T.C.
İNÖNÜ ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

# ORLICZ FONKSİYONU YARDIMIYLA TANIMLANMIŞ BAZI YENİ DİZİ UZAYLARI



M. Kemal ÖZDEMİR

DOKTORA TEZİ
MATEMATİK ANABİLİM DALI



MALATYA
Temmuz 2003

Fen Bilimleri Enstitüsü Müdürlüğü'ne,

Bu çalışma, Jürimiz tarafından Matematik Anabilim Dalı'nda DOKTORA TEZİ olarak kabul edilmiştir.

Prof. Dr. Feyzi BAŞAR

Başkan

Prof. Dr. İhsan SOLAK

Üye (Danışman)

Doç. Dr. Mikail ET

Üye

Doç. Dr. Hüsamettin ÇOŞKUN

Üye

Doç. Dr. A. Refik BAHADIR

Üye

Onay

Yukarıdaki imzaların adı geçen öğretim üyelerine ait olduğunu onaylarım.

28 / 08 / 2003

(İmza)

Doç. Dr. Ali ŞAHİN

Enstitü Müdürü

*Anneme, Babama ve kardeşlerime ...*

# ÖZET

Doktora Tezi

ORLICZ FONKSİYONU YARDIMIYLA TANIMLANMIŞ
BAZI YENİ DİZİ UZAYLARI

M.Kemal ÖZDEMİR

İnönü Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Anabilim Dalı

61+iv sayfa

2003

Danışman: Prof. Dr. İhsan SOLAK

Üç bölümden meydana gelen bu çalışmanın ilk bölümünde, M.A. Krasnosel'skii & Y.B. Rutickii'nin ve daha sonraları M.M. Rao & Z.D. Ren'in ayrıntılı olarak incelediği, konveks fonksiyonların özel bir sınıfında yer alan N-fonksiyonların ve Orlicz fonksiyonlarının bazı özellikleri sunuldu.

İkinci bölümün ilk kısmında, $\ell_p$ dizi uzayının doğrudan bir genelleştirmesi olan $\ell_M$ Orlicz dizi uzayı tanıtılarak, tamlık, ayrılabilirlik şartları, denk normlar gibi fonksiyonel analizin alışılmış problemleri, bu uzay için tartışıldı. İkinci kısımda, S.D. Parashar & B. Choudhary tarafından pozitif reel sayıların sınırlı bir $(p_k)$ dizisi kullanılarak genelleştirilen $\ell_M(p)$ dizi uzayı incelendi.

Son bölümde vektör değerli Orlicz dizi uzaylarına yer verildi. Bu bölümün ilk kısmında, $\ell_M$ nin, D. Ghosh & P.D. Srivastava tarafından yapılan bir genelleştirmesi ele alındı. Son kısımda, $\ell_M$ nin birçok açıdan bir genelleştirmesi olan bir Orlicz dizi uzayı tanımlandı ve bazı özellikleri elde edildi.

ANAHTAR KELİMELER: Orlicz dizi uzayı, Orlicz fonksiyonu, N-fonksiyon, paranormlu uzay, vektör değerli dizi uzayı

# ABSTRACT

Ph.D. Thesis

SOME NEW SEQUENCE SPACES DEFINED BY ORLICZ FUNCTION

M.Kemal ÖZDEMİR

İnönü University
Graduate School of Natural and Applied Sciences
Department of Mathematics

61+iv pages

2003

Supervisor: Prof. Dr. İhsan SOLAK

In the first chapter of this work, certain attributes of N-functions and Orlicz functions which are taken part in the special classes of convex functions and studied in detail by M.A. Krasnosel'skii & Y.B. Rutickii and later M.M. Rao & Z.D. Ren, are introduced.

In the second chapter, previously, Orlicz sequence space $\ell_M$ which is a directly generalization of $\ell_p$ space was introduced. Also, some usual problems of functional analysis as completeness, separability conditions and equivalent normizations are considered for this space. Then, the sequence space $\ell_M(p)$ which is developed by S.D. Parashar & B. Choudhary with any bounded sequence of positive real numbers $(p_k)$, is studied.

In the last chapter, vector valued Orlicz sequence spaces are presented. Firstly, a generalizations of $\ell_M$ developed by D. Ghosh & P.D. Srivastava is considered. Secondly, we defined an Orlicz sequence space which is a generalization of $\ell_M$ in many respect and investigated some properties of this sequence space.

KEY WORDS: Orlicz sequence space, Orlicz function, N-function, paranormed space, vector valued sequence space

TEŞEKKÜR

Beni bu konuda çalışmaya teşvik ederek, bilgi ve tecrübeleriyle yönlendiren tez danışmanım Sayın Prof. Dr. İhsan Solak'a ve zaman zaman karşılaştığım problemleri tartışmak için bana değerli zamanını ve bilgilerini sunan Sevgili arkadaşım Yılmaz Yılmaz'a teşekkürlerimi sunarım. Ayrıca, çalışmamıza yön veren makaleleri ve tez yazımında bana büyük kolaylık sağlayan LaTeX programını edindiğim internet imkânını sağlayan ve bu çalışmanın çıktısını aldığım bir yazıcıyı kullanma imkânı sağlayan Bölüm Başkanımız Sayın Prof. Dr. Sadık Keleş'e, bu çalışmanın bilgisayar ortamına alınmasında bana yardım eden kardeşlerim, Cemile, Şebnem ve Ahmet'e ve manevi desteklerinden dolayı Değerli arkadaşlarım Mustafa Uçkun ve A.Fatih Özcan'a teşekkür ederim.

# İÇİNDEKİLER

# GİRİŞ

Konveks fonksiyonlar teorisinin temeli, 1906 da J. Jensen ile oluşturulmuştur. 1934 de G. Hardy & J. Littlewood & G. Polya, *"Inequalities"* isimli eserde konveks fonksiyonları ayrıntılı olarak incelediler. 1931 de Z.W. Birnbaum & W. Orlicz, *"Über die Verallgemeinerung des Begriffes der zueinander konjugierten Potenzen"* isimli çalışmayla konveks fonksiyonların özel bir sınıfında yer alan N-fonksiyonları tanıtmıştır. N-fonksiyonların ayrıntılı bir incelemesi, 1961 de M.A. Krasnosel'skii & Y.B. Rutickii [6] tarafından *"Convex Functions and Orlicz Spaces"* isimli çalışmayla yapılmıştır. 1991 de M.M. Rao & Z.D. Ren [13], *"Theory of Orlicz Spaces"* adlı çalışmada, N-fonksiyonların daha sistematik bir incelemesini verdiler.

$M(a) = 0$ olacak şekildeki her konveks fonksiyonun

$$M(u) = \int_a^u p(t)dt$$

şeklinde bir integral gösterimine sahip olması, bu konveks fonksiyonun sahip olduğu özellikleri, $p(t)$ fonksiyonu ile incelemeye imkân tanır. Örneğin, bir $M(u)$ N-fonksiyonunun integral temsili, $M$ nin *tamamlayanı* denilen ve çekirdeği

$$q(s) = \sup\{t \colon p(t) \leqslant s\}$$

ile elde edilebilen

$$N(v) = \int_0^{|v|} q(s)ds$$

N-fonksiyonunun belirlenmesinde önemli bir rol oynar.

Bir N-fonksiyon ile onun tamamlayanı arasında *Young eşitsizliği* denilen bir bağıntı vardır. Bu eşitsizlik yardımıyla, $M$ nin tamamlayanı her $v \in \mathbb{R}$ için

$$N(v) = \sup\{u\,|v| - M(u) \colon u \geqslant 0\}$$

ile tanımlanabilir.

W. Orlicz, $\ell_p$ uzayının inşasında $t^p$ fonksiyonunun aşikâr rol oynamasından esinlenerek, $t^p$ yerine daha genel bir $M$ fonksiyonu alıp, $\sum_{k=1}^{\infty} M(|a_k|)$ serisi yakınsak olacak şekildeki tüm $(a_k)$ dizilerinin cümlesinde çalışılabileceği fikrini doğal bularak, bu şekildeki dizilerin cümlesinin bir Banach uzayı yapısına sahip olması için $M$ üzerinde ne gibi kısıtlamalar yapılması gerektiğini araştırmıştır. Bu yüzden, söz konusu fonksiyon, *Orlicz fonksiyonu* ve bu fonksiyon ile tanımlanan uzay, *Orlicz dizi uzayı* olarak adlandırılmıştır.

Bir Orlicz fonksiyonu, Sonuç 2.1.2 deki gibi seçilişi ile $\ell_p$ $(1 \leqslant p < \infty)$ ye izomorf, Teorem 2.1.9 da belirtilen iki limit durumu ile, $\ell_1$, $\ell_\infty$ ve $c_0$ uzaylarına izomorf Orlicz dizi uzayları üretir.

Bir N-fonksiyon ile Orlicz fonksiyonu arasında çok yakın bir ilişki vardır. Bir Orlicz fonksiyonu

$$\lim_{u \to 0} \frac{M(u)}{u} = 0 \text{ ve } \lim_{u \to \infty} \frac{M(u)}{u} = \infty$$

veya buna denk olan

$$p(0) = 0 \text{ ve } p(\infty) = \lim_{t \to \infty} p(t) = \infty$$

şartlarını sağlaması gerekmeyen bir N-fonksiyondur.

Orlicz dizi uzaylarında $\Delta_2$-şartının önemli bir yeri vardır. $M$ Orlicz fonksiyonu sıfırda $\Delta_2$-şartını sağladığında, $\ell_M$ ayrılabilirdir ve $\ell_M$ nin kapalı bir alt uzayı olan $h_M$ uzayı $\ell_M$ ile çakışır.

S.D. Parashar & B. Choudhary [12], 1994 yılında, pozitif reel sayıların sınırlı bir $(p_k)$ dizisini kullanarak, $\ell_M$ uzayının, bir $\rho > 0$ reel sayısı için $\sum_{k=1}^{\infty} \left[M\left(\frac{|a_k|}{\rho}\right)\right]^{p_k}$ serisi yakınsak olacak şekildeki $(a_k)$ dizilerinin uzayı olan $\ell_M(p)$ ye genelleştirmesini verdiler. Ayrıca üzerinde tanımladıkları bir paranormla $\ell_M(p)$ uzayının tam olduğunu da gösterdiler.

1999 da D. Ghosh & P.D. Srivastava [3], Orlicz dizi uzayı tartışmasını vektör değerli dizi uzaylarına taşıyarak, yeni ve oldukça genel bir dizi uzayı tanımladılar. Normlu uzayların bir dizisi ve Bölüm 3 de belirtilen özelliklere sahip bir normal dizi uzayı yardımıyla elde ettikleri bu dizi uzayını, normlu uzay yapısına sahip olacak şekilde bir norm ile donattılar. $F(E_k, M)$ ile gösterdikleri bu dizi uzayında, $F = \ell_1$ ve her bir $k$ için $E_k = \mathbb{C}$ alınarak skaler değerli $\ell_M$ dizi uzayı elde edilmektedir.

Bu çalışmayı, D. Ghosh & P.D. Srivastava ve S.D. Parashar & B. Choudhary'nin tanımladığı uzayların bir genelleştirmesini yaptığımız ve bazı cebirsel - topolojik özelliklerini incelediğimiz $F(X_k, q_k, M, p_k, s)$ uzayı ile tamamladık. Tanımladığımız bu dizi uzayı ve üzerindeki paranorm, her bir $k$ için $X_k$ uzayı $q_k = \|\cdot\|_{X_k}$ normuyla bir normlu uzay, $p_k = 1$ ve $s = 0$ özel seçilişiyle, D. Ghosh & P.D. Srivastava'nın tanımladığı $F(X_k, M)$ uzayını ve üzerindeki normu; $F = \ell_1$, her bir $k$ için $X_k = \mathbb{C}$, $q_k = |\cdot|$ ve $s = 0$ alarak S.D. Parashar & B. Choudhary'nin tanımladığı $\ell_M(p)$ uzayını ve üzerindeki paranormu elde ederiz.

# BÖLÜM 1

# TEMEL KAVRAMLAR

## 1.1 Bazı Topolojik Kavramlar

Bu bölümde, çalışmamızda kullanacağımız temel tanım, teorem ve eşitsizliklere yer vereceğiz.

**Tanım 1.1.1.** *$X$ boş olmayan bir cümle olsun. Her $x, y, z \in X$ için*

*i)* $d(x, x) = 0$

*ii)* $d(x, y) = 0 \implies x = y$

*iii)* $d(x, y) = d(y, x)$

*iv)* $d(x, z) \leqslant d(x, y) + d(y, z)$

*özelliklerine sahip $d\colon X \times X \longrightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonuna metrik ve $(X, d)$ ikilisine de metrik uzay denir. (i), (iii) ve (iv) şartlarını sağlayan $d$ fonksiyonuna bir yarımetrik, $(X, d)$ ikilisine de bir yarımetrik uzay denir [11].*

**Tanım 1.1.2.** *$X$, $\mathbb{C}$ karmaşık sayılar cismi üzerinde bir lineer uzay olsun. Her $x, y \in X$ için*

*i)* $g(\theta) = 0$

*ii)* $g(x) = g(-x)$

*iii)* $g(x + y) \leqslant g(x) + g(y)$

*iv)* $\lambda_n \to \lambda_0$ $(n \to \infty)$ *ve* $g(x_n - x_0) \to 0$ $(n \to \infty)$ *iken* $g(\lambda_n x_n - \lambda_0 x_0) \to 0$ $(n \to \infty)$ *(burada $\lambda_0, \lambda_n \in \mathbb{C}$ ve $x_0, x_n \in X$ dir)*

*şartlarını sağlayan $g\colon X \longrightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonuna bir paranorm, $(X, g)$ ikilisine de paranormlu uzay denir. Ayrıca $g(x) = 0$ iken $x = \theta$ ise $g$ ye total paranorm denir [11].*

**Tanım 1.1.3.** *d yarımetriği*

$$d(x, y) = g(x - y)$$

*şeklinde bir g paranormundan elde edilmiş ise d ye invaryant yarımetrik denir [11].*

**Tanım 1.1.4.** *Yarımetriği bir paranormdan elde edilebilen lineer uzaya lineer yarımetrik uzay ve yarımetriği bir total paranormdan elde edilebilen lineer uzaya lineer metrik uzay denir [11].*

**Tanım 1.1.5.** *$X$, $\mathbb{C}$ karmaşık sayılar cismi üzerinde bir lineer uzay olsun. Her $\lambda \in \mathbb{C}$ ve $x, y \in X$ için*

*i)* $q(\lambda x) = |\lambda|\, q(x)$

*ii)* $q(x + y) \leqslant q(x) + q(y)$

*şartlarını sağlayan $q \colon X \longrightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonuna bir yarınorm, $(X, q)$ ikilisine de yarınormlu uzay denir. (i) ve (ii) şartlarının yanında $q(x) = 0 \implies x = \theta$ şartı da sağlanıyorsa, $q = \|\cdot\|$ fonksiyonuna norm, $(X, \|\cdot\|)$ ikilisine de normlu uzay denir [11].*

**Tanım 1.1.6.** *$(X, d)$ metrik uzayında bir $x = (x_k)$ dizisinin Cauchy dizisi olması için gerek ve yeter şart, $\forall \varepsilon > 0$ için $\exists n_0 = n_0(\varepsilon) \ni \forall i, j > n_0$ için $d(x_i, x_j) < \varepsilon$ olmasıdır [11].*

**Tanım 1.1.7.** *Bir metrik uzayda, her Cauchy dizisi metrik uzayın bir noktasına yakınsıyorsa metrik uzaya tamdır denir. Daha açık ifade etmek gerekirse, $i, j \to \infty$ için $d(x_i, x_j) \to 0$ olduğunda, $i \to \infty$ için $d(x_i, x) \to 0$ olacak şekilde bir $x \in X$ varsa metrik uzaya tamdır denir [11].*

**Tanım 1.1.8.** *$(X, d)$ metrik uzay ve $S \subseteq X$ olsun. $\bar{S} = X$ ise $S$ ye $X$ de yoğundur denir [11].*

**Tanım 1.1.9.** *Sayılabilir yoğun bir alt cümle içeren $(X, d)$ metrik uzayına ayrılabilirdir denir [11].*

**Tanım 1.1.10.** $\|\cdot\|$ *normuyla tam olan* $(X, \|\cdot\|)$ *normlu lineer uzayına Banach uzayı denir [11].*

**Tanım 1.1.11.** $X$ *ve* $Y$ *iki Banach uzayı olsun. Eğer tersi de sınırlı olan bir* $T\colon X \longrightarrow Y$ *bire-bir sınırlı lineer dönüşümü varsa* $T$ *ye* $X$ *den* $Y$ *içine izomorfizm denir.* $T$ *aynı zamanda üzerine bir dönüşüm ise* $X$ *den* $Y$ *üzerine bir izomorfizm olarak adlandırılır. Eğer* $X$ *den* $Y$ *üzerine bir izomorfizm varsa* $X$ *ve* $Y$ *uzaylarına izomorf uzaylar denir ve* $X \approx Y$ *ile gösterilir.* $T\colon X \longrightarrow Y$ *içine bir izomorfizm olmak üzere, her* $x \in X$ *için* $\|Tx\|_Y = \|x\|_X$ *ise* $T$ *dönüşümüne izometri denir. Eğer* $X$ *den* $Y$ *üzerine bir izometri varsa* $X$ *ve* $Y$ *uzaylarına izometrik uzaylar denir [8].*

**Tanım 1.1.12 (Schauder Baz).** $X$ *bir Banach uzayı olsun. Her* $x \in X$ *için*

$$\left\| x - \sum_{i=1}^{n} a_i x_i \right\| \to 0 \ (n \to \infty \text{ için})$$

*olacak şekilde skalerlerin bir tek* $(a_n)$ *dizisi varsa,* $(x_n)$ *dizisine* $X$ *in Schauder bazı denir [10].*

Bu çalışmada baz çeşitleri incelenmeyeceğinden, "Schauder bazı" yerine, bazen kısaca "baz" kelimesi kullanılacaktır. Bu bir karışıklığa neden olmamalıdır.

$(x_n)$ Schauder bazına sahip bir $X$ uzayı, $(a_n)$ katsayılar dizisi yardımıyla tek türlü olarak yazılabilen $x = \sum_{n=1}^{\infty} a_n x_n$ dizilerinin uzayı olarak düşünülebilir.

$(X, \|\cdot\|)$, $(x_n)$ Schauder bazına sahip bir Banach uzayı olsun. $X$ deki her $x = \sum_{n=1}^{\infty} a_n x_n$ için $|||x||| = \sup_n \left\| \sum_{i=1}^{n} a_i x_i \right\|$ ifadesi sonlu olup, $|||\cdot|||$ $X$ üzerinde bir normdur ve her $x \in X$ için $\|x\| \leqslant |||x|||$ dir. Ayrıca $X$, $|||\cdot|||$ normuyla tamdır ve böylece, $\|\cdot\|$ ve $|||\cdot|||$ normları denktir.

$(x_n)$ bazına sahip bir $X$ Banach uzayı ayrılabilirdir. Çünkü, $n = 1, 2, \ldots$ ve $r_i$ ler rasyonel sayılar olmak üzere, bütün sonlu $\sum_{i=1}^{n} r_i x_i$ lineer kombinasyonların cümlesi $X$ de sayılabilir yoğun bir cümledir.

**Önerme 1.1.1.** $X$, $(x_n)$ *Schauder bazına sahip bir Banach uzayı olsun. Bu durumda*

$$P_n\left(\sum_{i=1}^{\infty} a_i x_i\right) = \sum_{i=1}^{n} a_i x_i$$

*olarak tanımlanan* $P_n\colon X \longrightarrow X$ *projeksiyonları sınırlı lineer operatörlerdir ve* $\sup_n \|P_n\| < \infty$ *dir [10].*

$P_n$ projeksiyonlarına doğal projeksiyonlar ve $\sup_n \|P_n\|$ reel sayısına $(x_n)$ nin baz sabiti denir. Baz sabiti 1 olan bir baza monoton baz denir. Başka bir ifadeyle, $(a_n)$ dizisinin her türlü seçimi için, $\left\{\left\|\sum_{i=1}^{n} a_i x_i\right\|\right\}$ dizisi azalmayan ise $(x_n)$ monoton bazdır. Her $(x_n)$ Schauder bazı, $|||x||| = \sup_n \|P_n x\|$ normuna göre monotondur. Gerçekten

$$|||P_n x||| = \sup_m \|P_m P_n x\| = \sup_{1 \leqslant m \leqslant n} \|P_m x\| \leqslant |||x|||$$

dir. Böylece, $X$ in herhangi bir $(x_n)$ Schauder bazı verildiğinde, $X$ için bazın monoton olduğu bir norma geçilebilir.

**Tanım 1.1.13.** *$(x_i)$, $X$ için bir baz ve $(y_i)$, $Y$ için bir baz ise skalerlerin herhangi bir $(a_i)$ dizisi için*

$$\sum_i a_i x_i \text{ yakınsaktır} \iff \sum_i a_i y_i \text{ yakınsaktır}$$

*ise $(x_i)$ ve $(y_i)$ bazları denktir denir [8].*

**Tanım 1.1.14.** *$X$ bir Banach uzayı ve $(x_i)$, $X$ için bir baz olsun. Tamsayıların her $\pi$ permütasyonu için $(x_i)$ dizisi $\left(x_{\pi(i)}\right)$ dizisine denk ise $(x_i)$ bazına simetrik baz denir [8].*

Her $i$ için $e_i$, $i$-inci koordinatı 1, her $j \neq i$ için $j$-inci koordinatı 0 olan dizi olmak üzere $(e_i)$, birim vektörlerin cümlesini göstersin. Birim vektörler, $c_0$ ve $\ell_p$ $(1 \leqslant p < \infty)$ için bir simetrik baz şeklindedir. Bu baza birim vektör baz denir.

**Önerme 1.1.2.** *$(X, \|\cdot\|)$, $(x_i)$ simetrik bazına sahip normlu bir uzay olsun. Bu durumda, $X$ üzerinde bu norma denk olan, her $x = \sum_i a_i x_i$ için*

$$|||x||| = \sup_{\theta_i = \pm 1} \sup_{\pi} \left\| \sum_i \theta_i a_{\pi(i)} x_i \right\|$$

*olacak şekilde bir $|||\cdot|||$ normu vardır [8].*

**Tanım 1.1.15.** *$(x_i)$ simetrik bazına sahip normlu bir $X$ uzayı üzerinde, yukarıdaki özellikleri sağlayan $|||\cdot|||$ normuna simetrik baz normu denir [8].*

**Önerme 1.1.3.** *$X$ bir Banach uzayı olsun. Her bir $i$ için $x_i \in X$ vektörlerinin bir $(x_i)$ dizisi için aşağıdaki şartlar denktir:*

*i) Tamsayıların her $\pi$ permütasyonu için $\sum_{n=1}^{\infty} x_{\pi(n)}$ serisi yakınsaktır.*

*ii) Doğal sayıların, $n_1 < n_2 < n_3 < \cdots$ olacak şekildeki her türlü seçimi için $\sum_{i=1}^{\infty} x_{n_i}$ serisi yakınsaktır.*

*iii) İşaretlerin her türlü $\theta_n$ seçimi (yani, $\theta_n = \pm 1$) için $\sum_{n=1}^{\infty} \theta_n x_n$ serisi yakınsaktır.*

*iv) $\varepsilon > 0$ verildiğinde, $min\{i \in \sigma\} > n$ şartını sağlayan $\sigma$ tamsayılarının her sonlu cümlesi için $\left\| \sum_{i \in \sigma} x_i \right\| < \varepsilon$ olacak şekilde bir $n$ tamsayısı vardır [10].*

**Önerme 1.1.4.** *Eğer $X$, $c_0$ ya da $\ell_p$ $(1 \leqslant p < \infty)$ uzayına izomorf ise $X$ için her simetrik baz $c_0$ ya da $\ell_p$ nin birim vektör bazına denktir [8].*

**Tanım 1.1.16.** *$(\lambda, \tau)$ lineer topolojiye sahip bir dizi uzayı olsun. Her bir $i \geqslant 1$ için $P_i(x) = x_i$ olarak tanımlanan $P_i \colon \lambda \longrightarrow \mathcal{F}$ dönüşümleri sürekli ise $\lambda$ dizi uzayına K-uzayı denir. Bir Banach uzayı olan K-uzayına BK-uzayı denir. $\lambda$ bir K-uzayı ve bir $x \in \lambda$ için*

$$x^{(n)} = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i \to x \quad (\tau \text{ topolojisine göre})$$

*ise $x \in \lambda$, AK özelliğine sahiptir denir. Eğer her bir $x \in \lambda$, AK özelliğine sahip ise $\lambda$ dizi uzayına AK-uzayı denir [5].*

**Tanım 1.1.17.** *$(X, \|\cdot\|)$ normlu uzayı, üzerinde tanımlı bir $\cdot$ (çarpma) işlemiyle birimli cebir yapısına sahip olsun. Her $x, y \in X$ için $\|x \cdot y\| \leqslant \|x\| \|y\|$ ve $\|1\| = 1$ ise $X$ uzayına bir norm cebiri denir. Eğer $X$ yarınormlu uzay ise yarınorm cebiri ve Banach uzayı ise Banach cebiri adını alır [7].*

**Tanım 1.1.18.** *Bir $\lambda$ dizi uzayı, her $x = (x_i), y = (y_i) \in \lambda$ için $xy = (x_i y_i)$ olarak tanımlanan koordinatsal çarpma işlemi altında kapalı ise $\lambda$ ya dizi cebiri denir [5].*

**Tanım 1.1.19.** *Bir $\lambda$ dizi uzayı için $x = (x_i) \in \lambda$ iken $|y_i| \leqslant |x_i|$ olduğunda $y = (y_i) \in \lambda$ oluyorsa $\lambda$ ya normal dizi uzayı denir [5].*

**Tanım 1.1.20.** *Bir $\lambda$ dizi cebiri aynı zamanda normal ise $\lambda$ ya normal dizi cebiri denir [5].*

$\ell_p$, $c_0$, $\ell_\infty$ ve $w$ normal dizi cebiridir, $c$ ise dizi cebiri olduğu halde normal değildir.

**Tanım 1.1.21.** *$(\lambda, q)$ yarınormlu bir dizi uzayı olsun. Her $x = (x_i), y = (y_i) \in \lambda$ ve $i \geqslant 1$ için $|x_i| \leqslant |y_i|$ olduğunda $q(x) \leqslant q(y)$ oluyorsa $q$ ya mutlak monoton yarınorm denir [5].*

**Teorem 1.1.1 (Ortalama Değer Teoremi).** *$q$, $I = [a,b]$ üzerinde sürekli bir fonksiyon ve $r$, $I$ üzerinde integrallenebilen negatif olmayan bir fonksiyon olsun. Bu durumda*

$$\int_a^b q(t)r(t)dt = q(c)\int_a^b r(t)dt$$

*olacak şekilde bir $c \in I$ vardır [14].*

**Önerme 1.1.5.** *Her bir $k$ için $a_k, b_k \in \mathbb{C}$ ve $p_k > 0$ olsun. $H = \sup p_k$ olmak üzere*

$$|a_k + b_k|^{p_k} \leqslant C\left\{|a_k|^{p_k} + |b_k|^{p_k}\right\}$$

*eşitsizliği sağlanır, burada $C = \max(1, 2^{H-1})$ dir [11].*

**Teorem 1.1.2.** *$\lambda$ bir normal dizi cebiri ve $\|\cdot\|_\lambda$, $\lambda$ üzerinde bir mutlak monoton yarınorm olsun. Bu durumda, $p > 1$ olmak üzere, her $u, v \in \lambda$ için*

$$\|(u+v)^p\|_\lambda^{1/p} \leqslant \|u^p\|_\lambda^{1/p} + \|v^p\|_\lambda^{1/p}$$

*dir, burada $u^p = (u_n^p)$ ve $(u+v)^p = ((u_n+v_n)^p)$ dir [15].*

## 1.2 Konveks Fonksiyonlar

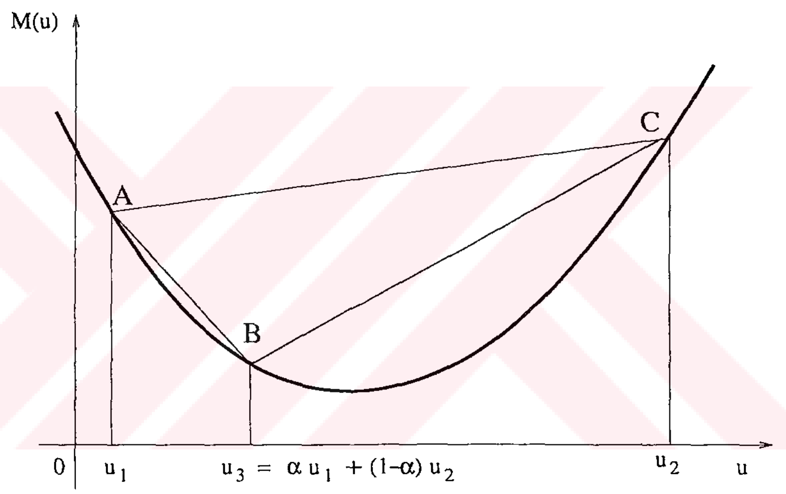
### 1.2.1 Orlicz fonksiyonu ve N-fonksiyonlar

**Tanım 1.2.1 (Konveks Fonksiyon).** *$\forall u_1, u_2 \in \mathbb{R}$ için*

$$M\left(\frac{u_1+u_2}{2}\right) \leqslant \frac{1}{2}\left[M(u_1)+M(u_2)\right] \tag{1.1}$$

*eşitsizliğini sağlayan reel değerli $M$ fonksiyonuna konvekstir denir [6].*

Bu kısımda, sadece sürekli konveks fonksiyonlarla ilgileneceğiz. (1.1) şartı, $M(u)$ fonksiyonunun grafiği üzerinde iki noktayı birleştiren kirişin orta noktasının, grafiğin bu noktaya karşılık gelen noktasının üstünde kalacağı anlamına gelir.




Şekil 1.1.

Şekil 1.1 incelendiğinde, her kirişin grafiğin üzerinde kalacağı geometrik olarak açıktır. Bu, $0 \leqslant \alpha \leqslant 1$ olacak şekildeki her $\alpha$ için

$$M\left[\alpha u_1 + (1-\alpha)u_2\right] \leqslant \alpha M(u_1) + (1-\alpha)M(u_2) \tag{1.2}$$

eşitsizliğinin sağlanacağı anlamına gelir. Bu eşitsizliğe Jensen eşitsizliği denir.

Jensen eşitsizliği analitik olarak da ispat edilebilir. Kabul edelim ki Jensen eşitsizliği $\forall \alpha \in [0,1]$ için sağlanmasın. Bu durumda, $[0,1]$ üzerinde

$$f(\alpha) = M\left[\alpha u_1 + (1-\alpha)u_2\right] - \alpha M(u_1) - (1-\alpha)M(u_2) \tag{1.3}$$

sürekli fonksiyonunun $M_0$ maksimum değeri pozitif olur. $\alpha_0$, $f(\alpha) = M_0$ olacak şekildeki en küçük argumanı göstersin ve $\delta > 0$, $[\alpha_0 - \delta, \alpha_0 + \delta] \subset [0,1]$ olacak şekilde bir sayı olsun. Bu durumda, (1.1) eşitsizliği

$$u_1^* = (\alpha_0 - \delta)u_1 + (1 - \alpha_0 + \delta)u_2$$
$$u_2^* = (\alpha_0 + \delta)u_1 + (1 - \alpha_0 - \delta)u_2$$

noktalarına uygulanıp, (1.3) eşitliği göz önünde tutulursa

$$f(\alpha_0) \leqslant \frac{f(\alpha_0 - \delta) + f(\alpha_0 + \delta)}{2} < M_0$$

elde edilir. $f(\alpha_0) = M_0$, yukarıdaki eşitsizlikle çelişeceğinden (1.2) eşitsizliği her $\alpha \in [0,1]$ için sağlanır.

$u_1 \neq u_2$ ise ya sadece $\alpha = 0$ ve $\alpha = 1$ için ya da her $\alpha \in [0,1]$ için (1.2), eşitlik olarak sağlanır. Kabul edelim ki (1.2), en az bir $\alpha_0 \in (0,1)$ için eşitlik olarak sağlansın. Bu, $f(\alpha_0) = 0$ olması anlamına gelir. Bu durumda, her $\alpha \in [0,1]$ için $f(\alpha) = 0$ olduğunu göstereceğiz. Sürekli $f(\alpha)$ fonksiyonu konveks olduğundan Jensen eşitsizliğini sağlar. Kabul edelim ki, en az bir $\alpha_1 \in (0,1)$ için $f(\alpha_1) < 0$ olsun (daha önce ispat edildiği gibi $f(\alpha) > 0$ olamaz). $\alpha_1 < \alpha_0$ alalım.

$$\alpha_0 = \frac{1 - \alpha_0}{1 - \alpha_1}\alpha_1 + \frac{\alpha_0 - \alpha_1}{1 - \alpha_1}$$

olduğundan, Jensen eşitsizliği

$$f(\alpha_0) \leqslant \frac{1 - \alpha_0}{1 - \alpha_1} f(\alpha_1) + \frac{\alpha_0 - \alpha_1}{1 - \alpha_1} f(1) = \frac{1 - \alpha_0}{1 - \alpha_1} f(\alpha_1) < 0$$

eşitsizliğini verir ki bu, $f(\alpha_0) = 0$ ile çelişir. O halde her $\alpha \in [0,1]$ için (1.2) eşitlik olarak sağlanır.

(1.1) eşitsizliği başka genelleştirmelere de izin verir: Keyfi $u_1, u_2, \cdots, u_n$ için

$$M\left(\frac{u_1 + u_2 + \cdots + u_n}{n}\right) \leqslant \frac{1}{n}\left[M(u_1) + M(u_2) + \cdots + M(u_n)\right] \tag{1.4}$$

dir. (1.1) eşitsizliğinin ardışık olarak uygulanmasıyla, $2^k$ şeklindeki bütün n sayıları için (1.4) eşitsizliğinin sağlanacağı ispatlanabilir. n sayısının keyfi olması hali daha karmaşıktır. $n + m = 2^k$ olacak şekilde bir $m$ sayısı alalım. Bu durumda

$$M\left(\frac{u_1 + \cdots + u_n + m.u^*}{n + m}\right) \leqslant \frac{1}{n + m}\left[M(u_1) + \cdots + M(u_n) + mM(u^*)\right]$$

olur. Burada, $u^* = \frac{u_1+u_2+\cdots+u_n}{n}$ alınırsa, (1.4) eşitsizliği elde edilir.

Şimdi, $u_1 \leqslant u_3 \leqslant u_2$ olsun. Bu durumda

$$u_3 = \frac{u_2 - u_3}{u_2 - u_1} u_1 + \frac{u_3 - u_1}{u_2 - u_1} u_2$$

olup, (1.2) eşitsizliğinden

$$M(u_3) \leqslant \frac{u_2 - u_3}{u_2 - u_1} M(u_1) + \frac{u_3 - u_1}{u_2 - u_1} M(u_2)$$

ve bu iki eşitsizlikten

$$\frac{M(u_3) - M(u_1)}{u_3 - u_1} \leqslant \frac{M(u_2) - M(u_1)}{u_2 - u_1} \leqslant \frac{M(u_2) - M(u_3)}{u_2 - u_3} \tag{1.5}$$

elde edilir.

Elde edilen bu eşitsizliklerden, "AB kirişinin eğiminin AC kirişinin eğiminden ve BC kirişinin eğiminden daha küçük olduğu" sonucu çıkarılabilir.

**Lemma 1.2.1.** *Sürekli ve konveks bir $M(u)$ fonksiyonu, her noktada*

$$p_-(u) \leqslant p_+(u) \tag{1.6}$$

*olacak şekilde bir $p_+(u)$ sağ türevine ve bir $p_-(u)$ sol türevine sahiptir [6].*

**Lemma 1.2.2.** *Sürekli ve konveks bir $M(u)$ fonksiyonunun $p_+(u)$ sağ türevi, azalmayan sağdan sürekli bir fonksiyondur [6].*

**Uyarı 1.2.1.** *Benzer olarak, $M(u)$ fonksiyonunun $p_-(u)$ sol türevi, azalmayan soldan sürekli bir fonksiyondur [6].*

**Tanım 1.2.2 (Lipschitz şartı).** *$A \subset \mathbb{R}$ ve $f\colon A \longrightarrow \mathbb{R}$ bir fonksiyon olsun. Her $u, u' \in A$ için*

$$|M(u) - M(u')| \leqslant K\,|u - u'|$$

*olacak şekilde bir $K > 0$ sabiti varsa, $f$ fonksiyonu $A$ cümlesi üzerinde Lipschitz şartını sağlar denir [14].*

**Tanım 1.2.3.** *$\varepsilon > 0$ verildiğinde, $(a, b)$ aralığının kapsadığı $[a_i, b_i)$ ayrık aralıkları için $\sum_{i=1}^{n} |M(b_i) - M(a_i)| < \varepsilon$ olacak şekilde bir $\delta_\varepsilon > 0$ sayısı varsa, $M$ fonksiyonu $(a, b)$ aralığında mutlak süreklidir denir [13].*

**Lemma 1.2.3.** *Bir $M(u)$ konveks fonksiyonu mutlak süreklidir ve her sonlu aralıkta Lipschitz şartını sağlar [6].*

**Teorem 1.2.1 (Konveks fonksiyonun integral temsili).** *$M(a) = 0$ şartını sağlayan her konveks $M(u)$ fonksiyonu*

$$M(u) = \int_a^u p(t)dt$$

*formunda temsil edilebilir, burada $p(t)$ azalmayan sağdan sürekli bir fonksiyondur [6].*

**Tanım 1.2.4 (Orlicz fonksiyonu).** *Çift, konveks, sürekli ve $M(0) = 0$, $x \to \infty$ için $M(x) \to \infty$ özelliklerine sahip bir $M\colon \mathbb{R} \longrightarrow [0,\infty)$ fonksiyonuna Orlicz fonksiyonu denir. Eğer en az bir $x > 0$ için $M(x) = 0$ ise $M$ fonksiyonuna dejenere Orlicz fonksiyonu denir [9].*

İntegral gösterim kullanılarak her Orlicz fonksiyonu, $p(t)$ nin durumuna göre üç farklı gruba ayrılabilir:

i) $p(0) = a$ olacak şekilde bir $a > 0$ vardır.

ii) $0 \leqslant t \leqslant t_0$ için $p(t) = 0$ olacak şekilde bir $t_0 > 0$ vardır.

iii) $p(0) = 0$ ve $t > 0$ için $p(t) > 0$ dır.

Birinci ve ikinci gruptaki Orlicz fonksiyonu dejenere Orlicz fonksiyonudur. Üçüncü gruptaki Orlicz fonksiyonuna M-fonksiyon diyeceğiz.

**Tanım 1.2.5 (N-fonksiyonun birinci tanımı).**

$$M(u) = \int_0^{|u|} p(t)dt \tag{1.7}$$

*gösterimine sahip olan bir $M(u)$ fonksiyonuna N-fonksiyon denir, burada $p(t)$ fonksiyonu $t \geqslant 0$ için sağdan sürekli, $t > 0$ için pozitif ve*

$$p(0) = 0, \quad p(\infty) = \lim_{t\to\infty} p(t) = \infty \tag{1.8}$$

*şartlarını sağlayan azalmayan bir fonksiyondur [6].*

**Örnek 1.2.1.** *$M_1(u) = \frac{|u|^\alpha}{\alpha}$ $(\alpha > 1)$ ve $M_2(u) = e^{u^2} - 1$ N-fonksiyonlardır. Gerçekten $p_1(t) = M_1'(t) = t^{\alpha-1}$ ve $p_2(t) = M_2'(t) = 2te^{t^2}$ fonksiyonları, $t \geqslant 0$ için sağdan sürekli, $t > 0$ için pozitif ve (1.8) şartlarını sağlar [6].*

Şimdi, N-fonksiyonların bazı özelliklerini verelim.

(1.7) gösteriminden, her N-fonksiyon çift, sürekli, orijinde sıfır değerini alan ve değişkenin pozitif değerleri için artan bir fonksiyondur.

N-fonksiyonlar konvekstir. Gerçekten, $0 \leqslant u_1 < u_2$ ise

$$\begin{aligned} M\left(\frac{u_1+u_2}{2}\right) &= \int_0^{(u_1+u_2)/2} p(t)dt \\ &= \int_0^{u_1} p(t)dt + \int_{u_1}^{(u_1+u_2)/2} p(t)dt \\ &= \int_0^{u_1} p(t)dt + \frac{1}{2}\left[\int_{u_1}^{(u_1+u_2)/2} p(t)dt + \int_{u_1}^{(u_1+u_2)/2} p(t)dt\right] \end{aligned}$$

ve $r = t - u_1$ değişken değiştirmesi yapılırsa

$$\int_{u_1}^{(u_1+u_2)/2} p(t)dt = \int_0^{(u_2-u_1)/2} p(r+u_1)dr$$

olur. $u_1 < \frac{u_1+u_2}{2}$ olmak üzere p nin monotonluğu, $p(r+u_1) < p\left(r + \frac{u_1+u_2}{2}\right)$ dolayısıyla

$$\int_{u_1}^{(u_1+u_2)/2} p(t)dt < \int_0^{(u_2-u_1)/2} p\left(r + \frac{u_1+u_2}{2}\right)dr$$

eşitsizliğini verir. Eşitsizliğin sağındaki integral için $t = r + \frac{u_1+u_2}{2}$ değişken değiştirmesi yapılırsa

$$\int_{u_1}^{(u_1+u_2)/2} p(t)dt < \int_{(u_1+u_2)/2}^{u_2} p(t)dt$$

elde edilir. Böylece

$$\begin{aligned} M\left(\frac{u_1+u_2}{2}\right) &< \int_0^{u_1} p(t)dt + \frac{1}{2}\left[\int_{u_1}^{(u_1+u_2)/2} p(t)dt + \int_{(u_1+u_2)/2}^{u_2} p(t)dt\right] \\ &= \int_0^{u_1} p(t)dt + \frac{1}{2}\int_{u_1}^{u_2} p(t)dt \\ &= \frac{1}{2}\int_0^{u_1} p(t)dt + \frac{1}{2}\int_0^{u_1} p(t)dt + \frac{1}{2}\int_{u_1}^{u_2} p(t)dt \\ &= \frac{1}{2}\left[M(u_1) + M(u_2)\right] \end{aligned}$$

olur. $u_1$ ve $u_2$ nin keyfi olması halinde, (1.7) gösteriminden açıkça

$$M\left(\frac{u_1+u_2}{2}\right) = M\left(\frac{|u_1+u_2|}{2}\right) \leqslant M\left(\frac{|u_1|+|u_2|}{2}\right)$$
$$\leqslant \frac{1}{2}\left[M(u_1)+M(u_2)\right]$$

dir.

(1.2) de $u_2 = 0$ alınırsa, $0 \leqslant \alpha \leqslant 1$ olmak üzere

$$M(\alpha u_1) \leqslant \alpha M(u_1) \tag{1.9}$$

elde edilir. $p(t)$ nin azalmayan olduğu göz önünde tutulduğunda, $u > 0$ için

$$\frac{M(u)}{u} = \frac{1}{u}\int_0^u p(t)dt \leqslant p(u)$$

olacağından, (1.8) eşitsizliklerinden birincisi

$$\lim_{u\to 0} \frac{M(u)}{u} = 0 \tag{1.10}$$

eşitliğini verir. Benzer olarak, $u > 0$ için

$$\frac{M(u)}{u} = \frac{1}{u}\int_0^u p(t)dt \geqslant \frac{1}{u}\int_{u/2}^u p(t)dt \geqslant p(u/2) \tag{1.11}$$

olup, (1.8) eşitsizliklerinden ikincisi

$$\lim_{u\to \infty} \frac{M(u)}{u} = \infty \tag{1.12}$$

eşitliğini verir.

Bir N-fonksiyon için, (1.9) eşitsizliğinin eşitlik hali, sadece $\alpha = 0$, $\alpha = 1$ ya da $u_1 = 0$ olması halinde sağlanacaktır. Şimdi, $u_1 \neq 0$ ve en az bir $\alpha \in (0,1)$ için (1.9) eşitsizliğinin eşitlik halinin sağlandığını kabul edelim. Bu durumda, Jensen eşitsizliğinin ispatında olduğu gibi, (1.9) eşitsizliği her $\alpha \in [0,1]$ için eşitliğe dönüşür. Fakat, her $\alpha \in [0,1]$ için

$$\frac{M(\alpha u_1)}{\alpha u_1} = \frac{M(u_1)}{u_1}$$

dir ve bu eşitlikte $\alpha \to 0$ için limit alınırsa

$$\lim_{\alpha\to 0} \frac{M(\alpha u_1)}{\alpha u_1} = \frac{M(u_1)}{u_1}$$

elde edilir. Bu ise, (1.10) ile çelişir ($u_1 \neq 0$ olduğundan $M(u_1) = 0$ olamaz).

Böylece, $0 < \alpha < 1$, $u \neq 0$ için

$$M(\alpha u) < \alpha M(u) \tag{1.13}$$

dir.

(1.13) eşitsizliğinde $\alpha = \frac{u'}{u}$ alınarak, $\frac{M(u)}{u}$ fonksiyonunun, $u$ nun pozitif değerleri için kesin artan olduğu, yani $0 < u' < u$ için

$$\frac{M(u')}{u'} < \frac{M(u)}{u} \tag{1.14}$$

eşitsizliğinin sağlandığı hemen görülebilir.

$u \geqslant 0$ için $M(u)$ N-fonksiyonunun tersi olan fonksiyonu, $M^{-1}(v)$ $(0 \leqslant v < \infty)$ ile gösterelim. Bu durumda, (1.2) eşitsizliğinin bir sonucu olarak, $v_1, v_2 > 0$ için

$$M^{-1}\left[\alpha v_1 + (1-\alpha)v_2\right] \geqslant \alpha M^{-1}(v_1) + (1-\alpha)M^{-1}(v_2)$$

eşitsizliği sağlanır.

$M(u)$ N-fonksiyonunun $p(u)$ sağ türevinin monotonluğundan

$$\begin{aligned} M(u) + M(v) &= \int_0^{|u|} p(t)dt + \int_0^{|v|} p(t)dt \leqslant \int_0^{|u|} p(t)dt + \int_{|u|}^{|u|+|v|} p(t)dt \\ &= \int_0^{|u|+|v|} p(t)dt = M(|u|+|v|) \end{aligned} \tag{1.15}$$

yazılabilir, burada

$$\int_0^{|v|} p(t)dt \leqslant \int_{|u|}^{|u|+|v|} p(t)dt$$

olduğu bir değişken değiştirmesiyle hemen görülebilir.

Kabul edelim ki, $a = M(u)$, $b = M(v)$ negatif olmayan keyfi sayılar olsun. Böylece, (1.15) eşitsizliğinden

$$M^{-1}(a+b) \leqslant M^{-1}(a) + M^{-1}(b) \tag{1.16}$$

elde edilir.

Bazen, N-fonksiyonun şu tanımı kullanmak daha uygundur:

**Tanım 1.2.6 (N-fonksiyonun ikinci tanımı).** *(1.10) ve (1.12) şartlarını sağlayan çift, sürekli, konveks bir $M(u)$ fonksiyonuna N-fonksiyon denir [6].*

Şimdi, bu tanımın, N-fonksiyonun birinci tanımına denk olduğunu gösterelim. Bunun için, Tanım 1.2.6 kullanılarak bir N-fonksiyonun (1.7) formunda temsil edilebileceğini göstermek yeterlidir.

(1.10) eşitliğinin bir sonucu olarak $M(0) = 0$ dır. Bu yüzden, Teorem 1.2.1 ve $M(u)$ fonksiyonunun çift oluşudan, $M(u)$ fonksiyonu

$$M(u) = \int_0^{|u|} p(t)dt$$

formunda temsil edilebilir, burada $p(u)$ fonksiyonu (yani $M(u)$ fonksiyonunun sağ türevi) $u > 0$ için azalmayan ve sağdan süreklidir. $u > 0$ için $p(u) \geqslant \frac{M(u)}{u}$ olduğundan, $u > 0$ için $p(u) > 0$ dir ve (1.12) eşitliğinin bir sonucu olarak

$$\lim_{u\to\infty} p(u) = \infty$$

olur.

Diğer taraftan, ortalama değer teoreminden, $u > 0$ için

$$M(2u) = \int_0^{2u} p(t)dt > \int_u^{2u} p(t)dt > up(u) \tag{1.17}$$

eşitsizliği elde edilir. Böylece, (1.10) eşitliğinin bir sonucu olarak

$$p(0) = \lim_{u\to 0} p(u) = 0$$

elde edilir.

N-fonksiyon ve Orlicz fonksiyonu tanımları dikkate alındığında bir N-fonksiyonun, (1.10) ve (1.12) şartlarını sağlayan bir Orlicz fonksiyonu olduğu hemen görülebilir.

### N-fonksiyonların bileşkesi

$M_1(u)$, $M_2(u)$ N-fonksiyonlarının bileşkesi olan $M_2[M_1(u)] = M(u)$ fonksiyonu da bir N-fonksiyondur. Böylece, $u > 0$ için $M(u)$ fonksiyonu, $p(u) = p_1(u).p_2[M_1(u)]$ şeklinde bir sağ türeve sahiptir; burada $p_1(u)$, $p_2(u)$ fonksiyonları $M_1(u)$ ve $M_2(u)$ N-fonksiyonlarının sağ türevidir.

$p_1(u)$ ve $p_2(u)$ fonksiyonları sağdan sürekli, azalmayan ve (1.8) şartlarını sağladığından, $p(u)$ fonksiyonu da bu şartları sağlar.

Yukarıdaki ifadenin tersi de doğrudur: Her $M(u)$ N-fonksiyonu, $M(u) = M_2[M_1(u)]$ olacak şekilde iki N-fonksiyonun bileşkesi olarak yazılabilir.

$M_1(u)$ N-fonksiyonu verildiğinde $M_2(u)$ fonksiyonu

$$M_2(u) = M\left[M_1^{-1}(|u|)\right] \tag{1.18}$$

eşitliği ile tek olarak tanımlıdır, burada $M_1^{-1}(v)$, $M(u)$ fonksiyonunun tersidir.

Böylece, $M(u)$ fonksiyonunu bir bileşke formunda temsil etmek için, $M_2(u) = M[M^{-1}(|u|)]$ bir N-fonksiyon olacak şekilde bir $M_1(u)$ N-fonksiyonu bulmalıyız. $u > 0$ için

$$p_2(u) = \frac{p\left[M_1^{-1}(u)\right]}{p_1\left[M_1^{-1}(u)\right]}$$

eşitliğine sahip olduğumuzdan $M_2(u)$ fonksiyonunun bir N-fonksiyon olması için bir gerek ve yeter şart, $\frac{p(u)}{p_1(u)}$ fonksiyonunun azalmayan, sağdan sürekli ve (1.8) şartlarını sağlayan bir fonksiyon olmasıdır, çünkü $M_1^{-1}(v)$ sürekli fonksiyonu monotondur ve $v \to 0$ için sıfıra yakınsar, $v \to \infty$ için sonsuza ıraksar.

Böylece, $\frac{p(u)}{p_1(u)}$ fonksiyonu azalmayan, sağdan sürekli ve (1.8) şartlarını sağlayacak şekilde; azalmayan, sağdan sürekli ve (1.8) şartlarını sağlayan bir $p_1(u)$ fonksiyonu bulunabilirse

$$M_1(u) = \int_0^{|u|} p_1(t)dt$$

ve (1.18) eşitliği ile tanımlı $M_2(u)$ fonksiyonu birer N-fonksiyon olacaktır, burada $M(u) = M_2[M_1(u)]$ eşitliği geçerlidir.

### 1.2.2 Tamamlayan N-fonksiyonlar

$p(t)$, $t > 0$ için pozitif, $t \geqslant 0$ için sağdan sürekli, azalmayan ve (1.8) şartlarını sağlayan bir fonksiyon olsun. $s \geqslant 0$ için

$$q(s) = \sup_{p(t)\leqslant s} t \tag{1.19}$$

eşitliği ile $q(s)$ fonksiyonu tanımlansın [6].

$q(s)$ fonksiyonunun $p(t)$ fonksiyonu ile aynı özelliklere sahip olduğunu görmek kolaydır: $q(s)$, $s > 0$ için pozitif, $s \geqslant 0$ için sağdan sürekli, azalmayan ve

$$q(0) = 0, \quad \lim_{s\to\infty} q(s) = \infty \tag{1.20}$$

şartlarını sağlayan bir fonksiyondur.

$q(s)$ fonksiyonunun tanımından

$$q[p(t)] \geqslant t, \quad p[q(s)] \geqslant s \tag{1.21}$$

eşitsizliklerinin sağlandığı ve $\varepsilon > 0$ için

$$q[p(t) - \varepsilon] \leqslant t, \quad p[q(s) - \varepsilon] \leqslant s \tag{1.22}$$

olduğu hemen görülebilir. Gerçekten, $p(t) \leqslant s$ olacak şekildeki her $s \geqslant 0$ için $q(s) \geqslant t$ olduğundan $p(t) = s$ için de $q(s) \geqslant t$ dir, yani $q[p(t)] \geqslant t$ dir. Benzer olarak, $p(t) \leqslant s$ olacak şekildeki her $s \geqslant 0$ için $q(s) \geqslant t$ ve $p$ azalmayan olduğundan $p(t) = s$ için de $q(s) \geqslant t$ dir, böylece $p[q(s)] \geqslant p(t) = s$ olur.

Eğer $p(t)$ fonksiyonu sürekli ve monoton artan ise bu durumda $q(s)$ fonksiyonu $p(t)$ nin ters fonksiyonudur. Genellikle, $q(s)$ fonksiyonuna $p(t)$ nin sağ tersi denir. Aynı şekilde, $p(t)$ fonksiyonu $q(s)$ fonksiyonunun sağ tersidir.

**Tanım 1.2.7 (Tamamlayan N-fonksiyon).** *$M(u)$,*

$$M(u) = \int_0^{|u|} p(t)dt$$

*integral gösterimine sahip bir N-fonksiyon ve $q$, $p$ nin sağ tersi olsun. Bu durumda*

$$N(v) = \int_0^{|v|} q(s)ds$$

*ile tanımlanan $N(v)$ N-fonksiyonuna $M$ nin tamamlayanı denir [6].*

$\Phi(u)$ ve $\Psi(v)$ fonksiyonlarının birbirini tamamlayan N-fonksiyonlar olduğunu kabul edelim. $\Phi_1(u) = a\Phi(bu)$ $(a, b > 0)$ N-fonksiyonu göz önüne alındığında şu durumlar mevcuttur.

$\Phi_1(u)$ nun tamamlayanı olan $\Psi_1(v)$ fonksiyonu

$$\Psi_1(v) = a\Psi\left(\frac{v}{ab}\right) \tag{1.23}$$

eşitliği ile tanımlanır. Gerçekten, $\Phi_1(u)$ fonksiyonunun sağ türevi $p_1(t)$, $abp(bt)$ fonksiyonuna eşittir, burada $p(t)$, $\Phi(u)$ N-fonksiyonunun sağ türevidir. Böylece,

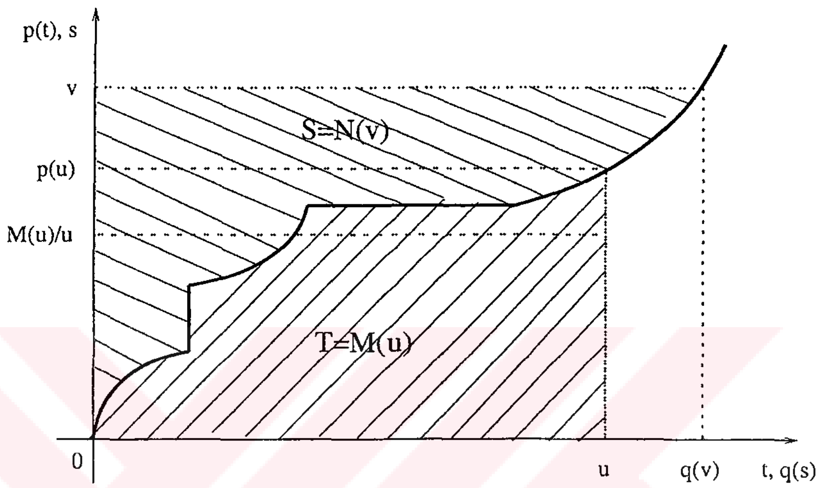
$$q\left(\frac{s}{ab}\right) = \sup_{p(t)\leqslant \frac{s}{ab}} t = \sup_{p(bt)\leqslant \frac{s}{ab}} bt = \sup_{\frac{1}{ab}p_1(t)\leqslant \frac{s}{ab}} bt = b \sup_{p_1(t)\leqslant s} t = bq_1(s)$$

olup

$$\Psi_1(v) = \int_0^{|v|} q_1(s)ds = \frac{1}{b}\int_0^{|v|} q\left(\frac{s}{ab}\right) ds = a \int_0^{|v|/ab} q(s)ds$$

elde edilir ve bu, (1.23) eşitliğini gerektirir.

### 1.2.3 Young eşitsizliği




Şekil 1.2.

Şekil 1.2 de $T$ ve $S$ alanları sırasıyla $M(u)$ ve $N(v)$ N-fonksiyonlarının alanlarını ifade etmektedir.

$$uv \leqslant M(u) + N(v) \tag{1.24}$$

eşitsizliğinin sağlandığı geometrik olarak açıktır. $M(u)$ ve $N(v)$ çift fonksiyonlar olduğundan (1.24) eşitsizliği her $u, v$ için geçerlidir ve bu eşitsizliğe Young Eşitsizliği denir [6].

Yine Şekil 1.2 den, $v$ verildiğinde $u = q(|v|)sgn\, v$; $u$ verildiğinde $v = p(|u|)sgn\, u$ olmak üzere (1.24) eşitsizliğinin

$$uv = up(|u|)sgn\, u = up(|u|)\frac{|u|}{u} = |u|\, p(|u|) = M(u) + N[p(|u|)] \tag{1.25}$$

ve

$$uv = vq(|v|)sgn\, v = vq(|v|)\frac{|v|}{v} = |v|\, q(|v|) = M[q(|v|)] + N(v) \tag{1.26}$$

eşitliklerine indirgenebileceği açıktır.

(1.24) eşitsizliğinden $N(v) \geqslant uv - M(u)$ dir. (1.26) eşitliğinden, bu eşitsizlik $u = q(|v|) sgn\, v$ için

$$N(v) = \sup_{u \geqslant 0}[u\,|v| - M(u)] \tag{1.27}$$

eşitliğine dönüşür.

(1.27) eşitliği, $M$ nin tamamlayan N-fonksiyonunun tanımı olarak alınabilir.

Young eşitsizliğinde $M(u) = N(v) = v$ alınırsa, $v > 0$ için $M^{-1}(v)N^{-1}(v) \leqslant 2v$ olduğu görülebilir. Diğer taraftan, Şekil 1.2 den $N[\frac{M(u)}{u}] < M(u)$ olur. Böylece, $v < M^{-1}(v)N^{-1}(v)$ dir. O halde, her $v > 0$ için

$$v < M^{-1}(v)N^{-1}(v) \leqslant 2v \tag{1.28}$$

olur.

**Örnek 1.2.2.** $M_1(u) = \frac{|u|^\alpha}{\alpha}$ $(\alpha > 1)$ *bir N-fonksiyondur.* $M_1(u)$ *fonksiyonunun tamamlayan N-fonksiyonu hemen bulunabilir.* $t > 0$ *için* $p_1(t) = M_1'(t) = t^{\alpha-1}$ *olup,* $q_1(s) = s^{\beta-1}$ $(s \geqslant 0)$ *olacaktır. Burada* $\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} = 1$ *dir. Böylece,*

$$N_1(v) = \int_0^{|v|} q_1(s)ds = \frac{|v|^\beta}{\beta}$$

*olur [6].*

**Örnek 1.2.3.** $M_2(u) = e^{|u|} - |u| - 1$ *N-fonksiyonunun tamamlayan N-fonksiyonunu bulalım.* $p_2(t) = M_2'(t) = e^t - 1$ $(t \geqslant 0)$ *ve buradan* $q_2(s) = \ln(s+1)$ $(s \geqslant 0)$ *olacaktır. Böylece*

$$N_2(v) = \int_0^{|v|} q_2(s)ds = (1 + |v|)\ln(1 + |v|) - |v| \tag{1.29}$$

*olur [6].*

Birçok durumda, tamamlayan N-fonksiyon için açık bir formül bulmak mümkün olmaz. Örneğin, $M(u) = e^{u^2} - 1$ alınırsa, $p(t) = 2te^{t^2}$ dir ve $q(s)$, açık formda ifade edilemez.

**Tamamlayan fonksiyonlar için bir eşitsizlik**

Aşağıdaki teorem, bir N-fonksiyon ile onun tamamlayanı arasındaki bir ilişkiyi verir.

**Teorem 1.2.2.** *$M_1$ ve $M_2$ N-fonksiyonları, $u \geqslant u_0$ için $M_1(u) \leqslant M_2(u)$ eşitsizliğini sağlasın. Bu durumda, $v \geqslant v_0 = p_2(u_0)$ olmak üzere $N_1$ ve $N_2$ tamamlayan N-fonksiyonları için $N_2(v) \leqslant N_1(v)$ eşitsizliği sağlanır [6].*

### 1.2.4 N-fonksiyonların karşılaştırılması

**Tanım 1.2.8.** *$M_1$ ve $M_2$ iki N-fonksiyon olsun. $u \geqslant u_0$ için*

$$M_1(u) \leqslant M_2(ku) \tag{1.30}$$

*olacak şekilde $u_0$ ve $k$ pozitif sabitleri varsa, $M_2$ N-fonksiyonu $M_1$ den kuvvetlidir denir ve*

$$M_1 \prec M_2 \ (ya\ da\ M_2 \succ M_1) \tag{1.31}$$

*ile gösterilir [6].*

*$M_1 \prec M_2$ ya da $M_2 \prec M_1$ bağıntılarından biri sağlanıyorsa, $M_1(u)$ ve $M_2(u)$ N-fonksiyonları karşılaştırılabilirdir denir [6].*

$M_1 \prec M_2$ ve $M_2 \prec M_3$ olduğunda $M_1 \prec M_3$ olacağı hemen görülebilir: $M_1 \prec M_2$ ve $M_2 \prec M_3$ olsun. Bu durumda, $u_0$, $k_1$ ve $k_2$ pozitif sabitler olmak üzere $u \geqslant u_0$ için $M_1(u) \leqslant M_2(k_1u)$ ve $M_2(u) \leqslant M_3(k_2u)$ eşitsizlikleri vardır. Böylece,

$$\int_0^u p_1(t)dt \leqslant \int_0^{k_1u} p_2(t)dt = k_1\int_0^u p_2(k_1t)dt$$

ve

$$\int_0^u p_2(t)dt \leqslant \int_0^{k_2u} p_3(t)dt = k_2\int_0^u p_3(k_2t)dt$$

yazılabilir. Bu iki eşitsizlikten $p_1(t) \leqslant k_1p_2(k_1t)$ ve $p_2(t) \leqslant k_2p_3(k_2t)$ olur. Böylece $p_1(t) \leqslant k_1k_2p_3(k_1k_2t)$ olup, bu $M_1(u) \leqslant k_1k_2M_3(k_1k_2u)$ dolayısıyla, $M_1 \prec M_3$ olması demektir. (1.31) bağıntısını sağlayan elemanların cümlesi bir kısmi sıralı cümledir.

(1.31) bağıntısını sağlayan N-fonksiyonların en basit örneği, $\alpha_1, \alpha_2 > 1$ olmak üzere, $\alpha_1 < \alpha_2$ için $M_1(u) = |u|^{\alpha_1}$, $M_2(u) = |u|^{\alpha_2}$ fonksiyonlarıdır.

Ayrıca, $\alpha > 1$ olmak üzere $M(u) = |u|^{\alpha}[1 + |\ln|u||]$ N-fonksiyonu ele alındığında, keyfi $\varepsilon > 0$ için $|u|^{\alpha} \prec M(u) \prec |u|^{\alpha+\varepsilon}$ olacağı açıktır.

### 1.2.5 Denk N-fonksiyonlar

**Tanım 1.2.9.** *$M_1 \prec M_2$ ve $M_2 \prec M_1$ ise $M_1$ ve $M_2$ N-fonksiyonlarına sonsuzda denktir veya sadece denktir denir ve $M_1 \sim M_2$ ile gösterilir [6].*

Her N-fonksiyonun kendisine denk olduğu ve iki N-fonksiyon bir üçüncü N-fonksiyona denk ise üçünün birbirine denk olacağı açıktır. Bu nedenle, bütün N-fonksiyonların cümlesi, birbirine denk fonksiyonların sınıflarına ayrılabilir.

Yukarıdaki tanıma göre, $M_1$ ve $M_2$ N-fonksiyonlarının sonsuzda denk olması için gerek ve yeter şart, $u \geqslant u_0$ için

$$M_1(k_1 u) \leqslant M_2(u) \leqslant M_1(k_2 u) \tag{1.32}$$

olacak şekilde $k_1$, $k_2$ ve $u_0$ pozitif sabitlerinin var olmasıdır.

Her $0 \leqslant u \leqslant u_0$ için (1.32) eşitsizliği sağlanacak şekilde $k_1$, $k_2$ ve $u_0$ pozitif sabitleri varsa $M_1$ ve $M_2$ N-fonksiyonları sıfırda denktir denir [4].

Bu eşitsizliklerden, $M(u)$ N-fonksiyonunun keyfi bir $k > 0$ için $M(ku)$ N-fonksiyonuna denk olduğu söylenebilir. Ayrıca

$$\lim_{u \to \infty} \frac{M(u)}{M_1(u)} = a > 0 \tag{1.33}$$

şartını sağlayan $M$ ve $M_1$ N-fonksiyonlarının denk olacağı açıktır.

**Teorem 1.2.3.** *$M_1 \prec M_2$ olsun. Bu durumda, bu fonksiyonlara karşılık gelen tamamlayan N-fonksiyonlar $N_2 \prec N_1$ bağıntısı ile birbirine bağlıdır [6].*

**Teorem 1.2.4.** *$M_1$ ve $M_2$ N-fonksiyonları denk ise onların $N_1$ ve $N_2$ tamamlayan N-fonksiyonları da denktir [6].*

**Tanım 1.2.10.** *$Q$ bir konveks fonksiyon ve $M$ bir N-fonksiyon olsun. $u$ nun büyük değerleri için $Q(u) = M(u)$ ise $Q$ fonksiyonuna, $M$ nin esas kısmı denir [6].*

**Teorem 1.2.5.** *$Q$ konveks fonksiyonu*

$$\lim_{u\to\infty}\frac{Q(u)}{u}=\infty \tag{1.34}$$

*şartını sağlasın. Bu durumda $Q$, en az bir N-fonksiyonun esas kısmıdır [6].*

**Tanım 1.2.11.** *Bir $M(u)$ N-fonksiyonu için*

$$p_M=\inf_{u>0}\frac{up(u)}{M(u)} \qquad ve \qquad q_M=\sup_{u>0}\frac{up(u)}{M(u)}$$

*olarak tanımlanan $p_M$ reel sayısına, $M$ nin alt Simonenko indeksi ve $q_M$ reel sayısına, $M$ nin üst Simonenko indeksi denir [1].*

### 1.2.6 $\Delta_2$-şartı

**Tanım 1.2.12 ($\Delta_2$-şartı).** *$u \geqslant u_0$ için*

$$M(2u)\leqslant kM(u) \tag{1.35}$$

*olacak şekilde $k>0$, $u_0\geqslant 0$ sabitleri varsa, $M(u)$ N-fonksiyonu $u$ nun büyük değerleri için (ya da sonsuzda) $\Delta_2$-şartını sağlar denir. Eğer $0\leqslant u\leqslant u_0$ için (1.35) eşitsizliği sağlanırsa, $M(u)$ N-fonksiyonu $u$ nun küçük değerleri için (ya da sıfırda) $\Delta_2$-şartını sağlar denir [6].*

(1.10) eşitliğinden, $u\neq 0$ için $M(2u)>2M(u)$ olduğundan, daima $k>2$ olacağı söylenebilir.

$\Delta_2$-şartı, $u$ nun büyük değerleri için

$$M(lu)\leqslant k(l)M(u) \tag{1.36}$$

eşitsizliğinin sağlanmasına denktir, burada $l>1$ dir.

$2^n\geqslant l$ olsun. (1.35) eşitsizliğinden, $u\geqslant u_0$ olmak üzere

$$M(lu)\leqslant M(2^nu)\leqslant k^nM(u)=k(l)M(u)$$

olur. Tersine, $2\leqslant l^n$ alınırsa, (1.36) eşitsizliğinden

$$M(2u)\leqslant M(l^nu)\leqslant k^n(l)M(u)$$

olacaktır.

**Örnek 1.2.4.** *$\alpha > 1$ olmak üzere, $M(u) = a\,|u|^\alpha$ N-fonksiyonları, her $u$ değeri için $\Delta_2$-şartını sağlayan fonksiyonlara basit bir örnek olarak verilebilir. Gerçekten, $M(2u) = a2^\alpha\,|u|^\alpha = 2^\alpha M(u)$ dir [6].*

Açık olarak,

$$\overline{\lim_{u\to\infty}}\frac{M(2u)}{M(u)} < \infty \tag{1.37}$$

ise, $u$ nun büyük değerleri için $\Delta_2$-şartı sağlanır. Ayrıca, $\Delta_2$-şartının bütün $u$ lar için sağlanması, yani her $u$ için (1.35) eşitsizliğinin sağlanması, (1.37) ve

$$\overline{\lim_{u\to 0}}\frac{M(2u)}{M(u)} < \infty \tag{1.38}$$

şartının sağlanmasına denktir.

Eğer $M(u)$ N-fonksiyonu $\Delta_2$-şartını sağlıyorsa, $M(u)$ N-fonksiyonuna denk olan herhangi bir N-fonksiyon da $\Delta_2$-şartını sağlar. Şimdi, kabul edelim ki $M_1 \sim M$ olsun. Bu, $u \geqslant u_1$ olmak üzere

$$M(\alpha u) \leqslant M_1(u) \leqslant M(\beta u)$$

olacak şekilde $\alpha < \beta$ ve $u_1 \geqslant 0$ sayılarının bulunabileceği anlamına gelir. Böylece, $u \geqslant \max(u_0, u_1)$ için

$$M_1(2u) \leqslant M(2\beta u) = M\left(2\frac{\beta}{\alpha}\alpha u\right) \leqslant k\left(\frac{2\beta}{\alpha}\right)M(\alpha u) \leqslant k\left(\frac{2\beta}{\alpha}\right)M_1(u)$$

olup, $M_1$ de $\Delta_2$-şartını sağlar.

$\Delta_2$-şartını sağlayan N-fonksiyonların her denklik sınıfında, her $u$ için, (1.35) eşitsizliğini sağlayan N-fonksiyonların var olacağına dikkat edilmelidir. Gerçekten, kabul edelim ki $M(u)$ fonksiyonu $u \geqslant u_0$ için (1.35) eşitsizliğini sağlasın. $\alpha = u_0 p(u_0)/M(u_0) > 1$ olmak üzere, $M_1(u)$ fonksiyonu

$$M_1(u) = \begin{cases} \frac{M(u_0)}{u_0^\alpha}\,|u|^\alpha & , \quad |u| \leqslant u_0 \text{ ise} \\ M(u) & , \quad |u| \geqslant u_0 \text{ ise} \end{cases} \tag{1.39}$$

eşitliği ile tanımlanırsa, her $u$ için

$$M_1(2u) \leqslant \max(2^\alpha, k)M_1(u)$$

olur.

### $\Delta_2$-şartı için bir kriter

$\Delta_2$-şartının hangi durumlarda sağlanacağı şu kriter ile söylenebilir.

**Teorem 1.2.6.** *$M(u)$ N-fonksiyonunun $\Delta_2$-şartını sağlaması için gerek ve yeter şart, $u \geqslant u_0$ için*

$$\frac{up(u)}{M(u)} < \alpha \tag{1.40}$$

*olacak şekilde $\alpha$ ve $u_0 > 0$ sabitlerinin var olmasıdır, burada $p(u)$ fonksiyonu, $M$ nin sağ türevidir [6].*

Eğer (1.40) eşitsizliği her $u > 0$ için sağlanırsa, her $u > 0$ için $M$ nin $\Delta_2$-şartını sağlayacağı kolayca görülebilir.

Teorem 1.2.6, $\Delta_2$-şartını sağlayan N-fonksiyonların, üstel fonksiyonlardan daha hızlı artmayacağının oldukça basit bir ispatına olanak sağlar. Gerçekten, $\Delta_2$-şartı sağlanıyorsa, (1.40) eşitsizliğinden

$$\int_{u_0}^{u} \frac{p(t)}{M(t)} dt < \alpha \int_{u_0}^{u} \frac{dt}{t}$$

yani, $u \geqslant u_0$ için

$$M(u) < \frac{M(u_0)}{u_0^\alpha} u^\alpha \tag{1.41}$$

dir.

Bir $M(u)$ N-fonksiyonunun $p(u)$ sağ türevi, $u \geqslant u_0$ için

$$p(2u) \leqslant lp(u) \tag{1.42}$$

eşitsizliğini sağlarsa, $M$ nin $\Delta_2$-şartını sağlayacağı kolayca görülebilir, burada $l > 1$ ve $u_0 \geqslant 0$ dır. Gerçekten, (1.42) eşitsizliğinde her iki tarafın 0 dan $u$ ya integrali alınırsa

$$\begin{aligned} &\int_0^u p(2t)dt \leqslant l \int_0^u p(t)dt \\ \Longrightarrow\ &\frac{1}{2}\int_0^{2u} p(t)dt \leqslant l \int_0^u p(t)dt \\ \Longrightarrow\ &\frac{1}{2}M(2u) \leqslant lM(u) \end{aligned}$$

olur.

Eğer $p(u)$ fonksiyonu, argumanın büyük değerleri için konkav ise, yani yeterince büyük $u_1, u_2$ sayıları için

$$p\left(\frac{u_1+u_2}{2}\right) \geqslant \frac{p(u_1)+p(u_2)}{2}$$

ise (1.42) eşitsizliği sağlanır.

**Bir N-fonksiyonun tamamlayanı için $\Delta_2$-şartı**

Şimdi şu soruyu sorabiliriz: Bir N-fonksiyon verildiğinde, onun tamamlayanının $\Delta_2$-şartını sağlayıp sağlamayacağını nasıl belirleyebiliriz?

**Teorem 1.2.7.** *$N(v)$ N-fonksiyonunun tamamlayanı olan $M(u)$ fonksiyonunun $\Delta_2$-şartını sağlaması için gerek ve yeter şart, $v \geqslant v_0$ olmak üzere*

$$N(v) \leqslant \frac{1}{2l}N(lv) \tag{1.43}$$

*olacak şekilde $l > 1$ ve $v_0 \geqslant 0$ sabitlerinin var olmasıdır [6].*

(1.43) eşitsizliği her $v > 0$ için sağlanırsa $M(u)$ fonksiyonu da her $u$ için $\Delta_2$-şartını sağlar.

Tersi konveks olan bir fonksiyon konkav olduğundan ve argumanın büyük değerleri için türevi konkav olan bir N-fonksiyon $\Delta_2$-şartını sağladığından, $M(u)$ fonksiyonunun tamamlayan N-fonksiyonu olan $N(v)$ bir konveks türeve sahip ise $M(u)$ fonksiyonu $\Delta_2$-şartını sağlar.

**Lemma 1.2.4.** *$p(u)$ ve $q(v)$ fonksiyonları sürekli olsun. Bu durumda (1.40) eşitsizliğinin sağlanması için gerek ve yeter şart, $v$ nin büyük değerleri için*

$$\frac{vq(v)}{N(v)} > \frac{\alpha}{\alpha-1} \tag{1.44}$$

*eşitsizliğinin sağlanmasıdır [6].*

Teorem 1.2.6 ve bu lemmadan şu teorem açıktır.

**Teorem 1.2.8.** *$v$ nin büyük değerleri için $N(v)$ N-fonksiyonu, monoton artan sürekli bir türeve sahip olsun. Bu durumda, $N(v)$ fonksiyonunun tamamlayanı olan $M(u)$*

*fonksiyonunun $\Delta_2$-şartını sağlaması için gerek ve yeter şart, $v$ nin büyük değerleri için*

$$\frac{vq(v)}{N(v)} > \alpha_1 \tag{1.45}$$

*olmasıdır, burada $\alpha_1 > 1$ dir [6].*

Her $u > 0$ için (1.45) eşitsizliğinin sağlanması halinde, her $u$ için $M$ nin $\Delta_2$-şartını sağlayacağı kolayca görülebilir.

**Örnek 1.2.5.** *Daha önce belirtildiği gibi $\alpha > 1$ için $M(u) = a\,|u|^{\alpha}$ N-fonksiyonları $u$ nun bütün değerleri için $\Delta_2$-şartını sağlar [6].*

**Örnek 1.2.6.**

$$M(u) = |u|^{\alpha}\,[1 + |\ln|u||] \tag{1.46}$$

*N-fonksiyonunu alalım. $u > 1$ için*

$$\frac{up(u)}{M(u)} = \frac{\alpha + 1 + \alpha\ln u}{1 + \ln u}$$

*olup*

$$\lim_{u\to\infty}\frac{up(u)}{M(u)} = \alpha$$

*elde edilir. Bu nedenle, Teorem 1.2.6 gereğince, (1.46) ile verilen N-fonksiyon $u$ nun büyük değerleri için $\Delta_2$-şartını sağlar.*

$$\lim_{u\to 0^-}\frac{M(2u)}{M(u)} = \lim_{u\to 0^-}\frac{(-2u)^{\alpha}(1-\ln(-2u)))}{(-u)^{\alpha}(1-\ln(-u))}\lim_{u\to 0^-}2^{\alpha}\frac{-2/(2u)}{-1/u} = 2^{\alpha}$$
$$\lim_{u\to 0^+}\frac{M(2u)}{M(u)} = \lim_{u\to 0^+}\frac{(2u)^{\alpha}(1-\ln 2u))}{(u)^{\alpha}(1-\ln u)}\lim_{u\to 0^+}2^{\alpha}\frac{-2/(2u)}{-1/u} = 2^{\alpha}$$

*eşitliklerinden*

$$\lim_{u\to 0}\frac{M(2u)}{M(u)} = 2^{\alpha}$$

*ve benzer hesaplamalarla*

$$\lim_{u\to\infty}\frac{M(2u)}{M(u)} = 2^{\alpha}$$

*elde edilir, yani (1.37) ve (1.38) şartları sağlanır. O halde, (1.46) ile verilen N-fonksiyon her $u$ için $\Delta_2$-şartını sağlar.*

*$M$ nin tamamlayanı olan $N(v)$ fonksiyonunun da $\Delta_2$-şartını sağladığı görülebilir. (1.46) ile verilen fonksiyon $\Delta_2$-şartını sağladığından, Teorem 1.2.6 dikkate alındığında, $u \geqslant u_0$ için*

$$\frac{up(u)}{M(u)} < \beta$$

*olacak şekilde $u_0, \beta$ sabitleri bulunabilir. Lemma 1.2.4 gereğince, $v$ nin büyük değerleri için*

$$\frac{vq(v)}{N(v)} > \frac{\beta}{\beta - 1}$$

*eşitsizliği sağlanır. Böylece Teorem 1.2.8 gereğince, $N(v)$ fonksiyonu, $v$ nin büyük değerleri için $\Delta_2$-şartını sağlar [6].*

**Örnek 1.2.7.**

$$N(v) = e^{|v|} - |v| - 1 \tag{1.47}$$

*N-fonksiyonu $\Delta_2$-şartını sağlamaz, çünkü $N(v)$, üstel fonksiyondan daha hızlı artar. $N(v)$ fonksiyonunun türevi olan $e^v - 1$ $(v \geqslant 0)$ konvekstir. Gerçekten, $e^{v_1} = k_1$, $e^{v_2} = k_2 > 0$ alınırsa*

$$\begin{aligned}
& k_1^2 + k_2^2 + k_1 k_2 \geqslant 0 \\
\Longrightarrow\ & k_1 k_2 \leqslant k_1^2 + k_2^2 + 2k_1 k_2 = (k_1 + k_2)^2 \\
\Longrightarrow\ & \sqrt{k_1}\sqrt{k_2} \leqslant k_1 + k_2 \\
\Longrightarrow\ & e^{v_1/2} e^{v_2/2} \leqslant e^{v_1} + e^{v_2} \\
\Longrightarrow\ & e^{(v_1+v_2)/2} \leqslant e^{v_1} + e^{v_2}
\end{aligned}$$

*olur. Türevi konveks olan bir N-fonksiyonun tamamlayanı $\Delta_2$-şartını sağladığından, $N(v)$ fonksiyonunun tamamlayanı olan $M(u)$ fonksiyonu $\Delta_2$-şartını sağlar. $N(v)$ fonksiyonunun (1.43) şartını sağladığını göstermek zor değildir. (1.47) ile verilen N-fonksiyonun tamamlayanı olan $M(u)$ fonksiyonunun $\Delta_2$-şartını sağladığı doğrudan görülebilir, çünkü $M(u)$ fonksiyonu, $M(u) = (1+|u|)\ln(1+|u|) - |u|$ ile açık formda ifade edilebilir. Böylece $M$ nin her $u$ için $\Delta_2$-şartını sağladığı kolayca görülebilir [6].*

**Örnek 1.2.8.** *Şimdi, tamamlayan $M(u)$ fonksiyonu açık formda ifade edilemeyen*

$$N(v) = e^{v^2} - 1 \tag{1.48}$$

*N-fonksiyonunu göz önüne alalım. Yine de, Teorem 1.2.7 kullanılarak,* $M(u)$ *fonksiyonunun değişkenin bütün değerleri için* $\Delta_2$*-şartını sağladığı gösterilebilir.*

*Öncelikle,* $\varphi(t) = e^{4t} - 4e^t + 3$ *fonksiyonu monoton artandır, çünkü* $\varphi'(t) = 4e^{4t} - 4e^t = 4e^t(e^{3t} - 1) > 0$ *dır.* $t = v^2 > 0$ *alınırsa* $\varphi(v^2) > 0$ *olacağından*

$$\begin{aligned} & e^{4v^2} - 4e^{v^2} + 3 > 0 \\ \Longrightarrow\ & e^{4v^2} - 1 - 4e^{v^2} + 4 > 0 \\ \Longrightarrow\ & e^{4v^2} - 1 > 4(e^{v^2} - 1) \\ \Longrightarrow\ & N(2v) > 4N(v) \end{aligned}$$

*eşitsizliği elde edilir. Bu eşitsizlik, (1.48) ile verilen fonksiyon için,* $l = 2$ *olmak üzere (1.43) şartıdır [6].*

Önceki örnekler göz önüne alındığında, birbirini tamamlayan iki N-fonksiyondan en azından birinin $\Delta_2$-şartını sağlayacağı varsayımı yapılabilir. Bundan başka, her N-fonksiyonun, $\Delta_2$-şartını sağlayan bir kuvvet fonksiyonundan daha hızlı artacağı varsayımı da yapılabilir. Şimdi, her iki varsayımın da doğru olmadığını gösteren bir örnek verelim. Türevi,

$$p(t) = \begin{cases} t & , \ t \in [0,1) \text{ ise} \\ k! & , \ t \in [(k-1)!, k!) \ (k = 2, 3, \ldots) \text{ ise} \end{cases}$$

eşitliği ile verilen, $M(u)$ N-fonksiyonu oluşturalım.

$M(u) = \int\limits_0^{|u|} p(t)dt$ N-fonksiyonunun $\Delta_2$-şartını sağlamadığını göstermek için

$$M(2u_n) > nM(u_n) \ (n = 1, 2, \ldots) \tag{1.49}$$

olacak şekilde $u_n$ sayılarının ıraksak bir dizisinin var olduğunu göstermek yeterlidir. $u_n = n!$ $(n = 1, 2, \ldots)$ alalım. Bu durumda, (1.17) eşitsizliğinden

$$\begin{aligned} M(2u_n) &> u_n p(u_n) \\ &= n!p(n!) = n!(n+1)! \end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned} nM(u_n) &= n\int\limits_0^{n!} p(t)dt = n\left(\int\limits_0^1 p(t)dt + \int\limits_1^{n!} p(t)dt\right) \\ &= \frac{1}{2}n + n \cdot n!(n! - 1) < n \cdot n!n! \end{aligned}$$

olup, (1.49) elde edilir.

$M$ nin tamamlayan fonksiyonunun sağ türevinin

$$q(s) = \begin{cases} s & , \quad s \in [0,1) \text{ ise} \\ (k-1)! & , \quad s \in [(k-1)!, k!) \ (k = 2, 3, \ldots) \text{ ise} \end{cases}$$

olacağı açıktır.

Şimdi, $N(v) = \int\limits_0^{|v|} q(s)ds$ N-fonksiyonunun da $\Delta_2$-şartını sağlamadığını gösterelim. Bunun için, $v_n = n!$ $(n = 1, 2, \ldots)$ doğal sayılarının $(v_n)$ dizisini alalım. Bu durumda, yine (1.17) eşitsizliğinden

$$N(2v) > n!n!$$

ve

$$\begin{aligned} nN(v_n) &= n\int\limits_0^{n!} q(s)ds = n\left(\int\limits_0^{1} q(s)ds + \int\limits_1^{n!} q(s)ds\right) \\ &= \frac{1}{2}n + n(n-1)!(n!-1) < n(n-1)!n! = n!n! \end{aligned}$$

olup, $N(v_n) > nN(v_n)$ $(n = 1, 2, \ldots)$ elde edilir. $q(s) \leqslant s$ $(s \geqslant 0)$ olduğundan, $N(v)$ fonksiyonu $v^2/2$ fonksiyonundan daha hızlı artmaz.

### 1.2.7 $\Delta'$-şartı (altçarpımsallık)

**Tanım 1.2.13.** *Her $u, v \geqslant u_0$ için*

$$M(uv) \leqslant cM(u)M(v) \tag{1.50}$$

*olacak şekilde $c$ ve $u_0$ pozitif sabitleri varsa, $M(u)$ N-fonksiyonu, sonsuzda $\Delta'$-şartını sağlar (ya da sonsuzda altçarpımsaldır) denir. Eğer her $0 \leqslant u, v \leqslant u_0$ için (1.50) eşitsizliği sağlanacak biçimde $c$ ve $u_0$ pozitif sabitleri varsa $M(u)$ N-fonksiyonu, sıfırda $\Delta'$-şartını sağlar denir. Hem sonsuzda hem de sıfırda altçarpımsal olan N-fonksiyona $[0, \infty)$ üzerinde altçarpımsaldır denir [4].*

**Tanım 1.2.14.** *Her $u \geqslant u_1$ için*

$$M(u^2) \leqslant duM(u) \tag{1.51}$$

*eşitsizliğini sağlayan $d$ ve $u_1$ pozitif sabitleri varsa, $M(u)$ N-fonksiyonu $\Delta$-şartını sağlar denir [4].*

**Örnek 1.2.9.** *$u \in [0,\infty)$ için $M(u) = u\ln(1+u)$ N-fonksiyonunu alalım. Bu durumda,*

$$\begin{aligned} M(u^2) &= u^2\ln(1+u^2) \leqslant u^2\ln\left[(1+u^2)^2\right] \\ &= 2u^2\ln(1+u) = 2uM(u) \end{aligned}$$

*olup, $M(u)$ N-fonksiyonu $\Delta$-şartını sağlar ($d = 2$ ve $u_2 = 0$ pozitif sabitleri ile). Ayrıca, $M(u) = u\ln(1+u^2)$ ve $M(u) = u\ln^2(1+u)$ N-fonksiyonları da $\Delta$-şartını sağlar [4].*

**Lemma 1.2.5.** *$M(u)$ N-fonksiyonu $\Delta'$-şartını sağlarsa $\Delta_2$-şartını da sağlar [6].*

Şimdi, kabul edelim ki $M(u)$, $\Delta'$-şartını sağlasın ve $M_1(u)$ N-fonksiyonu $M(u)$ fonksiyonuna denk olsun. Göstereceğiz ki, $M_1(u)$ fonksiyonu da $\Delta'$-şartını sağlar, yani $\Delta'$-şartının sağlanması, birbirine denk N-fonksiyonlar sınıfının bir özelliğidir. $M \sim M_1$ olduğundan, $u \geqslant u_1$ için

$$M(k_1u) \leqslant M_1(u) \leqslant M(k_2u) \tag{1.52}$$

olacak şekilde, $k_1, k_2, u_1$ pozitif sabitleri vardır. Genelliği bozmayacağından, $k_1 < 1$ ve $u_0, u_1, k_2 > 1$ alınabilir.

Lemma 1.2.5 gereğince,

$$M\left(\frac{\sqrt{k_2}}{k_1}u\right) \leqslant k_3M(u) \ (u \geqslant u_2) \tag{1.53}$$

olacak şekilde $k_3 > 0$ ve $u_2 \geqslant 0$ bulunabilir. Böylece, $u, v \geqslant \max(u_0, u_1, u_2/k_1)$ için

$$\begin{aligned} M_1(uv) \leqslant M(k_2uv) &< cM\left(\sqrt{k_2}u\right)M\left(\sqrt{k_2}v\right) \\ &\leqslant ck_3^2M(k_1u)M(k_1v) \leqslant ck_3^2M_1(u)M_1(v) \end{aligned}$$

elde edilir.

$\Delta'$-şartını sağlayan N-fonksiyonların sınıfının, aslında $\Delta_2$-şartını sağlayan N-fonksiyonların sınıfı olduğuna dikkat edilmelidir. Örneğin, $M(u) = u^2/\ln(e+|u|)$ fonksiyonunu göz önüne alalım. $M(u)$ bir N-fonksiyondur, çünkü onun türevi olan $p(u) = \{2u(u+e)\ln(u+e) - u^2\} / \left\{(u+e)\ln^2(u+e)\right\}$ $(u \geqslant 0)$ fonksiyonu monoton artandır ve (1.8) şartlarını sağlar. $p(u)$ fonksiyonunun monoton artanlığı hemen görülebilir: $u > 0$ için

$$\begin{aligned} p'(u) &= \frac{2}{(u+e)^2 \ln^3(u+e)} \Big[(u+e)^2 \ln^2(u+e) - \\ &\qquad\qquad -2u(u+e)\ln(u+e) + u^2 + \frac{u^2 \ln(u+e)}{2}\Big] \\ &> \frac{2}{(u+e)^2 \ln^3(u+e)} \left[(u+e)\ln(u+e) - u\right]^2 \geqslant 0 \end{aligned}$$

dir. Şimdi

$$\lim_{u\to\infty} \frac{M(2u)}{M(u)} = 4$$

olduğundan, $M(u)$ N-fonksiyonu $\Delta_2$-şartını sağlar, fakat

$$\lim_{u\to\infty} \frac{M(u^2)}{[M(u)]^2} = \infty$$

olduğundan $\Delta'$-şartını sağlamaz.

M.A. Krasnosel'skii & Y.B. Rutickii [6, syf.30] tarafından ortaya atılan şu soruya, H. Hudzik & L. Maligranda [4] aşağıdaki teorem ile olumsuz bir cevap vermiştir: "Sonsuzda altçarpımsal olan herhangi bir $M$ Orlicz fonksiyonu için, $[0,\infty)$ üzerinde altçarpımsal,

$$\lim_{u\to 0} \frac{M_1(u)}{u} = 0 \tag{1.54}$$

şartını sağlayan ve sonsuzda $M$ fonksiyonuna denk olan bir $M_1$ Orlicz fonksiyonu var mıdır?".

**Lemma 1.2.6.** *$M$ sıfırda $\Delta_2$-şartını sağlayan ve $u_0 > 0$ için bir $[0, u_0]$ aralığında altçarpımsal olan bir Orlicz fonksiyonu ise $u_1 > u_0$ için $[0, u_1]$ aralığında altçarpımsaldır [4].*

**Teorem 1.2.9.** *$M$ $\Delta$-şartını sağlayan bir Orlicz fonksiyonu olsun. Bu durumda, $M$ sonsuzda altçarpımsaldır ve (1.54) şartını sağlayan, sonsuzda $M$ ye denk olan ve $[0,\infty)$ üzerinde altçarpımsal olan hiçbir Orlicz fonksiyonu yoktur [4].*

**Önerme 1.2.1.** *$M$ sonsuzda (yani $u_1 > 0$ için bir $[u_1,\infty)$ aralığında) altçarpımsal olan bir Orlicz fonksiyonu ise herhangi bir $0 < u_0 < u_1$ için $[u_0,\infty)$ aralığında altçarpımsaldır [4].*

**Teorem 1.2.10.** *$M$ sonsuzda altçarpımsal olan ve $p = p(M) > 1$ Simonenko indeksli bir Orlicz fonksiyonu olsun. Bu durumda, (1.54) şartını sağlayan, $[0, \infty)$ üzerinde altçarpımsal ve sonsuzda $M$ ye denk olan bir $M_1$ Orlicz fonksiyonu vardır [4].*

**Uyarı 1.2.2.** *$M$ $\Delta$-şartını sağlarsa $p = p(M) = 1$ dir. Bu yüzden, Teorem 1.2.10, $p = p(M) = 1$ için genelde doğru değildir [4].*

**Uyarı 1.2.3.** *(1.54) şartı, Teorem 1.2.9 ve Teorem 1.2.10 için önemlidir. Bu şart çıkarılırsa, M.A. Krasnosel'skii & Y.B. Rutickii'nin sorusuna cevap daima olumlu olacaktır. Yani, sonsuzda altçarpımsal olan bir $M$ Orlicz fonksiyonu için, $[0, \infty)$ üzerinde altçarpımsal ve sonsuzda $M$ ye denk olan bir $M_1$ Orlicz fonksiyonu vardır [4].*

**Teorem 1.2.11.** *$M$ Orlicz fonksiyonunun, $[0, \infty)$ üzerinde (sonsuzda) [sıfırda] altçarpımsal olması için gerek ve yeter şart, $M$ nin sağ türevi olan $p$ nin, sırasıyla $[0, \infty)$ üzerinde (sonsuzda) [sıfırda] altçarpımsal olmasıdır [4].*

**Lemma 1.2.7.** *$M$ sıfırda $\Delta_2$-şartını sağlayan ve $u_0 > 0$ için $[0, u_0]$ aralığında altçarpımsal olan bir Orlicz fonksiyonu ise herhangi bir $u_1 > u_0$ sayısı için, $[0, u_1]$ aralığında da altçarpımsaldır [4].*

**Teorem 1.2.12.** *$M$ sıfırda altçarpımsal olan bir Orlicz fonksiyonu olsun. Bu durumda*

$$\lim_{u \to \infty} \frac{M_1(u)}{u} = \infty \tag{1.55}$$

*şartını sağlayan, $[0, \infty)$ üzerinde altçarpımsal ve sıfırda $M$ ye denk olan bir $M_1$ Orlicz fonksiyonunun var olması için gerek ve yeter şart, $M$ nin sıfırda $\Delta_2$-şartını sağlamasıdır [4].*

**Uyarı 1.2.4.** *$M$ nin sonsuzda altçarpımsal olması, sonsuzda $\Delta_2$-şartını sağlamasını gerektirir, fakat sıfırda altçarpımsallık, sıfırda $\Delta_2$-şartını gerektirmez [4].*

**Örnek 1.2.10.** *$\alpha > 0$ için*

$$M_\alpha(u) = \begin{cases} 0 & , \quad u = 0 \text{ ise} \\ u^{1+\alpha} \ln\left(1 + e^{-u^{-\alpha}}\right) & , \quad u > 0 \text{ ise} \end{cases}$$

*Orlicz fonksiyonları* $[0,1]$ *üzerinde altçarpımsaldır fakat* $[0,\infty)$ *üzerinde değildir.* $M_\alpha$ *Orlicz fonksiyonları,* $u \to 0^+$ *için* $M_\alpha(u)/u \to 0$ *şartını sağlarlar fakat, sıfırda* $\Delta_2$*-şartını sağlamazlar.* $M_\alpha$ *fonksiyonlarının* $[0,1]$ *üzerinde altçarpımsal olduğunu göstermek için aşağıdaki eşitsizlik kullanılabilir:*

$K \geqslant e^2$ *olmak üzere,* $u,v \in (0,1]$ *için*

$$\begin{aligned}\left(1+e^{-u^{-\alpha}}\right)^{K\ln\left(1+e^{-v^{-\alpha}}\right)} &\geqslant 1+Ke^{-u^{-\alpha}}\ln\left(1+e^{-v^{-\alpha}}\right)\\ &\geqslant 1+Ke^{-u^{-\alpha}}\frac{e^{-v^{-\alpha}}}{1+e^{-v^{-\alpha}}}\\ &= 1+\frac{K}{e^{u^{-\alpha}}\left(1+e^{v^{-\alpha}}\right)} \geqslant 1+e^{-u^{-\alpha}v^{-\alpha}}\end{aligned}$$

*dir.*

**Teorem 1.2.13.** *Her sabit* $u \geqslant u_0$ *için* $h(t) = p(ut)/p(t)$ *fonksiyonu,* $t \geqslant u_0$ *için artmayan olacak şekilde bir* $u_0 > 1$ *sayısı var olsun. Bu durumda*

$$M(u) = \int_0^{|u|} p(t)dt$$

*N-fonksiyonu* $\Delta'$*-şartını sağlar [6].*

**Lemma 1.2.8.** $g(t) = tp'(t)/p(t)$ *fonksiyonu* $t \geqslant u_0$ *için artmayan ise* $u \geqslant u_0 > 1$ *sabit olmak üzere,* $h(t) = p(ut)/p(t)$ *fonksiyonu* $t \geqslant u_0$ *için artmayandır [6].*

Teorem 1.2.13 ve yukarıdaki lemma kullanılarak, aşağıdaki teorem verilebilir.

**Teorem 1.2.14.** *t nin büyük değerleri için* $p(t)$ *fonksiyonu türevlenebilir ve*

$$g(t) = \frac{tp'(t)}{p(t)} \tag{1.56}$$

*fonksiyonu artmayan olsun. Bu durumda*

$$M(u) = \int_0^{|u|} p(t)dt$$

*N-fonksiyonu* $\Delta'$*-şartını sağlar [6].*

Şimdi, bir N-fonksiyonun tamamlayanı için $\Delta'$-şartının hangi durumlarda sağlanacağını görelim.

**Teorem 1.2.15.** *$M(u)$ N-fonksiyonunun $p(u)$ türevi, $u \geqslant u_0 > 1$ için türevlenebilir ve $g(t) = tp'(t)/p(t)$ fonksiyonu, $t \geqslant u_0$ için azalmayan olsun. Bu durumda, $M(u)$ N-fonksiyonunun tamamlayanı olan*

$$N(v) = \int_0^{|v|} q(s)ds$$

*N-fonksiyonu $\Delta'$-şartını sağlar [6].*

**Örnek 1.2.11.** *i) $\alpha > 1$ için $M_1(u) = |u|^\alpha / \alpha$ N-fonksiyonunu alalım. Açıkça, her $u, v$ için $M_1(uv) = \alpha M_1(u) M_1(v)$ dır, yani $M_1(u)$, $\Delta'$-şartını sağlar [6].*

*ii) $\alpha > 1$ olmak üzere*

$$M_2(u) = |u|^\alpha (1 + |\ln |u||)$$

*eşitliği ile verilen N-fonksiyon, her $u, v$ için $\Delta'$-şartını sağlar [6].*

*iii) $M_3(u) = (1 + |u|) \ln (1 + |u|) - |u|$ N-fonksiyonunu göz önünde tutalım. $u$ nun büyük değerleri için konveks olan $Q(u) = u \ln u$ fonksiyonu (1.34) şartını sağlar. Teorem 1.2.5 gereğince, $Q(u)$ fonksiyonu en az bir $\Phi(u)$ N-fonksiyonunun esas kısmıdır, yani $u$ nun büyük değerleri için $\Phi(u) = Q(u)$ olur. $t > e$ için*

$$g(t) = \frac{t\Phi'(t)}{\Phi(t)} = \frac{1 + \ln t}{\ln t}$$

*fonksiyonu artmayan olduğundan, Teorem 1.2.14 gereğince $\Phi$ N-fonksiyonu $\Delta'$-şartını sağlar. (1.33) şartı sağlandığından, $\Phi$ ve $M_3$ N-fonksiyonları denktir. Bu yüzden, $M_3$ fonksiyonu da $\Delta'$-şartını sağlar [6].*

*iv) $M(u) = (1 + |u|)^{\sqrt{\ln(1+|u|)}} - 1$ N-fonksiyonunun tamamlayanı olan $N(v)$ N-fonksiyonunun $\Delta'$-şartını sağladığını gösterelim. $M(u)$ fonksiyonunun sağ türevi*

$$p(t) = M'(t) = \frac{3}{2} \sqrt{\ln (1 + t)} \, (1 + t)^{\sqrt{\ln(1+t)} - 1}$$

*olacağından*

$$
\begin{aligned}
g(t) &= \frac{tp'(t)}{p(t)} = \left[\frac{3}{2}\sqrt{\ln(1+t)} - 1 + \frac{1}{2\ln(1+t)}\right]\frac{t}{1+t} \\
\Longrightarrow\ g'(t) &= \frac{t}{(1+t)^2}\left[\frac{3}{4\sqrt{\ln(1+t)}} - \frac{1}{2\ln^2(1+t)}\right] + \\
&\quad + \frac{1}{(1+t)^2}\left[\frac{3}{2}\sqrt{\ln(1+t)} - 1 + \frac{1}{2\ln(1+t)}\right] > 0
\end{aligned}
$$

*elde edilir. Böylece, $t$ nin büyük değerleri için $g(t)$ artandır ve Teorem 1.2.15 gereğince $N(v)$ N-fonksiyonu $\Delta'$-şartını sağlar [6].*

# BÖLÜM 2

# ORLICZ DİZİ UZAYLARI

Bu bölümde, elemanları skalerlerin bir dizisi olan Orlicz dizi uzaylarına yer verildi.

## 2.1 $\ell_M$ Dizi Uzayı

Bu kısım, W. Orlicz'in $\ell_p$ uzayını genelleştirme fikriyle başlayan ve W. Orlicz'den sonra K.J. Lindberg, J. Lindenstrauss, L. Tzafriri, P.K. Kamthan, M. Gupta ve daha birçok matematikçinin katkılarıyla genişleyen Orlicz dizi uzayları teorisine bir giriş niteliğindedir.

**Tanım 2.1.1.** *Her bir $M$ Orlicz fonksiyonu için*

$$\widetilde{\ell}_M = \left\{ x = (x_k) \in w \colon \sum_{k=1}^{\infty} M(|x_k|) < \infty \right\}$$

*ile tanımlanan $\widetilde{\ell}_M$ cümlesine Orlicz dizi sınıfı denir [5].*

**Tanım 2.1.2.** *$M$ bir Orlicz fonksiyonu olmak üzere*

$$\ell_M = \left\{ x = (x_k) \in w \colon \sum_{k=1}^{\infty} M\left(\frac{|x_k|}{\rho}\right) < \infty,\ \exists \rho > 0 \text{ için} \right\} \tag{2.1}$$

*ile tanımlanan dizi uzayına Orlicz dizi uzayı denir [9].*

$M$ ve $N$ birbirini tamamlayan Orlicz fonksiyonları olmak üzere, Young eşitsizliği ve (1.25) eşitsizliği kullanılarak, $\ell_M$

$$\ell_M = \left\{ x \in w \colon \forall y \in \widetilde{\ell}_N \text{ için } \sum_{k=1}^{\infty} x_k y_k \text{ yakınsak} \right\} \tag{2.2}$$

olarak da verilebilir [5].

**Teorem 2.1.1.** *Her bir $x \in \ell_M$ için*

$$\sup\left\{ \left| \sum_{k=1}^{\infty} x_k y_k \right| : \sum_{k=1}^{\infty} N(|y_k|) \leqslant 1 \right\} < \infty$$

*dir [5].*

Böylece, $\|x\|_M = \sup\left\{\left|\sum_{k=1}^{\infty} x_k y_k\right| : \sum_{k=1}^{\infty} N(|y_k|) \leqslant 1\right\}$ şeklinde, $\ell_M$ üzerinde bir norm tanımlanabilir. $\ell_M$, bu şekilde tanımlanan norm ile bir Banach uzayıdır.

**Teorem 2.1.2.** *$(\ell_M, \|\cdot\|_M)$ bir BK-uzayıdır [5].*

$\|\cdot\|_M$ normundan farklı olarak $\ell_M$,

$$\|x\|_{(M)} = \inf\left\{\rho > 0 : \sum_{k=1}^{\infty} M\left(\frac{|x_k|}{\rho}\right) \leqslant 1\right\}$$

olarak tanımlanan ve $\|\cdot\|_M$ normuna denk olan bir $\|\cdot\|_{(M)}$ normuyla da BK-uzayı yapılabilir [5].

**Teorem 2.1.3.** *$x \in \ell_M$ için*

$$\sum_{k=1}^{\infty} M\left(\frac{|x_k|}{\|x\|_{(M)}}\right) \leqslant 1$$

*dir [5].*

**Teorem 2.1.4.** *$\|x\|_M \leqslant 1$ olmak üzere $x \in \ell_M$ olsun. Bu durumda, $y = \{p(|x_n|)\} \in \widetilde{\ell}_N$ ve $\sum_k N(|y_k|) \leqslant 1$ dir [5].*

**Teorem 2.1.5.** *$\|x\|_M \leqslant 1$ olmak üzere $x \in \ell_M$ olsun. Bu durumda, $x \in \widetilde{\ell}_M$ ve $\sum_k M(|x_k|) \leqslant \|x\|_M$ dir [5].*

**Teorem 2.1.6.** *$x \in \ell_M$ için*

$$\sum_k M\left(\frac{|x_k|}{\|x\|_M}\right) \leqslant 1$$

*dir [5].*

**Teorem 2.1.7.** *$x \in \ell_M$ için*

$$\|x\|_{(M)} \leqslant \|x\|_M \leqslant 2\|x\|_{(M)}$$

*dir [5].*

**Sonuç 2.1.1.** *$(\ell_M, \|\cdot\|_{(M)})$ bir BK-uzayıdır [5].*

$M$ bir Orlicz fonksiyonu olmak üzere, $\ell_M$ nin bir alt uzayı olan ve normu, $\ell_M$ nin $\|\cdot\|_M$ normuyla verilebilen $h_M$ uzayı

$$h_M = \left\{ x = (x_k) : \sum_k M\left(\frac{|x_k|}{\rho}\right) \leqslant 1, \, \forall \rho > 0 \text{ için} \right\}$$

ile tanımlanır [5].

$h_M$ alt uzayının bazı temel özellikleri aşağıdaki iki teorem ile verilebilir.

**Teorem 2.1.8.** *$M$ bir Orlicz fonksiyonu olsun. Bu durumda, $(h_M, \|\cdot\|_M)$ bir AK-BK uzayıdır [5].*

Eğer $M$ dejenere Orlicz fonksiyonu ise $M$ nin uygun seçilişleriyle $\ell_M \approx \ell_\infty$, $\ell_M \approx \ell_1$ ve $h_M \approx c_0$ yapılabilir.

**Teorem 2.1.9.** $M(x) = \int_0^{|x|} p(t)dt$ *integral gösterimiyle $M$ bir Orlicz fonksiyonu olsun. Bu durumda*

*i) $\ell_M \approx \ell_1$ olması için gerek ve yeter şart $p(0) = a > 0$ olmasıdır.*

*ii) $x_0 > 0$ olmak üzere, $0 \leqslant x \leqslant x_0$ için $p(x) = 0$ ise $\ell_M \approx \ell_\infty$, $h_M \approx c_0$ dir ve $h_M$ nin birim vektör bazı, $\ell_M$ nin birim vektör bazına denktir [9].*

$\ell_M$ ve $h_M$ uzaylarının tanımları, bir izomorfizme bağlı olarak, $t = 0$ noktasının bir komşuluğunda $M$ nin davranışının nasıl olacağını gösterir. Eğer $M_1$ ve $M_2$ Orlicz fonksiyonları bir $[0, t_0]$ aralığında çakışırsa, $\ell_{M_1}$ ve $\ell_{M_2}$, aynı dizileri içerir ve $M_1$ ve $M_2$ den indirgenen normlar denktir. Aynı şekilde, $h_{M_1}$ ve $h_{M_2}$ için de bunlar doğrudur. Daha genel olarak aşağıdaki teorem verilebilir.

**Teorem 2.1.10.** *$M_1$ ve $M_2$ iki Orlicz fonksiyonu olsun. Bu durumda, aşağıdaki ifadeler denktir:*

*i) $\ell_{M_1} = \ell_{M_2}$ dir (yani, her iki uzay aynı dizileri içerir) ve özdeşlik dönüşümü, $\ell_{M_1}$ ve $\ell_{M_2}$ uzayları arasında bir izomorfizmdir.*

*ii) $h_{M_1}$ ve $h_{M_2}$ nin birim vektör bazları denktir.*

*iii) $M_1$ ve $M_2$ sıfırda denktir, yani her $t \in [0, t_0]$ için*

$$K^{-1} M_2(k^{-1}t) \leqslant M_1(t) \leqslant K M_2(kt)$$

*olacak şekilde $k > 0$, $K > 0$ ve $t_0 > 0$ sabitleri vardır [10].*

**Sonuç 2.1.2.** *$M$ bir Orlicz fonksiyonu olsun. $\ell_M \approx \ell_p$ $(1 \leqslant p < \infty)$ olması için gerek ve yeter şart, $M$ Orlicz fonksiyonunun $M_p(x) = x^p$ fonksiyonuna sıfırda denk olmasıdır [5].*

$M$ Orlicz fonksiyonunun sadece sıfırın bir komşuluğunda tanımlı olduğu birçok örnek vardır. Bu durumda $M$ fonksiyonu, pozitif reel sayılar cümlesinin tamamında bir Orlicz fonksiyonu olacak şekilde, $t > t_0$ için genişletilebilir. $M$ nin bu şekildeki genişlemesine karşılık gelen $\ell_M$ ve $h_M$ uzayları ile yukarıdaki önermedeki $\ell_M$ ve $h_M$ uzayları aynı olacaktır. Farklı genişlemelerden indirgenen normlar farklı olabilir, ama denk olmak zorundadır.

**Teorem 2.1.11.** *$M_1$ ve $M_2$ iki Orlicz fonksiyonu olsun. $\ell_{M_1}$ ve $\ell_{M_2}$ ayrılabilir ise $M_1$ Orlicz fonksiyonunun sıfırda $M_2$ ye denk olması için gerek ve yeter şart, $\ell_{M_1}$ ve $\ell_{M_2}$ uzaylarının birim vektör bazlarının denk olmasıdır [9].*

**Teorem 2.1.12.** *$M$ bir Orlicz fonksiyonu olsun. Bu durumda $h_M$, $\ell_M$ nin kapalı bir alt uzayıdır ve $h_M$, birim vektör bazı içeren bir simetrik baza sahiptir. Ayrıca, $h_M$ uzayına kısıtlanan $\|\cdot\|_M$ normu, bir simetrik baz normudur [8].*

Bir BK-uzayı olan $(\ell_M, \|\cdot\|_M)$, genelde AK-uzayı değildir. $\Delta_2$-şartının önemini gösteren aşağıdaki teorem, $\ell_M$ nin hangi durumlarda bir AK-uzayı olacağını ifade eder.

**Teorem 2.1.13.** *Bir $M$ Orlicz fonksiyonu için aşağıdaki şartlar denktir:*

*i) $M$ sıfırda $\Delta_2$-şartını sağlar.*

*ii) $\ell_M = h_M$ dir.*

*iii) $\ell_M$ bir AK-uzayıdır [5].*

**Teorem 2.1.14.** *$M$ sıfırda $\Delta_2$-şartını sağlayan bir Orlicz fonksiyonu ise $\ell_M$ ayrılabilirdir [5].*

## 2.2 $\ell_M(p)$ Dizi Uzayı

Bu kısımda, S.D. Parashar & B. Choudhary [12] tarafından tanımlanan ve bazı cebirsel-topolojik özellikleri incelenen $\ell_M(p)$ dizi uzayına yer verildi.

Şimdi, bir $M$ Orlicz fonksiyonu ve pozitif reel sayıların herhangi bir $p = (p_k)$ dizisi için

$$\ell_M(p) = \left\{ x \in w \colon \sum_{k=1}^{\infty} \left[ M\left( \frac{|x_k|}{\rho} \right) \right]^{p_k} < \infty, \exists \rho > 0 \text{ için} \right\}$$

olarak tanımlanan bu dizi uzayının bazı temel özelliklerini verelim. Bu bölümde ve sonraki bölümde, $p = (p_k)$ dizisini sınırlı kabul edeceğiz.

**Teorem 2.2.1.** $H = \sup_k p_k$ *olsun. Bu durumda* $\ell_M(p)$*,* $\mathbb{C}$ *karmaşık sayılar cismi üzerinde bir lineer uzaydır [12].*

**Teorem 2.2.2.** $H = \max(1, \sup p_k)$ *olmak üzere,* $\ell_M(p)$

$$g(x) = \inf \left\{ \rho^{p_n/H} > 0 \colon \left( \sum_{k=1}^{\infty} \left[ M\left( \frac{|x_k|}{\rho} \right) \right]^{p_k} \right)^{1/H} \leqslant 1,\ n = 1, 2, \ldots \right\} \tag{2.1}$$

*paranormuyla total paranormlu uzaydır [12].*

**Uyarı 2.2.1.** $M(x) = x$ *için* $\ell_M(p)$ *üzerindeki paranorm ile* $\ell(p)$ *üzerindeki paranorm aynıdır [12].*

**Teorem 2.2.3.** $1 \leqslant p_k < \infty$ *olsun. Bu durumda* $\ell_M(p)$*, (2.1) paranormuyla tam paranormlu uzaydır [12].*

**Teorem 2.2.4.** *Her bir* $k$ *için* $0 < p_k \leqslant q_k < \infty$ *olacak şekilde* $(p_k)$ *ve* $(q_k)$ *dizileri için*

$$\ell_M(p) \subseteq \ell_M(q)$$

*dir [12].*

# BÖLÜM 3

# VEKTÖR DEĞERLİ ORLICZ DİZİ UZAYLARI

## 3.1 $F(E_k, M)$ Dizi Uzayı

Bu kısımda, 1999 yılında D. Ghosh & P.D. Srivastava [3] tarafından tanımlanan $F(E_k, M)$ vektör değerli dizi uzayına ve bu uzayın bazı cebirsel-topolojik özelliklerine yer verildi.

Her bir $k$ için $E_k$, $\mathbb{C}$ karmaşık sayılar cismi üzerinde $\|\cdot\|_{E_k}$ normuyla bir Banach uzayı olsun. $F$, üzerindeki $\|\cdot\|_F$ monoton normuyla bir normal dizi uzayı ve $(e_k)$, $F$ için bir Schauder bazı olsun. Her bir $k$ için $x_k \in E_k$ olacak şekildeki bütün $x = (x_k)$ dizilerinin

$$\alpha x = (\alpha x_k), \; \alpha \in \mathbb{C} \quad \text{ve} \quad x + y = (x_k + y_k)$$

koordinatsal işlemleri altında lineer uzayı $s(E_k)$ ile gösterilsin. $x \in s(E_k)$ olsun ve $\lambda = (\lambda_k)$ bir skaler dizi olmak üzere $\lambda x$, $\lambda x = (\lambda_k x_k)$ olarak tanımlansın.

Böylece, bir $M$ Orlicz fonksiyonu yardımıyla, vektör değerli dizilerin

$$F(E_k, M) = \left\{ x = (x_k) \in s(E_k) : \left( M\left( \frac{\|x_k\|_{E_k}}{\rho} \right) \right) \in F, \, \exists \rho > 0 \text{ için} \right\} \tag{3.1}$$

uzayı tanımlanabilir ve bu dizi uzayı üzerinde bir norm

$$\|x\| = \inf \left\{ \rho > 0 \colon \left\| \left( M\left( \frac{\|x_k\|_{E_k}}{\rho} \right) \right) \right\|_F \leqslant 1 \right\} \tag{3.2}$$

ile verilebilir.

**Teorem 3.1.1.** $F(E_k, M)$, *$\mathbb{C}$ karmaşık sayılar cismi üzerinde lineer uzaydır [3].*

**Teorem 3.1.2.** $F(E_k, M)$, *(3.2) normu ile bir Banach uzaydır [3].*

**Teorem 3.1.3.** *$M$ $\Delta_2$-şartını sağlayan bir Orlicz fonksiyonu ise*

$$F(E_k) \subset F(E_k, M)$$

*dir, burada* $F(E_k) = \left\{ x = (x_k) \in s(E_k) \colon \left( \frac{\|x_k\|_{E_k}}{\rho} \right) \in F, \, \exists \rho > 0 \text{ için} \right\}$ *dir [3].*

Şimdi, $F(E_k, M)$ dizi uzayının çarpım uzayını ve bu çarpım uzayı için bazı kapsama bağıntılarını verelim.

**Tanım 3.1.1.** *Her bir $k$ için $E_k$ normlu cebir olsun. $F(E_k, M)$ dizi uzayının $S[F(E_k, M)]$ çarpım uzayı*

$$S[F(E_k, M)] = \left\{ a = (a_k) \in s(E_k) : \left( M\left( \frac{\|a_k x_k\|_{E_k}}{\rho} \right) \right) \in F, \right.$$
$$\left. \exists \rho > 0 \text{ ve } \forall x \in F(E_k, M) \text{ için} \right\}$$

*olarak tanımlanır [3].*

**Teorem 3.1.4.** *$M$ $\Delta_2$-şartını sağlayan bir Orlicz fonksiyonu ise $\ell_\infty(E_k) \subseteq S[F(E_k, M)]$ dir, burada*

$$\ell_\infty(E_k) = \left\{ x = (x_k) \in s(E_k) : \sup_k \|x_k\|_{E_k} < \infty \right\}$$

*dir [3].*

Şimdi, $F(E_k, M)$ dizi uzayının aşağıdaki gibi tanımlanan $[F(E_k, M)]$ alt uzayının bazı özelliklerini verelim.

$$[F(E_k, M)] = \left\{ x = (x_k) \in s(E_k) : \left( M\left( \frac{\|x_k\|_{E_k}}{\rho} \right) \right) \in F, \forall \rho > 0 \text{ için} \right\}$$

Burada, $F$ ve $E_k$ için daha önce sözü edilen şartlar geçerlidir ve $[F(E_k, M)]$ uzayının topolojisi, $F(E_k, M)$ uzayının (3.2) ile verilen norm topolojisidir.

**Teorem 3.1.5.** *$[F(E_k, M)]$, (3.2) normu ile bir Banach uzayıdır [3].*

**Teorem 3.1.6.** *$[F(E_k, M)]$ bir $AK$-uzayıdır [3].*

## 3.2 $F(X_k, q_k, M, p_k, s)$ Dizi Uzayı

Bu kısımda, S.D. Parashar & B. Choudhary [12] nin tanımladığı skaler değerli $\ell_M(p)$ Orlicz dizi uzayı ile D. Ghosh & P.D. Srivastava [3] nın tanımladığı vektör değerli $F(E_k, M)$ Orlicz dizi uzayını kapsayan vektör değerli bir Orlicz dizi uzayı tanımlayacağız. Daha sonra, tanımladığımız bu uzayın bazı cebirsel ve topolojik özelliklerini inceleyeceğiz.

Her bir $k$ için $X_k$, $\mathbb{C}$ karmaşık sayılar cismi üzerinde lineer uzay ve $q_k$ yarınormuyla yarınormlu bir uzay olsun. $F$, üzerinde tanımlı $\|\cdot\|_F$ normuyla mutlak monoton normlu bir normal dizi cebiri ve $(e_k) = (e_1, e_2, ...)$, $F$ için bir Schauder bazı olsun. Her bir $k$ için $x_k \in X_k$ olacak şekildeki bütün $x = (x_k)$ dizilerinin

$$\alpha x = (\alpha x_k)\,,\, \alpha \in \mathbb{C} \quad \text{ve} \quad x + y = (x_k + y_k)$$

alışılmış koordinatsal işlemleri altında lineer uzayını $s(X_k)$ ile gösterelim. $x \in s(X_k)$ ve $\lambda = (\lambda_k)$ bir skaler dizi olmak üzere $\lambda x = (\lambda_k x_k)$ olarak tanımlayalım. Böylece, $M$ Orlicz fonksiyonu yardımıyla $F(X_k, q_k, M, p_k, s)$ vektör değerli dizi uzayını

$$F(X_k, q_k, M, p_k, s) = \left\{ x = (x_k) \in s(X_k) \colon \left( k^{-s} \left[ M \left( \frac{q_k(x_k)}{\rho} \right) \right]^{p_k} \right) \in F, \right. \\ \left. \exists \rho > 0 \text{ için} \right\} \tag{3.1}$$

ile tanımlabiliriz, burada $s$ negatif olmayan bir reel sayı ve $(p_k)$, pozitif reel sayıların sınırlı bir dizisidir. Ayrıca, $F(X_k, q_k, M, p_k, s)$ üzerinde

$$g(x) = \inf \left\{ \rho^{p_n/H} > 0 \colon \left\| \left( k^{-s} \left[ M \left( \frac{q_k(x_k)}{\rho} \right) \right]^{p_k} \right) \right\|_F^{1/H} \leqslant 1,\, n \in \mathbb{N} \right\} \tag{3.2}$$

fonksiyonu ile bir paranorm tanımlayabiliriz, burada $H = \max(1, \sup p_k)$ dır.

**Teorem 3.2.1.** *$H = \sup p_k$ olsun. Bu durumda $F(X_k, q_k, M, p_k, s)$, $\mathbb{C}$ karmaşık sayılar cismi üzerinde lineer uzaydır.*

**İspat.** $x = (x_k)$, $y = (y_k) \in F(X_k, q_k, M, p_k, s)$ ve $\alpha$, $\beta \in \mathbb{C}$ olsun. Böylece

$$\left( k^{-s} \left[ M \left( \frac{q_k(x_k)}{\rho_1} \right) \right]^{p_k} \right), \left( k^{-s} \left[ M \left( \frac{q_k(y_k)}{\rho_2} \right) \right]^{p_k} \right) \in F$$

olacak şekilde $\rho_1,\ \rho_2 > 0$ sayıları vardır. $\rho_3 = \max(2|\alpha|\rho_1, 2|\beta|\rho_2)$ olsun. $M$ azalmayan ve konveks olduğundan

$$\begin{aligned} M\left(\frac{q_k(\alpha x_k+\beta y_k)}{\rho_3}\right) &\leqslant M\left(\frac{|\alpha|}{\rho_3}q_k(x_k)+\frac{|\beta|}{\rho_3}q_k(y_k)\right) \\ &\leqslant M\left(\frac{1}{2}\frac{q_k(x_k)}{\rho_1}+\frac{1}{2}\frac{q_k(y_k)}{\rho_2}\right) \\ &\leqslant \frac{1}{2}M\left(\frac{q_k(x_k)}{\rho_1}\right)+\frac{1}{2}M\left(\frac{q_k(y_k)}{\rho_2}\right) \\ &\leqslant M\left(\frac{q_k(x_k)}{\rho_1}\right)+M\left(\frac{q_k(y_k)}{\rho_2}\right) \end{aligned}$$

dir. $H = \sup p_k$ ve $C = \max(1, 2^{H-1})$ olmak üzere

$$\begin{aligned} k^{-s}\left[M\left(\frac{q_k(\alpha x_k+\beta y_k)}{\rho_3}\right)\right]^{p_k} &\leqslant k^{-s}\left[M\left(\frac{q_k(x_k)}{\rho_1}\right)+M\left(\frac{q_k(y_k)}{\rho_2}\right)\right]^{p_k} \\ &\leqslant C\left\{k^{-s}\left[M\left(\frac{q_k(x_k)}{\rho_1}\right)\right]^{p_k}+k^{-s}\left[M\left(\frac{q_k(y_k)}{\rho_2}\right)\right]^{p_k}\right\} \end{aligned}$$

yazılabilir. F normal ve lineer olduğundan

$$\left(k^{-s}\left[M\left(\frac{q_k(\alpha x_k+\beta y_k)}{\rho_3}\right)\right]^{p_k}\right) \in F$$

dir. Böylece $\alpha x + \beta y \in F(X_k, q_k, M, p_k, s)$ olup, $F(X_k, q_k, M, p_k, s)$ lineer uzaydır.

□

**Teorem 3.2.2.** *$F(X_k, q_k, M, p_k, s)$, (3.2) paranormuyla bir paranormlu uzaydır. Burada $H = \max(1, \sup p_k)$ dır.*

**İspat.** $F(X_k, q_k, M, p_k, s)$ uzayının sıfırını, her bir $k$ için $\theta_k \in X_k$ olmak üzere $\theta = (\theta_k)$ ile gösterelim. Her bir $k$ için $q_k(\theta_k) = 0$ ve $M(0) = 0$ olduğundan $g(\theta) = \inf\{\rho^{p_n/H}\} = 0$ dır. Ayrıca, her $x \in F(X_k, q_k, M, p_k, s)$ için $g(-x) = g(x)$ olduğu açıktır.

Şimdi $g$ nin alttoplamsallığını gösterelim. $x, y \in F(X_k, q_k, M, p_k, s)$ olsun. Böylece

$$\left(k^{-s}\left[M\left(\frac{q_k(x_k)}{\rho_1}\right)\right]^{p_k}\right), \left(k^{-s}\left[M\left(\frac{q_k(y_k)}{\rho_2}\right)\right]^{p_k}\right) \in F$$

olacak şekilde $\rho_1, \rho_2 > 0$ sayıları vardır. $\rho_3 = \max(2\rho_1, 2\rho_2)$ alalım. Bu durumda, her bir $k$ için $q_k$ yarınorm olduğundan

$$\begin{aligned} & q_k(x_k+y_k) \leqslant q_k(x_k)+q_k(y_k) \\ \Longrightarrow\ & \frac{q_k(x_k+y_k)}{\rho_3} \leqslant \frac{1}{2}\frac{q_k(x_k)}{\rho_3/2}+\frac{1}{2}\frac{q_k(y_k)}{\rho_3/2} \end{aligned}$$

dir. $M$ azalmayan ve konveks olduğundan

$$M\left(\frac{q_k(x_k+y_k)}{\rho_3}\right) \leqslant M\left(\frac{1}{2}\frac{q_k(x_k)}{\rho_3/2}+\frac{1}{2}\frac{q_k(y_k)}{\rho_3/2}\right)$$
$$\leqslant \frac{1}{2}M\left(\frac{q_k(x_k)}{\rho_3/2}\right)+\frac{1}{2}M\left(\frac{q_k(y_k)}{\rho_3/2}\right)$$
$$\leqslant M\left(\frac{q_k(x_k)}{\rho_3/2}\right)+M\left(\frac{q_k(y_k)}{\rho_3/2}\right)$$

dir. Her bir $k$ için $p_k > 0$ ve $k^{-s} > 0$ olduğundan, Önerme 1.1.5 dikkate alındığında

$$k^{-s}\left[M\left(\frac{q_k(x_k+y_k)}{\rho_3}\right)\right]^{p_k} \leqslant k^{-s}\left[M\left(\frac{q_k(x_k)}{\rho_3/2}\right)+M\left(\frac{q_k(y_k)}{\rho_3/2}\right)\right]^{p_k}$$
$$=\left(k^{-s/H}\left[M\left(\frac{q_k(x_k)}{\rho_3/2}\right)+M\left(\frac{q_k(y_k)}{\rho_3/2}\right)\right]^{p_k/H}\right)^H$$
$$\leqslant\left(k^{-s/H}\left[M\left(\frac{q_k(x_k)}{\rho_3/2}\right)\right]^{p_k/H}+\right.$$
$$\left.+k^{-s/H}\left[M\left(\frac{q_k(y_k)}{\rho_3/2}\right)\right]^{p_k/H}\right)^H$$

elde edilir. Burada, $a_k = k^{-s}\left[M\left(\frac{q_k(x_k)}{\rho_3/2}\right)\right]^{p_k}$, $b_k = k^{-s}\left[M\left(\frac{q_k(y_k)}{\rho_3/2}\right)\right]^{p_k}$ ve $c_k = k^{-s}\left[M\left(\frac{q_k(x_k+y_k)}{\rho_3}\right)\right]^{p_k}$ kısaltmaları yapılırsa

$$c_k \leqslant \left(a_k^{1/H}+b_k^{1/H}\right)^H \tag{3.3}$$

olur. Böylece, Teorem 1.1.2 kullanılarak

$$\left\|\left(\left(a_k^{1/H}+b_k^{1/H}\right)^H\right)\right\|_F^{1/H} \leqslant \left\|\left(\left(a_k^{1/H}\right)^H\right)\right\|_F^{1/H}+\left\|\left(\left(b_k^{1/H}\right)^H\right)\right\|_F^{1/H}$$

yazılabilir. $\|\cdot\|_F$ normunun mutlak monotonluğu ve (3.3) eşitsizliği göz önünde tutulduğunda

$$\|(c_k)\|_F^{1/H} \leqslant \|(a_k)\|_F^{1/H}+\|(b_k)\|_F^{1/H} \tag{3.4}$$

elde edilir. Şimdi aşağıdaki kısaltmaları yapalım.

$$\rho_x = \inf\left\{\rho_3/2>0:\ \|(a_k)\|_F^{1/H}\leqslant 1\right\}$$
$$\rho_y = \inf\left\{\rho_3/2>0:\ \|(b_k)\|_F^{1/H}\leqslant 1\right\}$$
$$\rho_{x+y} = \inf\left\{\rho_3>0:\ \|(c_k)\|_F^{1/H}\leqslant 1\right\}$$

$\rho_x$, $\rho_y$ ve $\rho_{x+y}$ nin tanımı ve (3.4) eşitsizliğinden $\rho_{x+y} \leqslant \rho_x + \rho_y$ elde edilir. Böylece, Önerme 1.1.5 gereğince,

$$\rho_{x+y}^{p_n/H} \leqslant \rho_x^{p_n/H} + \rho_y^{p_n/H}$$

olup, $g$ nin tanımından

$$\begin{aligned} g(x+y) = \inf_n \rho_{x+y}^{p_n/H} &\leqslant \inf_n \left\{\rho_x^{p_n/H} + \rho_y^{p_n/H}\right\} \\ &= \inf_n \left\{\rho_x^{p_n/H}\right\} + \inf_n \left\{\rho_y^{p_n/H}\right\} \\ &= g(x) + g(y) \end{aligned}$$

elde edilir.

Son olarak skalerle çarpma işleminin sürekliliğini gösterelim. $\lambda$ herhangi bir sayı olsun. $g$ nin tanımından,

$$\begin{aligned} g(\lambda x) &= \inf\left\{\rho^{p_n/H} > 0 \colon \left\|\left(k^{-s}\left[M\left(\frac{q_k(\lambda x_k)}{\rho}\right)\right]^{p_k}\right)\right\|_F^{1/H} \leqslant 1,\, n \in \mathbb{N}\right\} \\ &= \inf\left\{(|\lambda|\, r)^{p_n/H} > 0 \colon \left\|\left(k^{-s}\left[M\left(\frac{q_k(x_k)}{r}\right)\right]^{p_k}\right)\right\|_F^{1/H} \leqslant 1,\, n \in \mathbb{N}\right\} \end{aligned}$$

yazılabilir, burada $r = \rho/\left|\lambda\right|$ dir.

$|\lambda|^{p_k} \leqslant \max(1, |\lambda|^H)$ olduğundan $|\lambda|^{p_k/H} \leqslant \left(\max(1, |\lambda|^H)\right)^{1/H}$ ve böylece

$$\begin{aligned} g(\lambda x) \leqslant \left(\max(1, |\lambda|^H)\right)^{1/H} &\cdot \\ \cdot \inf&\left\{r^{p_n/H} > 0 \colon \left\|\left(k^{-s}\left[M\left(\frac{q_k(x_k)}{r}\right)\right]^{p_k}\right)\right\|_F^{1/H} \leqslant 1,\, n \in \mathbb{N}\right\} \end{aligned}$$

olur. Böylece, $\lambda$ skaler ve $g(x) \to 0$ ise $g(\lambda x) \to 0$ dır. Şimdi kabul edelim ki $\lambda^n \to 0$ ve $x \in F(X_k, q_k, M, p_k, s)$ olsun. Bu durumda, $\exists \rho > 0$ için

$$t = (t_k) = \left(k^{-s}\left[M\left(\frac{q_k(x_k)}{\rho}\right)\right]^{p_k}\right) \in F$$

dir. $(e_k)$, $F$ için bir Schauder baz olduğundan, $\varepsilon > 0$ verildiğinde yeterince büyük $N$ doğal sayıları için

$$\left\|t - \sum_{k=1}^{N} t_k e_k\right\|_F = \left\|\sum_{k=N+1}^{\infty} t_k e_k\right\|_F < \left(\frac{\varepsilon}{2}\right)^H$$

kalır. $0 < |\lambda| < 1$ alalım. $q_k$ lar yarınorm ve $M$ azalmayan olduğundan

$$\begin{aligned}
& q_k(\lambda x_k) = |\lambda|\, q_k(x_k) \\
& \Longrightarrow M\left(\frac{q_k(\lambda x_k)}{\rho}\right) = M\left(\frac{|\lambda|\, q_k(x_k)}{\rho}\right) \leqslant M\left(\frac{q_k(x_k)}{\rho}\right) \\
& \Longrightarrow k^{-s}\left[M\left(\frac{q_k(\lambda x_k)}{\rho}\right)\right]^{p_k} \leqslant k^{-s}\left[M\left(\frac{q_k(x_k)}{\rho}\right)\right]^{p_k}
\end{aligned}$$

ve $F$ üzerindeki norm mutlak monoton olduğundan

$$\left\|\sum_{k=N+1}^{\infty} k^{-s}\left[M\left(\frac{q_k(\lambda x_k)}{\rho}\right)\right]^{p_k} e_k\right\|_F \leqslant \left\|\sum_{k=N+1}^{\infty} k^{-s}\left[M\left(\frac{q_k(x_k)}{\rho}\right)\right]^{p_k} e_k\right\|_F < \left(\frac{\varepsilon}{2}\right)^H$$

dir. Şimdi,

$$f(u) =: \left\|\sum_{k=1}^{N} k^{-s}\left[M\left(\frac{q_k(ux_k)}{\rho}\right)\right]^{p_k} e_k\right\|_F$$

olarak tanımlayalım. $M$, $[0,\infty)$ aralığında sürekli olduğundan, her bir $1 \leqslant k \leqslant N$ için

$$f_k(u) =: k^{-s}\left[M\left(\frac{q_k(ux_k)}{\rho}\right)\right]^{p_k} e_k$$

fonksiyonları da $[0,\infty)$ üzerinde süreklidir. Böylece $f(u)$, $[0,\infty)$ üzerinde sürekli, dolayısıyla sıfırda sağdan sürekli olup, $0 < u < \delta$ için $|f(u)| < (\varepsilon/2)^H$ olacak şekilde bir $0 < \delta < 1$ sayısı vardır. $\lambda^n \to 0$ olduğundan, $n > K$ için $|\lambda^n| < \delta$ olacak şekilde bir $K > 0$ tamsayısı vardır. Böylece, $n > K$ için

$$\left\|\sum_{k=1}^{N} k^{-s}\left[M\left(\frac{q_k(\lambda^n x_k)}{\rho}\right)\right]^{p_k} e_k\right\|_F < \left(\frac{\varepsilon}{2}\right)^H$$

olup

$$\begin{aligned}
\left\|\sum_{k=1}^{\infty} k^{-s}\left[M\left(\frac{q_k(\lambda^n x_k)}{\rho}\right)\right]^{p_k} e_k\right\|_F^{1/H} \leqslant & \left\|\sum_{k=1}^{N} k^{-s}\left[M\left(\frac{q_k(\lambda^n x_k)}{\rho}\right)\right]^{p_k} e_k\right\|_F + \\
& + \left\|\sum_{k=N+1}^{\infty} k^{-s}\left[M\left(\frac{q_k(\lambda^n x_k)}{\rho}\right)\right]^{p_k} e_k\right\|_F < \varepsilon
\end{aligned}$$

elde edilir. Bu ise, $n \to \infty$ için

$$\left\|\left(k^{-s}\left[M\left(\frac{q_k(\lambda^n x_k)}{\rho}\right)\right]^{p_k}\right)\right\|_F^{1/H} \to 0$$

dolayısıyla $g(\lambda^n x) \to 0$ olması demektir. $\square$

**Teorem 3.2.3.** *Her bir $k \in \mathbb{N}$ için $(X_k, q_k)$ tam ise $F(X_k, q_k, M, p_k, s)$ tamdır.*

**İspat.** $(x^i)$, $F(X_k, q_k, M, p_k, s)$ uzayında bir Cauchy dizisi olsun. $g$ paranormunun tanımından

$$\left\|\left(k^{-s}\left[M\left(\frac{q_k(x_k^i - x_k^j)}{g(x^i - x^j)}\right)\right]^{p_k}\right)\right\|_F^{1/H} \leqslant 1$$

yazılabilir. $F$ normal uzay ve $(e_k)$, $F$ nin bir Schauder bazı olduğundan, her bir $k$ için

$$k^{-s}\left[M\left(\frac{q_k(x_k^i - x_k^j)}{g(x^i - x^j)}\right)\right]^{p_k} \cdot \|e_k\|_F \leqslant \left\|\left(k^{-s}\left[M\left(\frac{q_k(x_k^i - x_k^j)}{g(x^i - x^j)}\right)\right]^{p_k}\right)\right\|_F \leqslant 1$$

dir. $a = 0$, $b = \frac{q_k(x_k^i - x_k^j)}{g(x^i - x^j)}$ ve her $t \in I$ için $r(t) = 1$ olmak üzere, Teorem 1.1.1 kullanılarak

$$\int_a^b q(t)dt = q\left(\frac{x_0}{2}\right)\int_a^b dt \implies M(b) = q\left(\frac{x_0}{2}\right)\cdot b$$

$$\implies M\left(\frac{q_k(x_k^i - x_k^j)}{g(x^i - x^j)}\right) = q\left(\frac{x_0}{2}\right)\cdot\frac{q_k(x_k^i - x_k^j)}{g(x^i - x^j)}$$

olacak şekilde $0 < \frac{x_0}{2} < \frac{q_k(x_k^i - x_k^j)}{g(x^i - x^j)}$ bulunabilir. Şimdi, her bir $k$ için $\gamma^{p_k}\|e_k\|_F > 1$ olmak üzere

$$\gamma^{p_k}\|e_k\|_F \cdot \frac{x_0^{p_k}}{2}\cdot\left[q\left(\frac{x_0}{2}\right)\right]^{p_k} \geqslant 1$$

olacak şekilde bir $\gamma$ seçelim, burada $q$, $M$ nin çekirdeğidir. Böylece, her bir $k$ için

$$k^{-s}\left[M\left(\frac{q_k(x_k^i - x_k^j)}{g(x^i - x^j)}\right)\right]^{p_k} \cdot \|e_k\|_F \leqslant \gamma^{p_k}\|e_k\|_F \cdot \frac{x_0^{p_k}}{2}\cdot\left[q\left(\frac{x_0}{2}\right)\right]^{p_k}$$

$$\implies k^{-s}\left[q\left(\frac{x_0}{2}\right)\cdot\frac{q_k(x_k^i - x_k^j)}{g(x^i - x^j)}\right]^{p_k} \leqslant \gamma^{p_k}\cdot\frac{x_0^{p_k}}{2}\cdot\left[q\left(\frac{x_0}{2}\right)\right]^{p_k}$$

$$\implies k^{-s}\left[q_k(x_k^i - x_k^j)\right]^{p_k} \leqslant \gamma^{p_k}\cdot\frac{x_0^{p_k}}{2}\cdot\left[g(x^i - x^j))\right]^{p_k}\cdot\left[q\left(\frac{x_0}{2}\right)\right]^{p_k}$$

$$\implies k^{-s}\left[q_k(x_k^i - x_k^j)\right]^{p_k} \leqslant \gamma^{p_k}\cdot\frac{x_0^{p_k}}{2}\cdot\left[g(x^i - x^j)\right]^{p_k}$$

elde edilir. $(x^i)$ bir Cauchy dizisi olduğundan, $\varepsilon > 0$ verildiğinde $\forall i, j \geqslant n_0(\varepsilon)$ için $g(x^i - x^j) < \frac{\varepsilon}{\gamma x_0}$ olacak şekilde bir $n_0(\varepsilon)$ bulunabilir. Böylece, her bir $k$ için

$$k^{-s}\left[q_k(x_k^i - x_k^j)\right]^{p_k} < \gamma^{p_k}\cdot\frac{x_0^{p_k}}{2}\cdot\frac{\varepsilon^{p_k}}{\gamma^{p_k}x_0^{p_k}} = \frac{\varepsilon^{p_k}}{2}$$

$$\implies q_k(x_k^i - x_k^j) < \frac{\varepsilon}{2}$$

olur, yani her bir $i$ için $(x_k^i)$ dizisi, $X_k$ uzayında bir Cauchy dizisidir. $(X_k, q_k)$ tam olduğundan, her bir $k$ için $x_k \in X_k$ ve $i \to \infty$ için $q_k(x_k^i - x_k) \to 0$ olacak şekilde bir $x = (x_k)$ dizisi vardır. O halde, $\varepsilon > 0$ verildiğinde $g(x^i - x^j) < \rho < \frac{\varepsilon}{2}$ olacak şekilde bir $n > 1$ tamsayısı seçebiliriz. $F$ normal uzay ve $(e_k)$, $F$ nin Schauder bazı olduğundan

$$\left\| \sum_{k=1}^{n} k^{-s} \left[ M\left( \frac{q_k(x_k^i - x_k^j)}{\rho} \right) \right]^{p_k} e_k \right\|_F \leqslant \left\| \left( k^{-s} \left[ M\left( \frac{q_k(x_k^i - x_k^j)}{\rho} \right) \right]^{p_k} \right) \right\|_F \leqslant 1$$

yazılabilir. $M$ nin sürekliliği de kullanılarak bu eşitsizlik, $i, j \geqslant n$ olmak üzere $j \to \infty$ için yeniden düzenlenirse

$$\left\| \sum_{k=1}^{n} k^{-s} \left[ M\left( \frac{q_k(x_k^i - x_k)}{2\rho} \right) \right]^{p_k} e_k \right\|_F < 1$$

ve $n \to \infty$ için limit alınırsa, $\forall i \geqslant n$ için $g(x^i - x) < 2\rho < \varepsilon$ olur. Böylece $(x^i)$ dizisi $g$ paranormuna göre $x$ e yakınsar. Şimdi $(x^i) \in F(X_k, q_k, M, p_k, s)$ olduğundan

$$\left( k^{-s} \left[ M\left( \frac{q_k(x_k^i)}{\rho} \right) \right]^{p_k} \right) \in F$$

olacak şekilde bir $\rho > 0$ vardır. $i \to \infty$ ve her bir $k$ için $q_k(x_k^i - x_k) \to 0$ olduğundan, $0 < \delta_k^i < 1$ olmak üzere

$$k^{-s} \left[ M\left( \frac{q_k(x_k^i - x_k)}{\rho} \right) \right]^{p_k} < \delta_k^i \cdot k^{-s} \left[ M\left( \frac{q_k(x_k^i)}{\rho} \right) \right]^{p_k}$$

olacak şekilde pozitif $\delta_k^i$ sayıları seçebiliriz. $M$ konveks ve $q_k$ yarınorm olduğundan

$$\begin{aligned} M\left( \frac{q_k(x_k)}{2\rho} \right) &= M\left( \frac{q_k(x_k^i + x_k - x_k^i)}{2\rho} \right) \\ &\leqslant \frac{1}{2} M\left( \frac{q_k(x_k^i)}{\rho} \right) + \frac{1}{2} M\left( \frac{q_k(x_k^i - x_k)}{\rho} \right) \\ &\leqslant M\left( \frac{q_k(x_k^i)}{\rho} \right) + M\left( \frac{q_k(x_k^i - x_k)}{\rho} \right) \end{aligned}$$

olup

$$k^{-s} \left[ M\left( \frac{q_k(x_k)}{2\rho} \right) \right]^{p_k} \leqslant k^{-s} \left[ M\left( \frac{q_k(x_k^i)}{\rho} \right) + M\left( \frac{q_k(x_k^i - x_k)}{\rho} \right) \right]^{p_k}$$

yazılabilir. Böylece, $C = \max(1, 2^{H-1})$ olmak üzere

$$\begin{aligned} k^{-s} \left[ M\left( \frac{q_k(x_k)}{2\rho} \right) \right]^{p_k} &\leqslant C \left\{ k^{-s} \left[ M\left( \frac{q_k(x_k^i)}{\rho} \right) \right]^{p_k} + k^{-s} \left[ M\left( \frac{q_k(x_k^i - x_k)}{\rho} \right) \right]^{p_k} \right\} \\ &< C\left(1 + \delta_k^i\right) k^{-s} \left[ M\left( \frac{q_k(x_k^i)}{\rho} \right) \right]^{p_k} \leqslant 2Ck^{-s} \left[ M\left( \frac{q_k(x_k^i)}{\rho} \right) \right]^{p_k} \end{aligned}$$

olur. $F$ normal olduğundan

$$\left(k^{-s}\left[M\left(\frac{q_k(x_k)}{2\rho}\right)\right]^{p_k}\right) \in F$$

ve böylece $x = (x_k) \in F(X_k, q_k, M, p_k, s)$ elde edilir. □

**Lemma 3.2.1.** *$M$ $\Delta_2$ şartını sağlayan bir Orlicz fonksiyonu ve $0 < \delta < 1$ ise her bir $x \geqslant \delta$ için $M(x) < Kx\delta^{-1}M(2)$ olacak şekilde bir $K > 0$ sabiti vardır [2].*

**Teorem 3.2.4.** *$M$ $\Delta_2$ şartını sağlayan bir Orlicz fonksiyonu, $M_1$, $M_2$ de herhangi iki Orlicz fonksiyonu ve $s$, $s_1$, $s_2 \geqslant 0$ reel sayıları için*

*i)* $F(X_k, q_k, M_1, p_k, s) \subseteq F(X_k, q_k, M \circ M_1, p_k, s)$,

*ii)* $F(X_k, q_k, M_1, p_k, s) \cap F(X_k, q_k, M_2, p_k, s) \subseteq F(X_k, q_k, M_1 + M_2, p_k, s)$,

*iii)* $\limsup\limits_{t\to\infty} \frac{M_1(t)}{M_2(t)} < \infty$ *ise* $F(X_k, q_k, M_2, p_k, s) \subseteq F(X_k, q_k, M_1, p_k, s)$,

*iv)* $s_1 \leqslant s_2$ *ise* $F(X_k, q_k, M_1, p_k, s_1) \subseteq F(X_k, q_k, M_1, p_k, s_2)$,

*v)* $F_1 \subseteq F_2$ *ise* $F_1(X_k, q_k, M_1, p_k, s) \subseteq F_2(X_k, q_k, M_1, p_k, s)$ *dir.*

**İspat.** *(i)* $x \in F(X_k, q_k, M_1, p_k, s)$ olsun. Bu durumda

$$t = (t_k) = \left(k^{-s}A_k^{p_k}\right) \in F \quad ; \quad A_k = M_1\left(\frac{q_k(x_k)}{\rho}\right)$$

olacak şekilde bir $\rho > 0$ vardır. Şimdi, $0 < \delta < 1$ olacak şekilde bir $\delta$ seçelim ve $y = (y_k), z = (z_k)$ dizilerini, her bir $k$ için

$$q_k(y_k) = \begin{cases} A_k & , \quad A_k \geqslant \delta \text{ ise} \\ 0 & , \quad A_k < \delta \text{ ise} \end{cases} \qquad \text{ve} \qquad q_k(z_k) = \begin{cases} 0 & , \quad A_k \geqslant \delta \text{ ise} \\ A_k & , \quad A_k < \delta \text{ ise} \end{cases}$$

olarak tanımlayalım. Böylece, $q_k(y_k) + q_k(z_k) = A_k$ olup, $M$ konveks olduğundan

$$M(A_k) = M(q_k(y_k) + q_k(z_k)) \leqslant \frac{1}{2}M(2q_k(y_k)) + \frac{1}{2}M(2q_k(z_k))$$

yazılabilir. Lemma 3.2.1 ve $y = (y_k)$ dizisinin tanımından

$$M(2q_k(y_k)) < 2K\delta^{-1}M(2)q_k(y_k)$$

ve $z = (z_k)$ dizisinin tanımından

$$M(2q_k(z_k)) \leqslant M(2)q_k(z_k)$$

olacağından

$$\begin{aligned} M(A_k) &\leqslant \frac{1}{2} 2K\delta^{-1} M(2) q_k(y_k) + \frac{1}{2} M(2) q_k(z_k) \\ &\leqslant K\delta^{-1} M(2) q_k(y_k) + M(2) q_k(z_k) \end{aligned}$$

elde edilir. Böylece

$$M(A_k) \leqslant \begin{cases} K\delta^{-1} M(2) A_k & , \quad A_k \geqslant \delta \text{ ise} \\ M(2) A_k & , \quad A_k < \delta \text{ ise} \end{cases}$$

olup, $H = \sup p_k$ olmak üzere

$$\begin{aligned} k^{-s} \left[M\left(A_k\right)\right]^{p_k} &\leqslant \begin{cases} [K\delta^{-1} M(2)]^{p_k} k^{-s} A_k^{p_k} & , \quad A_k \geqslant \delta \text{ ise} \\ [M(2)]^{p_k} k^{-s} A_k^{p_k} & , \quad A_k < \delta \text{ ise} \end{cases} \\ &\leqslant \begin{cases} \max\left(1, [K\delta^{-1} M(2)]^H\right) t_k & , \quad A_k \geqslant \delta \text{ ise} \\ \max\left(1, [M(2)]^H\right) t_k & , \quad A_k < \delta \text{ ise} \end{cases} \end{aligned}$$

elde edilir. $t = (t_k) \in F$ ve $F$ normal olduğundan $(k^{-s} \left[M\left(A_k\right)\right]^{p_k}) \in F$, yani $x \in F(X_k, q_k, M \circ M_1, p_k, s)$ dir.

*(ii)* $x \in F(X_k, q_k, M_1, p_k, s) \cap F(X_k, q_k, M_2, p_k, s)$ olsun. Bu durumda

$$\left(k^{-s}\left[M_1\left(\frac{q_k(x_k)}{\rho_1}\right)\right]^{p_k}\right), \left(k^{-s}\left[M_2\left(\frac{q_k(x_k)}{\rho_2}\right)\right]^{p_k}\right) \in F$$

olacak şekilde $\rho_1$, $\rho_2 > 0$ sayıları vardır. $\rho = \max(\rho_1, \rho_2)$ seçilirse

$$\begin{aligned} k^{-s}\left[(M_1 + M_2)\left(\frac{q_k(x_k)}{\rho}\right)\right]^{p_k} &\leqslant k^{-s}\left[M_1\left(\frac{q_k(x_k)}{\rho_1}\right) + M_2\left(\frac{q_k(x_k)}{\rho_2}\right)\right]^{p_k} \\ &\leqslant C\left\{k^{-s}\left[M_1\left(\frac{q_k(x_k)}{\rho_1}\right)\right]^{p_k} + k^{-s}\left[M_2\left(\frac{q_k(x_k)}{\rho_2}\right)\right]^{p_k}\right\} \end{aligned}$$

ve $F$ normal olduğundan $x \in F(X_k, q_k, M_1 + M_2, p_k, s)$ elde edilir, burada $C = \max(1, \sup p_k)$ dir.

*(iii)* $\limsup\limits_{t\to\infty} \frac{M_1(t)}{M_2(t)} < \infty$ ve $x \in F(X_k, q_k, M_1, p_k, s)$ olsun. Bu durumda $\forall t \in [0, \infty)$ için $\frac{M_1(t)}{M_2(t)} \leqslant K$ olacak şekilde bir $K > 1$ sabiti bulunabilir. $\forall k$ ve $x_k \in X_k$ için $q_k(x_k) \in [0, \infty)$ olduğundan

$$\frac{M_1\left(\frac{q_k(x_k)}{\rho}\right)}{M_2\left(\frac{q_k(x_k)}{\rho}\right)} \leqslant K$$

olacak şekilde bir $\rho > 0$ vardır. Böylece

$$\frac{\left[M_1\left(\frac{q_k(x_k)}{\rho}\right)\right]^{p_k}}{\left[M_2\left(\frac{q_k(x_k)}{\rho}\right)\right]^{p_k}} \leqslant K^{p_k} \leqslant K^H$$

$$\Longrightarrow k^{-s}\left[M_1\left(\frac{q_k(x_k)}{\rho}\right)\right]^{p_k} \leqslant K^H \cdot k^{-s}\left[M_2\left(\frac{q_k(x_k)}{\rho}\right)\right]^{p_k}$$

ve $F$ normal olduğundan $x \in F(X_k, q_k, M_1, p_k, s)$ elde edilir.

*(iv)* $s_1 \leqslant s_2$ ve $x \in F(X_k, q_k, M_1, p_k, s_1)$ olsun. Bu durumda $-s_1 \geqslant -s_2$ ve $\forall k$ için $k^{-s_1} \geqslant k^{-s_2}$ olur. Böylece $\forall k$ ve $x_k \in X_k$ için

$$k^{-s_2}\left[M_1\left(\frac{q_k(x_k)}{\rho}\right)\right]^{p_k} \leqslant k^{-s_1}\left[M_1\left(\frac{q_k(x_k)}{\rho}\right)\right]^{p_k}$$

olup, $F$ normal olduğundan $x \in F(X_k, q_k, M_1, p_k, s_2)$ elde edilir.

*(v)* $x \in F_1(X_k, q_k, M_1, p_k, s)$ olsun. Bu durumda $\left(k^{-s}\left[M_1\left(\frac{q_k(x_k)}{\rho}\right)\right]^{p_k}\right) \in F_1$ dir. $F_1 \subseteq F_2$ olduğundan $\left(k^{-s}\left[M_1\left(\frac{q_k(x_k)}{\rho}\right)\right]^{p_k}\right) \in F_2$ olup, $x \in F_2(X_k, q_k, M_1, p_k, s)$ dir. □

**Sonuç 3.2.1.** *$M$ bir Orlicz fonksiyonu olsun. Bu durumda,*

*i)* $F(X_k, q_k, M, p_k) \subseteq F(X_k, q_k, M, p_k, s)$,

*ii)* *$M$ $\Delta_2$-şartını sağlarsa* $F(X_k, q_k, p_k, s) \subseteq F(X_k, q_k, M, p_k, s)$ *dir.*

**İspat.** Teorem 3.2.4 (iv) de $s_1 = 0$ ve (i) de $M_1(x) = x$ alınırsa, sırasıyla (i) ve (ii) elde edilir. □

**Teorem 3.2.5.** $0 < r_k \leqslant p_k$ *ve* $\left(\frac{p_k}{r_k}\right)$ *sınırlı ise* $F(X_k, q_k, M, p_k, s) \subseteq F(X_k, q_k, M, r_k, s)$ *dir.*

**İspat.** $x \in F(X_k, q_k, M, p_k, s)$ olsun. Bu durumda, $w_k = k^{-s}\left[M\left(\frac{q_k(x_k)}{\rho}\right)\right]^{p_k}$ olmak üzere $(w_k) \in F$ olacak şekilde bir $\rho > 0$ vardır. $\lambda_k = \frac{r_k}{p_k}$ olmak üzere $0 < \lambda < \lambda_k \leqslant 1$ olacak şekilde bir $\lambda$ sabiti bulunabilir. Şimdi

$$u_k = \begin{cases} w_k^{\lambda} & , \quad w_k \geqslant 1 \text{ ise} \\ 0 & , \quad w_k < 1 \text{ ise} \end{cases} \qquad \text{ve} \qquad v_k = \begin{cases} 0 & , \quad w_k \geqslant 1 \text{ ise} \\ w_k^{\lambda} & , \quad w_k < 1 \text{ ise} \end{cases}$$

olarak tanımlanırsa $u_k + v_k = w_k^\lambda$ ve $u_k^{\lambda_k} + v_k^{\lambda_k} = w_k^{\lambda\lambda_k}$ olur. Böylece $u_k^{\lambda_k} \leqslant u_k \leqslant w_k^\lambda$, $v_k^{\lambda_k} \leqslant v_k^\lambda$ ve buradan

$$\begin{aligned} & w_k^{\lambda\lambda_k} \leqslant w_k^\lambda + v_k^\lambda \\ \Longrightarrow\ & w_k^{\lambda_k} \leqslant \left(w_k^\lambda + v_k^\lambda\right)^{1/\lambda} \leqslant C\left(w_k + v_k\right)\ ;\ C = \max\left(1, 2^{\frac{1}{\lambda}-1}\right) \end{aligned}$$

elde edilir. $(w_k)$, $(v_k) \in F$ ve $F$ normal olduğundan $(w_k^{\lambda_k}) \in F$ dir. Böylece

$$w_k^{\lambda_k} = k^{-s\frac{r_k}{p_k}}\left[M\left(\frac{q_k(x_k)}{\rho}\right)\right]^{r_k} \geqslant k^{-s}\left[M\left(\frac{q_k(x_k)}{\rho}\right)\right]^{r_k}$$

olup

$$\left(k^{-s}\left[M\left(\frac{q_k(x_k)}{\rho}\right)\right]^{r_k}\right) \in F$$

yani $x \in F(X_k, q_k, M, r_k, s)$ dir. □

**Tanım 3.2.1.** *Her bir $k$ için $(X_k, q_k)$ yarınormlu cebir olsun. Bu durumda, $F(X_k, q_k, M, p_k, s)$ uzayının çarpım uzayı*

$$S\left[F(X_k, q_k, M, p_k, s)\right] = \left\{a = (a_k) \in s(X_k) :\ \left(k^{-s}\left[M\left(\frac{q_k(a_k x_k)}{\rho}\right)\right]^{p_k}\right) \in F,\right.$$
$$\left. \text{her } x = (x_k) \in F(X_k, q_k, M, p_k, s) \text{ için}\right\}$$

*olarak tanımlanır.*

**Teorem 3.2.6.** *$M$ $\Delta_2$ şartını sağlayan bir Orlicz fonksiyonu ise $\ell_\infty(X_k, q_k) \subseteq S\left[F(X_k, q_k, M, p_k, s)\right]$ dir.*

**İspat.** $a = (a_k) \in \ell_\infty(X_k, q_k)$, $T = \sup_{k\geqslant 1} q_k(a_k)$ ve $x = (x_k) \in F(X_k, q_k, M, p_k, s)$ olsun. Böylece, $\left(k^{-s}\left[M\left(\frac{q_k(x_k)}{\rho}\right)\right]^{p_k}\right) \in F$ olacak şekilde $\rho > 0$ vardır, $K_1 > 1$ için

$$\begin{aligned} k^{-s}\left[M\left(\frac{q_k(a_k x_k)}{\rho}\right)\right]^{p_k} & \leqslant k^{-s}\left[M\left(\frac{q_k(a_k)\cdot q_k(x_k)}{\rho}\right)\right]^{p_k} \\ & \leqslant k^{-s}\left[M\left((1+[T])\frac{q_k(x_k)}{\rho}\right)\right]^{p_k} \\ & \leqslant k^{-s}\left[K_1\cdot(1+[T])M\left(\frac{q_k(x_k)}{\rho}\right)\right]^{p_k} \\ & \leqslant \left[K_1\cdot(1+[T])\right]^H \cdot k^{-s}\left[M\left(\frac{q_k(x_k)}{\rho}\right)\right]^{p_k} \end{aligned}$$

dir, burada $[T]$, $T$ nin tam kısmını göstermektedir. $F$ normal olduğundan $ax \in S\left[F(X_k, q_k, M, p_k, s)\right]$ dir. □

Şimdi $[F(X_k, q_k, M, p_k, s)]$ uzayını

$$[F(X_k, q_k, M, p_k, s)] = \left\{ x = (x_k) \in s(X_k) \colon \left( k^{-s} \left[ M \left( \frac{q_k(x_k)}{\rho} \right) \right]^{p_k} \right) \in F, \forall \rho > 0 \right\}$$

ile tanımlayalım. Bu şekilde tanımlanan uzay, açıkça $F(X_k, q_k, M, p_k, s)$ uzayının bir alt uzayıdır. $[F(X_k, q_k, M, p_k, s)]$ uzayının topolojisi, $F(X_k, q_k, M, p_k, s)$ uzayının (3.2) paranormu ile verilebilir.

**Teorem 3.2.7.** *Her bir $k$ için $(X_k, q_k)$ tam yarınormlu uzay ise $[F(X_k, q_k, M, p_k, s)]$ uzayı (3.2) paranormuyla tam paranormlu uzaydır.*

**İspat.** $[F(X_k, q_k, M, p_k, s)] \subseteq F(X_k, q_k, M, p_k, s)$ olduğundan $[F(X_k, q_k, M, p_k, s)]$ uzayının kapalı olduğunu göstermek yeterlidir. Bunun için $g(x^i - x) \to 0 \ \ (i \to \infty)$ olacak şekilde $(x_i) = ((x_k^i)) \in [F(X_k, q_k, M, p_k, s)]$ dizisini alalım, burada $x = (x_k) \in F(X_k, q_k, M, p_k, s)$ dir. Böylece, $\varepsilon > 0$ verildiğinde $\forall i > i_0$ için $g(x^i - x) < \frac{\varepsilon}{2}$ olacak şekilde bir $i_0$ tamsayısı seçebiliriz. Şimdi

$$\begin{aligned}
k^{-s} \left[ M \left( \frac{q_k(x_k)}{\varepsilon} \right) \right]^{p_k} &= k^{-s} \left[ M \left( \frac{q_k(x_k - x_k^i + x_k^i)}{\varepsilon} \right) \right]^{p_k} \\
&\leqslant k^{-s} \left[ M \left( \frac{2q_k(x_k^i - x_k)}{2\varepsilon} + \frac{2q_k(x_k^i)}{2\varepsilon} \right) \right]^{p_k} \\
&\leqslant k^{-s} \left[ \frac{1}{2} M \left( \frac{q_k(x_k^i - x_k)}{\varepsilon/2} \right) + \frac{1}{2} M \left( \frac{q_k(x_k^i)}{\varepsilon/2} \right) \right]^{p_k} \\
&\leqslant C \left\{ k^{-s} \left[ M \left( \frac{q_k(x_k^i - x_k)}{g(x^i - x)} \right) \right]^{p_k} + k^{-s} \left[ M \left( \frac{q_k(x_k^i)}{\varepsilon/2} \right) \right]^{p_k} \right\}
\end{aligned}$$

yazalım, burada $C = \max(1, 2^{H-1})$ dir.

$$\left( k^{-s} \left[ M \left( \frac{q_k(x_k^i - x_k)}{g(x^i - x)} \right) \right]^{p_k} \right), \left( k^{-s} \left[ M \left( \frac{q_k(x_k^i)}{\varepsilon/2} \right) \right]^{p_k} \right) \in F$$

ve $F$ normal olduğundan

$$\left( k^{-s} \left[ M \left( \frac{q_k(x_k)}{\varepsilon} \right) \right]^{p_k} \right) \in F$$

dir, bu ise $x = (x_k) \in [F(X_k, q_k, M, p_k, s)]$ dir. Böylece $[F(X_k, q_k, M, p_k, s)]$, (3.2) paranormuyla tamdır. $\square$

### 3.2.1 $F(X_k, q_k, M^\nu, p_k, s)$ Dizi Uzayında Bazı Bağıntılar

$F(X_k, q_k, M, p_k, s)$ uzayında $M$ Orlicz fonksiyonu yerine, $M$ ye $\nu \in \mathbb{N}$ defa bileşke işleminin uygulanmasıyla elde edilen $M^\nu$ Orlicz fonksiyonu alınırsa

$$F(X_k, q_k, M^\nu, p_k, s) = \left\{ x = (x_k) \in s(X_k) : \left( k^{-s} \left[ M^\nu \left( \frac{q_k(x_k)}{\rho} \right) \right]^{p_k} \right) \in F, \right. \\ \left. \exists \rho > 0 \text{ için} \right\} \tag{3.5}$$

uzayı elde edilir. $F(X_k, q_k, M, p_k, s)$ uzayında geçerli olan tüm ifadeler, (3.5) uzayında da geçerlidir. Örneğin, $\nu \in \mathbb{N}$ olmak üzere $F(X_k, q_k, M^\nu, p_k, s)$ üzerindeki paranorm

$$g_\nu(x) = \inf \left\{ \rho^{p_n/H} > 0 : \left\| \left( k^{-s} \left[ M^\nu \left( \frac{q_k(x_k)}{\rho} \right) \right]^{p_k} \right) \right\|_F^{1/H} \leqslant 1,\ n \in \mathbb{N} \right\}$$

şeklinde olacaktır. Bu kısımda, $\nu$ doğal sayısının durumuna göre $F(X_k, q_k, M^\nu, p_k, s)$ uzayı incelenecektir.

**Teorem 3.2.8.** *$M$ bir Orlicz fonksiyonu ise $\nu \in \mathbb{N}$ olmak üzere $M^\nu$ fonksiyonu da bir Orlicz fonksiyonudur, burada $M^\nu = M \circ M \circ \cdots \circ M$ ($M$ nin $\nu$ defa bileşkesi) şeklindedir.*

**İspat.** İspatı tümevarım yöntemiyle yapalım: $\nu = 1$ için $M^\nu = M$ olacağından $M^\nu$, Orlicz fonksiyonudur. Şimdi, $\nu$ için $M^\nu$ fonksiyonunun bir Orlicz fonksiyonu olduğunu kabul edelim. Böylece $M^\nu$ fonksiyonu, çift, konveks, sürekli ve $M^\nu(0) = 0$, $x \to \infty$ için $M^\nu(x) \to \infty$ şartlarını sağlar.

Son olarak, $M^{\nu+1}$ fonksiyonunun bir Orlicz fonksiyonu olduğunu gösterelim.

$$M^{\nu+1}(x) = M[M^\nu(x)]$$

olduğu ve yukarıda $M^\nu$ nin özellikleri dikkate alındığında,

$$M^{\nu+1}(-x) = M[M^\nu(-x)] = M[M^\nu(x)] = M^{\nu+1}(x)$$

olduğundan $M^{\nu+1}$ çift fonksiyondur ve sürekli fonksiyonların bileşkesi sürekli olduğundan, $M^{\nu+1}$ süreklidir. Ayrıca, $M^\nu$ konveks olduğundan, her $x, y \in \mathbb{R}$ için

$$M^\nu \left( \frac{x+y}{2} \right) \leqslant \frac{1}{2} M^\nu(x) + \frac{1}{2} M^\nu(y)$$

ve $M$ azalmayan konveks bir fonksiyon olduğundan

$$M^{\nu+1}\left(\frac{x+y}{2}\right)=M\left[M^{\nu}\left(\frac{x+y}{2}\right)\right]\leqslant M\left[\frac{1}{2}M^{\nu}(x)+\frac{1}{2}M^{\nu}(y)\right]$$
$$\leqslant\frac{1}{2}M\left[M^{\nu}(x)\right]+\frac{1}{2}M\left[M^{\nu}(y)\right]=\frac{1}{2}M^{\nu+1}(x)+\frac{1}{2}M^{\nu+1}(y)$$

yazılabilir. $M^{\nu+1}(0)=0$ ve $x\to\infty$ için $M^{\nu+1}(x)\to\infty$ olacağı açıktır. Böylece, $M^{\nu+1}$ fonksiyonu bir Orlicz fonksiyonudur. □

**Teorem 3.2.9.** *$m\leqslant\nu$, $m,\nu\in\mathbb{N}$ ve $M$ $\Delta_2$ şartını sağlayan bir Orlicz fonksiyonu ise*

$$F(X_k,q_k,M^m,p_k,s)\subseteq F(X_k,q_k,M^{\nu},p_k,s) \tag{3.6}$$

*dir.*

**İspat.** İspatı tümevarım yöntemiyle yapalım. $\nu-m=r$ dersek, $r\in\mathbb{N}$ ve $r\geqslant 1$ olur. Şimdi $r=1$ için (3.6) kapsamasının doğru olduğunu gösterelim. Bunun için

$$F(X_k,q_k,M^m,p_k,s)\subseteq F(X_k,q_k,M^{m+1},p_k,s)$$

olduğunu göstermeliyiz. $M$ sürekli olduğundan, $\varepsilon>0$ için $0<\delta<1$ olacak şekilde $\exists\delta>0\ni 0\leqslant t\leqslant\delta$ iken $M(t)<\varepsilon$ kalır. Şimdi $x\in F(X_k,q_k,M^m,p_k,s)$ olsun. Teorem 3.2.4 ve F nin normalliği göz önünde tutulduğunda

$$k^{-s}\left[M^{m+1}\left(\frac{q_k(x_k)}{\rho}\right)\right]^{p_k}=k^{-s}\left[M\left(M^m\left(\frac{q_k(x_k)}{\rho}\right)\right)\right]^{p_k}$$
$$\leqslant k^{-s}\left[KM(1)M^m\left(\frac{q_k(x_k)}{\rho}\right)\right]^{p_k}$$
$$\leqslant\max\left(1,K^HM(1)^H\right)k^{-s}\left[M^m\left(\frac{q_k(x_k)}{\rho}\right)\right]^{p_k}$$

olup, $x\in F(X_k,q_k,M^{m+1},p_k,s)$ elde edilir. Şimdi, $r$ için (3.6) ifadesinin doğru olduğunu kabul edelim, yani

$$F(X_k,q_k,M^m,p_k,s)\subseteq F(X_k,q_k,M^{m+r},p_k,s)$$

olsun. $M^{m+r+1}(t)=M\left(M^{m+r}(t)\right)$ olduğundan $r=1$ durumuna benzer şekilde

$$F(X_k,q_k,M^m,p_k,s)\subseteq F(X_k,q_k,M^{m+r+1},p_k,s)$$

olduğu kolayca görülebilir. Bu da, $r+1$ için (3.6) ifadesinin doğru olduğunu gösterir.

□

**Sonuç 3.2.2.** *$\nu \in \mathbb{N}$ ve $M$ $\Delta_2$ şartını sağlayan bir Orlicz fonksiyonu ise*

*i)* $F(X_k, q_k, M, p_k, s) \subseteq F(X_k, q_k, M^\nu, p_k, s)$,

*ii)* $F(X_k, q_k, p_k, s) \subseteq F(X_k, q_k, M^\nu, p_k, s)$ *dir.*

**İspat.** $m = 1$ için Teorem 3.2.9 kullanılarak, (i) kolayca elde edilir. Bu sonucun (i) durumu ve Sonuç 3.2.1 (i) dikkate alındığında, (ii) nin doğruluğu hemen görülür. □

**Teorem 3.2.10.** *$m < \nu$, $m, \nu \in \mathbb{N}$ ve $M$ bir Orlicz fonksiyonu olsun. Bu durumda*

*i)* $M(t) < t$ *ise* $F(X_k, q_k, p_k, s) \subseteq F(X_k, q_k, M^m, p_k, s) \subseteq F(X_k, q_k, M^\nu, p_k, s)$,

*ii)* $M(t) \geqslant t$ *ise* $F(X_k, q_k, M^\nu, p_k, s) \subseteq F(X_k, q_k, M^m, p_k, s) \subseteq F(X_k, q_k, p_k, s)$ *dir.*

**İspat.** *(i)* $M(t) < t$ ve $x \in F(X_k, q_k, p_k, s)$ olsun. M azalmayan olduğundan

$$M^\nu(t) \leqslant M^{\nu-1}(t) \leqslant \cdots \leqslant M^2(t) \leqslant M(t) < t$$

ve $\forall k$ için $x_k \in X_k$ olup, $\exists \rho > 0$ için $\frac{q_k(x_k)}{\rho} \geqslant 0$ olduğundan yukarıdaki eşitsizliklerde $t = \frac{q_k(x_k)}{\rho}$ alırsak,

$$M^\nu\left(\frac{q_k(x_k)}{\rho}\right) \leqslant M^{\nu-1}\left(\frac{q_k(x_k)}{\rho}\right) \leqslant \cdots \leqslant M\left(\frac{q_k(x_k)}{\rho}\right) < \frac{q_k(x_k)}{\rho}$$

yazabiliriz. $s \geqslant 0$ ve $\forall k$ için $p_k > 0$ olduğundan $k^{-s} > 0$ olup

$$k^{-s}\left[M^\nu\left(\frac{q_k(x_k)}{\rho}\right)\right]^{p_k} \leqslant \cdots \leqslant k^{-s}\left[M\left(\frac{q_k(x_k)}{\rho}\right)\right]^{p_k} < k^{-s}\left[\frac{q_k(x_k)}{\rho}\right]^{p_k}$$

ve $F$ nin normalliği göz önünde tutulduğunda

$$x \in F(X_k, q_k, p_k, s) \implies x \in F(X_k, q_k, M^m, p_k, s)$$
$$x \in F(X_k, q_k, M^m, p_k, s) \implies x \in F(X_k, q_k, M^\nu, p_k, s)$$

elde edilir. Bu ise ispatı verir.

*(ii)* $M(t) \geqslant t$ ve $x \in F(X_k, q_k, M^\nu, p_k, s)$ olsun. (i) dekine benzer olarak

$$k^{-s}\left[M^\nu\left(\frac{q_k(x_k)}{\rho}\right)\right]^{p_k} \geqslant \cdots \geqslant k^{-s}\left[M\left(\frac{q_k(x_k)}{\rho}\right)\right]^{p_k} \geqslant k^{-s}\left[\frac{q_k(x_k)}{\rho}\right]^{p_k}$$

yazılabilir. $F$ nin normalliği bize ispatı verir. □

# KAYNAKLAR


[1] J. Bastero and Y. Raynaud, *Representing types in Orlicz and Lorentz sequence spaces*, Math. Proc. Camb. Phil. Soc. 107 (1990), 525-538.

[2] V.K. Bhardwaj and N. Singh, *Some sequence spaces defined by Orlicz functions*, Demonstratio Mathematica 33 (3) (2000), 571-582.

[3] D. Ghosh and P.D. Srivastava, *On some vector valued sequence spaces using Orlicz function*, Glasnik Matematicki 34 (2) (1999), 819-826.

[4] H. Hudzik and L. Maligranda, *Some remarks on submultiplicative Orlicz functions*, Indag Math. New Ser. 3 (3) (1992), 313-321.

[5] P.K. Kamthan and M. Gupta, *Sequence spaces and series*, Marcel Dekker, Inc., New York and Basel, 1981.

[6] M.A. Krasnosel'skii and Y.B. Rutickii, *Convex functions and Orlicz spaces*, Noordhoff Ltd., Groningen, Netherlands, 1961.

[7] E. Kreyzig, *Introductory functional analysis with applications*, John Wiley and Sons, New York, 1973.

[8] K.J. Lindberg, *Contractive projections in Orlicz sequence spaces and continuous function space*, Ph. D. Thesis, University of California, Berkeley, 1971.

[9] K.J. Lindberg, *On subspaces of Orlicz sequence spaces*, Studia Mathematica 45 (1973), 119-146.

[10] J. Lindenstrauss and L. Tzafriri, *Classical Banach spaces*, Vol. 1, Sequence spaces, Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg-New York, 1978.

[11] I.J. Maddox, *Elements of functional analysis*, Cambridge University Press (Second Edition), Cambridge, 1988.

[12] S.D. Parashar and B. Choudhary, *Sequence spaces defined by Orlicz functions*, Indian Journal of Pure and Applied Mathematics 25 (4) (1994), 419-428.

[13] M.M. Rao and Z.D. Ren, *Theory of Orlicz spaces*, Marcel Dekker, New York, 1991.

[14] G.B. Robert and R.S. Donald, *Introduction to real analysis*, John Wiley&Sons, Inc. (Second Edition), New York, 1992.

[15] Y. Yılmaz, M.K. Özdemir ve İ. Solak, *Hölder ve Minkowski eşitsizliklerinin mutlak monoton yarınormlu normal dizi cebirlerine bir genelleştirmesi*, XIV. Ulusal Matematik Sempozyumu, Anadolu Üniversitesi, Eskişehir, 2001.

# ÖZGEÇMİŞ

10 Mart 1973 tarihinde Antakya'da doğdu. İlk öğrenimini Antakya'da, orta öğrenimini Balıkesir'de ve lise öğrenimini Bingöl'de tamamladı. 1990 yılında İnönü Üniversitesi Fen-Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümü lisans programına kayıt yaptırdı ve Haziran 1994'te öğrenimini tamamlayarak, Trabzon ili Çaykara ilçesinde matematik öğretmeni olarak görev yaptı. Şubat 1995'te İnönü Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalında yüksek lisans programına kayıt yaptırdı. Yine Şubat 1995'te, İnönü Üniversitesi Fen-Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümünde araştırma görevlisi olarak göreve başladı. 1997 yılında yüksek lisans öğrenimini tamamladı ve 1998 yılında doktora programına kayıt yaptırdı.