_p$ lineer dönüşümü, $Z_u(p), Z_v(p)$ bazına göre (3.2.17) ile verilen katsayılar matrisine sahiptir. T_p 'nin karakteristik denkleminin kökleri (3.2.18) 'i sağlayan k_1 ve k_2 karakteristik değerleridir.

$E^{3,1}$ 'deki Gauss denklemleri E^3 'dekinden farklılık arz eder. $E^{3,1}$ 'deki S yüzeyi üzerinde herhangi bir p noktasında Z_u, Z_v, n $E_p^{3,1}$ 'yi gerdiğinden Z_u ve Z_v 'nin u ve v 'ye göre türevlerinin bu baz cinsinden ifadeleri;

$$\left. \begin{aligned} Z_{uu} &= aZ_u + bZ_v + cn \\ Z_{uv} &= dZ_u + eZ_v + fn \\ Z_{vv} &= gZ_u + hZ_v + jn \end{aligned} \right\} \dots (1)$$

şeklinde olur. Bu eşitliklerin herbirini Z_u, Z_v ve n ile iç çarpıma tabi tutup, (3.2.9) eşitlikleri dikkate alınsın. $E^{3,1}$ 'deki S yüzeyi spacelike yüzey ise n Minkowski birim normal vektör alanı timelike olup, $n \cdot n = -1$ ve S yüzeyi timelike yüzey ise n Minkowski birim normal vektör alanı spacelike olup, $n \cdot n = 1$ 'dir. Buna göre S yüzeyinin spacelike veya timelike olmasına göre $n \cdot n = \pm 1$ olmak üzere;

$$\begin{aligned} Z_{uu} \cdot Z_u &= a = \Gamma_{11}^1 & Z_{uv} \cdot Z_u &= d = \Gamma_{12}^1 & Z_{vv} \cdot Z_u &= g = \Gamma_{22}^1 \\ Z_{uu} \cdot Z_v &= b = \Gamma_{11}^2 & Z_{uv} \cdot Z_v &= e = \Gamma_{12}^2 & Z_{vv} \cdot Z_v &= h = \Gamma_{22}^2 \\ Z_{uu} \cdot n &= c = \pm L & Z_{uv} \cdot n &= f = \pm M & Z_{vv} \cdot n &= j = \pm N \end{aligned}$$

sonucuna ulaşılır. Bu sonuç, (1)'de yerine yazılırsa;

$$\left. \begin{aligned} Z_{uu} &= \Gamma_{11}^1 Z_u + \Gamma_{11}^2 Z_v \pm Ln \\ Z_{uv} &= \Gamma_{12}^1 Z_u + \Gamma_{12}^2 Z_v \pm Mn \\ Z_{vv} &= \Gamma_{22}^1 Z_u + \Gamma_{22}^2 Z_v \pm Nn \end{aligned} \right\} (3.3.24)$$

eşitliklerine sahip olunur ki, bu eşitliklere S spacelike veya timelike yüzeyi üzerindeki Gauss Denklemleri denir. [1] Burada Γ_{ij}^k 'lar I . temel form için Christoffel sembolleridir.

$E^{3,1}$ 'deki bir yüzey üzerinde Codazzi-Mainardi denklemleri; E^3 'deki bir yüzey üzerindeki benzer tartışmalarla,

$$\left. \begin{aligned} \Gamma_{11}^1 M + \Gamma_{11}^2 N + L_v &= \Gamma_{12}^1 L + \Gamma_{12}^2 M + M_u \\ \implies L_v - M_u &= L\Gamma_{12}^1 + M(\Gamma_{12}^2 - \Gamma_{11}^1) - N\Gamma_{11}^2 \\ \Gamma_{12}^1 M + \Gamma_{12}^2 N + M_v &= \Gamma_{22}^1 L + \Gamma_{22}^2 M + N_u \\ \implies M_v - N_u &= L\Gamma_{22}^1 + M(\Gamma_{22}^2 - \Gamma_{12}^1) - N\Gamma_{12}^2 \end{aligned} \right\} \quad (3.3.25)$$

şeklinde elde edilen denklemlerdir.

$E^{3,1}$ 'deki egregium denklik teoremi; $n \cdot n$ 'nin işareti \pm olmak üzere,

$$K(I) = \pm K \quad (3.3.26)$$

şeklindedir.

Teorem 3.3.8. $E^{3,1}$ 'deki herhangi bir spacelike veya timelike yüzey üzerinde I temel form metriklerine göre; Minkowski esas eğrilik ile Öklidyen esas eğriliklerin işaretleri arasında,

$$\text{sign}K(I) = -\text{sign}K(I_\epsilon)$$

ilişkisi vardır.

İspat. $E^{3,1}$ 'deki herhangi bir spacelike veya timelike yüzey üzerinde $n \cdot n$ 'nin işareti \pm olduğundan, $\det I$ 'nin işareti \mp olup, (3.3.21)'den;

$$\text{sign}K = \mp \text{sign}K_\epsilon \dots \dots \dots (1)$$

elde edilir. (3.2.25)'den öklid anlamda gauss eğriliği ile esas eğriliğin işaretleri aynı olduğu (1)'de dikkate alınırsa,

$$\text{sign}K = \mp \text{sign}K_\epsilon = \mp \text{sign}K(I_\epsilon) \dots \dots \dots (2)$$

sonucuna ulaşılır. (3.3.26) eşitliği (2)'de dikkate alınırsa;

$$\text{sign}K(I) = \pm \text{sign}K = \pm(\mp \text{sign}K(I_\epsilon)) = -\text{sign}K(I_\epsilon)$$

elde edilir ki bu da ispatı tamamlar. □

Teorem 3.3.9. ($E^{3,1}$ 'deki Yüzeyler İçin Temel Teorem): uv - düzleminin bir V açık kümesi üzerinde $EG - F^2 \neq 0$, $Cod(I, II)$ ve $det II / det I = (-sign det I)K(I)$ olmak üzere;

$$I = Edu^2 + 2Fdudv + Gdv^2 \quad \text{ve} \quad II = Ldu^2 + 2Mdudv + Ndv^2$$

C^∞ reel quadratik formlar olup, V 'nin herhangi bir noktasının bir U komşuluğunda I . ve II . temel formlar ile bir S yüzeyi tanımlayan bir $Z : U \rightarrow E^3$ patch'ı vardır. Üstelik Z , U üzerinde $E^{3,1}$ 'in yönü koruyan izometrilere oluşumu ile bir tek olarak bellidir. [1]

Bu teorem gösterir ki; E^3 'deki yüzeylerde olduğu gibi $E^{3,1}$ 'deki spacelike veya timelike yüzeylerin biçimlerini I . ve II . temel formlar belirtir. Yine burada $Cod(I, II)$, I . ve II . temel formların Codazzi-Mainardi denklemlerini sağladığını göstermek için kullanılır.

Tanım 3.3.15. $Z : U \rightarrow E^{3,1}$ bir patch ve $S = Z(U)$ spacelike veya timelike yüzey üzerinde n Minkowski birim normal vektör alanı olsun. S üzerinde,

$$III = dn \cdot dn$$

eşitliği ile tanımlanan III formuna, Minkowski üçüncü temel form denir. [1]

$E^{3,1}$ 'deki bir spacelike (veya timelike) yüzey üzerinde Minkowski üçüncü temel form, $K \neq 0$ olduğunda Riemanniandır (veya Lorentziandır). Minkowski III . temel form; yüzey üzerinde $K \neq 0$ olan bir noktanın yeterince küçük herhangi bir komşuluğunda, Minkowski birim küre üzerindeki Minkowski I . temel formun n altında S 'ye geri çekilmiştir. [1]

$E^{3,1}$ 'deki bir S spacelike veya timelike yüzeyinin umbilik nokta içermeyen kısmı S' üzerindeki Minkowski I', II' ve III' skew temel formlar (3.2.28)'deki gibi tanımlıdır. S yüzeyi üzerinde $H^2 < K$ olan yerlerde H' imajiner olduğundan Minkowski skew temel formlar, iI', iII' ve $iIII'$ şeklinde ele alınır. S spacelike yüzeyinin S' umbilik free kısmı üzerinde;

- (i) I' indefinit,
- (ii) II' ; $K < 0$ olan yerlerde definit, $K > 0$ olan yerlerde indefinit,

(iii) III' , $K \neq 0$ olan yerlerde indefinit

dir. [1]

S timelike yüzeyinin S' umbilik free kısmı üzerinde $H' > 0$ iken ;

(i) I' definit,

(ii) II' ; $K < 0$ olan yerlerde indefinit, $K > 0$ olan yerlerde definit,

(iii) III' , $K \neq 0$ olan yerlerde definit

ve H' imajiner iken; Minkowski iI' , iII' ve $iIII'$ skew temel formların hepsi indefinittir. [1]

$E^{3,1}$ üzerinde sıkça kullanılan özel lokal koorninatlardan; ortogonal, asimptotik ve eğrilik çizgi koordinatları E^3 'de tanımlandığı gibidir. Fakat, Isothermal ve Tchebychev koordinatlar da farklılık arz eder.

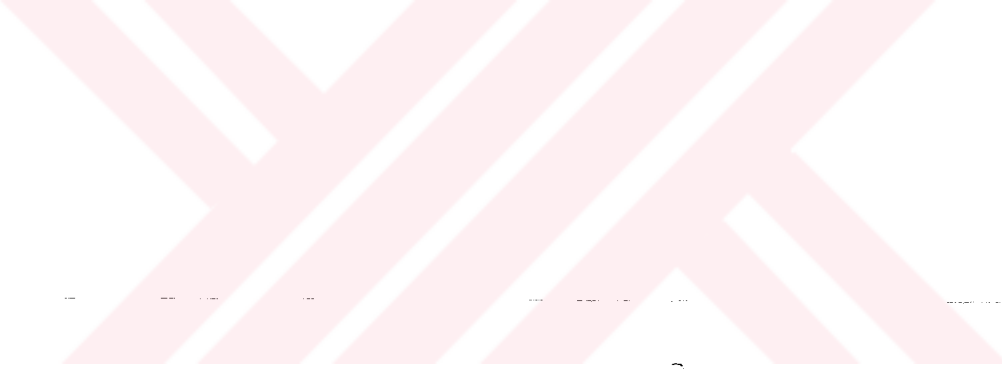
u, v isothermal koordinatlar: Bir S spacelike yüzeyi üzerindeki u, v isothermal koordinatlar $\mathcal{R}_I = (S, [I])$ üzerinde bir $w = u + iv$ konformal parametreyi veren herhangi bir noktanın bir komşuluğunda $E \equiv G \equiv 1$ ve $F \equiv 0$ ile karakterize edilen koordinatlardır. Bir S timelike yüzeyi üzerindeki u, v isothermal koordinatlar; $\mathcal{L}_I = (S, [I])$ üzerinde $x = u - v$ $y = u + v$ null koordinatlar olarak alınır. [1]

u, v Tchebychev koordinatlar: Bir S spacelike veya timelike yüzeyi üzerinde herhangi bir noktanın bir komşuluğunda $|E| \equiv |G| \equiv 1$ ile karakterize edilen koordinatlardır. Bu noktalarda u (veya v) her $v \equiv \text{sabit}$ (veya $u \equiv \text{sabit}$) parametre eğrisi boyunca Minkowski yay parametresidir. [1]

KAYNAKLAR

- [1] Weinstein T. *An Introduction Lorentz Surface*, Walter de Gruyter and Co. New York (1996)
- [2] Beem J.K., Ehrlich P.E. *Global Lorentzian Geometri*, Marcel Dekker New York (1981)
- [3] Matsushima Y. *Differentiable Manifolds*, Marcel Dekker New York (1972)
- [4] Spivak M. *A Comprehensive Introduction to Differential Geometry*, V.I Second Edition Publish or Perish Inc.(1979)
- [5] Duggal K.L., Bejancu A. *Lightlike Submanifolds of Semi-Riemannian Manifolds and Applications*, Kluwer Academic Publishers,(1996)
- [6] O'Neill B. *Semi-Riemann Geometry with Applications to Relativity*, Academic press New York (1983)
- [7] Graves L.K *Codimension one isometric immersions between Lorentz spaces*, Trans.Amer.Math.soc. 252(1979)
- [8] Higgins L. *Conformally Invariant numerical Indices On Lorentz Surfaces*, Ph.D Thesis, Rutgers University, (1997)
- [9] Kulkarni R. *An analogue of the Riemann mapping theorem for Lorentz metric*, Proc. Roy.Soc. London Ser. A 401 (1985)
- [10] Hacisalihoglu H.H. *Yüksek Diferensiyel Geometriye Giriş*, Fırat Üniversitesi Fen Fak.Yayinlari Mat.No:2 (1980)
- [11] Hacisalihoglu H.H., Sabuncuoğlu A. *Diferensiyel Geometri*, Milli Eğitim Basımevi (1983)
- [12] Hacisalihoglu H.H. *Diferensiyel Geometri*, Gazi Üniversitesi Basın-Yayın Yüksekokulu Basımevi (1983)
- [13] Salimov A., Mağden A. *Diferensiyel Geometriye Giriş*, Bakanlar Mat. Erzurum (1999)
- [14] Hacisalihoglu H.H. *2 ve 3 Boyutlu Uzaylarda Analitik Geometri*, Diyarbakır Üniversitesi Fen Fak.Yayinlari Mat.No:2 (1976)
- [15] Uğurlu H.H., Çalışkan A. *Darboux Ani Dönme Vektörleri İle Space-like ve Time-like Yüzeyler Geometrisi*, Gaziosmanpaşa Üniversitesi Fen Edebiyat Fakültesi Yayını (Baskıda)

- [16] Naber G.L. *The Geometry of Minkowski Spacetime*, California State University, Springer-Verlag New York (1992)
- [17] Birman G.S., Nomizu K. *Trigonometry in Lorentzian Geometry*, Ann.Math. Month. 91(9),(1984),534-549
- [18] Akbulut F. *Vektörel Analiz*, Ege Üniversitesi Matbaası, No:25 İzmir
- [19] Gray A. *Modern Differential Geometry of Curves and Surfaces with Mathematics*, 2nd ed. Boca Raton, FL: CRC Press, pp. 269-278, (1997).
- [20] Başkan T. *Kompleks Fonksiyonlar Teoresi*,Uludağ Üniversitesi, 1998
- [21] Yaglom I.M. *A simple non-Euclidean geometry and its Physical basis*, Springer-Verlag, New York, 1979



ÖZGEÇMİŞ

1977'de Malatya'da doğdu. İlk ve ortaöğretimini Malatya Merkez'de tamamladı. Liseyi Malatya Ziraat Meslek Lisesi'nde Ziraat Teknisyeni ünvanı ile 1996 yılında okul ikincisi olarak tamamladı. Üniversiteyi 1997-2000 yılları arasında İnönü Üniversitesi Eğitim Fakültesi Matematik Bölümü'nü okuyarak, bölüm birincisi olarak tamamladı. Lisans Eğitimini yaparken 1998-2000 yılları arasında 23 ay boyunca Tarım ve Köy İşleri Bakanlığı'na bağlı Bingöl İli Solhan Tarım İlçe Müdürlüğü Taşra Teşkilatında Ziraat Teknisyeni olarak çalıştı. 2000 yılında Matematik Öğretmeni olarak Malatya Milli Eğitim İl Müdürlüğü emrine atandı. 2001 yılının Eylül ayında İnönü Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Ana Bilim Dalı'nda Yüksek Lisansa başladı. Halen Malatya Merkez Cumhuriyet İlköğretim Okulu'nda Matematik Öğretmenliği görevinde bulunuyor. Evli ve bir çocuk babasıdır.