T.C.
İNÖNÜ ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

GENELLEŞTİRİLMİŞ $H_{\alpha,\delta,\gamma}(X)$ UZAYLARI

İsmet ÖZDEMİR

DOKTORA TEZİ
MATEMATİK ANABİLİM DALI

MALATYA
Nisan 2004

FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ MÜDÜRLÜĞÜNE

İşbu tez çalışması Matematik Anabilim Dalı'nda doktora tezi olarak kabul edilmiştir.

Prof. Dr. Rifat ÇOLAK
Başkan

Prof. Dr. Ali M. AKHMEDOV
Üye

Prof. Dr. Feyzi BAŞAR
Üye

Doç. Dr. Ö. Faruk TEMİZER
Üye

Yrd. Doç. Dr. Erol KILIÇ
Üye

ONAY

Yukarıdaki imzaların adı geçen öğretim üyelerine ait olduğunu onaylarım.

Prof. Dr. Ali ŞAHİN
Enstitü Müdürü
21/5/2004

İçindekiler

ÖZET

Doktora Tezi

GENELLEŞTİRİLMİŞ $H_{\alpha,\delta,\gamma}(X)$ UZAYLARI

İsmet ÖZDEMİR

İnönü Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Anabilim Dalı

95+viii sayfa

2004

Danışman: Doç. Dr. Ö. Faruk TEMİZER

Üç bölümden oluşan bu çalışmanın birinci bölümünde, sonraki bölümlerin anlaşılmasını sağlamak için operatör teori ve ölçü teorisine ilişkin bazı temel kavramlar verilip, Banach değerli fonksiyonların Bochner integrali tanıtıldı.

Orijinal kısmın başlangıcı olan ikinci bölümde ise, ilk olarak $C^{0,\alpha}((a,b),X)$ ve $C^{0,\alpha,\delta}((a,b)\times(a,b),X)$ Hölder uzayları verildikten sonra, $X=\mathbb{R}$ özel hâlinde tanımlanmış olan $H_{\alpha,\delta,\gamma}(\mathbb{R})$ cümlesi, X'in bir Banach uzayı alınmasıyla genelleştirilerek $H_{\alpha,\delta,\gamma}(X)$ uzayı tanımlandı. Daha sonra $H_{\alpha,\delta,\gamma}(X)$'in, üzerinde tanımlanan norma göre bir Banach uzayı teşkil ettiği gösterildi. Ayrıca bu uzaya ait her fonksiyonun sürekli olduğu ispat edilip, Hölder uzayları ile tanımlanan bu yeni uzay arasında bazı kapsama bağıntıları elde edildi. Yine bu bölümde, $H_{\alpha,\delta,\gamma}(X)$ uzayları ile bu

tip uzayların kartezyen çarpımı üzerinde; sınırlı, lineer, bilineer ve n-lineer operatörler tanımlanıp, integral denklemler teorisinde çok önemli bir yere sahip olan sınırlı Fredholm integral operatörleri tanımlandı ve elde edilen sonuçların tek değişkenli fonksiyonların $H_{\alpha,\delta}(X)$ uzayı bakımından karşılıkları, ispatsız olarak verildi.

Üçüncü bölümde, $H_{\alpha,\delta,\gamma}(X)$'in bir alt uzayı olan $H^1_{\alpha,\delta,\gamma}(X)$ uzayı tanımlandı ve onun da bir Banach uzayı olduğu gösterildi. Yine ikinci bölümdeki gibi $H_{\alpha,\delta,\gamma}(X)$, $H_{\alpha,\delta}(X)$ ve $H^1_{\alpha,\delta,\gamma}(X)$ uzayları ve onların kartezyen çarpımı üzerinde fakat herbiri bir genelleştirilmiş integralle verilen; sınırlı, lineer, bilineer ve n-lineer singüler operatörler elde edildi. Böylece sınırlı ve singüler Fredholm integral operatörleri tanımlandı ve elde edilen sonuçların $H_{\alpha,\delta}(X)$ uzayındaki karşılıkları ifade edildi.

Anahtar Kelimeler: Banach uzayı, $H_{\alpha,\delta,\gamma}(X)$, $H_{\alpha,\delta}(X)$ ve $H^1_{\alpha,\delta,\gamma}(X)$ uzayları, Banach cebiri, Bochner integrali, sınırlı lineer, bilineer ve n-lineer operatör, singüler operatör.

ABSTRACT

Ph.D. Thesis

GENERALIZED $H_{\alpha,\delta,\gamma}(X)$ SPACES

İsmet ÖZDEMİR

İnönü University
Graduate School of Natural and Applied Sciences
Department of Mathematics

95+viii pages

2004

Supervisor: Assoc. Prof. Ö. Faruk TEMİZER

This study consists of three chapters. In the first chapter, some basic concepts related to operator theory and measure theory are given in order to let the following chapters to be understood. Moreover, in this chapter, Bochner integral of Banach-valued functions is introduced.

In the chapter II, which is the beginning of the original part of the study, firstly, after giving Hölder spaces $C^{0,\alpha}((a,b),X)$ and $C^{0,\alpha,\delta}((a,b)\times(a,b),X)$, the set $H_{\alpha,\delta,\gamma}(\mathbb{R})$ which is defined for the special case $X = \mathbb{R}$ is generalized by taking X as a Banach spaces and next, the space $H_{\alpha,\delta,\gamma}(X)$ is defined. Then, it is shown that $H_{\alpha,\delta,\gamma}(X)$ is a Banach spaces to the norm which is defined on it. Moreover, it is proved that each function belonging to this space is continuous. Later, some contains

relations are obtained between Hölder spaces and this space which is already defined. In this chapter, also, bounded, linear, bilinear and n-linear operators are defined on the spaces $H_{\alpha,\delta,\gamma}(X)$ and on cartesian product of this type spaces. Bounded Fredholm integral operators which have an important place in integral equations theories are defined and the corresponding results of the obtained results are given in the space $H_{\alpha,\delta}(X)$ consisting one variable functions.

In the third chapter, the space $H^1_{\alpha,\delta,\gamma}(X)$, which is a subspace of the space $H_{\alpha,\delta,\gamma}(X)$, is defined and it is shown that it is also a Banach space. As in chapter II, bounded, linear, bilinear and n-linear singular operators which are defined on the spaces $H_{\alpha,\delta,\gamma}(X)$, $H_{\alpha,\delta}(X)$ and $H^1_{\alpha,\delta,\gamma}(X)$ and on their cartesian products but each of which is given by a generalized integral are introduced. Thus, bounded and singular Fredholm integral operators are defined and the corresponding results of the obtained results are stated in the spaces $H_{\alpha,\delta}(X)$.

Key words: Banach space, $H_{\alpha,\delta,\gamma}(X)$, $H_{\alpha,\delta}(X)$ and $H^1_{\alpha,\delta,\gamma}(X)$ spaces, Banach algebra, Bochner integral, bounded linear, bilinear and n-linear operator, singular operator.

TEŞEKKÜR

Lisans eğitimimden beri bana hep destek olan, beni akademisyenliğe teşvik eden, matematikte gördüğü önemli noktaları benimle paylaşan ve yüksek lisans eğitimimden itibaren danışmanlığımı üstlenen, bu çalışmanın başlangıç safhasından bitimine kadar yakın ilgi ve yardımlarını hiçbir zaman esirgemeyen ve önemli mesailerini ayırarak, yaptığımız seminerlerle konunun daha iyi anlaşılmasına sürekli katkıda bulunan değerli hocam sayın Doç. Dr. Ö. Faruk TEMİZER'e minnet ve şükranlarımı sunarım.

Beni, fonksiyonel analiz konularını çalışmaya yönlendiren ve bu çalışmanın tamamlanması için gerek benim Azerbaycan'da bulunduğum ve gerekse kendisinin bölümümüzde olduğu sırada bana yardımcı olan, ikinci tez danışmanım, Bakü Devlet Üniversitesi öğretim üyesi sayın Prof. Dr. Ali M. AKHMEDOV'a teşekkür ederim.

TÜBİTAK-BAYG'a sunduğu projelerle, Profesör AKHMEDOV'un üniversitemize gelmesini sağlayan ve Üniversitemizin Araştırma Fonuna sunduğu projeyle de tezin tamamlanmasına yardımcı olan ve öğrencilik hayatım boyunca bana hep şefkatle davranıp, yakın ilgi ve alakalarını eksik etmeyen saygıdeğer hocam, sayın Prof. Dr. Feyzi BAŞAR'a teşekkür ve şükranlarımı sunmayı bir borç bilirim.

2001/53 nolu projeye sağladığı maddi destekle, çalışmada kullanılan Rusça dökümanların tercümesine katkıda bulunan İnönü Üniversitesi Araştırma Projeleri Yönetim Birimine teşekkür ederim.

Ayrıca, tezin yazımına ilişkin yardımlarını gördüğüm çalışma arkadaşlarım Dr. Bilâl ALTAY, Dr. Celal ÇAKAN ile Fen Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümü öğretim elemanlarından Dr. M. Kemal ÖZDEMİR'e teşekkürlerimi sunarım.

Yine, bu çalışma tamamlanıncaya kadar bana sabırla sürekli destek olan ve yardımda bulunan eşime teşekkür ederim.

GÖSTERİMLER

$\mathbb{R}$: Reel sayılar cümlesi

$\mathbb{N}$: Doğal sayılar cümlesi

$\mathbb{C}$: Kompleks sayılar cümlesi

$\prod_{i=1}^{n} X_i$: $X_1 \times X_2 \times \cdots \times X_n$

(X, d) : Metrik uzay

$(X, \|\cdot\|)$: Normlu uzay

$C^{0,\alpha,\delta}((a,b)\times(a,b), X)$: $(a,b)\times(a,b)$'den X'e tanımlı fonksiyonların Hölder uzayı

$\|\cdot\|_{\alpha,\delta}$: $C^{0,\alpha,\delta}((a,b)\times(a,b), X)$ uzayı üzerindeki norm

$C^{0,\alpha}((a,b), X)$: (a,b)'den X'e tanımlı fonksiyonların Hölder uzayı

$\|\cdot\|_{\alpha}$: $C^{0,\alpha}((a,b), X)$ uzayı üzerindeki norm

$\mathcal{D}(T)$: T operatörünün tanım bölgesi

$\mathcal{R}(T)$: T operatörünün değer bölgesi

$B(X, Y)$: X'ten Y'ye tanımlı, lineer ve sınırlı operatörlerin uzayı

Σ : σ (sigma)-cebir

(S, Σ) : Ölçülebilir uzay

μ : Ölçü

(S, Σ, μ) : Ölçü uzayı

μ^* : Dış ölçü

λ^* : Lebesque dış ölçüsü

λ : Lebesque ölçüsü

$\mathcal{M}(S, \mu^*)$: S'nin μ^*'a göre ölçülebilir alt cümlelerinin sınıfı

f^+ : f fonksiyonunun pozitif parçası

f^- : f fonksiyonunun negatif parçası

$M(S,\Sigma)$: S üzerinde tanımlı, genişletilimiş reel değerli ve Σ-ölçüebilir fonksiyonların cümlesi

$M^+ = M^+(S,\Sigma)$: $M(S,\Sigma)$'daki negatif olmayan fonksiyonların cümlesi

$L = L(S,\Sigma,\mu)$: S üzerinde tanımlı, reel değerli, Σ-ölçüebilir ve μ ölçüsüne göre integrallenebilir fonksiyonların cümlesi

$\int_E f d\mu$: f fonksiyonunun $E \in \Sigma$ üzerinde μ ölçüsüne göre integrali

$L_p\,(S,\Sigma,\mu,X)$: Lebesque-Bochner uzayı

$H_{\alpha,\delta,\gamma}(X)$: Genelleştirilmiş $H_{\alpha,\delta,\gamma}(X)$ uzayı

$\|\cdot\|_{\alpha,\delta,\gamma}$: $H_{\alpha,\delta,\gamma}(X)$ uzayı üzerindeki norm

$H_{\alpha,\delta}(X)$: Genelleştirilmiş $H_{\alpha,\delta}(X)$ uzayı

$\|\cdot\|_{\alpha,\delta}$: $H_{\alpha,\delta}(X)$ uzayı üzerindeki norm

$H^1_{\alpha,\delta,\gamma}(X)$: $H_{\alpha,\delta,\gamma}(X)$ uzayının alt uzayı

$\|\cdot\|^1_{\alpha,\delta,\gamma}$: $H^1_{\alpha,\delta,\gamma}(X)$ uzayı üzerindeki norm

GİRİŞ

Matematik, Mekanik ve Fizikle ile ilgili bir çok problemin çözümü integral denklemlere dayanır. Bu denklemlerin singüler olanları ise, önemli bir yere sahiptir. Bunların çözümünde, Hölder tipli uzaylar ve singüler integral operatörler de kullanılmaktadır. $C^{0,\alpha,\delta}((a,b)\times(a,b),X)$ ve $C^{0,\alpha}((a,b),X)$ Hölder uzayları **[1]** ve **[2]**'de, bazı singüler integral operatörler ise **[3]**'te incelenmiştir.

Kısmî türevli diferensiyel denklemlere ilişkin birtakım problemleri çözmek için yukarıda bahsedilen Hölder uzaylarından daha geniş uzayların bulunması gerekmektedir. Friedrichs [**4**, sf. 2419-2426] Banach değerli fonksiyon sınıfları tanımlayarak bu şekildeki uzayların önemli bazı genelleştirmelerini elde etmiştir. Yine bu tip reel değerli fonksiyonların önemli bir sınıfını Hüseynov [**5**, sf. 253-258] tanımlamıştır.

Üç bölümden oluşan bu çalışmada ise, sırasıyla, $(a,b)\times(a,b)$ ve (a,b) üzerinde tanımlanan ve a noktasında singülerliğe sahip olan X Banach değerli fonksiyonları da ihtiva eden $H_{\alpha,\delta,\gamma}(X)$ ve $H_{\alpha,\delta}(X)$ uzayları tanımlanarak onların bir Banach uzayı olduğu gösterildi ve böylece Hüseynov [**5**, sf. 271-277] tarafından X'in $\mathbb{R}$ reel sayılar cümlesi, norm olarak $\mathbb{R}$'nin üzerindeki alışılmış normun ve reel değerli fonksiyonların adî Riemann integralinin alınması özel hâlinde elde edilen bazı sonuçlar; X'in bir Banach uzayı olarak alınması ve Banach değerli fonksiyonların Bochner integralinin kullanılmasıyla, genelleştirildi. Ayrıca, bu uzaylar üzerinde, sınırlı lineer operatörler tanımlandı ve X'in bir Banach cebiri olması durumunda; bu uzaylardan alınan sonlu sayıdaki fonksiyonun çarpımının yine bu tipten bir uzaya ait olduğu gösterilerek; bu şekildeki uzayların kartezyen çarpımı üzerinde, sınırlı n-lineer singüler operatörler tanımlandı. Bu suretle, sınırlı ve singüler Fredholm integral operatörleri elde edildi ve böylece Fredholm integral denklemler teorisinde kullanılabilecek önemli sonuçlara ulaşıldı.

BÖLÜM 1

TEMEL TANIMLAR VE TEOREMLER

Bu bölümde; sonraki bölümlerde kullanacağımız, operatör teoriye ilişkin bazı temel tanımlar ile literatürde Hölder uzayları olarak bilinen $C^{0,\alpha,\delta}((a,b)\times(a,b),X)$ ve $C^{0,\alpha}((a,b),X)$ uzayları hatırlatılıp, ölçü ve integral teorisinin temel kavramları ve Lebesque integralinin keyfi Banach uzaylarına genişletilmesi olan Bochner integrali verildi.

1.1. Operatör Teorinin Bazı Temel Kavramları

Tanım 1.1.1. [**6**, sf. 1] X boş olmayan herhangi bir cümle olmak üzere;

$$d : X \times X \longrightarrow \mathbb{R}$$

fonksiyonu, $\forall x, y, z \in X$ için;

$$\begin{array}{ll} (i) & d(x,x) = 0, \\ (ii) & d(x,y) = 0 \Rightarrow x = y, \\ (iii) & d(x,y) = d(y,x) \text{ ve} \\ (iv) & d(x,z) \leq d(x,y) + d(y,z) \end{array}$$

şartlarını sağlıyorsa, d'ye X için bir metrik ve (X,d) ikilisine de bir metrik uzay denir.

Tanım 1.1.2. [**6**, sf. 33] X boş olmayan bir cümle ve K da bir cisim olsun. Bu durumda; toplama ve skalarla çarpma olarak adlandırılan

$$+ : X \times X \longrightarrow X$$

ve

$$\cdot : K \times X \longrightarrow X$$

fonksiyonları, her $x, y, z \in X$ ve her $\lambda, \mu \in K$ için;

(i) $(x+y)+z = x+(y+z)$,

(ii) $x+y = y+x$,

(iii) $x+0 = x$ olacak şekilde, sıfır vektör adı verilen bir $0 \in X$ mevcuttur,

(iv) $x+(-x) = 0$ eşitliğini sağlayan bir $-x \in X$ mevcuttur,

(v) $\lambda(x+y) = \lambda x + \lambda y$,

(vi) $(\lambda+\mu)x = \lambda x + \mu x$,

(vii) $\lambda(\mu x) = (\lambda\mu)x$ ve

$(viii)$ $1 \cdot x = x$

aksiyomlarını sağlıyorsa, X cümlesine K cismi üzerinde bir vektör uzayı veya lineer uzay denir.

X, K cismi üzerinde bir lineer uzay iken; $Y \subset X$ alt cümlesinin de aynı cisim üzerinde bir lineer uzay olması için, $\forall\lambda \in K$ ve $\forall y_1, y_2 \in Y$ olmak üzere; λy_1, $y_1 + y_2 \in Y$ olması yeterlidir, [6, sf. 34].

Tanım 1.1.3. [7, sf. 59] X reel veya kompleks bir lineer uzay iken;

$$\|\cdot\| : X \longrightarrow \mathbb{R}$$

fonksiyonu, $\forall x, y \in X$ ve her $\lambda \in K$ ($K = \mathbb{R}$ veya $K = \mathbb{C}$) için;

$(N1)$ $\|x\| \geq 0$,

$(N2)$ $\|x\| = 0 \iff x = 0$,

$(N3)$ $\|\lambda x\| = |\lambda|\|x\|$ ve

$(N4)$ $\|x+y\| \leq \|x\| + \|y\|$

şartlarını sağlıyorsa, $\|\cdot\|$ fonksiyonuna X üzerinde bir norm ve $(X, \|\cdot\|)$ ikilisine de bir normlu uzay denir.

Eğer $(X, \|\cdot\|)$ normlu uzayındaki her Cauchy dizisi yakınsak ise, X uzayına tam normlu uzay veya Banach uzayı denir, [8, sf. 104].

1.2. $C^{0,\alpha,\delta}((a,b)\times(a,b),X)$ ve $C^{0,\alpha}((a,b),X)$ Uzayları

X, reel veya kompleks bir Banach uzayı, $-\infty < a,b < \infty$, $0 < \alpha,\delta < 1$ ve $M \geq 0$ bir sabit olmak üzere; $(a,b)\times(a,b)$ üzerinde tanımlı, X değerli ve $\forall s,t,s+\Delta s,t+\Delta t \in (a,b)$ için;

$$\|A(s,t)\| \leq M \tag{1.2.1}$$

ve

$$\|A(s+\Delta s,t+\Delta t) - A(s,t)\| \leq M(|\Delta s|^{\alpha} + |\Delta t|^{\delta}) \tag{1.2.2}$$

şartlarını sağlayan bütün $A(\cdot,\cdot)$ fonksiyonlarının cümlesi $C^{0,\alpha,\delta}((a,b)\times(a,b),X)$,

$$(A+B)(s,t) = A(s,t) + B(s,t)$$

ve

$$(\lambda A)(s,t) = \lambda A(s,t),\ \lambda \in K\ (K = \mathbb{R} \text{ veya } K = \mathbb{C})$$

işlemleriyle bir lineer uzay ve

$$m_A = \sup_{\substack{s,t,s+\Delta s,t+\Delta t \in (a,b) \\ \Delta s \neq 0 \vee \Delta t \neq 0}} \frac{\|A(s+\Delta s,t+\Delta t) - A(s,t)\|}{|\Delta s|^{\alpha} + |\Delta t|^{\delta}}$$

iken;

$$\|A\|_{\alpha,\delta} = maks\left\{ \sup_{s,t \in (a,b)} \|A(s,t)\|,\ m_A \right\} \tag{1.2.3}$$

normu ile bir Banach uzayıdır.

Yine X, reel veya kompleks bir Banach uzayı, $-\infty < a,b < \infty$, $0 < \alpha < 1$ ve $M \geq 0$ bir sabit olsun. Bu taktirde; (a,b) üzerinde tanımlı, X değerli, $\Delta s \geq 0$ ve $s, s+\Delta s \in (a,b)$ için;

$$\|A(s)\| \leq M \tag{1.2.4}$$

ve

$$\|A(s+\Delta s) - A(s)\| \leq M(\Delta s)^{\alpha} \tag{1.2.5}$$

eşitsizliklerini sağlayan bütün $A(\cdot)$ fonksiyonlarının cümlesi $C^{0,\alpha}((a,b),X)$,

$$(A+B)(s) = A(s) + B(s)$$

ve

$$(\lambda A)(s) = \lambda A(s),\ \lambda \in K\ (K = \mathbb{R} \text{ veya } K = \mathbb{C})$$

işlemleriyle bir lineer uzay ve

$$\|A\|_\alpha = maks \left\{ \sup_{s\in(a,b)} \|A(s)\|,\ \sup_{\substack{s+\Delta s\in(a,b)\\ \Delta s\neq 0}} \frac{\|A(s+\Delta s) - A(s)\|}{(\Delta s)^\alpha} \right\} \tag{1.2.6}$$

normu ile bir Banach uzayıdır, [**1**, sf. 82].

Yukarıdaki uzaylar, literatürde Hölder uzayları olarak bilinmektedir. Bu şekildeki fonksiyon sınıfları, Muskhelişvili [**2**, sf. 18-33], Gakhov [**9**, sf. 25-51] ve [**10**]'da etraflıca incelenmiştir.

Tanım 1.2.1. [**7**, sf. 394] X, K cismi üzerinde bir vektör uzayı ve

$$\cdot : X \times X \longrightarrow X$$

çarpma işlemi tanımlanmış olsun. Bu durumda; $\forall x, y, z \in X$ ve $\forall \alpha \in K$ için;

(*i*) $(xy)z = x(yz)$,

(*ii*) $x(y+z) = xy + xz$,

(*iii*) $(x+y)z = xz + yz$ ve

(*iv*) $\alpha(xy) = (\alpha x)y = x(\alpha y)$

şartları sağlanıyorsa, X'e K üzerinde bir cebir denir.

Eğer, $\forall x \in X$ için $ex = xe = x$ olacak şekilde bir $e \in X$ varsa, e'ye X'in birim elemanı adı verilir, [**7**, sf. 394-395].

Tanım 1.2.2. [**7**, sf. 395] X normlu uzayı bir cebir olmak üzere; $\forall x, y \in X$ için

$$\|xy\| \leq \|x\|\,\|y\|$$

ve X, e birim elemanına sahip iken; $\|e\| = 1$ ise, X'e bir normlu cebir denir.

Banach cebiri ise, üzerinde tanımlanan norma göre tam olan bir normlu cebirdir.

X bir Banach cebiri, $(a,b) \subset \mathbb{R}$ bir açık aralık; $t, t+\Delta t \in (a,b)$,

$$\Delta f = f(t+\Delta t) - f(t),\ \Delta g = g(t+\Delta t) - g(t),$$

$$\Delta(fg) = (fg)(t+\Delta t) - (fg)(t)$$

ve $f, g : (a,b) \longrightarrow X$ sürekli fonksiyonlar olmak üzere;

$$\Delta(fg) = (\Delta f)g(t+\Delta t) + f(t)\Delta g$$

eşitliğinden; $(fg)(t) = f(t)g(t)$ olarak tanımlanan $fg : (a,b) \longrightarrow X$ çarpım fonksiyonunun da sürekli olduğu kolayca görülebilir.

TANIM 1.2.3. [7, sf. 82-83] Bir T lineer operatörü, tanım bölgesi $\mathcal{D}(T)$, K cismi üzerinde bir lineer uzay ve değer bölgesi $\mathcal{R}(T)$ de K cismi üzerindeki bir lineer uzayda yatan ve her $x, y \in \mathcal{D}(T)$ ve her $\alpha \in K$ için;

$$T(x+y) = Tx + Ty$$

ve

$$T(\alpha x) = \alpha Tx$$

eşitliklerini sağlayan dönüşüm olarak tanımlanır.

TANIM 1.2.4. [7, sf. 91-92] X, Y normlu uzaylar $\mathcal{D}(T) \subset X$ ve

$$T : \mathcal{D}(T) \longrightarrow Y$$

bir lineer operatör olsun. Bu durumda; her $x \in \mathcal{D}(T)$ için

$$\|Tx\| \leq c\,\|x\| \tag{1.2.7}$$

eşitsizliğini sağlayacak şekilde bir c reel sabiti varsa, T'ye sınırlıdır denir.

(1.2.7) şartını sağlayan en küçük c sabitine T operatörünün normu denir ve $\|T\|$ ile gösterilir.

$\|T\|$ için,

$$\|T\| = \sup_{\substack{x \in \mathcal{D}(T) \\ x \neq 0}} \frac{\|Tx\|}{\|x\|} = \sup_{\substack{x \in \mathcal{D}(T) \\ \|x\|=1}} \|Tx\| \tag{1.2.8}$$

eşitliği geçerlidir, [**7**, sf. 92].

Teorem 1.2.1. [**7**, sf. 117-118] *X ve Y'nin her ikisi reel veya kompleks normlu uzaylar, $B(X,Y)$'de, X'ten Y'ye tanımlı ve sınırlı bütün lineer operatörlerin cümlesi olsun. Bu durumda; $B(X,Y)$,*

$$(T_1 + T_2)(x) = T_1 x + T_2 x$$

ve

$$(\alpha T)(x) = \alpha T x,\ \alpha \in K (K = \mathbb{R} \text{ veya } K = \mathbb{C})$$

işlemleriyle bir lineer uzay ve

$$\|T\| = \sup_{\substack{x \in X \\ x \neq 0}} \frac{\|Tx\|}{\|x\|} = \sup_{\substack{x \in X \\ \|x\|=1}} \|Tx\| \tag{1.2.9}$$

normu ile bir normlu uzaydır. Üstelik Y tamsa, $B(X,Y)$ de tamdır.

Tanım 1.2.5. [**11**, sf. 131] $X_1, X_2, \cdots, X_n$ ve Y normlu uzaylar olsun. Bu taktirde; $\Psi : X_1 \times X_2 \times \cdots \times X_n \longrightarrow Y$ dönüşümü, herhangi $n-1$ değişken sabit tutulduğunda, geriye kalan değişkene göre lineer ise Ψ'ye n-lineer operatör ve

$$\|\Psi(x_1, x_2, \cdots, x_n)\| \leq c\,\|x_1\|\,\|x_2\| \cdots \|x_n\|\ (x_i \in X_i, i = 1, 2, \cdots, n) \tag{1.2.10}$$

olacak şekilde bir c reel sabiti mevcutsa, Ψ'ye sınırlıdır denir ve (1.2.10) eşitsizliğini sağlayan en küçük c sabitine de Ψ'nin normu adı verilir.

$n = 2$ özel hâlinde; Ψ, bilineer operatör olarak adlandırılır.

Ayrıca,

$$\begin{aligned} \|\Psi\| &= \sup_{\substack{x_1 \in X_1, \cdots, x_n \in X_n \\ x_1 \neq 0, \cdots, x_n \neq 0}} \frac{\|\Psi(x_1, \cdots, x_n)\|}{\|x_1\| \cdots \|x_n\|} \\ &= \sup_{\substack{x_1 \in X_1, \cdots, x_n \in X_n \\ \|x_1\|=1, \cdots, \|x_n\|=1}} \|\Psi(x_1, \cdots, x_n)\| \end{aligned}$$

olduğu bilinmektedir.

1.3. Ölçü ve İntegral

Tanım 1.3.1. [**12**, sf. 6] S bir cümle ve Σ da S'nin alt cümlelerinden oluşan bir aile olsun. Bu taktirde;

(*i*) $\emptyset, S \in \Sigma$

(*ii*) $A \in \Sigma \Rightarrow S - A \in \Sigma$ ve

(*iii*) $(A_n), \Sigma$'daki herhangi bir dizi ise $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \Sigma$

oluyorsa, Σ'ya S üzerinde bir σ (sigma)-cebir ve (S, Σ) ikilisine de ölçülebilir uzay denir.

Tanım 1.3.2. [**12**, sf. 19] (S, Σ) ikilisi bir ölçülebilir uzay olmak üzere; Σ üzerinde tanımlı, genişletilmiş reel değerli ve

(*i*) $\mu(\emptyset) = 0$,

(*ii*) $\forall E \in \Sigma$ için $\mu(E) \geq 0$ ve

(*iii*) μ, sayılabilir toplamsaldır, yani; $(E_n), \Sigma$'daki herhangi bir ayrık dizi ise $\mu(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(E_n)$ eşitliği geçerlidir

şartlarını sağlayan μ fonksiyonuna bir ölçü ve (S, Σ, μ) üçlüsüne de ölçü uzayı adı verilir.

Her $E \in \Sigma$ için $\mu(E) < \infty$ ise μ fonksiyonuna sonlu ölçü denir, [**13**, sf. 10].

Tanım 1.3.3. [**13**, sf. 14] S bir cümle ve $\mathcal{P}(S)$'de S'nin bütün alt cümlelerinin cümlesi olsun. Bu durumda;

(*i*) $\mu^*(\emptyset) = 0$,

(*ii*) $A \subset B \subset S \Rightarrow \mu^*(A) \leq \mu^*(B)$ ve

(*iii*) $(E_n), S$'nin alt cümlelerinin herhangi bir dizisi ise $\mu^*(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \mu^*(E_n)$

şartlarını sağlayan $\mu^* : \mathcal{P}(S) \longrightarrow [0, \infty]$ fonksiyonuna, S üzerinde bir dış ölçü denir.

TANIM 1.3.4. [**13**, sf. 15] (I_i), $\mathbb{R}$'nin sınırlı ve açık aralıklarından oluşan herhangi bir dizi ve

$$\tau_A = \left\{ (I_i) = ((a_i, b_i)) : A \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} I_i \right\}$$

iken; $\mathbb{R}$'nin kuvvet cümlesi $\mathcal{P}(\mathbb{R})$ üzerinde

$$\lambda^*(A) = \inf \left\{ \sum_{i=1}^{\infty} (b_i - a_i) : (I_i) = ((a_i, b_i)) \in \tau_A \right\}$$

eşitliğiyle tanımlanan λ^* fonksiyonu bir dış ölçüdür, bu ölçüye $\mathbb{R}$ üzerindeki Lebesque dış ölçüsü denir.

TANIM 1.3.5. [**13**, sf. 17] S bir cümle ve μ^*'da S'de bir dış ölçü olsun. Eğer S'nin her A alt cümlesi için,

$$\mu^*(A) \geq \mu^*(A \cap B) + \mu^*(A \cap B^c)$$

şartı sağlanıyorsa $B \subset S$'ye μ^*- ölçülebilirdir veya μ^*'a göre ölçülebilirdir denir.

TEOREM 1.3.1. [**13**, sf. 18] *S bir cümle, μ^*, S'de bir dış ölçü ve $\mathcal{M}(S, \mu^*)$ da S'nin μ^*- ölçülebilen bütün alt cümlelerinin sınıfı olsun. Bu durumda;*

(1) $\mathcal{M}(S, \mu^*)$ bir σ-cebirdir ve

(2) μ^*'ın $\mathcal{M}(S, \mu^*)$'a kısıtlanması $\mathcal{M}(S, \mu^*)$ üzerinde bir ölçüdür.

Böylece, Teorem 1.3.1'den; Lebesque dış ölçüsü λ^*'ın $\mathcal{M}(\mathbb{R}, \lambda^*)$ σ-cebirine olan kısıtlanması bir ölçüdür. Bu ölçüye Lebesque ölçüsü adı verilir ve λ ile gösterilir, [**13**, sf. 21].

Diğer taraftan; $(a, b) \subset \mathbb{R}$ bir açık aralık olmak üzere;

$$\mathcal{M}((a, b), \lambda^*) = \{A \cap (a, b) | A \in \mathcal{M}(\mathbb{R}, \lambda^*)\} \subset \mathcal{P}((a, b))$$

şeklinde tanımlanan $\mathcal{M}((a, b), \lambda^*)$ cümlesi, (a, b) üzerinde bir σ-cebiri ve λ^* da $\mathcal{M}((a, b), \lambda^*)$ üzerinde bir ölçüdür. Bu ölçüye de Lebesque ölçüsü denir ve yine λ ile gösterilir, [**14**, sf. 392].

TANIM 1.3.6. [**12**, sf. 10] Reel değerli bir f fonksiyonu verildiğinde,

$$f^+(x) = \sup\{f(x), 0\}, \ \ f^-(x) = \sup\{-f(x), 0\}$$

olarak tanımlanan f^+ ve f^- fonksiyonlarına sırasıya, f'nin pozitif ve negatif parçaları denir.

TANIM 1.3.7. [**12**, sf. 8] (S, Σ) bir ölçülebilir uzay iken; $\forall \alpha \in \mathbb{R}$ için

$$\{s \in S : f(s) > \alpha\} \in \Sigma$$

oluyorsa, $f : S \longrightarrow [-\infty, \infty]$ fonksiyonuna Σ- ölçülebilirdir denir.

$f = f^+ - f^-$ olduğundan; f'nin ölçülebilir olması için gerek ve yeter şart f^+ ve f^- fonksiyonlarının ölçülebilir olmasıdır, [**12**, sf. 10].

TANIM 1.3.8. [**12**, sf. 27] (S, Σ) bir ölçülebilir uzay olsun. S üzerinde tanımlı, reel değerli bir φ fonksiyonunun değer cümlesi sonlu ise φ'ye basit fonksiyon denir.

Ölçülebilir basit bir φ fonksiyonu, $a_1, a_2, \cdots, a_n \in \mathbb{R}$'ler, φ'nin aldığı farklı değerler, $E_i = \{x \in S : \varphi(x) = a_i\} \in \Sigma$ ve

$$\chi_{E_i}(x) = \begin{cases} 1 & , \ x \in E_i \\ 0 & , \ x \notin E_i \end{cases}$$

olmak üzere;

$$\varphi = \sum_{i=1}^{n} a_i \chi_{E_i} \tag{1.3.1}$$

şeklinde temsil edilebilir, [**12**, sf. 27].

TANIM 1.3.9. [**6**, sf. 325] (S, Σ, μ) bir ölçü uzayı ise (1.3.1) gösterimine sahip bir φ basit fonksiyonunun μ ölçüsüne göre $E \in \Sigma$ üzerindeki integrali,

$$\int_E \varphi d\mu = \sum_{i=1}^{n} a_i \mu(E_i \cap E)$$

olarak tanımlanır.

(S, Σ, μ) bir ölçü uzayı ise S üzerinde tanımlı, genişletilmiş reel değerli ve ölçülebilir bütün fonksiyonların cümlesi $M = M(S, \Sigma)$ ile, M'ye ait ve negatif olmayan fonksiyonların cümlesi de $M^+ = M^+(S, \Sigma)$ ile gösterilir, [**12**, sf. 27].

Tanım 1.3.10. [**6**, sf. 325] $f \in M^+(S, \Sigma)$ fonksiyonunun μ ölçüsüne göre $E \in \Sigma$ üzerindeki integrali,

$$\int_E f d\mu = \sup \left\{ \int_E \varphi d\mu : \varphi \in M^+ \text{ basit fonksiyon ve } \varphi \leq f \right\}$$

eşitliğiyle tanımlanan genişletilmiş reel sayıdır.

Tanım 1.3.11. [**12**, sf. 41] (S, Σ, μ) bir ölçü uzayı ise S üzerinde tanımlı, reel değerli, ölçülebilir ve f^+, f^- parçalarının her ikisinin μ ölçüsüne göre integrallerinin sonlu olduğu bütün fonksiyonların $L = L(S, \Sigma, \mu)$ cümlesine, integrallenebilir fonksiyonlar cümlesi denir.

$f \in L$ fonksiyonunun μ ölçüsüne göre $E \in \Sigma$ üzerindeki integrali,

$$\int_E f d\mu = \int_E f^+ d\mu - \int_E f^- d\mu$$

eşitliği ile tanımlanan reel sayıdır, [**12**, sf. 41].

Teorem 1.3.2. [**12**, sf. 43] *(S, Σ, μ) bir ölçü uzayı; f, S üzerinde tanımlı, reel değerli, ölçülebilir ve g de S üzerinde tanımlı, reel değerli ve $E \in \Sigma$ üzerinde integrallenebilir fonksiyon olsun. Bu durumda; $|f| \leq |g|$ ise f de $E \in \Sigma$ üzerinde integrallenebilirdir ve*

$$\int_E |f| d\mu \leq \int_E |g| d\mu$$

sağlanır.

1.4. Banach Değerli Fonksiyonların Bochner İntegrali

Tanım 1.4.1. [**15**, sf. 41] X bir Banach uzayı, (S, Σ, μ) bir sonlu ölçü uzayı, $x_1, x_2, \cdots, x_n \in X$, f'nin aldığı farklı değerler ve $E_i = \{x \in S : f(x) = x_i\} \in \Sigma$ ise, f'ye ölçülebilir basit fonksiyon denir ve

$$\chi_{E_i}(w) = \begin{cases} 1 & , \quad w \in E_i \\ 0 & , \quad w \notin E_i \end{cases}$$

olmak üzere; $f : S \longrightarrow X$ fonksiyonu, $f = \sum_{i=1}^{n} x_i \chi_{E_i}$ şeklinde ifade edilebilir.

TANIM 1.4.2. [**16**, sf. 88] Tanım 1.4.1'de verilen f basit fonksiyonunun μ ölçüsüne göre $E \in \Sigma$ üzerindeki Bochner integrali,

$$\int_E f d\mu = \sum_{i=1}^{n} x_i \mu(E_i \cap E)$$

şeklinde tanımlanır.

TANIM 1.4.3. [**17**, sf. 201] X bir Banach uzayı ve (S, Σ, μ) bir sonlu ölçü uzayı olmak üzere; $g : S \longrightarrow X$ fonksiyonu için;

$$\lim_n \|f_n(t) - g(t)\| = 0; \quad t \in S - N, \; \mu(N) = 0 \tag{1.4.1}$$

eşitliğini sağlayan, S üzerinde tanımlı ve X değerli basit fonksiyonların bir (f_n) dizisi mevcutsa, g fonksiyonuna kuvvetli ölçülebilirdir veya μ-ölçülebilirdir denir.

TEOREM 1.4.1. [**16**, sf. 88] *Sürekli her fonksiyon kuvvetli ölçülebilirdir.*

TEOREM 1.4.2. [**18**, sf. 336] *X bir Banach uzayı, (S, Σ, μ) bir sonlu ölçü uzayı ve $g : S \longrightarrow X$ fonksiyonu kuvvetli ölçülebilirse,*

$$h : S \longrightarrow \mathbb{R}, \; h(t) = \|g(t)\|$$

şeklinde tanımlanan h fonksiyonu Σ-ölçülebilirdir.

TANIM 1.4.4. [**16**, sf. 88] X bir Banach uzayı, (S, Σ, μ) bir sonlu ölçü uzayı $g : S \longrightarrow X$ fonksiyonu kuvvetli ölçülebilir ve f_n'ler de (1.4.1) eşitliğini sağlayan basit fonksiyonlar olsun. Bu durumda; $\lim_n \int_E f_n d\mu$ limiti mevcutsa, bu limit değerine g'nin $E \in \Sigma$ üzerinde μ ölçüsüne göre Bochner integrali denir ve $\int_E g d\mu$ şeklinde gösterilir.

TEOREM 1.4.3. [**17**, sf. 202] *Eğer $\int_E g d\mu$ Bochner integrali mevcutsa, o zaman,*

$$\left\| \int_E g d\mu \right\| \leq \int_E \|g\| \, d\mu \tag{1.4.2}$$

eşitsizliği geçerlidir.

Teorem 1.4.4. [17, sf. 203] *$\int_E g d\mu$ Bochner integralinin mevcut olması için gerek ve yeter şart g'nin kuvvetli ölçülebilir ve $\int_E \|g\| \, d\mu < \infty$ olmasıdır.*

Teorem 1.4.5. [15, sf. 49-50] *X bir Banach uzayı, (S, Σ, μ) bir sonlu ölçü uzayı ve $1 \leq p < \infty$ olmak üzere; S üzerinde tanımlı, X değerli ve $\int_S \|g\|^p d\mu < \infty$ olacak şekildeki Bochner integrallenebilen bütün g fonksiyonlarının denklik sınıflarından ibaret $L_p(S, \Sigma, \mu, X)$ cümlesi,*

$$\|g\|_p = \left(\int_S \|g\|^p d\mu \right)^{\frac{1}{p}}$$

normu ile bir Banach uzayıdır.

Bu uzay, Lebesque- Bochner uzayı olarak adlandırılır.

Çalışmanın esasını oluşturan ikinci ve üçüncü bölümde, μ ölçüsü λ Lebesque ölçüsü ve (a, b) üzerindeki σ-cebiri olarak, $\mathcal{M}\left((a, b), \lambda^*\right)$ alınacak ve X'in bir Banach uzayı veya Banach cebiri olması durumunda;

$$f : (a, b) \longrightarrow X$$

fonksiyonu için

$$\int_{(a,b)} f d\mu = \int_{(a,b)} f d\lambda = \int_a^b f(t) dt$$

şeklinde gösterilen Bochner integralinin mevcut olması, f fonksiyonunun süreki ve böylece Teorem 1.4.1'den kuvvetli ölçülebilir olduğu gerçeği ile Teorem 1.4.4'ün kullanılmasıyla,

$$\int_{(a,b)} \|f(\cdot)\| \, d\mu = \int_{(a,b)} \|f(\cdot)\| \, d\lambda = \int_a^b \|f(t)\| \, dt$$

şeklinde gösterilen, reel değerli $\|f(\cdot)\|$ fonksiyonunun Lebesque integralinin mevcut olmasına karşılık getirilecektir. $\int_a^b \|f(t)\| \, dt$ Lebesque integralinin varlığı ise, Teorem 1.3.2 kullanılarak; $0 < \alpha < 1$ olmak üzere; $\int_a^b \frac{dt}{(t-a)^\alpha}$ Lebesque integralinin varlığından elde edilecektir. $\int_a^b \frac{dt}{(t-a)^\alpha}$ Lebesque integralinin mevcut ve değerinin de $\dfrac{(b-a)^{1-\alpha}}{1-\alpha}$ olduğu ise bilinmektedir. Son olarak; Teorem 1.4.3'ten faydalanarak sağlanması gereken eşitsizliklere ulaşılacaktır.

BÖLÜM 2

GENELLEŞTİRİLMİŞ $H_{\alpha,\delta,\gamma}(X)$ UZAYLARI

Çalışmanın esasını oluşturan bu bölümde önce, $(a,b)\times(a,b)$ üzerinde tanımlı, Banach değerli ve ikinci değişkene göre a noktasında singülerliğe sahip olan iki değişkenli $A(\cdot,\cdot)$ fonksiyonlarını da ihtiva eden $H_{\alpha,\delta,\gamma}(X)$ cümlesi tanımlanarak; bu cümlenin bir Banach uzayı olduğu gösterilecektir. Böylece, X'in $\mathbb{R}$ reel sayılar cümlesi alınması özel hâlinde [5]'te elde edilen $H_{\alpha,\delta,\gamma}(\mathbb{R})$ cümlesi genelleştirilmiş olacaktır. Daha sonra, uzaya ait her fonksiyonun sürekli olduğu ispat edilecek ve bu uzaya ilişkin bazı kapsama bağıntıları verilecektir.

Ayrıca, yukarıdakine benzer şekilde, (a,b) aralığında tanımlı, Banach değerli ve a noktasında singülerliği bulunan tek değişkenli $A(\cdot)$ fonksiyonlarını da ihtiva eden $H_{\alpha,\delta}(X)$ cümlesi tanımlanacak ve $H_{\alpha,\delta,\gamma}(X)$ uzayına ilişkin verilen teoremlere $H_{\alpha,\delta}(X)$ uzayı bakımından karşılık gelen teoremler, ispatsız olarak, verilecektir ve $H_{\alpha,\delta}(X)$, $H_{\alpha,\delta,\gamma}(X)$ uzayları ile bu tip uzayların kartezyen çarpımı üzerinde sınırlı, lineer, bilineer ve n-lineer operatörler tanımlanacak ve sınırlı Fredholm integral operatörleri elde edilecektir.

2.1. $H_{\alpha,\delta,\gamma}(X)$ Uzayı

X, reel veya kompleks bir Banach uzayı, a, b, α, δ ve γ;

$$-\infty < a,\ b < \infty,\ 0 < \alpha,\ \alpha+\gamma < 1,\ 0 < \gamma < \delta < 1$$

eşitsizliklerini sağlayan keyfi fakat sabit sayılar, $M \geq 0$ bir sabit ve $\Delta t \geq 0$ olsun. Buna göre her $s, t, s+\Delta s, t+\Delta t \in (a,b)$ için;

$$\|A(s,t)\| \leq \frac{M}{(t-a)^{\alpha}} \tag{2.1.1}$$

ve

$$\Delta A = A(s+\Delta s, t+\Delta t) - A(s,t)$$

olmak üzere;

$$\|\Delta A\| \leq \frac{M\left(|\Delta s|^{\delta} + (\Delta t)^{\gamma}\right)}{(t-a)^{\alpha+\gamma}} \tag{2.1.2}$$

şartlarını sağlayan bütün,

$$\begin{array}{rlcl} A: & (a,b)\times(a,b) & \longrightarrow & X \\ & (s,t) & \longrightarrow & A(s,t) \end{array}$$

fonksiyonlarının cümlesini $H_{\alpha,\delta,\gamma}(X)$ veya $H_{\alpha,\delta,\gamma}\left((a,b)\times(a,b),X\right)$ ile gösterelim. Bu durumda; aşağıdaki teoremi verebiliriz:

TEOREM 2.1.1. *$H_{\alpha,\delta,\gamma}\left((a,b)\times(a,b),X\right)$,*

$$(A+B)(s,t) = A(s,t) + B(s,t)$$

ve

$$(\lambda A)(s,t) = \lambda A(s,t),\ \lambda \in K\ (K = \mathbb{R} \text{ veya } K = \mathbb{C})$$

olarak tanımlanan işlemlerle bir lineer uzay,

$$p_A = \sup_{s,\,t \in (a,b)} (t-a)^{\alpha} \|A(s,t)\| \tag{2.1.3}$$

ve

$$k_A = \sup_{\substack{s,\,t,\,s+\Delta s,\,t+\Delta t \in (a,b) \\ \Delta s \neq 0 \vee \Delta t \neq 0}} \frac{(t-a)^{\alpha+\gamma}\|\Delta A\|}{|\Delta s|^{\delta} + (\Delta t)^{\gamma}} \tag{2.1.4}$$

olmak üzere;

$$\|A\|_{\alpha,\delta,\gamma} = maks\,\{p_A,\ k_A\} \tag{2.1.5}$$

normu ile bir Banach uzayıdır.

İSPAT. İspat üç aşamada verilecektir.

(I) X bir Banach uzayı iken;

$$\mathcal{A} = \{A | A : (a,b)\times(a,b) \longrightarrow X\}$$

cümlesinin, yukarıdaki işlemlerle bir lineer uzay teşkil ettiği bilinmektedir, [**19**, sf. 69]. Bu durumda;

$H_{\alpha,\delta,\gamma}((a,b)\times(a,b),X) = \{A | A : (a,b)\times(a,b) \longrightarrow X; A, (2.1.1) \text{ ve } (2.1.2)\text{'yi sağlar}\}$ $\subset \mathcal{A}$ olduğundan, $H_{\alpha,\delta,\gamma}((a,b)\times(a,b),X)$'in lineer uzay olduğunu göstermek için; toplama ve skalarla çarpma işlemleri altında kapalı olduğunu göstermek yeter.

$A, B \in H_{\alpha,\delta,\gamma}((a,b)\times(a,b),X)$ ve $\Delta t \geq 0$ iken; her s, t, $s+\Delta s, t+\Delta t \in (a,b)$ için;

$$\|A(s,t)\| \leq \frac{M_1}{(t-a)^\alpha},$$

$$\|A(s+\Delta s, t+\Delta t) - A(s,t)\| \leq \frac{M_1(|\Delta s|^\delta + (\Delta t)^\gamma)}{(t-a)^{\alpha+\gamma}},$$

$$\|B(s,t)\| < \frac{M_2}{(t-a)^\alpha}$$

ve

$$\|B(s+\Delta s, t+\Delta t) - B(s,t)\| \leq \frac{M_2(|\Delta s|^\delta + (\Delta t)^\gamma)}{(t-a)^{\alpha+\gamma}}$$

eşitsizliklerini sağlayan $M_1, M_2 \geq 0$ sabitleri mevcuttur. Bu durumda;

$$\|(A+B)(s,t)\| = \|A(s,t) + B(s,t)\| \leq \|A(s,t)\| + \|B(s,t)\| \leq \frac{M_1+M_2}{(t-a)^\alpha}$$

ve

$$\begin{aligned}
\Delta(A+B) &= (A+B)(s+\Delta s, t+\Delta t) - (A+B)(s,t) \\
&= A(s+\Delta s, t+\Delta t) - A(s,t) + B(s+\Delta s, t+\Delta t) - B(s,t) \\
&= \Delta A + \Delta B
\end{aligned}$$

olduğundan;

$$\begin{aligned}
\|\Delta(A+B)\| &= \|\Delta A + \Delta B\| \\
&\leq \|\Delta A\| + \|\Delta B\| \\
&\leq \frac{(M_1+M_2)\left(|\Delta s|^\delta + (\Delta t)^\gamma\right)}{(t-a)^{\alpha+\gamma}}
\end{aligned}$$

olacak şekilde bir $M_1+M_2 \geq 0$ sabiti mevcuttur. Yani, $A+B \in H_{\alpha,\delta,\gamma}((a,b)\times(a,b),X)$ ve böylece $H_{\alpha,\delta,\gamma}((a,b)\times(a,b),X)$ cümlesi, toplama işlemine göre kapalıdır.

$\lambda \in K$ ($K = \mathbb{R}$ veya $K = \mathbb{C}$) iken;

$$\|(\lambda A)(s,t)\| = \|\lambda A(s,t)\| = |\lambda| \, \|A(s,t)\| \leq \frac{|\lambda| M_1}{(t-a)^\alpha}$$

ve

$$\begin{aligned}\|(\lambda A)(s+\Delta s,\, t+\Delta t)-(\lambda A)(s,t)\| &= \|\lambda\left(A(s+\Delta s,\, t+\Delta t)-A(s,t)\right)\| \\ &\leq \frac{|\lambda| M_1\left(|\Delta s|^{\delta}+(\Delta t)^{\gamma}\right)}{(t-a)^{\alpha+\gamma}}\end{aligned}$$

olacak şekilde bir $|\lambda|M_1 \geq 0$ sabiti olduğundan, $H_{\alpha,\delta,\gamma}\left((a,b)\times(a,b),X\right)$, skalarla çarpma işlemine göre de kapalıdır ve şu hâlde bir lineer uzaydır.

(II) Şimdide (2.1.5) eşitliğiyle tanımlanan $\|\cdot\|_{\alpha,\delta,\gamma}$ fonksiyonunun $H_{\alpha,\delta,\gamma}\left((a,b)\times(a,b),X\right)$ uzayı üzerinde bir norm olduğunu görelim:

(N1) $A \in H_{\alpha,\delta,\gamma}\left((a,b)\times(a,b),X\right)$ için açık olarak; $\|A\|_{\alpha,\delta,\gamma} \geq 0$'dır.

(N2) $A \in H_{\alpha,\delta,\gamma}\left((a,b)\times(a,b),X\right)$ ve $\|A\|_{\alpha,\delta,\gamma} = 0$ ise

$$\|A\|_{\alpha,\delta,\gamma} = maks\,\{p_A,\ k_A\} = 0$$

olur. Bu durumda;

$$0 \leq \sup_{s,\,t\in(a,b)} (t-a)^{\alpha}\|A(s,t)\| \leq \|A\|_{\alpha,\delta,\gamma} = 0$$

olacağından; $\sup_{s,\,t\in(a,b)}(t-a)^{\alpha}\|A(s,t)\| = 0$ elde edilir.

$$\begin{aligned}\sup_{s,\,t\in(a,b)} (t-a)^{\alpha}\|A(s,t)\| = 0 &\Leftrightarrow \forall s,\ t\in(a,b) \text{ için } \|A(s,t)\| = 0 \\ &\Leftrightarrow \forall s,\ t\in(a,b) \text{ için } A(s,t) = 0 \\ &\Leftrightarrow A = 0\end{aligned}$$

olup, böylece $\|A\|_{\alpha,\delta,\gamma} = 0$ ise $A = 0$ olacağı anlaşılır. Diğer taraftan $A = 0$ ise açık olarak; $\|A\|_{\alpha,\delta,\gamma} = 0$ olur. Şu hâlde; $\|A\|_{\alpha,\delta,\gamma} = 0 \Leftrightarrow A = 0$ önermesi doğrudur.

(N3) (2.1.3) ve (2.1.4)'ten; $\lambda \in K$ ($K = \mathbb{R}$ veya $K = \mathbb{C}$) iken;

$$\begin{aligned}p_{(\lambda A)} = \sup_{s,\,t\in(a,b)} (t-a)^{\alpha}\|(\lambda A)(s,t)\| &= |\lambda| \sup_{s,\,t\in(a,b)} (t-a)^{\alpha}\|A(s,t)\| \\ &= |\lambda|\, p_A\end{aligned}$$

ve

$$
\begin{aligned}
k_{(\lambda A)} &= \sup_{\substack{s,\,t,\,s+\Delta s,\,t+\Delta t\,\in\,(a,b)\\ \Delta s\neq 0 \vee \Delta t\neq 0}} \frac{(t-a)^{\alpha+\gamma}\,\|\Delta(\lambda A)\|}{|\Delta s|^{\delta}+(\Delta t)^{\gamma}} \\
&= |\lambda| \sup_{\substack{s,\,t,\,s+\Delta s,\,t+\Delta t\,\in\,(a,b)\\ \Delta s\neq 0 \vee \Delta t\neq 0}} \frac{(t-a)^{\alpha+\gamma}\,\|\Delta A\|}{|\Delta s|^{\delta}+(\Delta t)^{\gamma}} \\
&= |\lambda|\,k_A
\end{aligned}
$$

olduğundan;

$$
\begin{aligned}
\|\lambda A\|_{\alpha,\delta,\gamma} &= maks\left\{p_{(\lambda A)}, k_{(\lambda A)}\right\} \\
&= maks\left\{|\lambda|\,p_A,\ |\lambda|\,k_A\right\} \\
&= |\lambda|\,maks\left\{p_A,\ k_A\right\} \\
&= |\lambda|\,\|A\|_{\alpha,\delta,\gamma}
\end{aligned}
$$

olur.

(N4) $A, B \in H_{\alpha,\delta,\gamma}((a,b)\times(a,b), X)$ ise (2.1.3)'ten;

$$
\begin{aligned}
p_{(A+B)} &= \sup_{s,\,t\,\in\,(a,b)} (t-a)^{\alpha}\,\|(A+B)(s,t)\| \\
&= \sup_{s,\,t\,\in\,(a,b)} (t-a)^{\alpha}\,\|A(s,t)+B(s,t)\| \\
&\leq \sup_{s,\,t\,\in\,(a,b)} (t-a)^{\alpha}\,\|A(s,t)\| + \sup_{s,\,t\,\in\,(a,b)} (t-a)^{\alpha}\,\|B(s,t)\| \\
&= p_A + p_B
\end{aligned}
$$

ve (2.1.4)'ten;

$$
\begin{aligned}
k_{(A+B)} &= \sup_{\substack{s,\,t,\,s+\Delta s,\,t+\Delta t\,\in\,(a,b)\\ \Delta s\neq 0 \vee \Delta t\neq 0}} \frac{(t-a)^{\alpha+\gamma}\,\|\Delta(A+B)\|}{|\Delta s|^{\delta}+(\Delta t)^{\gamma}} \\
&\leq \sup_{\substack{s,\,t,\,s+\Delta s,\,t+\Delta t\,\in\,(a,b)\\ \Delta s\neq 0 \vee \Delta t\neq 0}} \frac{(t-a)^{\alpha+\gamma}\,\|\Delta A\|}{|\Delta s|^{\delta}+(\Delta t)^{\gamma}} + \\
&\quad + \sup_{\substack{s,\,t,\,s+\Delta s,\,t+\Delta t\,\in\,(a,b)\\ \Delta s\neq 0 \vee \Delta t\neq 0}} \frac{(t-a)^{\alpha+\gamma}\,\|\Delta B\|}{|\Delta s|^{\delta}+(\Delta t)^{\gamma}} \\
&= k_A + k_B
\end{aligned}
$$

olup,

$$\begin{aligned}\|A+B\|_{\alpha,\delta,\gamma} &= maks\left\{p_{(A+B)},\ k_{(A+B)}\right\}\\ &\le maks\left\{p_A+p_B,\ k_A+k_B\right\}\end{aligned}$$

olduğundan; $p_A,\ p_B,\ k_A,\ k_B \ge 0$ için geçerli olan

$$maks\left\{p_A+p_B,\ k_A+k_B\right\} \le maks\left\{p_A,\ k_A\right\} + maks\left\{p_B,\ k_B\right\} \tag{2.1.6}$$

eşitsizliği dikkate alınarak;

$$\|A+B\|_{\alpha,\delta,\gamma} \le \|A\|_{\alpha,\delta,\gamma} + \|B\|_{\alpha,\delta,\gamma}$$

olduğu kolayca görülebilir.

Sonuç olarak; $H_{\alpha,\delta,\gamma}\left((a,b)\times(a,b),X\right)$ cümlesi, $\|\cdot\|_{\alpha,\delta,\gamma}$ normu ile bir normlu uzaydır.

(III) Şimdi ise, $H_{\alpha,\delta,\gamma}\left((a,b)\times(a,b),X\right)$ uzayının, $\|\cdot\|_{\alpha,\delta,\gamma}$ normuna göre tam olduğunu görelim:

$(A_n) \subset H_{\alpha,\delta,\gamma}\left((a,b)\times(a,b),X\right)$ Cauchy dizisi olsun. Bu durumda; keyfi $\varepsilon > 0$ sayısı için, $\forall\ m,n > n_0(\varepsilon)$ olduğunda;

$$\|A_n - A_m\|_{\alpha,\delta,\gamma} < \varepsilon \tag{2.1.7}$$

olacak şekilde $\exists\ n_0(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ sayısı vardır. Böylece $\|\cdot\|_{\alpha,\delta,\gamma}$ normunun (2.1.5)'teki tanımı kullanılarak, (2.1.7)'den;

$$\sup_{s,t\in(a,b)} (t-a)^{\alpha}\,\|A_n(s,t)-A_m(s,t)\| < \varepsilon \tag{2.1.8}$$

ve

$$\Delta(A_n-A_m) = (A_n-A_m)(s+\Delta s,\ t+\Delta t) - (A_n-A_m)(s,t)$$

olmak üzere;

$$\sup_{\substack{s,t,s+\Delta s,t+\Delta t\in(a,b)\\ \Delta s\neq 0\vee\Delta t\neq 0}} \frac{(t-a)^{\alpha+\gamma}\,\|\Delta(A_n-A_m)\|}{|\Delta s|^{\delta}+(\Delta t)^{\gamma}} < \varepsilon \tag{2.1.9}$$

elde edilir. (2.1.8) ve (2.1.9)'dan, $\Delta s \neq 0$ veya $\Delta t \neq 0$ iken; $\forall s,\ t,\ s+\Delta s, t+\Delta t \in (a,b)$, $(\Delta t \geq 0)$ için; $m,n > n_0(\varepsilon)$ olduğunda,

$$\|(t-a)^{\alpha}A_n(s,t)-(t-a)^{\alpha}A_m(s,t)\| < \varepsilon \tag{2.1.10}$$

ve

$$\frac{(t-a)^{\alpha+\gamma}\,\|\Delta(A_n-A_m)\|}{|\Delta s|^{\delta}+(\Delta t)^{\gamma}} < \varepsilon \tag{2.1.11}$$

bulunur. (2.1.10)'dan; herbir $s,t \in (a,b)$ için $((t-a)^{\alpha}A_n(s,t))$'nin, X uzayında bir Cauchy dizisi olduğu anlaşılır. X tam olduğundan,

$$\lim_{n\to\infty}(t-a)^{\alpha}A_n(s,t) = x$$

ve buradan

$$\lim_{n\to\infty}A_n(s,t) = \frac{1}{(t-a)^{\alpha}}x$$

olacak şekilde birtek $x \in X$ vardır. Keyfi fakat sabit herbir $s,\ t \in (a,b)$ için bu sonuç geçerli olduğundan,

$$\lim_{n\to\infty}A_n(s,t) = A(s,t) \tag{2.1.12}$$

olacak şekilde bir

$$\begin{array}{rccc} A: & (a,b)\times(a,b) & \longrightarrow & X \\ & (s,t) & \longrightarrow & A(s,t) \end{array}$$

fonksiyonu tanımlıdır. Şimdi

$$\lim_{n\to\infty}\|A_n - A\|_{\alpha,\delta,\gamma} = 0$$

ve $A \in H_{\alpha,\delta,\gamma}((a,b)\times(a,b),X)$ olduğunu görelim. (2.1.12) ve norm fonksiyonunun sürekliliği ile birlikte sırasıyla, (2.1.10) ve (2.1.11) kullanılarak; $\Delta s \neq 0$ veya $\Delta t \neq 0$ olmak üzere; $\forall s,\ t,\ s+\Delta s,\ t+\Delta t \in (a,b)$, $(\Delta t \geq 0)$ için;

$$\begin{aligned} (t-a)^{\alpha}\|A_n(s,t)-A(s,t)\| &= (t-a)^{\alpha}\left\|A_n(s,t)-\lim_{m\to\infty}A_m(s,t)\right\| \\ &= \lim_{m\to\infty}(t-a)^{\alpha}\|A_n(s,t)-A_m(s,t)\| \\ &< \varepsilon \end{aligned} \tag{2.1.13}$$

ve

$$\begin{aligned}
\frac{(t-a)^{\alpha+\gamma}\|\Delta(A_n-A)\|}{|\Delta s|^{\delta}+(\Delta t)^{\gamma}} &= \frac{(t-a)^{\alpha+\gamma}\|\Delta A_n-\lim_{m\to\infty}\Delta A_m\|}{|\Delta s|^{\delta}+(\Delta t)^{\gamma}} \\
&= \lim_{m\to\infty}\frac{(t-a)^{\alpha+\gamma}\|\Delta(A_n-A_m)\|}{|\Delta s|^{\delta}+(\Delta t)^{\gamma}} \\
&< \varepsilon \qquad (2.1.14)
\end{aligned}$$

olur. Böylece, (2.1.13) ve (2.1.14)'ten; $\forall\varepsilon>0$ sayısı için $\forall n>n_0(\varepsilon)$ olduğunda; $\|A_n-A\|_{\alpha,\delta,\gamma}<\varepsilon$ şartını sağlayan bir $n_0(\varepsilon)\in\mathbb{N}$ mevcut bulunduğundan, $\lim_{n\to\infty}\|A_n-A\|_{\alpha,\delta,\gamma}=0$ olur. Ayrıca $(A_n)\subset H_{\alpha,\delta,\gamma}((a,b)\times(a,b),X)$ Cauchy dizisi sınırlı olduğundan, $\forall\, n\in\mathbb{N}$ için $\|A_n\|_{\alpha,\delta,\gamma}\le C$ olacak şekilde bir $C\ge 0$ sabiti vardır. Buradan, $\forall n\in\mathbb{N}$ için;

$$\sup_{s,t\in(a,b)}(t-a)^{\alpha}\|A_n(s,t)\|\le C \qquad (2.1.15)$$

ve

$$\sup_{\substack{s,t,s+\Delta s,t+\Delta t\in(a,b)\\ \Delta s\neq 0\vee\Delta t\neq 0}}\frac{(t-a)^{\alpha+\gamma}\|\Delta A_n\|}{|\Delta s|^{\delta}+(\Delta t)^{\gamma}}\le C \qquad (2.1.16)$$

eşitsizlikleri sağlanır. Böylece; $\forall s,\ t,\ s+\Delta s,\ t+\Delta t\in(a,b)$, $(\Delta t\ge 0)$ ve $\forall n\in\mathbb{N}$ için; (2.1.15) ve (2.1.16)'dan,

$$\|A_n(s,t)\|\le\frac{C}{(t-a)^{\alpha}} \qquad (2.1.17)$$

ve

$$\|A_n(s+\Delta s,\ t+\Delta t)-A_n(s,t)\|\le\frac{C\left(|\Delta s|^{\delta}+(\Delta t)^{\gamma}\right)}{(t-a)^{\alpha+\gamma}} \qquad (2.1.18)$$

bulunur ve şu halde; $\varepsilon>0$ için $n>n_0(\varepsilon)$ olduğunda, (2.1.17) ve (2.1.13)'ten;

$$\begin{aligned}
\|A(s,t)\| &= \|A_n(s,t)+A(s,t)-A_n(s,t)\| \\
&\le \|A_n(s,t)\|+\|A_n(s,t)-A(s,t)\| \\
&\le \frac{C+\varepsilon}{(t-a)^{\alpha}} \qquad (2.1.19)
\end{aligned}$$

ve (2.1.18) ile (2.1.14)'ten de,

$$\begin{aligned}\|\Delta A\| &= \|\Delta A + \Delta A_n - \Delta A_n\| \le \|\Delta A_n\| + \|\Delta (A_n - A)\| \\ &\le \frac{(C+\varepsilon)\left(|\Delta s|^\delta + (\Delta t)^\gamma\right)}{(t-a)^{\alpha+\gamma}}\end{aligned} \tag{2.1.20}$$

elde edilir. Böylece, (2.1.19) ve (2.1.20)'den;

$$\|A(s,t)\| \le \frac{C}{(t-a)^\alpha}$$

ve

$$\|A(s+\Delta s,\, t+\Delta t) - A(s,t)\| \le \frac{C\left(|\Delta s|^\delta + (\Delta t)^\gamma\right)}{(t-a)^{\alpha+\gamma}}$$

olacak şekilde bir $C \ge 0$ sabitinin mevcut olduğu anlaşılır ki buradan $A \in H_{\alpha,\delta,\gamma}\left((a,b)\times(a,b), X\right)$ olduğu sonucuna ulaşılır. □

TEOREM 2.1.2. *$(a,b)\times(a,b)$, $\mathbb{R}^2$'deki alışılmış metrikle dikkate alındığında, $A \in H_{\alpha,\delta,\gamma}\left((a,b)\times(a,b), X\right)$ fonksiyonu süreklidir.*

İSPAT. $(s_0,\, t_0) \in (a,b)\times(a,b)$ ve d, $\mathbb{R}^2$'deki alışılmış metrik olmak üzere; $A : ((a,\, b)\times(a,\, b),\, d) \longrightarrow (X,\, \|\cdot\|)$ fonksiyonunun sürekli olduğunu görelim:

$(s,t) \to (s_0,\, t_0)$ olduğunda;

$$\lim_{(s,t)\to(s_0,t_0)} d\left((s,t),\,(s_0,\,t_0)\right) = \lim_{(s,t)\to(s_0,t_0)} \sqrt{(s-s_0)^2 + (t-t_0)^2} = 0 \tag{2.1.21}$$

olur. Ayrıca (2.1.21) ve

$$0 \le |\, s - s_0 \,| \le \sqrt{(s-s_0)^2 + (t-t_0)^2},$$

$$0 \le |\, t - t_0 \,| \le \sqrt{(s-s_0)^2 + (t-t_0)^2}$$

eşitsizliklerinden, $s \to s_0$ ve $t \to t_0$ olacağı açıktır. Böylece; sırasıyla,

$$\|A(s,t) - A(s_0,\, t_0)\| = \|A\left(s_0 + s - s_0,\, t_0 + t - t_0\right) - A(s_0,\, t_0)\|$$

ve

$$\begin{aligned}\|A(s,t) - A(s_0,\, t_0)\| &= \|A(s_0,\, t_0) - A(s,t)\| \\ &= \|A\left(s + s_0 - s,\, t + t_0 - t\right) - A(s,t)\|\end{aligned}$$

eşitlikleri gözönünde bulundurularak (2.1.2)'den;

$$0 \leq \|A(s,t) - A(s_0,\, t_0)\| \leq \frac{M\left(|s-s_0|^\delta + (t-t_0)^\gamma\right)}{(t_0-a)^{\alpha+\gamma}}, \ (t \geq t_0) \qquad (2.1.22)$$

ve

$$0 \leq \|A(s,t) - A(s_0,\, t_0)\| \leq \frac{M\left(|s_0-s|^\delta + (t_0-t)^\gamma\right)}{(t-a)^{\alpha+\gamma}}, \ (t < t_0) \qquad (2.1.23)$$

şartlarını sağlayacak şekilde bir $M \geq 0$ sabitinin mevcut olduğu görülür. (2.1.22) ve (2.1.23) dikkate alındığında,

$$\lim_{(s,t)\to(s_0,t_0)} \|A(s,t) - A(s_0,\, t_0)\| = 0$$

sonucuna ulaşılır ki buradan da $A \in H_{\alpha,\delta,\gamma}\left((a,b)\times(a,b), X\right)$ fonksiyonunun keyfi $(s_0,\, t_0) \in (a,b)\times(a,b)$ noktasında sürekli ve şu hâlde; $(a,b)\times(a,b)$ üzerinde sürekli olduğu anlaşılır. □

TEOREM 2.1.3. *$\alpha_1 < \alpha_2$ ise $H_{\alpha_1,\delta,\gamma}\left((a,b)\times(a,b), X\right) \subset H_{\alpha_2,\delta,\gamma}\left((a,b)\times(a,b), X\right)$ ve $\delta_1 < \delta_2$ ise $H_{\alpha,\delta_2,\gamma}\left((a,b)\times(a,b), X\right) \subset H_{\alpha,\delta_1,\gamma}\left((a,b)\times(a,b), X\right)$ kapsamaları geçerlidir.*

İSPAT. $\alpha_1 < \alpha_2$ ve $A \in H_{\alpha_1,\delta,\gamma}\left((a,b)\times(a,b), X\right)$ olsun. Bu durumda; $\Delta t \geq 0$ ve $\forall s, t, s+\Delta s, t+\Delta t \in (a,b)$ için;

$$\|A(s,t)\| \leq \frac{M_1}{(t-a)^{\alpha_1}} \qquad (2.1.24)$$

ve

$$\|A(s+\Delta s, t+\Delta t) - A(s,t)\| \leq \frac{M_1\left(|\Delta s|^\delta + (\Delta t)^\gamma\right)}{(t-a)^{\alpha_1+\gamma}} \qquad (2.1.25)$$

eşitsizliklerini sağlayacak şekilde bir $M_1 \geq 0$ sabiti vardır. Diğer taraftan;

$$\frac{M_1}{(t-a)^{\alpha_1}} = \frac{M_1(t-a)^{\alpha_2-\alpha_1}}{(t-a)^{\alpha_1}(t-a)^{\alpha_2-\alpha_1}} \leq \frac{M_1(b-a)^{\alpha_2-\alpha_1}}{(t-a)^{\alpha_2}}$$

ve

$$\begin{aligned}\frac{M_1\left(|\Delta s|^\delta + (\Delta t)^\gamma\right)}{(t-a)^{\alpha_1+\gamma}} &= \frac{M_1(t-a)^{\alpha_2-\alpha_1}\left(|\Delta s|^\delta + (\Delta t)^\gamma\right)}{(t-a)^{\alpha_1+\gamma}(t-a)^{\alpha_2-\alpha_1}} \\ &\leq \frac{M_1(b-a)^{\alpha_2-\alpha_1}\left(|\Delta s|^\delta + (\Delta t)^\gamma\right)}{(t-a)^{\alpha_2+\gamma}}\end{aligned}$$

olduğundan; $\Delta t \geq 0$ ve $\forall s, t, s+\Delta s, t+\Delta t \in (a,b)$ iken; (2.1.24) ve (2.1.25)'ten;

$$\|A(s,t)\| \leq \frac{M_1(b-a)^{\alpha_2-\alpha_1}}{(t-a)^{\alpha_2}}$$

ve

$$\|A(s+\Delta s, t+\Delta t) - A(s,t)\| \leq \frac{M_1(b-a)^{\alpha_2-\alpha_1}\left(|\Delta s|^\delta + (\Delta t)^\gamma\right)}{(t-a)^{\alpha_2+\gamma}}$$

şartlarını sağlayan bir $M_1(b-a)^{\alpha_2-\alpha_1} \geq 0$ sabitinin mevcut olduğu ve böylece $A \in H_{\alpha_2,\delta,\gamma}((a,b)\times(a,b),X)$ olduğu görülür. Şu hâlde; $H_{\alpha_1,\delta,\gamma}((a,b)\times(a,b),X) \subset H_{\alpha_2,\delta,\gamma}((a,b)\times(a,b),X)$ kapsaması geçerlidir.

$\delta_1 < \delta_2$ ve $A \in H_{\alpha,\delta_2,\gamma}((a,b)\times(a,b),X)$ olsun. Bu taktirde; $\Delta t \geq 0$ ve $\forall s, t, s+\Delta s, t+\Delta t \in (a,b)$ için;

$$\|A(s,t)\| \leq \frac{M_2}{(t-a)^\alpha} \tag{2.1.26}$$

ve

$$\|A(s+\Delta s, t+\Delta t) - A(s,t)\| \leq \frac{M_2\left(|\Delta s|^{\delta_2} + (\Delta t)^\gamma\right)}{(t-a)^{\alpha+\gamma}} \tag{2.1.27}$$

olacak şekilde bir $M_2 \geq 0$ sabiti vardır. Böylece;

(1) $b-a \leq 1$ ise $0 \leq |\Delta s| < b-a \leq 1$ olacağından,

$$|\Delta s|^{\delta_2} \leq |\Delta s|^{\delta_1} \tag{2.1.28}$$

olur ve (2.1.27)'den, $\Delta t \geq 0$ ve $\forall s, t, s+\Delta s, t+\Delta t \in (a,b)$ olmak üzere;

$$\|A(s+\Delta s, t+\Delta t) - A(s,t)\| \leq \frac{M_2\left(|\Delta s|^{\delta_1} + (\Delta t)^\gamma\right)}{(t-a)^{\alpha+\gamma}} \tag{2.1.29}$$

elde edilir ve

(2) $b-a > 1$ iken;

(i) $0 \leq |\Delta s| < b-a \leq 1$ ise (2.1.29)'un geçerliliği, (1)'den açıktır.

(ii) $1 \leq \Delta s < b-a$ ise $0 < \dfrac{|\Delta s|}{b-a} < 1$ olup, (2.1.28)'in kullanılmasıyla,

$$\left(\frac{|\Delta s|}{b-a}\right)^{\delta_2} \leq \left(\frac{|\Delta s|}{b-a}\right)^{\delta_1}$$

yani,

$$|\Delta s|^{\delta_2} \leq (b-a)^{\delta_2-\delta_1}|\Delta s|^{\delta_1} \tag{2.1.30}$$

eşitsizliği sağlanır. $(b-a)^{\delta_2-\delta_1} \geq 1$ olduğu da gözönünde bulundurularak; (2.1.30) dikkate alınırsa, (2.1.27)'den;

$$\begin{aligned}\|A(s+\Delta s, t+\Delta t) - A(s,t)\| &\leq \frac{M_2\big((b-a)^{\delta_2-\delta_1}|\Delta s|^{\delta_1} + (\Delta t)^{\gamma}\big)}{(t-a)^{\alpha+\gamma}} \\ &\leq \frac{M_2(b-a)^{\delta_2-\delta_1}\big(|\Delta s|^{\delta_1} + (\Delta t)^{\gamma}\big)}{(t-a)^{\alpha+\gamma}} \qquad (2.1.31)\end{aligned}$$

eşitsizliğine ulaşılır ve $M_3 = maks\{M_2, (b-a)^{\delta_2-\delta_1} M_2\}$ seçilirse, (2.1.26), (2.1.29) ve (2.1.31)'den; $A \in H_{\alpha,\delta_1,\gamma}((a,b)\times(a,b),X)$ olduğu görülür ve buradan da $H_{\alpha,\delta_2,\gamma}((a,b)\times(a,b),X) \subset H_{\alpha,\delta_1,\gamma}((a,b)\times(a,b),X)$ sonucuna ulaşılır. □

Teorem 2.1.4. *$C^{0,\delta,\gamma}((a,b)\times(a,b),X) \subset H_{\alpha,\delta,\gamma}((a,b)\times(a,b),X)$ kapsaması ile $1 \leq p < \infty$, $\alpha < \frac{1}{p}$ ve $M(\alpha p) = \dfrac{(b-a)^{1-\alpha p}}{1-\alpha p}$ olmak üzere; $H_{\alpha,\delta,\gamma}((a,b)\times(a,b),X) \subset L_p((a,b)\times(a,b),X)$ kapsaması geçerlidir ve*

$$\|A\|_{L_p((a,b)\times(a,b),X)} \leq [(b-a)M(\alpha p)]^{\frac{1}{p}} \|A\|_{\alpha,\delta,\gamma}$$

eşitsizliği sağlanır.

İspat. $A \in C^{0,\delta,\gamma}((a,b)\times(a,b),X)$ ise $\forall s,t,s+\Delta s,t+\Delta t \in (a,b)$ için;

$$\|A(s,t)\| \leq M \qquad (2.1.32)$$

ve

$$\|A(s+\Delta s,t+\Delta t) - A(s,t)\| \leq M\left(|\Delta s|^{\delta} + |\Delta t|^{\gamma}\right) \qquad (2.1.33)$$

olacak şekilde bir $M \geq 0$ sabiti vardır.

Şu hâlde; $\Delta t \geq 0$ ve $\forall s,t,s+\Delta s,t+\Delta t \in (a,b)$ için; (2.1.32)'den,

$$\|A(s,t)\| \leq \frac{M(t-a)^{\alpha}}{(t-a)^{\alpha}} \leq \frac{M(b-a)^{\alpha}}{(t-a)^{\alpha}} \qquad (2.1.34)$$

ve (2.1.33)'ten,

$$\begin{aligned}\|A(s+\Delta s,t+\Delta t) - A(s,t)\| &\leq \frac{M(t-a)^{\alpha+\gamma}(|\Delta s|^{\delta} + (\Delta t)^{\gamma})}{(t-a)^{\alpha+\gamma}} \\ &\leq \frac{M(b-a)^{\alpha+\gamma}(|\Delta s|^{\delta} + (\Delta t)^{\gamma})}{(t-a)^{\alpha+\gamma}} \qquad (2.1.35)\end{aligned}$$

elde edilir.

$$M_1 = maks\left\{M(b-a)^{\alpha}, M(b-a)^{\alpha+\gamma}\right\}$$

alınırsa, (2.1.34) ve (2.1.35)'ten, $A \in H_{\alpha,\delta,\gamma}((a,b)\times(a,b),X)$ olduğu görülür.

Diğer taraftan; $A \in H_{\alpha,\delta,\gamma}((a,b)\times(a,b),X)$ ise Teorem 2.1.2'den; A, sürekli olduğundan, kuvvetli ölçülebilirdir ve

$$\|A(s,t)\|^p \le \frac{\|A\|^p_{\alpha,\delta,\gamma}}{(t-a)^{\alpha p}}$$

olup,

$$\int_a^b \|A(s,t)\|^p\, ds \le \frac{(b-a)\, \|A\|^p_{\alpha,\delta,\gamma}}{(t-a)^{\alpha p}}$$

ve böylece,

$$\begin{aligned} \int_a^b \int_a^b \|A(s,t)\|^p\, ds\, dt &\le (b-a)\, \|A\|^p_{\alpha,\delta,\gamma} \int_a^b \frac{dt}{(t-a)^{\alpha p}} \\ &= (b-a)\, \|A\|^p_{\alpha,\delta,\gamma}\, M(\alpha p) \end{aligned} \tag{2.1.36}$$

bulunur. (2.1.36)'dan; $A \in L_p((a,\, b)\times(a,\, b), X)$ ve

$$\|A\|_{L_p((a,b)\times(a,b),X)} \le [(b-a)M(\alpha p)]^{\frac{1}{p}}\, \|A\|_{\alpha,\delta,\gamma}$$

sonucuna ulaşılır. □

Tek değişkenli fonksiyonların $H_{\alpha,\delta}(X)$ uzayını da benzer şekilde tanımlayabiliriz.

2.2. $H_{\alpha,\delta}(X)$ Uzayı

X, reel veya kompleks bir Banach uzayı, $-\infty < a,\, b < \infty$, $0 < \alpha, \delta, \alpha+\delta < 1$, $M \ge 0$ bir sabit ve $\Delta s \ge 0$ olmak üzere; (a,b) üzerinde tanımlı, X değerli ve her $s, s+\Delta s \in (a,b)$ için;

$$\|A(s)\| \le \frac{M}{(s-a)^{\alpha}} \tag{2.2.1}$$

ve

$$\|A(s+\Delta s) - A(s)\| \le \frac{M(\Delta s)^{\delta}}{(s-a)^{\alpha+\delta}} \tag{2.2.2}$$

şartlarını sağlayan bütün $A(\cdot)$ fonksiyonlarının cümlesi, $H_{\alpha,\delta}(X)$ veya $H_{\alpha,\delta}\left((a,b),X\right)$ olsun. Bu durumda; Teorem 2.1.1-Teorem 2.1.4'ün $H_{\alpha,\delta}(X)$ bakımından karşılığını, ispatsız olarak verebiliriz.

Teorem 2.2.1. *$H_{\alpha,\delta}\left((a,b),X\right)$ cümlesi,*

$$(A+B)(s) = A(s) + B(s)$$

ve

$$(\lambda A)(s) = \lambda A(s),\ \lambda \in K (K = \mathbb{R} \text{ veya } K = \mathbb{C})$$

olarak tanımlanan işlemlerle bir lineer uzay ve

$$\Delta A = A(s+\Delta s) - A(s)$$

olmak üzere;

$$\|A\|_{\alpha,\delta} = maks\left\{ \sup_{s\in(a,b)} (s-a)^{\alpha}\|A(s)\|,\ \sup_{\substack{s,\,s+\Delta s\in(a,b)\\ \Delta s\neq 0}} \frac{(s-a)^{\alpha+\delta}\|\Delta A\|}{(\Delta s)^{\delta}} \right\} \qquad (2.2.3)$$

normu ile bir Banach uzayıdır.

Teorem 2.2.2. *(a,b), $\mathbb{R}$'deki alışılmış metrikle dikkate alındığında, $A \in H_{\alpha,\delta}\left((a,b),X\right)$ fonksiyonu süreklidir.*

Teorem 2.2.3. *$\alpha_1 < \alpha_2$ ise $H_{\alpha_1,\delta}\left((a,b),X\right) \subset H_{\alpha_2,\delta}\left((a,b),X\right)$ kapsaması geçerlidir.*

Teorem 2.2.4. *$C^{0,\delta}\left((a,b),X\right) \subset H_{\alpha,\delta}\left((a,b),X\right)$ kapsaması ile $1 \le p < \infty$, $\alpha < \frac{1}{p}$ için $H_{\alpha,\delta}\left((a,b),X\right) \subset L_p\left((a,b),X\right)$ kapsaması geçerlidir ve*

$$\|A\|_{L_p((a,b),X)} \le [M(\alpha p)]^{\frac{1}{p}}\|A\|_{\alpha,\delta}$$

eşitsizliği sağlanır.

2.3. $H_{\alpha,\delta,\gamma}(X)$ ve $H_{\alpha,\delta}(X)$ üzerindeki sınırlı lineer operatörler

TEOREM 2.3.1. *$A \in H_{\alpha_1,\delta_1,\gamma_1}((a,b)\times(a,b),X)$, $0 < c, d, c+d < 1$ için;*

$$M(c) = \frac{(b-a)^{1-c}}{1-c} \tag{2.3.1}$$

ve

$$M(c,d) = maks\,\{M(c), M(c+d)\} \tag{2.3.2}$$

olmak üzere;

$$((T_1A)f)(s) = \int_a^b A(s,t)f(t)dt \tag{2.3.3}$$

şeklinde tanımlanan T_1,

(1) $f \in H_{\alpha_2,\delta_2}((a,b),X)$ ve $\alpha_1 + \alpha_2 + \gamma_1 < 1$ olması hâlinde;

$$\|T_1\| \leq M(\alpha_1 + \alpha_2, \gamma_1)$$

olan bir $T_1 \in B\left(H_{\alpha_1,\delta_1,\gamma_1}((a,b)\times(a,b),X), B\left(H_{\alpha_2,\delta_2}((a,b),X), C^{0,\delta_1}((a,b),X)\right)\right)$ operatörüdür,

(2) $f \in C^{0,\alpha_2}((a,b),X)$ olması hâlinde; $\|T_1\| \leq M(\alpha_1,\gamma_1)$ olan bir $T_1 \in B\left(H_{\alpha_1,\delta_1,\gamma_1}((a,b)\times(a,b),X), B\left(C^{0,\alpha_2}((a,b),X), C^{0,\delta_1}((a,b),X)\right)\right)$ operatörüdür ve

$$((T_2A)f)(s) = \int_a^b A(t,s)f(t)dt \tag{2.3.4}$$

olarak tanımlanan T_2 ise,

(3) $f \in H_{\alpha_2,\delta_2}((a,b),X)$ olması durumunda;

$$\|T_2\| \leq M(\alpha_2)$$

olan bir $T_2 \in B\left(H_{\alpha_1,\delta_1,\gamma_1}((a,b)\times(a,b),X), B\left(H_{\alpha_2,\delta_2}((a,b),X), H_{\alpha_1,\gamma_1}((a,b),X)\right)\right)$ operatörüdür ve

(4) $f \in C^{0,\alpha_2}((a,b),X)$ ise;

$T_2 \in B\left(H_{\alpha_1,\delta_1,\gamma_1}((a,b)\times(a,b),X), B\left(C^{0,\alpha_2}((a,b),X), H_{\alpha_1,\gamma_1}((a,b),X)\right)\right)$ olan ve

normu,

$$\|T_2\| \leq b - a$$

eşitsizliğini sağlayan bir operatördür.

İSPAT. $A \in H_{\alpha_1,\delta_1,\gamma_1}((a,b)\times(a,b),X)$ iken:

(1) $f \in H_{\alpha_2,\delta_2}((a,b),X)$ olsun. Bu taktirde; $\Delta s \geq 0$ ve her $s, t, s+\Delta s \in (a,b)$ için;

$$\begin{aligned} \|A(s,t)f(t)\| &\leq \|A(s,t)\|\,\|f(t)\| \\ &\leq \frac{\|A\|_{\alpha_1,\delta_1,\gamma_1}\|f\|_{\alpha_2,\delta_2}}{(t-a)^{\alpha_1+\alpha_2}} \end{aligned} \tag{2.3.5}$$

ve

$$\begin{aligned} \|(A(s+\Delta s,t)-A(s,t))\,f(t)\| &\leq \|A(s+\Delta s,t)-A(s,t)\|\,\|f(t)\| \\ &\leq \frac{\|A\|_{\alpha_1,\delta_1,\gamma_1}\|f\|_{\alpha_2,\delta_2}(\Delta s)^{\delta_1}}{(t-a)^{\alpha_1+\alpha_2+\gamma_1}} \end{aligned} \tag{2.3.6}$$

olup, (2.3.5) ve (2.3.6)'dan;

$$\begin{aligned} \|((T_1A)f)(s)\| &\leq \int_a^b \|A(s,t)f(t)\|\,dt \\ &\leq \|A\|_{\alpha_1,\delta_1,\gamma_1}\|f\|_{\alpha_2,\delta_2}\int_a^b \frac{dt}{(t-a)^{\alpha_1+\alpha_2}} \\ &= \frac{(b-a)^{1-\alpha_1-\alpha_2}}{1-\alpha_1-\alpha_2}\|A\|_{\alpha_1,\delta_1,\gamma_1}\|f\|_{\alpha_2,\delta_2} \end{aligned} \tag{2.3.7}$$

ve

$$\Delta(T_1A)f = ((T_1A)f)(s+\Delta s) - ((T_1A)f)(s)$$

olmak üzere;

$$\begin{aligned} \|\Delta(T_1A)f\| &\leq \int_a^b \|(A(s+\Delta s,t)-A(s,t))\,f(t)\|\,dt \\ &\leq \|A\|_{\alpha_1,\delta_1,\gamma_1}\|f\|_{\alpha_2,\delta_2}(\Delta s)^{\delta_1}\int_a^b \frac{dt}{(t-a)^{\alpha_1+\alpha_2+\gamma_1}} \\ &= \frac{(b-a)^{1-\alpha_1-\alpha_2-\gamma_1}}{1-\alpha_1-\alpha_2-\gamma_1}\|A\|_{\alpha_1,\delta_1,\gamma_1}\|f\|_{\alpha_2,\delta_2}(\Delta s)^{\delta_1} \end{aligned} \tag{2.3.8}$$

olur.

$$M(\alpha_1+\alpha_2,\gamma_1)=maks\left\{\frac{(b-a)^{1-\alpha_1-\alpha_2}}{1-\alpha_1-\alpha_2},\frac{(b-a)^{1-\alpha_1-\alpha_2-\gamma_1}}{1-\alpha_1-\alpha_2-\gamma_1}\right\}$$

alınırsa, (2.3.7) ve (2.3.8)'den; $(T_1A)f\in C^{0,\delta_1}((a,b),X)$ ve

$$\|(T_1A)f\|_{\delta_1}\le M(\alpha_1+\alpha_2,\gamma_1)\,\|A\|_{\alpha_1,\delta_1,\gamma_1}\,\|f\|_{\alpha_2,\delta_2} \tag{2.3.9}$$

elde edilir. Böylece (2.3.9)'dan; T_1A, sınırlı ve normu,

$$\|T_1A\|=\sup_{\|f\|_{\alpha_2,\delta_2}=1}\|(T_1A)f\|_{\delta_1}\le M(\alpha_1+\alpha_2,\,\gamma_1)\,\|A\|_{\alpha_1,\delta_1,\gamma_1} \tag{2.3.10}$$

olan bir operatördür.

T_1A'nın lineerliği açıktır. Böylece, $T_1A\in B\left(H_{\alpha_2,\delta_2}((a,b),X),C^{0,\delta_1}((a,b),X)\right)$ olur. Ayrıca, (2.3.10)'dan;

$$\|T_1\|=\sup_{\|A\|_{\alpha_1,\delta_1,\gamma_1}=1}\|T_1A\|\le M(\alpha_1+\alpha_2,\gamma_1)$$

ve T_1'in lineerliği de kolayca görülebileceğinden,
$T_1\in B\left(H_{\alpha_1,\delta_1,\gamma_1}((a,b)\times(a,b),X),B\left(H_{\alpha_2,\delta_2}((a,b),X),C^{0,\delta_1}((a,b),X)\right)\right)$ olur.

(2) $f\in C^{0,\alpha_2}((a,b),X)$ olsun. O zaman, $\Delta s\ge 0$ olmak üzere; her $s,t,s+\Delta s\in(a,b)$ için;

$$\|A(s,t)f(t)\|\ \le\ \frac{\|A\|_{\alpha_1,\delta_1,\gamma_1}\|f\|_{\alpha_2}}{(t-a)^{\alpha_1}} \tag{2.3.11}$$

ve

$$\|(A(s+\Delta s,t)-A(s,t))\,f(t)\|\ \le\ \frac{\|A\|_{\alpha_1,\delta_1,\gamma_1}\|f\|_{\alpha_2}(\Delta s)^{\delta_1}}{(t-a)^{\alpha_1+\gamma_1}} \tag{2.3.12}$$

bulunur. (2.3.11) ve (2.3.12)'nin kullanılmasıyla da,

$$\begin{aligned}\|((T_1A)f)(s)\| &\le \|A\|_{\alpha_1,\delta_1,\gamma_1}\|f\|_{\alpha_2}\int_a^b\frac{dt}{(t-a)^{\alpha_1}}\\ &= \frac{(b-a)^{1-\alpha_1}}{1-\alpha_1}\|A\|_{\alpha_1,\delta_1,\gamma_1}\|f\|_{\alpha_2}\end{aligned} \tag{2.3.13}$$

ve

$$\begin{aligned}\|\Delta(T_1A)f\| &\le \|A\|_{\alpha_1,\delta_1,\gamma_1}\|f\|_{\alpha_2}(\Delta s)^{\delta_1}\int_a^b\frac{dt}{(t-a)^{\alpha_1+\gamma_1}}\\ &= \frac{(b-a)^{1-\alpha_1-\gamma_1}}{1-\alpha_1-\gamma_1}\|A\|_{\alpha_1,\delta_1,\gamma_1}\|f\|_{\alpha_2}(\Delta s)^{\delta_1}\end{aligned} \tag{2.3.14}$$

sonucuna ulaşılır.

$$M(\alpha_1,\gamma_1)=maks\left\{\frac{(b-a)^{1-\alpha_1}}{1-\alpha_1},\frac{(b-a)^{1-\alpha_1-\gamma_1}}{1-\alpha_1-\gamma_1}\right\}$$

alınırsa, (2.3.13) ve (2.3.14)'ten; $(T_1A)f\in C^{0,\delta_1}((a,b),X)$ ve

$$\|(T_1A)f\|_{\delta_1}\leq M(\alpha_1,\gamma_1)\,\|A\|_{\alpha_1,\delta_1,\gamma_1}\,\|f\|_{\alpha_2} \tag{2.3.15}$$

olur. Şu hâlde; (2.3.15)'ten; T_1A, sınırlıdır ve normu,

$$\|T_1A\|=\sup_{\|f\|_{\alpha_2}=1}\|(T_1A)f\|_{\delta_1}\leq M(\alpha_1,\,\gamma_1)\,\|A\|_{\alpha_1,\delta_1,\gamma_1} \tag{2.3.16}$$

eşitsizliğini sağlar. (2.3.16)'dan ise T_1'in sınırlı olduğu ve normunun da

$$\|T_1\|=\sup_{\|A\|_{\alpha_1,\delta_1,\gamma_1}=1}\|T_1A\|\leq M(\alpha_1,\gamma_1)$$

şartını sağladığı anlaşılır. Böylece; T_1,
$B\left(H_{\alpha_1,\delta_1,\gamma_1}((a,b)\times(a,b),X),B\left(C^{0,\alpha_2}((a,b),X),C^{0,\delta_1}((a,b),X)\right)\right)$ uzayındadır.

(3) $f\in H_{\alpha_2,\delta_2}((a,b),X)$ olsun. Bu durumda; $\Delta s\geq 0$ ve her $s,t,s+\Delta s\in(a,b)$ için;

$$\begin{aligned}\|A(t,s)f(t)\| &\leq \|A(t,s)\|\,\|f(t)\|\\ &\leq \frac{\|A\|_{\alpha_1,\delta_1,\gamma_1}\,\|f\|_{\alpha_2,\delta_2}}{(s-a)^{\alpha_1}(t-a)^{\alpha_2}}\end{aligned} \tag{2.3.17}$$

ve

$$\begin{aligned}\|(A(t,s+\Delta s)-A(t,s))\,f(t)\| &\leq \|A(t,s+\Delta s)-A(t,s)\|\,\|f(t)\|\\ &\leq \frac{\|A\|_{\alpha_1,\delta_1,\gamma_1}\,\|f\|_{\alpha_2,\delta_2}(\Delta s)^{\gamma_1}}{(t-a)^{\alpha_2}(s-a)^{\alpha_1+\gamma_1}}\end{aligned} \tag{2.3.18}$$

olup, (2.3.17)'den;

$$\begin{aligned}\|((T_2A)f)\,(s)\| &\leq \int_a^b\|A(t,s)f(t)\|\,dt\\ &\leq \frac{\|A\|_{\alpha_1,\delta_1,\gamma_1}\,\|f\|_{\alpha_2,\delta_2}}{(s-a)^{\alpha_1}}\int_a^b\frac{dt}{(t-a)^{\alpha_2}}\\ &= \frac{M(\alpha_2)\,\|A\|_{\alpha_1,\delta_1,\gamma_1}\,\|f\|_{\alpha_2,\delta_2}}{(s-a)^{\alpha_1}}\end{aligned} \tag{2.3.19}$$

ve

$$\Delta(T_2A)f = ((T_2A)f)(s+\Delta s) - ((T_2A)f)(s)$$

alarak, (2.3.18)'den;

$$\begin{aligned}
\|\Delta(T_2A)f\| &\leq \int_a^b \|(A(t,s+\Delta s) - A(t,s))\, f(t)\|\, dt \\
&< \frac{\|A\|_{\alpha_1,\delta_1,\gamma_1}\, \|f\|_{\alpha_2,\delta_2}(\Delta s)^{\gamma_1}}{(s-a)^{\alpha_1+\gamma_1}} \int_a^b \frac{dt}{(t-a)^{\alpha_2}} \\
&= \frac{M(\alpha_2)\, \|A\|_{\alpha_1,\delta_1,\gamma_1}\, \|f\|_{\alpha_2,\delta_2}(\Delta s)^{\gamma_1}}{(s-a)^{\alpha_1+\gamma_1}} \qquad (2.3.20)
\end{aligned}$$

bulunur. (2.3.19) ve (2.3.20)'nin kullanılmasıyla, $(T_2A)f \in H_{\alpha_1,\gamma_1}((a,b),X)$ ve

$$\|(T_2A)f\|_{\alpha_1,\gamma_1} \leq M(\alpha_2)\, \|A\|_{\alpha_1,\delta_1,\gamma_1}\, \|f\|_{\alpha_2,\delta_2} \qquad (2.3.21)$$

sonucuna ulaşılır. Böylece T_2A, sınırlı olup, (2.3.21)'den;

$$\|T_2A\| = \sup_{\|f\|_{\alpha_2,\delta_2}=1} \|(T_2A)f\|_{\alpha_1,\gamma_1} \leq M(\alpha_2)\, \|A\|_{\alpha_1,\delta_1,\gamma_1} \qquad (2.3.22)$$

olur. Ayrıca, T_2A lineerdir ve şu hâlde; $T_2A \in B\left(H_{\alpha_2,\delta_2}((a,b),X), H_{\alpha_1,\gamma_1}((a,b),X)\right)$ elde edilir. (2.3.22)'den; $\|T_2\| \leq M(\alpha_2)$ olup, T_2 lineer olduğundan; $T_2 \in B\left(H_{\alpha_1,\delta_1,\gamma_1}((a,b)\times(a,b),X), B\left(H_{\alpha_2,\delta_2}((a,b),X), H_{\alpha_1,\gamma_1}((a,b),X)\right)\right)$ sonucu elde edilir.

(4) $f \in C^{0,\alpha_2}((a,b),X)$ ise, $\Delta s \geq 0$ olmak üzere; her $s,t,s+\Delta s \in (a,b)$ için;

$$\|A(t,s)f(t)\| \leq \frac{\|A\|_{\alpha_1,\delta_1,\gamma_1}\, \|f\|_{\alpha_2}}{(s-a)^{\alpha_1}} \qquad (2.3.23)$$

ve

$$\|(A(t,s+\Delta s) - A(t,s))\, f(t)\| \leq \frac{\|A\|_{\alpha_1,\delta_1,\gamma_1}\, \|f\|_{\alpha_2}(\Delta s)^{\delta_1}}{(s-a)^{\alpha_1+\gamma_1}} \qquad (2.3.24)$$

olacağından; (2.3.23) ve (2.3.24)'ten, sırasıyla,

$$\begin{aligned}
\|((T_2A)f)(s)\| &\leq \frac{\|A\|_{\alpha_1,\delta_1,\gamma_1}\, \|f\|_{\alpha_2}}{(s-a)^{\alpha_1}} \int_a^b dt \\
&= \frac{(b-a)\, \|A\|_{\alpha_1,\delta_1,\gamma_1}\, \|f\|_{\alpha_2}}{(s-a)^{\alpha_1}} \qquad (2.3.25)
\end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned}\|\Delta(T_2A)f\| &\leq \frac{\|A\|_{\alpha_1,\delta_1,\gamma_1}\|f\|_{\alpha_2}(\Delta s)^{\gamma_1}}{(s-a)^{\alpha_1+\gamma_1}}\int_a^b dt \\ &= \frac{(b-a)\|A\|_{\alpha_1,\delta_1,\gamma_1}\|f\|_{\alpha_2}(\Delta s)^{\gamma_1}}{(s-a)^{\alpha_1+\gamma_1}} \qquad (2.3.26)\end{aligned}$$

elde edilir ki (2.3.25) ve (2.3.26)'dan da; $(T_2A)f \in H_{\alpha_1,\gamma_1}((a,b),X)$ ve

$$\|(T_2A)f\|_{\alpha_1,\gamma_1} \leq (b-a)\|A\|_{\alpha_1,\delta_1,\gamma_1}\|f\|_{\alpha_2} \qquad (2.3.27)$$

sonucu bulunur. Yani; T_2A, sınırlıdır ve normu, (2.3.27)'den;

$$\|T_2A\| = \sup_{\|f\|_{\alpha_2}=1}\|(T_2A)f\|_{\alpha_1,\gamma_1} \leq (b-a)\|A\|_{\alpha_1,\delta_1,\gamma_1} \qquad (2.3.28)$$

eşitsizliğini sağlar. (2.3.28)'den ise T_2'nin sınırlı ve normunun da,

$$\|T_2\| = \sup_{\|A\|_{\alpha_1,\delta_1,\gamma_1}=1}\|T_2A\| \leq b-a$$

şartını sağladığı görülür ve böylece,
$T_2 \in B\left(H_{\alpha_1,\delta_1,\gamma_1}((a,b)\times(a,b),X), B\left(C^{0,\alpha_2}((a,b),X), H_{\alpha_1,\gamma_1}((a,b),X)\right)\right)$ olur. □

Çalışmanın bundan sonraki kısmında kullanacağımız $M(c)$ ve $M(c,d)$ ile, (2.3.1) ve (2.3.2) eşitlikleriyle tanımlanan sabitler kastedilecektir.

Lemma 2.3.1. *X reel veya kompleks bir Banach cebiri, $n \in \mathbb{N}$ ve $n > 1$ için $\alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_n+\gamma < 1$ olmak üzere; B_n fonksiyonunu,*

$$B_n(s,t) = A_1(s,t)A_2(s,t)\cdots A_n(s,t);\ s,t \in (a,b) \qquad (2.3.29)$$

şeklinde tanımlayalım. Bu durumda;

$A_i \in H_{\alpha_i,\delta_i,\gamma}((a,b)\times(a,b),X)$, $(i=1,2,\cdots,n)$, $\delta = \min\{\delta_1,\delta_2,\cdots,\delta_n\}$,

$D_1 = 1$, $D_n = maks\left\{(b-a)^{\min\{\delta_1,\delta_2,\cdots,\delta_{n-1}\}-\delta}, (b-a)^{\delta_n-\delta}\right\}$, $(n \geq 2)$

ve

$$C_n = D_1D_2\cdots D_n \qquad (2.3.30)$$

ise $B_n \in H_{\alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_n,\delta,\gamma}((a,b)\times(a,b),X)$ *olup,*

$$\|B_n\|_{\alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_n,\delta,\gamma} \leq 2^{n-1}C_n \|A_1\|_{\alpha_1,\delta_1,\gamma} \|A_2\|_{\alpha_2,\delta_2,\gamma} \cdots \|A_n\|_{\alpha_n,\delta_n,\gamma}$$

sağlanır.

İSPAT. İspatı, Tümevarım metoduyla yapalım.

$n=1$ için $A_1 \in H_{\alpha_1,\delta_1,\gamma}((a,b)\times(a,b),X)$ ve $\delta = \min\{\delta_1\} = \delta_1$ olup, $B_1(s,t) = A_1(s,t)$ olacağından; $B_1 \in H_{\alpha_1,\delta_1,\gamma}((a,b)\times(a,b),X)$ ve $\|B_1\|_{\alpha_1,\delta_1,\gamma} = C_1 \|A_1\|_{\alpha_1,\delta_1,\gamma}$ olur. Yani, $n=1$ için Lemma doğrudur.

$n=k$ olmak üzere; $i=1,2,\cdots,k$ için $A_i \in H_{\alpha_i,\delta_i,\gamma}((a,b)\times(a,b),X)$ ve $\delta = \min\{\delta_1,\delta_2,\cdots,\delta_k\}$ iken; $B_k \in H_{\alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_k,\delta,\gamma}((a,b)\times(a,b),X)$ ve

$$\|B_k\|_{\alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_k,\delta,\gamma} \leq 2^{k-1}C_k \|A_1\|_{\alpha_1,\delta_1,\gamma} \|A_2\|_{\alpha_2,\delta_2,\gamma} \cdots \|A_k\|_{\alpha_k,\delta_k,\gamma}$$

olsun. Bu durumda; $n=k+1$, $i=1,2,\cdots,k+1$, $A_i \in H_{\alpha_i,\delta_i,\gamma}((a,b)\times(a,b),X)$ ve $\delta = \min\{\delta_1,\delta_2,\cdots,\delta_{k+1}\}$ iken; $B_{k+1} \in H_{\alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_{k+1},\delta,\gamma}((a,b)\times(a,b),X)$ ve

$$\|B_{k+1}\|_{\alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_{k+1},\delta,\gamma} \leq 2^{k}C_{k+1} \|A_1\|_{\alpha_1,\delta_1,\gamma} \|A_2\|_{\alpha_2,\delta_2,\gamma} \cdots \|A_{k+1}\|_{\alpha_{k+1},\delta_{k+1},\gamma}$$

olacağını görelim:

$$\begin{aligned} B_{k+1}(s,t) &= A_1(s,t)A_2(s,t)\cdots A_k(s,t)A_{k+1}(s,t) \\ &= B_k(s,t)A_{k+1}(s,t) \end{aligned}$$

olup, her $s,t,s+\Delta s,t+\Delta t \in (a,b)$, $(\Delta t \geq 0)$ için;

(1) $b-a \leq 1$ iken; $0 \leq |\Delta s| < b-a \leq 1$ olduğundan,

$$|\Delta s|^{\delta_{k+1}},\ |\Delta s|^{\min\{\delta_1,\delta_2,\cdots,\delta_k\}} \leq |\Delta s|^{\delta} \tag{2.3.31}$$

olur. Ayrıca, $\forall k \in \mathbb{N}$ için $D_k = 1$ ve şu hâlde; $C_k = 1$ olacağından;

$$\begin{aligned}
\|B_{k+1}(s,t)\| &= \|B_k(s,t)A_{k+1}(s,t)\| \\
&\leq \|B_k(s,t)\|\,\|A_{k+1}(s,t)\| \\
&\leq \frac{\|B_k\|_{\alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_k,\delta,\gamma}\,\|A_{k+1}\|_{\alpha_{k+1},\delta_{k+1},\gamma}}{(t-a)^{\alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_k}(t-a)^{\alpha_{k+1}}} \\
&\leq \frac{2^{k-1}C_k\,\|A_1\|_{\alpha_1,\delta_1,\gamma}\cdots\|A_{k+1}\|_{\alpha_{k+1},\delta_{k+1},\gamma}}{(t-a)^{\alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_{k+1}}} \\
&\leq \frac{2^{k}C_{k+1}\,\|A_1\|_{\alpha_1,\delta_1,\gamma}\cdots\|A_{k+1}\|_{\alpha_{k+1},\delta_{k+1},\gamma}}{(t-a)^{\alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_{k+1}}} \qquad (2.3.32)
\end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned}
\|\Delta B_{k+1}\| &= \|B_k(s+\Delta s,t+\Delta t)A_{k+1}(s+\Delta s,t+\Delta t) - B_k(s,t)A_{k+1}(s,t)\| \\
&= \|(\Delta B_k)A_{k+1}(s+\Delta s,t+\Delta t) + B_k(s,t)\Delta A_{k+1}\| \\
&\leq \|\Delta B_k\|\,\|A_{k+1}(s+\Delta s,t+\Delta t)\| + \|B_k(s,t)\|\,\|\Delta A_{k+1}\| \\
&\leq \frac{\|B_k\|_{\alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_k,\delta,\gamma}\,\|A_{k+1}\|_{\alpha_{k+1},\delta_{k+1},\gamma}\,(|\Delta s|^{\delta}+(\Delta t)^{\gamma})}{(t-a)^{\alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_k+\gamma}(t+\Delta t-a)^{\alpha_{k+1}}} + \\
&\quad + \frac{\|B_k\|_{\alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_k,\delta,\gamma}\,\|A_{k+1}\|_{\alpha_{k+1},\delta_{k+1},\gamma}\,(|\Delta s|^{\delta_{k+1}}+(\Delta t)^{\gamma})}{(t-a)^{\alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_k}(t-a)^{\alpha_{k+1}+\gamma}} \\
&\leq \frac{2^{k-1}C_k\,\|A_1\|_{\alpha_1,\delta_1,\gamma}\cdots\|A_{k+1}\|_{\alpha_{k+1},\delta_{k+1},\gamma}\,(|\Delta s|^{\delta}+(\Delta t)^{\gamma})}{(t-a)^{\alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_{k+1}+\gamma}} + \\
&\quad + \frac{2^{k-1}C_k\,\|A_1\|_{\alpha_1,\delta_1,\gamma}\cdots\|A_{k+1}\|_{\alpha_{k+1},\delta_{k+1},\gamma}\,(|\Delta s|^{\delta_{k+1}}+(\Delta t)^{\gamma})}{(t-a)^{\alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_{k+1}+\gamma}} \qquad (2.3.33)
\end{aligned}$$

bulunur. (2.3.31)'in dikkate alınmasıyla, (2.3.33)'ten;

$$\|\Delta B_{k+1}\| \leq \frac{2^{k}C_{k+1}\,\|A_1\|_{\alpha_1,\delta_1,\gamma}\cdots\|A_{k+1}\|_{\alpha_{k+1},\delta_{k+1},\gamma}\,(|\Delta s|^{\delta}+(\Delta t)^{\gamma})}{(t-a)^{\alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_{k+1}+\gamma}} \qquad (2.3.34)$$

bulunur ve

(2) $b-a>1$ iken; $\forall k \in \mathbb{N}$ için $1 < D_{k+1}$ böylece, $1 \leq C_k < C_{k+1}$ olduğundan; (2.3.32) sağlanır ve

(i) $0 \leq |\Delta s| < 1$ ise (2.3.34), (2.3.31)'in de kullanılmasıyla, (2.3.33)'ten kolayca elde edilebilir.

(ii) $1 \leq |\Delta s| < b-a$ ise $0 < \dfrac{|\Delta s|}{b-a} < 1$ olup, (2.3.31)'den;

$$|\Delta s|^{\delta_{k+1}} \leq (b-a)^{\delta_{k+1}-\delta}|\Delta s|^{\delta}$$

ve

$$|\Delta s|^{\min\{\delta_1,\delta_2,\cdots,\delta_k\}} \leq (b-a)^{\min\{\delta_1,\delta_2,\cdots,\delta_k\}-\delta}|\Delta s|^{\delta}$$

bulunur.

$$D_{k+1} = maks\left\{(b-a)^{\min\{\delta_1,\delta_2,\cdots,\delta_k\}-\delta}, (b-a)^{\delta_{k+1}-\delta}\right\}$$

alınırsa, $1 < D_{k+1}$ olduğu da gözönünde bulundurularak (2.3.33)'ten, (2.3.34) eşitsizliğine ulaşılır. Sonuç olarak; (1) ve (2) hâllerinin her ikisinde de (2.3.32) ve (2.3.34) geçerli olduğundan, $B_{k+1} \in H_{\alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_{k+1},\delta,\gamma}\left((a,b)\times(a,b),X\right)$ ve

$$\|B_{k+1}\|_{\alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_{k+1},\delta,\gamma} \leq 2^k C_{k+1}\|A_1\|_{\alpha_1,\delta_1,\gamma}\|A_2\|_{\alpha_2,\delta_2,\gamma}\cdots\|A_{k+1}\|_{\alpha_{k+1},\delta_{k+1},\gamma}$$

olur. Yani, iddia her $n \in \mathbb{N}$ için doğrudur. □

Bundan sonra C_n ile, (2.3.30)'daki sabit anlaşılacaktır.

Lemma 2.3.1'in tek değişkenli fonksiyonların $H_{\alpha,\delta}\left((a,b),X\right)$ uzayı bakımından karşılığı, ispatsız olarak verilebilir.

Lemma 2.3.2. *X, reel veya kompleks bir Banach cebiri, $n \in \mathbb{N}$, $n > 1$ için $\alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_n+\delta < 1$ ve $A_i \in H_{\alpha_i,\delta}\left((a,b),X\right)$, $(i=1,2,\cdots,n)$ olmak üzere;*

$$B_n(s) = A_1(s)A_2(s)\cdots A_n(s);\ s \in (a,b) \tag{2.3.35}$$

eşitliğiyle tanımlanan B_n fonksiyonu, $H_{\alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_n,\delta}\left((a,b),X\right)$ uzayının bir elemanıdır ve

$$\|B_n\|_{\alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_n,\delta} \leq 2^{n-1}\|A_1\|_{\alpha_1,\delta}\|A_2\|_{\alpha_2,\delta}\cdots\|A_n\|_{\alpha_n,\delta}$$

eşitsizliği sağlanır.

Lemma 2.3.1 ile birlikte Teorem 2.3.1'in sırasıyla, birinci ve ikinci kısmı kullanılarak aşağıdaki iki sonuç verilebilir:

SONUÇ 2.3.1. *X reel veya kompleks bir Banach cebiri ve $n \in \mathbb{N}$ olmak üzere;*

$$(\phi_1(A_1, A_2, \cdots, A_n)f)(s) = \int_a^b A_1(s,t)A_2(s,t)\cdots A_n(s,t)f(t)dt \qquad (2.3.36)$$

şeklinde tanımlanan ϕ_1, $i = 1, 2, \cdots, n$ için $A_i \in H_{\alpha_i, \delta_i, \gamma}((a,b)\times(a,b), X)$ ve $\delta =$ $\min\{\delta_1, \delta_2, \cdots, \delta_n\}$ iken:

(1) $\alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_{n+1} + \gamma < 1$ ve $f \in H_{\alpha_{n+1}, \delta_{n+1}}((a,b), X)$ ise, $\prod_{i=1}^{n} H_{\alpha_i, \delta_i, \gamma}((a,b)\times(a,b), X)$'ten, $B\left(H_{\alpha_{n+1}, \delta_{n+1}}((a,b), X), C^{0,\delta}((a,b), X)\right)$ uzayına tanımlı ve normu,

$$\|\phi_1\| \leq 2^{n-1}C_nM(\alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_{n+1}, \gamma)$$

olan bir n-lineer operatördür ve

(2) $n > 1$ için $\alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_n + \gamma < 1$ ve $f \in C^{0,\alpha_{n+1}}((a,b), X)$ ise, $\prod_{i=1}^{n} H_{\alpha_i, \delta_i, \gamma}((a,b)\times(a,b), X)$'ten, $B\left(C^{0,\alpha_{n+1}}((a,b), X), C^{0,\delta}((a,b), X)\right)$ uzayına tanımlı ve normu,

$$\|\phi_1\| \leq 2^{n-1}C_nM(\alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_n, \gamma)$$

olan bir n-lineer operatördür.

İSPAT. Lemma 2.3.1'den;

$$B_n(s,t) = A_1(s,t)A_2(s,t)\cdots A_n(s,t);\ s, t \in (a,b)$$

olarak tanımlanan B_n fonksiyonu, $i = 1, 2, \cdots, n$ için $A_i \in H_{\alpha_i, \delta_i, \gamma}((a,b)\times(a,b), X)$ ve $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2, \cdots, \delta_n\}$ iken; $H_{\alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_n, \delta, \gamma}((a,b)\times(a,b), X)$ uzayındadır ve

$$\|B_n\|_{\alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_n, \delta, \gamma} \leq 2^{n-1}C_n \|A_1\|_{\alpha_1, \delta_1, \gamma} \|A_2\|_{\alpha_2, \delta_2, \gamma} \cdots \|A_n\|_{\alpha_n, \delta_n, \gamma} \qquad (2.3.37)$$

olur. Ayrıca, (2.3.3) ve (2.3.36)'dan;

$$\phi_1(A_1, A_2, \cdots, A_n)f = (T_1B_n)f$$

olup, (2.3.37)'nin dikkate alınıp, (1) ve (2) hâllerine karşılık Teorem 2.3.1'nin (1) ve (2)'deki hükmü kullanılırsa, $m_n = \|A_1\|_{\alpha_1, \delta_1, \gamma} \cdots \|A_n\|_{\alpha_n, \delta_n, \gamma}$ alınarak; (2.3.9) ve (2.3.15)'ten; sırasıyla,

$$\|(T_1B_n)f\|_\delta \leq 2^{n-1}C_nM(\alpha_1 + \cdots + \alpha_{n+1}, \gamma)m_n \|f\|_{\alpha_{n+1}, \delta_{n+1}} \qquad (2.3.38)$$

ve

$$\|(T_1B_n)f\|_\delta \leq 2^{n-1}C_nM(\alpha_1+\cdots+\alpha_n,\gamma)m_n\|f\|_{\alpha_{n+1}} \tag{2.3.39}$$

bulunur. (2.3.38) ve (2.3.39) eşitsizliklerinin herbirinde, $\phi_1(A_1,A_2,\cdots,A_n)$ operatörünün sınırlı olduğu anlaşılır. Ayrıca, bu eşitsizliklerde; ait olduğu uzaydaki normu 1 olan bütün f'ler üzerinden supremum alındığında, $\|\phi_1(A_1,A_2,\cdots,A_n)\|$ normu için bir sınır elde edilir. Diğer taraftan; $A_1,A_2,\ldots,A_n$ değişkenlerinden herhangi $n-1$ tanesi sabit tutulduğunda; ϕ_1, geriye kalan değişkene göre lineerdir ve böylece n-lineerdir. Şu hâlde; bir n-lineer operatörün normu tanımını da hatırlarsak, (1) ve (2)'de iddia edilen sonuçlara kolayca sahip oluruz. □

SONUÇ 2.3.2. *X reel veya kompleks bir Banach cebiri, $n\in\mathbb{N}$ ve $n>1$ için $\alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_n+\gamma<1$ olmak üzere;*

$$(\phi_2(A_1,A_2,\cdots,A_n)f)(s)=\int_a^b A_1(t,s)A_2(t,s)\cdots A_n(t,s)f(t)dt \tag{2.3.40}$$

tanımlayalım. Bu durumda; ϕ_2, $i=1,2,\cdots,n$ için $A_i\in H_{\alpha_i,\delta_i,\gamma}((a,b)\times(a,b),X)$ ve $\delta=\min\{\delta_1,\delta_2,\cdots,\delta_n\}$ iken:

(1) $f\in H_{\alpha_{n+1},\delta_{n+1}}((a,b),X)$ ise $\prod_{i=1}^n H_{\alpha_i,\delta_i,\gamma}((a,b)\times(a,b),X)$'ten, $B\left(H_{\alpha_{n+1},\delta_{n+1}}((a,b),X),H_{\alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_n,\gamma}((a,b),X)\right)$ uzayına tanımlı ve normu,

$$\|\phi_2\|\leq 2^{n-1}C_nM(\alpha_{n+1})$$

olan bir n-lineer operatördür ve

(2) $f\in C^{0,\alpha_{n+1}}((a,b),X)$ ise $\prod_{i=1}^n H_{\alpha_i,\delta_i,\gamma}((a,b)\times(a,b),X)$'ten, $B\left(C^{0,\alpha_{n+1}}((a,b),X),H_{\alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_n,\gamma}((a,b),X)\right)$ uzayına tanımlı ve normu

$$\|\phi_2\|\leq 2^{n-1}C_n(b-a)$$

olan bir n-lineer operatördür.

İSPAT. Lemma 2.3.1'de s ve t'nin rolleri değiştirildiğinde;

$$B_n(t,s)=A_1(t,s)A_2(t,s)\cdots A_n(t,s);\ t,s\in(a,b)$$

olarak tanımlanan B_n fonksiyonu, $i=1,2,\cdots,n$ için $A_i \in H_{\alpha_i,\delta_i,\gamma}((a,b)\times(a,b),X)$ ve $\delta=\min\{\delta_1,\delta_2,\cdots,\delta_n\}$ iken; (2.3.37)'yi sağlar. Ayrıca, (2.3.4) ve (2.3.40)'tan;

$$\phi_2(A_1,A_2,\cdots,A_n)f=(T_2B_n)f$$

olup, (1) ve (2)'ye karşılık, (2.3.37)'yi dikkate alarak, Teorem 2.3.1'in (3) ve (4)'teki hükmü kullanılırsa, $m_n=\|A_1\|_{\alpha_1,\delta_1,\gamma}\cdots\|A_n\|_{\alpha_n,\delta_n,\gamma}$ olmak üzere; (2.3.21) ve (2.3.27) 'den; sırasıyla,

$$\|(T_2B_n)f\|_{\alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_n,\gamma}\le 2^{n-1}C_nM(\alpha_{n+1})m_n\|f\|_{\alpha_{n+1},\delta_{n+1}} \tag{2.3.41}$$

ve

$$\|(T_2B_n)f\|_{\alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_n,\gamma}\le 2^{n-1}C_n(b-a)m_n\|f\|_{\alpha_{n+1}} \tag{2.3.42}$$

eşitsizlikleri elde edilir. İspatın geri kalan kısmı, Sonuç 2.3.1'deki gibi tamamlanabilir. □

(2.3.38) ile (2.3.39) ve (2.3.41) ile (2.3.42) eşitsizliklerini aklımızda tutarak, Sonuç 2.3.1 ve Sonuç 2.3.2'den aşağıdaki sonuçlara kolayca sahip olabiliriz.

Sonuç 2.3.3. *X reel veya kompleks bir Banach cebiri, $n\in\mathbb{N}$, $i=1,2,\cdots,n$ için $A_i\in H_{\alpha_i,\delta_i,\gamma}((a,b)\times(a,b),X)$ ve $\delta=\min\{\delta_1,\delta_2,\cdots,\delta_n\}$ olmak üzere;*

$$(Tf)(s)=\int_a^b A_1(s,t)A_2(s,t)\cdots A_n(s,t)f(t)dt \tag{2.3.43}$$

tanımlayalım. Bu taktirde; T,

(1) $\alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_{n+1}+\gamma<1$ ve $f\in H_{\alpha_{n+1},\delta_{n+1}}((a,b),X)$ ise $B\left(H_{\alpha_{n+1},\delta_{n+1}}((a,b),X),C^{0,\delta}((a,b),X)\right)$ uzayına ait olan ve normu

$$\|T\|\le 2^{n-1}C_nM(\alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_{n+1},\gamma)\|A_1\|_{\alpha_1,\delta_1,\gamma}\cdots\|A_n\|_{\alpha_n,\delta_n,\gamma}$$

eşitsizliğini sağlayan bir Fredholm integral operatörüdür ve

(2) $n>1$ için $\alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_n+\gamma<1$ ve $f\in C^{0,\alpha_{n+1}}((a,b),X)$ ise $B\left(C^{0,\alpha_{n+1}}((a,b),X),C^{0,\delta}((a,b),X)\right)$ uzayına ait olan ve normu,

$$\|T\|\le 2^{n-1}C_nM(\alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_n,\gamma)\|A_1\|_{\alpha_1,\delta_1,\gamma}\cdots\|A_n\|_{\alpha_n,\delta_n,\gamma}$$

eşitsizliğini sağlayan bir Fredholm integral operatörüdür.

SONUÇ 2.3.4. *X reel veya kompleks bir Banach cebiri, $n \in \mathbb{N}$, $n > 1$ için $\alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_n + \gamma < 1$, $i = 1, 2, \cdots, n$ için $A_i \in H_{\alpha_i, \delta_i, \gamma}((a,b)\times(a,b), X)$ ve $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2, \cdots, \delta_n\}$ olmak üzere;*

$$(Tf)(s) = \int_a^b A_1(t,s)A_2(t,s)\cdots A_n(t,s)f(t)dt \tag{2.3.44}$$

şeklinde tanımlanan T dönüşümü,

(1) *$f \in H_{\alpha_{n+1}, \delta_{n+1}}((a,b), X)$ ise,*
$B\left(H_{\alpha_{n+1}, \delta_{n+1}}((a,b), X), H_{\alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_n, \gamma}((a,b), X)\right)$ uzayına ait ve normu,

$$\|T\| \le 2^{n-1} C_n M(\alpha_{n+1}) \|A_1\|_{\alpha_1, \delta_1, \gamma} \cdots \|A_n\|_{\alpha_n, \delta_n, \gamma}$$

olan bir Fredholm integral operatörüdür ve

(2) *$f \in C^{0, \alpha_{n+1}}((a,b), X)$ ise, $B\left(C^{0,\alpha_{n+1}}((a,b), X), H_{\alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_n, \gamma}((a,b), X)\right)$ uzayına ait ve normu*

$$\|T\| \le 2^{n-1} C_n (b-a) \|A_1\|_{\alpha_1, \delta_1, \gamma} \cdots \|A_n\|_{\alpha_n, \delta_n, \gamma}$$

olan bir Fredholm integral operatörüdür.

TEOREM 2.3.2. *X, reel veya kompleks bir Banach cebiri, $A \in H_{\alpha_1, \delta_1, \gamma_1}((a,b)\times (a,b), X)$, $B \in H_{\alpha_2, \delta_2, \gamma_2}((a,b)\times(a,b), X)$,*

$$N = M(\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \gamma_1) + M(\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \gamma_2),$$

$$M_2 = maks\{M(\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3), N\} \tag{2.3.45}$$

ve

$$M_3 = maks\{M(\alpha_1 + \alpha_2), M(\alpha_1 + \alpha_2 + \gamma_1) + M(\alpha_1 + \alpha_2 + \gamma_2)\} \tag{2.3.46}$$

olsun. Bu durumda;

$$(\Psi(A,B)f)(s_1, s_2) = \int_a^b A(s_1, t)B(s_2, t)f(t)dt \tag{2.3.47}$$

eşitliği ile tanımlanan Ψ,

(1) $\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \gamma_1$, $\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \gamma_2 < 1$ *ve* $f \in H_{\alpha_3,\delta_3}((a,b),X)$ *ise,* $H_{\alpha_1,\delta_1,\gamma_1}((a,b)\times(a,b),X) \times H_{\alpha_2,\delta_2,\gamma_2}((a,b)\times(a,b),X)$*'ten,* $B\left(H_{\alpha_3,\delta_3}((a,b),X), C^{0,\delta_1,\delta_2}((a,b)\times(a,b),X)\right)$ *uzayına tanımlı ve normu,*

$$\|\Psi\| \leq M_2$$

olacak şekilde sınırlı bir bilineer operatördür ve

(2) $\alpha_1 + \alpha_2 + \gamma_1$, $\alpha_1 + \alpha_2 + \gamma_2 < 1$ *ve* $f \in C^{0,\alpha_3}((a,b),X)$ *ise,* $H_{\alpha_1,\delta_1,\gamma_1}((a,b)\times(a,b),X) \times H_{\alpha_2,\delta_2,\gamma_2}((a,b)\times(a,b),X)$*'ten,* $B\left(C^{0,\alpha_3}((a,b),X), C^{0,\delta_1,\delta_2}((a,b)\times(a,b),X)\right)$ *uzayına tanımlı ve normu,*

$$\|\Psi\| \leq M_3$$

olacak şekilde sınırlı bir bilineer operatördür.

İSPAT. (1) Keyfi fakat sabit herbir $s_1,\ s_2 \in (a,b)$ için

$$C_{s_1,s_2}(t) = A(s_1,\ t)B(s_2,t)f(t),\ t \in (a,b) \tag{2.3.48}$$

olarak tanımlanan

$$C_{s_1,s_2} : (a,b) \longrightarrow X$$

fonksiyonu, sürekli ve şu hâlde Teorem 1.4.1'den kuvvetli ölçülebilirdir. Böylece, Teorem 1.4.2'den;

$$\|C_{s_1,s_2}(\cdot)\| : (a,b) \longrightarrow \mathbb{R}$$

fonksiyonu Lebesque ölçülebilirdir. Diğer taraftan;

$$\|C_{s_1,s_2}(t)\| = \|A(s_1,t)B(s_2,t)f(t)\| \leq \frac{\|A\|_{\alpha_1,\delta_1,\gamma_1}\|B\|_{\alpha_2,\delta_2,\gamma_2}\|f\|_{\alpha_3,\delta_3}}{(t-a)^{\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3}} \tag{2.3.49}$$

olup, $\int_a^b \frac{dt}{(t-a)^{\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3}}$ Lebesque integrali mevcut ve

$$M(\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3) = \int_a^b \frac{dt}{(t-a)^{\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3}} = \frac{(b-a)^{1-\alpha_1-\alpha_2-\alpha_3}}{1-\alpha_1-\alpha_2-\alpha_3}$$

olduğundan; Teorem 1.3.2'den; $\int_a^b \|C_{s_1,s_2}(t)\|\, dt$ Lebesque integrali mevcuttur. Şu hâlde; Teorem 1.4.4'ten; (2.3.47)'deki Bochner integrali mevcuttur. Teorem 1.4.3'ün kullanılmasıyla, $N_3 = \|A\|_{\alpha_1,\delta_1,\gamma_1} \|B\|_{\alpha_2,\delta_2,\gamma_2} \|f\|_{\alpha_3,\delta_3}$ olmak üzere; (2.3.49)'dan;

$$\begin{aligned} \|\Psi(A,B)(s_1,\, s_2)\| &\leq \int_a^b \|C_{s_1,s_2}(t)\|\, dt \\ &\leq N_3 \int_a^b \frac{dt}{(t-a)^{\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3}} \\ &= M(\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3)N_3 \end{aligned} \tag{2.3.50}$$

elde edilir. Ayrıca,

$$D_t(s_1,s_2) = A(s_1,t)B(s_2,t)f(t),$$
$$\Delta D_t = D_t(s_1+\Delta s_1, s_2+\Delta s_2) - D_t(s_1,s_2),$$
$$\Delta_{1,t}A = A(s_1+\Delta s_1,t) - A(s_1,t),$$
$$\Delta_{1,t}B = B(s_2+\Delta s_2,t) - B(s_2,t)$$

ve

$$\Delta\Psi(A,B)f = (\Psi(A,B)f)(s_1+\Delta s_1,\, s_2+\Delta s_2) - (\Psi(A,B)f)(s_1,s_2)$$

alınarak; her $t, s_1, s_2, s_1+\Delta s_1, s_2+\Delta s_2 \in (a,b)$ için;

$$\Delta D_t = ((\Delta_{1,t}A)B(s_2+\Delta s_2,t) + A(s_1,t)\Delta_{1,t}B)\, f(t) \tag{2.3.51}$$

olup hipotezden,

$$\|\Delta D_t\| \leq N_3\frac{|\Delta s_1|^{\delta_1}}{(t-a)^{\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3+\gamma_1}} + N_3\frac{|\Delta s_2|^{\delta_2}}{(t-a)^{\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3+\gamma_2}}$$

bulunur.

$$\int_a^b \frac{dt}{(t-a)^{\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3+\gamma_1}} = M(\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3+\gamma_1) = \frac{(b-a)^{1-\alpha_1-\alpha_2-\alpha_3-\gamma_1}}{1-\alpha_1-\alpha_2-\alpha_3-\gamma_1},$$
$$\int_a^b \frac{dt}{(t-a)^{\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3+\gamma_2}} = M(\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3+\gamma_2) = \frac{(b-a)^{1-\alpha_1-\alpha_2-\alpha_3-\gamma_2}}{1-\alpha_1-\alpha_2-\alpha_3-\gamma_2}$$

olduğundan,

$$N = M(\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3+\gamma_1) + M(\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3+\gamma_2)$$

alınırsa,

$$\begin{aligned} \|\Delta\Psi(A,B)f\| &\leq \int_a^b \|\Delta D_t\|\, dt \\ &\leq NN_3\left(|\Delta s_1|^{\delta_1} + |\Delta s_2|^{\delta_2}\right) \end{aligned} \tag{2.3.52}$$

elde edilir.

$$M_2 = maks\{M(\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3), N\}$$

olmak üzere; (2.3.50) ve (2.3.52)'den;

$$\|(\Psi(A,B)f)(s_1,\ s_2)\| \leq M_2 \|A\|_{\alpha_1,\delta_1,\gamma_1} \|B\|_{\alpha_2,\delta_2,\gamma_2} \|f\|_{\alpha_3,\delta_3} \tag{2.3.53}$$

ve

$$\|\Delta\Psi(A,B)f\| \leq M_2 \|A\|_{\alpha_1,\delta_1,\gamma_1} \|B\|_{\alpha_2,\delta_2,\gamma_2} \|f\|_{\alpha_3,\delta_3} \left(|\Delta s_1|^{\delta_1} + |\Delta s_2|^{\delta_2}\right) \tag{2.3.54}$$

bulunur. Sonuç olarak; (2.3.53) ve (2.3.54)'ü sağlayan bir $M_2 \|A\|_{\alpha_1,\delta_1,\gamma_1} \|B\|_{\alpha_2,\delta_2,\gamma_2} \|f\|_{\alpha_3,\delta_3}$ sabiti mevcut bulunduğundan, $\Psi(A,B)f \in C^{0,\delta_1,\delta_2}((a,b)\times(a,b),X)$ ve

$$\|\Psi(A,B)f\|_{\delta_1,\delta_2} \leq M_2 \|A\|_{\alpha_1,\delta_1,\gamma_1} \|B\|_{\alpha_2,\delta_2,\gamma_2} \|f\|_{\alpha_3,\delta_3} \tag{2.3.55}$$

elde edilir. Şu hâlde; (2.3.55)'ten; $\Psi(A,B)$ sınırlıdır ve

$$\|\Psi(A,B)\| = \sup_{\|f\|_{\alpha_3,\delta_3}=1} \|\Psi(A,B)f\|_{\delta_1,\delta_2} \leq M_2 \|A\|_{\alpha_1,\delta_1,\gamma_1} \|B\|_{\alpha_2,\delta_2,\gamma_2} \tag{2.3.56}$$

eşitsizliği sağlanır. $\Psi(A,B)$'nin lineer olduğu kolayca görülebileceğinden; $\Psi(A,B) \in B\left(H_{\alpha_3,\delta_3}((a,b),X), C^{0,\delta_1,\delta_2}((a,b)\times(a,b),X)\right)$ olur. Diğer taraftan; Ψ her iki değişkene göre lineer olduğundan bilineerdir.

$\forall A \in H_{\alpha_1,\delta_1,\gamma_1}((a,b)\times(a,b),X)$ ve $\forall B \in H_{\alpha_2,\delta_2,\gamma_2}((a,b)\times(a,b),X)$ için (2.3.56)'yı sağlayan bir $M_2 \geq 0$ sabiti mevcut olduğundan Ψ, sınırlıdır ve

$$\|\Psi\| = \sup_{\substack{\|A\|_{\alpha_1,\delta_1,\gamma_1}=1 \\ \|B\|_{\alpha_2,\delta_2,\gamma_2}=1}} \|\Psi(A,B)\| \leq M_2$$

elde edilir ki, böylece (1)'in ispatı tamamlanmış olur.

(2)'nin ispatı, (1)'in ispatına paralel olduğundan yapılmayacaktır. □

Teorem 2.3.3. *X reel veya kompleks bir Banach cebiri, $\gamma_2 < \delta_1$, $A \in H_{\alpha_1,\delta_1,\gamma_1}((a,b)\times(a,b),X)$, $B \in H_{\alpha_2,\delta_2,\gamma_2}((a,b)\times(a,b),X)$,*

$$N_1 = (b-a)^{\gamma_2} M(\alpha_1 + \alpha_3 + \gamma_1) + M(\alpha_1 + \alpha_3) \tag{2.3.57}$$

ve

$$N_2 = (b-a)^{\gamma_2} M(\alpha_1+\gamma_1) + M(\alpha_1) \tag{2.3.58}$$

iken;

$$(\Psi(A,B)f)(s_1,\, s_2) = \int_a^b A(s_1,t)B(t,s_2)f(t)dt \tag{2.3.59}$$

şeklinde tanımlanan Ψ*,*

(1) $\alpha_1+\alpha_3+\gamma_1<1$ *ve* $f \in H_{\alpha_3,\delta_3}((a,b),X)$ *ise,*
$H_{\alpha_1,\delta_1,\gamma_1}((a,b)\times(a,b),X) \times H_{\alpha_2,\delta_2,\gamma_2}((a,b)\times(a,b),X)$*'ten,*
$B\left(H_{\alpha_3,\delta_3}((a,b),X),\, H_{\alpha_2,\delta_1,\gamma_2}((a,b)\times(a,b),X)\right)$ *uzayına tanımlı ve normu,*

$$\|\Psi\| \le N_1$$

olan sınırlı bir bilineer operatördür ve

(2) $f \in C^{0,\alpha_3}((a,b),X)$ *ise,*
$H_{\alpha_1,\delta_1,\gamma_1}((a,b)\times(a,b),X) \times H_{\alpha_2,\delta_2,\gamma_2}((a,b)\times(a,b),X)$*'ten,*
$B\left(C^{0,\alpha_3}((a,b),X),\, H_{\alpha_2,\delta_1,\gamma_2}((a,b)\times(a,b),X)\right)$ *uzayına tanımlı ve normu,*

$$\|\Psi\| \le N_2$$

olan sınırlı bir bilineer operatördür.

İSPAT. (1) Keyfi fakat sabit herbir $s_1,\, s_2 \in (a,b)$ için;

$$C_{s_1,s_2}(t) = A(s_1,\, t)B(t,s_2)f(t),\; t \in (a,b) \tag{2.3.60}$$

eşitliğiyle tanımlanan C_{s_1,s_2} fonksiyonu, sürekli olduğundan kuvvetli ölçülebilirdir ve bu yüzden $\|C_{s_1,s_2}(\cdot)\|$ fonksiyonu Lebesque ölçülebilirdir. Ayrıca,

$$\|C_{s_1,s_2}(t)\| = \|A(s_1,t)B(t,s_2)f(t)\| \le \frac{\|A\|_{\alpha_1,\delta_1,\gamma_1}\|B\|_{\alpha_2,\delta_2,\gamma_2}\|f\|_{\alpha_3,\delta_3}}{(t-a)^{\alpha_1+\alpha_3}(s_2-a)^{\alpha_2}} \tag{2.3.61}$$

ve

$$M(\alpha_1+\alpha_3) = \int_a^b \frac{dt}{(t-a)^{\alpha_1+\alpha_3}} = \frac{(b-a)^{1-\alpha_1-\alpha_3}}{1-\alpha_1-\alpha_3}$$

olup, $\int_a^b \|C_{s_1,s_2}(t)\|\, dt$ Lebesque integrali mevcut ve bunun sonucu olarak; (2.3.59)'daki Bochner integrali mevcuttur. $N_3 = \|A\|_{\alpha_1,\delta_1,\gamma_1} \|B\|_{\alpha_2,\delta_2,\gamma_2} \|f\|_{\alpha_3,\delta_3}$ olmak üzere; (2.3.61)'den;

$$\begin{aligned} \|\Psi(A,B)(s_1,\, s_2)\| &\leq \int_a^b \|C_{s_1,s_2}(t)\|\, dt \\ &\leq \frac{N_3}{(s_2-a)^{\alpha_2}} \int_a^b \frac{dt}{(t-a)^{\alpha_1+\alpha_3}} \\ &= \frac{M(\alpha_1+\alpha_3)N_3}{(s_2-a)^{\alpha_2}} \end{aligned} \tag{2.3.62}$$

bulunur. Diğer taraftan;

$$D_t(s_1,s_2) = A(s_1,t)B(t,s_2)f(t),$$

$$\Delta D_t = D_t(s_1+\Delta s_1, s_2+\Delta s_2) - D_t(s_1,s_2),$$

$$\Delta_{1,t}A = A(s_1+\Delta s_1,t) - A(s_1,t),$$

$$\Delta_{t,2}B = B(t,s_2+\Delta s_2) - B(t,s_2)$$

ve

$$\Delta\Psi(A,B)f = (\Psi(A,B)f)(s_1+\Delta s_1, s_2+\Delta s_2) - (\Psi(A,B)f)(s_1,s_2)$$

alınarak, $\Delta s_2 \geq 0$ ve her $t, s_1, s_2, s_1+\Delta s_1, s_2+\Delta s_2 \in (a,b)$ için;

$$\Delta D_t = ((\Delta_{1,t}A)B(t,s_2+\Delta s_2) + A(s_1,t)\Delta_{t,2}B)\, f(t) \tag{2.3.63}$$

olup, hipotezden;

$$\|\Delta D_t\| \leq (b-a)^{\gamma_2} N_3 \frac{|\Delta s_1|^{\delta_1}}{(t-a)^{\alpha_1+\alpha_3+\gamma_1}(s_2-a)^{\alpha_2+\gamma_2}} + N_3 \frac{(\Delta s_2)^{\gamma_2}}{(t-a)^{\alpha_1+\alpha_3}(s_2-a)^{\alpha_2+\gamma_2}}$$

elde edilir.

$$\int_a^b \frac{dt}{(t-a)^{\alpha_1+\alpha_3+\gamma_1}} = M(\alpha_1+\alpha_3+\gamma_1) = \frac{(b-a)^{1-\alpha_1-\alpha_3-\gamma_1}}{1-\alpha_1-\alpha_3-\gamma_1}$$

ve

$$\int_a^b \frac{dt}{(t-a)^{\alpha_1+\alpha_3}} = M(\alpha_1+\alpha_3) = \frac{(b-a)^{1-\alpha_1-\alpha_3}}{1-\alpha_1-\alpha_3}$$

olduğundan,

$$N_1 = (b-a)^{\gamma_2} M(\alpha_1+\alpha_3+\gamma_1) + M(\alpha_1+\alpha_3)$$

alınırsa,

$$\|\Delta\Psi(A,B)f\| \le \int_a^b \|\Delta D_t\|\,dt$$

böylece,

$$\|\Delta\Psi(A,B)f\| \le \frac{N_1\,\|A\|_{\alpha_1,\delta_1,\gamma_1}\,\|B\|_{\alpha_2,\delta_2,\gamma_2}\,\|f\|_{\alpha_3,\delta_3}\left(|\Delta s_1|^{\delta_1}+(\Delta s_2)^{\gamma_2}\right)}{(s_2-a)^{\alpha_2+\gamma_2}} \tag{2.3.64}$$

ve

$$maks\{M(\alpha_1+\alpha_3),N_1\} = N_1$$

olduğundan, (2.3.62) ve (2.3.64)'ten;

$$\|(\Psi(A,B)f)(s_1,\, s_2)\| \le \frac{N_1\,\|A\|_{\alpha_1,\delta_1,\gamma_1}\,\|B\|_{\alpha_2,\delta_2,\gamma_2}\,\|f\|_{\alpha_3,\delta_3}}{(s_2-a)^{\alpha_2}} \tag{2.3.65}$$

ve

$$\|\Delta\Psi(A,B)f\| \le \frac{N_1\,\|A\|_{\alpha_1,\delta_1,\gamma_1}\,\|B\|_{\alpha_2,\delta_2,\gamma_2}\,\|f\|_{\alpha_3,\delta_3}\left(|\Delta s_1|^{\delta_1}+(\Delta s_2)^{\gamma_2}\right)}{(s_2-a)^{\alpha_2+\gamma_2}} \tag{2.3.66}$$

bulunur. Böylece, (2.3.65) ve (2.3.66)'dan; $\Psi(A,B)f \in H_{\alpha_2,\delta_1,\gamma_2}((a,b)\times(a,b),X)$ olup,

$$\|\Psi(A,B)f\|_{\alpha_2,\delta_1,\gamma_2} \le N_1\,\|A\|_{\alpha_1,\delta_1,\gamma_1}\,\|B\|_{\alpha_2,\delta_2,\gamma_2}\,\|f\|_{\alpha_3,\delta_3} \tag{2.3.67}$$

eşitsizliği sağlanır. (2.3.67)'den de; $\Psi(A,B)$'nin sınırlı ve normunun da,

$$\|\Psi(A,B)\| = \sup_{\|f\|_{\alpha_3,\delta_3}=1} \|\Psi(A,B)f\|_{\alpha_2,\delta_1,\gamma_2} \le N_1\,\|A\|_{\alpha_1,\delta_1,\gamma_1}\,\|B\|_{\alpha_2,\delta_2,\gamma_2} \tag{2.3.68}$$

şartını sağladığı anlaşılır. $\Psi(A,B)$'nin lineerliği açıktır. Böylece, $\Psi(A,B) \in B\left(H_{\alpha_3,\delta_3}((a,b),X)\,,H_{\alpha_2,\delta_1,\gamma_2}((a,b)\times(a,b),X)\right)$ olur.

Yine, Ψ'nin bilineer olduğu, kolayca görülebilir. (2.3.68)'den Ψ'nin sınırlı ve normunun da,

$$\|\Psi\| = \sup_{\substack{\|A\|_{\alpha_1,\delta_1,\gamma_1}=1\\ \|B\|_{\alpha_2,\delta_2,\gamma_2}=1}} \|\Psi(A,B)\| \le N_1$$

eşitsizliğini sağladığı anlaşılır ki böylece (1)'in ispatı tamamlanır.

(2)'nin ispatı, (1)'in ispatına benzer şekilde yapılabilir. □

M_2, M_3, N_1 ve N_2, (2.3.45), (2.3.46), (2.3.57) ve (2.3.58)'de tanımlanan sabitler olmak üzere; Teorem 2.3.2 ve Teorem 2.3.3'ten aşağıdaki sonuçlara ulaşılır:

SONUÇ 2.3.5. *X reel veya kompleks bir Banach cebiri, $A \in H_{\alpha_1,\delta_1,\gamma_1}((a,b)\times(a,b),X)$, $B \in H_{\alpha_2,\delta_2,\gamma_2}((a,b)\times(a,b),X)$ ve*

$$(Tf)(s_1,\, s_2) = \int_a^b A(s_1,t)B(s_2,t)f(t)dt \tag{2.3.69}$$

olsun. Bu durumda;

(1) *$\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3+\gamma_1$, $\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3+\gamma_2 < 1$ ve $f \in H_{\alpha_3,\delta_3}((a,b),X)$ ise, T, normu,*

$$\|T\| \leq M_2 \|A\|_{\alpha_1,\delta_1,\gamma_1} \|B\|_{\alpha_2,\delta_2,\gamma_2}$$

olacak şekilde, $B\left(H_{\alpha_3,\delta_3}((a,b),X), C^{0,\delta_1,\delta_2}((a,b)\times(a,b),X)\right)$ uzayına ait bir Fredholm integral operatörüdür ve

(2) *$\alpha_1+\alpha_2+\gamma_1$, $\alpha_1+\alpha_2+\gamma_2 < 1$ ve $f \in C^{0,\alpha_3}((a,b),X)$ ise, T, normu,*

$$\|T\| \leq M_3 \|A\|_{\alpha_1,\delta_1,\gamma_1} \|B\|_{\alpha_2,\delta_2,\gamma_2}$$

olacak şekilde, $B\left(C^{0,\alpha_3}((a,b),X), C^{0,\delta_1,\delta_2}((a,b)\times(a,b),X)\right)$ uzayına ait bir Fredholm integral operatörüdür.

SONUÇ 2.3.6. *X reel veya kompleks bir Banach cebiri, $\gamma_2 < \delta_1$, $A \in H_{\alpha_1,\delta_1,\gamma_1}((a,b)\times(a,b),X)$, $B \in H_{\alpha_2,\delta_2,\gamma_2}((a,b)\times(a,b),X)$ ve*

$$(Tf)(s_1,\, s_2) = \int_a^b A(s_1,t)B(t,s_2)f(t)dt \tag{2.3.70}$$

olsun. O zaman;

(1) *$\alpha_1+\alpha_3+\gamma_1 < 1$ ve $f \in H_{\alpha_3,\delta_3}((a,b),X)$ ise, T, $B\left(H_{\alpha_3,\delta_3}((a,b),X), H_{\alpha_2,\delta_1,\gamma_2}((a,b)\times(a,b),X)\right)$ uzayına ait ve normu,*

$$\|T\| \leq N_1 \|A\|_{\alpha_1,\delta_1,\gamma_1} \|B\|_{\alpha_2,\delta_2,\gamma_2}$$

olan bir Fredholm integral operatörüdür ve

(2) $f \in C^{0,\alpha_3}((a,b),X)$ ise, T, $B\left(C^{0,\alpha_3}((a,b),X), H_{\alpha_2,\delta_1,\gamma_2}((a,b)\times(a,b),X)\right)$ uzayına ait normu,

$$\|T\| \leq N_2 \|A\|_{\alpha_1,\delta_1,\gamma_1} \|B\|_{\alpha_2,\delta_2,\gamma_2}$$

olan bir Fredholm integral operatörüdür.

Bu çalışmada geçen Fredholm integral operatörleri,

$$f(s) = \phi(s) + \int_a^b K(s,t)f(t)dt$$

veya

$$\phi(s_1,s_2) = \int_a^b K(s_1,s_2,t)f(t)dt$$

formundaki Fredholm integral denklemleriyle yakından alakalı olduğundan, bu operatörler için böyle bir adlandırma kullanılmıştır. Yani, buradaki Fredholm integral operatörleri, Fredholm teorisinde tanımlanan Fredholm operatörleriyle karıştırılmamalıdır.

BÖLÜM 3

$H_{\alpha,\delta,\gamma}((a,b)\times(a,b),X)$, $H_{\alpha,\delta}((a,b),X)$ VE $H^1_{\alpha,\delta,\gamma}((a,b)\times(a,b),X)$ ÜZERİNDEKİ SINIRLI SİNGÜLER OPERATÖRLER

Bu bölümde; $H_{\alpha,\delta}(X)$ ve $H_{\alpha,\delta,\gamma}(X)$ uzayları ile bu tip uzayların kartezyen çarpımı üzerinde bir genelleştirilmiş integralle tanımlanan sınırlı lineer, bilineer ve n-lineer singüler integral operatörler elde edildi. Ayrıca, $H_{\alpha,\delta,\gamma}(X)$'in bir altuzayı olan $H^1_{\alpha,\delta,\gamma}((a,b)\times(a,b),X)$ uzayı tanımlanarak onun bir Banach uzayı olduğu gösterildi ve $H_{\alpha,\delta,\gamma}(X)$ ile bu yeni uzayın kartezyen çarpımı üzerinde, sınırlı ve bilineer singüler operatör tanımlandı. Böylece, Fredholm integral denklemleri bakımından büyük öneme sahip olan singüler ve sınırlı Fredholm integral operatörleri elde edildi.

3.1. $H_{\alpha,\delta}(X)$ ve $H_{\alpha,\delta,\gamma}(X)$ üzerindeki sınırlı singüler operatörler

Lemma 3.1.1. *X, reel veya kompleks bir Banach cebiri, $A \in H_{\alpha,\delta}((a,b),X)$, $p > 1\,(p \in \mathbb{R})$, $s \in I_p = \left(a, a + \frac{p}{p+2}(b-a)\right)$ ve $0 \le \Delta s < \frac{s-a}{p}$ olsun. Bu taktirde;*

$$\Gamma_p(A)(s) = \int_a^b \frac{A(t)}{t-s}dt, \quad s \in I_p \tag{3.1.1}$$

genelleştirilmiş integrali mevcut olup, sadece α, δ ve p'ye bağlı olan (A'ya bağlı olmayan),

$$\|\Gamma_p(A)(s)\| \le \frac{M(\alpha,\delta,p)\,\|A\|_{\alpha,\delta}}{(s-a)^{\alpha}} \tag{3.1.2}$$

ve

$$\|\Gamma_p(A)(s+\Delta s) - \Gamma_p(A)(s)\| \le \frac{M(\alpha,\delta,p)\,\|A\|_{\alpha,\delta}\,(\Delta s)^{\delta}}{(s-a)^{\alpha+\delta}} \tag{3.1.3}$$

eşitsizliklerini sağlayan bir $M(\alpha,\delta,p) \ge 0$ sabiti vardır.

Bundan sonra I_p ile, $p > 1\,(p \in \mathbb{R})$ olmak üzere; $I_p = \left(a, a + \frac{p}{p+2}(b-a)\right)$ aralığı anlaşılacaktır.

İSPAT. $s \in I_p$ olmak üzere;

$$\Gamma_p(A)(s) = \int_a^{s-\frac{s-a}{p}} \frac{A(t)}{t-s}dt + \int_{s-\frac{s-a}{p}}^{s+\frac{s-a}{p}} \frac{A(t)}{t-s}dt + \int_{s+\frac{s-a}{p}}^{b} \frac{A(t)}{t-s}dt \qquad (3.1.4)$$

yazılabilir. $A \in H_{\alpha,\delta}((a,b),X)$ ile $t \in (a,\ b)$ ve $t \neq s$ iken; $h_s(t) = \frac{1}{t-s}$ olarak tanımlanan reel değerli $h_s(\cdot)$ fonksiyonu sürekli olduğundan; $B_s(t) = h(t)A(t)$ şeklinde tanımlanan $B_s(\cdot)$ fonksiyonu süreklidir ve şu hâlde kuvvetli ölçülebilirdir.

$$\left\|\frac{A(t)}{t-s}\right\| \leq \frac{\|A(t)\|}{|t-s|} \leq \frac{\|A\|_{\alpha,\delta}}{(t-a)^\alpha|t-s|} \qquad (3.1.5)$$

olup, $t \in \left(a, s-\frac{s-a}{p}\right)$ için $s-t > \frac{s-a}{p} > 0$ olacağından, $\frac{1}{s-t} < \frac{p}{s-a}$ olur. Böylece,

$$\begin{aligned} \int_a^{s-\frac{s-a}{p}} \frac{dt}{(t-a)^\alpha|t-s|} &\leq \frac{p}{s-a}\int_a^{s-\frac{s-a}{p}} \frac{dt}{(t-a)^\alpha} \\ &= \frac{p}{s-a}\int_0^{\frac{(p-1)(s-a)}{p}} u^{-\alpha}du = \frac{p^\alpha(p-1)^{1-\alpha}}{(1-\alpha)(s-a)^\alpha} \end{aligned}$$

bulunur ve (3.1.5)'ten;

$$\left\|\int_a^{s-\frac{s-a}{p}} \frac{A(t)}{t-s}dt\right\| \leq \int_a^{s-\frac{s-a}{p}} \left\|\frac{A(t)}{t-s}\right\| dt \leq \frac{p^\alpha(p-1)^{1-\alpha}\,\|A\|_{\alpha,\delta}}{(1-\alpha)(s-a)^\alpha} \qquad (3.1.6)$$

elde edilir.

$\frac{s-a}{p} > 0$ ve böylece $\int_{s-\frac{s-a}{p}}^{s+\frac{s-a}{p}} \frac{dt}{t-s} = 0$ olduğundan;

$$\begin{aligned} \int_{s-\frac{s-a}{p}}^{s+\frac{s-a}{p}} \frac{A(t)}{t-s}dt &= \int_{s-\frac{s-a}{p}}^{s+\frac{s-a}{p}} \frac{A(t)-A(s)}{t-s}dt \\ &= \int_{s-\frac{s-a}{p}}^{s} \frac{A(t)-A(s)}{t-s}dt + \int_s^{s+\frac{s-a}{p}} \frac{A(t)-A(s)}{t-s}dt \end{aligned}$$

eşitliği geçerlidir.

$t \in \left(s - \frac{s-a}{p}, s\right)$ iken; $s - t > 0$, $t - a > \frac{(p-1)(s-a)}{p} > 0$ ve böylece, $\frac{1}{t-a} < \frac{p}{(p-1)(s-a)}$ olduğu da dikkate alınarak; (2.1.2) kullanılırsa,

$$\begin{aligned} \frac{\|A(t)-A(s)\|}{|t-s|} &= \frac{\|A(s)-A(t)\|}{|t-s|} = \frac{\|A(t+s-t)-A(t)\|}{s-t} \\ &\leq \frac{\|A\|_{\alpha,\delta}(s-t)^{\delta-1}}{(t-a)^{\alpha+\delta}} \leq \frac{p^{\alpha+\delta}\|A\|_{\alpha,\delta}(s-t)^{\delta-1}}{(p-1)^{\alpha+\delta}(s-a)^{\alpha+\delta}} \end{aligned} \tag{3.1.7}$$

bulunur.

$$\int_{s-\frac{s-a}{p}}^{s} (s-t)^{\delta-1}dt = \int_0^{\frac{s-a}{p}} u^{\delta-1}du = \frac{(s-a)^\delta}{\delta p^\delta}$$

olduğundan, (3.1.7)'den;

$$\int_{s-\frac{s-a}{p}}^{s} \frac{\|A(t)-A(s)\|}{|t-s|}dt \leq \frac{p^\alpha \|A\|_{\alpha,\delta}}{(p-1)^{\alpha+\delta}\delta(s-a)^\alpha} \tag{3.1.8}$$

geçerlidir.

Benzer şekilde, $t \in \left(s, s + \frac{s-a}{p}\right)$ iken; $t - s > 0$ olacağından; (2.1.2)'den;

$$\frac{\|A(t)-A(s)\|}{|t-s|} = \frac{\|A(s+t-s)-A(s)\|}{t-s} \leq \frac{\|A\|_{\alpha,\delta}(t-s)^{\delta-1}}{(s-a)^{\alpha+\delta}} \tag{3.1.9}$$

elde edilir. Ayrıca,

$$\int_{s}^{s+\frac{s-a}{p}} (t-s)^{\delta-1}dt = \int_0^{\frac{s-a}{p}} u^{\delta-1}du = \frac{(s-a)^\delta}{\delta p^\delta}$$

olup, (3.1.9)'dan;

$$\int_{s}^{s+\frac{s-a}{p}} \frac{\|A(t)-A(s)\|}{|t-s|}dt \leq \frac{\|A\|_{\alpha,\delta}}{\delta p^\delta (s-a)^\alpha} \tag{3.1.10}$$

eşitsizliği sağlanır. Böylece, $I = \int_{s-\frac{s-a}{p}}^{s+\frac{s-a}{p}} \frac{A(t)}{t-s}dt$ alınarak, (3.1.8) ve (3.1.10)'dan;

$$\begin{aligned} \|I\| &\leq \int_{s-\frac{s-a}{p}}^{s} \frac{\|A(t)-A(s)\|}{|t-s|}dt + \int_{s}^{s+\frac{s-a}{p}} \frac{\|A(t)-A(s)\|}{|t-s|}dt \\ &\leq \left(\frac{p^\alpha}{(p-1)^{\alpha+\delta}\delta} + \frac{1}{\delta p^\delta}\right)\frac{\|A\|_{\alpha,\delta}}{(s-a)^\alpha} \end{aligned} \tag{3.1.11}$$

sonucuna ulaşılır.

$t \in \left(s+\frac{s-a}{p}, b\right)$ için $t-a > s+\frac{s-a}{p}-a = \frac{(p+1)(s-a)}{p}$ ve buradan $t-s = t-a-(s-a) > t-a-\frac{p(t-a)}{p+1} = \frac{t-a}{p+1} > 0$ ve $\frac{1}{t-s} < \frac{p+1}{t-a}$ olur. Şu hâlde;

$$\left\|\frac{A(t)}{t-s}\right\| \leq \frac{\|A\|_{\alpha,\delta}}{(t-a)^{\alpha}|t-s|} \leq \frac{(p+1)\|A\|_{\alpha,\delta}}{(t-a)^{\alpha+1}} \tag{3.1.12}$$

elde edilir.

$$\begin{aligned}\int_{s+\frac{s-a}{p}}^{b}\frac{dt}{(t-a)^{\alpha+1}} &= \frac{p^{\alpha}}{\alpha(p+1)^{\alpha}(s-a)^{\alpha}}-\frac{1}{\alpha(b-a)^{\alpha}}\\ &\leq \frac{p^{\alpha}}{\alpha(p+1)^{\alpha}(s-a)^{\alpha}}\end{aligned}$$

ve (3.1.12)'den;

$$\left\|\int_{s+\frac{s-a}{p}}^{b}\frac{A(t)}{t-s}dt\right\| \leq \int_{s+\frac{s-a}{p}}^{b}\left\|\frac{A(t)}{t-s}\right\|dt \leq \frac{(p+1)p^{\alpha}\|A\|_{\alpha,\delta}}{\alpha(p+1)^{\alpha}(s-a)^{\alpha}} \tag{3.1.13}$$

bulunur.

$$M_1(\alpha,\delta,p) = \frac{p^{\alpha}(p-1)^{1-\alpha}}{1-\alpha}+\frac{p^{\alpha}}{(p-1)^{\alpha+\delta}\delta}+\frac{1}{\delta p^{\delta}}+\frac{(p+1)p^{\alpha}}{\alpha(p+1)^{\alpha}}$$

alınırsa, (3.1.6), (3.1.11) ve (3.1.13)'ten;

$$\begin{aligned}\|\Gamma_p(A)(s)\| &\leq \left\|\int_{a}^{s-\frac{s-a}{p}}\frac{A(t)}{t-s}dt\right\|+\left\|\int_{s-\frac{s-a}{p}}^{s+\frac{s-a}{p}}\frac{A(t)}{t-s}dt\right\|+\\ &\quad+\left\|\int_{s+\frac{s-a}{p}}^{b}\frac{A(t)}{t-s}dt\right\|\\ &\leq \frac{M_1(\alpha,\delta,p)\|A\|_{\alpha,\delta}}{(s-a)^{\alpha}}\end{aligned} \tag{3.1.14}$$

eşitsizliği elde edilir.

Diğer taraftan; $0 < \Delta s < \frac{s-a}{p}$ iken;

$$\frac{1}{(t-s-\Delta s)(t-s)} = \frac{1}{\Delta s}\left(\frac{1}{t-s-\Delta s}-\frac{1}{t-s}\right) \tag{3.1.15}$$

eşitliği dikkate alınarak;

$$\Gamma_p(A)(s+\Delta s)-\Gamma_p(A)(s)=\int_a^b \frac{A(t)}{t-s-\Delta s}dt-\int_a^b \frac{A(t)}{t-s}dt=$$

$$=\Delta s\int_a^{s-\frac{s-a}{p}} \frac{A(t)}{(t-s-\Delta s)(t-s)}dt+\int_{s-\frac{s-a}{p}}^{s+\Delta s+\frac{s-a}{p}}\left[\frac{A(t)}{t-s-\Delta s}-\frac{A(t)}{t-s}\right]dt+$$

$$+\Delta s\int_{s+\Delta s+\frac{s-a}{p}}^{b} \frac{A(t)}{(t-s-\Delta s)(t-s)}dt$$

yazılabilir.

$t\in\left(a,s-\frac{s-a}{p}\right)$ için $|t-s-\Delta s|>|t-s|>\frac{s-a}{p}>0$ olduğundan; $\frac{1}{|t-s-\Delta s|}<\frac{1}{|t-s|}<\frac{p}{s-a}$ ve böylece,

$$\left\|\frac{A(t)}{(t-s-\Delta s)(t-s)}\right\| \le \frac{\|A\|_{\alpha,\delta}}{(t-a)^{\alpha}|t-s-\Delta s||t-s|}$$

$$\le \frac{p^2\,\|A\|_{\alpha,\delta}}{(s-a)^2(t-a)^{\alpha}} \tag{3.1.16}$$

olur. Ayrıca,

$$\int_a^{s-\frac{s-a}{p}} \frac{dt}{(t-a)^{\alpha}}=\int_0^{\frac{(p-1)(s-a)}{p}} u^{-\alpha}du=\frac{(p-1)^{1-\alpha}}{(1-\alpha)p^{1-\alpha}(s-a)^{\alpha-1}}$$

eşitliği ve

$$\Delta s=(\Delta s)^{\delta}(\Delta s)^{1-\delta}\le(\Delta s)^{\delta}(s-a)^{1-\delta} \tag{3.1.17}$$

eşitsizliği de kullanılarak, (3.1.16)'dan;

$$\left\|\Delta s\int_a^{s-\frac{s-a}{p}} \frac{A(t)}{(t-s-\Delta s)(t-s)}dt\right\|\le\frac{p^{1+\alpha}(p-1)^{1-\alpha}\,\|A\|_{\alpha,\delta}\,(\Delta s)^{\delta}}{(1-\alpha)(s-a)^{\alpha+\delta}} \tag{3.1.18}$$

eşitsizliğine ulaşılır.

$t\in\left(s+\Delta s+\frac{s-a}{p},b\right)$ için; $t-a>t-s>t-s-\Delta s>0$ olup, $\frac{1}{t-a}<\frac{1}{t-s}<\frac{1}{t-s-\Delta s}$ olur. Buradan,

$$\left\|\frac{A(t)}{(t-s-\Delta s)(t-s)}\right\| \le \frac{\|A\|_{\alpha,\delta}}{(t-a)^{\alpha}(t-s-\Delta s)(t-s)}$$

$$\le \frac{\|A\|_{\alpha,\delta}}{(t-s-\Delta s)^{2+\alpha}} \tag{3.1.19}$$

ve

$$\begin{aligned}
\int_{s+\Delta s+\frac{s-a}{p}}^{b} \frac{dt}{(t-s-\Delta s)^{2+\alpha}} &= \int_{\frac{s-a}{p}}^{b-s-\Delta s} u^{-2-\alpha} du \\
&= \frac{p^{1+\alpha}}{(1+\alpha)(s-a)^{1+\alpha}} - \frac{1}{(1+\alpha)(b-s-\Delta s)^{1+\alpha}} \\
&\leq \frac{p^{1+\alpha}}{(1+\alpha)(s-a)^{1+\alpha}}
\end{aligned}$$

olduğundan; (3.1.17)'nin de gözönünde bulundurulmasıyla, (3.1.19)'dan;

$$\left\| \Delta s \int_{s+\Delta s+\frac{s-a}{p}}^{b} \frac{A(t)}{(t-s-\Delta s)(t-s)} dt \right\| \leq \frac{p^{1+\alpha} \|A\|_{\alpha,\delta} (\Delta s)^{\delta}}{(1+\alpha)(s-a)^{\alpha+\delta}} \tag{3.1.20}$$

elde edilir.

$$\begin{aligned}
&\int_{s-\frac{s-a}{p}}^{s+\Delta s+\frac{s-a}{p}} \left[\frac{A(t)}{t-s-\Delta s} - \frac{A(t)}{t-s} \right] dt = \\
&= \int_{s-\frac{s-a}{p}}^{s+\Delta s+\frac{s-a}{p}} \frac{A(t)-A(s+\Delta s)}{t-s-\Delta s} dt - \int_{s-\frac{s-a}{p}}^{s+\Delta s+\frac{s-a}{p}} \frac{A(t)-A(s)}{t-s} dt + \\
&\quad + A(s+\Delta s) \int_{s-\frac{s-a}{p}}^{s+\Delta s+\frac{s-a}{p}} \frac{dt}{t-s-\Delta s} - A(s) \int_{s-\frac{s-a}{p}}^{s+\Delta s+\frac{s-a}{p}} \frac{dt}{t-s}
\end{aligned}$$

olup, $\int_{s+\Delta s-\frac{s-a}{p}}^{s+\Delta s+\frac{s-a}{p}} \frac{dt}{t-s-\Delta s} = \int_{u-\frac{s-a}{p}}^{u+\frac{s-a}{p}} \frac{dt}{t-u} = 0$ ve $t \in \left(s - \frac{s-a}{p}, s+\Delta s - \frac{s-a}{p}\right)$ için $s + \Delta s - t > \frac{s-a}{p} > 0$ olduğundan, $\frac{1}{s+\Delta s - t} < \frac{p}{s-a}$ eşitsizliği sağlanır.

$$\begin{aligned}
\int_{s-\frac{s-a}{p}}^{s+\Delta s+\frac{s-a}{p}} \frac{dt}{t-s-\Delta s} &= \int_{s-\frac{s-a}{p}}^{s+\Delta s-\frac{s-a}{p}} \frac{dt}{t-s-\Delta s} + \int_{s+\Delta s-\frac{s-a}{p}}^{s+\Delta s+\frac{s-a}{p}} \frac{dt}{t-s-\Delta s} \\
&= \int_{s-\frac{s-a}{p}}^{s+\Delta s-\frac{s-a}{p}} \frac{dt}{t-s-\Delta s}
\end{aligned}$$

ve (3.1.17)'yi de dikkate alarak,

$$\begin{aligned}
\left| \int_{s-\frac{s-a}{p}}^{s+\Delta s+\frac{s-a}{p}} \frac{dt}{t-s-\Delta s} \right| &\leq \int_{s-\frac{s-a}{p}}^{s+\Delta s-\frac{s-a}{p}} \frac{dt}{|t-s-\Delta s|} \\
&= \int_{s-\frac{s-a}{p}}^{s+\Delta s-\frac{s-a}{p}} \frac{dt}{s+\Delta s-t} \leq \frac{p}{s-a} \int_{s-\frac{s-a}{p}}^{s+\Delta s-\frac{s-a}{p}} dt \\
&\leq \frac{p\Delta s}{s-a} \leq \frac{p(\Delta s)^{\delta}}{(s-a)^{\delta}}
\end{aligned}$$

elde edilir. Böylece,

$$\left\| A(s+\Delta s) \int_{s-\frac{s-a}{p}}^{s+\Delta s+\frac{s-a}{p}} \frac{dt}{t-s-\Delta s} \right\| \leq \frac{p\,\|A\|_{\alpha,\delta}\,(\Delta s)^{\delta}}{(s+\Delta s-a)^{\alpha}(s-a)^{\delta}}$$
$$\leq \frac{p\,\|A\|_{\alpha,\delta}\,(\Delta s)^{\delta}}{(s-a)^{\alpha+\delta}} \qquad (3.1.21)$$

bağıntısı sağlanır.

$\frac{s-a}{p} > 0$ için $\int_{s-\frac{s-a}{p}}^{s+\frac{s-a}{p}} \frac{dt}{t-s} = 0$ ve $t \in \left(s+\frac{s-a}{p}, s+\Delta s+\frac{s-a}{p}\right)$ iken; $t-s > \frac{s-a}{p} > 0$ olduğundan; $\frac{1}{t-s} < \frac{p}{s-a}$ ve (3.1.17)'nin de kullanılmasıyla,

$$\begin{aligned}\int_{s-\frac{s-a}{p}}^{s+\Delta s+\frac{s-a}{p}} \frac{dt}{t-s} &= \int_{s-\frac{s-a}{p}}^{s+\frac{s-a}{p}} \frac{dt}{t-s} + \int_{s+\frac{s-a}{p}}^{s+\Delta s+\frac{s-a}{p}} \frac{dt}{t-s} \\ &= \int_{s+\frac{s-a}{p}}^{s+\Delta s+\frac{s-a}{p}} \frac{dt}{t-s} \\ &\leq \frac{p}{s-a} \int_{s+\frac{s-a}{p}}^{s+\Delta s+\frac{s-a}{p}} dt = \frac{p\Delta s}{s-a} \leq \frac{p(\Delta s)^{\delta}}{(s-a)^{\delta}}\end{aligned}$$

bulunur. Şu hâlde;

$$\left\| -A(s) \int_{s-\frac{s-a}{p}}^{s+\Delta s+\frac{s-a}{p}} \frac{dt}{t-s} \right\| = \|A(s)\| \int_{s-\frac{s-a}{p}}^{s+\Delta s+\frac{s-a}{p}} \frac{dt}{t-s} \leq \frac{p\,\|A\|_{\alpha,\delta}\,(\Delta s)^{\delta}}{(s-a)^{\alpha+\delta}} \qquad (3.1.22)$$

olur.

(3.1.15) eşitliğinden;

$$\begin{aligned}&\int_{s-\frac{s-a}{p}}^{s+\Delta s+\frac{s-a}{p}} \frac{A(t)-A(s+\Delta s)}{t-s-\Delta s}dt - \int_{s-\frac{s-a}{p}}^{s+\Delta s+\frac{s-a}{p}} \frac{A(t)-A(s)}{t-s}dt = \\ &= \Delta s \int_{s-\frac{s-a}{p}}^{s-\frac{\Delta s}{2}} \frac{A(t)-A(s)}{(t-s-\Delta s)(t-s)}dt - \int_{s-\frac{s-a}{p}}^{s-\frac{\Delta s}{2}} \frac{A(s+\Delta s)-A(s)}{t-s-\Delta s}dt + \\ &+ \int_{s-\frac{\Delta s}{2}}^{s+\frac{3\Delta s}{2}} \frac{A(t)-A(s+\Delta s)}{t-s-\Delta s}dt - \int_{s-\frac{\Delta s}{2}}^{s+\frac{3\Delta s}{2}} \frac{A(t)-A(s)}{t-s}dt + \\ &+ \Delta s \int_{s+\frac{3\Delta s}{2}}^{s+\Delta s+\frac{s-a}{p}} \frac{A(t)-A(s+\Delta s)}{(t-s-\Delta s)(t-s)}dt - \int_{s+\frac{3\Delta s}{2}}^{s+\Delta s+\frac{s-a}{p}} \frac{A(s+\Delta s)-A(s)}{t-s}dt\end{aligned}$$

yazılabilir.

$t \in \left(s - \frac{s-a}{p}, s - \frac{\Delta s}{2}\right)$ için; $s-t+\Delta s > s-t > 0$ ve $t-a > \frac{(p-1)(s-a)}{p} > 0$ olup, $\frac{1}{s-t+\Delta s} < \frac{1}{s-t}$ ve $\frac{1}{t-a} < \frac{p}{(p-1)(s-a)}$ olur. Şu hâlde;

$$\begin{aligned}
\left\|\frac{A(t)-A(s)}{(t-s-\Delta s)(t-s)}\right\| &= \left\|\frac{A(t+s-t)-A(t)}{(t-s-\Delta s)(t-s)}\right\| \\
&\leq \frac{\|A\|_{\alpha,\delta}(s-t)^{\delta-2}}{(t-a)^{\alpha+\delta}} \\
&\leq \frac{p^{\alpha+\delta}\|A\|_{\alpha,\delta}(s-t)^{\delta-2}}{(p-1)^{\alpha+\delta}(s-a)^{\alpha+\delta}} \qquad (3.1.23)
\end{aligned}$$

eşitsizliği sağanır.

$$\begin{aligned}
\int_{s-\frac{s-a}{p}}^{s-\frac{\Delta s}{2}} (s-t)^{\delta-2}dt = \int_{\frac{\Delta s}{2}}^{\frac{s-a}{p}} u^{\delta-2}du &= \frac{(\Delta s)^{\delta-1}}{(1-\delta)2^{\delta-1}} - \frac{(s-a)^{\delta-1}}{(1-\delta)p^{\delta-1}} \\
&\leq \frac{(\Delta s)^{\delta-1}}{(1-\delta)2^{\delta-1}}
\end{aligned}$$

olduğundan, (3.1.23)'ten;

$$\left\|\Delta s \int_{s-\frac{s-a}{p}}^{s-\frac{\Delta s}{2}} \frac{A(t)-A(s)}{(t-s-\Delta s)(t-s)}dt\right\| \leq \frac{p^{\alpha+\delta}\|A\|_{\alpha,\delta}(\Delta s)^{\delta}}{(p-1)^{\alpha+\delta}(1-\delta)2^{\delta-1}(s-a)^{\alpha+\delta}} \qquad (3.1.24)$$

eşitsizliğine ulaşılır.

$$\begin{aligned}
\int_{s-\frac{\Delta s}{2}}^{s+\frac{3\Delta s}{2}} \frac{A(t)-A(s+\Delta s)}{t-s-\Delta s}dt &= \int_{s-\frac{\Delta s}{2}}^{s+\Delta s} \frac{A(t)-A(s+\Delta s)}{t-s-\Delta s}dt + \\
&+ \int_{s+\Delta s}^{s+\frac{3\Delta s}{2}} \frac{A(t)-A(s+\Delta s)}{t-s-\Delta s}dt
\end{aligned}$$

ve $t \in \left(s - \frac{\Delta s}{2}, s+\Delta s\right)$ için; $s+\Delta s - t > 0$, $t-a > s-a-\frac{\Delta s}{2} > s-a-\frac{s-a}{2p} = \frac{(2p-1)(s-a)}{2p}$ olup, $\frac{1}{t-a} < \frac{2p}{(2p-1)(s-a)}$ olur. Buradan;

$$\begin{aligned}
\left\|\frac{A(t)-A(s+\Delta s)}{t-s-\Delta s}\right\| &= \frac{\|A(t+s+\Delta s-t)-A(t)\|}{s+\Delta s-t} \\
&\leq \frac{\|A\|_{\alpha,\delta}(s+\Delta s-t)^{\delta-1}}{(t-a)^{\alpha+\delta}} \\
&\leq \frac{(2p)^{\alpha+\delta}\|A\|_{\alpha,\delta}(s+\Delta s-t)^{\delta-1}}{(2p-1)^{\alpha+\delta}(s-a)^{\alpha+\delta}} \qquad (3.1.25)
\end{aligned}$$

bulunur.

$$\int_{s-\frac{\Delta s}{2}}^{s+\Delta s}(s+\Delta s-t)^{\delta-1}dt=\int_0^{\frac{3\Delta s}{2}}u^{\delta-1}du=\frac{3^\delta(\Delta s)^\delta}{\delta 2^\delta}$$

ve böylece, (3.1.25)'ten;

$$\left\|\int_{s-\frac{\Delta s}{2}}^{s+\Delta s}\frac{A(t)-A(s+\Delta s)}{t-s-\Delta s}dt\right\|\leq\frac{(2p)^{\alpha+\delta}3^\delta\|A\|_{\alpha,\delta}(\Delta s)^\delta}{(2p-1)^{\alpha+\delta}\delta 2^\delta(s-a)^{\alpha+\delta}}\tag{3.1.26}$$

elde edilir.

$t\in\left(s+\Delta s,s+\frac{3\Delta s}{2}\right)$ için $t-s-\Delta s>0$ olduğundan,

$$\begin{aligned}\left\|\frac{A(t)-A(s+\Delta s)}{t-s-\Delta s}\right\| &= \left\|\frac{A(s+\Delta s+t-s-\Delta s)-A(s+\Delta s)}{t-s-\Delta s}\right\|\\ &\leq \frac{\|A\|_{\alpha,\delta}(t-s-\Delta s)^{\delta-1}}{(s+\Delta s-a)^{\alpha+\delta}}\\ &\leq \frac{\|A\|_{\alpha,\delta}(t-s-\Delta s)^{\delta-1}}{(s-a)^{\alpha+\delta}}\end{aligned}\tag{3.1.27}$$

eşitsizliği geçerlidir.

$$\int_{s+\Delta s}^{s+\frac{3\Delta s}{2}}(t-s-\Delta s)^{\delta-1}dt=\int_0^{\frac{\Delta s}{2}}u^{\delta-1}du=\frac{(\Delta s)^\delta}{\delta 2^\delta}$$

eşitliği ve (3.1.27)'den;

$$\left\|\int_{s+\Delta s}^{s+\frac{3\Delta s}{2}}\frac{A(t)-A(s+\Delta s)}{t-s-\Delta s}dt\right\|\leq\frac{\|A\|_{\alpha,\delta}(\Delta s)^\delta}{\delta 2^\delta(s-a)^{\alpha+\delta}}\tag{3.1.28}$$

elde edilir. Şu hâlde; (3.1.26) ve (3.1.28)'den;

$$\left\|\int_{s-\frac{\Delta s}{2}}^{s+\frac{3\Delta s}{2}}\frac{A(t)-A(s+\Delta s)}{t-s-\Delta s}dt\right\|\leq\left(\frac{(2p)^{\alpha+\delta}3^\delta}{(2p-1)^{\alpha+\delta}\delta 2^\delta}+\frac{1}{\delta 2^\delta}\right)\frac{\|A\|_{\alpha,\delta}(\Delta s)^\delta}{(s-a)^{\alpha+\delta}}\tag{3.1.29}$$

sonucuna ulaşılır.

$$\int_{s-\frac{\Delta s}{2}}^{s+\frac{3\Delta s}{2}}\frac{A(t)-A(s)}{t-s}dt=\int_{s-\frac{\Delta s}{2}}^{s}\frac{A(t)-A(s)}{t-s}dt+\int_s^{s+\frac{3\Delta s}{2}}\frac{A(t)-A(s)}{t-s}dt$$

olup, $t \in \left(s - \frac{\Delta s}{2}, s\right)$ iken; $t - s < 0$ ve $t - a > \frac{(2p-1)(s-a)}{2p}$ olacağından, $\frac{1}{t-a} < \frac{2p}{(2p-1)(s-a)}$ olur. Böylece,

$$\begin{aligned}
\left\|\frac{A(t)-A(s)}{t-s}\right\| &= \frac{\|A(s)-A(t)\|}{s-t} \\
&= \frac{\|A(t+s-t)-A(t)\|}{s-t} \leq \frac{\|A\|_{\alpha,\delta}(s-t)^{\delta-1}}{(t-a)^{\alpha+\delta}} \\
&\leq \frac{(2p)^{\alpha+\delta}\|A\|_{\alpha,\delta}(s-t)^{\delta-1}}{(2p-1)^{\alpha+\delta}(s-a)^{\alpha+\delta}} \qquad (3.1.30)
\end{aligned}$$

olur.

$t \in \left(s, s + \frac{3\Delta s}{2}\right)$ iken; $t - s > 0$ olduğundan,

$$\begin{aligned}
\left\|\frac{A(t)-A(s)}{t-s}\right\| &= \frac{\|A(s+t-s)-A(s)\|}{t-s} \\
&\leq \frac{\|A\|_{\alpha,\delta}(t-s)^{\delta-1}}{(s-a)^{\alpha+\delta}} \qquad (3.1.31)
\end{aligned}$$

bulunur.

$$\int_{s-\frac{\Delta s}{2}}^{s}(s-t)^{\delta-1}dt = \int_0^{\frac{\Delta s}{2}} u^{\delta-1}du = \frac{(\Delta s)^\delta}{\delta 2^\delta}$$

ve

$$\int_{s}^{s+\frac{3\Delta s}{2}}(t-s)^{\delta-1}dt = \int_0^{\frac{3\Delta s}{2}} u^{\delta-1}du = \frac{3^\delta(\Delta s)^\delta}{\delta 2^\delta}$$

dikkate alınarak; (3.1.30) ve (3.1.31)'den; sırasıyla,

$$\left\|\int_{s-\frac{\Delta s}{2}}^{s}\frac{A(t)-A(s)}{t-s}dt\right\| \leq \frac{(2p)^{\alpha+\delta}\|A\|_{\alpha,\delta}(\Delta s)^\delta}{(2p-1)^{\alpha+\delta}\delta 2^\delta(s-a)^{\alpha+\delta}} \qquad (3.1.32)$$

ve

$$\left\|\int_{s}^{s+\frac{3\Delta s}{2}}\frac{A(t)-A(s)}{t-s}dt\right\| \leq \frac{3^\delta\|A\|_{\alpha,\delta}(\Delta s)^\delta}{\delta 2^\delta(s-a)^{\alpha+\delta}} \qquad (3.1.33)$$

eşitsizlikleri elde edilir. Şu hâlde; (3.1.32) ve (3.1.33)'ten;

$$\left\|\int_{s-\frac{\Delta s}{2}}^{s+\frac{3\Delta s}{2}}\frac{A(t)-A(s)}{t-s}dt\right\| \leq \left(\frac{(2p)^{\alpha+\delta}}{(2p-1)^{\alpha+\delta}\delta 2^\delta} + \frac{3^\delta}{\delta 2^\delta}\right)\frac{\|A\|_{\alpha,\delta}(\Delta s)^\delta}{(s-a)^{\alpha+\delta}} \qquad (3.1.34)$$

bulunur.

$t \in \left(s + \frac{3\Delta s}{2}, s + \Delta s + \frac{s-a}{p}\right)$ için $t - s > t - s - \Delta s > 0$ ve $s + \Delta s - a > s - a > 0$ olup, $\frac{1}{t-s} < \frac{1}{t-s-\Delta s}$ ve $\frac{1}{s+\Delta s-a} < \frac{1}{s-a}$ olacağından;

$$\begin{aligned}
\left\|\frac{A(t) - A(s+\Delta s)}{(t-s-\Delta s)(t-s)}\right\| &= \left\|\frac{A(s+\Delta s + t - s - \Delta s) - A(s+\Delta s)}{(t-s-\Delta s)(t-s)}\right\| \\
&\leq \frac{\|A\|_{\alpha,\delta}(t-s-\Delta s)^{\delta-2}}{(s+\Delta s-a)^{\alpha+\delta}} \\
&\leq \frac{\|A\|_{\alpha,\delta}(t-s-\Delta s)^{\delta-2}}{(s-a)^{\alpha+\delta}} \qquad (3.1.35)
\end{aligned}$$

eşitsizliği ve

$$\begin{aligned}
\int_{s+\frac{3\Delta s}{2}}^{s+\Delta s+\frac{s-a}{p}} (t-s-\Delta s)^{\delta-2}dt &= \int_{\frac{\Delta s}{2}}^{\frac{s-a}{p}} u^{\delta-2}du \\
&= \frac{(\Delta s)^{\delta-1}}{(1-\delta)2^{\delta-1}} - \frac{(s-a)^{\delta-1}}{(1-\delta)p^{\delta-1}} \\
&\leq \frac{(\Delta s)^{\delta-1}}{(1-\delta)2^{\delta-1}}
\end{aligned}$$

eşitsizliği ile (3.1.35)'ten de;

$$\left\|\Delta s \int_{s+\frac{3\Delta s}{2}}^{s+\Delta s+\frac{s-a}{p}} \frac{A(t) - A(s+\Delta s)}{(t-s-\Delta s)(t-s)}dt\right\| \leq \frac{\|A\|_{\alpha,\delta}(\Delta s)^{\delta}}{(1-\delta)2^{\delta-1}(s-a)^{\alpha+\delta}} \qquad (3.1.36)$$

eşitsizliği elde edilir.

Ayrıca,

$$\begin{aligned}
&- \int_{s-\frac{s-a}{p}}^{s-\frac{\Delta s}{2}} \frac{A(s+\Delta s) - A(s)}{t-s-\Delta s}dt - \int_{s+\frac{3\Delta s}{2}}^{s+\Delta s+\frac{s-a}{p}} \frac{A(s+\Delta s) - A(s)}{t-s}dt = \\
&= (A(s) - A(s+\Delta s))\left(\int_{-\frac{s-a}{p}-\Delta s}^{-\frac{3\Delta s}{2}} \frac{du}{u} - \int_{\frac{3\Delta s}{2}}^{\Delta s+\frac{s-a}{p}} \frac{du}{u}\right) \\
&= (A(s) - A(s+\Delta s))\left(\int_{\frac{3\Delta s}{2}}^{\Delta s+\frac{s-a}{p}} \frac{du}{u} - \int_{\frac{3\Delta s}{2}}^{\Delta s+\frac{s-a}{p}} \frac{du}{u}\right) = 0 \qquad (3.1.37)
\end{aligned}$$

olur.

Böylece,

$$\begin{aligned} M_2(\alpha,\delta,p) &= 2p+\frac{p^{\alpha+\delta}}{(p-1)^{\alpha+\delta}(1-\delta)2^{\delta-1}}+\frac{(2p)^{\alpha+\delta}3^{\delta}}{(2p-1)^{\alpha+\delta}\delta 2^{\delta}}+ \\ &\quad +\frac{1}{\delta 2^{\delta}}+\frac{(2p)^{\alpha+\delta}}{(2p-1)^{\alpha+\delta}\delta 2^{\delta}}+\frac{3^{\delta}}{\delta 2^{\delta}}+\frac{1}{(1-\delta)2^{\delta-1}} \end{aligned}$$

alınarak; (3.1.21), (3.1.22), (3.1.24), (3.1.29), (3.1.34), (3.1.36) ve (3.1.37)'den;

$$\left\| \int_{s-\frac{s-a}{p}}^{s+\Delta s+\frac{s-a}{p}} \left[\frac{A(t)}{t-s-\Delta s} - \frac{A(t)}{t-s} \right] dt \right\| \leq \frac{M_2(\alpha,\delta,p)\left\|A\right\|_{\alpha,\delta}(\Delta s)^{\delta}}{(s-a)^{\alpha+\delta}} \tag{3.1.38}$$

eşitsizliğine ulaşılır. Şu hâlde;

$$M_3(\alpha,p)=\frac{p^{1+\alpha}\left((1+\alpha)(p-1)^{1-\alpha}+1-\alpha\right)}{(1-\alpha)(1+\alpha)}$$

olmak üzere; (3.1.18), (3.1.20) ve (3.1.38)'den;

$$\left\|\Gamma_p(A)(s+\Delta s)-\Gamma_p(A)(s)\right\| \leq \frac{\left(M_2(\alpha,\delta,p)+M_3(\alpha,p)\right)\left\|A\right\|_{\alpha,\delta}(\Delta s)^{\delta}}{(s-a)^{\alpha+\delta}} \tag{3.1.39}$$

bulunur.

$$M(\alpha,\delta,p)=maks\{M_1(\alpha,\delta,p),M_2(\alpha,\delta,p)+M_3(\alpha,p)\} \tag{3.1.40}$$

olarak alınırsa, (3.1.14) ve (3.1.39)'dan; sırasıyla,

$$\left\|\Gamma_p(A)(s)\right\| \leq \frac{M(\alpha,\delta,p)\left\|A\right\|_{\alpha,\delta}}{(s-a)^{\alpha}}$$

ve

$$\left\|\Gamma_p(A)(s+\Delta s)-\Gamma_p(A)(s)\right\| \leq \frac{M(\alpha,\delta,p)\left\|A\right\|_{\alpha,\delta}(\Delta s)^{\delta}}{(s-a)^{\alpha+\delta}}$$

bulunur ki böylece ispat tamamlanmış olur. □

Bundan sonra aksi belirtilmedikçe, $M(\alpha,\delta,p)$ ile (3.1.40)'taki sabit kastedilecektir.

TEOREM 3.1.1. *$A\in H_{\alpha,\delta}((a,b),X)$ olsun. Bu taktirde;*

$$\Gamma_p(A)(s)=\int_a^b \frac{A(t)}{t-s}dt, \quad s\in I_p \tag{3.1.41}$$

şeklinde tanımlanan Γ_p, $B\left(H_{\alpha,\delta}((a,b),X), H_{\alpha,\delta}(I_p,X)\right)$ uzayına ait olan ve normu, $\|\Gamma_p\|\leq 2pM(\alpha,\delta,p)$ eşitsizliğini sağlayan bir singüler integral operatördür.

İSPAT. $A \in H_{\alpha,\delta}((a,b),X)$, $s, s+\Delta s \in I_p$ ve $0 \leq \Delta s < \frac{s-a}{p}$ olduğunda; Lemma 3.1.1'den;

$$\|\Gamma_p(A)(s)\| \leq \frac{M(\alpha,\delta,p)\,\|A\|_{\alpha,\delta}}{(s-a)^\alpha} \tag{3.1.42}$$

ve

$$\|\Gamma_p(A)(s+\Delta s) - \Gamma_p(A)(s)\| \leq \frac{M(\alpha,\delta,p)\,\|A\|_{\alpha,\delta}\,(\Delta s)^\delta}{(s-a)^{\alpha+\delta}} \tag{3.1.43}$$

sağlanır.

Ayrıca, $s, s+\Delta s \in I_p$ ve $\Delta s \geq \frac{s-a}{p} > 0$ ise sırasıyla, (3.1.42) ve

$$\frac{1}{s+\Delta s - a} \leq \frac{1}{s-a}, \; \frac{1}{(\Delta s)^\delta} \leq \frac{p}{(s-a)^\delta}$$

eşitsizlikleri kullanılırsa,

$$\Delta\Gamma_p(A) = \Gamma_p(A)(s+\Delta s) - \Gamma_p(A)(s)$$

olmak üzere;

$$\begin{aligned}
\|\Delta\Gamma_p(A)\| &\leq \|\Gamma_p(A)(s+\Delta s)\| + \|\Gamma_p(A)(s)\| \\
&\leq \frac{M(\alpha,\delta,p)\,\|A\|_{\alpha,\delta}}{(s+\Delta s-a)^\alpha} + \frac{M(\alpha,\delta,p)\,\|A\|_{\alpha,\delta}}{(s-a)^\alpha} \\
&\leq \frac{M(\alpha,\delta,p)\,\|A\|_{\alpha,\delta}}{(s-a)^\alpha} + \frac{M(\alpha,\delta,p)\,\|A\|_{\alpha,\delta}}{(s-a)^\alpha} \\
&= \frac{2M(\alpha,\delta,p)\,\|A\|_{\alpha,\delta}\,(\Delta s)^\delta}{(s-a)^\alpha\,(\Delta s)^\delta} \\
&\leq \frac{2pM(\alpha,\delta,p)\,\|A\|_{\alpha,\delta}\,(\Delta s)^\delta}{(s-a)^{\alpha+\delta}}
\end{aligned} \tag{3.1.44}$$

bulunur. Böylece, $\Delta s \geq 0$ ve $\forall s, s+\Delta s \in I_p$ için; (3.1.43) ve (3.1.44)'ten,

$$\|\Gamma_p(A)(s+\Delta s) - \Gamma_p(A)(s)\| \leq \frac{2pM(\alpha,\delta,p)\,\|A\|_{\alpha,\delta}\,(\Delta s)^\delta}{(s-a)^{\alpha+\delta}} \tag{3.1.45}$$

ve (3.1.42)'den,

$$\|\Gamma_p(A)(s)\| \leq \frac{2pM(\alpha,\delta,p)\,\|A\|_{\alpha,\delta}}{(s-a)^\alpha} \tag{3.1.46}$$

elde edilir. Şu hâlde; (3.1.45) ve (3.1.46)'dan, $\Gamma_p(A) \in H_{\alpha,\delta}(I_p, X)$ ve

$$\|\Gamma_p(A)\|_{\alpha,\delta} \leq 2pM(\alpha,\delta,p)\,\|A\|_{\alpha,\delta}$$

olduğundan,

$$\|\Gamma_p\| = \sup_{\|A\|_{\alpha,\delta}=1} \|\Gamma_p(A)\|_{\alpha,\delta} \leq 2pM(\alpha,\delta,p)$$

sonucuna ulaşılır. Diğer taraftan; Γ_p lineerdir ve böylece
$\Gamma_p \in B\left(H_{\alpha,\delta}((a,b),X), H_{\alpha,\delta}(I_p,X)\right)$ olacağından; ispat tamamdır. □

Lemma 3.1.2. *$A \in H_{\alpha,\delta,\gamma}((a,b)\times(a,b),X)$, $s \in I_p$, $0 \leq \Delta s < \frac{s-a}{p}$ ve*

$$\varphi_p(A)(s) = \int_a^b \frac{A(s,t)}{t-s}dt \tag{3.1.47}$$

olsun. Bu taktirde;

$$\|\varphi_p(A)(s)\| \leq \frac{M_1(\alpha,\delta,\gamma,p)\,\|A\|_{\alpha,\delta,\gamma}}{(s-a)^\alpha} \tag{3.1.48}$$

ve

$$\|\varphi_p(A)(s+\Delta s) - \varphi_p(A)(s)\| \leq \frac{M_1(\alpha,\delta,\gamma,p)\,\|A\|_{\alpha,\delta,\gamma}\,(\Delta s)^\gamma}{(s-a)^{\alpha+\gamma}} \tag{3.1.49}$$

eşitsizliklerini sağlayacak şekilde sadece α, δ, γ ve p'ye bağlı olan (A'ya bağlı olmayan) bir $M_1(\alpha,\delta,\gamma,p) \geq 0$ sabiti vardır.

İspat. Keyfi fakat sabit herbir $s \in (a,b)$ için

$$B_s(t) = A(s,t),\ t \in (a,b)$$

şeklinde tanımlanan $B_s(\cdot)$ fonksiyonu, Teorem 2.1.2'den sürekli ve $t \neq s$ iken; $h_s(t) = \frac{1}{t-s}$ olarak tanımlanan reel değerli $h_s(\cdot)$ fonksiyonu sürekli olduğundan;

$$C_s(t) = h_s(t)A(s,t) = h_s(t)B_s(t)$$

eşitliğiyle tanımlanan $C_s(\cdot)$ fonksiyonu sürekli ve şu hâlde kuvvetli ölçülebilirdir.

Keyfi fakat sabit herbir $s \in (a,b)$ için

$$B_s(t) = A(s,t),\ \ t \in (a,b)$$

olarak tanımlanan $B_s(\cdot)$ fonksiyonu, her t, $t+\Delta t \in (a,b), (\Delta t \geq 0)$ için;

$$\|B_s(t)\| = \|A(s,t)\| \leq \frac{\|A\|_{\alpha,\delta,\gamma}}{(t-a)^\alpha} \tag{3.1.50}$$

ve

$$\|B_s(t+\Delta t) - B_s(t)\| = \|A(s,t+\Delta t) - A(s,t)\| \leq \frac{\|A\|_{\alpha,\delta,\gamma}(\Delta t)^\gamma}{(t-a)^{\alpha+\gamma}} \tag{3.1.51}$$

şartlarını sağladığından; $H_{\alpha,\gamma}((a,b),X)$ uzayındadır ve (3.1.50) ve (3.1.51)'den;

$$\|B_s\|_{\alpha,\gamma} \leq \|A\|_{\alpha,\delta,\gamma}\,,\ s \in (a,b) \tag{3.1.52}$$

eşitsizliği açık olarak sağlanır. Ayrıca, (3.1.1) ve (3.1.49)'dan;

$$\varphi_p(A)(s) = \Gamma_p(B_s)(s)$$

olup, $s \in I_p$ ve $0 \leq \Delta s < \frac{s-a}{p}$ olmak üzere; Lemma 3.1.1'den; sadece α, γ ve p'ye bağlı olan (böylece $s \in (a,b)$ için $B_s(\cdot)$'e bağlı olmayan),

$$\|\Gamma_p(B_s)(s)\| \leq \frac{M(\alpha,\gamma,p)\,\|B_s\|_{\alpha,\gamma}}{(s-a)^\alpha} \tag{3.1.53}$$

ve

$$\|\Gamma_p(B_s)(s+\Delta s) - \Gamma_p(B_s)(s)\| \leq \frac{M(\alpha,\gamma,p)\,\|B_s\|_{\alpha,\gamma}(\Delta s)^\gamma}{(s-a)^{\alpha+\gamma}} \tag{3.1.54}$$

eşitsizliklerini sağlayan bir $M(\alpha,\gamma,p) \geq 0$ sabiti mevcuttur. Böylece, (3.1.52)'nin de kullanılmasıyla, (3.1.53) ve (3.1.54)'ten;

$$\|\varphi_p(A)(s)\| = \|\Gamma_p(B_s)(s)\| \leq \frac{M(\alpha,\gamma,p)\,\|A\|_{\alpha,\delta,\gamma}}{(s-a)^\alpha} \tag{3.1.55}$$

ve

$$\|\Gamma_p(B_s)(s+\Delta s) - \Gamma_p(B_s)(s)\| \leq \frac{M(\alpha,\gamma,p)\,\|A\|_{\alpha,\delta,\gamma}(\Delta s)^\gamma}{(s-a)^{\alpha+\gamma}} \tag{3.1.56}$$

bulunur. Diğer taraftan;

$$\Delta\varphi_p(A) = \varphi_p(A)(s+\Delta s) - \varphi_p(A)(s)$$

ve

$$\Delta\Gamma_p(B_{s+\Delta s}) = \Gamma_p(B_{s+\Delta s})(s+\Delta s) - \Gamma_p(B_{s+\Delta s})(s)$$

alınırsa,

$$
\begin{aligned}
\Delta\varphi_p(A) &= \Gamma_p(B_{s+\Delta s})(s+\Delta s) - \Gamma_p(B_s)(s) \\
&= \Delta\Gamma_p(B_{s+\Delta s}) + \Gamma_p(B_{s+\Delta s})(s) - \Gamma_p(B_s)(s) \qquad (3.1.57)
\end{aligned}
$$

olur. Ayrıca,

$$
\Delta_{1,t}A = A(s+\Delta s, t) - A(s,t)
$$

olmak üzere;

$$
\begin{aligned}
\Gamma_p(B_{s+\Delta s})(s) - \Gamma_p(B_s)(s) &= \int_a^b \frac{\Delta_{1,t}A}{t-s}dt \\
&= \int_a^{s-\frac{s-a}{p}} \frac{\Delta_{1,t}A}{t-s}dt + \int_{s-\frac{s-a}{p}}^{s+\Delta s+\frac{s-a}{p}} \frac{\Delta_{1,t}A}{t-s}dt + \\
&\quad + \int_{s+\Delta s+\frac{s-a}{p}}^{b} \frac{\Delta_{1,t}A}{t-s}dt \qquad (3.1.58)
\end{aligned}
$$

yazılabilir.

$s \in I_p$ ve $0 < \Delta s < \frac{s-a}{p}$ olsun. Bu durumda; $t \in \left(a, s - \frac{s-a}{p}\right)$ için; $s - t > \frac{s-a}{p} > 0$ olduğundan, $\frac{1}{s-t} < \frac{p}{s-a}$ ve

$$
\begin{aligned}
\left\| \frac{\Delta_{1,t}A}{t-s} \right\| &\leq \frac{\|A\|_{\alpha,\delta,\gamma}(\Delta s)^{\delta}}{(t-a)^{\alpha+\gamma}(s-t)} \leq \frac{p\|A\|_{\alpha,\delta,\gamma}(\Delta s)^{\gamma}(\Delta s)^{\delta-\gamma}}{(s-a)(t-a)^{\alpha+\gamma}} \\
&\leq \frac{p(b-a)^{\delta-\gamma}\|A\|_{\alpha,\delta,\gamma}(\Delta s)^{\gamma}}{(s-a)(t-a)^{\alpha+\gamma}} \qquad (3.1.59)
\end{aligned}
$$

bulunur.

$$
\int_a^{s-\frac{s-a}{p}} \frac{dt}{(t-a)^{\alpha+\gamma}} = \int_0^{\frac{(p-1)(s-a)}{p}} u^{-\alpha-\gamma}du = \frac{(p-1)^{1-\alpha-\gamma}p^{\alpha+\gamma-1}}{(1-\alpha-\gamma)(s-a)^{\alpha+\gamma-1}}
$$

olduğundan, (3.1.59)'dan;

$$
\left\| \int_a^{s-\frac{s-a}{p}} \frac{\Delta_{1,t}A}{t-s}dt \right\| \leq \frac{(p-1)^{1-\alpha-\gamma}p^{\alpha+\gamma}(b-a)^{\delta-\gamma}\|A\|_{\alpha,\delta,\gamma}(\Delta s)^{\gamma}}{(1-\alpha-\gamma)(s-a)^{\alpha+\gamma}} \qquad (3.1.60)
$$

sonucuna ulaşılır.

$t \in \left(s+\Delta s+\frac{s-a}{p}, b\right)$ için $t-a > t-s > t-s-\Delta s > 0$ ve böylece, $\frac{1}{t-a} < \frac{1}{t-s} < \frac{1}{t-s-\Delta s}$ olacağından;

$$\begin{aligned}
\left\|\frac{\Delta_{1,t}A}{t-s}\right\| &\leq \frac{\|A\|_{\alpha,\delta,\gamma}(\Delta s)^{\delta}}{(t-a)^{\alpha+\gamma}(t-s)} \leq \frac{\|A\|_{\alpha,\delta,\gamma}(\Delta s)^{\gamma}(\Delta s)^{\delta-\gamma}}{(t-s-\Delta s)^{\alpha+\gamma+1}} \\
&\leq \frac{(b-a)^{\delta-\gamma}\|A\|_{\alpha,\delta,\gamma}(\Delta s)^{\gamma}}{(t-s-\Delta s)^{\alpha+\gamma+1}} \qquad (3.1.61)
\end{aligned}$$

eşitsizliği elde edilir.

$$\begin{aligned}
\int_{s+\Delta s+\frac{s-a}{p}}^{b} \frac{dt}{(t-s-\Delta s)^{\alpha+\gamma+1}} &= \int_{\frac{s-a}{p}}^{b-s-\Delta s} u^{-\alpha-\gamma-1}du \\
&= \frac{1}{\alpha+\gamma}\left(\frac{p^{\alpha+\gamma}}{(s-a)^{\alpha+\gamma}} - \frac{1}{(b-s-\Delta s)^{\alpha+\gamma}}\right) \\
&\leq \frac{p^{\alpha+\gamma}}{(\alpha+\gamma)(s-a)^{\alpha+\gamma}}
\end{aligned}$$

olduğundan, (3.1.61)'den;

$$\left\|\int_{s+\Delta s+\frac{s-a}{p}}^{b} \frac{\Delta_{1,t}A}{t-s}dt\right\| \leq \frac{p^{\alpha+\gamma}(b-a)^{\delta-\gamma}\|A\|_{\alpha,\delta,\gamma}(\Delta s)^{\gamma}}{(\alpha+\gamma)(s-a)^{\alpha+\gamma}} \qquad (3.1.62)$$

bulunur.

$$\begin{aligned}
\int_{s-\frac{s-a}{p}}^{s+\Delta s+\frac{s-a}{p}} \frac{\Delta_{1,t}A}{t-s}dt &= \int_{s-\frac{s-a}{p}}^{s-\frac{\Delta s}{2}} \frac{\Delta_{1,t}A}{t-s}dt + \int_{s-\frac{\Delta s}{2}}^{s+\frac{3\Delta s}{2}} \frac{\Delta_{1,t}A}{t-s}dt + \\
&+ \int_{s+\frac{3\Delta s}{2}}^{s+\Delta s+\frac{s-a}{p}} \frac{\Delta_{1,t}A}{t-s}dt
\end{aligned}$$

olup, $t \in \left(s-\frac{s-a}{p}, s-\frac{\Delta s}{2}\right)$ için $t-a > \frac{(p-1)(s-a)}{p}$ ve şu hâlde; $\frac{1}{t-a} < \frac{p}{(p-1)(s-a)}$ olacağından,

$$\left\|\frac{\Delta_{1,t}A}{t-s}\right\| \leq \frac{\|A\|_{\alpha,\delta,\gamma}(\Delta s)^{\delta}}{(t-a)^{\alpha+\gamma}|t-s|} \leq \frac{p^{\alpha+\gamma}\|A\|_{\alpha,\delta,\gamma}(\Delta s)^{\gamma}(\Delta s)^{\delta-\gamma}}{(p-1)^{\alpha+\gamma}(s-a)^{\alpha+\gamma}(s-t)} \qquad (3.1.63)$$

ve

$$\int_{s-\frac{s-a}{p}}^{s-\frac{\Delta s}{2}} \frac{dt}{s-t} = \int_{\frac{\Delta s}{2}}^{\frac{s-a}{p}} \frac{du}{u} = \ln\frac{2(s-a)}{p\Delta s} \leq \ln\frac{2(b-a)}{p\Delta s}$$

olur. Şimdi,

$$f(\Delta s) = (\Delta s)^{\delta-\gamma}\ln\frac{2(b-a)}{p\Delta s},\ \Delta s \in (0, b-a]$$

fonksiyonunu gözönüne alalım.

$$\lim_{\Delta s\to 0^+}(\Delta s)^{\delta-\gamma}\ln\frac{2(b-a)}{p\Delta s}=\lim_{\Delta s\to 0^+}\frac{\ln\frac{2(b-a)}{p\Delta s}}{\left(\frac{1}{\Delta s}\right)^{\delta-\gamma}}=\lim_{\Delta s\to 0^+}\frac{(\Delta s)^{\delta-\gamma}}{\delta-\gamma}=0$$

ve böylece, her $\varepsilon>0$ ve $0<\Delta s<\delta(\varepsilon)$ eşitsizliğini sağlayan her Δs sayısı için $(\Delta s)^{\delta-\gamma}\ln\frac{2(b-a)}{p\Delta s}<\varepsilon$ olacak şekilde enaz bir $0<\delta(\varepsilon)<b-a$ sayısı mevcuttur. $\varepsilon=1$ alınırsa; $0<\Delta s<\delta(1)$ olduğunda, $(\Delta s)^{\delta-\gamma}\ln\frac{2(b-a)}{p\Delta s}<1$ olacak şekilde bir $0<\delta(1)<b-a$ sayısının mevcut olacağı açıktır. Diğer taraftan; $[\delta(1),b-a]$ kapalı aralığında f fonksiyonu sürekli olduğundan bir maksimum değere sahiptir. Böylece,

$$m=maks_{\Delta s\in[\delta(1),b-a]}f(\Delta s)\ \text{ ve }\ m_0=maks\{1,m\}$$

olmak üzere, $\Delta s\in(0,b-a]$ iken; $f(\Delta s)<m_0$ yazılabilir. Şu hâlde; $s\in I_p$ ve $0<\Delta s<\frac{s-a}{p}$ için;

$$(\Delta s)^{\delta-\gamma}\ln\frac{2(b-a)}{p\Delta s}<m_0 \tag{3.1.64}$$

elde edilir. (3.1.63)'ten,

$$\begin{aligned}\left\|\int_{s-\frac{s-a}{p}}^{s-\frac{\Delta s}{2}}\frac{\Delta_{1,t}A}{t-s}dt\right\| &\le \frac{p^{\alpha+\gamma}\|A\|_{\alpha,\delta,\gamma}(\Delta s)^{\gamma}(\Delta s)^{\delta-\gamma}\ln\frac{2(b-a)}{p\Delta s}}{(p-1)^{\alpha+\gamma}(s-a)^{\alpha+\gamma}}\\ &\le \frac{p^{\alpha+\gamma}m_0\|A\|_{\alpha,\delta,\gamma}(\Delta s)^{\gamma}}{(p-1)^{\alpha+\gamma}(s-a)^{\alpha+\gamma}}\end{aligned}\tag{3.1.65}$$

sonucuna ulaşılır.

Yine, $t\in\left(s+\frac{3\Delta s}{2},s+\Delta s+\frac{s-a}{p}\right)$ için $t-a>s-a+\frac{3\Delta s}{2}>s-a>0$ olduğundan, $\frac{1}{t-a}<\frac{1}{s-a}$ olur. Ayrıca,

$$\left\|\frac{\Delta_{1,t}A}{t-s}\right\|\le\frac{\|A\|_{\alpha,\delta,\gamma}(\Delta s)^{\delta}}{(t-a)^{\alpha+\gamma}|t-s|}\le\frac{\|A\|_{\alpha,\delta,\gamma}(\Delta s)^{\gamma}(\Delta s)^{\delta-\gamma}}{(s-a)^{\alpha+\gamma}(t-s)} \tag{3.1.66}$$

ve

$$\begin{aligned}\int_{s+\frac{3\Delta s}{2}}^{s+\Delta s+\frac{s-a}{p}}\frac{dt}{t-s} &= \int_{\frac{3\Delta s}{2}}^{\Delta s+\frac{s-a}{p}}\frac{du}{u}=\ln\frac{\Delta s+\frac{s-a}{p}}{\frac{3\Delta s}{2}}\\ &\le \ln\frac{4(s-a)}{3p\Delta s}\le\ln\frac{4(b-a)}{3p\Delta s}\end{aligned}$$

bulunur. Böylece, (3.1.66) ve (3.1.64) eşitsizlikleri de kullanılarak,

$$\left\| \int_{s+\frac{3\Delta s}{2}}^{s+\Delta s+\frac{s-a}{p}} \frac{\Delta_{1,t}A}{t-s} dt \right\| \leq \frac{\|A\|_{\alpha,\delta,\gamma} (\Delta s)^{\gamma} (\Delta s)^{\delta-\gamma} \ln \frac{4(b-a)}{3p\Delta s}}{(s-a)^{\alpha+\gamma}}$$

$$\leq \frac{\left(m_0 + \ln \frac{2}{3}\right) \|A\|_{\alpha,\delta,\gamma} (\Delta s)^{\gamma}}{(s-a)^{\alpha+\gamma}} \tag{3.1.67}$$

olduğu görülür.

$\int_{s-\frac{\Delta s}{2}}^{s+\frac{\Delta s}{2}} \frac{dt}{t-s} = 0$ olup,

$$\Delta_{(s+\Delta s),2}A = A(s+\Delta s, t) - A(s+\Delta s, s), \quad \Delta_{s,2}A = A(s,s) - A(s,t)$$

alınarak,

$$\int_{s-\frac{\Delta s}{2}}^{s+\frac{3\Delta s}{2}} \frac{\Delta_{1,t}A}{t-s} dt = \int_{s-\frac{\Delta s}{2}}^{s+\frac{\Delta s}{2}} \frac{\Delta_{(s+\Delta s),2}A + \Delta_{s,2}A}{t-s} dt + \int_{s+\frac{\Delta s}{2}}^{s+\frac{3\Delta s}{2}} \frac{\Delta_{1,t}A}{t-s} dt$$

yazılabilir.

$t \in \left(s + \frac{\Delta s}{2}, s + \frac{3\Delta s}{2}\right)$ için $t - s > \frac{\Delta s}{2} > 0$ ve $t - a > s - a > 0$ olduğundan, $\frac{1}{t-s} < \frac{2}{\Delta s}$, $\frac{1}{t-a} < \frac{1}{s-a}$ elde edilir. Buradan,

$$\left\| \frac{\Delta_{1,t}A}{t-s} \right\| \leq \frac{\|A\|_{\alpha,\delta,\gamma} (\Delta s)^{\delta}}{(t-a)^{\alpha+\gamma}(t-s)} \leq \frac{2 \|A\|_{\alpha,\delta,\gamma} (\Delta s)^{\delta-1}}{(s-a)^{\alpha+\gamma}} \tag{3.1.68}$$

ve $\int_{s+\frac{\Delta s}{2}}^{s+\frac{3\Delta s}{2}} dt = \Delta s$ olup, (3.1.68)'den;

$$\left\| \int_{s+\frac{\Delta s}{2}}^{s+\frac{3\Delta s}{2}} \frac{\Delta_{1,t}A}{t-s} dt \right\| \leq \frac{2 (\Delta s)^{\delta-\gamma} \|A\|_{\alpha,\delta,\gamma} (\Delta s)^{\gamma}}{(s-a)^{\alpha+\gamma}}$$

$$\leq \frac{2(b-a)^{\delta-\gamma} \|A\|_{\alpha,\delta,\gamma} (\Delta s)^{\gamma}}{(s-a)^{\alpha+\gamma}} \tag{3.1.69}$$

bulunur.

$$\int_{s-\frac{\Delta s}{2}}^{s+\frac{\Delta s}{2}} \frac{\Delta_{(s+\Delta s),2}A + \Delta_{s,2}A}{t-s} dt = \int_{s-\frac{\Delta s}{2}}^{s} \frac{\Delta_{(s+\Delta s),2}A + \Delta_{s,2}A}{t-s} dt + $$

$$+ \int_{s}^{s+\frac{\Delta s}{2}} \frac{\Delta_{(s+\Delta s),2}A + \Delta_{s,2}A}{t-s} dt$$

olup, $t \in \left(s - \frac{\Delta s}{2}, s\right)$ iken; $t - s < 0$, $t - a > \dfrac{(2p-1)(s-a)}{2p}$ ve $\dfrac{1}{t-a} < \dfrac{2p}{(2p-1)(s-a)}$ olduğundan;

$$\begin{aligned}
\left\|\frac{\Delta_{(s+\Delta s),2}A + \Delta_{s,2}A}{t-s}\right\| &\leq \frac{\left\|\Delta_{(s+\Delta s),2}A\right\|}{|t-s|} + \frac{\left\|\Delta_{s,2}A\right\|}{|t-s|} \\
&= \frac{\left\|\Delta_{(s+\Delta s),2}A\right\|}{s-t} + \frac{\left\|\Delta_{s,2}A\right\|}{s-t},
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\left\|\Delta_{(s+\Delta s),2}A\right\| &= \left\|A(s+\Delta s, t+s-t) - A(s+\Delta s, t)\right\| \\
&\leq \frac{\|A\|_{\alpha,\delta,\gamma}(s-t)^{\gamma}}{(t-a)^{\alpha+\gamma}}
\end{aligned}$$

ve

$$\left\|\Delta_{s,2}A\right\| = \left\|A(s, t+s-t) - A(s,t)\right\| \leq \frac{\|A\|_{\alpha,\delta,\gamma}(s-t)^{\gamma}}{(t-a)^{\alpha+\gamma}}$$

eşitsizliklerinin de dikkate alınmasıyla,

$$\begin{aligned}
\left\|\frac{\Delta_{(s+\Delta s),2}A + \Delta_{s,2}A}{t-s}\right\| &\leq \frac{2\|A\|_{\alpha,\delta,\gamma}(s-t)^{\gamma-1}}{(t-a)^{\alpha+\gamma}} \\
&\leq \frac{2(2p)^{\alpha+\gamma}\|A\|_{\alpha,\delta,\gamma}(s-t)^{\gamma-1}}{(2p-1)^{\alpha+\gamma}(s-a)^{\alpha+\gamma}} \qquad (3.1.70)
\end{aligned}$$

eşitsizliğine ulaşılır.

$t \in \left(s, s + \frac{\Delta s}{2}\right)$ iken; $t - s > 0$ olup,

$$\begin{aligned}
\left\|\frac{\Delta_{(s+\Delta s),2}A + \Delta_{s,2}A}{t-s}\right\| &\leq \frac{\left\|\Delta_{(s+\Delta s),2}A\right\|}{|t-s|} + \frac{\left\|\Delta_{s,2}A\right\|}{|t-s|} \\
&= \frac{\left\|\Delta_{(s+\Delta s),2}A\right\|}{t-s} + \frac{\left\|\Delta_{s,2}A\right\|}{t-s},
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\left\|\Delta_{(s+\Delta s),2}A\right\| &= \left\|A(s+\Delta s, s+t-s) - A(s+\Delta s, s)\right\| \\
&\leq \frac{\|A\|_{\alpha,\delta,\gamma}(t-s)^{\gamma}}{(s-a)^{\alpha+\gamma}}
\end{aligned}$$

ve

$$\left\|\Delta_{s,2}A\right\| = \left\|A(s, s+t-s) - A(s,s)\right\| \leq \frac{\|A\|_{\alpha,\delta,\gamma}(t-s)^{\gamma}}{(s-a)^{\alpha+\gamma}}$$

olduğundan,

$$\left\| \frac{\Delta_{(s+\Delta s),2}A + \Delta_{s,2}A}{t-s} \right\| \leq \frac{2\|A\|_{\alpha,\delta,\gamma}(t-s)^{\gamma-1}}{(s-a)^{\alpha+\gamma}} \tag{3.1.71}$$

olur. Diğer taraftan;

$$\int_{s-\frac{\Delta s}{2}}^{s} (s-t)^{\gamma-1}dt = \int_{s}^{s+\frac{\Delta s}{2}} (t-s)^{\gamma-1}dt = \int_{0}^{\frac{\Delta s}{2}} u^{\gamma-1}du = \frac{(\Delta s)^{\gamma}}{\gamma 2^{\gamma}}$$

eşitliği ile birlikte sırasıyla, (3.1.70) ve (3.1.71)'i kullanarak;

$$\left\| \int_{s-\frac{\Delta s}{2}}^{s} \frac{\Delta_{(s+\Delta s),2}A + \Delta_{s,2}A}{t-s} dt \right\| \leq \frac{2(2p)^{\alpha+\gamma}\|A\|_{\alpha,\delta,\gamma}(\Delta s)^{\gamma}}{(2p-1)^{\alpha+\gamma}\gamma 2^{\gamma}(s-a)^{\alpha+\gamma}} \tag{3.1.72}$$

ve

$$\left\| \int_{s}^{s+\frac{\Delta s}{2}} \frac{\Delta_{(s+\Delta s),2}A + \Delta_{s,2}A}{t-s} dt \right\| \leq \frac{2^{1-\gamma}\|A\|_{\alpha,\delta,\gamma}(\Delta s)^{\gamma}}{\gamma(s-a)^{\alpha+\gamma}} \tag{3.1.73}$$

sonucunu elde ederiz. Böylece, (3.1.72) ve (3.1.73)'ten;

$$N(\gamma,p) = \frac{2(2p)^{\alpha+\gamma}}{(2p-1)^{\alpha+\gamma}\gamma 2^{\gamma}} + \frac{2^{1-\gamma}}{\gamma}$$

olmak üzere;

$$\left\| \int_{s-\frac{\Delta s}{2}}^{s+\frac{\Delta s}{2}} \frac{\Delta_{(s+\Delta s),2}A + \Delta_{s,2}A}{t-s} dt \right\| \leq \frac{N(\gamma,p)\|A\|_{\alpha,\delta,\gamma}(\Delta s)^{\gamma}}{(s-a)^{\alpha+\gamma}} \tag{3.1.74}$$

bulunur.

$$\begin{aligned} M_2(\alpha,\delta,\gamma,p) &= \frac{(p-1)^{1-\alpha-\gamma}p^{\alpha+\gamma}(b-a)^{\delta-\gamma}}{1-\alpha-\gamma} + \frac{p^{\alpha+\gamma}(b-a)^{\delta-\gamma}}{\alpha+\gamma} + \\ &\quad + \frac{p^{\alpha+\gamma}m_0}{(p-1)^{\alpha+\gamma}} + m_0 + \ln\frac{2}{3} + 2(b-a)^{\delta-\gamma} + N(\gamma,p) \end{aligned}$$

alınarak; (3.1.58), (3.1.60), (3.1.62), (3.1.65), (3.1.67), (3.1.69) ve (3.1.74)'ten;

$$\|\Gamma_p(B_{s+\Delta s})(s) - \Gamma_p(B_s)(s)\| \leq \frac{M_2(\alpha,\delta,\gamma,p)\|A\|_{\alpha,\delta,\gamma}(\Delta s)^{\gamma}}{(s-a)^{\alpha+\gamma}} \tag{3.1.75}$$

bulunur. (3.1.57)'de norm alınıp, (3.1.56) ve (3.1.75) kullanılırsa, $s \in I_p, 0 \leq \Delta s < \frac{s-a}{p}$ ve

$$M_3(\alpha,\delta,\gamma,p) = M(\alpha,\gamma,p) + M_2(\alpha,\delta,\gamma,p)$$

için;

$$\begin{aligned}\|\Delta\varphi_p(A)\| &\leq \|\Gamma_p(B_{s+\Delta s})(s)-\Gamma_p(B_s)(s)\|+\|\Delta\Gamma_p(B_{s+\Delta s})\| \\ &\leq \frac{M_3(\alpha,\delta,\gamma,p)\,\|A\|_{\alpha,\delta,\gamma}(\Delta s)^\gamma}{(s-a)^{\alpha+\gamma}} \end{aligned}\tag{3.1.76}$$

ve

$$M_1(\alpha,\delta,\gamma,p)=maks\{M(\alpha,\gamma,p),M_3(\alpha,\delta,\gamma,p)\}=M_3(\alpha,\delta,\gamma,p)\tag{3.1.77}$$

olarak alınırsa, (3.1.55) ve (3.1.76)'dan da,

$$\|\varphi_p(A)(s)\| \leq \frac{M_1(\alpha,\delta,\gamma,p)\,\|A\|_{\alpha,\delta,\gamma}}{(s-a)^\alpha}$$

ve

$$\|\varphi_p(A)(s+\Delta s)-\varphi_p(A)(s)\| \leq \frac{M_1(\alpha,\delta,\gamma,p)\,\|A\|_{\alpha,\delta,\gamma}(\Delta s)^\gamma}{(s-a)^{\alpha+\gamma}}$$

eşitsizliklerine ulaşılır. □

Bundan sonra; $M_1(\alpha,\delta,\gamma,p)$ ile, (3.1.77)'deki sabit anlaşılacaktır.

TEOREM 3.1.2. *$A\in H_{\alpha,\delta,\gamma}((a,b)\times(a,b),X)$ olsun. Bu taktirde;*

$$\varphi_p(A)(s)=\int_a^b \frac{A(s,t)}{t-s}dt,\quad s\in I_p\tag{3.1.78}$$

genelleştirilmiş integraliyle tanımlanan φ_p, $B\left(H_{\alpha,\delta,\gamma}((a,b)\times(a,b),X),H_{\alpha,\gamma}(I_p,X)\right)$ uzayına ait olan ve normu,

$$\|\varphi_p\| \leq 2pM_1(\alpha,\delta,\gamma,p)$$

eşitsizliğini sağlayan bir singüler integral operatördür.

İSPAT. $A\in H_{\alpha,\delta,\gamma}((a,b)\times(a,b),X)$ $s,s+\Delta s\in I_p$ ve $0\leq\Delta s<\frac{s-a}{p}$ iken; Lemma 3.1.2'den;

$$\|\varphi_p(A)(s)\| \leq \frac{M_1(\alpha,\delta,\gamma,p)\,\|A\|_{\alpha,\delta,\gamma}}{(s-a)^\alpha}\tag{3.1.79}$$

ve

$$\|\Delta\varphi_p(A)\| \leq \frac{M_1(\alpha,\delta,\gamma,p)\,\|A\|_{\alpha,\delta,\gamma}(\Delta s)^\gamma}{(s-a)^{\alpha+\gamma}}\tag{3.1.80}$$

eşitsizlikleri geçerlidir. $s, s+\Delta s \in I_p$ ve $\Delta s \geq \frac{s-a}{p} > 0$ iken; sırasıyla, (3.1.79) ve

$$\frac{1}{s+\Delta s - a} \leq \frac{1}{s-a}, \quad \frac{1}{(\Delta s)^{\gamma}} \leq \frac{p}{(s-a)^{\gamma}}$$

eşitsizlikleri dikkate alınırsa,

$$\begin{aligned} \|\Delta\varphi_p(A)\| &\leq \|\varphi_p(A)(s+\Delta s)\| + \|\varphi_p(A)(s)\| \\ &\leq \frac{M_1(\alpha,\delta,\gamma,p)\,\|A\|_{\alpha,\delta,\gamma}}{(s+\Delta s - a)^{\alpha}} + \frac{M_1(\alpha,\delta,\gamma,p)\,\|A\|_{\alpha,\delta,\gamma}}{(s-a)^{\alpha}} \\ &\leq \frac{2M_1(\alpha,\delta,\gamma,p)\,\|A\|_{\alpha,\delta,\gamma}(\Delta s)^{\gamma}}{(s-a)^{\alpha}(\Delta s)^{\gamma}} \\ &\leq \frac{2pM_1(\alpha,\delta,\gamma,p)\,\|A\|_{\alpha,\delta,\gamma}(\Delta s)^{\gamma}}{(s-a)^{\alpha+\gamma}} \end{aligned} \tag{3.1.81}$$

elde edilir. Böylece, $\Delta s \geq 0$ ve her $s, s+\Delta s \in I_p$ için; (3.1.80) ve (3.1.81)'den,

$$\|\Delta\varphi_p(A)\| \leq \frac{2pM_1(\alpha,\delta,\gamma,p)\,\|A\|_{\alpha,\delta,\gamma}(\Delta s)^{\gamma}}{(s-a)^{\alpha+\gamma}} \tag{3.1.82}$$

ve (3.1.79)'dan,

$$\|\varphi_p(A)(s)\| \leq \frac{2pM_1(\alpha,\delta,\gamma,p)\,\|A\|_{\alpha,\delta,\gamma}}{(s-a)^{\alpha}} \tag{3.1.83}$$

bulunur. Şu hâlde; (3.1.82) ve (3.1.83)'ten, $\varphi_p(A) \in H_{\alpha,\gamma}(I_p, X)$ ve

$$\|\varphi_p(A)\|_{\alpha,\gamma} \leq 2pM_1(\alpha,\delta,\gamma,p)\,\|A\|_{\alpha,\delta,\gamma} \tag{3.1.84}$$

olduğundan; φ_p sınırlıdır ve

$$\|\varphi_p\| = \sup_{\|A\|_{\alpha,\delta,\gamma}=1} \|\varphi_p(A)\|_{\alpha,\gamma} \leq 2pM_1(\alpha,\delta,\gamma,p)$$

olur. φ_p lineer olduğundan, $B\left(H_{\alpha,\delta,\gamma}((a,b)\times(a,b),X), H_{\alpha,\gamma}(I_p,X)\right)$ uzayındaki bir operatördür. □

Teorem 3.1.2'den aşağıdaki sonuç elde edilir:

SONUÇ 3.1.1. *X, reel veya kompleks bir Banach cebiri ve $A \in H_{\alpha_1,\delta_1,\gamma_1}((a,b)\times(a,b),X)$ olsun. Bu taktirde;*

$$((T_pA)f)(s) = \int_a^b \frac{A(s,t)f(t)}{t-s}dt, \quad s \in I_p \tag{3.1.85}$$

eşitliğiyle tanımlanan T_p,

(1) $\alpha_1 + \alpha_2 + \gamma_1 < 1$ *ve* $f \in H_{\alpha_2,\gamma_1}((a,b),X)$ *iken;*
$B\left(H_{\alpha_1,\delta_1,\gamma_1}((a,b)\times(a,b),X), B\left(H_{\alpha_2,\gamma_1}((a,b),X), H_{\alpha_1+\alpha_2,\gamma_1}(I_p,X)\right)\right)$ *uzayına ait ve normu,*

$$\|T_p\| \leq 4pM_1(\alpha_1+\alpha_2,\delta_1,\gamma_1,p)$$

olan bir operatördür ve

(2) $f \in C^{0,\gamma_1}((a,b),X)$ *iken;*
$B\left(H_{\alpha_1,\delta_1,\gamma_1}((a,b)\times(a,b),X), B\left(C^{0,\gamma_1}((a,b),X), H_{\alpha_1,\gamma_1}(I_p,X)\right)\right)$ *uzayına ait ve normu,*

$$\|T_p\| \leq 2(1+(b-a)^{\gamma_1})pM_1(\alpha_1,\delta_1,\gamma_1,p)$$

olan bir operatördür.

İSPAT. $\Delta t \geq 0$ olmak üzere, her $s, t, s+\Delta s, t+\Delta t \in (a,b)$ için;

$$C(s,t) = A(s,t)f(t)$$

olsun. Bu taktirde;

(1) $\alpha_1 + \alpha_2 + \gamma_1 < 1$ ve $f \in H_{\alpha_2,\gamma_1}((a,b),X)$ ise;

$$\begin{aligned} \|C(s,t)f(t)\| = \|A(s,t)\|\,\|f(t)\| &\leq \frac{\|A\|_{\alpha_1,\delta_1,\gamma_1}\|f\|_{\alpha_2,\gamma_1}}{(t-a)^{\alpha_1+\alpha_2}} \\ &\leq \frac{2\|A\|_{\alpha_1,\delta_1,\gamma_1}\|f\|_{\alpha_2,\gamma_1}}{(t-a)^{\alpha_1+\alpha_2}} \end{aligned} \tag{3.1.86}$$

eşitsizliği sağlanır ve

$$\begin{aligned} \|\Delta C\| &= \|A(s+\Delta s, t+\Delta t)f(t+\Delta t) - A(s,t)f(t)\| \\ &= \|(\Delta A)f(t+\Delta t) + A(s,t)\Delta f\| \\ &\leq \|\Delta A\|\,\|f(t+\Delta t)\| + \|A(s,t)\|\,\|\Delta f\| \\ &\leq \frac{\|A\|_{\alpha_1,\delta_1,\gamma_1}\|f\|_{\alpha_2,\gamma_1}(|\Delta s|^{\delta_1}+(\Delta t)^{\gamma_1})}{(t-a)^{\alpha_1+\gamma_1}(t+\Delta t-a)^{\alpha_2}} + \\ &\quad + \frac{\|A\|_{\alpha_1,\delta_1,\gamma_1}\|f\|_{\alpha_2,\gamma_1}(\Delta t)^{\gamma_1}}{(t-a)^{\alpha_1}(t-a)^{\alpha_2+\gamma_1}} \\ &\leq \frac{2\|A\|_{\alpha_1,\delta_1,\gamma_1}\|f\|_{\alpha_2,\gamma_1}\left(|\Delta s|^{\delta_1}+(\Delta t)^{\gamma_1}\right)}{(t-a)^{\alpha_1+\alpha_2+\gamma_1}} \end{aligned} \tag{3.1.87}$$

olup, (3.1.86) ve (3.1.87)'den; $C \in H_{\alpha_1+\alpha_2,\delta_1,\gamma_1}\left((a,b)\times(a,b),X\right)$ ve

$$\|C\|_{\alpha_1+\alpha_2,\delta_1,\gamma_1} \leq 2\,\|A\|_{\alpha_1,\delta_1,\gamma_1}\,\|f\|_{\alpha_2,\gamma_1} \tag{3.1.88}$$

olur. Böylece, (3.1.78) ve (3.1.85)'ten;

$$(T_pA)f = \varphi_p(C)$$

eşitliğini dikkate alıp, Teorem 3.1.2'yi kullanırsak, $(T_pA)f \in H_{\alpha_1+\alpha_2,\gamma_1}(I_p,X)$ ve (3.1.84) ile (3.1.88)'den;

$$\begin{aligned}\|(T_pA)f\|_{\alpha_1+\alpha_2,\gamma_1} &\leq 2pM_1(\alpha_1+\alpha_2,\delta_1,\gamma_1,p)\,\|C\|_{\alpha_1+\alpha_2,\delta_1,\gamma_1}\\ &\leq 4pM_1(\alpha_1+\alpha_2,\delta_1,\gamma_1,p)\,\|A\|_{\alpha_1,\delta_1,\gamma_1}\,\|f\|_{\alpha_2,\gamma_1}\end{aligned} \tag{3.1.89}$$

sonucuna ulaşırız. Buradan T_pA,

$$\begin{aligned}\|T_pA\| &= \sup_{\|f\|_{\alpha_2,\gamma_1}=1}\|(T_pA)f\|_{\alpha_1+\alpha_2,\gamma_1}\\ &\leq 4pM_1(\alpha_1+\alpha_2,\delta_1,\gamma_1,p)\,\|A\|_{\alpha_1,\delta_1,\gamma_1}\end{aligned} \tag{3.1.90}$$

olan sınırlı bir operatördür. Ayrıca, T_pA lineer olduğundan;
$T_pA \in B\left(H_{\alpha_2,\gamma_1}\left((a,b),X\right), H_{\alpha_1+\alpha_2,\gamma_1}(I_p,X)\right)$ olur. (3.1.90)'dan;

$$\|T_p\| = \sup_{\|A\|_{\alpha_1,\delta_1,\gamma_1}=1}\|T_pA\| \leq 4pM_1(\alpha_1+\alpha_2,\delta_1,\gamma_1,p)$$

ve T_p lineer olduğundan;
$T_p \in B\left(H_{\alpha_1,\delta_1,\gamma_1}\left((a,b)\times(a,b),X\right), B\left(H_{\alpha_2,\gamma_1}\left((a,b),X\right), H_{\alpha_1+\alpha_2,\gamma_1}(I_p,X)\right)\right)$ olduğu görülür.

(2) $f \in C^{0,\gamma_1}\left((a,b),X\right)$ iken; (3.1.86) ve (3.1.87) yeniden düzenlenirse,

$$\|C(s,t)\| \leq \frac{\|A\|_{\alpha_1,\delta_1,\gamma_1}\,\|f\|_{\gamma_1}}{(t-a)^{\alpha_1}} \leq \frac{\left(1+(b-a)^{\gamma_1}\right)\|A\|_{\alpha_1,\delta_1,\gamma_1}\,\|f\|_{\gamma_1}}{(t-a)^{\alpha_1}}$$

ve

$$\|\Delta C\| \leq \frac{\left(1+(b-a)^{\gamma_1}\right)\|A\|_{\alpha_1,\delta_1,\gamma_1}\,\|f\|_{\gamma_1}\left(|\Delta s|^{\delta_1}+(\Delta t)^{\gamma_1}\right)}{(t-a)^{\alpha_1+\gamma_1}}$$

olacağından, $C \in H_{\alpha_1,\delta_1,\gamma_1}\left((a,b)\times(a,b),X\right)$ ve

$$\|C\|_{\alpha_1,\delta_1,\gamma_1} \leq \left(1+(b-a)^{\gamma_1}\right)\|A\|_{\alpha_1,\delta_1,\gamma_1}\,\|f\|_{\gamma_1} \tag{3.1.91}$$

olur. Böylece,

$$(T_pA)f = \varphi_p(C)$$

ve şu hâlde; Teorem 3.1.2 kullanılarak; $(T_pA)f \in H_{\alpha_1,\gamma_1}(I_p, X)$ elde edilir. (3.1.84) ile (3.1.91)'den,

$$\begin{aligned} \|T_p(A)f\|_{\alpha_1,\gamma_1} &\leq 2pM_1(\alpha_1,\delta_1,\gamma_1,p)\,\|C\|_{\alpha_1,\delta_1,\gamma_1} \\ &\leq 2(1+(b-a)^{\gamma_1})pM_1(\alpha_1,\delta_1,\gamma_1,p)\,\|A\|_{\alpha_1,\delta_1,\gamma_1}\,\|f\|_{\gamma_1} \quad (3.1.92) \end{aligned}$$

eşitsizliğine ulaşılır. Yani T_pA,

$$\|T_pA\| \leq 2(1+(b-a)^{\gamma_1})pM_1(\alpha_1,\delta_1,\gamma_1,p)\,\|A\|_{\alpha_1,\delta_1,\gamma_1} \quad (3.1.93)$$

olan bir $T_pA \in B\left(C^{0,\gamma_1}((a,b),X), H_{\alpha_1,\gamma_1}(I_p,X)\right)$ operatörü ve T_p'de,

$$\|T_p\| = \sup_{\|A\|_{\alpha_1,\delta_1,\gamma_1}=1} \|T_pA\| \leq 2(1+(b-a)^{\gamma_1})pM_1(\alpha_1,\delta_1,\gamma_1,p)$$

olan, $B\left(H_{\alpha_1,\delta_1,\gamma_1}((a,b)\times(a,b),X), B\left(C^{0,\gamma_1}((a,b),X), H_{\alpha_1,\gamma_1}(I_p,X)\right)\right)$ uzayındaki bir operatördür. □

Teorem 3.1.1'den elde edilen sonucu da, ispatsız verebiliriz.

SONUÇ 3.1.2. *X, reel veya kompleks bir Banach cebiri ve $A \in H_{\alpha_1,\delta_1}((a,b),X)$ olsun. Bu taktirde;*

$$((T_pA)f)(s) = \int_a^b \frac{A(t)f(t)}{t-s}dt, \quad s \in I_p \quad (3.1.94)$$

eşitliğiyle tanımlanan T_p,

(1) $\alpha_1+\alpha_2+\delta_1 < 1$ ve $f \in H_{\alpha_2,\delta_1}((a,b),X)$ iken; $B\left(H_{\alpha_1,\delta_1}((a,b),X), B\left(H_{\alpha_2,\delta_1}((a,b),X), H_{\alpha_1+\alpha_2,\delta_1}(I_p,X)\right)\right)$ uzayına ait ve normu,

$$\|T_p\| \leq 4pM(\alpha_1+\alpha_2,\delta_1,p)$$

olan bir operatördür ve

(2) $f \in C^{0,\delta_1}((a,b),X)$ iken; $B\left(H_{\alpha_1,\delta_1}((a,b),X), B\left(C^{0,\delta_1}((a,b),X), H_{\alpha_1,\delta_1}(I_p,X)\right)\right)$ uzayına ait ve normu,

$$\|T_p\| \leq 2(1+(b-a)^{\delta_1})pM(\alpha_1,\delta_1,p)$$

olan bir operatördür.

Lemma 2.3.1 ve Sonuç 3.1.1'in kullanılmasıyla şu sonuca sahip oluruz:

SONUÇ 3.1.3. *X, reel veya kompleks bir Banach cebiri ve $n \in \mathbb{N}$ olsun. Bu taktirde;*

$$\left(\psi_p(A_1, \cdots, A_n)f\right)(s) = \int_a^b \frac{A_1(s,t)\cdots A_n(s,t)f(t)}{t-s}dt, \quad s \in I_p \tag{3.1.95}$$

şeklinde tanımlanan ψ_p dönüşümü, $A_i \in H_{\alpha_i,\delta_i,\gamma}\left((a,b)\times(a,b), X\right)$, $(i = 1, 2, \cdots, n)$ ve $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2, \cdots, \delta_n\}$ olmak üzere;

(1) $\alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_{n+1} + \gamma < 1$ ve $f \in H_{\alpha_{n+1},\gamma}\left((a,b), X\right)$ ise, $\prod_{i=1}^n H_{\alpha_i,\delta_i,\gamma}\left((a,b)\times(a,b), X\right)$'ten, $B\left(H_{\alpha_{n+1},\gamma}\left((a,b),X\right), H_{\alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_{n+1},\gamma}\left(I_p, X\right)\right)$'e tanımlı ve normu,

$$\|\psi_p\| \leq 2^{n+1}C_n p M_1(\alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_{n+1}, \delta, \gamma, p)$$

olan bir singüler n-lineer operatördür ve

(2) $n > 1$ için $\alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_n + \gamma < 1$ ve $f \in C^{0,\gamma}\left((a,b), X\right)$ ise, $\prod_{i=1}^n H_{\alpha_i,\delta_i,\gamma}\left((a,b)\times(a,b), X\right)$'ten, $B\left(C^{0,\gamma}\left((a,b),X\right), H_{\alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_n,\gamma}\left(I_p, X\right)\right)$'e tanımlı ve normu,

$$\|\psi_p\| \leq 2^n C_n (1 + (b-a)^\gamma) p M_1(\alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_n, \delta, \gamma, p)$$

olan bir singüler n-lineer operatördür.

İSPAT. Lemma 2.3.1'den;

$$B_n(s,t) = A_1(s,t)A_2(s,t)\cdots A_n(s,t); \; s,t \in (a,b)$$

olarak tanımlanan B_n fonksiyonu, $A_i \in H_{\alpha_i,\delta_i,\gamma}\left((a,b)\times(a,b), X\right)$ ve $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2, \cdots, \delta_n\}$ iken; $H_{\alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_n,\delta,\gamma}\left((a,b)\times(a,b), X\right)$ uzayındadır ve

$$\|B_n\|_{\alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_n,\delta,\gamma} \leq 2^{n-1}C_n \|A_1\|_{\alpha_1,\delta_1,\gamma} \|A_2\|_{\alpha_2,\delta_2,\gamma} \cdots \|A_n\|_{\alpha_n,\delta_n,\gamma} \tag{3.1.96}$$

olur. Ayrıca, (3.1.85) ile (3.1.95)'ten;

$$\psi_p(A_1, A_2, \cdots, A_n)f = (T_p B_n)f$$

olduğundan, (1) ve (2)'nin geçerli olması hâlinde; (3.1.96)'nın dikkate alınıp, Sonuç 3.1.1'in (1) ve (2)'deki hükmünün kullanılmasıyla, $k_n = \|A_1\|_{\alpha_1,\delta_1,\gamma} \cdots \|A_n\|_{\alpha_n,\delta_n,\gamma}$ olmak üzere; (3.1.89) ve (3.1.92)'den sırasıyla;

$$\|\psi_p(A_1, \cdots, A_n)f\|_{\alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_{n+1},\gamma} \leq 2^{n+1}C_n p M_1(\alpha_1 + \cdots + \alpha_{n+1}, \delta, \gamma, p) k_n \|f\|_{\alpha_{n+1},\gamma}$$

ve

$$\|\psi_p(A_1, \cdots, A_n)f\|_{\alpha_1+\cdots+\alpha_n,\gamma} \leq 2^n C_n (1 + (b-a)^\gamma) p M(\alpha_1 + \cdots + \alpha_n, \delta, \gamma, p) k_n \|f\|_\gamma$$

elde edilir.

Yukarıdaki eşitsizliklerin herbirinde $\psi_p(A_1, A_2, \cdots, A_n)$ operatörünün sınırlı olduğu görülür. Açık olarak; $\psi_p(A_1, A_2, \cdots, A_n)$ bilineerdir. Böylece, $\|\psi_p(A_1, \cdots, A_n)\|$ normunun sınırı bulunup; ispat, kolayca tamamlanabilir. □

Lemma 2.3.2 ve Sonuç 3.1.2'den; şu sonuç elde edilir:

Sonuç 3.1.4. *X, reel veya kompleks bir Banach cebiri ve $n \in \mathbb{N}$ olsun. Bu taktirde;*

$$(\psi_p(A_1, A_2, \cdots, A_n)f)(s) = \int_a^b \frac{A_1(t)A_2(t)\cdots A_n(t)f(t)}{t-s} dt, \quad s \in I_p \qquad (3.1.97)$$

şeklinde tanımlanan ψ_p dönüşümü, $A_i \in H_{\alpha_i,\delta}((a,b),X)$, $(i = 1, 2, \cdots, n)$ iken;

(1) *$\alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_{n+1} + \delta < 1$ ve $f \in H_{\alpha_{n+1},\delta}((a,b),X)$ ise,*

$\prod_{i=1}^n H_{\alpha_i,\delta}((a,b),X)$'ten, $B\left(H_{\alpha_{n+1},\delta}((a,b),X), H_{\alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_{n+1},\delta}(I_p,X)\right)$'e tanımlı ve normu,

$$\|\psi_p\| \leq 2^{n+1} p M(\alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_{n+1}, \delta, p)$$

olan bir singüler n-lineer operatördür ve

(2) *$n > 1$ için $\alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_n + \delta < 1$ olmak üzere; $f \in C^{0,\delta}((a,b),X)$ ise, $\prod_{i=1}^n H_{\alpha_i,\delta}((a,b),X)$'ten, $B\left(C^{0,\delta}((a,b),X), H_{\alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_n,\delta}(I_p,X)\right)$ uzayına tanımlı ve normu,*

$$\|\psi_p\| \leq 2^n(1 + (b-a)^\delta) p M(\alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_n, \delta, p)$$

olan bir singüler n-lineer operatördür.

Sonuç 3.1.3 ve Sonuç 3.1.4'ten de şu sonuçlar elde edilir:

SONUÇ 3.1.5. *X, reel veya kompleks bir Banach cebiri, $n \in \mathbb{N}$, $A_i \in H_{\alpha_i,\delta_i,\gamma}((a,b)\times(a,b),X)$, $(i = 1,2,\cdots,n)$ ve $\delta = \min\{\delta_1,\delta_2,\cdots,\delta_n\}$ olmak üzere;*

$$(T_pf)(s) = \int_a^b \frac{A_1(s,t)A_2(s,t)\cdots A_n(s,t)f(t)}{t-s}dt, \quad s \in I_p \tag{3.1.98}$$

şeklinde tanımlanan T_p dönüşümü,

(1) *$\alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_{n+1}+\gamma<1$ ve $f \in H_{\alpha_{n+1},\gamma}((a,b),X)$ ise; normu,*

$$\|T_p\| \le 2^{n+1}C_npM_1(\alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_{n+1},\delta,\gamma,p)\,\|A_1\|_{\alpha_1,\delta_1,\gamma}\cdots\|A_n\|_{\alpha_n,\delta_n,\gamma}$$

olan, $B\left(H_{\alpha_{n+1},\gamma}((a,b),X), H_{\alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_{n+1},\gamma}(I_p,X)\right)$ uzayındaki singüler Fredholm integral operatörüdür ve

(2) *$n>1$ için $\alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_n+\gamma<1$ olmak üzere; $f \in C^{0,\gamma}((a,b),X)$ ise; normu,*

$$\|T_p\| \le 2^nC_n(1+(b-a)^\gamma)pM_1(\alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_n,\delta,\gamma,p)\,\|A_1\|_{\alpha_1,\delta_1,\gamma}\cdots\|A_n\|_{\alpha_n,\delta_n,\gamma}$$

olan, $B\left(C^{0,\gamma}((a,b),X), H_{\alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_n,\gamma}(I_p,X)\right)$ uzayındaki singüler Fredholm integral operatörüdür.

SONUÇ 3.1.6. *X, reel veya kompleks bir Banach cebiri, $n \in \mathbb{N}$ ve $A_i \in H_{\alpha_i,\delta}((a,b),X)$, $(i=1,2,\cdots,n)$ iken;*

$$(T_pf)(s) = \int_a^b \frac{A_1(t)A_2(t)\cdots A_n(t)f(t)}{t-s}dt, \quad s \in I_p \tag{3.1.99}$$

şeklinde tanımlanan T_p dönüşümü,

(1) *$\alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_{n+1}+\delta<1$ ve $f \in H_{\alpha_{n+1},\delta}((a,b),X)$ ise; normu,*

$$\|T_p\| \le 2^{n+1}C_npM(\alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_{n+1},\delta,p)\,\|A_1\|_{\alpha_1,\delta}\cdots\|A_n\|_{\alpha_n,\delta}$$

olacak şekilde, $B\left(H_{\alpha_{n+1},\delta}((a,b),X), H_{\alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_{n+1},\delta}(I_p,X)\right)$ uzayındaki singüler Fredholm integral operatörüdür ve

(2) $n > 1$ için $\alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_n + \delta < 1$ olmak üzere; $f \in C^{0,\delta}((a,b),X)$ ise; normu,

$$\|T_p\| \le 2^n C_n (1 + (b-a)^\delta) pM(\alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_n, \delta, p) \|A_1\|_{\alpha_1,\delta} \cdots \|A_n\|_{\alpha_n,\delta}$$

olacak şekilde, $B\left(C^{0,\delta}((a,b),X), H_{\alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_n,\delta}(I_p,X)\right)$ uzayındaki singüler Fredholm integral operatörüdür.

3.2. $H^1_{\alpha,\delta,\gamma}(X)$ Uzayı

X, reel veya kompleks bir Banach uzayı, a, b, α, δ ve γ; $-\infty < a, b < \infty$, $0 < \alpha, \alpha + \gamma < 1, 0 < \gamma < \delta < 1$ şartlarını sağlayan keyfi fakat sabit sayılar, $M \ge 0$ bir sabit,

$$\Delta_{(s+\Delta s),2} A = A(s + \Delta s, t + \Delta t) - A(s + \Delta s, t)$$

ve

$$\Delta_{s,2} A = A(s, t + \Delta t) - A(s,t)$$

olmak üzere; $\Delta t \ge 0$ ve $\forall s,\ t,\ s + \Delta s,\ t + \Delta t \in (a,b)$ için;

$$\|A(s,t)\| \le \frac{M}{(t-a)^\alpha}, \tag{3.2.1}$$

$$\|A(s + \Delta s, t + \Delta t) - A(s,t)\| \le \frac{M\left(|\Delta s|^\delta + (\Delta t)^\gamma\right)}{(t-a)^{\alpha+\gamma}} \tag{3.2.2}$$

ve

$$\left\|\Delta_{(s+\Delta s),2} A - \Delta_{s,2} A\right\| \le \frac{M|\Delta s|^\delta (\Delta t)^\gamma}{(t-a)^{\alpha+\gamma}} \tag{3.2.3}$$

eşitsizliklerini sağlayan, $(a,b)\times(a,b)$ üzerinde tanımlı, X değerli bütün A fonksiyonlarının cümlesi, $H^1_{\alpha,\delta,\gamma}(X)$ veya $H^1_{\alpha,\delta,\gamma}((a,b)\times(a,b),X)$ olsun. Açık olarak; $H^1_{\alpha,\delta,\gamma}((a,b)\times(a,b),X) \subset H_{\alpha,\delta,\gamma}((a,b)\times(a,b),X)$'tir.

Teorem 3.2.1. *$H^1_{\alpha,\delta,\gamma}((a,b)\times(a,b),X)$ cümlesi, $H_{\alpha,\delta,\gamma}((a,b)\times(a,b),X)$'teki işlemlerle bir lineer uzay ve*

$$r_A = \sup_{\substack{s,\,t,\,s+\Delta s,\,t+\Delta t \in (a,b) \\ |\Delta s|,\,\Delta t > 0}} \frac{(t-a)^{\alpha+\gamma}\left\|\Delta_{(s+\Delta s),2} A - \Delta_{s,2} A\right\|}{|\Delta s|^\delta (\Delta t)^\gamma} \tag{3.2.4}$$

olmak üzere;

$$\|A\|^1_{\alpha,\delta,\gamma} = maks\left\{\|A\|_{\alpha,\delta,\gamma}, r_A\right\} \tag{3.2.5}$$

normu ile bir Banach uzayıdır.

İSPAT. $A, B \in H^1_{\alpha,\delta,\gamma}((a,b)\times(a,b), X)$ olsun. Bu durumda; A ve B için (3.2.1), (3.2.2) ve (3.2.3)'ü sağlayan $M_1, M_2 \geq 0$ sabitleri vardır. Böylece,

$$(A+B)(s,t) = A(s,t) + B(s,t)$$

olarak tanımlanan $A+B$ fonksiyonu için (3.2.1) ve (3.2.2)'yi sağlayan bir $M_1+M_2 \geq 0$ sabitinin mevcut olacağı, Teorem 2.1.1'in ispatından bilinmektedir. Diğer taraftan; keyfi $s, t, s+\Delta s, t+\Delta t \in (a,b)$, $(\Delta t \geq 0)$ için;

$$\left\|\Delta_{(s+\Delta s),2}A - \Delta_{s,2}A\right\| \leq \frac{M_1|\Delta s|^\delta(\Delta t)^\gamma}{(t-a)^{\alpha+\gamma}}$$

ve

$$\left\|\Delta_{(s+\Delta s),2}B - \Delta_{s,2}B\right\| \leq \frac{M_2|\Delta s|^\delta(\Delta t)^\gamma}{(t-a)^{\alpha+\gamma}}$$

sağlanır.

$$\Delta_{(s+\Delta s),2}(A+B) = \Delta_{(s+\Delta s),2}A + \Delta_{(s+\Delta s),2}B$$

ve

$$\Delta_{s,2}(A+B) = \Delta_{s,2}A + \Delta_{s,2}B$$

olduğundan,

$$\begin{aligned}\left\|\Delta_{(s+\Delta s),2}(A+B) - \Delta_{s,2}(A+B)\right\| &\leq \left\|\Delta_{(s+\Delta s),2}A - \Delta_{s,2}A\right\| + \\ &\quad + \left\|\Delta_{(s+\Delta s),2}B - \Delta_{s,2}B\right\| \\ &\leq \frac{(M_1+M_2)|\Delta s|^\delta(\Delta t)^\gamma}{(t-a)^{\alpha+\gamma}}\end{aligned}$$

ve şu hâlde; $A+B \in H^1_{\alpha,\delta,\gamma}((a,b)\times(a,b), X)$ olur.

Ayrıca, $\lambda \in K(K=\mathbb{R}$ veya $K=\mathbb{C})$ iken;

$$(\lambda A)(s,t) = \lambda A(s,t)$$

şeklinde tanımlanan λA fonksiyonu için (3.2.1) ve (3.2.2)'yi sağlayan bir $|\lambda|M_1 \geq 0$ sabitinin mevcut olduğu, yine Teorem 2.1.1'in ispatından bilinmektedir. Böylece,

$$\begin{aligned} \left\|\Delta_{(s+\Delta s),2}(\lambda A) - \Delta_{s,2}(\lambda A)\right\| &= \left\|\lambda(\Delta_{(s+\Delta s),2}A - \Delta_{s,2}A)\right\| \\ &= |\lambda| \left\|\Delta_{(s+\Delta s),2}A - \Delta_{s,2}A\right\| \\ &\leq \frac{|\lambda|M_1|\Delta s|^{\delta}(\Delta t)^{\gamma}}{(t-a)^{\alpha+\gamma}} \end{aligned}$$

eşitsizliğini de dikkate alarak, $\lambda A \in H^1_{\alpha,\delta,\gamma}((a,b)\times(a,b),X)$ olduğu sonucuna ulaşırız ki buradan da $H^1_{\alpha,\delta,\gamma}((a,b)\times(a,b),X) \subset H_{\alpha,\delta,\gamma}((a,b)\times(a,b),X)$ cümlesinin bir lineer uzay olduğu anlaşılır.

Şimdi ise, $\|\cdot\|_{\alpha,\delta,\gamma}$ fonksiyonunun bir norm olduğunu hatırlayarak, (3.2.5)'teki gibi tanımlanan $\|\cdot\|^1_{\alpha,\delta,\gamma}$ fonksiyonunun da bir norm olduğunu görelim:

$A, B \in H^1_{\alpha,\delta,\gamma}((a,b)\times(a,b),X)$ ve $\lambda \in K(K = \mathbb{R}$ veya $K = \mathbb{C})$ ise (N1) açık olarak sağlanır. $\|A\|^1_{\alpha,\delta,\gamma} = 0$ ise (3.2.5)'ten, $\|A\|_{\alpha,\delta,\gamma} \leq \|A\|^1_{\alpha,\delta,\gamma}$ olduğundan; $\|A\|_{\alpha,\delta,\gamma} = 0$ ve şu hâlde; $A = 0$ olur. $A = 0$ iken; $\|A\|^1_{\alpha,\delta,\gamma} = 0$ olacağı açıktır. Böylece, (N2) sağlanır.

$$\begin{aligned} r_{(\lambda A)} &= \sup_{\substack{s,t,s+\Delta s,t+\Delta t \in (a,b) \\ |\Delta s|,\Delta t>0}} \frac{(t-a)^{\alpha+\gamma}\left\|\Delta_{(s+\Delta s),2}(\lambda A) - \Delta_{s,2}(\lambda A)\right\|}{|\Delta s|^{\delta}(\Delta t)^{\gamma}} \\ &= \sup_{\substack{s,t,s+\Delta s,t+\Delta t \in (a,b) \\ |\Delta s|,\Delta t>0}} \frac{(t-a)^{\alpha+\gamma}|\lambda|\left\|\Delta_{(s+\Delta s),2}A - \Delta_{s,2}A\right\|}{|\Delta s|^{\delta}(\Delta t)^{\gamma}} \\ &= |\lambda| \sup_{\substack{s,t,s+\Delta s,t+\Delta t \in (a,b) \\ |\Delta s|,\Delta t>0}} \frac{(t-a)^{\alpha+\gamma}\left\|\Delta_{(s+\Delta s),2}A - \Delta_{s,2}A\right\|}{|\Delta s|^{\delta}(\Delta t)^{\gamma}} \\ &= |\lambda| r_A \end{aligned}$$

olduğundan;

$$\begin{aligned} \|\lambda A\|^1_{\alpha,\delta,\gamma} &= maks\left\{\|\lambda A\|_{\alpha,\delta,\gamma},\ r_{(\lambda A)}\right\} = maks\left\{|\lambda|\,\|A\|_{\alpha,\delta,\gamma},\ |\lambda| r_A\right\} \\ &= |\lambda| maks\left\{\|A\|_{\alpha,\delta,\gamma},\ r_A\right\} \\ &= |\lambda|\,\|A\|^1_{\alpha,\delta,\gamma} \end{aligned}$$

olur. Yani, (N3) sağlanır.

$$
\begin{aligned}
r_{(A+B)} &= \sup_{\substack{s,t,s+\Delta s,t+\Delta t\in(a,b)\\ |\Delta s|,\Delta t>0}} \frac{(t-a)^{\alpha+\gamma}\left\|\Delta_{(s+\Delta s),2}(A+B)-\Delta_{s,2}(A+B)\right\|}{|\Delta s|^{\delta}(\Delta t)^{\gamma}} \\
&\le \sup_{\substack{s,t,s+\Delta s,t+\Delta t\in(a,b)\\ |\Delta s|,\Delta t>0}} \frac{(t-a)^{\alpha+\gamma}\left\|\Delta_{(s+\Delta s),2}A-\Delta_{s,2}A\right\|}{|\Delta s|^{\delta}(\Delta t)^{\gamma}} + \\
&\quad + \sup_{\substack{s,t,s+\Delta s,t+\Delta t\in(a,b)\\ |\Delta s|,\Delta t>0}} \frac{(t-a)^{\alpha+\gamma}\left\|\Delta_{(s+\Delta s),2}B-\Delta_{s,2}B\right\|}{|\Delta s|^{\delta}(\Delta t)^{\gamma}} \\
&= r_A + r_B
\end{aligned}
$$

ile (2.1.6) eşitsizliğinin de kullanılmasıyla,

$$
\begin{aligned}
\|A+B\|^1_{\alpha,\delta,\gamma} &= maks\left\{\|A+B\|_{\alpha,\delta,\gamma}\,,\, r_{(A+B)}\right\} \\
&\le maks\left\{\|A\|_{\alpha,\delta,\gamma}+\|B\|_{\alpha,\delta,\gamma}\,,\, r_A+r_B\right\} \\
&\le maks\left\{\|A\|_{\alpha,\delta,\gamma}\,,\, r_A\right\} + maks\left\{\|B\|_{\alpha,\delta,\gamma}\,,\, r_B\right\} \\
&= \|A\|^1_{\alpha,\delta,\gamma} + \|B\|^1_{\alpha,\delta,\gamma}
\end{aligned}
$$

elde edilir ki bu da (N4) aksiyomunun sağlanması demektir. Şu hâlde; $\|\cdot\|^1_{\alpha,\delta,\gamma}$ fonksiyonu bir norm ve böylece, $\left(H^1_{\alpha,\delta,\gamma}((a,b)\times(a,b),X)\,,\|\cdot\|^1_{\alpha,\delta,\gamma}\right)$ ikilisi, bir normlu uzaydır.

Son olarak; $H^1_{\alpha,\delta,\gamma}((a,b)\times(a,b),X)$'in, $\|\cdot\|^1_{\alpha,\delta,\gamma}$ normuna göre tam olduğunu gösterelim:

$(A_n)\subset H^1_{\alpha,\delta,\gamma}((a,b)\times(a,b),X)$ bir Cauchy dizisi olsun. Bu durumda;

$$\lim_{n\to\infty}\|A_n - A\|^1{}_{\alpha,\delta,\gamma} = 0$$

olacak şekilde, bir $A\in H^1_{\alpha,\delta,\gamma}((a,b)\times(a,b),X)$ fonksiyonunun mevcut olduğunu görmeliyiz. (A_n), Cauchy olduğundan; her $\varepsilon>0$ sayısı ve $n,m>n_0(\varepsilon)$ olan her $n,m\in\mathbb{N}$ için,

$$\|A_n - A_m\|^1_{\alpha,\delta,\gamma} < \varepsilon \tag{3.2.6}$$

şartını sağlayan enaz bir $n_0(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ sayısı vardır. $\|\cdot\|^1_{\alpha,\delta,\gamma}$ normunun (3.2.5)'te verilen tanımından; $\|A\|_{\alpha,\delta,\gamma} \leq \|A\|^1_{\alpha,\delta,\gamma}$ olup, (3.2.6)'dan;

$$\|A_n - A_m\|_{\alpha,\delta,\gamma} < \|A_n - A_m\|^1_{\alpha,\delta,\gamma} < \varepsilon \tag{3.2.7}$$

bulunur. Bu ise (A_n) dizisinin, $H_{\alpha,\delta,\gamma}((a,b)\times(a,b),X)$ uzayında $\|\cdot\|_{\alpha,\delta,\gamma}$ normuna göre Cauchy olması demektir. Teorem 2.1.1'den; $H_{\alpha,\delta,\gamma}((a,b)(a,b),X)$, tam olduğundan;

$$\lim_{n\to\infty} \|A_n - A\|_{\alpha,\delta,\gamma} = 0 \tag{3.2.8}$$

olacak şekilde bir $A \in H_{\alpha,\delta,\gamma}((a,b)\times(a,b),X)$ fonksiyonu vardır. Böylece, bu A fonksiyonu için (3.2.1) ve (3.2.2)'yi sağlayan bir $M_1 \geq 0$ sabiti mevcuttur. Diğer taraftan; (3.2.5) dikkate alınarak, (3.2.6)'dan; her $\varepsilon > 0$ sayısı ve $n, m > n_0(\varepsilon)$ olan her $n, m \in \mathbb{N}$ için;

$$\begin{aligned}
&\sup_{\substack{s,t,s+\Delta s,t+\Delta t \in (a,b) \\ |\Delta s|,\Delta t>0}} \frac{(t-a)^{\alpha+\gamma}\left\|\Delta_{(s+\Delta s),2}(A_n - A_m) - \Delta_{s,2}(A_n - A_m)\right\|}{|\Delta s|^{\delta}(\Delta t)^{\gamma}} = \\
&= r_{(A_n - A_m)} < \varepsilon
\end{aligned} \tag{3.2.9}$$

elde edilir. Yine Teorem 2.1.1'in ispatından, her $s, t \in (a,b)$ için;

$$\lim_{n\to\infty} A_n(s,t) = A(s,t)$$

olduğunu hatırlayıp, (3.2.9) ve norm fonksiyonunun sürekliliğini kullanırsak, her $\varepsilon > 0$ sayısı ve $n > n_0(\varepsilon)$ olan her $n \in \mathbb{N}$ için; $s, t, s+\Delta s, t+\Delta t \in (a,b)$, $(\Delta s \neq 0, \Delta t > 0)$ olduğunda;

$$\begin{aligned}
&\frac{(t-a)^{\alpha+\gamma}\left\|\Delta_{(s+\Delta s),2}(A_n - A) - \Delta_{s,2}(A_n - A)\right\|}{|\Delta s|^{\delta}(\Delta t)^{\gamma}} = \\
&= \frac{(t-a)^{\alpha+\gamma}\left\|\Delta_{(s+\Delta s),2}A_n - \Delta_{s,2}A_n - \lim_{m\to\infty}(\Delta_{(s+\Delta s),2}A_m - \Delta_{s,2}A_m)\right\|}{|\Delta s|^{\delta}(\Delta t)^{\gamma}} = \\
&= \lim_{m\to\infty} \frac{(t-a)^{\alpha+\gamma}\left\|\Delta_{(s+\Delta s),2}(A_n - A_m) - \Delta_{s,2}(A_n - A_m)\right\|}{|\Delta s|^{\delta}(\Delta t)^{\gamma}} \\
&< \varepsilon
\end{aligned} \tag{3.2.10}$$

ve buradan da $r_{(A_n-A)} < \varepsilon$ eşitsizliğine sahip oluruz. Bu sonuç ve (3.2.8)'in kullanılmasıyla,

$$\lim_{n\to\infty} \|A_n - A\|^1_{\alpha,\delta,\gamma} = 0$$

sonucuna ulaşılır.

$(A_n) \subset H^1_{\alpha,\delta,\gamma}((a,b)\times(a,b),X)$ Cauchy dizisi sınırlı olduğundan, $\forall n \in \mathbb{N}$ için; $\|A_n\|^1_{\alpha,\delta,\gamma} \leq K$ sağlanır. Şu hâlde; $\forall n \in \mathbb{N}$ ve $\forall s,t,s+\Delta s,t+\Delta t \in (a,b)$, $(\Delta t \geq 0)$ için; (3.2.5)'ten,

$$\left\|\Delta_{(s+\Delta s),2}A_n - \Delta_{s,2}A_n\right\| \leq \frac{K|\Delta s|^\delta (\Delta t)^\gamma}{(t-a)^{\alpha+\gamma}} \tag{3.2.11}$$

olacak şekilde bir $K \geq 0$ sabitinin mevcut olduğu görülür. Böylece, $\forall\varepsilon > 0$ sayısı ve $\Delta t \geq 0$ olmak üzere; $\forall s,t,s+\Delta s,t+\Delta t \in (a,b)$ için; $n > n_0(\varepsilon)$ olduğunda, (3.2.10) ve (3.2.11)'den;

$$\begin{aligned}
&\left\|\Delta_{(s+\Delta s),2}A - \Delta_{s,2}A\right\| = \\
= \ &\left\|\Delta_{(s+\Delta s),2}A_n - \Delta_{s,2}A_n + \Delta_{(s+\Delta s),2}(A-A_n) - \Delta_{s,2}(A-A_n)\right\| \\
\leq \ &\left\|\Delta_{(s+\Delta s),2}A_n - \Delta_{s,2}A_n\right\| + \left\|\Delta_{(s+\Delta s),2}(A-A_n) - \Delta_{s,2}(A-A_n)\right\| \\
\leq \ &\frac{(K+\varepsilon)|\Delta s|^\delta (\Delta t)^\gamma}{(t-a)^{\alpha+\gamma}}
\end{aligned}$$

şartı sağlanacağından;

$$\left\|\Delta_{(s+\Delta s),2}A - \Delta_{s,2}A\right\| \leq \frac{K|\Delta s|^\delta (\Delta t)^\gamma}{(t-a)^{\alpha+\gamma}}$$

olur. $M = maks\{M_1, K\}$ olarak alınan M, A fonksiyonu için; (3.2.1), (3.2.2) ve (3.2.3)'ü sağlayan bir sabit olduğundan; $A \in H^1_{\alpha,\delta,\gamma}((a,b)\times(a,b),X)$ olduğu sonucu bulunur ki, bu da ispatı tamamlar. □

Teorem 3.2.2. *X, reel veya kompleks bir Banach cebiri ve $\alpha_1+\alpha_2+\gamma_1 < 1$ olmak üzere; $A \in H^1_{\alpha_1,\delta_1,\gamma_1}((a,b)\times(a,b),X)$, $B \in H_{\alpha_2,\delta_2,\gamma_1}((a,b)\times(a,b),X)$ ve*

$$\begin{aligned}
M_3(\alpha_1,\alpha_2,\gamma_1,p) \ = \ &\frac{(p-1)^{1-\alpha_1-\alpha_2-\gamma_1}p^{\alpha_1+\alpha_2+\gamma_1}}{1-\alpha_1-\alpha_2-\gamma_1} + \frac{p^{\alpha_1+\alpha_2}(b-a)^{\gamma_1}}{\gamma_1} + \frac{(b-a)^{\gamma_1}}{\gamma_1 p^{\gamma_1}} + \\
&+\frac{p^{\alpha_2}}{(p-1)^{\alpha_2+\gamma_1}\gamma_1} + \frac{1}{\gamma_1 p^{\gamma_1}} + \frac{3(p+1)^{-\alpha_1-\alpha_2-\gamma_1}p^{\alpha_1+\alpha_2+\gamma_1}}{\alpha_1+\alpha_2+\gamma_1}
\end{aligned}$$

olsun. Bu taktirde;

$$\Psi_p(A,B)(s_1,s_2) = \int_a^b \frac{A(s_1,t)B(s_2,t)}{t-s_2}dt, \quad s_2 \in I_p \tag{3.2.12}$$

genelleştirilmiş integraliyle tanımlanan Ψ_p,
$H^1_{\alpha_1,\delta_1,\gamma_1}((a,b)\times(a,b),X) \times H_{\alpha_2,\delta_2,\gamma_1}((a,b)\times(a,b),X)$*'ten; $H_{\alpha_1+\alpha_2,\delta_1,\gamma_1}(I_p \times I_p, X)$ uzayına tanımlı ve normu,*

$$\|\Psi_p\| \leq 4pM_1(\alpha_1+\alpha_2,\delta_2,\gamma_1,p) + M_3(\alpha_1,\alpha_2,\gamma_1,p)$$

olacak şekilde, sürekli ve singüler bir bilineer operatördür.

İSPAT. Keyfi fakat sabit herbir $s_1 \in (a,b)$ için;

$$C_{s_1}(s_2,t) = A(s_1,t)B(s_2,t); \;\; s_2,t \in (a,b)$$

eşitliğiyle tanımlanan $C_{s_1}(\cdot,\cdot)$ fonksiyonu, her $s_2, t, s_2+\Delta s_2, t+\Delta t \in (a,b), (\Delta t \geq 0)$ için;

$$\begin{aligned} \|C_{s_1}(s_2,t)\| &= \|A(s_1,t)B(s_2,t)\| \\ &\leq \|A(s_1,t)\|\,\|B(s_2,t)\| \\ &\leq \frac{\|A\|_{\alpha_1,\delta_1,\gamma_1}\|B\|_{\alpha_2,\delta_2,\gamma_1}}{(t-a)^{\alpha_1+\alpha_2}} \end{aligned} \tag{3.2.13}$$

eşitsizliğini sağlar.

$$\Delta C_{s_1} = C_{s_1}(s_2+\Delta s_2, t+\Delta t) - C_{s_1}(s_2,t),$$

$$\Delta_{s_1,2}A = A(s_1,t+\Delta t) - A(s_1,t)$$

ve

$$\Delta B = B(s_2+\Delta s_2, t+\Delta t) - B(s_2,t)$$

olmak üzere;

$$\begin{aligned}
\|\Delta C_{s_1}\| &= \|A(s_1,t+\Delta t)B(s_2+\Delta s_2,t+\Delta t)-A(s_1,t)B(s_2,t)\| \\
&= \|(\Delta_{s_1,2}A)B(s_2+\Delta s_2,t+\Delta t)+A(s_1,t)\Delta B\| \\
&\leq \|\Delta_{s_1,2}A\|\,\|B(s_2+\Delta s_2,t+\Delta t)\|+\|A(s_1,t)\|\,\|\Delta B\| \\
&\leq \frac{\|A\|^1_{\alpha_1,\delta_1,\gamma_1}\|B\|_{\alpha_2,\delta_2,\gamma_1}(\Delta t)^{\gamma_1}}{(t+\Delta t-a)^{\alpha_2}(t-a)^{\alpha_1+\gamma_1}}+ \\
&\quad +\frac{\|A\|^1_{\alpha_1,\delta_1,\gamma_1}\|B\|_{\alpha_2,\delta_2,\gamma_1}(|\Delta s_2|^{\delta_2}+(\Delta t)^{\gamma_1})}{(t-a)^{\alpha_1}(t-a)^{\alpha_2+\gamma_1}} \\
&\leq \frac{2\|A\|^1_{\alpha_1,\delta_1,\gamma_1}\|B\|_{\alpha_2,\delta_2,\gamma_1}(|\Delta s_2|^{\delta_2}+(\Delta t)^{\gamma_1})}{(t-a)^{\alpha_1+\alpha_2+\gamma_1}} \qquad (3.2.14)
\end{aligned}$$

şartı da sağlandığından; $C\in H_{\alpha_1+\alpha_2,\delta_2,\gamma_1}((a,b)\times(a,b),X)$ ve (3.2.13) ile (3.2.14)'ten; $\forall s_1\in(a,b)$ için;

$$\|C_{s_1}\|_{\alpha_1+\alpha_2,\delta_2,\gamma_1}\leq 2\|A\|^1_{\alpha_1,\delta_1,\gamma_1}\|B\|_{\alpha_2,\delta_2,\gamma_1} \qquad (3.2.15)$$

sağlanır. Böylece, (3.1.78) ve (3.2.12)'den;

$$\Psi_p(A,B)(s_1,s_2)=\varphi_p(C_{s_1})(s_2)$$

olup, Teorem 3.1.2'nin kullanılmasıyla; $s_2,s_2+\Delta s_2\in I_p,(\Delta s_2\geq 0)$ için; sadece $\alpha_1+\alpha_2,\delta_2$, γ_1 ve p'ye bağlı olan,

$$\begin{aligned}
\|\varphi_p(C_{s_1})(s_2)\| &\leq \frac{2pM_1(\alpha_1+\alpha_2,\delta_2,\gamma_1,p)\|C_{s_1}\|_{\alpha_1+\alpha_2,\delta_2,\gamma_1}}{(s_2-a)^{\alpha_1+\alpha_2}} \\
&\leq \frac{4pM_1(\alpha_1+\alpha_2,\delta_2,\gamma_1,p)\|A\|^1_{\alpha_1,\delta_1,\gamma_1}\|B\|_{\alpha_2,\delta_2,\gamma_1}}{(s_2-a)^{\alpha_1+\alpha_2}} \qquad (3.2.16)
\end{aligned}$$

ve

$$\Delta\varphi_p(C_{s_1})=\varphi_p(C_{s_1})(s_2+\Delta s_2)-\varphi_p(C_{s_1})(s_2),$$

$$m_1=\|A\|^1_{\alpha_1,\delta_1,\gamma_1}\|B\|_{\alpha_2,\delta_2,\gamma_1}$$

olmak üzere;

$$\begin{aligned}
\|\Delta\varphi_p(C_{s_1})\| &\leq \frac{2pM_1(\alpha_1+\alpha_2,\delta_2,\gamma_1,p)\|C_{s_1}\|_{\alpha_1+\alpha_2,\delta_2,\gamma_1}(\Delta s_2)^{\gamma_1}}{(s_2-a)^{\alpha_1+\alpha_2+\gamma_1}} \\
&\leq \frac{4pM_1(\alpha_1+\alpha_2,\delta_2,\gamma_1,p)m_1(\Delta s_2)^{\gamma_1}}{(s_2-a)^{\alpha_1+\alpha_2+\gamma_1}} \qquad (3.2.17)
\end{aligned}$$

eşitsizliklerini sağlayan bir $M_1(\alpha_1+\alpha_2,\delta_2,\gamma_1,p)\geq 0$ sabiti mevcuttur. Ayrıca,

$$\Delta\Psi_p(A,B)=\Psi_p(A,B)(s_1+\Delta s_1,s_2+\Delta s_2)-\Psi_p(A,B)(s_1,s_2)$$

alınırsa, $s_1,s_2,s_1+\Delta s_1,s_2+\Delta s_2\in I_p,(\Delta s_2\geq 0)$ için;

$$\begin{aligned}\Delta\Psi_p(A,B) &= \Psi_p(A,B)(s_1+\Delta s_1,s_2+\Delta s_2)-\Psi_p(A,B)(s_1+\Delta s_1,s_2)+\\ &\quad +\Psi_p(A,B)(s_1+\Delta s_1,s_2)-\Psi_p(A,B)(s_1,s_2)\\ &= \varphi_p(C_{s_1+\Delta s_1})(s_2+\Delta s_2)-\varphi_p(C_{s_1+\Delta s_1})(s_2)+\\ &\quad +\Psi_p(A,B)(s_1+\Delta s_1,s_2)-\Psi_p(A,B)(s_1,s_2)\end{aligned}\tag{3.2.18}$$

olup,

$$\Delta_{1,t}A=A(s_1+\Delta s_1,t)-A(s_1,t),$$

$$\Delta_{1,s_2}A=A(s_1+\Delta s_1,s_2)-A(s_1,s_2),$$

$$\Delta_{1,s_2}\Psi_p(A,B)=\Psi_p(A,B)(s_1+\Delta s_1,s_2)-\Psi_p(A,B)(s_1,s_2)$$

ve

$$\Delta_{s_2,2}B=B(s_2,t)-B(s_2,s_2)$$

iken;

$$\begin{aligned}\Delta_{1,s_2}\Psi_p(A,B) &= \int_a^b\frac{(\Delta_{1,t}A)B(s_2,t)}{t-s_2}dt\\ &= \int_a^{s_2-\frac{s_2-a}{p}}\frac{(\Delta_{1,t}A)B(s_2,t)}{t-s_2}dt+\\ &\quad +\int_{s_2-\frac{s_2-a}{p}}^{s_2+\frac{s_2-a}{p}}\frac{(\Delta_{1,t}A)B(s_2,t)}{t-s_2}dt+\\ &\quad +\int_{s_2+\frac{s_2-a}{p}}^{b}\frac{(\Delta_{1,t}A)B(s_2,t)}{t-s_2}dt\end{aligned}\tag{3.2.19}$$

yazılabilir.

$t \in \left(a, s_2 - \frac{s_2 - a}{p}\right)$ için; $s_2 - t > \frac{s_2 - a}{p} > 0$ olduğundan, $\frac{1}{s_2 - t} < \frac{p}{s_2 - a}$ olur. Şu hâlde;

$$\begin{aligned} \left\| \frac{(\Delta_{1,t}A)B(s_2,t)}{t - s_2} \right\| &\leq \frac{m_1 |\Delta s_1|^{\delta_1}}{(t-a)^{\alpha_1+\alpha_2+\gamma_1}(s_2 - t)} \\ &\leq \frac{p m_1 (|\Delta s_1|^{\delta_1} + (\Delta s_2)^{\gamma_1})}{(s_2 - a)(t-a)^{\alpha_1+\alpha_2+\gamma_1}} \end{aligned} \tag{3.2.20}$$

ve

$$\begin{aligned} \int_a^{s_2 - \frac{s_2-a}{p}} \frac{dt}{(t-a)^{\alpha_1+\alpha_2+\gamma_1}} &= \int_0^{\frac{(p-1)(s_2-a)}{p}} u^{-\alpha_1-\alpha_2-\gamma_1} du \\ &= \frac{(p-1)^{1-\alpha_1-\alpha_2-\gamma_1} p^{\alpha_1+\alpha_2+\gamma_1-1}}{(1-\alpha_1-\alpha_2-\gamma_1)(s_2-a)^{\alpha_1+\alpha_2+\gamma_1-1}} \end{aligned}$$

olduğundan $c_1 = \frac{(p-1)^{1-\alpha_1-\alpha_2-\gamma_1} p^{\alpha_1+\alpha_2+\gamma_1}}{1-\alpha_1-\alpha_2-\gamma_1}$ alınırsa, (3.2.20)'den;

$$\left\| \int_a^{s_2 - \frac{s_2-a}{p}} \frac{(\Delta_{1,t}A)B(s_2,t)}{t - s_2} dt \right\| \leq \frac{c_1 m_1 (|\Delta s_1|^{\delta_1} + (\Delta s_2)^{\gamma_1})}{(s_2 - a)^{\alpha_1+\alpha_2+\gamma_1}} \tag{3.2.21}$$

bulunur.

$\int_{s_2 - \frac{s_2-a}{p}}^{s_2 + \frac{s_2-a}{p}} \frac{dt}{t - s_2} = 0$ eşitliğinden de faydalanarak,

$$\begin{aligned} &\int_{s_2 - \frac{s_2-a}{p}}^{s_2 + \frac{s_2-a}{p}} \frac{(\Delta_{1,t}A)B(s_2,t)}{t - s_2} dt = \\ &= \int_{s_2 - \frac{s_2-a}{p}}^{s_2 + \frac{s_2-a}{p}} \frac{(\Delta_{1,t}A)B(s_2,t) - (\Delta_{1,s_2}A)B(s_2,s_2)}{t - s_2} dt \\ &= \int_{s_2 - \frac{s_2-a}{p}}^{s_2 + \frac{s_2-a}{p}} \frac{(\Delta_{1,t}A - \Delta_{1,s_2}A)B(s_2,t)}{t - s_2} dt + \int_{s_2 - \frac{s_2-a}{p}}^{s_2 + \frac{s_2-a}{p}} \frac{\Delta_{1,s_2}A \, \Delta_{s_2,2}B}{t - s_2} dt \\ &= \int_{s_2 - \frac{s_2-a}{p}}^{s_2} \frac{(\Delta_{1,t}A - \Delta_{1,s_2}A)B(s_2,t)}{t - s_2} dt + \int_{s_2}^{s_2 + \frac{s_2-a}{p}} \frac{(\Delta_{1,t}A - \Delta_{1,s_2}A)B(s_2,t)}{t - s_2} dt + \\ &+ \int_{s_2 - \frac{s_2-a}{p}}^{s_2} \frac{\Delta_{1,s_2}A \, \Delta_{s_2,2}B}{t - s_2} dt + \int_{s_2}^{s_2 + \frac{s_2-a}{p}} \frac{\Delta_{1,s_2}A \, \Delta_{s_2,2}B}{t - s_2} dt \end{aligned}$$

yazılabilir.

$t \in \left(s_2 - \frac{s_2 - a}{p}, s_2\right)$ için $t - a > \frac{s_2 - a}{p}$ ve şu hâlde; $\frac{1}{t-a} < \frac{p}{s_2 - a}$ olur. Böylece,

$$\begin{aligned}\Delta_{1,s_2}A &= A(s_1+\Delta s_1, s_2) - A(s_1, s_2)\\ &= A(s_1+\Delta s_1, t+s_2-t) - A(s_1, t+s_2-t)\end{aligned}$$

alınıp, (3.2.3) de gözönünde bulundurulursa;

$$\begin{aligned}\left\|\frac{(\Delta_{1,t}A - \Delta_{1,s_2}A)B(s_2,t)}{t-s_2}\right\| &\leq \frac{\|\Delta_{1,t}A - \Delta_{1,s_2}A\|\,\|B(s_2,t)\|}{|t-s_2|}\\ &\leq \frac{\|\Delta_{1,s_2}A - \Delta_{1,t}A\|\,\|B\|_{\alpha_2,\delta_2,\gamma_1}}{(t-a)^{\alpha_2}(s_2-t)}\\ &\leq \frac{m_1|\Delta s_1|^{\delta_1}(s_2-t)^{\gamma_1-1}}{(t-a)^{\alpha_1+\alpha_2+\gamma_1}}\\ &\leq \frac{p^{\alpha_1+\alpha_2+\gamma_1}m_1|\Delta s_1|^{\delta_1}(s_2-t)^{\gamma_1-1}}{(s_2-a)^{\alpha_1+\alpha_2+\gamma_1}} \qquad (3.2.22)\end{aligned}$$

ve

$$\int_{s_2-\frac{s_2-a}{p}}^{s_2}(s_2-t)^{\gamma_1-1}dt = \int_0^{\frac{s_2-a}{p}} u^{\gamma_1-1}du = \frac{(s_2-a)^{\gamma_1}}{\gamma_1 p^{\gamma_1}} \leq \frac{(b-a)^{\gamma_1}}{\gamma_1 p^{\gamma_1}}$$

eşitsizlikleri kullanılırsa, $c_2 = \frac{p^{\alpha_1+\alpha_2}(b-a)^{\gamma_1}}{\gamma_1}$ olmak üzere;

$$\begin{aligned}\left\|\int_{s_2-\frac{s_2-a}{p}}^{s_2}\frac{(\Delta_{1,t}A - \Delta_{1,s_2}A)B(s_2,t)}{t-s_2}dt\right\| &\leq \frac{c_2 m_1|\Delta s_1|^{\delta_1}}{(s_2-a)^{\alpha_1+\alpha_2+\gamma_1}}\\ &\leq \frac{c_2 m_1(|\Delta s_1|^{\delta_1} + (\Delta s_2)^{\gamma_1})}{(s_2-a)^{\alpha_1+\alpha_2+\gamma_1}} \qquad (3.2.23)\end{aligned}$$

elde edilir.

$t \in \left(s_2, s_2 + \frac{s_2 - a}{p}\right)$ iken; $t - s_2 > 0$ olup,

$$\begin{aligned}\Delta_{1,t}A &= A(s_1+\Delta s_1, t) - A(s_1, t)\\ &= A(s_1+\Delta s_1, s_2+t-s_2) - A(s_1, s_2+t-s_2)\end{aligned}$$

alınarak (3.2.3) hatırlanırsa,

$$\begin{aligned}\left\|\frac{(\Delta_{1,t}A - \Delta_{1,s_2}A)B(s_2,t)}{t-s_2}\right\| &\leq \frac{\|\Delta_{1,t}A - \Delta_{1,s_2}A\|\,\|B(s_2,t)\|}{|t-s_2|}\\ &\leq \frac{m_1|\Delta s_1|^{\delta_1}(t-s_2)^{\gamma_1-1}}{(s_2-a)^{\alpha_1+\alpha_2+\gamma_1}} \qquad (3.2.24)\end{aligned}$$

ve

$$\int_{s_2}^{s_2+\frac{s_2-a}{p}} (t-s_2)^{\gamma_1-1}dt = \int_0^{\frac{s_2-a}{p}} u^{\gamma_1-1}du = \frac{(s_2-a)^{\gamma_1}}{\gamma_1 p^{\gamma_1}} \leq \frac{(b-a)^{\gamma_1}}{\gamma_1 p^{\gamma_1}}$$

eşitsizliği de dikkate alındığında, $c_3 = \dfrac{(b-a)^{\gamma_1} m_1}{\gamma_1 p^{\gamma_1}}$ olmak üzere; (3.2.24)'ten;

$$\begin{aligned}\left\|\int_{s_2}^{s_2+\frac{s_2-a}{p}} \frac{(\Delta_{1,t}A - \Delta_{1,s_2}A)B(s_2,t)}{t-s_2}dt\right\| &\leq \frac{c_3|\Delta s_1|^{\delta_1}}{(s_2-a)^{\alpha_1+\alpha_2+\gamma_1}} \\ &\leq \frac{c_3(|\Delta s_1|^{\delta_1} + (\Delta s_2)^{\gamma_1})}{(s_2-a)^{\alpha_1+\alpha_2+\gamma_1}} \quad (3.2.25)\end{aligned}$$

eşitsizliğine ulaşılır.

$t \in \left(s_2 - \dfrac{s_2-a}{p}, s_2\right)$ için $t - a > \dfrac{(p-1)(s_2-a)}{p}$ ve bunun sonucu olarak, $\dfrac{1}{t-a} < \dfrac{p}{(p-1)(s_2-a)}$ olur. Diğer taraftan;

$$\|\Delta_{s_2,2}B\| = \|B(s_2, t+s_2-t) - B(s_2,t)\| \leq \frac{\|B\|_{\alpha_2,\delta_2,\gamma_1}(s_2-t)^{\gamma_1}}{(t-a)^{\alpha_2+\gamma_1}}$$

olduğundan;

$$\begin{aligned}\left\|\frac{\Delta_{1,s_2}A\,\Delta_{s_2,2}B}{t-s_2}\right\| &\leq \frac{\|\Delta_{1,s_2}A\|\,\|\Delta_{s_2,2}B\|}{s_2-t} \\ &\leq \frac{\|A\|^1_{\alpha_1,\delta_1,\gamma_1}|\Delta s_1|^{\delta_1}\,\|\Delta_{s_2,2}B\|}{(s_2-a)^{\alpha_1+\gamma_1}(s_2-t)} \\ &\leq \frac{m_1|\Delta s_1|^{\delta_1}(s_2-t)^{\gamma_1-1}}{(s_2-a)^{\alpha_1+\gamma_1}(t-a)^{\alpha_2+\gamma_1}} \\ &\leq \frac{p^{\alpha_2+\gamma_1}m_1|\Delta s_1|^{\delta_1}(s_2-t)^{\gamma_1-1}}{(p-1)^{\alpha_2+\gamma_1}(s_2-a)^{\alpha_1+\alpha_2+2\gamma_1}} \quad (3.2.26)\end{aligned}$$

eşitsizliği ve

$$\int_{s_2-\frac{s_2-a}{p}}^{s_2} (s_2-t)^{\gamma_1-1}dt = \int_0^{\frac{s_2-a}{p}} u^{\gamma_1-1}du = \frac{(s_2-a)^{\gamma_1}}{\gamma_1 p^{\gamma_1}}$$

eşitliği ile (3.2.26)'nın kullanılmasıyla da,

$$\begin{aligned}\left\|\int_{s_2-\frac{s_2-a}{p}}^{s_2} \frac{\Delta_{1,s_2}A\,\Delta_{s_2,2}B}{t-s_2}dt\right\| &\leq \frac{p^{\alpha_2}m_1|\Delta s_1|^{\delta_1}}{(p-1)^{\alpha_2+\gamma_1}\gamma_1(s_2-a)^{\alpha_1+\alpha_2+\gamma_1}} \\ &\leq \frac{p^{\alpha_2}m_1(|\Delta s_1|^{\delta_1} + (\Delta s_2)^{\gamma_1})}{(p-1)^{\alpha_2+\gamma_1}\gamma_1(s_2-a)^{\alpha_1+\alpha_2+\gamma_1}} \quad (3.2.27)\end{aligned}$$

eşitsizliği elde edilir.

$t \in \left(s_2, s_2 + \frac{s_2 - a}{p}\right)$ için $t - s_2 > 0$ ve

$$\|\Delta_{s_2,2}B\| = \|B(s_2, s_2 + t - s_2) - B(s_2, s_2)\| \leq \frac{\|B\|_{\alpha_2,\delta_2,\gamma_1} (t - s_2)^{\gamma_1}}{(s_2 - a)^{\alpha_2+\gamma_1}}$$

olup,

$$\begin{aligned} \left\|\frac{\Delta_{1,s_2}A\Delta_{s_2,2}B}{t - s_2}\right\| &\leq \frac{\|\Delta_{1,s_2}A\| \, \|\Delta_{s_2,2}B\|}{t - s_2} \\ &\leq \frac{\|A\|^1_{\alpha_1,\delta_1,\gamma_1} |\Delta s_1|^{\delta_1} \|\Delta_{s_2,2}B\|}{(s_2 - a)^{\alpha_1+\gamma_1}(t - s_2)} \\ &\leq \frac{m_1|\Delta s_1|^{\delta_1}(t - s_2)^{\gamma_1-1}}{(s_2 - a)^{\alpha_1+\gamma_1}(s_2 - a)^{\alpha_2+\gamma_1}} \\ &= \frac{m_1|\Delta s_1|^{\delta_1}(t - s_2)^{\gamma_1-1}}{(s_2 - a)^{\alpha_1+\alpha_2+2\gamma_1}} \end{aligned} \tag{3.2.28}$$

eşitsizliği sağlanır.

$$\int_{s_2}^{s_2+\frac{s_2-a}{p}} (t - s_2)^{\gamma_1-1}dt = \int_0^{\frac{s_2-a}{p}} u^{\gamma_1-1}du = \frac{(s_2 - a)^{\gamma_1}}{\gamma_1 p^{\gamma_1}}$$

ve (3.2.28) kullanılarak,

$$\begin{aligned} \left\|\int_{s_2}^{s_2+\frac{s_2-a}{p}} \frac{\Delta_{1,s_2}A\,\Delta_{s_2,2}B}{t - s_2}dt\right\| &\leq \frac{m_1|\Delta s_1|^{\delta_1}}{\gamma_1 p^{\gamma_1}(s_2 - a)^{\alpha_1+\alpha_2+\gamma_1}} \\ &\leq \frac{m_1(|\Delta s_1|^{\delta_1} + (\Delta s_2)^{\gamma_1})}{\gamma_1 p^{\gamma_1}(s_2 - a)^{\alpha_1+\alpha_2+\gamma_1}} \end{aligned} \tag{3.2.29}$$

bulunur.

$t \in \left(s_2 + \frac{s_2 - a}{p}, b\right)$ için $t - a > s_2 + \frac{s_2 - a}{p} - a = \frac{(p+1)(s_2 - a)}{p}$ olup, $t - s_2 = t - a - (s_2 - a) > t - a - \frac{p(t - a)}{p+1} = \frac{t - a}{3} > 0$ olur. Böylece,

$$\begin{aligned} \left\|\frac{(\Delta_{1,t}A)B(s_2, t)}{t - s_2}\right\| &\leq \frac{m_1|\Delta s_1|^{\delta_1}}{(t - s_2)(t - a)^{\alpha_1+\alpha_2+\gamma_1}} \\ &\leq \frac{3m_1|\Delta s_1|^{\delta_1}}{(t - a)^{\alpha_1+\alpha_2+\gamma_1+1}} \end{aligned} \tag{3.2.30}$$

ve

$$\int_{s_2+\frac{s_2-a}{p}}^{b} \frac{dt}{(t-a)^{\alpha_1+\alpha_2+\gamma_1+1}} = \int_{\frac{(p+1)(s_2-a)}{p}}^{b-a} u^{-\alpha_1-\alpha_2-\gamma_1-1} du =$$

$$= -\frac{1}{\alpha_1+\alpha_2+\gamma_1}\left(\frac{1}{(b-a)^{\alpha_1+\alpha_2+\gamma_1}} - \frac{p^{\alpha_1+\alpha_2+\gamma_1}}{(p+1)^{\alpha_1+\alpha_2+\gamma_1}(s_2-a)^{\alpha_1+\alpha_2+\gamma_1}}\right)$$

$$\leq \frac{p^{\alpha_1+\alpha_2+\gamma_1}}{(\alpha_1+\alpha_2+\gamma_1)(p+1)^{\alpha_1+\alpha_2+\gamma_1}(s_2-a)^{\alpha_1+\alpha_2+\gamma_1}}$$

olup, $m_2 = 3(p+1)^{-\alpha_1-\alpha_2-\gamma_1} p^{\alpha_1+\alpha_2+\gamma_1}$ alındığında, (3.2.30)'dan;

$$\left\| \int_{s_2+\frac{s_2-a}{p}}^{b} \frac{(\Delta_{1,t}A)B(s_2,t)}{t-s_2} dt \right\| \leq \frac{m_1 m_2 (|\Delta s_1|^{\delta_1} + (\Delta s_2)^{\gamma_1})}{(\alpha_1+\alpha_2+\gamma_1)(s_2-a)^{\alpha_1+\alpha_2+\gamma_1}} \tag{3.2.31}$$

bulunur.

$$M_4(\alpha_1,\alpha_2,\delta_2,\gamma_1,p) = 4pM_1(\alpha_1+\alpha_2,\delta_2,\gamma_1,p) + M_3(\alpha_1,\alpha_2,\gamma_1,p)$$

olmak üzere; (3.2.18)'de norm alınarak; (3.2.17), (3.2.19), (3.2.21), (3.2.23), (3.2.25), (3.2.27), (3.2.29) ve (3.2.31) kullanılırsa,

$$\|\Delta\Psi_p(A,B)\| \leq \frac{M_4(\alpha_1,\alpha_2,\delta_2,\gamma_1,p) m_1 (|\Delta s_1|^{\delta_1} + (\Delta s_2)^{\gamma_1})}{(s_2-a)^{\alpha_1+\alpha_2+\gamma_1}} \tag{3.2.32}$$

ve (3.2.16)'dan;

$$\|\Psi_p(A,B)(s_1,s_2)\| \leq \frac{M_4(\alpha_1,\alpha_2,\delta_2,\gamma_1,p) m_1}{(s_2-a)^{\alpha_1+\alpha_2+\gamma_1}} \tag{3.2.33}$$

bulunur ki böylece, (3.2.33) ve (3.2.32)'den; $\Psi_p(A,B) \in H_{\alpha_1+\alpha_2,\delta_1,\gamma_1}(I_p \times I_p, X)$ ve

$$\|\Psi_p(A,B)\|_{\alpha_1+\alpha_2,\delta_1,\gamma_1} \leq M_4(\alpha_1,\alpha_2,\delta_2,\gamma_1,p)\, \|A\|^1_{\alpha_1,\delta_1,\gamma_1} \|B\|_{\alpha_2,\delta_2,\gamma_1} \tag{3.2.34}$$

elde edilir. Buradan da,

$$\|\Psi_p\| \leq M_4(\alpha_1,\alpha_2,\delta_2,\gamma_1,p)$$

olduğu anlaşılır. Ayrıca, kolayca görülebileceği gibi, $A \in H^1_{\alpha_1,\delta_1,\gamma_1}((a,b)\times(a,b),X)$ için;

$$\phi_A(B) = \Psi_p(A,B), \;\; B \in H_{\alpha_2,\delta_2,\gamma_1}((a,b)\times(a,b),X)$$

şeklinde tanımlanan ϕ_A dönüşümü ile, $B \in H_{\alpha_2,\delta_2,\gamma_1}((a,b)\times(a,b),X)$ için;

$$\psi_B(A) = \Psi_p(A,B), \;\; A \in H^1_{\alpha_1,\delta_1,\gamma_1}((a,b)\times(a,b),X)$$

şeklinde tanımlanan ψ_B dönüşümü, lineerdir. Şu hâlde; Ψ_p, bilineerdir. □

Teorem 3.2.2'den aşağıdaki sonuç verilebilir:

SONUÇ 3.2.1. *X, reel veya kompleks bir Banach cebiri,*
$A \in H^1_{\alpha_1,\delta_1,\gamma_1}((a,b)\times(a,b),X)$ ve $B \in H_{\alpha_2,\delta_2,\gamma_1}((a,b)\times(a,b),X)$ olmak üzere;

$$(\phi_p(A,B)f)(s_1,s_2) = \int_a^b \frac{A(s_1,t)B(s_2,t)f(t)}{t-s_2}dt, \quad s_2 \in I_p \tag{3.2.35}$$

olarak tanımlanan ϕ_p,

(1) $\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3+\gamma_1<1$ ve $f \in H_{\alpha_3,\gamma_1}((a,b),X)$ ise,
$H^1_{\alpha_1,\delta_1,\gamma_1}((a,b)\times(a,b),X) \times H_{\alpha_2,\delta_2,\gamma_1}((a,b)\times(a,b),X)$'ten;
$B\left(H_{\alpha_3,\gamma_1}((a,b),X), H_{\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3,\delta_1,\gamma_1}(I_p\times I_p,X)\right)$ uzayına tanımlı ve normu,

$$\|\phi_p\| \le 2(4pM_1(\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3,\delta_2,\gamma_1,p)+M_3(\alpha_1,\alpha_2+\alpha_3,\gamma_1,p))$$

olacak şekilde, sürekli ve singüler bir bilineer operatördür ve

(2) $\alpha_1+\alpha_2+\gamma_1<1$ iken; $f \in C^{0,\gamma_1}((a,b),X)$ ise,
$H^1_{\alpha_1,\delta_1,\gamma_1}((a,b)\times(a,b),X) \times H_{\alpha_2,\delta_2,\gamma_1}((a,b)\times(a,b),X)$'ten;
$B\left(C^{0,\gamma_1}((a,b),X), H_{\alpha_1+\alpha_2,\delta_1,\gamma_1}(I_p\times I_p,X)\right)$ uzayına tanımlı ve normu,

$$\|\phi_p\| \le (1+(b-a)^{\gamma_1})(4pM_1(\alpha_1+\alpha_2,\delta_2,\gamma_1,p)+M_3(\alpha_1,\alpha_2,\gamma_1,p))$$

olacak şekilde, sürekli ve singüler bir bilineer operatördür.

İSPAT.

$$C(s_2,t) = B(s_2,t)f(t); \; s_2,t \in (a,b)$$

alınarak, $f \in H_{\alpha_3,\gamma_1}((a,b),X)$ ve $f \in C^{0,\gamma_1}((a,b),X)$ olması durumunda, sırasıyla (3.1.88) ve (3.1.91) eşitsizlikleri kullanılırsa,

$$\|C\|_{\alpha_2+\alpha_3,\delta_2,\gamma_1} \le 2\,\|B\|_{\alpha_2,\delta_2,\gamma_1}\,\|f\|_{\alpha_3,\gamma_1} \tag{3.2.36}$$

ve

$$\|C\|_{\alpha_2,\delta_2,\gamma_1} \le (1+(b-a)^{\gamma_1})\,\|B\|_{\alpha_2,\delta_2,\gamma_1}\,\|f\|_{\gamma_1} \tag{3.2.37}$$

elde edilir. Böylece, (3.2.36) ve (3.2.37) 'nin herbirinin geçerli olması hâlinde;

$$\phi_p(A,B)f = \Psi_p(A,C)$$

eşitliği gözönüne alınıp, Teorem 3.2.2 kullanılırsa, $m_1 = \|A\|^1_{\alpha_1,\delta_1,\gamma_1}\|B\|_{\alpha_2,\delta_2,\gamma_1}$ ve

$$L_1 = 4pM_1(\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3,\delta_2,\gamma_1,p) + M_3(\alpha_1,\alpha_2+\alpha_3,\gamma_1,p)$$

ise; (3.2.34)'ten sırasıyla;

$$\|\phi_p(A,B)f\|_{\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3,\delta_1,\gamma_1} \leq 2L_1m_1\|f\|_{\alpha_3,\gamma_1} \tag{3.2.38}$$

ve

$$L_2(\alpha_1,\alpha_2,\delta_2,\gamma_1,p) = 4pM_1(\alpha_1+\alpha_2,\delta_2,\gamma_1,p) + M_3(\alpha_1,\alpha_2,\gamma_1,p)$$

olmak üzere;

$$\|\phi_p(A,B)f\|_{\alpha_1+\alpha_2,\delta_1,\gamma_1} \leq (1+(b-a)^{\gamma_1})L_2(\alpha_1,\alpha_2,\delta_2,\gamma_1,p)m_1\|f\|_{\gamma_1} \tag{3.2.39}$$

eşitsizliklerine sahip olunur ve buradan ispat, kolayca tamamlanabilir. □

Sonuç 3.2.1'den aşağıdaki sonuç elde edilir.

SONUÇ 3.2.2. *X, reel veya kompleks bir Banach cebiri, $A \in H^1_{\alpha_1,\delta_1,\gamma_1}((a,b)\times(a,b),X)$ ve $B \in H_{\alpha_2,\delta_2,\gamma_1}((a,b)\times(a,b),X)$ olsun. Bu durumda;*

$$(T_pf)(s_1,s_2) = \int_a^b \frac{A(s_1,t)B(s_2,t)f(t)}{t-s_2}dt, \quad s_2 \in I_p \tag{3.2.40}$$

olarak tanımlanan T_p dönüşümü,

(1) $\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3+\gamma_1 < 1$ ve $f \in H_{\alpha_3,\gamma_1}((a,b),X)$ ise, $B\left(H_{\alpha_3,\gamma_1}((a,b),X), H_{\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3,\delta_1,\gamma_1}(I_p\times I_p,X)\right)$ uzayına ait ve normu,

$$\|T_p\| \leq 2\left(4pM_1(\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3,\delta_2,\gamma_1,p) + M_3(\alpha_1,\alpha_2+\alpha_3,\gamma_1,p)\right)\|A\|^1_{\alpha_1,\delta_1,\gamma_1}\|B\|_{\alpha_2,\delta_2,\gamma_1}$$

olacak şekilde, sınırlı ve singüler bir Fredholm integral operatörüdür ve

(2) $\alpha_1+\alpha_2+\gamma_1 < 1$ iken, $f \in C^{0,\gamma_1}((a,b),X)$ ise, $B\left(C^{0,\gamma_1}((a,b),X), H_{\alpha_1+\alpha_2,\delta_1,\gamma_1}(I_p\times I_p,X)\right)$ uzayına ait ve normu,

$$\|T_p\| \leq (1+(b-a)^{\gamma_1})\left(4pM_1(\alpha_1+\alpha_2,\delta_2,\gamma_1,p) + M_3(\alpha_1,\alpha_2,\gamma_1,p)\right)\|A\|^1_{\alpha_1,\delta_1,\gamma_1}\|B\|_{\alpha_2,\delta_2,\gamma_1}$$

olacak şekilde, sınırlı ve singüler bir Fredholm integral operatörüdür.

Kaynaklar

[1] R. KRESS, *Linear Integral Equations*, Springer Verlag Berlin Heidelberg, New York, 1989.

[2] N. L. MUSKHELİŞVİLİ, *Singulyarnıe integralnıe uravneniya,* Moskva, Nauka, 1968. (Rusça)

[3] B. A. PLAMENEVSKİY, *O Singulyarnıh integralnıh operatorah na gruppe*, Dokl. AN SSSR, 164, N.1, 1965, 47-50. (Rusça)

[4] N. DUNFORD, J. T. SCHWARTZ, *Linear Operators Part III, Spectral Operators,* John Wiley & Sons, Inc., New York, 1988.

[5] A. I. HÜSEYNOV, *İntegral Tenlikler, (İntegral Denklemler)*, Maarif, Bakü, 1981.

[6] B. CHOUDHARY, S. NANDA, *Functional Analysis with Application*, John Wiley & Sons, Inc., New Delhi, India, 1966.

[7] E. KREYSZIG, *Introductory Functional Analysis with Applications,* John Wiley & Sons. Inc., New York, 1989.

[8] I. J. MADDOX, *Elements of Functional Analysis,* Cambridge University Press 2nd ed., 1988.

[9] F. D. GAKHOV, *Kraevıe Zadaçi,* Moskva, 1963. (Rusça)

[10] T. G. GEGELİYA, *Nekotorıe Spesialnıe Klassı Funksiy i ih Svoystva,* Tr. Tbilissk. matem. in-ta An Gruz SSR, XXXII, 1966, 94-139. (Rusça)

[11] R. V. KADISON, J. R. RINGROSE, *Fundamentals of the Theory of Operator Algebras, Volume I: Elementary Theory*, Academic Press, California, 1983.

[12] R. G. BARTLE, *The Elements of Integration,* John Wiley & Sons, Inc., New York, 1966.

[13] D. L. COHN, *Measure Theory,* Birkhäuser, Boston, 1980.

[14] R. JOHNSONBAUGH, W. E. PFAFFENBERGER, *Foundations of Mathematical Analysis,* Marcel Dekker, Inc., New York, 1981.

[15] J. DIESTEL, J. J. UHL, J. R., *Vector Measures,* American Mathematical Society, Providence, Rhode Island, Mathematical Surveys; no. 15, 1979.

[16] R. F. CURTAIN, A. J. PRITCHARD, *Functional Analysis in Modern Applied Mathematics,* Academic Press, London, New York, 1977.

[17] B. D. CRAVEN, *Lebesque Measure and Integral,* Pitman Publishing Inc., Toronto, 1982.

[18] C. SWARTZG, *An Introduction to Functional Analysis,* Marcel Dekker, Inc., New York, 1992.

[19] B. MUSAYEV, *Fonksiyonel Analiz,* Balcı Yayınları Tic. Ltd. Şti., Ankara, 2000.

ÖZGEÇMİŞ

1974 yılında Elazığda doğdu. Elazığ Atatürk İlkokulu, Elazığ Atatürk Ortaokulu ve Elazığ Lisesini bitirdikten sonra, 1992 yılında İnönü Üniversitesi Eğitim Fakültesi Matematik Eğitimi Bölümünü kazandı ve 1996 yılında adı geçen bölümden birincilikle mezun oldu. Aynı yıl İnönü Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsünde yüksek lisansa başladı. 1998 yılında " Konvolüsyon Çekirdekli Volterra İntegral Denklemleri " adlı tezi ile yüksek lisans çalışmasını tamamlayan İsmet ÖZDEMİR, 1997 yılından beri, İnönü Üniversitesi Eğitim Fakültesi Matematik Eğitimi Bölümünde araştırma görevlisi olarak çalışmaktadır. Evli ve bir çocuk babasıdır.

YAYINLARI

1. İ. Özdemir and Ö. F. Temizer, *On the linear Volterra integral equations with convolution kernel*, Analele Univ. Timişoara Ser. Matematică-Informatică, **37**(1999), fasc. 2, 113-122.
2. Ö. F. Temizer and İ. Özdemir, *On the linear Volterra integral equations,* International Journal of Applied Mathematics **3(2)**(2000), 221-225.
3. İ. Özdemir and Ö. F. Temizer, *Expansion of the boundaries of the solutions of the linear Volterra integral equations with convolution kernel*, Integral Equations Oper. Theory **43** (2002), 466-479.
4. İ. Özdemir and Ö. F. Temizer, *Expansion of the boundaries of the solutions of the linear Volterra integral equations with convolution kernel I*, (yazışma safhasında).
5. İ. Özdemir and Ö. F. Temizer, *Expansion of the boundaries of the solutions of the linear Volterra integral equations with convolution kernel II*, (yazışma safhasında).