T.C.
İNÖNÜ ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

HARMONİK MORFİZMLERİN GEOMETRİSİ ÜZERİNE

SELCEN YÜKSEL

YÜKSEK LİSANS TEZİ
MATEMATİK ANABİLİM DALI

MALATYA
2005

Fen Bilimleri Enstitüsü Müdürlüğüne

İş bu çalışma, jürimiz tarafından Matematik Anabilim Dalında YÜKSEK LİSANS TEZİ olarak kabul edilmiştir.

Başkan

Prof. Dr. A. İhsan SIVRİDAĞ

Üye

Prof. Dr. Sadık KELEŞ

Üye

Prof. Dr. Rifat GÜNEŞ

Üye

Doç. Dr. Bayram ŞAHİN

Üye

Yrd. Doç. Dr. H. Bayram KARADAĞ

Onay

Yukarıdaki imzaların adı geçen öğretim üyelerine ait olduğunu onaylarım.

29./.4./2005

Prof. Dr. Ali ŞAHİN

Enstitü Müdürü

ÖZET

Yüksek Lisans Tezi

HARMONİK MORFİZMLERİN GEOMETRİSİ ÜZERİNE

Selcen YÜKSEL

İnönü Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik AnaBilim Dalı

139+iv sayfa

2005

Danışmanlar: Prof. Dr. Sadık KELEŞ
Doç. Dr. Bayram ŞAHİN

Üç bölümden oluşan bu çalışmanın birinci bölümü diğer bölümlerin daha iyi anlaşılabilmesi için bazı temel kavramlara ayrılmıştır. Bu bölümde ayrıca Riemann manifoldları üzerinde hesaplamaların yapılabilmesi için gerekli gösterimler ve temel formüller ile bir Riemann manifoldu üzerinde Laplace denklemi ve çözümleri ele alınmıştır.

İkinci bölüm zayıf konform dönüşümler, yatay zayıf konform dönüşümler ve konform foliasyonlara ayrılmıştır.

Harmonik morfizmler, harmonik dönüşümleri de içeren geniş bir alanı kapsamaktadır. Bu nedenle üçüncü bölümde Riemann manifoldları arasında tanımlanan bir dönüşümün ikinci temel formu, tensiyon alanı, stres-enerji tensörü tarafından verilen conservation kuralı ve konform minimal kritik (branched) immersiyonlar incelenerek harmonik dönüşümlerin özellikleri ele alınmıştır. Daha sonra harmonik morfizmler tanıtılmıştır. Son olarak harmonik dönüşümler ile yatay zayıf konform dönüşümler arasındaki ilişkiyi belirleyen bir karakterizasyona yer verilmiştir.

ANAHTAR KELİMELER : Laplasyan, zayıf konform dönüşüm, yatay zayıf konform dönüşüm, konform foliasyon, warped çarpım, harmonik dönüşüm, tensiyon alanı, stress-enerji tensörü, minimal kritik (branched) immersiyon, harmonik morfizm.

ABSTRACT

M. Sc. Thesis

ON GEOMETRY OF HARMONIC MORPHISMS

Selcen YÜKSEL

İnönü University
Graduate School of Natural and Applied Sciences
Department of Mathematics

139+iv pages

2005

Supervisors: Prof. Dr. Sadık KELEŞ
Assoc. Prof. Dr. Bayram ŞAHİN

This thesis covers three chapters such a way that in the first chapter we give the basic concepts for the rest of the thesis that readers can easily understand. In this chapter we also discuss the notations and fundamental formulas required to do calculus on a Riemann manifold, Laplace's equation on a Riemann manifold and its solitions.

In the second chapter weakly conformal mappings, horizontally weakly conformal mappings and conformal foliations are discussed.

A harmonic morphism is a particular sort of harmonic mapping. So that in the third chapter we give some aspects of the theory of harmonic mappings which includes the second fundamental form and tension field, conservation law given by stress-energy and some basic facts on conformal minimal (branched) immersions. After then harmonic morphisms are introduced. Finally we investigated the relation between the harmonicity and horizontal weak conformality.

KEYWORDS : Laplacian, weakly conformal map, horizontally weakly conformal map, conformal foliation, warped product, harmonic map, tension field, stress-energy tensor, minimal branched immersion, harmonic morphism.

TEŞEKKÜR

Tez konumu veren ve bu çalışmanın her aşamasında yardım, öneri ve desteklerini esirgemeden beni yönlendiren danışman hocalarım Sayın Prof. Dr. Sadık KELEŞ'e ve Sayın Doç. Dr. Bayram ŞAHİN'e ayrıca tüm hayatım boyunca maddi ve manevi desteklerini esirgemeyen AİLEM'e teşekkür ederim.

İÇİNDEKİLER

GİRİŞ

Harmonik morfizmler Laplace denklemini koruyan dönüşümlerdir. Harmonik morfizmlerle ilgili ilk çalışmalar, 1847 yılında Jacobi'nin 3-boyutlu uzayda Laplace denkleminin çözümleriyle ilgili makalesiyle başlamıştır.Bu makalesinde Jacobi 3-boyutlu Öklidyen Uzayında Laplace dekleminin çözümü olan kompleks değerli bir ϕ fonksiyonu ile analitik bir f fonksiyonunun bileşkesinin Laplace denkleminin bir diğer çözümü olabilmesi için gerek ve yeter şartları araştırmıştır. Lokal olarak tanımlı harmonik fonksiyonları harmonik fonksiyonlara götüren dönüşümler, yani kompleks yapıyı koruyan dönüşümler "harmonik morfizmler" olarak bilinirler.

1978 – 1979 yıllarında "Riemann manifoldları arasındaki harmonik morfizmler" teorisinin çalışıldığı çalışmalar birbirinden bağımsız olarak ortaya çıkmıştır. 1978 de Fuglede[9] bu teoriyle ilgili pek çok temel özelliği içeren raporunu yayımlamıştır. Ishihara[10], 1979 yılında harmonik ve subharmonik fonksiyonları da kapsayacak şekilde Riemann manifoldları arasında çeşitli fonksiyon sınıflarını koruyan dönüşümlerin karakterizasyonunu belirlemiştir. Günümüzde harmonik morfizmler üzerine yapılan çalışmaların çoğu bu iki kaynaktan esinlenmiştir.

Harmonik morfizmler ile ilgili çalışmalar, harmonik dönüşümler ve minimal alt manifoldları da içeren geniş bir alanı kapsamaktadır. Harmonik dönüşümler ve minimal altmanifoldlar arasında sıkı bir ilişki vardır.

C kompleks sayılar cismini, R de reel sayılar cismini göstersin.

$$\varphi : W \subset R^3 \to C$$

C^2-sınıfından bir fonksiyon olsun. Eğer φ fonksiyonu, $x = (x_1, x_2, x_3) \in W$ olmak üzere

$$\Delta\varphi \equiv \sum_{i=1}^{3} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_i^2} = 0$$

ile tanımlanan Laplace denklemini sağlıyorsa φ ye **harmonik fonksiyon** denir[1].

$U \subseteq C$ açık ve bağlantılı küme olmak üzere, bir regüler parametrik yüzey

$$X : U \subseteq C \to R^3$$

biçiminde tanımlanan C^2-sınıfından bir dönüşümdür. X dönüşümünün türev dönüşümü birebir olduğundan $X(U) \subset R^3$ yüzeyi

$$N = \frac{\frac{\partial X}{\partial u} \times \frac{\partial X}{\partial v}}{|\frac{\partial X}{\partial u} \times \frac{\partial X}{\partial v}|}$$

ile tanımlanan bir normal vektör alanına sahiptir.

$$E = |\frac{\partial X}{\partial u}|^2,\ F =< \frac{\partial X}{\partial u}, \frac{\partial X}{\partial v} >,\ G = |\frac{\partial X}{\partial v}|^2$$

ve

$$e =< N, \frac{\partial^2 X}{\partial u^2} >,\ f =< N, \frac{\partial^2 X}{\partial u \partial v} >,\ g =< N, \frac{\partial^2 X}{\partial v^2} >$$

gösterimleri kullanılırsa, bir **yüzeyin ortalama eğriliği**

$$H = -\frac{1}{2} iz\,(dN) = \frac{1}{2}\frac{eG + gE - 2fF}{EG - F^2}$$

biçiminde tanımlanır. Eğer bir yüzeyin ortalama eğriliği sıfır ise bu yüzeye **minimaldir** denir.

$V \subseteq U$, kompakt bir altküme ve h da V nin kapanışı üzerinde tanımlı sürekli, diferansiyellenebilir bir fonksiyon olsun.Bu durumda

$$X_t(u,v) = X(u,v) + t\,h(u,v)N(u,v)$$

şeklinde tanımlanan X_t dönüşümüne $X(V)$ nin h tarafından belirlenen **normal varyasyonu** denir.

Aşağıdaki teorem minimalliğin geometrik bir sonucudur:

A.Teorem: $U \subseteq C$ bağlantılı ve açık bir küme olmak üzere

$$X : U \to R^3$$

bir regüler parametrik yüzey olsun.Bu durumda X in minimal olması için gerek ve yeter şart U nun sınırlı her $V \subset \overline{V}$ altkümesi ve $X(\overline{V})$ nin her X_t normal varyasyonu için

$$\frac{d}{dt} Alan\,(X_t(\overline{V}))\,|_{t=0} = 0$$

olmasıdır[11].

R^3 deki her regüler C^2-yüzeyi

$$E = G \quad \text{ve} \quad F = 0$$

olacak şekilde parametrelendirilebilir.Bu şekildeki koordinatlara **izotermal koordinatlar** denir. X izotermal olsun. Bu durumda X in Laplasyanı $\Delta(X)$ olmak üzere

$$\begin{aligned}
< \frac{\partial X}{\partial u}, \Delta(X) > &= < \frac{\partial X}{\partial u}, \frac{\partial^2 X}{\partial u^2} > + < \frac{\partial X}{\partial u}, \frac{\partial^2 X}{\partial v^2} > \\
&= < \frac{\partial X}{\partial u}, \frac{\partial^2 X}{\partial u^2} > - < \frac{\partial^2 X}{\partial v \partial u}, \frac{\partial X}{\partial v} > \\
&= \frac{1}{2}[\frac{\partial}{\partial u}(< \frac{\partial X}{\partial u}, \frac{\partial X}{\partial u} >) - \frac{\partial}{\partial u}(< \frac{\partial X}{\partial v}, \frac{\partial X}{\partial v} >)] \\
&= \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial u}|\frac{\partial X}{\partial u}|^2 - \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial u}|\frac{\partial X}{\partial v}|^2 \\
&= 0
\end{aligned}$$

eşitliği sağlanır. Aynı şekilde

$$< \frac{\partial X}{\partial v}, \Delta(X) >= 0$$

dır. Bu eşitlikler $\Delta(X)$ in verilen yüzeye dik ve bu yüzeyin ortalama eğriliğinin de

$$H = \frac{e + g}{2E} = \frac{< N, \Delta(X) >}{2E}$$

olduğunu gösterir. Böylece aşağıdaki teorem verilebilir:

B.Teorem: $U \subseteq C$ bağlantılı ve açık bir küme olmak üzere

$$X : U \to R^3$$

bir parametrik yüzey ve

$$|\frac{\partial X}{\partial u}|^2 = |\frac{\partial X}{\partial v}|^2 \quad \text{ve} \quad < \frac{\partial X}{\partial u}, \frac{\partial X}{\partial v} >= 0$$

olsun. Bu durumda X yüzeyinin bir minimal yüzey olması için gerek ve yeter şart X dönüşümünün harmonik olmasıdır[11].

Bu teoremden hareketle minimal parametrik yüzey

$$|\frac{\partial X}{\partial u}|^2 = |\frac{\partial X}{\partial v}|^2 \, , < \frac{\partial X}{\partial u}, \frac{\partial X}{\partial v} >= 0 \quad \text{ve} \quad \Delta(X) = 0$$

şartlarını sağlayan bir

$$X : U \subseteq C \to R^3$$

dönüşümü olarak düşünülebilir.

Böylece harmonik dönüşümlerin yüzeyin geometrisini araştırmada önemli bir araç olarak kullanılabileceği açıktır. Bu çalışmanın amacı harmonik morfizmlerin anlaşılması için temel kavramları ve teoremleri sunmak ve bunların keyfi bir manifold üzerindeki uygulamalarını göstermektir.

I. BÖLÜM

TEMEL KAVRAMLAR

Riemann geometri ile ilgili bazı temel kavramlara ayırdığımız bu bölüm üç kısım olarak düzenlenmiştir.Birinci kısımda Riemann manifoldları ile ilgili bazı temel bilgiler verilip sonraki kısımlarda kullanılacak gösterimlerin açıklaması yapılacaktır.İkinci kısım Riemann manifoldları üzerindeki Laplasyan ve harmonik fonksiyonlara ayrılmıştır.Üçüncü kısımda harmonik dönüşümler için gerekli bazı tanımlara ve formüllere yer verilmiştir.

I.1. Riemann Manifoldları

Bu çalışmada aksi belirtilmedikçe bir M manifoldunun kenarsız, bağlantılı parakompakt Hausdroff manifoldu ve tüm yapıların, manifoldların C^∞ sınıfından olduğu kabul edilecektir. m-boyutlu bir M manifoldunun bir x noktasındaki tanjant uzayı (sırasıyla kotanjant uzayı) T_xM (sırasıyla T_x^*M) ile gösterilecektir. M nin tanjant demeti ve kotanjant demeti ise sırasıyla $TM \to M$ ve $T^*M \to M$ gösterimine sahiptir. Bir C^∞ $W \to M$ demetinin C^∞ kesitlerinin (vektör) uzayı $\Gamma(W)$ ile gösterildiğinden $\Gamma(TM)$ ve $\Gamma(T^*M)$ sırasıyla M nin tanjant ve kotanjant demetinin C^∞ kesitlerinin (vektör) uzayıdır.

$k \in \{0, 1, ..., \infty\}$ için M üzerinde C^k sınıfından reel değerli fonksiyonların uzayını $C^k(M)$ ile göstereceğiz.

I.1.1.Tanım. M manifoldunun boş olmayan, açık, bağlantılı bir U altkümesine M nin bir **tanım kümesi** denir. Eğer U tanım kümesi kompakt $\bar{U}$ kapanışına sahip ise $D = \bar{U}$ biçiminde tanımlanan D kümesine M nin bir **kompakt tanım kümesi** denir[1].

I.1.2.Tanım. M manifoldu üzerinde iki vektör alanı X ve Y olsun. $f \in C^\infty(M)$ fonksiyonunu alalım.

$$[\,,\,] : \Gamma(TM) \times \Gamma(TM) \;\to\; \Gamma(TM)$$

$$[X, Y]_p f \;=\; X_p(Yf) - Y_p(Xf) \quad , \quad \forall p \in M \qquad \text{(I.1.1)}$$

ile tanımlanan fonksiyona X ve Y nin **Lie (parantez) operatörü** denir ve bu operatör aşağıdaki özellikleri sağlar[3]:

$f, g \in C^{\infty}(M)$ ve $X, Y, Z \in \Gamma(TM)$ olmak üzere

(i) $[X, Y] \in C^{\infty}(M)$

(ii) $[fX, gY] = fg[X, Y] + f(Xg)Y + g(Yf)X$

(iii) $[X, Y] = -[Y, X]$

(iv) $[[X, Y], Z] + [[Y, Z], X] + [[X, Z], Y] = 0$

dır.

I.1.3.Tanım. M bir m-manifold olsun. T_xM tanjant uzayının bir bazına $x \in M$ noktasında bir **çatı** denir.Bir (lokal hareketli) çatı $\{X_i\}$ $(i = 1, ..., m)$, her $x \in M$ için T_xM nin bir bazını veren C^{∞} vektör alanlarından oluşan bir sistemdir[1].

I.1.4.Tanım. M ve N manifoldları arasında bir

$$\varphi : M \to N$$

C^{∞} dönüşümünün türev dönüşümü

$$d\varphi : \Gamma(TM) \to \Gamma(TN)$$

biçiminde gösterilir. Bu dönüşüm her $x \in M$ noktasında

$$d\varphi_x : T_xM \to T_{\varphi(x)}N$$

lineer dönüşümünü verir ve buna da φ nin x noktasındaki **türev dönüşümü** denir[1].

$(x^1, x^2, ..., x^m)$ ve $(y^1, y^2, ..., y^n)$, sırasıyla, M ve N üzerindeki lokal koordinat sistemleri olsun.$i = 1, ..., m$, $\alpha = 1, ..., n$ olmak üzere φ dönüşümü için

$$\varphi^{\alpha} = y^{\alpha} \circ \varphi \quad \text{ve} \quad \varphi_i^{\alpha} = \frac{\partial \varphi^{\alpha}}{\partial x^i}$$

yazılabilir.Böylece

$$d\varphi(\frac{\partial}{\partial x^i}) = \varphi_i^{\alpha} \frac{\partial}{\partial y^{\alpha}}$$

elde edilir.Daha genel olarak $\{X_i\}$ ve $\{Y_\alpha\}$, sırasıyla, T_xM ve $T_{\varphi(x)}N$ nin birer bazı ise

$$d\varphi_x(X_i) = \varphi_i^\alpha Y_\alpha \tag{I.1.2}$$

olur.Burada ve diğer tüm bölümlerde Einstein toplamı kullanılacaktır[1].

$N = R$ alınırsa φ nin türev dönüşümü M üzerindeki bir 1- formla özdeş yapılabilir.

Lie parantez operatörü aşağıdaki basit özelliği sağlar:

I.1.1.Önerme. M ve N manifoldlar,

$$\varphi : M \to N$$

bir C^∞ dönüşüm, E, F ve $\bar{E}$, $\bar{F}$ sırasısıyla M ve N manifoldları üzerinde

$$d\varphi(E) = \bar{E} \quad \text{ve} \quad d\varphi(F) = \bar{F}$$

yani

$$d\varphi_x(E_x) = \bar{E}_{\varphi(x)} \quad \text{ve} \quad d\varphi_x(F_x) = \bar{F}_{\varphi(x)} \qquad (x \in M)$$

şartlarını sağlayan vektör alanları olsun.Bu durumda

$$d\varphi([E,F]) = [\bar{E},\bar{F}] \circ \varphi \tag{I.1.3}$$

dir[1].

I.1.5.Tanım. M bir manifold olsun. M nin her bir tanjant uzayı üzerinde pozitif tanımlı bir iç çarpıma M üzerinde bir (C^∞,Riemannian) **metrik** denir ve g ile gösterilir. $x \in M$ ve $v, w \in T_xM$ olmak üzere

$$g_x : T_xM \times T_xM \to R\,,\ (v,w) \to < v,w > \tag{I.1.4}$$

dir.Ayrıca $E, F \in \Gamma(TM)$ için

$$x \to g(E_x, F_x)$$

dönüşümü C^∞ dur. $g(v,w)$ yerine $< v,w >$ gösterimi de kullanılır[1].

I.1.6.Tanım. M bir manifold ve $v \in \Gamma(TM)$ olsun. v nin **normu** $|v|$ ile gösterilir ve

$$|v| = \sqrt{< v, v >}$$

ile tanımlanır[3].

M manifoldunun kompleksleştirilmiş tanjant demeti, C kompleks sayılar cismini göstermek üzere,

$$T^c M = TM \otimes_R C$$

ile verilir. Bu durumda g metriği $x \in M$ ve $v, w \in T_x^c M$ için kompleks değerli

$$g_x : T_x^c M \times T_x^c M \to C\,,\ (v, w) \to < v, w >$$

iç çarpımına genişletilebilir. Bu kompleks değerli iç çarpım bir kompleks bilineer dönüşümdür. $v \in T_x^c M$ için

$$|v|^2 = < v, \overline{v} >$$

dir[1].

M üzerindeki bir g Riemann metriği uzaklık olarak adlandırılan bir d metriği tanımlar. Bu d metriği ile birlikte M bir metrik uzay olur[1].

$(\otimes^r TM) \otimes (\otimes^s T^* M)$ tensör çarpımının bir C^∞ kesiti T ise T, (r, s)-tipinde bir tensör alanıdır. M üzerindeki bir Riemann metriği $(2, 0)$ tipinde bir tensördür[1].

I.1.7.Tanım. M bir manifold olsun.

$$g_x : T_x M \times T_x M \to R$$

ile tanımlanan iç çarpım $\forall x \in M$ ye göre reel-analitik ise M üzerindeki Riemann metriği **reel-analitiktir** denir. Bu durumda M manifolduna da **reel-analitik manifold** denir[1].

I.1.8.Tanım. M bir manifold olsun. M üzerinde bir C^∞ Riemann metriği tanımlı ise M ye bir C^∞ **Riemann manifoldu** denir ve (M, g) ile gösterilir[5].

Bir C^∞ manifold üzerindeki Riemann metriği

$$\flat : T_xM \to T_x^*M \text{ ve } \sharp : T_x^*M \to T_xM$$

izomorfizmlerinin tanımlanmasına yol açar[1].

I.1.9.Tanım. (M, g) bir Riemann manifoldu olsun.

$$\flat : T_xM \to T_x^*M$$

izomorfizmi g Riemann metriği yardımıyla

$$(X)^\flat(\rho) = g(\rho, X) \qquad (\rho, X \in T_xM)$$

biçiminde tanımlanır[1].

Bu izomorfizmler her $x \in M$ için T_xM üzerinde tanımlı g metriğini T_x^*M kotanjant uzayında tanımlanan g^* metriğine dönüştürmek için kullanılır. g^* metriği (M, g) Riemann manifoldunun **kometriği** olarak adlandırılır[1].

I.1.10.Tanım. Tanım I.1.9 ile verilen

$$\flat : T_xM \to T_x^*M$$

izomorfizminin tersi olan

$$\sharp : T_x^*M \to T_xM$$

izomorfizmi g^*, M üzerindeki kometrik olmak üzere $\forall \theta, \omega \in T^*M$ için

$$(\omega)^\sharp(\theta) = g^*(\omega, \theta)$$

biçiminde tanımlanır[1].

(M, g) Riemann manifoldu üzerinde bir lokal koordinat sistemi $(x^1, ..., x^m)$ olsun. g metriğinin bu koordinat sistemine göre bileşenleri $i, j = 1, ..., m$ olmak üzere

$$g_{ij} = g(\frac{\partial}{\partial x^i}, \frac{\partial}{\partial x^j})$$

ile verilir ve g metriğinin **kovaryant bileşeni** olarak adlandırılır. g nin **kontravaryant bileşeni**

$$g^{ij} = g(dx^i, dx^j)$$

ile tanımlanır. Bu durumda $k = 1, ..., m$ için

$$g_{ij} g^{kj} = \delta_i^k$$

dır[5].

I.1.2.Önerme. M n-boyutlu bir Riemann manifoldu olsun. Bu durumda g metrik tensörünün ifadesi

$$g = \sum_{i,j=1}^{n} g_{ij} dx^i \otimes dx^j$$

dir. Burada $x^1, ..., x^n$ ile M nin bir koordinat komşuluğundaki koordinat fonksiyonları gösterilmektedir[3].

Daha genel olarak $\{X_i\}$, M manifoldu üzerinde bir çatı sistemi ise

$$g_{ij} = g(X_i, X_j) \quad , \quad i, j = 1, ..., n$$

yazılır[3].

I.1.3.Önerme. (M, g) bir Riemann manifoldu olsun. T^*M ile TM izomorf olduğundan M üzerindeki g^* kometriğinin ifadesi

$$g^* = g^{ij} (\frac{\partial}{\partial x^i}) (\frac{\partial}{\partial x^j})$$

biçimindedir[1].

I.1.4.Önerme. M n-boyutlu bir Riemann manifoldu olsun.

$$\flat : T_x M \to T_x^* M \text{ ve } \sharp : T_x^* M \to T_x M$$

izomorfizmlerini gözönüne alalım.

$$E = E^i \frac{\partial}{\partial x^i} \in T_x M \text{ ve } \epsilon = \epsilon_i dx^i \in T_x^* M$$

olmak üzere

1. $\epsilon^\sharp = E$ olması için gerek ve yeter şart $\epsilon_i = g_{ij} E^j$ olmasıdır.

2. $E^\flat = \epsilon$ olması için gerek ve yeter şart $E^i = g^{ij}\epsilon_j$ olmasıdır.

ϵ, E nin kovaryant ifadesi ve E ise ϵ nun kontravaryant ifadesidir[1].

İspat.

1. $(\Rightarrow)$: $\epsilon^\sharp = E$ olsun.$\sharp$ lineer olduğundan

$$\epsilon^\sharp = (\epsilon_i\, dx^i)^\sharp = \epsilon_i (dx^i)^\sharp \tag{I.1.5}$$

yazılabilir.$(dx^i)^\sharp \in TM$ dir.Bu nedenle $(x^1, ..., x^n)$ M üzerinde bir lokal koordinat sistemi olmak üzere

$$\begin{aligned} (dx^i)^\sharp &= (dx^i)^\sharp_j \frac{\partial}{\partial x^j} = (dx^i)^\sharp (dx^j) \frac{\partial}{\partial x^j} \\ &= g^*(dx^i, dx^j) \frac{\partial}{\partial x^j} = g^{ij} \frac{\partial}{\partial x^j} \end{aligned} \tag{I.1.6}$$

olur.$\epsilon^\sharp = E$ olduğu göz önüne alınır ve (I.1.5) ile (I.1.6) birleştirilirse

$$\begin{aligned} \epsilon_i g^{ij} \frac{\partial}{\partial x^j} &= E^j \frac{\partial}{\partial x^j} \\ \epsilon_i &= g_{ij} E^j \end{aligned}$$

bulunur.

$(\Leftarrow)$: $\epsilon_i = g_{ij}E^j$ olduğunu kabul edelim.Buradan

$$\begin{aligned} \epsilon_i \frac{\partial}{\partial x^j} &= g_{ij} E^j \frac{\partial}{\partial x^j} \\ \epsilon_i (dx^i)^\sharp &= E^j \frac{\partial}{\partial x^j} \\ (\epsilon_i dx^i)^\sharp &= E^j \frac{\partial}{\partial x^j} \\ \epsilon^\sharp &= E \end{aligned}$$

elde edilir.

2. $(\Rightarrow)$: $E^\flat = \epsilon$ olsun.$\flat$ lineer olduğundan

$$E^\flat = (E^i \frac{\partial}{\partial x^i})^\flat = E^i (\frac{\partial}{\partial x^i})^\flat \qquad \text{(I.1.7)}$$

yazılabilir.$(\frac{\partial}{\partial x^i})^\flat \in T^*M$ dir.Bu nedenle

$$(\frac{\partial}{\partial x^i})^\flat = (\frac{\partial}{\partial x^i})^\flat_j dx^j = (\frac{\partial}{\partial x^i})^\flat (\frac{\partial}{\partial x^j}) dx^j = g_{ij} dx^j \qquad \text{(I.1.8)}$$

elde edilir.$E^\flat = \epsilon$ olduğu göz önüne alınır ve (I.1.7) ile (I.1.8) birleştirilirse

$$\begin{aligned} E^i g_{ij} dx^j &= \epsilon_j dx^j \\ E^i &= g^{ij} \epsilon_j \end{aligned}$$

bulunur.

$(\Leftarrow)$: $E^i = g^{ij}\epsilon_j$ olduğunu kabul edelim.Öyleyse

$$\begin{aligned} E^i g_{ij} dx^j &= \epsilon_j dx^j \\ E^\flat &= \epsilon \end{aligned}$$

olur.

I.1.11.Tanım. M bir Riemann manifoldu olsun.Herhangi bir

$$f : M \to R$$

diferansiyellenebilir fonksiyonu için

$$grad : C^\infty(M) \to \Gamma(TM)$$

olmak üzere $grad\, f$ vektör alanı bir tek X vektör alanı ve bütün Y vektör alanları cinsinden

$$g(X, Y) = df(Y) = Y[f]$$

ile tanımlanır[4].

Tanım I.1.11 de

$$X = grad\, f = (df)^\sharp$$

yazılırsa $grad\, f$ için

$$g(grad\, f, Y) = g((df)^\sharp, Y) = df(Y) = Y[f]$$

karakterizasyonu yapılabilir[1].

I.1.5.Önerme. (M, g) Riemann manifoldu üzerinde bir lokal koordinat sistemi $(x^1, x^2, ..., x^m)$ olsun. Bu durumda

$$f : M \to R$$

diferansiyellenebilir fonksiyonu için lokal koordinatlar cinsinden

$$grad\, f = (g^{ij}\frac{\partial f}{\partial x^j})\frac{\partial}{\partial x^i} \tag{I.1.9}$$

dir[4].

Eğer $M = R^m$ ise $g^{ij} = \delta_i^j$ ve

$$grad\, f = (\frac{\partial f}{\partial x^i})\frac{\partial}{\partial x^i}$$

olur.

İspat.

$$grad\, f = (df)^\sharp$$

olduğundan Önerme I.1.4 den

$$(df)_j = g_{ij}(grad\, f)^i$$

yazılabilir.Öyleyse

$$grad\, f = (grad\, f)^i\frac{\partial}{\partial x^i} = g^{ij}(df)_j\frac{\partial}{\partial x^i} = (g^{ij}\frac{\partial f}{\partial x^j})\frac{\partial}{\partial x^i}$$

elde edilir.

I.1.12.Tanım. M bir manifold ve M üzerindeki vektör alanlarının uzayı $\Gamma(TM)$ olmak üzere

$$\nabla : \Gamma(TM) \times \Gamma(TM) \to \Gamma(TM)$$

$$(X,Y) \rightarrow \nabla_X Y$$

fonksiyonu aşağıdaki özellikleri sağlıyorsa ∇ ya M manifoldu üzerinde bir **lineer konneksiyon** denir[2]. $\forall X,Y,Z \in \Gamma(TM)$ ve $\forall f,g \in C^{\infty}(M)$ için

1) $\nabla_{fX+gY} Z = f\nabla_X Z + g\nabla_Y Z$

2) $\nabla_X(fY+gZ) = f\nabla_X Y + g\nabla_X Z + (Xf)Y + (Xg)Z$

dir.

I.1.13.Tanım. M bir manifold ve ∇, M üzerinde lineer konneksiyon olsun.Eğer ∇ konneksiyonu aşağıdaki iki özelliğe sahipse **Riemann konneksiyon** adını alır[2]. $\forall X,Y,Z \in \Gamma(TM)$ için

1) $[X,Y] = \nabla_X Y + \nabla_Y X$

2) $Xg(Y,Z) = g(\nabla_X Y, Z) + g(Y, \nabla_X Z)$

dir.

Bu şekilde tanımlanan $\nabla = \nabla^M$ Riemann konneksiyonu M üzerinde bir **Levi-Civita konneksiyonu** olarak da adlandırılır. M üzerinde bir Levi-Civita konneksiyonu

$$\begin{aligned} 2g(\nabla_X Y, Z) &= X(g(Y,Z)) + Y(g(Z,X)) - Z(g(X,Y)) \\ &\quad -g(X,[Y,Z]) + g(Y,[Z,X]) + g(Z,[X,Y]) \end{aligned} \tag{1.1.10}$$

Kozsul eşitliği ile belirlenir[1].

Üstelik Levi-Civita konneksiyonu diğer tensör demetleri üzerine de konneksiyon indirger.

I.1.14.Tanım. M bir Riemann manifoldu olsun. M üzerinde θ bir 1-form ve E de bir vektör alanı ise T^*M deki konneksiyon

$$\begin{aligned} \nabla : \Gamma(TM) \times \Gamma(T^*M) &\rightarrow \Gamma(T^*M) \\ (E,\theta) &\rightarrow \nabla_E \theta \\ \nabla_E \theta(G) &= E(\theta(G)) - \theta(\nabla_E G) \end{aligned}$$

biçiminde tanımlanır.Böylece

$$E(\theta(G)) = \nabla_E \theta(G) + \theta(\nabla_E G)$$

Leibniz çarpım kuralı elde edilir[1].

Herhangi bir g, 2-formunun

$$(\nabla_X g)(Y, Z) = Xg(Y, Z) - g(\nabla_X Y, Z) - g(Y, \nabla_X Z)$$

ile verilen kovaryant türevi ∇ bir Levi-Civita konneksiyon ise

$$\nabla g = 0$$

biçiminde de yazılabilir[1].

I.1.15.Tanım. M, m-boyutlu bir Riemann manifoldu ve $(x^1, x^2, ..., x^m)$, M nin bir lokal koordinat sistemi olsun. Bu durumda

$$\nabla_{\frac{\partial}{\partial x^i}} \frac{\partial}{\partial x^j} = \Gamma_{ij}^k \frac{\partial}{\partial x^k}$$

ile karakterize edilen Γ_{ij}^k bileşenlerine ∇ **nın bileşenleri** veya **Christoffel katsayıları** denir ve

$$dx_k(\nabla_{\frac{\partial}{\partial x^i}} \frac{\partial}{\partial x^j}) = \Gamma_{ij}^k$$

olarak tanımlanır[4].

Diferansiyel denklemlerin standart varlık teoreminden şu teoremi biliyoruz:

I.1.1.Teorem. M Riemann manifoldunun herbir p noktası için öyle bir U komşuluğu ve bir $\varepsilon > 0$ sayısı vardır ki $\forall q \in U$ ve uzunluğu ε dan küçük olan $\forall X \in T_pM$ için p yi q ya bağlayan ve

$$\gamma_X(0) = p \ , \ \frac{d\gamma_X}{dt}(0) = X$$

şartlarını sağlayan bir tek

$$\gamma_X : (-\varepsilon, \varepsilon) \to M$$

geodezik eğrisi vardır[4].

Bu teoreme göre

$$\gamma_X(0) = p \ , \ \frac{d\gamma_X}{dt}(0) = X$$

şartlarını sağlayan bir

$$\gamma_X : [0,1] \to M$$

geodezik parçası vardır[4].

I.1.16.Tanım. M bir manifold ve $\gamma : [0,1] \to M$, M üzerinde bir geodezik eğri olsun. $\gamma(1) \in M$ noktası

$$\gamma(1) = \exp|_p X$$

ile gösterilir ve X tanjant vektörünün **üsteli** olarak adlandırılır[4].

I.1.17.Tanım. M bir manifold ve T_pM, M manifoldunun p noktasındaki tanjant uzayı olmak üzere

$$\begin{aligned} \exp|_p : T_pM &\to M \\ X &\to \exp|_p(X) = \gamma(1) \end{aligned}$$

ile tanımlanan dönüşüme p noktasındaki **üstel dönüşüm** denir[7].

I.1.18.Tanım. M bir manifold ve $p \in M$ olsun. N_0, T_pM tanjant uzayında orjinin bir açık komşuluğu ve N_p de p nin bir açık komşuluğu olmak üzere
1) exp üstel dönüşümü N_0 dan N_p üzerine bir diffeomorfizmdir.
2) $X \in N_0$ ve $0 \leq t \leq 1$ ise $tX \in N_0$ dır.
şartları sağlanıyorsa N_0 a **normaldir** denir. Eğer

$$N_p = \exp(N_0)$$

oluyorsa N_p ye p nin **normal komşuluğu** denir[7].

I.1.19.Tanım. M bir manifold ve $p \in M$ noktasının bir normal komşuluğu N_p olsun. $\{X_1, ..., X_m\}$, T_pM nin bir bazı olmak üzere

$$\begin{aligned} N_p &\to R^m \\ \exp_p(a_1X_1 + ... + a_mX_m) &\to (a_1, ..., a_m) \end{aligned}$$

ile tanımlanan dönüsüme p de bir **normal koordinat sistemi** denir[7].

Normal koordinatlarda

$$g_{ij}(p) = \delta_i^j \text{ ve } \frac{\partial g_{ij}}{\partial x^k}(x_0) = 0$$

dır[1].

I.1.20.Tanım. M, m-boyutlu bir manifold olsun. θ 1-formunun divergensi

$$div\,\theta = div^M\,\theta$$

ile gösterilir ve

$$\begin{aligned} div\,\theta = iz\,\nabla\theta &= g^{ij}(\nabla_{X_i}\theta)X_j = g^{ij}\{X_i(\theta(X_j)) - \theta(\nabla_{X_i}X_j)\} \\ &= \sum_{i=1}^{m}(\nabla_{e_i}\theta)e_i = \sum_{i=1}^{m}\{e_i(\theta(e_i)) - \theta(\nabla_{e_i}e_i)\} \end{aligned} \qquad \text{(I.1.11)}$$

biçiminde tanımlanır. E vektör alanının divergensi $div\,E$ ise

$$div\,E = iz\,\nabla E = \sum_{i=1}^{m} g(\nabla_{e_i}E, e_i) = \sum_{i=1}^{m}\{e_i(g(E,e_i)) - g(E, \nabla_{e_i}e_i)\} \quad \text{(I.1.12)}$$

ile verilir. Burada $\{X_i\}$, M üzerinde keyfi çatı sistemi ve $\{e_i\}$, T_pM için ortonormal bir bazdır[1].

I.1.6.Önerme. M, m-boyutlu bir Riemann manifoldu ve $\{x^1, ..., x^m\}$ M üzerinde bir lokal koordinat sistemi olsun.

$$\theta = \theta_j dx^j \in \Gamma(T^*M) \text{ ve } E = E^j \frac{\partial}{\partial x^j} \in \Gamma(TM)$$

alalım. Bu durumda lokal koordinatlarda

$$div\,\theta = g^{ij}(\frac{\partial \theta_j}{\partial x^i} - \Gamma_{ij}^k\theta_k) \text{ ve } div\,E = \frac{\partial E^i}{\partial x^i} + E^j\Gamma_{ij}^i \qquad \text{(I.1.13)}$$

ile verilir. Ayrıca $|g| = \det(g_{ij})$ olmak üzere

$$div\,\theta = \frac{1}{\sqrt{|g|}}\frac{\partial}{\partial x^i}(\sqrt{|g|}g^{ij}\theta_j) \text{ ve } div\,E = \frac{1}{\sqrt{|g|}}\frac{\partial}{\partial x^i}(\sqrt{|g|}E^i) \qquad \text{(I.1.14)}$$

dir[1].

İspat. Divergensin tanımından

$$div\, E = \sum_{i=1}^{m} < \nabla_{\frac{\partial}{\partial x^i}} E, \frac{\partial}{\partial x^i} >$$

olur. Buradan

$$\begin{aligned} div\, E &= \sum_{i=1}^{m} < \nabla_{\frac{\partial}{\partial x^i}} (E^j \frac{\partial}{\partial x^j}), \frac{\partial}{\partial x^i} > \\ &= \sum_{i=1}^{m} < \frac{\partial E^j}{\partial x^i} \frac{\partial}{\partial x^j} + E^j \nabla_{\frac{\partial}{\partial x^i}} \frac{\partial}{\partial x^j}, \frac{\partial}{\partial x^i} > \\ &= \frac{\partial E^i}{\partial x^i} + \Gamma^i_{ij} E^j \end{aligned}$$

elde edilir. Diğer taraftan

$$\Gamma^k_{ij} = \frac{1}{2} g^{kr} (\frac{\partial g_{jr}}{\partial x^i} + \frac{\partial g_{ir}}{\partial x^j} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial x^r})$$

olduğundan $k = i$ için

$$\Gamma^i_{ij} = \frac{1}{2} g^{ir} \frac{\partial g_{jr}}{\partial x^i}$$

elde edilir. Ayrıca $|g| = \det(g_{ij})$ alınırsa

$$\begin{aligned} \frac{\partial |g|}{\partial x^k} &= |g| g^{ji} \frac{\partial g_{ij}}{\partial x^k} \\ \frac{\frac{\partial |g|}{\partial x^k}}{|g|} &= g^{ji} \frac{\partial g_{ij}}{\partial x^k} \\ \frac{\partial}{\partial x^k} (\log |g|) &= g^{ji} \frac{\partial g_{ij}}{\partial x^k} \end{aligned}$$

olacağından bu Γ^i_{ij} de yerine yazılırsa

$$\Gamma^i_{ij} = \frac{1}{\sqrt{|g|}} \frac{\partial}{\partial x^i} (\sqrt{|g|})$$

olur. Böylece

$$div\, E = \frac{\partial E^i}{\partial x^i} + E^j \Gamma^i_{ij}$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{\partial E^i}{\partial x^i} + E^j \frac{1}{\sqrt{|g|}} \frac{\partial}{\partial x^i}(\sqrt{|g|}) \\
&= \frac{1}{\sqrt{|g|}} \frac{\partial}{\partial x^i}(\sqrt{|g|} E^i)
\end{aligned}
$$

bulunur.

I.1.21.Tanım. M, m-boyutlu yönlendirilmiş bir Riemann manifoldu olsun. Bu durumda M üzerinde hiçbir noktada sıfır olmayan bir C^∞ Ω, n-formuna M nin bir **hacim elemanı** denir[6].

M, m-boyutlu bir Riemann manifoldu ve (U, φ), M de bir koordinat komşuluğu olsun. Yönlendirilmiş bir komşuluk üzerinde Ω hacim elemanının lokal koordinatlardaki ifadesi

$$\varphi^{-1*}\Omega = \sqrt{|g|} dx^1 \wedge dx^2 \ldots \wedge dx^m \ , \ |g| = \det(g_{ij})$$

biçimindedir[6]. (M, g) nin hacim elemanını v^M veya v_g ile gösterirsek

$$v_g = v_g(x) = \sqrt{|g|}\, dx \ , \ dx = dx^1 \wedge dx^2 \ldots \wedge dx^m$$

yazılabilir. $f \in C^\infty(M)$ olsun. Bu takdirde M nin bir D kompakt bölgesi f nin üzerinde

$$\int_D f \ v_g$$

integrali mevcuttur[1].

m-boyutlu bir M Riemann manifoldunun C^∞ kenarlı kompakt bir bölgesi M nin kenarlı m-boyutlu bir alt manifoldu olarak düşünülebilir[1]. M manifoldunun bu şekilde tanımlanan bir bölgesi üzerinde divergens teoremi bir 1-formun ya da vektör alanının divergensinin bu bölge üzerindeki integrallerinin, bölgenin kenarı üzerindeki integralleri ile ilişkisini ortaya koyar.

I.1.7.Önerme. (Divergens Teoremi) D, M Riemann manifoldunun, C^∞ kenarlı kompakt bir bölgesi olsun. D nin bir komşuluğu üzerinde bir θ 1-formunu ve bir E vektör alanını alalım. Bu durumda

$$\int_D div\, \theta\, v^M = \int_{\partial D} \theta(n)\, v^{\partial D} \text{ ve } \int_D div\, E\, v^M = \int_{\partial D} < E, n > \ v^{\partial D} \quad (1.1.15)$$

dir. Burada ∂D, D nin kenarını ve $n = n(x)$, $x \in \partial D$ noktasında dışa dönük birim normaldir[1].

I.1.1.Sonuç. M bir Riemann manifoldu, θ 1-formu ve X vektör alanı ise M de kompakt desteğe sahip olsun. Bu durumda

$$\int_M (div\,\theta)\, v^M = 0 \text{ ve } \int_M (div\,E)\, v^M = 0 \qquad (I.1.16)$$

dır[1].

I.1.22.Tanım. M bir Riemann manifoldu olsun. Bu durumda θ bir 1-form olmak üzere **kodiferansiyel** d^*

$$d^*\theta = -div\,\theta$$

şeklinde tanımlanır[1].

I.1.8.Önerme. M Riemann manifoldu üzerinde θ 1-formu ve bir f fonksiyonu için

$$\int_M f\,(d^*\theta)\, v^M = \int_M < df, \theta > v^M$$

dir. Yani d^*, d nin ekidir. Bu eşitlik **kısmi integrasyon formülü** olarak adlandırılır [1].

I.1.23.Tanım. M, m-boyutlu bir manifold olsun. Bu durumda $X, Y, Z \in \Gamma(TM)$ için

$$\begin{aligned} R : \Gamma(TM) \times \Gamma(TM) \times \Gamma(TM) &\rightarrow \Gamma(TM) \\ (X, Y, Z) &\rightarrow R(X, Y, Z) = R(X, Y)Z \end{aligned}$$

$$R(X,Y)Z = \nabla_X \nabla_Y Z - \nabla_Y \nabla_X Z - \nabla_{[X,Y]} Z \qquad (I.1.17)$$

olarak tanımlanan R tensör alanına ∇ konneksiyonunun **eğrilik tensörü** denir[3].

I.1.24.Tanım. M bir Riemann manifoldu olsun. Bu durumda

$$K : \Gamma(TM) \times \Gamma(TM) \times \Gamma(TM) \times \Gamma(TM) \rightarrow C^\infty(M)$$

$$(X,Y,Z,W) \to K(X,Y,Z,W) = g(R(X,Y)Z,W)$$

olarak tanımlanan 4.mertebeden kovaryant tensöre M üzerinde **Riemann Christoffel eğrilik tensörü** denir[3].

I.1.25.Tanım. M, m-boyutlu bir Riemann manifoldu ve M nin bir p noktasındaki tanjant uzayının 2-boyutlu bir altuzayı P olsun. P yi geren birim vektörler X_p, Y_p ve M üzerindeki Riemann Christoffel eğrilik tensörü K olmak üzere

$$K(X_p, Y_p, X_p, Y_p)$$

değerine M nin p noktasındaki P düzlemine göre **kesit eğriliği** denir ve $K^M(X)$ ile de gösterilir[2].

I.1.26.Tanım. M bir Riemann manifoldu olsun. Bu durumda

$$Ric : \Gamma(TM) \times \Gamma(TM) \ \to \ C^\infty(M)$$

$$Ric(X,Y) = iz < R(X,-)-, Y >= \sum_{i=1}^{m} < R(X,e_i)e_i, Y >$$

olarak tanımlanan tensör alanına M nin **Ricci tensör alanı** denir ve $Ric = Ric^M$ ile gösterilir.Burada $\{e_i\}$, M de ortonormal bir çatıdır[1].

Ricci operatörü ise $(1,1)$ tipinde bir tensördür. $Ric = Ric^M$ ile gösterilir ve

$$< Ric(X), Y >= Ric(X,Y)$$

ile karakterize edilir[1].

I.1.9.Önerme. Ricci operatörü self-adjointtir. Yani M bir Riemann manifoldu ve $X, Y \in \Gamma(TM)$ için

$$< Ric(X), Y >=< X, Ric(Y) >$$

dir[1].

I.1.27.Tanım. M, m-boyutlu bir Riemann manifoldu olsun. $p \in M$ olmak üzere T_pM nin 2-boyutlu altuzaylarına göre kesit eğriliklerinin toplamına **skaler eğrilik** denir ve

$$r = \sum_{i=1}^{m} Ric(e_i, e_i)$$

ile tanımlanır[2].

I.1.1.Örnek. (Sasaki metrik)

N, n-boyutlu bir Riemann manifoldu ve

$$\Pi : TN \rightarrow N$$

tanjant demeti olsun. TN boyutu $2n$ olan bir C^{∞} manifolddur. Dikey tanjant demeti $\mathcal{V}$, $v \in TN$ de Π nin liflerine teğet demet yani $x = \Pi(v)$ iken

$$\mathcal{V}_v = T_v(T_xN) = çek\,(d\Pi_v)$$

olarak tanımlanır. T_xN de bir vektör uzayı olduğundan $\mathcal{V}_v$ ile T_xN arasında bir kanonik özdeşlik kurulabilir. N üzerindeki Levi-Civita konneksiyonu $T(TN)$ nin $\mathcal{H}$ ile gösterilen yatay alt demetini tanımlar. $\mathcal{H}$, N nin eğrilerinin paralel vektör alanları ile belirlenen TN deki eğrilerin teğet vektörlerinden oluşur. Yani $x \in N$ ve $v \in T_xN$ alalım.

$$\gamma : (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow N$$

C^{∞} eğrisi $\gamma(0) = x$ ve $V(t)$, γ boyunca paralel vektör alanı olmak üzere $V(0) = v$ olacak şekilde verilsin. V, $(-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow TN$ biçiminde bir dönüşüm olarak düşünülürse $V'(0) \in T_v(TN)$ olacaktır. Bu şekilde tanımlanan $\mathcal{H}_v$ teğet vektörlerin kümesidir. $d\Pi_v$ izdüşümü yardımıyla $\mathcal{H}_v$ ile T_xN özdeş yapılabilir. Böylece

$$T(TN) = \mathcal{V} \oplus \mathcal{H} \tag{I.1.18}$$

direkt toplamına ulaşılır. Her $v \in TN$ için $\mathcal{V}_v$ ve $\mathcal{H}_v$ vektör uzayları yukarıdaki özdeşleştirmeden dolayı bir iç çarpıma sahiptir ve $T_v(TN)$ bu iç çarpımların direkt toplamı olarak yazılabilir. Böylece $\mathcal{V}$ ve $\mathcal{H}$ birbirine dik olurlar. Sonuçta elde edilen Riemannian metrik Sasaki metrik olarak adlandırır[1].

I.1.28.Tanım. (M, g) bir Riemann manifoldu olsun. Bu durumda bir

$$a : M \rightarrow (0, \infty)$$

C^{∞} dönüşümü için

$$\tilde{g} = ag$$

oluyorsa g ile $\tilde{g}$ **konform olarak denktir** denir. Bu kural bir denklik bağıntısıdır[1].

I.1.29.Tanım. M bir manifold olsun. Bu durumda

$$\tilde{g} = ag \quad , \ a : M \to (0, \infty)$$

olarak verilen denklik bağıntısının oluşturduğu denklik sınıfı **konform yapı** ve bu konform yapıya sahip bir manifold ise **konform manifold** olarak adlandırılır[1].

I.1.2.Teorem. (İzotermal koordinatlar)

(M^2, g), 2-boyutlu bir Riemann manifoldu olsun.

(i) M nin herhangi bir noktasının bir U komşuluğu üzerinde, analitik pozitif değerli bir fonksiyon μ olmak üzere,

$$g = \mu^2(dx^2 + dy^2) \tag{I.1.19}$$

olacak şekilde bir (x, y) lokal koordinat sistemi varsa bu koordinat sistemine **izotermal koordinatlar** denir[1].

(ii) (x, y) izotermal koordinatlar ise

$$\nabla^M_{\frac{\partial}{\partial x}} \frac{\partial}{\partial x} + \nabla^M_{\frac{\partial}{\partial y}} \frac{\partial}{\partial y} = 0 \tag{I.1.20}$$

dır[1].

2-boyutlu bir M manifoldunu bir (x_α, y_α) izotermal koordinatlar kümesi ile örtersek

$$\psi_{\alpha\beta} : (x_\alpha, y_\alpha) \to (x_\beta, y_\beta)$$

dönüşümleri R^2 nin açık altkümeleri arasınde konform dönüşümler olurlar yani açıyı korurlar. Özel olarak $\psi_{\alpha\beta}$ lar M^2 manifolduna C^∞ yapısına ek ikinci bir yapı olan reel analitik yapıyı kazandırırlar. Bu yapıya göre g nin reel analitik olması için gerek ve yeter şart μ fonksiyonunun reel analitik olmasıdır[1].

M yönlendirilmiş bir manifold ise M üzerindeki yönlendirmeyi koruyacak şekilde haritalar seçilebilir. Bu durumda $\psi_{\alpha\beta}$ koordinat değişim dönüşümleri, R^2 nin açık altkümeleri arasında yönlendirmeyi koruyan konform dönüşümler olur ya da denk olarak

$$\psi_{\alpha\beta} : x_\alpha + iy_\alpha \to x_\beta + iy_\beta$$

dönüşümleri kompleks analitik olur[1].

I.1.30.Tanım. M bir manifold ve $K(P)$, M üzerinde kesit eğriliği olsun. Eğer bütün P düzlemleri ve bütün p noktaları için $K(P)$ sabit ise bu durumda M ye **sabit eğrilikli uzay** denir. Sabit eğrilikli Riemann manifolduna da **uzay form** denir[2].

I.1.3.Teorem. Eğer M sabit c eğrilikli uzay form ise $X, Y, Z \in \Gamma(TM)$ olmak üzere

$$R(X,Y)Z = c[g(Y,Z)X - g(X,Z)Y] \tag{I.1.21}$$

ile verilir[3].

I.1.31.Tanım. (M, g) ve (N, h) Riemann manifoldları olsun.

$$\varphi : (M,g) \to (N,h)$$

bir C^∞ dönüşüm olmak üzere h metriğinin **pull-backi** $\varphi^* h$ ile gösterilir ve $X, Y \in \Gamma(TM)$ için

$$\varphi^* h(X,Y) = h(d\varphi_x(X), d\varphi_x(Y)) \quad , \quad x \in M$$

biçiminde tanımlanır[1].

I.1.4.Teorem. (M, g) ve (N, h) Riemann manifoldları olsun.

$$\varphi : (M,g) \to (N,h)$$

dönüşümü

$$\varphi^* h = \mu^2 g$$

olacak şekilde verilmiş olsun. Bu durumda

$$\mu : M \to (0, \infty)$$

fonksiyonuna φ nin **konform faktörü** denir. Bir sabit çarpan farkıyla değişen bir izometri olan φ diffeomorfizmine Riemann manifoldları arasında bir **homoteti** denir[1].

I.1.2.Örnek. M bir Riemann manifoldu olsun. Bu durumda

$$I : (M, g) \to (M, h)$$

özdeşlik dönüşümünün homoteti olması için gerek ve yeter şart h metriğinin g nin sabit bir katı olmasıdır[1].

I.1.32.Tanım. (M, g), (N, h) Riemann manifoldları

$$\varphi : (M, g) \to (N, h)$$

bir C^∞ dönüşüm ve $x \in M$ olmak üzere x noktasında φ nin türev dönüşümünün **Hilbert-Schmidt normu** $|d\varphi_x|$ ile gösterilir ve T_xM tanjant uzayının bir $\{e_i\}$ bazı için

$$|d\varphi_x|^2 = \sum_{i=1}^{m} h(d\varphi(e_i), d\varphi(e_i)) \tag{I.1.22}$$

ile tanımlanır[1].

Lokal koordinatlarda ise

$$|d\varphi_x|^2 = g^{ij}\varphi_i^\alpha \varphi_j^\beta h_{\alpha\beta} \tag{I.1.23}$$

dır[1].

Tanım I.1.31 ve Tanım I.1.32 kullanılarak

$$\begin{aligned} |d\varphi_x|^2 \quad &= \sum_{i=1}^{m} h(d\varphi(e_i), d\varphi(e_i)) \\ &= \sum_{i=1}^{m} \varphi^* h(e_i, e_i) \\ &= iz_g \varphi^* h \end{aligned}$$

olduğu görülür[1].

$\varphi^* h$, $(T_x M, g)$ iç çarpım uzayında bir kuadratik form olarak düşünülürse simetrik ve pozitif yarı tanımlı olur. Dolayısıyla $\varphi^* h$ ın $\lambda_1^2, \lambda_2^2, ..., \lambda_m^2$ ile gösterilen karakteristik değerleri negatif değildir[1].

$\flat$ ve $\sharp$ izomorfizmleri kullanılarak $\varphi^* h$

$$T_x M \to T_x M \tag{I.1.24}$$

endomorfizmi olarak düşünülebilir. Bu durumda λ_i^2 $(i = 1, ..., m)$, $\varphi^* h$ ın karakteristik değerleridir. $\varphi^* h$ simetrik olduğundan bu karakteristik değerlerine karşılık gelen karakteristik vektörlerden oluşan bir $\{e_i\}$ ortonormal bazı vardır. Bu durumda ise

$$\varphi^* h(e_i, e_j) = h(d\varphi_x(e_i), d\varphi_x(e_j)) = \lambda_i^2 \delta_{ij} \tag{I.1.25}$$

olur. Başka bir ifadeyle $d\varphi_x(e_i)$ vektörleri ortogonal ve

$$|d\varphi_x|^2 = \sum_{i=1}^{m} \lambda_i^2$$

olacak şekilde $T_x M$ nin bir $\{e_i\}$ ortonormal bazı bulunabilir[1].

I.1.33.Tanım. (M, g), (N, h) Riemann manifoldları ve

$$\varphi : (M, g) \to (N, h)$$

bir C^∞ dönüşüm olsun. φ nin $d\varphi_x$ türev dönüşümünün eki $d\varphi_x^*$ ile gösterilir ve $X \in T_x M$, $Y \in T_{\varphi(x)} N$ için

$$g(X, d\varphi_x^*(Y)) = h(d\varphi_x(X), Y) \tag{I.1.26}$$

biçiminde karakterize edilir[1]. Böylece

$$\varphi^* h(X, Y) = h(d\varphi_x(X), d\varphi_x(Y)) = g(d\varphi_x^* \circ d\varphi_x(X), Y)$$

elde edilir. Bu da (I.1.24) deki endomorfizmin

$$d\varphi_x^* \circ d\varphi_x$$

olduğunu gösterir[1].

I.1.34.Tanım. E^{n+1} Öklid Uzayında merkezi

$$C = (0,0,...,0,\frac{1}{2}r)$$

ve yarı çapı $\frac{1}{2}r$ olan S^n küresini düşünelim. Bu kürenin denklemi

$$x_1^2 + x_2^2 + ... + x_n^2 + x_{n+1}(x_{n+1} - r) = 0$$

dır. S^n ile E^{n+1} in ortak noktası sadece orjindir.

$$(x_1, x_2, ..., x_n, 0) \in E^{n+1}$$

noktasını

$$(x_1, x_2, ..., x_n) \in E^n$$

noktası ile eş tutalım.

$$B = (0,0,...,0,r) \in S^n$$

noktasına kutup noktası denir.

$$S^n - B = S^n \setminus (B)$$

dersek

$$\forall X = (x_1, x_2, ..., x_n, x_{n+1}) \in S^n \setminus (B)$$

için $0 \leq x_{n+1} < 1$ dir. Böyle herbir X noktasına

$$\sigma : S^n \setminus (B) \to E^{n+1}$$

izdüşümü altında bir $\sigma(X) = \bar{X}$ noktası karşılık gelir. Bu nokta $\overline{BX}$ doğrusunun E^{n+1} (yani E^n) yi kestiği noktadır. Bu doğru

$$\bar{X} = B + t(X - B) \quad , \quad t \in R \tag{I.1.27}$$

formundaki noktalardan geçer.

$$r + t(x_{n+1} - r) = 0$$

yani

$$t = \frac{r}{r - x_{n+1}}$$

olduğu zaman X noktası vardır. t nin değeri (I.1.27) denkleminde yerine yazılırsa

$$\sigma(X) = B + \frac{r}{r - x_{n+1}}(X - B)$$

veya

$$\sigma(X) = \frac{rX - x_{n+1}B}{r - x_{n+1}}$$

elde edilir. Denklemi $x_{n+1} = 0$ olan bir n-hiperdüzlem E^n olmak üzere

$$\sigma : S^n \setminus (B) \to E^n$$

fonksiyonuna S^n nin E^n üzerine **stereografik izdüşümü** denir[20].

I.2. Riemann Manifoldları Üzerinde Laplasyan

I.2.1.Tanım. Öklidyen Uzay R^m de **Laplasyan**, $f \in C^\infty(R^m)$ olmak üzere

$$\begin{aligned} \Delta : C^\infty(R^m) &\to C^\infty(R^m) \\ f &\to div(gradf) \end{aligned}$$

$$\Delta f = div(gradf) = \sum_{i=1}^{m} \frac{\partial}{\partial x_i}(\frac{\partial f}{\partial x_i}) = \sum_{i=1}^{m} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2} \qquad \text{(I.2.1)}$$

olarak tanımlanır[4].

Bölüm I.1 de verilen gradiyent ve divergens tanımları kullanılarak Laplasyan tanımı keyfi bir Riemann manifolduna genişletilebilir.

I.2.2.Tanım. (M, g) bir Riemann manifoldu olsun. Bu durumda M üzerindeki **Laplasyan** yada **Laplace-Beltrami operatörü** $\Delta = \Delta^M = \Delta_g$ ile gösterilir ve

$$\Delta f = div(gradf) = div\, df = -d^* df = iz\, \nabla df \qquad \text{(I.2.2)}$$

biçiminde tanımlanır. Burada f, $U \subset M$ açığı üzerinde tanımlı reel-değerli C^2-sınıfından bir fonksiyondur[1].

I.2.3.Tanım. (M,g) bir Riemann manifoldu ve $f \in C^\infty(M)$ olsun. Bu durumda

$$\Delta f = 0$$

eşitliği **Laplace denklemi** olarak adlandırılır ve bu denklemin çözümlerine $U \subset M$ üzerinde **harmonik fonksiyonlar** denir[1].

M manifoldunun $\{e_i\}$ ortonormal çatısını gözönüne alalım. Bu durumda

$$\Delta f = \sum_{i=1}^{m}\{e_i(e_i(f)) - (\nabla^M_{e_i} e_i) f\}$$

olur[1].

I.2.1.Önerme. (M^m, g) bir Riemann manifoldu olsun. $(x^1, ..., x^m)$ M üzerinde bir lokal koordinat sistemi ise $|g| = \det(g_{kl})$ olmak üzere

$$\Delta f = \frac{1}{\sqrt{|g|}}\frac{\partial}{\partial x^i}(\sqrt{|g|}g^{ij}\frac{\partial f}{\partial x^j}) = g^{ij}(\frac{\partial^2 f}{\partial x^i \partial x^j} - \Gamma^k_{ij}\frac{\partial f}{\partial x^k}) \qquad (I.2.3)$$

dır[1].

İspat. Bir vektör alanının Önerme I.1.6 ile verilen lokal koordinatlardaki ifadesi ve

$$\Delta f = div(grad\, f)$$

tanımı gözönüne alınırsa

$$\Delta f = \frac{1}{\sqrt{|g|}}\frac{\partial}{\partial x^i}(\sqrt{|g|}g^{ij}\frac{\partial f}{\partial x^j}) = g^{ij}(\frac{\partial^2 f}{\partial x^i \partial x^j} - \Gamma^k_{ij}\frac{\partial f}{\partial x^k})$$

olduğu kolayca görülür.

Böylece

$$\frac{\partial}{\partial x^i}(\sqrt{|g|}g^{ij}\frac{\partial f}{\partial x^j}) = 0 \quad \text{yada} \quad g^{ij}(\frac{\partial^2 f}{\partial x^i \partial x^j} - \Gamma^k_{ij}\frac{\partial f}{\partial x^k}) = 0 \qquad (I.2.4)$$

biçiminde tanımlanan Laplace Denklemine ulaşılır.

Eğer bir $x_0 \in M$ noktası civarında bir normal koordinat sistemi seçilirse bu noktada $\Gamma_{ij}^k = 0$ ve $g_{ij} = \delta_i^j$ olduğundan

$$\Delta f(x_0) = \sum_{i=1}^{m} \frac{\partial^2 f}{\partial (x^i)^2}$$

elde edilir. Bu basit formül sayesinde Laplace operatörünün R^3 uzayında sağladığı pek çok özellik (M, g) Riemann manifoldunda da sağlanır[1].

I.2.2.Önerme. (M, g) bir Riemann manifoldu olsun. u ve v, M manifoldu üzerinde tanımlı C^2-sınıfından fonksiyonlar ise

$$\begin{aligned} div(u\, grad\, v) &= grad\, v(u) + u\, div(grad\, v) \\ &= du(grad\, v) + u\Delta v \\ &= < grad\, v, grad\, u > + u\Delta v \end{aligned}$$

dir[1].

I.2.3.Önerme. (I.Green Özdeşliği)

(M, g) bir Riemann manifoldu ve D, M nin C^∞ kenarlı kompakt bir bölgesi olsun. Bu durumda $u, v \in C^2(M)$ olmak üzere

$$\int_D (< grad\, u, grad\, v > + u\Delta v)\, v^D = \int_{\partial D} u \frac{\partial v}{\partial n}\, v^{\partial D}$$

dir. Burada $\frac{\partial}{\partial n}$ dışa dönük birim normal vektör alanı yönündeki türevi göstermektedir[8].

İspat. Divergens Teoremi Önerme I.2.2 de verilen $div(u\, grad\, v)$ ye uygulanırsa

$$\begin{aligned} \int_D div(u\, grad\, v)\, v^{\partial D} &= \int_{\partial D} < ugrad\, v, n > \, v^{\partial D} \\ &= \int_{\partial D} u < grad\, v, n > \, v^{\partial D} \\ &= \int_{\partial D} udv(n)\, v^{\partial D} \\ &= \int_{\partial D} un[v]\, v^{\partial D} \\ &= \int_{\partial D} u \frac{\partial v}{\partial n} \end{aligned}$$

bulunur. Öyleyse

$$\int_D (< grad\, u, grad\, v > + u\Delta v)\, v^D = \int_{\partial D} u \frac{\partial v}{\partial n}\, v^{\partial D}$$

olduğu görülür.

I.2.4.Önerme. (II.Green Özdeşliği)

$$\int_D (u\Delta v - v\Delta u)\, v^{\partial D} = \int_{\partial D} (u\frac{\partial v}{\partial n} - v\frac{\partial u}{\partial n})\, v^{\partial D}$$

dir[8].

İspat. $div(u\, grad\, v)$ den $div(v\, grad\, u)$ çıkarılırak II. Green Özdeşliğine kolayca ulaşılabilir.

I.2.5.Önerme. Laplace operatörü self-adjointtir[1].

İspat. Önerme I.2.4 de $D = M$ alınır, u ve v fonksiyonlarından herhangi biri M üzerinde kompakt desteğe sahip olacak şekilde seçilirse

$$\int_{\partial M} (u\frac{\partial v}{\partial n} - v\frac{\partial u}{\partial n})\, v^{\partial M} = 0$$

olur. Öyleyse

$$u\Delta v = v\Delta u$$

elde edilir.

Özel olarak $u \in C^2(M)$ fonksiyonunun M de harmonik olması için gerek ve yeter şart M üzerinde kompakt desteğe sahip bütün $v \in C^2(M)$ fonksiyonları için

$$\int_M (u\Delta v)\, v^M = 0 \tag{I.2.5}$$

olmasıdır. Başka bir ifadeyle M üzerinde sürekli bir u fonksiyonu, M de kompakt desteğe sahip her $v \in C^2(M)$ fonksiyonu için

$$\int_M (u\Delta v)\, v^M = 0$$

şartını sağlıyorsa bu fonksiyon M üzerinde harmonik olur[1].

I.2.4.Tanım. (M, g) reel-analitik manifoldu üzerinde tanımlı bir harmonik u fonksiyonuna **reel-analitik harmonik fonksiyon** denir[1].

I.2.5.Tanım. (M, g) bir Riemann manifoldu olsun. Bir $f \in C^2(M)$ fonksiyonu $\Delta^M f \geq 0$ $(\Delta^M f \leq 0)$ şartını sağlıyorsa f ye **subharmonik (süperharmonik) fonksiyon** denir[1].

I.2.1.Teorem. f bir Riemann manifoldu üzerinde harmonik veya subharmonik (süperharmonik) ve bir lokal maksimuma (minimuma) sahip ise bu durumda f sabittir[1].

I.2.2.Sonuç. (M, g) kompakt, bağlantılı (kenarsız) bir Riemann manifoldu olsun. Eğer

$$f : M \to R$$

için $\Delta^M f \geq 0$ ise bu durumda f sabit bir fonksiyondur (ve $\Delta^M f = 0$ dır)[8].

İspat.

$$div(fX) = X(f) + f div(X) = df(X) + f div(X)$$

ve

$$grad(fg) = f grad(g) + g grad(f)$$

olduğundan

$$\begin{aligned}
div(grad(fg)) &= div(f grad\, g + g grad\, f) \\
&= div(f grad\, g) + div(g grad\, f) \\
&= df(grad\, g) + f div(grad\, g) + dg(grad\, f) + g div(grad\, f) \\
&= df(grad\, g) + dg(grad\, f) + f\Delta g + g\Delta f \\
&= 2 < grad\, f, grad\, g > + f\Delta g + g\Delta f
\end{aligned}$$

bulunur. Öyleyse $g = f$ alınırsa

$$\Delta f^2 = div(grad\, f^2) = 2f\Delta f + 2 < grad\, f, grad\, f > \qquad (I.2.6)$$

olur. n, ∂M üzerinde dışa dönük birim normal vektör alanı olsun. Bu durumda Divergens Teoreminden

$$\int_M \Delta f^2 \, v^M = \int_M div(grad\, f^2) \, v^M = \int_{\partial M} < grad\, f^2, n > \partial\, v^M \qquad (I.2.7)$$

dir. (I.2.6), (I.2.7) de yerine yazılırsa

$$\int_M (f\Delta f + < grad\, f, grad\, f >)\, v^M = \int_{\partial M} < f grad\, f, n > \; v^{\partial M} \qquad \text{(I.2.8)}$$

elde edilir. M kenarsız bir Riemann manifoldu olsun.

$$f : M \to R$$

için $\Delta f \geq 0$ alalım. M kenarsız olduğundan Green Teoreminden

$$\int_M \Delta f\, v^M = 0$$

dır. M üzerinde $\Delta f \geq 0$ seçtiğimizden $\Delta f = 0$ olmalıdır. Diğer taraftan yine Green teoreminden

$$\int_M \Delta f^2\, v^M = 0$$

dır ve $\Delta f = 0$ olduğundan (I.2.8) den

$$\int_M g^{ij} \frac{\partial f}{\partial x^i} \frac{\partial f}{\partial x^j}\, v^M = 0$$

elde edilir. İntegral pozitif tanımlı olduğundan

$$g^{ij} \frac{\partial f}{\partial x^i} \frac{\partial f}{\partial x^j} = 0$$

olmak zorundadır. Buradan da

$$df = 0$$

olur ki bu da f nin sabit olduğunu gösterir.

I.3. Vektör Demetleri Üzerinde Hesaplamalar

Bu kısımda bölüm I.1 de tensör alanları ve formlarla ilgili olarak verdiğimiz hesaplamaları vektör demetlerinin kesitleri üzerine taşıyacağız. M bir C^∞ manifold ve

$$C^\infty(M) = \{f | f : M \to R, f \text{ bir } C^\infty \text{ fonksiyon}\} \qquad \text{(I.3.1)}$$

olsun.

I.3.1.Tanım. E, B, F C^∞ manifoldlar ve $\pi : E \to B$ bir C^∞ dönüşüm olsun. B nin bir açık örtüsü $\{U_\alpha\}_{\alpha\in I}$ (I, indis kümesi) olmak üzere eğer

$$(\pi \circ \psi_\alpha)(x,y) = x \quad x \in U_\alpha,\ y \in F$$

olacak şekilde

$$\psi_\alpha : U_\alpha \times F \to \pi^{-1}(U_\alpha)$$

diffeomorfizmlerinin bir $\{\psi_\alpha\}_{\alpha\in I}$ ailesi varsa π, F ye göre **lokal çarpım özelliğine sahiptir** denir ve $D = \{(U_\alpha, \psi_\alpha)\}_{\alpha\in I}$ sistemine de π nin **lokal ayrışması** denir[18].

I.3.2.Tanım. $\pi : E \to B$ dönüşümü lokal çarpım özelliğine sahip olsun. Bu durumda $\zeta = (E, \pi, B, F)$ dörtlüsüne bir diferensiyellenebilir **lif demeti** adı verilir[18].

Bir lif demetinde E ye **total uzay**, B ye **baz (taban) uzay**, F ye **lif modeli** ve π ye de **projeksiyon (fibrasyon)** adı verilir[18].

I.3.3.Tanım. $\pi : E \to B$ bir lif demeti olsun. $\forall x \in B$ için

$$\pi^{-1}(x) = F_x = \{u \in E | \pi(u) = x\}$$

kümesine x üzerinde bir **lif** denir. Tüm F_x liflerinin ayrık birleşimi E total uzayını verir[18].

I.3.4.Tanım. $\zeta = (E, \pi, B, F)$ bir diferensiyellenebilir lif demeti olsun. π nin D lokal ayrışmasına ζ lif demetinin **lokal koordinat temsilcisi** denir[18].

$\zeta = (E, \pi, B, F)$ lif demetinin $D = \{(U_\alpha, \psi_\alpha)\}_{\alpha\in I}$ lokal koordinat temsilcisini göz önüne alalım. $\forall x \in U_\alpha$ için

$$\psi_{\alpha,x} : F \to F_x$$

dönüşümü $y \in F$ için

$$\psi_{\alpha,x}(y) = \psi_\alpha(x,y)$$

şeklinde tanımlanırsa ψ_α lar diffeomorfizm olduklarından, $\psi_{\alpha,x}$ ler de birebir, örten ve diffeomorfizmdirler[18].

I.3.5.Tanım. $\zeta = (E, \pi, B, F)$ bir diferensiyellenebilir lif demeti olsun. Eğer aşağıdaki iki özellik sağlanıyorsa ζ ya bir **vektör demeti** denir[18].

i) $\forall x \in B$ için F ve F_x bir K cismi üzerinde vektör uzayıdır.

ii) $\forall x \in B$ için $\psi_{\alpha,x} : F \to F_x$ dönüşümleri lineer izomorfizm olacak şekilde ζ nın bir $D = \{(U_\alpha, \psi_\alpha)\}_{\alpha \in I}$ lokal koordinat temsilcisi vardır.

I.3.6.Tanım. $\pi : E \to B$ bir C^∞ lif demeti olsun. Bu durumda

$$\pi \circ S = I \quad (I, \text{ B nin birim dönüşümü})$$

olacak şekilde

$$S : B \to E$$

C^∞ dönüşümüne **lif demetinin kesiti** denir ve $\Gamma(E)$ ile gösterilir[18].

I.3.7.Tanım. E bir vektör demeti olsun. $\forall p \in B$ için T_pB tanjant uzayına bir X_p vektörü taşıyan dönüşüme **vektör demetinin kesiti** denir. E nin $\Gamma(E)$ kesitlerinin uzayı K cismi üzerinde bir vektör uzayıdır[18].

I.3.8.Tanım. E ve M C^∞ manifoldlar ve

$$E \to M$$

M üzerinde bir C^∞ (reel) vektör demeti olsun. E üzerinde bir (reel,lineer) konneksiyon $\nabla = \nabla^E$ ile gösterilir ve $X \in \Gamma(TM)$ olmak üzere

$$\begin{aligned} \nabla : \Gamma(TM) \times \Gamma(E) &\to \Gamma(E) \\ (X, \sigma) &\to \nabla_X \sigma \end{aligned}$$

biçiminde tanımlanır öyleki $\forall f \in C^\infty(M)$ için

$$\begin{aligned} \nabla_{fX}\sigma &= f\nabla_X\sigma \\ \nabla_X(f\sigma) &= X(f)\sigma + f\nabla_X\sigma \end{aligned}$$

dır. $\nabla_X\sigma$, σ kesitinin X vektör alanına göre **kovaryant türevi** olarak adlandırılır[1].

$\nabla_X \sigma$ nın değeri sadece $X \in \Gamma(TM)$ vektörünü teğet kabul eden bir eğri boyunca σ nın alacağı değerlere bağlıdır[1].

I.3.1.Örnek.

(i) $k \in \{1, 2, ...\}$ için rankı k olan aşikar demet

$$\underline{R}^k = M \times R^k \to M$$

demetidir. Böylece $\underline{R}^k$ demetinin herbir lifi kanonik olarak R^k ile özdeş yapılabilir. Bu durumda $\underline{R}^k$ demetinin bir kesiti

$$\sigma : M \to R^k$$

C^∞ dönüşümü olarak düşünülebilir. Aşikar demet üzerindeki aşikar konneksiyon ise $X \in \Gamma(TM)$ olmak üzere

$$\nabla_X \sigma = X(\sigma)$$

ile tanımlanır[1].

(ii) (M, g) Riemann manifoldunun

$$TM \to M$$

tanjant demeti üzerinde ∇^M Levi-Civita konneksiyonu tanımlıdır[1].

I.3.9.Tanım. E ve M, C^∞ manifoldlar, $E \to M$ bir vektör demeti ve ∇^E bu demet üzerindeki konneksiyon olsun. Bu durumda

$$E^* = Hom(E, R) \to M$$

dual demeti üzerindeki konneksiyon $X \in \Gamma(TM)$, $\theta \in \Gamma(E^*)$ ve $\sigma \in \Gamma(E)$ olmak üzere

$$(\nabla_X \theta)\sigma = X(\theta(\sigma)) - \theta(\nabla_X^E \sigma) \qquad \text{(I.3.2)}$$

ile tanımlanır[1].

I.3.10.Tanım. E, F ve M, C^∞ manifoldlar; $E \to M$, ∇^E konneksiyonuna sahip bir vektör demeti ve $F \to M$ ise üzerinde ∇^F konneksiyonunun tanımlı olduğu bir vektör demeti olsun. Bu durumda

$$E \otimes F \to M$$

tensör çarpım demeti üzerindeki konneksiyon $X \in \Gamma(TM)$, $\sigma_1 \in \Gamma(E)$ ve $\sigma_2 \in \Gamma(F)$ olmak üzere

$$\nabla_X(\sigma_1 \otimes \sigma_2) = (\nabla^E_X \sigma_1) \otimes \sigma_2 + \sigma_1 \otimes (\nabla^F_X \sigma_2) \tag{I.3.3}$$

şeklinde tanımlanır[1].

I.3.11.Tanım. E ve M, C^∞ manifoldlar, $E \to M$ bir vektör demeti ve ∇^E bu demet üzerindeki konneksiyon olsun. $E \otimes E = \otimes^2 E$ tensör çarpım demetinin

$$\wedge^2 E \equiv Sp\{v \wedge w \equiv \frac{1}{2}(v \otimes w - w \otimes v) : v, w \in \Gamma(E)\}$$

ve

$$\odot^2 E \equiv Sp\{v \odot w \equiv \frac{1}{2}(v \otimes w + w \otimes v) : v, w \in \Gamma(E)\}$$

ile verilen $\wedge^2 E \to M$ ve $\odot^2 E \to M$ altdemetlerini gözönüne alalım. Burada $\wedge^2 E \to M$ **dış kare**, $\odot^2 E \to M$ **simetrik kare** olarak adlandırılır.
$X \in \Gamma(TM)$ olmak üzere dış kare üzerindeki konneksiyon

$$\nabla_X(v \wedge w) = \nabla^E_X v \wedge w + v \wedge \nabla^E_X w \tag{I.3.4}$$

simetrik kare üzerindeki konneksiyon ise

$$\nabla_X(v \odot w) = \nabla^E_X v \odot w + v \odot \nabla^E_X w \tag{I.3.5}$$

biçiminde tanımlanır[1].

I.3.12.Tanım. E, F ve M, C^∞ manifoldlar, $E \to M$ ve $F \to M$ sırasıyla ∇^E ve ∇^F konneksiyonlarına sahip vektör demetleri olsun. Bu durumda E den F ye tanımlanan lineer dönüşümlerin demeti

$$Hom(E, F) \to M$$

ile gösterilir ve bu demet üzerindeki konneksiyon $X \in \Gamma(TM), \theta \in Hom(E, F)$ ve $\sigma \in \Gamma(E)$ olmak üzere

$$(\nabla_X \theta)\sigma = \nabla_X^F(\theta(\sigma)) - \theta(\nabla_X^E \sigma) \tag{I.3.6}$$

ile verilir[1].

Ayrıca $Hom(E, F)$ ile $E^* \otimes F$ özdeşleştirilebileceğinden Tanım I.3.9 ve Tanım I.3.10 kullanılarak da $E^* \otimes F \to M$ vektör demeti üzerindeki konneksiyona ulaşılabilir.

I.3.13.Tanım. W, M ve N, C^∞ manifoldlar olmak üzere

$$\varphi : M \to N$$

bir C^∞ dönüşüm olsun. Bir $W \to N$ vektör demetinin **pull-back demeti**

$$\varphi^{-1}W \to M$$

ile gösterilir ve $x \in M$ için bu demet

$$(\varphi^{-1}W)_x = W_{\varphi(x)} \tag{I.3.7}$$

ile tanımlanan liflere sahiptir. $W \to N$ vektör demeti üzerindeki konneksiyon ∇^W ise $\varphi^{-1}W \to M$ pull-back demeti üzerindeki konneksiyon ∇^φ ile gösterilen ve

$$\begin{aligned} \nabla^\varphi : \Gamma(TM) \times \Gamma(\varphi^{-1}W) &\to \Gamma(\varphi^{-1}W) \\ (X, \varphi^*\sigma) &\to \nabla_X^\varphi(\varphi^*\sigma) = \nabla_{d\varphi(X)}^W \sigma \end{aligned} \tag{I.3.8}$$

ile tanımlanan tek lineer konneksiyondur. Burada

$$\varphi^*\sigma = \sigma \circ \varphi$$

dir[1].

I.3.1.Önerme. (i) (Bir eğri boyunca kovaryant türev)
W, N, C^∞ manifoldlar ve $W \to N$, ∇^W konneksiyonuna sahip bir vektör demeti olsun. $\sigma \in \Gamma(W)$, $y \in N$ ve $Y \in T_yN$ olmak üzere bir

$$\begin{aligned} \gamma : (-\varepsilon, \varepsilon) &\to N \\ t &\to \gamma(t) \end{aligned}$$

eğrisi $\gamma(0) = y$ ve $\gamma'(0) = Y$ olacak şekilde verilsin. Bu durumda

$$\nabla^W_Y \sigma = \nabla^\gamma_{\frac{d}{dt}}(\sigma \circ \gamma) \tag{I.3.9}$$

dır[1].

(ii) W, M ve N, C^∞ manifoldlar,

$$\varphi : M \to N$$

bir C^∞ dönüşüm ve $W \to N$ bir vektör demeti olsun. Bu durumda $s \in \Gamma(\varphi^{-1}W)$, $x \in M$ ve $X \in T_xM$ olmak üzere

$$\nabla^\varphi_X s = \nabla^W_{d\varphi(X)}\sigma = \nabla^{\varphi\circ\gamma}_{\frac{d}{dt}}(\sigma \circ \varphi \circ \gamma) \tag{I.3.10}$$

dır. Burada

$$\gamma : (-\varepsilon, \varepsilon) \to M,\ \gamma(0) = x,\ \gamma'(0) = X$$

M manifoldu üzerinde bir eğridir ve σ, $W \to N$ vektör demetinin $\varphi \circ \gamma$ eğrisi boyunca $s = \varphi^*\sigma$ şeklinde tanımlanan bir kesitidir[1].

(I.3.9) eşitliğinin sağ tarafı $\nabla^W\sigma/dt$ veya $D\sigma/dt$ olarak da yazılabilir. Öyleyse (I.3.9) eşitliği

$$\nabla^W_{\gamma'(t)}\sigma = \nabla^W\sigma/dt \tag{I.3.11}$$

biçiminde de ifade edilebilir.

I.3.14.Tanım. E ve M, C^∞ manifoldlar olsun. $E \to M$ vektör demeti üzerinde bir Riemann metriği, $\odot^2 E^* \to M$ altdemetinin her bir lif üzerinde pozitif tanımlı bir iç çarpım tanımlayan bir C^∞ kesitidir ve $<\,,\,>=<\,,\,>^E$ ile gösterilir. Yani $v \in \Gamma(E)$ için

$$< v, v > \geq 0 \quad \text{ve} \quad < v, v >= 0 \Leftrightarrow v = 0$$

dır[1].

I.3.15.Tanım. E ve M, C^∞ manifoldlar ve $E \to M$ bir vektör demeti olsun. Bu durumda

$$\flat : E \to E^*$$

izomorfizmi $E \to M$ vektör demetinin herbir lifi üzerinde σ, $\rho \in \Gamma(E)$ olmak üzere

$$\sigma^{\flat}(\rho) = <\sigma, \rho>^{E} \qquad \text{(I.3.12)}$$

şeklinde tanımlanır ve bu izomorfizmin tersi

$$\sharp : E^{*} \to E$$

ile verilir[1].

I.3.16.Tanım. E ve M, C^{∞} manifoldlar ve $E \to M$ bir vektör demeti olsun.

$$\sharp : E^{*} \to E$$

izomorfizmi ile $<,>^{E}$ Riemann metriği $x \in M$ ve A, $B \in \Gamma(E_x^{*})$ olmak üzere $E^{*} \to M$ dual demeti üzerinde $\odot^2 E \to M$ altdemetinin bir kesiti olan ve

$$<A, B> = \sum_{i=1}^{k} A(e_i)B(e_i) \qquad \text{(I.3.13)}$$

ile tanımlanan Riemann metriğine transfer edilir. Burada $\{e_1, ..., e_k\}$, E_x için bir ortonormal bazdır[1].

I.3.2.Örnek.

(i) $\underline{R}^k = M \times R^k \to M$ aşikar demeti üzerindeki standart veya kanonik Riemann metriği, $\underline{R}^k$ demetinin herbir lifinin R^k ile özdeşleştirilmesi yolu ile

$$<x, y> = \sum_{i=1}^{k} x_i y_i \qquad (x = (x_1, ..., x_k), y = (y_1, ..., y_k))$$

standart iç çarpımından indirgenen metriktir.

(ii) Bir M, C^{∞} manifoldu üzerindeki Riemann metriği $TM \to M$ tanjant demeti üzerinde bir Riemann metrik tanımlar. Ancak bu metrik TM total uzayı üzerindeki bir Riemann metrik ile aynı değildir(Örneğin Sasaki metriği).

I.3.17.Tanım. E, F ve M, C^{∞} manifoldlar, $E \to M$ ve $F \to M$ sırasıyla $<,>^E$ ve $<,>^F$ Riemann metriğine sahip vektör demetleri olsun. Bu durumda $E \otimes F \to M$ vektör demeti üzerinde bir Riemann metriği σ_1, $\rho_1 \in \Gamma(E)$ ve σ_2, $\rho_2 \in \Gamma(F)$ olmak üzere

$$< \sigma_1 \otimes \sigma_2, \rho_1 \otimes \rho_2 >=< \sigma_1, \rho_1 >^E + < \sigma_2, \rho_2 >^F \qquad \text{(I.3.14)}$$

ile tanımlanır[1].

I.3.18.Tanım. E, F ve M, C^{∞} manifoldlar, $E \to M$ ve $F \to M$ sırasıyla $<,>^E$ ve $<,>^F$ Riemann metriğine sahip vektör demetleri olsun. Bu durumda $\mathrm{Hom}(E,F) \to M$ demeti üzerindeki Riemann metrik

$$< A, B >= \sum_{i=1}^{k} < A(e_i), B(e_i) >^F , \quad (A,\, B \in Hom(E,F)) \qquad \text{(I.3.15)}$$

şeklinde verilir[1].

I.3.19.Tanım. E, M ve N, C^{∞}-manifoldlar

$$\varphi : M \to N$$

bir C^{∞} dönüşüm ve $E \to N$ bir Riemann metriğiyle birlikte bir vektör demeti olsun. $x \in M$ için

$$(\varphi^{-1}E)_x = E_{\varphi(x)}$$

izomorfizmleri $\varphi^{-1}E$ pull-back demeti üzerinde **pull-back metrik** olarak adlandırılan ve

$$g(V,W)(x) = g_{\varphi(x)}(V_x, W_x) \quad (V,\, W \in \Gamma(\varphi^{-1}E)) \qquad \text{(I.3.16)}$$

biçiminde verilen bir metrik tanımlar[1].

I.3.20.Tanım. E ve M, C^{∞} manifoldlar ve $E \to M$, $<,>$ Riemann metriği ile birlikte bir vektör demeti olsun.Bu vektör demeti $<,>$ metriği paralel olacak şekilde bir ∇ konneksiyonuna sahip ise bu vektör demetine **Riemannian-bağlantılıdır** veya **Riemannian yapıya sahiptir** denir.$<,>= g$ metriğinin paralel olması $\nabla g = 0$ şartının sağlanması demektir[1].

I.3.3.Örnek. (Riemannian-bağlantılı vektör demetleri)

(i) $\underline{R}^k = M \times R^k \to M$ aşikar demeti, aşikar konneksiyon ve standart Riemannian metriği ile birlikte bir Riemannian-bağlantılı demettir.

(ii) (N, g) Riemann manifoldunun $TN \to N$ tanjant demeti, g Riemann metriği ve ∇^N Levi-Civita konneksiyonu ile birlikte Riemannian-bağlantılıdır.

(iii) E ve M Riemann manifoldları , $E \to M$ Riemannian-bağlantılı bir vektör demeti ve $F \to M$, $E \to M$ nin bir altdemeti olsun. Bu altdemet, $E \to M$ Riemannian-bağlantılı demeti üzerindeki Riemann metriğinin kısıtlanmışına sahiptir. Ayrıca yine bu altdemet ∇^E konneksiyonunun E den F ye dik izdüşüm fonksiyonu ile bileşkesinden ibaret olan ∇^F konneksiyonuna sahiptir. Böylece $F \to M$ bir Riemannian-bağlantılı demet olur.

(iv) M ve N Riemann manifoldları ve $\varphi : M \to N$ bir C^∞ dönüşüm olsun. $\varphi^{-1}TN \to M$ pull-back demeti, pull-back konneksiyon ve pull-back metrik ile birlikte bir Riemannian-bağlantılı vektör demeti olur. Özel olarak $\varphi^{-1}TN \to M$ pull-back demetinin C^∞ kesitlerine φ boyunca vektör alanları denir[1].

I.3.21.Tanım. E bir C^∞ manifold, $M = (M^m, g)$ bir Riemann manifoldu ve $E \to M$ bir Riemannian-bağlantılı bir vektör demeti olsun. $\sigma \in \Gamma(T^*M \otimes E)$ nın divergensi $div\,\sigma \in \Gamma(E)$ ile gösterilir ve

$$div\,\sigma = iz\,\nabla\sigma = \sum_{i=1}^{m} (\nabla_{e_i}\sigma)(e_i) \qquad \text{(I.3.17)}$$

şeklinde tanımlanır. Burada $\{e_1, ..., e_m\}$, M üzerinde bir ortonormal çatı sistemi ve ∇, $T^*M \otimes E$ üzerindeki indirgenmiş konneksiyondur[1].

I.3.22.Tanım. E bir C^∞ manifold, $M = (M^m, g)$ bir Riemann manifoldu ve $E \to M$ Riemannian-bağlantılı bir vektör demeti olsun. $\sigma \in \Gamma(T^*M \otimes E)$ alalım. Bu durumda σ nın kodiferansiyeli

$$\begin{aligned} d^* = \delta : \Gamma(T^*M \otimes E) &\to \Gamma(E) \\ \sigma &\to d^* = -div\,\sigma \end{aligned} \qquad \text{(I.3.18)}$$

biçiminde tanımlanır[1].

E bir C^∞ manifold, $M = (M^m, g)$ bir Riemann manifoldu ve $E \to M$ Riemannian-bağlantılı bir vektör demeti olsun. $\sigma \in \Gamma(T^*M \otimes E)$ ve $V \in \Gamma(E)$ olmak üzere

$$\psi = < V, \sigma(-) >^E \tag{I.3.19}$$

ile verilen ψ 1-formunu gözönüne alalım. Divergens teoreminin ψ 1-formuna uygulanması d^* kodiferansiyelinin

$$\nabla : \Gamma(E) \to \Gamma(T^*M \otimes E)$$

konneksiyonunun aşağıda verilen şekilde bir eki olduğunu gösterir:

$V \in \Gamma(E)$, M üzerinde kompakt desteğe sahip olsun. Bu durumda

$$\int_M < \nabla V, \sigma > v_g = \int_M < V, d^*\sigma > v_g \tag{I.3.20}$$

dir. Bu formül bir başka kısmi integrasyon formülüdür[1].

II. BÖLÜM

BAZI KONFORM DÖNÜŞÜMLER VE KARAKTERİZASYONLARI

Konform dönüşümlerin özelliklerini açıkladığımız bu bölüm üç kısıma ayrılmıştır. İlk kısımda zayıf konform dönüşümler tanıtılmıştır. İkinci kısım yatay zayıf konform dönüşümlere ayrılmıştır. Üçüncü kısımda ise bir yatay konform submersiyonun liflerinin oluşturduğu konform foliasyonlar ele alınmıştır.

II.1. Zayıf Konform Dönüşümler

II.1.1.Tanım. (M, g), (N, h) Riemann manifoldları ve

$$\varphi : (M, g) \to (N, h)$$

bir C^∞ dönüşüm olsun. Bu durumda $x \in M$ ve $X, Y \in T_xM$ için

$$h(d\varphi_x(X), d\varphi_x(Y)) = \Lambda(x)g(X, Y) \qquad \text{(II.1.1)}$$

olacak şekilde bir $\Lambda(x)$ sayısı varsa φ dönüşümüne $x \in M$ noktasında bir **zayıf konform dönüşüm** denir. $\forall x \in M$ için (II.1.1) şartı sağlanıyorsa φ ye M üzerinde bir zayıf konform dönüşüm denir[1].

II.1.2.Tanım. M, N Riemann manifoldları ve

$$\varphi : (M, g) \to (N, h)$$

$x \in M$ noktasında bir zayıf konform dönüşüm olsun.

$$\Lambda(x) = \lambda(x)^2$$

olacak şekilde bir

$$\lambda : M \to [0, \infty)$$

fonksiyonu için $\lambda(x)$ sayısına φ nin **konform faktörü**, $\Lambda(x)$ sayısına da φ nin **kare konform faktörü** denir [1].

(II.1.1) de iz alınacak olursa

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{m} h(d\varphi_x(e_i), d\varphi_x(e_i)) &= \sum_{i=1}^{m} \Lambda(x) g(e_i, e_i) \\ |d\varphi_x|^2 &= \Lambda(x).m \\ \frac{1}{m}|d\varphi_x|^2 &= \Lambda(x) \qquad \text{(II.1.2)}\end{aligned}$$

bulunur. Bu da $\Lambda : M \to R$ fonksiyonunun C^∞ olduğunu gösterir.

Tanım I.1.33 den M ve N Riemann manifoldları olmak üzere

$$\varphi : (M, g) \to (N, h)$$

dönüşümünün türev dönüşümü ile türev dönüşümünün eki arasında

$$g(X, d\varphi_x^*(Y)) = h(d\varphi_x(X), Y) \quad (X \in T_xM,\ Y \in T_{\varphi(x)}M) \qquad \text{(II.1.3)}$$

ilişkisi olduğunu biliyoruz. Ayrıca $x \in M$ noktasında $\{X_i\}$ ve $\varphi(x) \in N$ noktasında da $\{Y_\alpha\}$ çatıları verildiğinde

$$g_{ij} = g(X_i, X_j),\ h_{\alpha\beta} = h(Y_\alpha, Y_\beta),\ d\varphi_x(X_i) = \varphi_i^\alpha Y_\alpha$$

yazılabilir.

II.1.1.Lemma (M, g) ve (N, h) Riemann manifoldları

$$\varphi : (M, g) \to (N, h)$$

bir C^∞ dönüşüm ve $x \in M$ olsun. Bu durumda aşağıdaki ifadeler denktir[1]:

(i) φ, $x \in M$ noktasında $\Lambda(x) = \lambda(x)^2$ olacak şekilde bir zayıf konform dönüşümdür. Burada $\lambda(x)$, φ nin konform faktörü; $\Lambda(x)$ ise kare konform faktördür.

(ii) x noktasındaki herhangi bir $\{X_i\}$ çatısı için

$$h(d\varphi_x(X_i), d\varphi_x(X_j)) = \Lambda(x) g_{ij} \quad (i, j = 1, ..., m) \qquad \text{(II.1.4)}$$

dir.

(iii) $\{X_i\}$ ve $\{Y_\alpha\}$ sırasıyla $x \in M$ ve $\varphi(x) \in N$ noktalarında birer çatı ise bu durumda

$$h_{\alpha\beta}\varphi_i^\alpha\varphi_j^\beta = \Lambda(x)g_{ij} \quad (i,j = 1,...,m) \tag{II.1.5}$$

dir.

(iv) h metriğinin pull-backi

$$(\varphi^* h)_x = \Lambda(x)g_x \tag{II.1.6}$$

şartını sağlar.

(v) $d\varphi_x$ türev dönüşümünün eki olan $d\varphi_x^*$ dönüşümü

$$d\varphi_x^* \circ d\varphi_x = \Lambda(x)I_{T_xM} \tag{II.1.7}$$

şartını sağlar. Burada I_{T_xM}, M nin x noktasındaki tanjant uzayında tanımlanan özdeşlik dönüşümüdür.

(vi) $x \in M$ noktasındaki herhangi bir $\{X_i\}$ ortonormal çatısı için $d\varphi_x(X_i)$ vektörleri birbirine diktir ve bu vektörlerin normu $\lambda(x)$ in normuna eşittir.

(vii) $d\varphi_x = 0$ dır veya $x \in M$ noktasındaki bir $\{X_i\}$ ortonormal çatısı için $\varphi(x) \in N$ noktasında bir $\{Y_\alpha\}$ ortonormal çatısı vardır öylcki

$$d\varphi_x(X_i) = \lambda(x)Y_i \quad (i = 1,...,m) \tag{II.1.8}$$

dir.

İspat.

$(i) \Rightarrow (ii)$: φ dönüşümü $x \in M$ noktasında $\Lambda(x) = \lambda(x)^2$ kare konform faktörüne sahip bir zayıf konform dönüşüm olsun. x noktasında $\{X_i\}$ çatısını alalım. Bu durumda $i,j = 1,...,m$ için

$$\begin{aligned} h(d\varphi_x(X_i), d\varphi_x(X_j)) &= \Lambda(x)g(X_i, X_j) \\ h(d\varphi_x(X_i), d\varphi_x(X_j)) &= \Lambda(x)g_{ij} \end{aligned}$$

bulunur.

$(ii) \Rightarrow (i)$: $x \in M$ noktasındaki herhangi bir $\{X_i\}$ çatısı için

$$h(d\varphi_x(X_i), d\varphi_x(X_j)) = \Lambda(x) g_{ij}$$

olsun. $i, j = 1, ..., m$ olmak üzere

$$Y = Y^i X_i \ ve \ Z = Z^j X_j$$

vektör alanları için

$$\begin{aligned} Y^i Z^j h(d\varphi_x(X_i), d\varphi_x(X_j)) &= Y^i Z^j \Lambda(x) g(X_i, X_j) \\ h(d\varphi_x(Y^i X_i), d\varphi_x(Z^j X_j)) &= \Lambda(x) g(Y^i X_i, Z^j X_j) \\ h(d\varphi_x(Y), d\varphi_x(Z)) &= \Lambda(x) g(Y, Z) \end{aligned}$$

dir. Öyleyse φ bir zayıf konform dönüşümdür.

$(ii) \Rightarrow (iii)$: x noktasındaki $\{X_i\}$ çatısı için

$$h(d\varphi_x(X_i), d\varphi_x(X_j)) = \Lambda(x) g_{ij}$$

olsun. Bu durumda $i, j = 1, ..., m$ olmak üzere

$$\begin{aligned} h(\varphi_i^\alpha Y_\alpha, \varphi_j^\beta Y_\beta) &= \Lambda(x) g_{ij} \\ h_{\alpha\beta} \varphi_i^\alpha \varphi_j^\beta &= \Lambda(x) g_{ij} \end{aligned}$$

elde edilir.

$(iii) \Rightarrow (ii)$:

$$h_{\alpha\beta} \varphi_i^\alpha \varphi_j^\beta = \Lambda(x) g_{ij}$$

olsun. Bu durumda

$$\begin{aligned} h(Y_\alpha, Y_\beta) \varphi_i^\alpha \varphi_j^\beta &= \Lambda(x) g_{ij} \\ h(Y_\alpha \varphi_i^\alpha, Y_\beta \varphi_j^\beta) &= \Lambda(x) g_{ij} \\ h(d\varphi_x(X_i), d\varphi_x(X_j)) &= \Lambda(x) g_{ij} \end{aligned}$$

olur.

$(iii) \Rightarrow (iv)$: Sırasıyla x ve $\varphi(x)$ noktalarındaki $\{X_i\}$ ve $\{Y_\alpha\}$ çatıları için

$$h_{\alpha\beta} \varphi_i^\alpha \varphi_j^\beta = \Lambda(x) g_{ij}$$

olsun. Öyleyse $i, j = 1, ..., m$ için

$$\begin{aligned} h(d\varphi_x(X_i), d\varphi_x(X_j)) &= \Lambda(x) g(X_i, X_j) \\ (\varphi^* h)_x(X_i, X_j) &= \Lambda(x) g(X_i, X_j) \\ (\varphi^* h)_x &= \Lambda(x) g_x \end{aligned}$$

bulunur.

$(iv) \Rightarrow (iii)$

$$(\varphi^* h)_x = \Lambda(x) g_x$$

olsun. $\forall Y, Z \in T_x M$ için

$$(\varphi^* h)_x(Y, Z) = \Lambda(x) g_x(Y, Z)$$

yazılabileceğinden

$$h(d\varphi_x(Y), d\varphi_x(Z)) = \Lambda(x) g(Y, Z)$$

dir. Özel olarak $Y = X_i$ ve $Z = X_j$ seçimiyle

$$h_{\alpha\beta} \varphi_i^\alpha \varphi_j^\beta = \Lambda(x) g_{ij}$$

elde edilir.

$(iv) \Rightarrow (v)$:

$$(\varphi^* h)_x = \Lambda(x) g_x$$

olsun. $\forall Y, Z \in T_x M$ için

$$\begin{aligned} (\varphi^* h)_x(Y, Z) &= \Lambda(x) g_x(Y, Z) \\ h(d\varphi_x(Y), d\varphi_x(Z)) &= \Lambda(x) g(Y, Z) \\ g(d\varphi_x^*(d\varphi_x(Y)), Z) &= \Lambda(x) g(Y, Z) \\ g(d\varphi_x^* \circ d\varphi_x(Y), Z) &= \Lambda(x) g(Y, Z) \end{aligned}$$

olduğundan

$$d\varphi_x^* \circ d\varphi_x = \Lambda(x) I_{T_x M}$$

olur.

$(v) \Rightarrow (iv)$:

$$d\varphi_x^* \circ d\varphi_x = \Lambda(x) I_{T_xM}$$

olsun. Öyleyse $\forall Y, Z \in T_xM$ için

$$\begin{aligned} g(d\varphi_x^* \circ d\varphi_x(Y), Z) &= \Lambda(x) g(Y, Z) \\ h(d\varphi_x(Y), d\varphi_x(Z)) &= \Lambda(x) g(Y, Z) \\ (\varphi^* h)_x(Y, Z) &= \Lambda(x) g_x(Y, Z) \end{aligned}$$

olacağından

$$(\varphi^* h)_x = \Lambda(x) g_x$$

dir.

$(v) \Rightarrow (vi)$:

$$d\varphi_x^* \circ d\varphi_x = \Lambda(x) I_{T_xM}$$

olsun. Buradan $x \in M$ noktasındaki bir $\{X_i\}$ ortonormal bazı için

$$h(d\varphi_x(X_i), d\varphi_x(X_j)) = \Lambda(x) g(X_i, X_j)$$

yazılabilir. Öyleyse $i \neq j$ için

$$h(d\varphi_x(X_i), d\varphi_x(X_j)) = 0$$

ve $i = j$ için

$$|d\varphi_x(X_i)| = |\lambda(x)|$$

elde edilir.

$(vi) \Rightarrow (v)$: $x \in M$ noktasındaki $\{X_i\}$ ortonormal çatısı için $d\varphi_x(X_i)$ vektörleri birbirine dik ve $|d\varphi_x(X_i)| = |\lambda(x)|$ olsun. Bu durumda

$$\begin{aligned} |d\varphi_x(X_i)|^2 &= |\lambda(x)|^2 \\ h(d\varphi_x(X_i), d\varphi_x(X_i)) &= \Lambda(x) g(X_i, X_i) \end{aligned}$$

olur. Öyleyse $\forall i, j = 1, ..., m$ için

$$\begin{aligned} h(d\varphi_x(X_i), d\varphi_x(X_j)) &= \Lambda(x) g(X_i, X_j) \\ g(d\varphi_x^* \circ d\varphi_x(X_i), X_j) &= \Lambda(x) g(X_i, X_j) \\ d\varphi_x^* \circ d\varphi_x &= \Lambda(x) I_{T_xM} \end{aligned}$$

dir.

$(vi) \Rightarrow (vii)$: $x \in M$ noktasındaki $\{X_i\}$ ortonormal çatısı için $d\varphi_x(X_i)$ vektörleri birbirine dik ve $|d\varphi_x(X_i)| = |\lambda(x)|$ olsun. Bu durumda $\lambda(x) = 0$ ise $d\varphi_x = 0$ olur. $\lambda(x) \neq 0$ ise

$$\begin{aligned} |d\varphi_x(X_i)|^2 &= |\lambda(x)|^2 \\ h(d\varphi_x(X_i), d\varphi_x(X_i)) &= |\lambda(x)|^2 \\ \varphi_i^\alpha \varphi_i^\alpha h(Y_\alpha, Y_\alpha) &= |\lambda(x)|^2 \\ \varphi_i^\alpha &= |\lambda(x)| \end{aligned}$$

bulunur. Buradan

$$d\varphi_x(X_i) = \varphi_i^\alpha Y_\alpha = \lambda(x) Y_\alpha$$

elde edilir. $d\varphi_x$ dönüşümü her $X_i \in T_xM$ vektörüne bir Y_α karşılık getireceğinden

$$d\varphi_x(X_i) = \lambda(x) Y_i \qquad i = 1, ..., m$$

olur.

$(vii) \Rightarrow (i)$: $d\varphi_x = 0$ olsun. Bu durumda $\Lambda(x) = 0$ olur. Böylece φ yi zayıf konform yapacak bir

$$\lambda : M \to [0, \infty)$$

fonksiyonu bulunmuş olur. Diğer taraftan $x \in M$ noktasındaki bir $\{X_i\}$ ortonormal bazı için

$$d\varphi_x(X_i) = \lambda(x) Y_i \qquad i = 1, ..., m$$

olacak şekilde $\{Y_\alpha\}$ bir ortonormal baz olsun. Öyleyse

$$\begin{aligned} h(d\varphi_x(X_i), d\varphi_x(X_i)) &= h(\lambda(x) Y_i, \lambda(x) Y_i) \\ \Lambda(x) g(X_i, X_i) &= \lambda(x)^2 h(Y_i, Y_i) \\ \Lambda(x) &= \lambda(x)^2 \end{aligned}$$

elde edilir. Buradan da φ nin $\Lambda(x) = \lambda(x)^2$ kare konform faktörüne sahip bir zayıf konform dönüşüm olduğu görülür.

$(i) \Rightarrow (vii)$:

$$h(d\varphi_x(Y), d\varphi_x(Z)) = \Lambda(x)g(Y,Z) \quad , \quad \forall Y, Z \in T_xM$$

olsun. $Y = X_i$ ve $Z = X_j$ seçimiyle

$$h(d\varphi_x(X_i), d\varphi_x(X_j)) = \Lambda(x)g(X_i, X_j)$$

olur. $i \neq j$ için $d\varphi_x = 0$ dır. $i = j$ için ise

$$\begin{aligned} h(d\varphi_x(X_i), d\varphi_x(X_i)) &= \Lambda(x)g(X_i, X_i) \\ (\varphi_i^\alpha)^2 &= \Lambda(x) \\ \varphi_i^\alpha &= \lambda(x) \end{aligned}$$

elde edilir. Buradan da

$$d\varphi_x(X_i) = \lambda(x)Y_i \quad , \quad i = 1, ..., m$$

olduğu görülür.

II.1.1.Önerme. M ve N Riemann manifoldları verilsin.

$$\varphi : M \to N$$

bir C^∞ dönüşüm ve $x \in M$ olsun. Bu durumda $x \in M$ noktasında φ nin bir zayıf konform dönüşüm olması için gerek ve yeter şart $d\varphi_x = 0$ veya

$$d\varphi_x : T_xM \to T_{\varphi(x)}N$$

dönüşümünün birebir konform olmasıdır[1].

II.1.3.Tanım. M, N Riemann manifoldları ve

$$\varphi : M \to N$$

bir zayıf konform dönüşüm olsun. $d\varphi_x = 0$ şartını sağlayan $x \in M$ noktasına φ nin bir **branch noktası** denir[1].

φ nin branch noktalarında $\Lambda(x) = \lambda(x) = 0$ ve $d\varphi_x$ türev dönüşümünün rankı 0 dır[1].

II.1.4.Tanım. M, N Riemann manifoldları ve

$$\varphi : M \to N$$

bir zayıf konform dönüşüm olsun. φ nin türev dönüşümünün birebir ve konform olduğu $x \in M$ noktasına φ nin bir **regüler noktası** denir[1].

φ nin regüler noktalarında $\Lambda(x) \neq 0$, $\lambda(x) \neq 0$ ve

$$rank\, d\varphi_x = boy\, M$$

dir. Böylece regüler noktalarda φ nin bir immersiyon olduğu açıkça görülür[1].

II.1.5.Tanım. M , N Riemann manifoldları ve

$$\varphi : M \to N$$

bir zayıf konform dönüşüm olsun. φ nin hiç branch noktası yoksa φ tanım manifoldunun(bölgesinin) tamamında bir immersiyon olur. Bu durumda φ ye **konform immersiyon** adı verilir[1].

II.1.2.Önerme. M ve N Riemann manifoldları ve

$$\varphi : M \to N$$

bir zayıf konform dönüşüm olsun. Eğer $boy\, M < boy\, N$ ise φ sabittir[1].

m-boyutlu Öklidyen Uzaylardan tanımlanan dönüşümler için $(x^1, ..., x^m)$ lokal koordinat sistemi ve $X_i = \frac{\partial}{\partial x^i}$ gösterimi göz önüne alınırsa aşağıdaki basit karakterizasyona ulaşılabilir:

II.1.1.Örnek. (Öklidyen Uzaydan tanımlanan dönüşümler)

$$\varphi : U \subset R^m \to N$$

olsun. φ nin

$$\lambda : U \to [0, \infty)$$

konform faktörüne sahip bir zayıf konform dönüşüm olması için gerek ve yeter şart $\forall x \in U$ noktasında $\frac{\partial \varphi}{\partial x^i} \in T_{\varphi(x)}N$ kısmi türevlerinin birbirine dik ve

$$|\frac{\partial \varphi}{\partial x^i}| = |\lambda(x)|$$

olmasıdır. Başka bir ifadeyle φ nin bir zayıf konform dönüşüm olması için gerek ve yeter şart

$$h(\frac{\partial\varphi}{\partial x^i},\frac{\partial\varphi}{\partial x^j})=\Lambda\delta_i^j \qquad (i,j=1,...,m)$$

eşitliğinin sağlanmasıdır.

Gerçekten

$$\varphi : U\subset R^m \to N$$

bir zayıf konform dönüşüm ise $x\in U$ noktasında

$$\begin{aligned} h(d\varphi_x(\frac{\partial}{\partial x^i}),d\varphi_x(\frac{\partial}{\partial x^j})) &= \Lambda(x)g(\frac{\partial}{\partial x^i},\frac{\partial}{\partial x^j}) \\ h(\frac{\partial\varphi}{\partial x^i},\frac{\partial\varphi}{\partial x^j}) &= \Lambda(x)\delta_i^j \end{aligned}$$

dir. $i\neq j$ için

$$h(\frac{\partial\varphi}{\partial x^i},\frac{\partial\varphi}{\partial x^j})=0$$

yani $\frac{\partial\varphi}{\partial x^i}$ ler birbirine diktir. $i=j$ için ise

$$|\frac{\partial\varphi}{\partial x^i}|=|\lambda(x)|$$

elde edilir.

II.1.3.Önerme. (M,g), (N,h) ve $(P,\tilde{g})$ Riemann manifoldları olsun.

$$\varphi : M\to N \quad ve \quad \psi : N\to P$$

konform faktörleri sırasıyla λ ve μ olan iki zayıf konform dönüşüm ise

$$\psi\circ\varphi : M\to P$$

bileşke dönüşümü

$$x\to\lambda(x)\mu(\varphi(x))$$

konform faktörüne sahip bir zayıf konform dönüşümdür[1].

İspat.

$$d(\psi\circ\varphi)=d\psi\circ d\varphi$$

olduğundan $x \in M$, $y \in N$ ve $\forall X, Y \in T_xM$ için

$$\begin{aligned} \tilde{g}(d\psi(d\varphi(X)), d\psi(d\varphi(Y))) &= \mu(y)^2 h(d\varphi(X), d\varphi(Y)) \\ &= \mu(y)^2 \lambda(x)^2 g(X, Y) \\ &= \lambda(x)^2 [\mu(\varphi(x))]^2 g(X, Y) \end{aligned}$$

elde edilir. Buradan

$$\psi \circ \varphi : M \to P$$

bileşke dönüşümünün

$$x \to \lambda(x)\mu(\varphi(x))$$

konform faktörüne sahip bir zayıf konform dönüşüm olduğu görülür.

II.1.2.Örnek. (M, g) ve (M, h) Riemann manifoldları olsun. Bu durumda

$$I : (M, g) \to (M, h)$$

özdeşlik dönüşümünün konform olması için gerek ve yeter şart g ve h metriklerinin konform olarak denk olmasıdır.

Gerçekten özdeşlik dönüşümü zayıf konform ise $\forall X, Y \in T_xM$ için

$$\begin{aligned} h(dI(X), dI(Y)) &= \lambda(x)^2 g(X, Y) \\ h(X, Y) &= \lambda(x)^2 g(X, Y) \\ h &= \lambda^2 g \end{aligned}$$

dir. Bu da g ile h metriklerinin konform olarak denk olduğunu gösterir.

II.1.3.Örnek. 1-boyutlu Riemann manifoldundan keyfi Riemann manifolduna tanımlanan bir C^∞ dönüşüm doğal olarak zayıf konform dönüşüm olur.

II.1.6.Tanım. M ve N Riemann manifoldları olmak üzere konform faktörü 1 olan zayıf konform

$$\varphi : M \to N$$

dönüşümüne bir **Riemannian dönüşüm** ya da **izometrik immersiyon** denir. Yani

$$\varphi : M \to N$$

bir immersiyondur öyleki $\forall x \in M$ noktasında $d\varphi_x$ türev dönüşümü T_xM den $T_{\varphi(x)}N$ üzerine bir izometridir [1].

M bir C^∞ manifold ve (N, h) bir Riemann manifoldu olsun.

$$\varphi : M \to N$$

immersiyonunu gözönüne alalım. Bu durumda φ yi izometrik immersiyon yapan M üzerine indirgenmiş olan g metriği bir tektir. Bu g metriği h metriğinin pull-backi olan φ^*h ile tanımlanır. Bu şekildeki izometrik immersiyonların en basit örneği inclusion dönüşümüdür[1].

II.1.7.Tanım. M ve N Riemann manifoldları olmak üzere konform faktörü sıfırdan farklı bir sabit olan bir zayıf konform

$$\varphi : M \to N$$

dönüşümüne **homotetik immersiyon** denir. Bir diffeomorfizm olan homotetik immersiyona ise **homoteti** adı verilir[1].

R^m Öklidyen Uzayının iki önemli konform dönüşüm tipi vardır[1]:

(i) Homotetiler : R^m Öklidyen Uzayındaki izometri tanımından hareketle R^m deki homotetiler $x \in R^m$ olmak üzere

$$\varphi(x) = \lambda Ax + b$$

biçiminde tanımlanır. Burada A bir ortogonal matris, λ bir pozitif sayı ve $b \in R^m$ dir.

(ii) İnversiyonlar : Birim küredeki inversiyonlar

$$\begin{aligned} \varphi : R^m \setminus \{0\} &\to R^m \setminus \{0\} \\ x &\to \varphi(x) = \frac{x}{|x|^2} \end{aligned} \qquad \text{(II.1.9)}$$

biçiminde tanımlanan dönüşümlerdir.

II.1.8.Tanım. Homotetiler ve inversiyonlar tarafından gerilen gruba **Möbius Grup** denir[1].

II.1.4.Önerme. (Konform dönüşümler için Liouville Teoremi)

S^m birim küre olmak üzere $m \geq 3$ için

$$\varphi : U \subset R^m (\text{veya}\, S^m) \to R^m (\text{veya}\, S^m)$$

bir zayıf konform dönüşüm olsun. Bu durumda φ, Möbius grubun kısıtlanmış bir elemanıdır. Yani φ homoteti ve inversiyonların bileşkesidir[1].

İspat. $U \subset S^m$ ve önermedeki ifade lokal olarak verildiğinden $U \neq S^m$ olarak düşünülebilir. Stereografik izdüşüm ile U nun tümleyenindeki bir nokta R^m Öklidyen Uzayının bir bölgesine konform olarak denk yapılabilir. Dolayısıyla U, R^m nin standart metriğine göre bu uzayın bir açık altkümesi olarak alınabilir.

λ sabit ise φ bir homotetidir. $\lambda \neq 0$ ve $Y_i = d\varphi(\frac{\partial}{\partial x_i})$ $(i = 1, ..., m)$ olsun. (I.1.3) den

$$[Y_i, Y_j] = 0 \qquad (i, j = 1, ..., m)$$

dır ve R^m deki eğrilik tensörü sıfır olduğundan

$$< \nabla_{Y_k} \nabla_{Y_j} Y_i - \nabla_{Y_j} \nabla_{Y_k} Y_i, Y_l >= 0 \quad i, j, k, l = 1, ..., m \qquad \text{(II.1.10)}$$

olur. φ konform olduğundan

$$\begin{aligned} < d\varphi(\frac{\partial}{\partial x_i}), d\varphi(\frac{\partial}{\partial x_j}) > &= \lambda^2 < \frac{\partial}{\partial x_i}, \frac{\partial}{\partial x_j} > \\ < Y_i, Y_j > &= \lambda^2 \delta_i^j \end{aligned}$$

dir. (I.1.10) dan

$$\begin{aligned} 2 < \nabla_{Y_i} Y_j, Y_l > \quad &= Y_i(< Y_j, Y_l >) + Y_j(< Y_l, Y_i >) - Y_l(< Y_i, Y_j >) \\ &- < Y_i, [Y_j, Y_l] > + < Y_j, [Y_l, Y_i] > - < Y_l, [Y_i, Y_j] > \\ &= Y_i(\lambda^2 \delta_j^l) + Y_j(\lambda^2 \delta_i^l) - Y_l(\lambda^2 \delta_i^j) \\ &= 2(\lambda \frac{\partial \lambda}{\partial x_i} \delta_j^l + \lambda \frac{\partial \lambda}{\partial x_j} \delta_i^l - \lambda \frac{\partial \lambda}{\partial x_l} \delta_i^j) \end{aligned}$$

olacağından $i, j, l = 1, ..., m$ için

$$< \nabla_{Y_i} Y_j, Y_l >= \lambda \{ \frac{\partial \lambda}{\partial x_i} \delta_j^l + \frac{\partial \lambda}{\partial x_j} \delta_i^l - \frac{\partial \lambda}{\partial x_l} \delta_i^j \}$$

bulunur.

$$\lambda_i = \frac{\partial \lambda}{\partial x_i} \quad ve \quad \lambda_{ij} = \frac{\partial^2 \lambda}{\partial x_i \partial x_j}$$

yazılırsa II.1.10 eşitliği

$$\begin{aligned} \lambda(\lambda_{ik}\delta_j^l & -\lambda_{kl}\delta_i^j - \lambda_{ij}\delta_k^l + \lambda_{jl}\delta_i^\kappa) - 2\lambda_i\lambda_k\delta_j^l + 2\lambda_k\lambda_l\delta_i^j \\ & +2\lambda_i\lambda_j\delta_k^l - 2\lambda_j\lambda_l\delta_i^k + (\delta_i^k\delta_j^l - \delta_i^j\delta_k^l)|grad\,\lambda|^2 = 0 \text{ (II.1.11)} \end{aligned}$$

şeklinde yazılabilir.

$u = \frac{1}{\lambda}$, $i = j$ ve i, k, l farklı seçilirse (II.1.11) eşitliği

$$-\lambda\lambda_{kl} + 2\lambda_k\lambda_l = 0$$

olur. Bu durumda

$$\frac{\partial u}{\partial x_l} = -\frac{\lambda_l}{\lambda^2}$$

ve

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 u}{\partial x_k \partial x_l} & = \frac{-\lambda_{kl}\lambda^2 + 2\lambda\lambda_k\lambda_l}{\lambda^4} \\ & = 0 \quad , \quad (k \neq l) \end{aligned}$$

bulunur.

Şimdi $i = j$, $k = l$ ve i ile k farklı olsun. Bu halde (II.1.10)

$$-\lambda\lambda_{kk} - \lambda\lambda_{ii} + 2\lambda_k\lambda_k + 2\lambda_i\lambda_i - |grad\,\lambda|^2 = 0$$

olur ve buradan da

$$u(\frac{\partial^2 u}{\partial x_k^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2}) - |grad\,u|^2 = 0$$

elde edilir.

$i, k = 1, ..., m$ için

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x_k^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2}$$

olduğundan $\rho = \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2}$ alınırsa

$$|grad\, u|^2 = 2\rho u$$

elde edilir. Böylece

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x_k \partial x_l} = 0 \ (k \neq l) \ , \ \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2} = \rho \ , \ |grad\, u|^2 = 2\rho u \qquad \text{(II.1.12)}$$

denklem sistemi elde edilmiş olur.

Eğer $\rho \equiv 0$ ise

$$\begin{aligned} |grad\, u|^2 &= 0 \\ < \frac{\partial u}{\partial x_i}, \frac{\partial u}{\partial x_i} > &= 0 \end{aligned}$$

elde edilir. Bu durumda λ sabit ve dolayısıyla φ bir homotetidir.

Aksi halde, yani $\rho \neq 0$ ise (II.1.12) denklem sistemi, $a = (a_1, ..., a_m)$ bir sabit vektör olmak üzere,

$$u = \frac{\rho}{2} \sum_{i=1}^{m} (x_i - a_i)^2 \qquad \text{(II.1.13)}$$

genel çözümüne sahiptir. Bu durumda u, (II.1.13) ile verildiğinde $\lambda = \frac{1}{u}$ konform faktörüne sahip bir konform dönüşüm bir homoteti farkıyla değişen inversiyondur. Uygun bir homotetik değişimle $u = |x|^2$ alınabilir. Böylece $\lambda = \frac{1}{|x|^2}$ olur. Bu λ konform faktörü birim küredeki ψ inversiyonuna aittir. Böylece φ nin bir homoteti ile bir inversiyonun bileşkesi olduğu görülür.

Eğer φ dönüşümü global olarak R^m de tanımlı ise inversiyonlar sözkonusu olmayacağından aşağıdaki sonuca ulaşılır:

II.1.1.Sonuç.

$$\varphi : R^m \to R^m \quad , \quad m \geq 3$$

bir zayıf konform dönüşüm olsun. Bu durumda φ bir homotetidir[1].

Bu sonuç gözönüne alınarak "$m \geq 3$ olmak üzere eşit boyutlu manifoldları arasındaki zayıf konform dönüşümlerin hiç branch noktası yoktur" denilebilir[1].

II.2. Yatay Zayıf Konform Dönüşümler

Bu kısımda zayıf konform dönüşümlerin duali olarak kabul edilen yatay zayıf konform dönüşümler tanıtılacaktır.

II.2.1.Tanım. M ve N Riemann manifoldları ve

$$\varphi : (M,g) \to (N,h)$$

bir C^∞ dönüşüm olsun. $x \in M$ için

$$\mathcal{V}_x = \mathcal{V}_x(\varphi) = çek\, d\varphi_x = \{X \in T_xM | d\varphi_x(X) = 0\} \subset T_xM$$

ve

$$\mathcal{H}_x = \mathcal{H}_x(\varphi) = \mathcal{V}_x^\perp \subset T_xM$$

olarak tanımlayalım. $\mathcal{V}_x$ uzayına φ nin x noktasındaki **dikey uzayı** denir. M deki g metriğine göre $\mathcal{V}_x$ dikey uzayının dik tümleyeni olan $\mathcal{H}_x$ uzayına ise φ nin x noktasındaki **yatay uzayı** denir[11].

II.2.2.Tanım. (M^m, g) ve (N^n, h) Riemann manifoldları olsun. Bu durumda

$$\varphi : (M^m, g) \to (N^n, h)$$

C^∞ dönüşümü için

$$rank\, d\varphi_x < min\,\{m, n\}$$

şartını sağlayan $x \in M^m$ noktasına φ nin bir **kritik noktası** denir ve φ nin kritik noktalar kümesi(kritik küme) C_φ ile gösterilir. Kritik noktanın φ altındaki görüntüsüne ise **kritik değer** denir[1].

II.2.3.Tanım. (M, g) ve (N, h) Riemann manifoldları ve

$$\varphi : M \to N$$

bir C^∞ dönüşüm olsun. $x \in M$ noktasına T_xM nin sırasıyla $\mathcal{V}_x$ ve $\mathcal{H}_x$ alt uzaylarını karşılık getiren

$$x \to \mathcal{V}_x \quad \text{ve} \quad x \to \mathcal{H}_x$$

dönüşümleri $M \backslash C_\varphi$ üzerinde sırasıyla $\mathcal{V} = \mathcal{V}(\varphi)$ ve $\mathcal{H} = \mathcal{H}(\varphi)$ ile gösterilen C^∞ distribüsyonları tanımlar. $\mathcal{V} = \mathcal{V}(\varphi)$ ye φ nin **dikey distribüsyonu** veya **dikey alt demeti**, $\mathcal{H} = \mathcal{H}(\varphi)$ ye ise φ nin **yatay distribüsyonu** veya **yatay alt demeti** denir[11].

$\mathcal{V}$ ayrıca yatay tanjant demeti olarak da adlandırılır. $x \in M \backslash C_\varphi$ için $\mathcal{V}$, x noktası boyunca φ nin lifinin tanjant uzayını verir[1].

II.2.4.Tanım. M üzerindeki bir X vektör alanı dikey(yatay) distribüsyona ait ise **dikey(yatay) vektör alanı** olarak adlandırılır [11].

II.2.5.Tanım. Bir X metrik uzayının bir A altkümesi verildiğinde $\overline{A} = X$ oluyorsa A, X de **yoğundur** denir[14].

II.2.6.Tanım. n-boyutlu Öklidyen Uzay R^n de bir **küp**

$$C = [a^1, b^1] \times ... \times [a^n, b^n] \subset R^n$$

ile tanımlanır öyleki her i için $(b^i - a^i)$ kenar uzunlukları birbirine eşittir. Bu şekilde tanımlanan bir **kübün hacmi**

$$v(C) = (b^1 - a^1)...(b^n - a^n)$$

ile verilir[12].

II.2.7.Tanım. n-boyutlu Öklidyen Uzay R^n de bir altküme A olsun. Her $\varepsilon > 0$ için A altkümesinin

$$\sum_{i=1}^{s} v(C_i) < \varepsilon$$

olacak şekilde küplerden oluşan bir $\{C_1, C_2, ..., C_s\}$ sonlu örtüsü mevcut ise A kü mesine **Jordan anlamında sıfır kapsamlı küme** denir ve $c(A) = 0$ ile gösterilir[3].

II.2.8.Tanım. $\varepsilon > 0$ için $A \subset R^n$ altkümesinin

$$\sum_{i=1}^{\infty} v(C_i) < \varepsilon$$

olacak şekilde sayılabilir çoklukta küplerden oluşan bir $\{C_1, C_2, ..., C_n, ...\}$ örtüsü mevcut ise A ya **Lebesque anlamında sıfır ölçümlü küme** denir ve

$m(A) = 0$ ile gösterilir[3].

II.2.9.Tanım. M, n-boyutlu bir manifold ve $A \subset M$ olsun. A kümesi $i = 1, 2, ..., s$ olmak üzere $\{U_i, \varphi_i\}$ koordinat komşuluğu içinde yer alan ve

$$\varphi_i(A_i) = 0$$

şartını sağlayan sonlu sayıdaki A_i altkümelerinin birleşimi tarafından örtülebiliyorsa A ya **sıfır kapsamlı küme** denir ve $c(A) = 0$ ile gösterilir[6].

II.2.10.Tanım. $M \subset B$ alt kümesi

$$c(B_i) = 0$$

olacak şekilde sayılabilir çokluktaki B_i altkümelerinin birleşimi ise B ye **sıfır ölçümlü küme** denir ve $m(B) = 0$ ile gösterilir[6].

II.2.1.Teorem. (Sard Teoremi)

M ve N Riemann manifoldları olsun. Bu durumda

$$\varphi : M \to N$$

C^1-dönüşümünün kritik noktalar kümesinin N deki görüntüsü yani kritik değerler kümesi sıfır ölçümlüdür[8].

Bu teoremden hareketle kritik değerler kümesinin tümleyeni olan regüler değerler kümesinin yoğun olduğu söylenebilir [1].

Çoğu kitapta M^m ve N^n Riemann manifoldları olmak üzere bir

$$\varphi : M^m \to N^n$$

dönüşümünün kritik noktası $rank\, d\varphi_x < n$ şartını sağlayan nokta olarak kabul edilir. Ancak biz burada kritik nokta olarak $rank\, d\varphi_x < min\{m, n\}$ şartını sağlayan noktayı alacağız. $m \geq n$ olduğunda bu iki tanım denktir.

Bu kısımda bir C^∞ dönüşümünün singüler noktası bu dönüşümün tanımsız olduğu nokta olarak kabul edilecektir.

II.2.11.Tanım. M ve N Riemann manifoldları

$$\varphi : M \to N$$

bir C^∞ dönüşüm ve $x \in M$ olsun. Bu durumda aşağıdaki iki şarttan herhangi biri sağlanıyorsa φ ye $x \in M$ noktasında **yatay zayıf konform dönüşüm** veya **yarı konform dönüşüm** denir[1]:

(i) $d\varphi_x = 0$

veya

(ii) $d\varphi_x$ türev dönüşümü $\mathcal{H}_x$ yatay uzayını $T_{\varphi(x)}N$ üzerine konform olarak resmeder. Yani $d\varphi_x$ örtendir ve $\forall X, Y \in \mathcal{H}_x$ için

$$h(d\varphi_x(X), d\varphi_x(Y)) = \Lambda(x) g(X, Y) \qquad \text{(II.2.1)}$$

olacak şekilde bir $\Lambda(x) \neq 0$ sayısı vardır.

(II.2.1) eşitliği

$$(\varphi^* h)_x|_{\mathcal{H}_x \times \mathcal{H}_x} = \Lambda(x) g_x|_{\mathcal{H}_x \times \mathcal{H}_x}$$

şeklinde de yazılabilir.

II.2.1.Önerme. (M, g) ve (N, h) Riemann manifoldları

$$\varphi : (M, g) \to (N, h)$$

bir C^∞ dönüşüm ve $x \in M$ olsun. Bu durumda x noktasının φ nin bir kritik noktası olması için gerek ve yeter şart $d\varphi_x = 0$ olmasıdır [1].

II.2.12.Tanım. (M, g) ve (N, h) Riemann manifoldları ve

$$\varphi : (M, g) \to (N, h)$$

bir C^∞ dönüşüm olsun. Eğer $x \in M$ noktasında

$$h(d\varphi_x(X), d\varphi_x(Y)) = \Lambda(x) g(X, Y) \quad ; \quad X, Y \in \mathcal{H}_x$$

şartı sağlanıyorsa x e φ nin bir **regüler noktası** denir[1].

II.2.13.Tanım. M^m ve N^n Riemann manifoldları olmak üzere

$$\varphi : M^m \to N^n$$

diferansiyellenebilir dönüşümü için

$$rank\, d\varphi_x = boy\, N$$

oluyorsa φ ye $x \in M^m$ noktasında bir **submersiyon** denir. $\forall x \in M$ için φ bir submersiyon ise φ ye M üzerinde bir submersiyon adı verilir[5].

Kritik noktalarda

$$rank\, d\varphi_x = 0$$

dır. Regüler noktalarda ise

$$rank\, d\varphi_x = n$$

dir ve φ bir submersiyondur[13].

II.2.14.Tanım. M ve N Riemann manifoldları

$$\varphi : (M, g) \to (N, h)$$

bir C^∞ dönüşüm ve $x \in M$ olsun. $X, Y \in \mathcal{H}_x$ için

$$h(d\varphi_x(X), d\varphi_x(Y)) = \Lambda(x) g(X, Y)$$

ifadesindeki $\Lambda(x)$ sayısına φ nin x noktasındaki **kare dilationı** denir[1].

Tanım I.1.14 den

$$\varphi : (M^m, g) \to (N^n, h)$$

C^∞ dönüşümü yatay zayıf konform ise $x \in M^m \setminus C_\varphi$ ve $X, Y \in \mathcal{H}_x$ için

$$\Lambda(x) = \lambda(x)^2$$

ve

$$h(d\varphi_x(X), d\varphi_x(Y)) = \lambda(x)^2 g(X, Y)$$

olacak şekilde bir

$$\lambda : M^m \setminus C_\varphi \to R^+$$

fonksiyonunun var olduğu söylenebilir. $x \in M^m \setminus C_\varphi$ ve T_xM nin bir $\{e_i\}$ ortonormal bazı için $i = 1, ..., m$ olmak üzere

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{n} h(d\varphi_x(e_i), d\varphi_x(e_i)) &= \sum_{i=1}^{n} \lambda(x)^2 g(e_i, e_i) \\
|d\varphi_x|^2 &= \lambda(x)^2 n \\
\lambda(x)^2 &= \frac{1}{n}|d\varphi_x|^2 \qquad \text{(II.2.2)}
\end{aligned}$$

dir. Bu durumda λ, (II.2.2) eşitliğini sağlayacak şekilde sürekli bir dönüşüm olarak M nin tamamına genişletilebilir. Bu ise λ nın kritik noktalarda sıfır değerini almasıyla mümkündür. (II.2.2), $\Lambda(x)$ kare dilationunu kritik noktalarda bile C^∞ olduğunu gösterir. Ancak λ, kritik noktalarda C^∞ olmayabilir[11].

λ nın M^m nin tamamına genişletilmesi durumunda da

$$\lambda : M^m \to [0, \infty)$$

fonksiyonu $\forall x \in M^m$ için (II.2.2) yi sağlar. Bu şekilde tanımlanan $\lambda(x)$ sayısına φ nin x noktasındaki **dilationı** denir. Kritik noktalarda $\Lambda(x) = \lambda(x) = 0$ dır. Regüler noktalarda ise $\Lambda(x) \neq 0$ ve $\Lambda(x) \neq 0$ dır.

II.2.15.Tanım. (M, g) ve (N, h) Riemann manifoldları olsun. Eğer

$$\varphi : (M, g) \to (N, h)$$

dönüşümü M nin her noktasında yatay zayıf konform ise φ ye M üzerinde yatay zayıf konformdur denir. φ dönüşümünün ek olarak hiçbir kritik noktası yoksa φ ye **(yatay) konform submersiyon** denir[1].

II.2.2.Önerme. (M^m, g) ve (N^n, h) Riemann manifoldları ve

$$\varphi : (M^m, g) \to (N^n, h)$$

bir yatay zayıf konform dönüşüm olsun. Eğer $m < n$ ise φ sabittir[1].

(M^m, g) ve (N^n, h) Riemann manifoldlarını ,

$$\varphi : (M^m, g) \to (N^n, h)$$

C^∞ dönüşümünü ve $x \in M^m$ noktasını alalım. $\{X_i\}$ ve $\{Y_\alpha\}$ sırasıyla T_xM ve $T_{\varphi(x)}N$ için birer baz olmak üzere

$$g_{ij} = g(X_i, X_j) \ , \ h_{\alpha\beta} = h(Y_\alpha, Y_\beta)$$

ve

$$d\varphi(X_i) = \varphi_i^\alpha Y_\alpha$$

olsun.

II.2.1.Lemma. (M^m, g) ve (N^n, h) Riemann manifoldları ,

$$\varphi : (M^m, g) \to (N^n, h)$$

bir C^∞ dönüşüm ve $x \in M^m$ olsun. Bu durumda aşağıdaki ifadeler birbirine denktir[1]:

(i) φ, x noktasında dilationı $\lambda(x)$ ve kare dilationı $\Lambda(x)$ olan bir yatay zayıf konform dönüşümdür.

(ii) $T_{\varphi(x)}N$ nin bir $\{Y_\alpha\}$ $(\alpha = 1, ..., n)$ ortonormal bazı için

$$g(d\varphi_x^*(Y_\alpha), d\varphi_x^*(Y_\beta)) = \Lambda(x) h^{\alpha\beta} \quad (\alpha, \beta = 1, ..., n) \qquad \text{(II.2.3)}$$

dır.

(iii) $\{X_i\}$ ve $\{Y_\alpha\}$ sırasıyla T_xM ve $T_{\varphi(x)}N$ için birer baz olsun. Bu durumda

$$g^{ij}\varphi_i^\alpha \varphi_j^\beta = \Lambda(x) h^{\alpha\beta} \qquad \text{(II.2.4)}$$

dır.

(iv) T_x^*M üzerindeki g_x^* kometriği ile $T_{\varphi(x)}^*N$ üzerindeki $h_{\varphi(x)}^*$ kometriği arasında

$$\varphi_*(g_x^*) = \Lambda(x) h_{\varphi(x)}^* \qquad \text{(II.2.5)}$$

ilişkisi vardır. Burada

$$g_x^* \in T_xM \otimes T_xM \ \ ve \ \ h_{\varphi(x)}^* \in T_{\varphi(x)}N \otimes T_{\varphi(x)}N$$

dir. Ayrıca

$$\begin{array}{rcl}\varphi_* : T_xM \otimes T_xM & \rightarrow & T_{\varphi(x)}N \otimes T_{\varphi(x)}N \\ g_x^* & \rightarrow & \varphi_*(g_x^*)(\omega, \theta)\end{array}$$

dönüşümü $\omega, \theta \in T^*_{\varphi(x)}N$ için

$$\varphi_*(g_x^*)(\omega, \theta) = g(d\varphi_x^*(\omega^\sharp), d\varphi_x^*(\theta^\sharp))$$

biçiminde tanımlanır.

(v) $d\varphi_x$ türev dönüşümünün eki $d\varphi_x^*$ olmak üzere

$$d\varphi_x \circ d\varphi_x^* = \Lambda(x) I_{T_{\varphi(x)}N} \qquad \text{(II.2.6)}$$

dir. Burada $I_{T_{\varphi(x)}N}$, $T_{\varphi(x)}N$ deki birim dönüşümdür.

(vi) $\varphi(x)$ noktasındaki bir $\{Y_\alpha\}$ ortonormal bazı için $d\varphi_x^*(Y_\alpha)$ vektörleri ortogonaldir ve $\alpha = 1, ..., n$ için

$$|d\varphi_x^*(Y_\alpha)| = |\lambda(x)| \qquad \text{(II.2.7)}$$

dir.

(vii) $d\varphi_x = 0$ dır veya $\varphi(x)$ noktasındaki bir $\{Y_\alpha\}$ $(\alpha = 1, ..., n)$ ortonormal bazı için

$$d\varphi_x = \left\{ \begin{array}{ccc} \lambda(x)Y_i & ; & (i = 1, ..., n) \\ 0 & ; & (i > n) \end{array} \right. \qquad \text{(II.2.8)}$$

olacak şekilde $x \in M$ noktasında bir $\{X_i\}$ $(i = 1, ..., m)$ ortonormal bazı vardır.

(viii) $d\varphi_x = 0$ dır veya h ın pullbacki φ^*h

$$\varphi^*h|_{\mathcal{H}_x \times \mathcal{H}_x} = \Lambda(x) g|_{\mathcal{H}_x \times \mathcal{H}_x} \qquad \text{(II.2.9)}$$

şartını sağlar.

(ix) $\varphi(x)$ noktasının komşuluğunda bir $(y^1, ..., y^n)$ lokal koordinat sistemi için

$$g(grad\, \varphi^\alpha, grad\, \varphi^\beta) = \Lambda h^{\alpha\beta} \quad (\alpha, \beta = 1, ..., n) \tag{II.2.10}$$

dir.

II.2.3.Önerme. (M^m, g), (N^n, h) Riemann manifoldları ve $x \in M^m$ olsun. Bu durumda

$$\varphi : (M^m, g) \to (N^n, h)$$

C^∞ dönüşümünün yatay zayıf konform dönüşüm olması için gerek ve yeter şart $\forall X, Y \in T_{\varphi(x)}N$ için

$$g(d\varphi^*(X), d\varphi^*(Y)) = \Lambda(x) h(X, Y) \tag{II.2.11}$$

olmasıdır[1].

$N = R^n$ aldığımızda (II.2.10) eşitliğinden aşağıdaki basit karakterizasyona ulaşılabilir:

II.2.1.Örnek. (M^m, g) bir Riemann manifoldu; R^n, n-boyutlu Öklidyen Uzay ve $x \in M^m$ olsun.

$$\varphi : (M^m, g) \to R^n$$

C^∞ dönüşümünü gözönüne alalım. $(y^1, ..., y^n)$, $\varphi(x)$ noktasının komşuluğunda bir lokal koordinat sistemi olsun. Bu durumda Lemma II.2.1 deki (ix) den φ nin $\Lambda : M \to R$ dilationına sahip bir yatay zayıf konform dönüşüm olması için gerek ve yeter şart

$$g(grad\, \varphi^\alpha, grad\, \varphi^\beta) = \Lambda h^{\alpha\beta} \quad (\alpha, \beta = 1, ..., n)$$

olmasıdır. R^n Öklidyen Uzay olduğundan

$$h^{\alpha\beta} = \delta_\alpha^\beta$$

dır. Böylece $\alpha = \beta$ için

$$|grad\, \varphi^\alpha|^2 = |\Lambda(x)|$$

dir. $\alpha \neq \beta$ için ise

$$grad\, \varphi^\alpha \perp grad\, \varphi^\beta$$

dır. Öyleyse φ nin $\Lambda : M \to R$ dilationına sahip bir yatay zayıf konform dönüşüm olması için gerek ve yeter şart $\varphi^\alpha : M \to R$ bileşenlerinin gradiyentlerinin ortogonal ve

$$|grad\, \varphi^\alpha|^2 = |\Lambda(x)|$$

yani

$$g(grad\, \varphi^\alpha, grad\, \varphi^\beta) = \Lambda \delta_\alpha^\beta \quad (\alpha, \beta = 1, ..., n)$$

olmasıdır.

II.2.4.Önerme. (M, g), (N, h) ve $(P, \tilde{g})$ Riemann manifoldları olsun. Eğer

$$\varphi : M \to N$$

dilationı λ,

$$\psi : N \to P$$

dilationı μ olan iki yatay zayıf konform dönüşüm ise

$$\psi \circ \varphi : M \to P$$

bileşke dönüşümü

$$x \to \lambda(x)\mu(\varphi(x))$$

dilationına sahip bir yatay zayıf konform dönüşümdür[1].

II.2.2.Örnek. (Eşit boyutlu Riemann manifoldları arasındaki dönüşümler)

(M, g) ve (N, h) Riemann manifoldları olsun. Bu durumda

$$\varphi : M \to N$$

C^∞ dönüşümünde $boy\, M = boy\, N$ ise zayıf konformluk ile yatay zayıf konformluk birbirine denk olur.

II.2.3.Örnek. (1-boyutlu manifoldlar için tanımlanan dönüşümler)

Keyfi bir Riemann manifoldundan 1-boyutlu bir manifolda tanımlanan C^∞ dönüşümler yatay zayıf konformdur.

II.2.16.Tanım. Dilationı 1 olan bir yatay zayıf konform dönüşüme **Riemannian submersiyon** denir. Yani $\varphi : M \to N$ bir submersiyondur öyleki bir $x \in M$ noktasında türev dönüşümü $\mathcal{H}_x$ yatay uzayından $T_{\varphi(x)}N$ üzerine bir izometriye kısıtlanır[1].

Bir Riemannian submersiyona en güzel örnek ortogonal projeksiyondur:

II.2.4.Örnek. (Ortogonal projeksiyon)

$$\begin{array}{rcl} \varphi : R^m & \to & R^n \qquad m \geq n \geq 1 \\ (x_1, ..., x_m) & \to & (x_1, ..., x_n) \end{array}$$

biçiminde tanımlanan bir dönüşümdür. $x \in R^m$ noktasında yatay uzay

$$\mathcal{H}_x = Sp\{\frac{\partial}{\partial x_1}, ..., \frac{\partial}{\partial x_n}\}$$

ve dikey uzay

$$\mathcal{V}_x = Sp\{\frac{\partial}{\partial x_{n+1}}, ..., \frac{\partial}{\partial x_m}\}$$

şeklindedir. φ nin lifleri total geodeziktir. Yatay distribüsyon integrallenebilirdir ve

$$x_{n+1} = ... = x_m = sabit$$

ile verilen integral altmanifoldları total geodeziktir[1].

II.2.17.Tanım. Regüler noktalarda dilationının gradiyenti dikey olan yani $\mathcal{H}(grad\,\lambda) = 0$ şartını sağlayan yatay zayıf konform dönüşüme **yatay homotetiktir** denir[1].

$\mathcal{H}(grad\,\lambda) = 0$ olması λ nın yatay eğriler boyunca sabit olduğunu gösterir[1].

II.2.18.Tanım. M ve N Riemann manifoldları olsun.Eğer

$$\varphi : M \to N$$

yatay zayıf konform dönüşümünün dilationı λ sıfırdan farklı ve sabit ise φ ye **bir skaler farkıyla değişen Riemannian submersiyon** denir. Yani tanım kümesinde yapılacak uygun bir homotetik değişimle φ bir Riemannian submersiyona dönüştürülebilir[1]. Böyle dönüşümler homotetik submersiyon olarak da adlandırılabilir. Ancak yatay homotetik submersiyon ile karıştırmamak için bu tür dönüşümleri bir skaler farkıyla değişen Riemannian submersiyonlar olarak adlandıracağız.

II.2.19.Tanım. $\mathcal{V}(grad\,\lambda) = 0$ şartını sağlayan bir yatay zayıf konform dönüşüme **yatay konform submersiyon** denir[1].

Ortogonal projeksiyon ve Öklidyen Uzaydan tanımlanan radyal projeksiyon yatay homotetik dönüşümlere örnek olarak verilebilir:

II.2.5.Örnek.

$$\begin{aligned} \Pi_0 : R^m &\to R^{m-1} \\ (x_0, ..., x_{m-1}) &\to (x_1, ..., x_{m-1}) \end{aligned}$$

biçiminde tanımlanan ortogonal projeksiyon bir Riemannian submersiyondur.

II.2.6.Örnek. (Öklidyen Uzaydan tanımlanan radyal projeksiyon)

$$\begin{aligned} \Pi_1 : R^m \setminus \{0\} &\to S^{m-1} \\ x &\to \frac{x}{|x|} \end{aligned}$$

ile tanımlanan radyal projeksiyon r, x noktasının orjine olan uzaklığı olmak üzere $\lambda(x) = \frac{1}{|x|} = \frac{1}{r}$ dilationuna sahip bir yatay homotetik dönüşümdür. $\forall x \in R^m \setminus \{0\}$ noktasındaki dikey uzay $\frac{\partial}{\partial r}$ radyal vektör alanı tarafından gerilir.

II.2.20.Tanım. (F, g^F) ve (N, g^N) Riemann manifoldları ve

$$f : F \to (0, \infty)$$

bir C^∞ fonksiyon olsun. Bu durumda

$$g = g^F + f^2 g^N$$

metriğine sahip $F \times N$ kartezyen çarpım manifolduna **warped çarpım** denir ve $F \times_{f^2} N$ ile gösterilir[15].

$$\Pi : F \times N \to F \quad \text{ve} \quad \sigma : F \times N \to N$$

izdüşümleri gözönüne alınırsa belirlenmiş bir $p \in F$ noktası için

$$\{p\} \times N = \Pi^{-1}(p)$$

altmanifolduna $\forall q \in N$ olmak üzere (p, q) noktasındaki bir lif, sabitlenmiş bir $q \in N$ noktası için

$$F \times \{q\} = \sigma^{-1}(q)$$

altmanifolduna da $\forall p \in F$ olmak üzere $F \times_{f^2} N$ warped çarpımının (p, q) noktasındaki **maksimal integral altmanifoldu(leaf)** denir. Bu durumda warped çarpım aşağıdaki gibi tanımlanır[15]:

(i) $q \in N$ için $\Pi|_{F\times\{q\}}$ dönüşümü F üzerine bir izometridir.

(ii) $p \in F$ için $\sigma|_{\{p\}\times N}$ dönüşümü N üzerine bir homotetidir ve dilationı $\frac{1}{f(p)}$ ile verilir.

(iii) $\forall (p, q) \in F \times_{f^2} N$ için $F \times \{q\}$ maksimal integral altmanifoldu ile $\{p\} \times N$ lifi ortogonaldir.

II.2.5.Önerme. (Warped çarpımın karakterizasyonu)

(i)

$$F \times_{f^2} N \to N$$

izdüşümü total geodezik lifler ve integrallenebilir yatay distribüsyon ile birlikte bir yatay homotetik submersiyondur. Bu izdüşüm fonksiyonunun $(p, q) \in F \times_{f^2} N$ noktasında dilationı $\frac{1}{f(p)}$ dir[1].

(ii) Tersine total geodezik liflere ve integrallenebilir yatay distribüsyona sahip bir $(M, g) \to (N, h)$ yatay homotetik submersiyonu lokal olarak bir warped çarpımın birinci faktörü üzerine izdüşümü olarak düşünülebilir. Eğer (M, g) tam ve M, N basit bağlantılı manifoldlar ise bu yatay homotetik submersiyon global olarak böyle bir projeksiyondur[1].

II.2.7.Örnek.

$$I \times_{f^2} S^{m-1}$$

warped çarpımında $I = (0, \infty)$ ve $f(p) = p$ alınırsa

$$I \times_{f^2} S^{m-1} \to S^{m-1}$$

izdüşüm fonksiyonu Öklidyen Uzaydan tanımlanan

$$\Pi_1 : R^m \setminus \{0\} \to S^{m-1}$$

radyal projeksiyonu olarak düşünülebilir. Bu durumda $I \times_{f^2} S^{m-1} \to S^{m-1}$, $\lambda = \frac{1}{p}$ dilationına sahip bir yatay homotetik submersiyondur.

II.2.21.Tanım. $f \equiv 1$ olduğunda $F \times_{f^2} N$ warped çarpımına bir **Riemann çarpımı** denir[1].

Bir Riemann çarpımının birinci yada ikinci faktörü üzerine izdüşümü total geodezik lifler ve integrallenebilir yatay distribüsyonla birlikte bir Riemannian submersiyondur. Tersine herbir Riemannian submersiyon lokal olarak böyle bir izdüşüm fonksiyonu formundadır[1].

Daha genel olarak sabit dilationa sahip bir yatay konform submersiyonun tanım uzayının total geodezik lifler ve integrallenebilir yatay distribüsyonla birlikte bir skaler farkıyla değişen Riemann çarpımı olduğu söylenebilir[1].

II.2.22.Tanım. M ve N C^∞ manifoldlar ve

$$\varphi : M \to N$$

bir C^∞ dönüşüm olsun.Aşağıda verilecek olan lokal ayrışım özelliğini sağlayan

$$\varphi : M \to N$$

örten submersiyonuna bir C^∞ (lokal, aşikar) **lif demeti** veya C^∞ (lokal, aşikar) **fibrasyon** denir. **Lokal ayrışım özelliği** aşağıdaki gibidir[1]:

$$\varphi : M \to N$$

örten submersiyonu için lif olarak adlandırılan bir Y C^∞ manifoldu, N nin bir $\{V_j\}$ açık örtüsü ve $\forall j$ için

$$\psi_j : V_j \times Y \to \varphi^{-1}(V_j)$$

diffeomorfizmi vardır öyleki

$$(\varphi \circ \psi_j)(x, y) = x \qquad (x \in V_j, y \in Y)$$

dir.

II.3.Konform Foliasyonlar

$k \in \{0, 1, ..., \infty, w\}$ için M^m, C^k-sınıfından bir manifold, $q \in \{0, 1, ..., m\}$ ve $n = m - q$ olsun.

II.3.1.Tanım. M^m manifoldunun boyutu q ve ek boyutu n olan bir **C^k-foliasyonu** $\mathcal{F}$, M^m nin aşağıdaki şartı sağlayan bağlantılı altkümelere $\{L_\alpha\}$ parçalanışıdır[1]:

(A) $\forall x \in M^m$ için x in bir $U \subset M^m$ açık komşuluğundan bir N^n C^k-manifolduna bir

$$\varphi : U \to N^n$$

C^k-submersiyonu vardır öyleki $\forall \alpha$ için $U \cap L_\alpha$ nın bağlantılı bileşenleri φ nin lifleridir.

Tanım II.3.1 deki φ submersiyonuna **ayrık submersiyon** ya da $\mathcal{F}$ **ile birleşen submersiyon** denir.

Tanım II.3.1 de verilen (A) şartı aşağıdaki ifadeyle denktir[1]:

$\forall x \in M^m$ için x in bir $U \subset M^m$ açık komşuluğu üzerinde $(x^1, ..., x^m)$ C^k-koordinatları vardır öyleki $\forall \alpha$ için $U \cap L_\alpha$ nın bileşenleri

$$x^{q+1} = ... = x^m = sabit$$

ile verilir. Bu şekilde tanımlanan U açık altkümelerine **ayrık açık küme**, (x^i) kooordinatlarına da **ayrık** (veya **adapted**) **koordinatlar** denir.

II.3.2.Tanım. $\mathcal{F}$, M^m manifoldunun bir C^k-foliasyonu olsun. M^m nin (A) şartını sağlayan $\{L_\alpha\}$ parçalanışını oluşturan bağlantılı L_α altkümelerine $\mathcal{F}$ **nin leafleri** denir[1].

II.3.3.Tanım. $\mathcal{F}$; M^m , C^k-manifoldunun bir C^k-foliasyonu olsun. Bu durumda M^m nin bir U açık altkümesi için $U \cap L_\alpha$ nın bileşenleri $\mathcal{F}$ foliasyonunun U daki **plakaları** olarak adlandırılır[1].

II.3.1.Sonuç. $\mathcal{F}$ foliasyonunun leafleri boyutu q ve ek boyutu n olan C^k-altmanifoldlara immerseddir[1].

Bu kısmın geri kalanında C^∞-manifoldlar üzerinde C^∞-foliasyonlar gözönüne alınacaktır.

II.3.1.Önerme. M ve N, C^∞-manifoldları ve bir C^∞, $\varphi : M \to N$ submersiyonu verilsin. Bu durumda φ nin liflerinin bağlantılı bileşenleri bir $\mathcal{F}$ C^∞-foliasyonunun leafleridir ve böyle bir $\mathcal{F}$ foliasyonuna φ **ile birleşen foliasyon** denir[1].

II.3.4.Tanım. Bağlantılı liflere sahip bir C^∞ φ submersiyonu ile birleşen bir foliasyona **basittir** denir. Bu durumda bu foliasyonun leafleri φ nin lifleri olur[1].

Tanım II.3.4 den bir $\mathcal{F}$ foliasyonunun lokal olarak basit olduğu söylenebilir. Yani M manifoldunun her noktasının W açık komşuluğu üzerinde $\mathcal{F}$ foliasyonu basittir. Bu şekildeki açık W kümelerine **$\mathcal{F}$- basit açık küme** denir[1].

II.3.5.Tanım. $\mathcal{F}$, M C^∞-manifoldu üzerinde bir C^∞-foliasyon olsun. En fazla bir plakada her leaf U ile aynı olacak şekilde M nin herbir noktası bir ayrık U açık komşuluğuna sahip ise $\mathcal{F}$ foliasyonu **regülerdir** denir[1].

C^∞ bir φ submersiyonu ile birleşen bir foliasyonun regüler olması için φ nin liflerinin bağlantılı olması gerekmez.

Foliasyonları elde etmenin en önemli yolu distribsyonları integrallemektir:

II.3.6.Tanım. M, m-boyutlu bir manifold olsun. M üzerinde

$$\begin{aligned} \mathcal{V} : M &\to T_xM \\ x &\to \mathcal{V}_x \subset T_xM \end{aligned}$$

ile tanımlanan $\mathcal{V}$ dönüşümüne bir **distribüsyon** denir[18]. $X \in \Gamma(TM)$ için $p \in M$ olmak üzere $X_p \in \mathcal{V}_p$ oluyorsa X vektör alanı $\mathcal{V}$ ye aittir denir. Eğer her p noktası için $\mathcal{V}$ ye ait q-tane diferansiyellenebilir lineer bağımsız vektör alanı var ise $\mathcal{V}$ ye diferansiyellenebilirdir denir[2].

II.3.7.Tanım. $\mathcal{V}$, M manifoldu üzerinde q-boyutlu bir C^∞ distribüsyon olsun. Yani $\mathcal{V}$, M nin tanjant demetinin rankı q olan bir C^∞ alt demeti olsun. Lie parantez operatörüne göre $\mathcal{V}$ kapalı ise yani $\forall V, W \in \Gamma(\mathcal{V})$ için $[V, W] \in \Gamma(\mathcal{V})$ oluyorsa $\mathcal{V}$ **involutive** dir denir[2]. .

II.3.8.Tanım. M bir C^∞ manifold; $\mathcal{V}$, M manifoldu üzerinde q-boyutlu bir C^∞ distribüsyon ve $\bar{M}$, M nin altmanifoldu olsun. Eğer $\bar{M}$ nin her x noktasında, $\bar{M}$ nin tanjant uzayı ile $\mathcal{V}_x$ aynı ise $\bar{M}$ ye $\mathcal{V}$ nin **integral manifoldu** denir[2]. Yani

$$\varphi : \bar{M} \to M$$

bir imbedding olmak üzere $\forall x \in \bar{M}$ için

$$\varphi_*(T_x\bar{M}) = \mathcal{V}_x$$

dir. Eğer $\mathcal{V}$ nin $\bar{M}$ yi kapsayan bir başka integral manifoldu yoksa $\bar{M}$ ye $\mathcal{V}$ nin bir **maksimal integral manifoldu** (veya **leaf**) denir[2].

II.3.9.Tanım. M bir C^∞ manifold ve $\bar{M}$, M nin bir altmanifoldu olsun. Eğer $\forall x \in \bar{M}$ için $\mathcal{V}$ nin x i kapsayan bir maksimal integral manifoldu varsa $\mathcal{V}$ ye **integrallenebilirdir** denir[2].

II.3.1.Teorem. (Frobenius Teoremi)

M bir C^∞ manifold ve $\mathcal{V}$, M manifoldu üzerinde q-boyutlu bir C^∞ distribüsyon olsun. Bu durumda her involutive distribüsyon integrallenebilirdir. Üstelik $\mathcal{V}$ nin $\forall x \in M$ noktasından geçen bir tek maksimal integral manifoldu vardır ve x i ihtiva eden diğer tüm integral manifoldlar bu maksimal integral manifoldunun bir açık altmanifoldudur[2].

Frobenius Teoreminden integral altmanifoldların bağlantılı bileşenlerinin, $\mathcal{V}$ tarafından belirlenen tanjant uzay ile birlikte q-boyutlu bir C^∞ foliasyonun leaflerini kurduğu söylenebilir. Tersine bir C^∞ foliasyonun tanjant uzayları integrallenebilir bir distribüsyon oluşturur[1].

1-boyutlu distribüsyon daima integrallenebilirdir.

Burada bir distribüsyon ve bu distribüsyon ile birleşen foliasyon için genelde aynı gösterim kullanılacaktır.

II.3.2.Önerme. M bir C^∞-manifold ve $\mathcal{F}$, M nin bir C^∞-foliasyonu olsun. Eğer M nin $\mathcal{V}$ altdemeti yönlendirilebilir ise $\mathcal{F}$ foliasyonu da yönlendirilebilirdir[1].

II.3.10.Tanım. $\mathcal{F}$, C^∞ bir M manifoldu üzerinde bir C^∞-foliasyon olsun. $TM/\mathcal{V}$ bölüm uzayı (veya denk olarak $\mathcal{V}$ nin TM üzerindeki herhangi bir tümleyeni) yönlendirilebilir ise $\mathcal{F}$ foliasyonu **transversely yönlendirilebilirdir** denir[1].

Şimdi bir distribüsyonla ilgili temel tensörleri tanıtacağız:

$M = (M, g)$ bir Riemann manifoldu; $\mathcal{V}$, M üzerinde bir q-boyutlu distribüsyon ve $\mathcal{V}$ nin ortogonal distribüsyonu $\mathcal{V}^\perp = \mathcal{H}$ olsun. Böylece M nin tanjant demeti

$$TM = \mathcal{V} \oplus \mathcal{H} \tag{II.3.1}$$

biçiminde yazılabilir. Dönüşümlerdeki terminolojiye benzer şekilde $\mathcal{V}$ dikey distribüsyon (veya dikey altdemet), $\mathcal{H}$ ise yatay distribüsyon (yada yatay alt demet) olarak adlandırılır. $\mathcal{V}$ nin kesitlerine dikey vektör alanları $\mathcal{H}$ nın kesitlerine de yatay vektör alanları denir[1]. Bu distribüsyonlar üzerine dik izdüşümler için de aynı gösterimler kullanılacaktır. Yani $\mathcal{V}$, M nin tanjant uzayının dikey vektörlerin uzayı üzerine dik izdüşümünü; $\mathcal{H}$ ise M nin tanjant uzayının yatay vektörlerin uzayı üzerine dik izdüşümünü gösterecektir.

II.3.11.Tanım. M Riemann manifoldunun dikey distribüsyonu $\mathcal{V}$ ve yatay distribüsyonu $\mathcal{H}$ olsun. $\mathcal{V}$ **nin asimetriklenmiş (unsymmetrized) ikinci temel formu**

$$A^{\mathcal{V}} \in \Gamma(\otimes^2 T^* M \otimes TM)$$

tensör alanıdır ve $X, Y \in \Gamma(TM)$ için

$$A^{\mathcal{V}}_X Y = \mathcal{H}(\nabla_{\mathcal{V}X} \mathcal{V}Y) \tag{II.3.2}$$

olarak tanımlanır[1].

$A^{\mathcal{V}}$ tensör alanı simetrik değildir[1]. Bu nedenle $\mathcal{V}$ nin simetriklenmiş (symmetrized) ikinci temel formu aşağıdaki gibi tanımlanır:

II.3.12.Tanım. M Riemann manifoldunun dikey distribüsyonu $\mathcal{V}$ ve yatay distribüsyonu $\mathcal{H}$ olsun. $\mathcal{V}$ nin **simetriklenmiş (symmetrized) ikinci temel formu**

$$B^{\mathcal{V}} \in \Gamma(\otimes^2 T^*M \otimes TM)$$

tensör alanıdır ve $X, Y \in \Gamma(TM)$ için

$$\begin{aligned} B^{\mathcal{V}}(X,Y) &= \frac{1}{2}(A_X^{\mathcal{V}}Y + A_Y^{\mathcal{V}}X) \\ &= \frac{1}{2}\{\mathcal{H}(\nabla_{\mathcal{V}X}\mathcal{V}Y) + \mathcal{H}(\nabla_{\mathcal{V}Y}\mathcal{V}X)\} \end{aligned} \tag{II.3.3}$$

şeklinde tanımlanır[1]. Açıkça görülür ki

$$B^{\mathcal{V}}(X,Y) = B^{\mathcal{V}}(Y,X)$$

dir.

II.3.13.Tanım. M bir Riemann manifoldu olsun. $\mathcal{V}$, M nin dikey distribüsyonu ve $\mathcal{H}$ ise M nin yatay distribüsyonu olmak üzere $\mathcal{V}$ nin **integrallenebilirlik tensörü**

$$I^{\mathcal{V}} \in \Gamma(\otimes^2 T^*M \otimes TM)$$

ile gösterilir ve $X, Y \in \Gamma(TM)$ için

$$\begin{aligned} I^{\mathcal{V}}(X,Y) &= A_X^{\mathcal{V}}Y - A_Y^{\mathcal{V}}X \\ &= \mathcal{H}(\nabla_{\mathcal{V}X}\mathcal{V}Y) - (\nabla_{\mathcal{V}Y}\mathcal{V}X) \\ &= \mathcal{H}([\mathcal{V}X, \mathcal{V}Y]) \end{aligned} \tag{II.3.4}$$

biçiminde tanımlanır[1]. $I^{\mathcal{V}}$ bir antisimetrik tensör alanıdır.

II.3.2.Sonuç. M bir Riemann manifoldu ve $\mathcal{V}$, M nin dikey distribüsyonu olsun. $\mathcal{V}$ nin integrallenebilir olması için gerek ve yeter şart $I^{\mathcal{V}} = 0$ olmasıdır[1].

İspat. $X, Y \in \Gamma(TM)$ için

$$\begin{aligned} I^{\mathcal{V}} = 0 \quad & \Leftrightarrow \mathcal{H}([\mathcal{V}X, \mathcal{V}Y]) = 0 \\ & \Leftrightarrow [\mathcal{V}X, \mathcal{V}Y] \in \mathcal{V} \\ & \Leftrightarrow \mathcal{V} \text{ integrallenebilirdir.} \end{aligned}$$

Bu tanımlardan hareketle $A^{\mathcal{V}}$ tensör alanı simetrik ve antisimetrik tensör alanlarının toplamı olarak

$$A^{\mathcal{V}}_X Y = B^{\mathcal{V}}_X Y + \frac{1}{2} I^{\mathcal{V}}_X Y \tag{II.3.5}$$

biçiminde yazılabilir[1].

$I^{\mathcal{V}} = 0$ yani $\mathcal{V}$ integrallenebilir iken

$$A^{\mathcal{V}} = B^{\mathcal{V}}$$

olur. Bu ise M nin altmanifoldları olarak kabul edilen leaflerin ikinci temel formudur[1].

II.3.14.Tanım. $\mathcal{V}$ bir dikey distribüsyon olsun. $\mathcal{V}$ nin **ortalama eğrilik vektörü**

$$\mu^{\mathcal{V}} = \frac{1}{q}\, iz\, B^{\mathcal{V}} = \frac{1}{q} \sum_{r=1}^{q} \mathcal{H}(\nabla_{e_r} e_r) \tag{II.3.6}$$

şeklinde tanımlanır. Burada $\{e_1, ..., e_q\}$, $\mathcal{V}$ nin (lokal,hareketli) çatısıdır. Bu çatıya **dikey çatı** da denir[1].

Aynı şekilde $\mathcal{H}$ için de **yatay çatı** adı verilen bir çatı sistemi tanımlanabilir[1].

$A^{\mathcal{V}}$ tensöreldir. Yani $A^{\mathcal{V}}$ nin bir $x \in M$ noktasındaki değeri X ve Y vektör alanlarının bu noktadaki değerlerine bağlıdır. Böylece $B^{\mathcal{V}}$ ve $I^{\mathcal{V}}$ de tensörel olur. Burada ayrıca $\mu^{\mathcal{V}}$ ortalama eğriliği iyi tanımlıdır[1].

(II.3.2), (II.3.3) ve (II.3.4) eşitliklerinde $\mathcal{V}$ ile $\mathcal{H}$ ın rolleri değiştirilerek sırasıyla $A^{\mathcal{H}}$, $B^{\mathcal{H}}$ ve $I^{\mathcal{H}}$ tensörleri tanımlanabilir.

II.3.15.Tanım. (M, g) bir Riemann manifoldu ve $\mathcal{V}$, M üzerinde bir distribüsyon olsun. Eğer

(i) $\forall x \in M$ için $\mu_x^{\mathcal{V}} = 0$ ise $\mathcal{V}$ **minimaldir,**

(ii) $\forall x \in M$ için $B_x^{\mathcal{V}} = 0$, ise $\mathcal{V}$ **total geodeziktir**

(iii) $|V| = 1$ için V yönündeki $B_x^{\mathcal{V}}(V, V)$ normal eğriliği $V \in \mathcal{V}_x$ seçiminden bağımsız ise $\mathcal{V}$ **umbiliktir** denir[1].

II.3.3.Sonuç. M bir Riemann manifoldu ve $\mathcal{V}$, M üzerinde bir distribüsyon olsun. $A^{\mathcal{V}} = 0$ olması için gerek ve yeter şart $\mathcal{V}$ nin integrallenebilir ve total geodezik olmasıdır[1].

II.3.16.Tanım. (M, g) bir Riemann manifoldu olsun. M üzerinde X, Y yatay vektör alanlarını ve V dikey vektör alanını alalım. Bir $x \in M$ noktasında $X, Y \in \mathcal{H}_x$ ve $V \in \mathcal{V}_x$ olmak üzere g metriğinin Lie türevi

$$(\mathcal{L}_V g)(X, Y) = V(g(X, Y)) - g(\mathcal{L}_V X, Y) - g(X, \mathcal{L}_V Y) \qquad \text{(II.3.7)}$$

biçiminde tanımlanır[16].

II.3.17.Tanım. M Riemann manifoldu üzerindeki $\mathcal{V}$ distribüsyonu $\forall x \in M$ için

$$(\mathcal{L}_V g)(X, Y) = v(V) g(X, Y) \qquad (X, Y \in \mathcal{H}_x\,,\ V \in \mathcal{V}_x) \qquad \text{(II.3.8)}$$

şartını sağlıyorsa $\mathcal{V}$ ye **konformdur** ya da **shear-freedir** denir. Burada $v(V)$ sadece V ye bağlı bir reel sayıdır. Özel olarak $v = 0$ ise $\mathcal{V}$ ye **Riemanniandır** denir[1].

II.3.18.Tanım. (M, g) bir Riemann manifoldu olsun. M nin yatay altdemeti $\mathcal{H}$ üzerindeki **Bott kısmi konneksiyonu** $\nabla^\circ = \nabla^{\mathcal{H}}$ ile gösterilir ve

$$\begin{aligned} \nabla^\circ : \Gamma(\mathcal{V}) \times \Gamma(\mathcal{H}) &\to \Gamma(\mathcal{H}) \\ (V, X) &\to \nabla^\circ_V X \\ \nabla^\circ_V X = \mathcal{H}(\mathcal{L}_V X) &= \mathcal{H}([V, X]) \end{aligned} \qquad \text{(II.3.9)}$$

şeklinde tanımlanır[1].

II.3.19.Tanım. M bir Riemann manifoldu ve $\mathcal{V}$, $\mathcal{H}$ sırasıyla M nin dikey ve yatay altdemeti olsun. Bir $X \in \Gamma(\mathcal{H})$ vektör alanı $\forall V \in \Gamma(\mathcal{V})$ için

$$\nabla^{\circ}_{V} X = 0 \qquad \text{(II.3.10)}$$

şartını sağlıyorsa **basic(temel) vektör alanı** olarak adlandırılır[1].

II.3.20.Tanım. M ve N Riemann manifoldları ve

$$\varphi : M \to N$$

bir C^{∞} dönüşüm olsun. $X \in \Gamma(TM)$ vektör alanı için $d\varphi(X) = \hat{X}$ olacak şekilde bir $\hat{X} \in \Gamma(TN)$ vektör alanı var ise X vektör alanı **izdüşürülebilirdir** denir. Bu durumda X ile $\hat{X}$ vektör alanlarına da φ-**bağlantılıdır** denir[5].

II.3.3.Önerme. M bir Riemann manifoldu ve $\mathcal{F}$, M de bir foliasyon olsun. M nin bir $\mathcal{F}$-basit açık altkümesi üzerinde bir yatay vektör alanının temel (basic) olması için gerek ve yeter şart bu vektör alanının izdüşürülebilir olmasıdır[1].

II.3.21.Tanım. (M, g) Riemann manifoldundaki g metriğinin M üzerindeki $\mathcal{H}$ yatay altdemetine kısıtlanmışı $g^{\mathcal{H}}$ ile gösterilir ve $X, Y \in \Gamma(TM)$ için

$$g^{\mathcal{H}}(X, Y) = g(\mathcal{H}(X), \mathcal{H}(Y)) \qquad \text{(II.3.11)}$$

ile tanımlanır[1].

II.3.22.Tanım. (M, g) bir Riemann manifoldu; $\mathcal{V}$, M nin dikey altdemeti, $\mathcal{H}$ ise M nin yatay altdemeti olsun. $g^{\mathcal{H}}$ metriğinin Bott kısmi konneksiyonuna göre türevi $V \in \Gamma(\mathcal{V})$ ve $X, Y \in \Gamma(\mathcal{H})$ için

$$(\nabla^{\circ}_{V} g^{\mathcal{H}})(X, Y) = V(g^{\mathcal{H}}(X, Y)) - g^{\mathcal{H}}(\nabla^{\circ}_{V} X, Y) - g^{\mathcal{H}}(X, \nabla^{\circ}_{V} Y) \qquad \text{(II.3.12)}$$

biçiminde tanımlanır[1].

Bu durumda bir M manifoldu üzerindeki $\mathcal{V}$ distribüsyonunun konform olması için gerek ve yeter şart $\forall x \in M$ noktasında

$$v : \mathcal{V}_x \to R$$

reel değerli bir fonksiyon olmak üzere

$$\nabla^{\circ}_V g^{\mathcal{H}} = v(V) g^{\mathcal{H}} \tag{II.3.13}$$

olmasıdır[1]. Böylece (II.3.8) eşitliği (II.3.13) şeklinde yeniden yazılabilir.

II.3.4.Önerme. (Ortogonal Distribüsyon)

M bir Riemann manifoldu ve $\mathcal{V}$, M üzerinde bir distribüsyon olsun. Eğer $\mathcal{H} = \mathcal{V}^{\perp}$ ortogonal distribüsyonu umbilik (total geodezik) ise $\mathcal{V}$ konformdur (Riemanniandır)[1].

İspat. $x \in M$, $X, Y \in \mathcal{H}_x$ ve $V \in \mathcal{V}_x$ olsun. Bu durumda

$$\begin{aligned}
(\mathcal{L}_V g)(X,Y) &= V(g(X,Y)) - g(\mathcal{L}_V X, Y) - g(X, \mathcal{L}_V Y) \\
&= V(g(X,Y)) - g(\nabla_V X - \nabla_X V, Y) - g(X, \nabla_V Y - \nabla_Y V) \\
&= V(g(X,Y)) - g(\nabla_V X, Y) - g(X, \nabla_V Y) \\
&\quad + g(\nabla_X V, Y) + g(X, \nabla_Y V) \\
&= -\{g(\nabla_X Y + \nabla_Y X, V)\} \\
&= -2g(B^{\mathcal{H}}(X,Y), V) \qquad \text{(II.3.14)}
\end{aligned}$$

bulunur. Bu durumda $B^{\mathcal{H}} = 0$ yani $\mathcal{H} = \mathcal{V}^{\perp}$ distribüsyonu total geodezik ise $\mathcal{V}$ Riemanniandır. Diğer taraftan (II.3.14) den $|X| = 1$ olacak şekilde $X \in \Gamma(\mathcal{H})$ yönündeki $B^{\mathcal{H}}(X,X)$ normal eğriliği X den bağımsız yani $\mathcal{H}$ umbilik ise $\mathcal{V}$ konformdur.

II.3.1.Hatırlatma.

(i) (II.3.14) eşitliği $(\mathcal{L}_V g)(X,Y)$ nin tensörel olduğunu gösterir. Yani $(\mathcal{L}_V g)(X,Y)$ nin değerinin sadece V, X, Y nin noktadaki değerine bağlıdır.

(ii) $\forall x \in M$ için $v : \mathcal{V}_x \to R$ fonksiyonu lineerdir. $\forall X \in \Gamma(\mathcal{H})$ için $v(X) = 0$ alınırsa v bir dikey 1-form olur[1].

(iii) (II.3.8) ile (II.3.14) karşılaştırıldığında $\mathcal{V}$ konform ise $x \in M$, $|X| = 1$ olmak üzere $X \in \mathcal{H}_x$ ve $V \in \mathcal{V}_x$ için

$$-2g(B^{\mathcal{H}}(X,X), V) \;=\; v(V) g(X,X)$$

olur. Burada

$$\begin{aligned} v(V) &= -2g(B^{\mathcal{H}}(X,X),V) \\ v(V) &= -2g(\mathcal{V}(\nabla_X X),V) \\ v(V) &= -2g(\mu^{\mathcal{H}},V) \\ v(V) &= -2(\mu^{\mathcal{H}})^{\flat}(V) \end{aligned} \tag{II.3.15}$$

bulunur. Böylece

$$v = -2(\mu^{\mathcal{H}})^{\flat} \tag{II.3.16}$$

olur[1].

(iv) $\mathcal{V}$ ile $\mathcal{H}$ nin rolleri değiştirilerek $\mathcal{V}$ üzerinde $\nabla^{\circ\mathcal{V}}$ Bott kısmı konneksiyonu elde edilir[1]:

$$\begin{aligned} \nabla^{\circ\mathcal{V}} : \Gamma(\mathcal{H}) \times \Gamma(\mathcal{V}) &\to \Gamma(\mathcal{V}) \\ (X,V) &\to \nabla^{\circ\mathcal{V}}_X V = \mathcal{V}([X,V]) = \mathcal{V}(L_X V) \end{aligned} \tag{II.3.17}$$

II.3.23.Tanım. (M,g) bir Riemann manifoldu olsun. Bu durumda M üzerindeki **normal konneksiyon** $\nabla^{\mathcal{H}}$ ile gösterilir ve

$$\begin{aligned} \nabla^{\mathcal{H}} : \Gamma(\mathcal{V}) \times \Gamma(\mathcal{H}) &\to \Gamma(\mathcal{H}) \\ (V,X) &\to \nabla^{\mathcal{H}}_V X = \mathcal{H}(\nabla_V X) \end{aligned} \tag{II.3.18}$$

şeklinde tanımlanır[1].

II.3.1 Lemma. M bir Riemann manifoldu olsun. M üzerinde $\mathcal{V}$ ve $\mathcal{H}$ C^∞ distribüsyonlarını alalım. Bu durumda $\forall X \in \Gamma(\mathcal{H})$ ve $\forall V \in \Gamma(\mathcal{V})$ olmak üzere $\nabla^\circ_V X = \nabla^{\mathcal{H}}_V X$ olması için gerek ve yeter şart $\mathcal{V}$ nin integrallenebilir bir yatay distribüsyonla birlikte bir Riemannian distribüsyon olmasıdır[1].

İspat. $\forall X \in \Gamma(\mathcal{H})$ ve $\forall V \in \Gamma(\mathcal{V})$ için

$$\begin{aligned} \nabla^\circ_V X - \nabla^{\mathcal{H}}_V X &= \mathcal{H}(\mathcal{L}_V X) - \mathcal{H}(\nabla_V X) \\ &= \mathcal{H}(\mathcal{L}_V X - \nabla_V X) \\ &= -\mathcal{H}(\nabla_X V) \end{aligned} \tag{II.3.19}$$

dir. $Y \in \Gamma(\mathcal{H})$ olsun.

$$X < V, Y > = < \nabla_X V, Y > + < V, \nabla_X Y >$$

olduğundan

$$- < \nabla_X V, Y > = < V, \nabla_X Y >$$

bulunur. Buradan

$$\begin{aligned} - < \mathcal{H}(\nabla_X V) + \mathcal{V}(\nabla_X V), Y > &= < V, \mathcal{H}(\nabla_X Y) + \mathcal{V}(\nabla_X Y) > \\ - < \mathcal{H}(\nabla_X V), Y) &= < V, \mathcal{V}(\nabla_X Y) > \\ - < \mathcal{H}(\nabla_X V), Y) &= < V, A_X^{\mathcal{H}} Y > \qquad \text{(II.3.20)} \end{aligned}$$

elde edilir. Öyleyse (II.3.19) ile (II.3.20) birleştirilirse

$$\begin{aligned} \nabla_V^{\circ} X = \nabla_V^{\mathcal{H}} X \quad &\Leftrightarrow \mathcal{H}(\nabla_X V) = 0 \\ &\Leftrightarrow A_X^{\mathcal{H}} Y = 0 \quad \forall X, Y \in \Gamma(\mathcal{H}) \\ &\Leftrightarrow A^{\mathcal{H}} = 0 \end{aligned}$$

olur. Böylece

$$A_X^{\mathcal{H}} Y = B_X^{\mathcal{H}} Y + \frac{1}{2} I_X^{\mathcal{H}} Y$$

olduğundan $A^{\mathcal{H}} = 0$ olması için gerek ve yeter şart $\mathcal{H}$ nın integrallenebilir ve $\mathcal{V}$ nin Riemannian olmasıdır.

II.3.24.Tanım. M bir C^∞ manifold olsun. Eğer

$$\begin{aligned} \phi : R \times M &\rightarrow M \\ (t, p) &\rightarrow \phi(t, p) = \phi_t(p) \end{aligned}$$

dönüşümü

(i) $\forall t \in R$ için ϕ_t, M nin bir transformasyonudur.

(ii) $\forall t, s \in R$ ve $\forall p \in M$ için

$$\begin{aligned} \phi(t + s, p) &= \phi(t, \phi(s, p)) \\ \phi_{t+s}(p) &= \phi_t(\phi_s(p)) \end{aligned}$$

şartlarını sağlıyorsa ϕ ye M nin **1-parametreli grubu** denir[18].

II.3.25.Tanım. M bir C^∞ manifold olsun. $I_\varepsilon \subset R$ olmak üzere

$$\begin{aligned} \phi : I_\varepsilon \times M &\rightarrow M \\ (t,p) &\rightarrow \phi(t,p) = \phi_t(p) \end{aligned}$$

dönüşümü aşağıdaki şartları sağlıyorsa ϕ ye M nin **1-parametreli lokal dönüşüm grubu** denir[18]:

(i) $\forall t \in I_\varepsilon$ için ϕ_t, M nin bir transformasyonudur.

(ii) $\forall t, s, t+s \in I_\varepsilon$ ve $\forall p \in M$ için

$$\phi(t+s,p) = \phi(t, \phi(s,p))$$

dir.

II.3.2.Teorem. X, C^∞ bir M manifoldu üzerinde diferansiyellenebilir bir vektör alanı ve $x \in M$ olsun. Bu durumda x in bir U açık komşuluğu, $\varepsilon > 0$ olmak üzere bir $(-\varepsilon, \varepsilon)$ aralığı ve diferansiyellenebilir bir

$$\begin{aligned} \varphi : (-\varepsilon, \varepsilon) \times U &\rightarrow M \\ (t,q) &\rightarrow \varphi(t,q) \end{aligned}$$

dönüşümü vardır öyleki

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} = X(\varphi(t,q)) \quad ve \quad \varphi(0,q) = q$$

dur. $\varphi(t,q) = \varphi_t(q)$ yazılır ve $\varphi_t : U \rightarrow M$ dönüşümüne **X in bir lokal akışı** denir[17].

II.3.26.Tanım. (M,g) bir Riemann manifoldu ve $V \in \Gamma(TM)$ olsun. Eğer

$$\mathcal{L}_V g = 0 \tag{II.3.21}$$

oluyorsa V ye bir **Killing alanı** veya **infinitesimal izometri** denir. Bir Killing alanı ile birleşen akışlar (lokal) izometrilerdir[8].

II.3.27.Tanım. (M, g) bir Riemann manifoldu ve $V \in \Gamma(TM)$ olsun. Eğer v bir 1-form olmak üzere

$$\mathcal{L}_V g = v(V) g \tag{II.3.22}$$

oluyorsa V ye bir **konform vektör alanı** denir [16].

Konform vektör alanları ile birleşen 1-parametreli lokal transformasyonların grubu konform diffeomorfizmleri içerir[16].

II.3.5.Önerme. Sıfırdan farklı bir Killing alanının integral eğrileri 1-boyutlu bir Riemannian foliasyonu ve sıfır olmayan bir konform vektör alanının integral eğrileri ise 1-boyutlu bir konform foliasyonu tanımlar[1].

Ek boyutu 2 olan foliasyonlar özel bir öneme sahiptir ve böyle foliasyonların bazı ek özellikleri vardır. M bir Riemann manifoldu ve $\mathcal{F}$, M nin ek boyutu 2 olan foliasyonu olsun. $\mathcal{F}$ nin transversely yönlendirilmiş olduğunu düşünelim. $\forall x \in M$ için

$$J^{\mathcal{H}} : \mathcal{H}_x \to \mathcal{H}_x \tag{II.3.23}$$

$+\frac{\Pi}{2}$ lik dönmeyi göstersin. Bu durumda $J^{\mathcal{H}}$ aşağıdaki özelliklere sahiptir:

II.3.6.Önerme. $\mathcal{F}$, M Riemann manifoldu üzerinde ek boyutu 2 olan transversely yönlendirilmiş bir foliasyon olsun. Bu durumda

(i) (II.3.18) ile tanımlanan normal konneksiyondan indirgenmiş $\nabla^{\mathcal{H}}$ konneksiyonuna göre $J^{\mathcal{H}}$ her zaman paraleldir. Yani $Y \in \Gamma(TM)$ için

$$\nabla^{\mathcal{H}}_Y J^{\mathcal{H}} = 0$$

dır. Burada $Y \in \Gamma(TM)$ ve $X \in \Gamma(\mathcal{H})$ olmak üzere

$$\begin{aligned}(\nabla^{\mathcal{H}}_Y J^{\mathcal{H}})(X) &= \nabla^{\mathcal{H}}_Y (J^{\mathcal{H}} X) - J^{\mathcal{H}}(\nabla^{\mathcal{H}}_Y X) \\ &= \mathcal{H}(\nabla_Y (J^{\mathcal{H}} X)) - J^{\mathcal{H}}(\mathcal{H}(\nabla_Y X)) \end{aligned} \tag{II.3.24}$$

olarak tanımlanır[1].

(ii) Diğer taraftan $J^{\mathcal{H}}$, $\mathcal{V}$ boyunca tanımlanan Bott kısmi konneksiyonuna göre paralel yani $V \in \Gamma(\mathcal{V})$ olmak üzere

$$\nabla^{\circ}_{V} J^{\mathcal{H}} = 0$$

olması için gerek ve yeter şart $\mathcal{F}$ nin konform olmasıdır. Burada ise $V \in \Gamma(\mathcal{V})$ ve $X \in \Gamma(\mathcal{H})$ olmak için

$$\begin{aligned}(\nabla^{\circ}_{V} J^{\mathcal{H}})(X) &= \nabla^{\circ\mathcal{H}}_{V}(J^{\mathcal{H}}X) - J^{\mathcal{H}}(\nabla^{\circ\mathcal{H}}_{V}X) \\ &= \mathcal{H}(L_V(J^{\mathcal{H}}X)) - J^{\mathcal{H}}(\mathcal{H}(L_V X))\end{aligned} \tag{II.3.25}$$

ile verilir[1].

İspat

(i) $Y \in \Gamma(TM)$ ve $X \in \Gamma(\mathcal{H})$ olsun.

$$\begin{aligned}< (\nabla^{\mathcal{H}}_{Y} J^{\mathcal{H}})(X), X > &=< \mathcal{H}(\nabla_Y J^{\mathcal{H}}X) - J^{\mathcal{H}}(\mathcal{H}(\nabla_Y X)), X > \\ &=< \mathcal{H}(\nabla_Y J^{\mathcal{H}}X), X > - < J^{\mathcal{H}}(\mathcal{H}(\nabla_Y X)), X > \\ &=< \nabla_Y J^{\mathcal{H}}X, X > - < J^{\mathcal{H}}(\nabla_Y X), X > \\ &= - < J^{\mathcal{H}}X, \nabla_Y X > -(- < \nabla_Y X, J^{\mathcal{H}}X >) \\ &= 0\end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned}< (\nabla^{\mathcal{H}}_{Y} J^{\mathcal{H}})(X), J^{\mathcal{H}}X > &=< \nabla_Y J^{\mathcal{H}}X, J^{\mathcal{H}}X > - < J^{\mathcal{H}}(\nabla_Y X), J^{\mathcal{H}}X > \\ &= \frac{1}{2}Y < J^{\mathcal{H}}X, J^{\mathcal{H}}X > -(- < \nabla_Y X, -X >) \\ &= \frac{1}{2}Y(|J^{\mathcal{H}}X|^2) - \frac{1}{2}Y(|X|^2) \\ &= 0\end{aligned}$$

olduğundan

$$\nabla^{\mathcal{H}}_{Y} J^{\mathcal{H}} = 0$$

bulunur.

(ii) $V \in \Gamma(T\mathcal{V})$ ve $X \in \Gamma(\mathcal{H})$ olsun.

$$\begin{aligned}< (\nabla^{\circ}_{V} J^{\mathcal{H}})(X), X > &=< \nabla^{\circ}_{V} J^{\mathcal{H}}X, X > - < J^{\mathcal{H}}(\nabla^{\circ}_{V}X), X > \\ &=< \nabla^{\circ}_{V} J^{\mathcal{H}}X, X > + < \nabla^{\circ}_{V}X, J^{\mathcal{H}}X >\end{aligned} \tag{II.3.26}$$

dir. Ayrıca

$$(\nabla^\circ_V g)(X, J^{\mathcal{H}}X) = V(g(X, J^{\mathcal{H}}X)) - g(\nabla^\circ_V X, J^{\mathcal{H}}X) - g(X, \nabla^\circ_V J^{\mathcal{H}}X > \quad (II.3.27)$$

olduğundan (II.3.26) ile (II.3.27) birleştirilirse

$$< (\nabla^\circ_V J^{\mathcal{H}})(X), X >= -(\nabla^\circ_V g)(X, J^{\mathcal{H}}X) \quad (II.3.28)$$

bulunur. Diğer taraftan

$$\begin{aligned} < (\nabla^\circ_V J^{\mathcal{H}})(X), J^{\mathcal{H}}X > &=< \nabla^\circ_V J^{\mathcal{H}}X, J^{\mathcal{H}}X > - < J^{\mathcal{H}}(\nabla^\circ_V X), J^{\mathcal{H}}X > \\ &=< \nabla^\circ_V J^{\mathcal{H}}X, J^{\mathcal{H}}X > - < \nabla^\circ_V X, X > \quad (II.3.29) \end{aligned}$$

dir. Ayrıca

$$(\nabla^\circ_V g)(J^{\mathcal{H}}X, J^{\mathcal{H}}X) = V(g(J^{\mathcal{H}}X, J^{\mathcal{H}}X)) - 2g(\nabla^\circ_V J^{\mathcal{H}}X, J^{\mathcal{H}}X) \quad (II.3.30)$$

ve

$$(\nabla^\circ_V g)(X, X) = V(g(X, X)) - 2g(\nabla^\circ_V X, X) \quad (II.3.31)$$

olduğundan (II.3.30) ve (II.3.31) , (II.3.29) da yerine yazılırsa

$$\begin{aligned} < (\nabla^\circ_V J^{\mathcal{H}})(X), J^{\mathcal{H}}X > &= -\frac{1}{2}(\nabla^\circ_V g)(J^{\mathcal{H}}X, J^{\mathcal{H}}X) \\ &+\frac{1}{2}(\nabla^\circ_V g)(X, X) \quad (II.3.32) \end{aligned}$$

bulunur. Şimdi $\mathcal{F}$, ek boyutu 2 olan transversely yönlendirilmiş bir konform foliasyon olsun. (II.3.13) den reel değerli bir v fonksiyonu için

$$\nabla^\circ_V g = v(V)g$$

olduğu gözönüne alınırsa (II.3.28) den

$$< (\nabla^\circ_V J^{\mathcal{H}})(X), X >= v(V)g(X, J^{\mathcal{H}}X) = 0$$

ve (II.3.32) den

$$< (\nabla^\circ_V J^{\mathcal{H}})(X), J^{\mathcal{H}}X >= -\frac{1}{2}v(V)g(J^{\mathcal{H}}X, J^{\mathcal{H}}X) + \frac{1}{2}v(V)g(X, X) = 0$$

elde edilir. Bu ise

$$\nabla^{\circ}_{V} J^{\mathcal{H}} = 0$$

olduğunu gösterir.
Tersine

$$\nabla^{\circ}_{V} J^{\mathcal{H}} = 0$$

olsun. Bu durumda (II.3.28) den

$$< (\nabla^{\circ}_{V} J^{\mathcal{H}})(X), X >= v(V) g(X, J^{\mathcal{H}} X) = 0$$

olacağından

$$\nabla^{\circ}_{V} g = v(V) g$$

şartını sağlayan reel değerli bir v fonksiyonu bulunabilir. Öyleyse $\mathcal{F}$ kon - formdur.

Böylece "ek boyutu 2 olan transversely yönlendirilmiş bir foliasyonun konform olması için gerek ve yeter şart $J^{\mathcal{H}}$ ın basic(temel) vektör alanlarını basic(temel) vektör alanlarına resmetmesidir" sonucuna ulaşılır[1].

II.3.7.Önerme. M ve N Riemann manifoldları

$$\varphi : M \to N$$

bir yatay konform submersiyon ve

$$\lambda : M \to (0, \infty)$$

φ nin dilationı olsun. Bu durumda φ ile birleşen $\mathcal{F}$ foliasyonu için[1]

(i) (II.3.13) de verilen v fonksiyonu $V \in \Gamma(\mathcal{V})$ için

$$v(V) = -d(\ln \lambda^2) V \tag{II.3.33}$$

ile tanımlanır.

(ii) $X, Y \in \Gamma(\mathcal{H})$ için

$$A^{\mathcal{H}}_{X} Y = \frac{1}{2} \mathcal{V}[X, Y] + < X, Y > \mathcal{V}(grad \ln \lambda) \tag{II.3.34}$$

dır.

(iii)

(a) M manifoldunun yatay distribüsyonunun ortalama eğriliği

$$\mu^{\mathcal{H}} = \mathcal{V}(grad \ln \lambda) = \frac{1}{2}\mathcal{V}(grad \ln |d\varphi|^2) \tag{II.3.35}$$

ile tanımlanır.

(b) Eğer φ yatay homotetik ise

$$\mu^{\mathcal{H}} = grad \ln \lambda = \frac{1}{2}(grad \ln |d\varphi|^2) \tag{II.3.36}$$

dir.

(iv)

$$\mathcal{V}(grad\, \lambda) = 0 \Leftrightarrow \mu^{\mathcal{H}} = 0 \Leftrightarrow \mathcal{F} \text{ Riemanniandır.} \tag{II.3.37}$$

İspat. φ dilationı λ olan bir yatay konform submersiyon olsun.

$$\lambda^2 g^{\mathcal{H}} = \varphi^* g^N$$

olduğundan

$$L_V(\lambda^2 g^{\mathcal{H}}) = 0 \tag{II.3.38}$$

dır.

(i) $X, Y \in \Gamma(\mathcal{H})$ ve $V \in \Gamma(\mathcal{V})$ olsun. (II.3.38) den

$$\begin{aligned}
0 &= L_V(\lambda^2 g^{\mathcal{H}})(X,Y) \\
&= (L_V\lambda^2)g^{\mathcal{H}}(X,Y) + \lambda^2(L_V g^{\mathcal{H}})(X,Y) \\
&= 2\lambda V(\lambda)g^{\mathcal{H}}(X,Y) + \lambda^2 V(g^{\mathcal{H}}(X,Y)) - \lambda^2 g^{\mathcal{H}}(L_V X, Y) - \lambda^2 g^{\mathcal{H}}(X, L_V Y) \\
&= 2\lambda V(\lambda)g^{\mathcal{H}}(X,Y) + \lambda^2 V(g^{\mathcal{H}}(X,Y)) - \lambda^2 g^{\mathcal{H}}(\nabla^\circ_V X, Y) - \lambda^2 g^{\mathcal{H}}(X, \nabla^\circ_V Y) \\
&= 2\lambda V(\lambda)g^{\mathcal{H}}(X,Y) + \lambda^2(\nabla^\circ_V g^{\mathcal{H}})(X,Y) \\
&= 2\lambda V(\lambda)g^{\mathcal{H}}(X,Y) + \lambda^2 v(V)g^{\mathcal{H}}(X,Y)
\end{aligned}$$

bulunur. Böylece

$$\begin{aligned} \lambda^2 v(V) &= -2\lambda V(\lambda) \quad , \quad \forall V \in \Gamma(\mathcal{V}) \\ v(V) &= -d(\ln \lambda^2)(V) \quad , \quad \forall V \in \Gamma(\mathcal{V}) \\ v &= -d(\ln \lambda^2) \end{aligned}$$

elde edilir.

(ii) $X, Y \in \Gamma(\mathcal{H})$ için

$$\begin{aligned} A_X^{\mathcal{H}} Y &= \mathcal{V}(\nabla_X Y) \\ &= \sum_{i=n+1}^{m} g(\nabla_X Y, V_i) V_i \end{aligned}$$

yazılabilir. Kozsul eşitliğinden

$$\begin{aligned} A_X^{\mathcal{H}} Y &= \frac{1}{2} \sum_{i=n+1}^{m} [X g(Y, V_i) + Y g(X, V_i) - V_i g(X, Y) \\ &- g(X, [Y, V_i]) + g(Y, [X, V_i]) + g(V_i, [X, Y])] V_i \end{aligned}$$

dir. Buradan

$$\begin{aligned} A_X^{\mathcal{H}} Y &= \frac{1}{2} \sum_{i=n+1}^{m} g(V_i, [X, Y]) V_i - \frac{1}{2} \sum_{i=n+1}^{m} V_i(g(X, Y)) V_i \\ &= \frac{1}{2} \{\mathcal{V}([X, Y]) - \sum_{i=n+1}^{m} V_i(g(X, Y)) V_i\} \end{aligned}$$

olur. Ayrıca

$$\begin{aligned} \sum_{i=n+1}^{m} V_i(g(X, Y)) V_i &= \sum_{i=n+1}^{m} (\nabla^{\circ}_{V_i} g)(X, Y) V_i \\ &= \sum_{i=n+1}^{m} (v(V_i) g(X, Y)) V_i \\ &= \sum_{i=n+1}^{m} (-d(\ln \lambda^2)(V_i) g(X, Y)) V_i \\ &= \sum_{i=n+1}^{m} \{-g(grad \ln \lambda^2, V_i)\} g(X, Y)) V_i \end{aligned}$$

$$= -\sum_{i=n+1}^{m}\{g(\mathcal{V}(grad\ \ln\lambda^2),V_i)V_i\}g(X,Y)$$
$$= -\mathcal{V}(grad\ \ln\lambda^2)g(X,Y)$$
$$= -2\mathcal{V}(grad\ \ln\lambda)g(X,Y)$$

olduğundan

$$A_X^{\mathcal{H}}Y = \frac{1}{2}\mathcal{V}[X,Y] + < X,Y > \mathcal{V}(grad\ \ln\lambda)$$

bulunur.

(iii)

(a) (II.3.15) ve (II.3.33) birleştirilirse $\forall V \in \Gamma(\mathcal{V})$ için

$$\begin{aligned} 2g(\mu^{\mathcal{H}},V) &= g(grad\ \ln\lambda^2,V) \\ 2g(\mu^{\mathcal{H}},V) &= g(\mathcal{V}(grad\ \ln\lambda^2),V) \end{aligned}$$

bulunur. Buradan

$$\mu^{\mathcal{H}} = \mathcal{V}(grad\ \ln\lambda)$$

yazılabilir.

$$grad\ \ln\lambda = \frac{1}{2}grad\ \ln|d\varphi|^2$$

olduğundan

$$\mu^{\mathcal{H}} = \mathcal{V}(grad\ \ln\lambda) = \frac{1}{2}\mathcal{V}(grad\ \ln|d\varphi|^2)$$

dir.

(b) $\mathcal{H}(grad\,\lambda) = 0$ ise

$$grad\,\lambda = \mathcal{V}(grad\,\lambda)$$

olur. Öyleyse (a) dan

$$\mu^{\mathcal{H}} = grad\ \ln\lambda = \frac{1}{2}(grad\ \ln|d\varphi|^2)$$

olduğu kolayca görülür.

(iv)

$$
\begin{aligned}
\mathrm{V}(\mathrm{grad}\,\lambda) = 0 \quad & \Leftrightarrow \mathcal{V}(grad\,\ln\lambda) = 0 \\
& \Leftrightarrow \mu^{\mathcal{H}} = 0 \\
& \Leftrightarrow B^{\mathcal{H}} = 0 \\
& \Leftrightarrow \mathcal{H} \text{ total geodeziktir} \\
& \Leftrightarrow \mathcal{V} \text{ Riemanniandır.} \\
& \Leftrightarrow \mathcal{F} \text{ konformdur.}
\end{aligned}
$$

III. BÖLÜM

RİEMANN MANİFOLDLARI ARASINDA HARMONİK DÖNÜŞÜMLER VE MORFİZMLER

Beş kısımdan oluşan bu bölümün ilk kısmında C^∞ manifoldlar arasında tanımlı bir C^∞ dönüşümün ikinci temel formu ve tensiyon alanı tanıtılmıştır. İkinci kısımda bir C^∞ dönüşümün enerjisi ve enerjinin birinci varyasyonu ele alınmıştır. Üçüncü kısım stress-enerji tensörü ve bu tensörü içeren conversation kuralının tanıtılmasına ayrılmıştır. Dördüncü kısımda yüzeylerden tanımlanan harmonik dönüşümlerin bazı özel durumları ve minimal kritik (branched) immersiyonların davranışı ele alınmıştır. Beşinci kısım ise harmonik morfizmlerin tanımı ve karakterizasyonuna ayrılmıştır.

III.1.İkinci Temel Form ve Tensiyon Alanı

$M = (M, g)$ ve $N = (N, h)$ Riemann manifoldları ve

$$\varphi : M \to N$$

bir C^∞ dönüşüm olsun. φ nin türev dönüşümü $d\varphi$,

$$T^*M \otimes \varphi^{-1}TN = Hom(TM, \varphi^{-1}TN) \to M$$

vektör demetinin bir kesiti olarak düşünülebilir. $Hom(TM, \varphi^{-1}TN) \to M$ vektör demeti, M manifoldu üzerindeki ∇^M Levi-Civita konneksiyonu ve ∇^φ pull-back konneksiyonundan indirgenen ∇ konneksiyonuna sahiptir. ∇ konneksiyonunun $d\varphi \in \Gamma(T^*M \otimes \varphi^{-1}TN)$ kesitine uygulanmasıyla φ nin $T^*M \otimes T^*M \otimes \varphi^{-1}TN \to M$ vektör demetinin bir kesiti olan ikinci temel formuna ulaşılır:

III.1.1.Tanım. (M, g) ve (N, h) Riemann manifoldları ve

$$\varphi : M \to N$$

bir C^∞ dönüşüm olsun. Bu durumda φ nin **ikinci temel formu**, $d\varphi \in \Gamma(T^*M \otimes \varphi^{-1}TN)$ olmak üzere $\nabla d\varphi$ ile gösterilir ve $X, Y \in \Gamma(TM)$ için

$$\begin{aligned} \nabla d\varphi : \Gamma(TM) \times \Gamma(TM) &\to \Gamma(\varphi^{-1}TN) \\ (X, Y) &\to \nabla d\varphi(X, Y) \end{aligned}$$

$$\nabla d\varphi(X,Y) = (\nabla_X d\varphi)(Y) = \nabla^{\varphi}_X d\varphi(Y) - d\varphi(\nabla^M_X Y) \qquad \text{(III.1.1)}$$

şeklinde tanımlanır[11].

III.1.1.Önerme. M^m, N^n Riemann manifoldları ve

$$\varphi : (M^m, g) \to (N^n, h)$$

bir C^∞ dönüşüm olsun. M manifoldu üzerinde $(x^1, ..., x^m)$ lokal koordinat sistemini, N üzerinde ise $(y^1, ..., y^n)$ lokal koordinat sistemini gözönüne alalım. Bu durumda φ nin ikinci temel formunun lokal koordinatlardaki ifadesi

$$(\nabla d\varphi)_{ij} = \nabla d\varphi(\frac{\partial}{\partial x^i}, \frac{\partial}{\partial x^j}) = \varphi^{\gamma}_{;ij} \frac{\partial}{\partial y^{\gamma}} \qquad \text{(III.1.2)}$$

biçimindedir. Burada $\varphi^{\gamma}_{;ij}$ ifadesindeki (;) bu türevin ikinci mertebeden kovaryant türev olduğunu gösterir[1].

İspat. $(x^1, ..., x^m)$, M^m üzerinde; $(y^1, ..., y^n)$ ise N^n manifoldu üzerinde bir lokal koordinat sistemi olsun. Bu durumda

$$(\nabla d\varphi)_{ij} = \nabla d\varphi(\frac{\partial}{\partial x^i}, \frac{\partial}{\partial x^j})$$

$$(\nabla d\varphi)_{ij} = \nabla^{\varphi}_{\frac{\partial}{\partial x^i}} d\varphi(\frac{\partial}{\partial x^j}) - d\varphi(\nabla^M_{\frac{\partial}{\partial x^i}} \frac{\partial}{\partial x^j})$$

$$(\nabla d\varphi)_{ij} = \nabla^{\varphi}_{\frac{\partial}{\partial x^i}} (\frac{\partial \varphi^{\gamma}}{\partial x^j} \frac{\partial}{\partial y^{\gamma}}) - d\varphi(\Gamma^k_{ij} \frac{\partial}{\partial x^k})$$

olduğundan

$$(\nabla d\varphi)_{ij} = \frac{\partial^2 \varphi^{\gamma}}{\partial x^i \partial x^j} \frac{\partial}{\partial y^{\gamma}} - \Gamma^k_{ij} \frac{\partial \varphi^{\gamma}}{\partial x^k} \frac{\partial}{\partial y^{\gamma}} + \frac{\partial \varphi^{\gamma}}{\partial x^j} \nabla^{\varphi}_{\frac{\partial}{\partial x^i}} \frac{\partial}{\partial y^{\gamma}} \qquad \text{(III.1.3)}$$

bulunur. Ayrıca

$$\nabla^{\varphi}_{\frac{\partial}{\partial x^i}} \frac{\partial}{\partial y^\gamma} = \nabla^{N}_{d\varphi(\frac{\partial}{\partial x^i})} \frac{\partial}{\partial y^\gamma} = \frac{\partial \varphi^\beta}{\partial x^i} L^{\alpha}_{\gamma\beta} \frac{\partial}{\partial y^\alpha}$$

eşitliği (III.1.3) de yerine yazılırsa

$$(\nabla d\varphi)_{ij} = \frac{\partial^2 \varphi^\gamma}{\partial x^i \partial x^j} \frac{\partial}{\partial y^\gamma} - \Gamma^k_{ij} \frac{\partial \varphi^\gamma}{\partial x^k} \frac{\partial}{\partial y^\gamma} + \frac{\partial \varphi^\gamma}{\partial x^j} \frac{\partial \varphi^\beta}{\partial x^i} L^{\alpha}_{\gamma\beta} \frac{\partial}{\partial y^\alpha} \qquad \text{(III.1.4)}$$

olur. (III.1.4) deki son terimde α ile γ ve i ile j yer değiştirilirse

$$(\nabla d\varphi)_{ij} = \left(\frac{\partial^2 \varphi^\gamma}{\partial x^i \partial x^j} - \Gamma^k_{ij} \frac{\partial \varphi^\gamma}{\partial x^k} + L^{\gamma}_{\alpha\beta} \frac{\partial \varphi^\alpha}{\partial x^i} \frac{\partial \varphi^\beta}{\partial x^j}\right) \frac{\partial}{\partial y^\gamma} \qquad \text{(III.1.5)}$$

elde edilir. Bu durumda

$$\varphi^\gamma_{;ij} = \frac{\partial^2 \varphi^\gamma}{\partial x^i \partial x^j} - \Gamma^k_{ij} \frac{\partial \varphi^\gamma}{\partial x^k} + L^{\gamma}_{\alpha\beta} \frac{\partial \varphi^\alpha}{\partial x^i} \frac{\partial \varphi^\beta}{\partial x^j} \qquad \text{(III.1.6)}$$

gösterimi kullanılacak olursa

$$(\nabla d\varphi)_{ij} = \varphi^\gamma_{;ij} \frac{\partial}{\partial y^\gamma}$$

ifadesine ulaşılır. Burada Γ^k_{ij} ve $L^{\gamma}_{\alpha\beta}$ seçilen koordinat sistemlerine göre sırasıyla (M^m, g) ve (N^n, h) Riemann manifoldları üzerindeki Christoffel sembolleridir.

III.1.2.Önerme. M , N Riemann manifoldları ve

$$\varphi : (M, g) \to (N, h)$$

bir C^∞ dönüşüm olsun. Bu durumda φ nin ikinci temel formu simetriktir[11].

İspat. $\forall X, Y \in \Gamma(TM)$ için

$$\nabla^{\varphi}_X (d\varphi(Y)) - \nabla^{\varphi}_Y (d\varphi(X)) - d\varphi([X, Y]) = 0 \qquad \text{(III.1.7)}$$

olduğundan

$$\nabla d\varphi(X, Y) = \nabla d\varphi(Y, X)$$

bulunur.

III.1.2.Tanım. M ve N Riemann manifoldları olsun. Bu durumda bir

$$\varphi : M \to N$$

C^∞ dönüşümü için $\nabla d\varphi = 0$ oluyorsa ya da denk olarak φ, M üzerindeki geodezikleri N üzerindeki geodeziklere lineer olarak taşıyorsa φ ye **total geodeziktir** denir[1].

III.1.3.Önerme. M, R nin veya S^1 in bir açık altkümesi; N bir Riemann manifoldu ve

$$\varphi : M \to N$$

bir C^∞ dönüşüm olsun. Bu durumda φ nin total geodezik olması için gerek ve yeter şart φ nin yay uzunluğunun bir katı ile parametrelendirilmiş bir geodezik olmasıdır[1].

III.1.1.Örnek.

$$\varphi : U \subset R^m \to R^n$$

dönüşümünün total geodezik olması için gerek ve yeter şart φ nin bir afin dönüşüm yani $A \in \mathcal{F}^{m\times n}$, $b \in R^n$ için

$$\varphi(x) = Ax + b$$

olmasıdır.

III.1.2.Örnek. (Altmanifoldlar)

(M, g) , (N, h) Riemann manifoldları ve

$$\varphi : M \to N$$

bir inclusion dönüşümü ya da bir izometrik immersiyon olsun. $\varphi^{-1}TN$ pull-back demeti teğet ve normal demetinin direkt toplamı olarak

$$\varphi^{-1}TN = \tau M \oplus \mathcal{V}M \quad , \quad X = X^T + X^\perp \tag{III.1.8}$$

biçiminde yazılabilir. $d\varphi$ türev dönüşümünün, TM ile TM nin $d\varphi$ altında $\varphi^{-1}TN$ pull-back demetindeki görüntüsü olan τM yi özdeşleştirdiği düşünülürse $X, Y \in \Gamma(TM)$ için

$$\nabla^\varphi_X(d\varphi(Y)) = \nabla^N_X Y$$

eşitliğine ulaşılır. Bu durumda $d\varphi(\nabla^M_X Y)$, $\nabla^N_X Y$ nin tanjant bileşeni ve $\nabla d\varphi(X,Y)$ ise $\nabla^N_X Y$ nin normal bileşenidir. Böylece $\nabla d\varphi(X,Y)$, N deki $\varphi(M)$ immersed altmanifoldunun $B(X,Y)$ ile gösterilen ikinci temel formu olur. Dolayısıyla $\varphi : M \to N$ bir izometrik immersiyonun ikinci temel formunun N deki $\varphi(M)$ immersed altmanifoldunun ikinci temel formuna eşit olduğunu söyleyebiliriz.

III.1.3.Tanım. N bir Riemann manifoldu ve M; N nin bir altmanifoldu olsun. Eğer M üzerinde bir parametrik geodezik eğri N de bir parametrik geodezik oluyorsa M ye **total geodeziktir** denir[19].

N bir Riemann manifoldu ve M; N nin bir altmanifoldu olsun. M nin total geodezik olması için gerek ve yeter şart $i : M \to N$ inclusion dönüşümünün total geodezik olmasıdır. Total geodezik inclusion dönüşümlerine en basit örnek

$$\begin{array}{rcl} R^m & \to & R^n \\ (x_1,...,x_m) & \to & (x_1,...,x_m,0,...,0) \quad , \quad 1 \le m \le n \end{array}$$

ile tanımlanan standart inclusion dönüşümleridir.

III.1.4.Tanım. (M^m, g) , (N^n, h) Riemann manifoldları ve

$$\varphi : M^m \to N^n$$

bir C^∞ dönüşüm olsun. φ nin **tensiyon alanı** $\tau(\varphi) \in \Gamma(\varphi^{-1}TN)$ ile gösterilir ve

$$\tau(\varphi) = div\, d\varphi = -d^* d\varphi = iz\, \nabla d\varphi = \sum_{i=1}^{m} \nabla d\varphi(e_i, e_i) \qquad \text{(III.1.9)}$$

şeklinde tanımlanır. Burada $\{e_1,...,e_m\}$, M üzerinde bir ortonormal bazdır[11].

III.1.4.Önerme. (M,g), (N,h) Riemann manifoldları , $\{x^1,...,x^m\}$ ve $\{y^1,...,y^n\}$ sırasıyla M ve N üzerinde lokal koordinat sistemleri olsun. Bu durumda bir

$$\varphi : M \to N$$

C^∞ dönüşümünün tensiyon alanının lokal koordinatlardaki ifadesi

$$\tau(\varphi)^\gamma \quad = g^{ij}\varphi^\gamma_{;ij}$$

$$= g^{ij}(\frac{\partial^2 \varphi^\gamma}{\partial x^i \partial x^j} - \Gamma_{ij}^k \frac{\partial \varphi^\gamma}{\partial x^k} + L_{\alpha\beta}^\gamma \frac{\partial \varphi^\alpha}{\partial x^i}\frac{\partial \varphi^\beta}{\partial x^j}) \quad \text{(III.1.10)}$$

$$= \Delta^M \varphi^\gamma + g(grad\, \varphi^\alpha, grad\, \varphi^\alpha) L_{\alpha\beta}^\gamma \quad \text{(III.1.11)}$$

olmak üzere

$$\tau(\varphi) = \tau(\varphi)^\gamma (\frac{\partial}{\partial y^\gamma}) \quad \text{(III.1.12)}$$

biçimindedir. Burada Δ^M, M üzerindeki Laplasyan ve Γ_{ij}^k ve $L_{\alpha\beta}^\gamma$, sırasıyla M ve N deki Christoffel sembolleridir[11].

İspat.

$$\begin{aligned}
\tau(\varphi)^\gamma &= g^{ij}\varphi^\gamma_{;ij} \\
&= g^{ij}(\frac{\partial^2 \varphi^\gamma}{\partial x^i \partial x^j} - \Gamma_{ij}^k \frac{\partial \varphi^\gamma}{\partial x^k} + L_{\alpha\beta}^\gamma \frac{\partial \varphi^\alpha}{\partial x^i}\frac{\partial \varphi^\beta}{\partial x^j}) \\
&= g^{ij}(\frac{\partial^2 \varphi^\gamma}{\partial x^i \partial x^j} - \Gamma_{ij}^k \frac{\partial \varphi^\gamma}{\partial x^k}) + g^{ij}\frac{\partial \varphi^\beta}{\partial x^j} g^{ki}\frac{\partial \varphi^\alpha}{\partial x^i} g_{ki} L_{\alpha\beta}^\gamma \\
&= g^{ij}(\frac{\partial^2 \varphi^\gamma}{\partial x^i \partial x^j} - \Gamma_{ij}^k \frac{\partial \varphi^\gamma}{\partial x^k}) + g(g^{ij}\frac{\partial \varphi^\beta}{\partial x^j}\frac{\partial}{\partial x^i}, g^{ki}\frac{\partial \varphi^\alpha}{\partial x^i}\frac{\partial}{\partial x^k}) L_{\alpha\beta}^\gamma \\
&= \Delta^M \varphi^\gamma + g(grad\, \varphi^\alpha, grad\, \varphi^\alpha) L_{\alpha\beta}^\gamma
\end{aligned}$$

dir. Böylece ispat tamamlanmış olur.

Eğer $\{x^1, ..., x^m\}$ ve $\{y^1, ..., y^n\}$ sırasıyla $x \in M$ ve $\varphi(x) \in N$ noktalarındaki normal koordinatlar ise x noktasında M nin Christoffel sembolleri, $\varphi(x)$ noktasında da N nin Christoffel sembolleri sıfır olacağından φ dönüşümünün x deki tensiyon alanı

$$\tau(\varphi)^\gamma_x = \sum_{i=1}^m \frac{\partial^2 \varphi^\gamma}{(\partial x^i)^2} = (\Delta \varphi^\gamma)(x) \quad \text{(III.1.13)}$$

ile ifade edilir.

III.2.Harmonik Dönüşümler

III.2.1.Tanım. M ve N sırasıyla m ve n boyutlu Riemann manifoldları $x \in M$ ve

$$\varphi : M \to N$$

bir C^∞ dönüşüm olsun. φ nin **enerji yoğunluğu** $e(\varphi)$ ile gösterilen ve

$$\begin{aligned} e(\varphi) : M &\rightarrow [0,\infty) \\ x &\rightarrow e(\varphi)_x = \frac{1}{2}|d\varphi_x|^2 \end{aligned} \qquad \text{(III.2.1)}$$

şeklinde tanımlanan bir C^∞ fonksiyondur. Burada $\{e_1, ..., e_m\}$, T_xM tanjant uzayı için bir ortonormal baz ve $|d\varphi_x|^2$

$$|d\varphi_x|^2 = \sum_{i=1}^{m} h(d\varphi_x(e_i), d\varphi_x(e_i))$$

ile tanımlanan Hilbert-Schmidt normudur[13].

M ve N Riemann manifoldları $\varphi : M \rightarrow N$ bir C^∞ dönüşüm ve $x \in M$ olsun. Bu durumda $\{e_1, ..., e_m\}$, T_xM için bir ortonormal baz olmak üzere

$$\begin{aligned} |d\varphi_x|^2 &= \sum_{i=1}^{m} h(d\varphi_x(e_i), d\varphi_x(e_i)) \\ &= \sum_{i=1}^{m} \varphi^* h(e_i, e_i) \\ &= Tr_g \varphi^* h \end{aligned}$$

yazılabileceğinden φ nin x noktasındaki enerji yoğunluğu

$$e(\varphi)_x = \frac{1}{2} Tr_g \varphi^* h = \frac{1}{2} < g, \varphi^* h > \qquad \text{(III.2.2)}$$

biçiminde de ifade edilebilir.

III.2.2.Tanım. (M, g) ve (N, h) Riemann manifoldları ; D, M nin bir kompakt tanım kümesi ve

$$\varphi : M \rightarrow N$$

bir C^∞ dönüşüm olsun. φ nin **enerji integrali**, φ nin enerji yoğunluğunun integrali olarak tanımlanır ve $E(\varphi; D)$ ile gösterilir. Yani

$$E(\varphi; D) = \int_D e(\varphi)\, v_g = \frac{1}{2}\int_D |d\varphi|^2\, v_g \qquad \text{(III.2.3)}$$

dir[13].

$E(\varphi; D) \geq 0$ dır ve $E(\varphi; D) = 0$ olması için gerek ve yeter şart φ nin D üzerinde sabit olmasıdır. Eğer M manifoldu kompakt ise $E(\varphi; M)$ yerine $E(\varphi)$ gösterimi kullanılır. Enerji integrali sadece g ve h metriklerine bağlıdır.

III.2.1.Önerme. 2-boyutlu tanım kümeleri üzerinde enerji integrali konform değişmezdir[1].

III.2.3.Tanım. (M, g) ve (N, h) Riemann manifoldları ve

$$C^\infty(M, N) = \{\varphi | \varphi : M \to N\,, \varphi \text{ bir } C^\infty \text{ dönüşüm}\}$$

kümesini gözönüne alalım. $\varphi \in C^\infty(M, N)$ dönüşümü, kompakt bir bölge üzerinde

$$E(\,.\,; D) : C^\infty(M, N) \to R$$

ile tanımlanan enerji fonksiyonelinin kritik noktası ise φ ye **harmoniktir** denir[11].

III.2.4.Tanım. M, N Riemann manifoldları ve

$$\varphi : M \to N$$

bir C^∞ dönüşüm olsun. φ nin bir C^∞ **varyasyonu**, $\varepsilon > 0$ olmak üzere

$$\begin{array}{rcl} \varphi : M \times (-\varepsilon, \varepsilon) & \to & N \\ (x, t) & \to & \varphi_t(x) \end{array}$$

biçiminde tanımlanır öyleki $\varphi_0 = \varphi$ dir[13].

$\{\varphi_t\}$, C^∞ olarak sadece bir $t \in (-\varepsilon, \varepsilon)$ parametresine bağlı C^∞ dönüşümlerin bir ailesi olarak düşünülebilir.

III.2.5.Tanım. M, N Riemann manifoldları

$$\varphi : M \to N$$

bir C^∞ dönüşüm ve $x \in M$ olsun. $\forall x \in M$ için $t \to \varphi_t(x)$ dönüşümü $\varphi(x) \in N$ noktasından geçen bir C^∞ eğri tanımlar. Bu eğrinin

$$v(x) = \frac{\partial\, \varphi_t(x)}{\partial\, t}\Big|_{t=0} \in T_{\varphi(x)}N$$

ile tanımlanan ve $\varphi^{-1}TN$ pull-back demetinin bir kesiti olan hız vektörüne φ_t nin **varyasyon vektör alanı** denir[1].

Tersine $\varphi^{-1}TN$ pull-back demetinin bir kesiti olan v için φ nin

$$\varphi_t(x) = \exp_{\varphi(x)}(tv(x))$$

ile tanımlı bir tek olmayan $\{\varphi_t\}$ ailesi vardır[1].

III.2.6.Tanım. M, N Riemann manifoldları , D, M nin kompakt bir altkümesi ve D°, D nin içi olsun. Bu durumda

$$\varphi : M \to N$$

C^∞ dönüşümünün bir C^∞ $\{\varphi_t\}$ varyasyonu $\forall t$ için $M\backslash D^\circ$ üzerinde $\varphi_t = \varphi$ şartını sağlıyorsa $\{\varphi_t\}$ varyasyonu D içinde desteklenir denir[1].

Tanım III.2.3 ü bir başka şekilde aşağıdaki gibi vermek mümkündür:

III.2.7.Tanım. (M, g) ve (N, h) Riemann manifoldları olsun.

$$\varphi : M \to N$$

C^∞ dönüşümü M nin bütün D kompakt bölgeleri ve D içinde desteklenen bütün C^∞ $\{\varphi_t\}$ varyasyonları için

$$\frac{d}{dt}E(\varphi_t; D)|_{t=0} = 0 \qquad \text{(III.2.4)}$$

şartını sağlıyorsa φ ye bir **harmonik dönüşüm** denir[13].

III.2.8.Tanım. (M, g), (N, h) Riemann manifoldları , $x \in M$ ve

$$\varphi : M \to N$$

bir C^∞ dönüşüm olsun. $\varphi^{-1}TN$ pull-back demeti üzerindeki **pull-back metrik** $<,>$ ile gösterilir ve $v, w \in \Gamma(\varphi^{-1}TN)$ olmak üzere $x \in M$ noktasında

$$< v, w >_x = h_{\varphi(x)}(v(x), w(x)) \qquad \text{(III.2.5)}$$

şeklinde tanımlanır[1].

III.2.2.Önerme. (Enerjinin Birinci Varyasyonu)

M ve N Riemann manifoldları ,

$$\varphi : M \to N$$

bir C^∞ dönüşüm ve $\{\varphi_t\}$, φ nin $D \subset M$ kompakt altkümesi içinde desteklenen bir C^∞ varyasyonu olsun. Bu durumda $<,>$, $\varphi^{-1}TN$ pull-back demeti üzerindeki pull-back metrik olmak üzere

$$\frac{d}{dt}E(\varphi_t; D)|_{t=0} = -\int_D < v, \tau(\varphi) > v_g \qquad \text{(III.2.6)}$$

dir. Burada $x \in D$ ve $v(x)$, $\{\varphi_t\}$ nin

$$v(x) = \frac{\partial\, \varphi_t(x)}{\partial\, t}|_{t=0}$$

ile tanımlanan varyasyon vektör alanıdır[11].

İspat. D, M nin kompakt bir altkümesi; $\{\varphi_t\}$, φ nin D içinde desteklenen bir C^∞ varyasyonu ve $v \in \Gamma(\varphi^{-1}TN)$ bir varyasyon vektör alanı olsun. M üzerindeki $\{e_1, ..., e_m\}$ lokal ortonormal çatısını gözönüne alalım.

$$\begin{aligned} \phi : M \times (-\varepsilon, \varepsilon) &\to N \\ (x, t) &\to \phi(x, t) = \varphi_t(x) \end{aligned}$$

fonksiyonunu ve

$$E = \phi^{-1}TN \to M \times (-\varepsilon, \varepsilon)$$

vektör demetini tanımlayalım. E demeti üzerindeki pull-back konneksiyon ∇^ϕ ile gösterilsin. M manifoldu üzerindeki bir X vektör alanı $M \times (-\varepsilon, \varepsilon)$ üzerinde bir vektör alanı olarak düşünülebileceğinden

$$[\frac{\partial}{\partial\, t}, X] = 0$$

olur. $e_i, \frac{\partial}{\partial t} \in \Gamma(TM)$ için (III.1.7) den

$$\nabla^\phi_{\frac{\partial}{\partial t}} d\phi(e_i) - \nabla^\phi_{e_i} d\phi(\frac{\partial}{\partial\, t}) - d\phi([\frac{\partial}{\partial\, t}, e_i]) = 0$$

$$\nabla^{\phi}_{\frac{\partial}{\partial t}} d\phi(e_i) = \nabla^{\phi}_{e_i} d\phi(\frac{\partial}{\partial t}) \qquad \text{(III.2.7)}$$

yazılabilir. Diğer taraftan

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}(e(\varphi)) &= \frac{1}{2}\frac{d}{dt}|d\phi|^2 \\ &= \frac{1}{2}\frac{d}{dt} < d\phi, d\phi > \\ &= \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\sum_{i=1}^{m} < d\phi(e_i), d\phi(e_i) > \\ &= \sum_{i=1}^{m} < \nabla^{\phi}_{\frac{\partial}{\partial t}} d\phi(e_i), d\phi(e_i) > \qquad \text{(III.2.8)} \end{aligned}$$

dir. (III.2.7), (III.2.8) de yerine yazılırsa

$$\frac{d}{dt}(e(\varphi)) = \sum_{i=1}^{m} < \nabla^{\phi}_{e_i} d\phi(\frac{\partial}{\partial t}), d\phi(e_i) > \qquad \text{(III.2.9)}$$

elde edilir. Ayrıca

$$\frac{d}{dt}E(\varphi_t; D)|_{t=0} = \frac{d}{dt}\int_D e(\varphi_t)\, v_g|_{t=0}$$

olduğundan (III.2.9) kullanılarak

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}E(\varphi_t; D)|_{t=0} &= \int_D \sum_{i=1}^{m} < \nabla^{\phi}_{e_i} d\phi(\frac{\partial}{\partial t}), d\phi(e_i) > v_g|_{t=0} \\ &= \int_D \sum_{i=1}^{m} < \nabla^{\varphi}_{e_i} v, d\varphi(e_i) > v_g \qquad \text{(III.2.10)} \end{aligned}$$

bulunur. Şimdi M üzerinde

$$\psi(-) = < v, d\varphi(-) > \qquad \text{(III.2.11)}$$

biçiminde bir 1-form tanımlayalım. Divergens tanımı (III.2.11) e uygulanırsa

$$\begin{aligned} div\,\psi &= \sum_{i=1}^{m}(\nabla_{e_i}\psi)e_i \\ &= \sum_{i=1}^{m}\{e_i(\psi(e_i)) - \psi(\nabla^{M}_{e_i}e_i)\} \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \sum_{i=1}^{m}\{e_i(< v, d\varphi(e_i) >) - < v, d\varphi(\nabla^M_{e_i} e_i) >\} \\
&= \sum_{i=1}^{m}\{< \nabla^{\varphi}_{e_i} v, d\varphi(e_i) > \\
&+ < v, \nabla^{\varphi}_{e_i}(d\varphi(e_i)) - d\varphi(\nabla^M_{e_i} e_i) >\} \qquad \text{(III.2.12)}
\end{aligned}
$$

elde edilir. v, D üzerinde kompakt desteğe sahip olduğundan ψ 1-formu da D üzerinde kompakt desteğe sahiptir. Böylece divergens teoreminden

$$\int_D (div\, \psi)\, v_g = 0 \qquad \text{(III.2.13)}$$

olur. (III.2.12) ile (III.2.13) birleştirilerek

$$\int_D \sum_{i=1}^{m} < \nabla^{\varphi}_{e_i} v, d\varphi(e_i) > v_g = -\int_D \sum_{i=1}^{m} < v, \nabla d\varphi(e_i, e_i) > v_g \quad \text{(III.2.14)}$$

bulunur. (III.2.10), (III.2.14) eşitliğinin sol tarafında yerine yazılırsa

$$
\begin{aligned}
\frac{d}{dt}E(\varphi_t; D)|_{t=0} &= -\int_D \sum_{i=1}^{m} < v, \nabla d\varphi(e_i, e_i) > v_g \\
&= -\int_D < v, \tau(\varphi) > v_g
\end{aligned}
$$

eşitliğine ulaşılır.

III.2.1.Teorem. M, N Riemann manifoldları ,

$$\varphi : M \to N$$

bir C^∞ dönüşüm ve D, M nin bir kompakt altkümesi olsun. Bu durumda φ nin harmonik olması için gerek ve yeter şart $\tau(\varphi) = 0$ olmasıdır[1].

İspat. $\{\varphi_t\}$, φ nin $D \subset M$ kompakt altkümesi içinde desteklenen bir C^∞ varyasyonu ve v, $\{\varphi_t\}$ nin varyasyon vektör alanı olmak üzere Önerme III.2.2 den

$$\frac{d}{dt}E(\varphi_t; D)|_{t=0} = -\int_D < v, \tau(\varphi) > v_g$$

dir. Bu durumda

$$\frac{d}{dt}E(\varphi_t; D)|_{t=0} = 0$$

olması için gerek ve yeter şart $\tau(\varphi) = 0$ olmasıdır.

III.2.1.Hatırlatma.

(i) (III.2.6) ile verilen türev aşağıdaki şekilde de yazılabilir:

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}E(\varphi_t; D)|_{t=0} &= \int_D < \nabla^{\phi}_{\frac{\partial}{\partial t}} d\varphi_t, d\varphi > v_g|_{t=0} \\
&= \int_D < \nabla^{\phi}\frac{\partial \phi}{\partial t}, d\varphi > v_g|_{t=0} \\
&= \int_D < \nabla^{\varphi} v, d\varphi > v_g \\
&= \int_D < v, d^* d\varphi > v_g
\end{aligned}$$

(ii) M, N Riemann manifoldları ve $D \subset M$ kompakt bir altküme olsun.

$$\varphi : M \to N$$

C^∞ dönüşümünü gözönüne alalım. Eğer D, ∂D ile gösterilen bir C^∞ kenara sahip ise (III.2.11) ile tanımlanan ψ 1-formunun ∂D üzerinde sıfır olması için gerek ve yeter şart varyasyon vektör alanının ∂D ye dik olmasıdır. Buradan varyasyon vektör alanları ∂D kenarına dik olan φ_t varyasyonları için de (III.2.6) eşitliğinin sağlandığı görülür[1].

(iii) $\tau(\varphi) = 0$ denkleminin C^2-sınıfından çözümü C^∞ dur.

III.2.9.Tanım. M, N Riemann manifoldları ve

$$\varphi : M \to N$$

bir harmonik dönüşüm olsun. Bu durumda $\tau(\varphi) = 0$ denklemi **harmonik denklem** veya **tensiyon alanı** denklemi olarak adlandırılır[1].

III.2.1.Örnek. (Öklidyen Uzaylar arasındaki harmonik dönüşümler)

R^m ve R^n sırasıyla m ve n boyutlu Öklidyen Uzaylar ve $D \subset R^m$ bir kompakt altküme olmak üzere

$$\varphi : R^m \to R^n$$

C^∞ dönüşümü için

$$\begin{aligned}
E(\varphi; D) &= \int_D e(\varphi)\, v_g \\
&= \frac{1}{2}\int_D |d\varphi|^2\, v_g \\
&= \frac{1}{2}\int_D \sum_{i=1}^{m} < d\varphi(\frac{\partial}{\partial x^i}), d\varphi(\frac{\partial}{\partial x^i}) > dx^1...dx^m \\
&= \frac{1}{2}\int_D \sum_{i=1}^{m} < \sum_{\alpha=1}^{n} \frac{\partial \varphi^\alpha}{\partial x^i}\frac{\partial}{\partial y^\alpha}, \sum_{\alpha=1}^{n} \frac{\partial \varphi^\alpha}{\partial x^i}\frac{\partial}{\partial y^\alpha} > dx^1...dx^m \\
&= \frac{1}{2}\int_D \sum_{i,\alpha}(\frac{\partial \varphi^\alpha}{\partial x^i})^2\, dx^1...dx^m
\end{aligned}$$

bulunur. Ayrıca R^m deki standart metrik gözönüne alınırsa

$$\tau(\varphi)^\gamma = \varphi^\gamma_{;ii} = \sum_i \frac{\partial^2 \varphi^\gamma}{(\partial x^i)^2} = \Delta(\varphi^\gamma) \qquad \text{(III.2.15)}$$

elde edilir. Burada $\{x^1, ..., x^m\}$ ve $\{y^1, ..., y^n\}$ sırasıyla R^m ve R^n üzerinde standart lokal koordinat sistemleri ve Δ, R^m deki standart Laplasyandır. Öyleyse bir C^∞ $\varphi : U \subset R^m \to R^n$ dönüşümünün harmonik olması için gerek ve yeter şart herbir $\varphi^\gamma : U \subset R^m \to R$ bileşeninin harmonik fonksiyonlar olmasıdır.

III.2.2.Örnek. (Keyfi bir Riemann manifoldundan R^n Öklidyen Uzayına tanımlanan harmonik dönüşümler)

(M^m, g) bir Riemann manifoldu, R^n Öklidyen Uzay ve

$$\varphi : M^m \to R^n$$

bir C^∞ dönüşüm olsun. Bu durumda $\{x^1, ..., x^m\}$ ve $\{y^1, ..., y^n\}$ sırasıyla M ve R^n üzerinde standart lokal koordinat sistemleri olmak üzere $i, j = 1, ..., m$, $\gamma = 1, ..., n$ için

$$\begin{aligned}
\tau(\varphi)^\gamma &= g^{ij}\varphi^\gamma_{;ij} \\
&= g^{ij}(\frac{\partial^2 \varphi^\gamma}{\partial x^i \partial x^j} - \Gamma^k_{ij}\frac{\partial \varphi^\gamma}{\partial x^k}) \\
&= \Delta^M(\varphi^\gamma)
\end{aligned}$$

bulunur. Burada Δ^M, M deki Laplace-Beltrami operatörüdür. Böylece "bir Riemann manifoldunun açık U altkümesinden R ye tanımlı bir dönüşümün harmonik olması için gerek ve yeter şart bu dönüşümün U da harmonik olmasıdır" sonucuna ulaşırız.

III.2.3.Örnek. (Total geodezik dönüşümler)

M, N Riemann manifoldları ve

$$\varphi : M \to N$$

bir C^∞ dönüşüm olsun. Teorem III.2.1 den φ nin harmonik olması için gerek ve yeter şart $\tau(\varphi) = 0$ olmasıdır. Böylece Tanım III.1.2 gözönüne alınırsa total geodezik dönüşümlerin harmonik olduğu kolayca görülür. Ayrıca

$$\begin{aligned} d(e(\varphi)) &= \frac{1}{2}d(|d\varphi|^2) \\ &= \frac{1}{2}d(< d\varphi, d\varphi >) \\ &= < \nabla d\varphi, d\varphi > \\ &= 0 \end{aligned}$$

olduğundan total geodezik dönüşümlerin sabit enerji yoğunluğuna sahip olduğu söylenebilir. Yani total geodezik dönüşümler sabit enerji yoğunluğuna sahip harmonik dönüşümlerdir.

Daha genel olarak aşağıdaki önerme verilebilir:

III.2.3.Önerme. Total geodezik dönüşümlerin rankı sabittir[11].

İspat. M, N Riemann manifoldları ve

$$\varphi : M \to N$$

bir total geodezik dönüşüm olsun. $r \geq 1$ için

$$d|\wedge^r d\varphi|^2 = 2 < \nabla \wedge^r d\varphi, \wedge^r d\varphi >= 0$$

olduğundan $|\wedge^r d\varphi|$, M üzerinde sabittir. Şimdi

$$r = max\,\{rank\, d\varphi(x) : x \in M\}$$

olsun. Bu durumda $| \wedge^r d\varphi|$ hiçbiryerde sıfır olamaz. Böylece her noktada φ nin rakının sabit ve r ye eşit olduğunu söyleyebiliriz.

III.2.10.Tanım. M, N Riemann manifoldları ve

$$\varphi : M \to N$$

bir izometrik immersiyon olsun. φ nin **ortalama eğriliği** (veya N deki $\varphi(M)$ immersed altmanifoldunun ortalama eğriliği) μ^M ile gösterilir ve

$$\mu^M = \frac{1}{m} \dot{I}z\, B = \sum_{i=1}^{m} B(e_i, e_i) \tag{III.2.16}$$

şeklinde tanımlanır. Burada $\{e_1, ..., e_m\}$, M de bir ortonormal baz ve B, $\varphi(M)$ altmanifoldunun ikinci temel formudur[1].

Şimdi giriş bölümünde yüzeyler için verdiğimiz Teorem B yi keyfi bir izometrik immersiyon için ifade edebiliriz:

III.2.4.Önerme. M, N Riemann manifoldları ve

$$\varphi : M \to N$$

bir izometrik immersiyon olsun. Bu durumda

$$\tau(\varphi) = \dot{I}z\, B = (boy\, M)\mu^M \tag{III.2.17}$$

dir. Öyleyse bir izometrik immersiyonun harmonik olması için gerek ve yeter şart bu izometrik immersiyonun minimal olmasıdır[1].

İspat.

$$\varphi : M \to N$$

izometrik immersiyonunun ikinci temel formu, N deki $\varphi(M)$ immersed altmanifoldunun ikinci temel formuna eşit olduğundan (III.2.17) kullanılarak

$$\tau(\varphi) = \nabla d\varphi = \dot{I}z\, B = (boy\, M)\mu^M$$

bulunur. Böylece Teorem III.2.1 gözönüne alınırsa ispat tamamlanır.

III.2.4.Örnek. (Geodezikler)

M, 1-boyutlu ve N, n-boyutlu Riemann manifoldları olsun. Bu durumda

$$\varphi : M \to N^n$$

C^∞ dönüşümü bir parametrik eğri olarak düşünülebilir. N üzerindeki $\{y^1, ..., y^n\}$ koordinat dönüşümleri için $\gamma = 1, ..., n$ olmak üzere

$$\begin{aligned} \tau(\varphi) &= \tau(\varphi)^\gamma \frac{\partial}{\partial y^\gamma} \\ &= \left(\frac{d^2\varphi^\gamma}{dt^2} + L^\gamma_{\alpha\beta} \frac{d\varphi^\alpha}{dt}\frac{d\varphi^\beta}{dt}\right)\frac{\partial}{\partial y^\gamma} \end{aligned}$$

bulunur. Böylece "R nin bir açık altkümesinden veya S^1 den keyfi bir Riemann manifolduna tanımlanan bir C^∞ dönüşümün harmonik olması için gerek ve yeter şart bu dönüşümün yay uzunluğunun bir katı ile parametrelendirilmiş bir geodezik olmasıdır" sonucuna ulaşırız. Denk olarak Önerme III.1.3 den "1-boyutlu bir Riemann manifoldundan tanımlanan bir C^∞ dönüşümün harmonik olması için gerek ve yeter şart bu dönüşümün total geodezik olmasıdır."

III.2.5.Önerme. M^m, N^n ve P^k Riemann manifoldları olsun. Bu durumda

$$\varphi : M^m \to N^n \quad \text{ve} \quad \psi : N^n \to P^k$$

C^∞ dönüşümlerinin bileşkesi olan $\psi \circ \varphi$ dönüşümünün ikinci temel formu

$$\nabla d(\psi \circ \varphi) = d\psi(\nabla d\varphi) + \nabla d\psi(d\varphi, d\varphi) \qquad \text{(III.2.18)}$$

ile verilir. Lokal koordinatlarda ise $i, j = 1, ..., m$; $a, b = 1, ..., n$ ve $\alpha = 1, ..., k$ için

$$(\psi \circ \varphi)^\alpha_{;ij} = \psi^\alpha_a \varphi^a_{;ij} + \psi^\alpha_{;ab}\varphi^a_i \varphi^b_j \qquad \text{(III.2.19)}$$

dir[11].

İspat.

$$d(\psi \circ \varphi) = d\psi \circ d\varphi$$

olduğundan $X, Y \in \Gamma(TM)$ için

$$\begin{aligned}
\nabla d(\psi \circ \varphi)(X, Y) &= \nabla_X^{\psi\circ\varphi} d(\psi \circ \varphi)(Y) - d(\psi \circ \varphi)(\nabla_X^M Y) \\
&= \nabla_X^{\psi\circ\varphi} (d\psi \circ d\varphi)(Y) - (d\psi \circ d\varphi)(\nabla_X^M Y) \\
&= \nabla_X^{\psi\circ\varphi} d\psi(d\varphi(Y)) - d\psi(d\varphi(\nabla_X^M Y)) \\
&= \nabla_X^{\psi\circ\varphi} d\psi(d\varphi(Y)) - d\psi(\nabla_X^{\varphi} d\varphi(Y) - \nabla d\varphi(X, Y)) \\
&= \nabla_X^{\psi\circ\varphi} d\psi(d\varphi(Y)) - d\psi(\nabla_X^{\varphi} d\varphi(Y)) + d\psi(\nabla d\varphi(X, Y)) \\
&= \nabla_{d(\psi\circ\varphi)(X)}^{P} d\psi(d\varphi(Y)) - d\psi(\nabla_{d\varphi(X)}^{N} d\varphi(Y)) + d\psi(\nabla d\varphi(X, Y)) \\
&= \nabla_{d\varphi(X)}^{\psi} d\psi(d\varphi(Y)) - d\psi(\nabla_{d\varphi(X)}^{N} d\varphi(Y)) + d\psi(\nabla d\varphi(X, Y)) \\
&= d\psi(\nabla d\varphi(X, Y)) + \nabla d\psi(d\varphi(X), d\varphi(Y)) \\
&= (d\psi(\nabla d\varphi) + \nabla d\psi(d\varphi, d\varphi))(X, Y)
\end{aligned}$$

bulunur. Böylece

$$\nabla d(\psi \circ \varphi) = d\psi(\nabla d\varphi) + \nabla d\psi(d\varphi, d\varphi)$$

eşitliğine ulaşılır. Lokal koordinatlarda

$$\begin{aligned}
d(\psi \circ \varphi)(\frac{\partial}{\partial x^i}) &= (d\psi \circ d\varphi)(\frac{\partial}{\partial x^i}) \\
&= d\psi(d\varphi(\frac{\partial}{\partial x^i})) \\
&= d\psi(\frac{\partial \varphi^a}{\partial x^i} \frac{\partial}{\partial y^a}) \\
&= \frac{\partial \varphi^a}{\partial x^i} \frac{\partial \psi^\alpha}{\partial y^a} \frac{\partial}{\partial z^\alpha}
\end{aligned}$$

olduğundan

$$(\psi \circ \varphi)_i^\alpha = \psi_a^\alpha \varphi_i^a \tag{III.2.20}$$

elde edilir. Şimdi (III.2.20) eşitliğinin x^j ye göre yeniden türevini alalım:

$$\frac{\partial}{\partial x^j}(\frac{\partial \varphi^a}{\partial x^i} \frac{\partial \psi^\alpha}{\partial y^a}) = \frac{\partial^2 \varphi^a}{\partial x^i \partial x^j} \frac{\partial \psi^\alpha}{\partial y^a} + \frac{\partial \varphi^a}{\partial x^i} \frac{\partial^2 \psi^\alpha}{\partial y^a \partial y^b} \frac{\partial \varphi^b}{\partial x^j}$$

bulunur. Buradan

$$(\psi \circ \varphi)_{ij}^\alpha = \psi_a^\alpha \varphi_{ij}^a + \psi_{ab}^\alpha \varphi_i^a \varphi_j^b \tag{III.2.21}$$

yazılabilir. Burada

$$\varphi^a_{ij} = \frac{\partial^2 \varphi^a}{\partial x^i \partial x^j}$$

ikinci mertebeden kısmı türevdir. Eğer x, $\varphi(x)$ ve $\psi(\varphi(x))$ noktalarındaki lokal koordinatlar normal koordinatlar olarak seçilirse ikinci mertebeden kısmı türevler, ikinci mertebeden kovaryant kısmı türevlere eşit olur. Böylece (III.2.21), (III.2.19) a dönüşür.

Böylece aşağıdaki sonuca ulaşılır:

III.2.1.Sonuç. M^m, N^n ve P^k Riemann manifoldları olsun. Bu durumda

$$\varphi : M^m \to N^n \quad ve \quad \psi : N^n \to P^k$$

C^∞ dönüşümlerinin bileşkesi olan $\psi \circ \varphi$ dönüşümünün tensiyon alanı

$$\tau(\psi \circ \varphi) = d\psi(\Gamma(\varphi)) + \dot{I}z\, \nabla d\psi(d\varphi, d\varphi) \tag{III.2.22}$$

ile verilir. Burada $\{e_1, ..., e_m\}$, M üzerinde bir ortonormal baz olmak üzere

$$\nabla d\psi(d\varphi, d\varphi) = \sum_{i=1}^{m} \nabla d\psi(d\varphi(e_i), d\varphi(e_i))$$

dir. Lokal koordinatlarda (III.2.22)

$$\tau(\psi \circ \varphi)^\gamma = \psi^\gamma_a \tau(\varphi)^a + g^{ij} \psi^\gamma_{;ab} \varphi^a_i \varphi^b_j \tag{III.2.23}$$

biçiminde ifade edilir[1].

İspat. Tensiyon alanı tanımı ve (III.2.18) kullanılarak

$$\begin{aligned}
\tau(\psi \circ \varphi) &= \sum_{i=1}^{m} \nabla d(\psi \circ \varphi)(e_i, e_i) \\
&= \sum_{i=1}^{m} \{d\psi(\nabla d\varphi(e_i, e_i)) + \nabla d\psi(d\varphi(e_i), d\varphi(e_i))\} \\
&= d\psi(\sum_{i=1}^{m} \nabla d\varphi(e_i, e_i)) + \sum_{i=1}^{m} \nabla d\psi(d\varphi(e_i), d\varphi(e_i)) \\
&= d\psi(\tau(\varphi)) + \dot{I}z\, \nabla d\psi(d\varphi, d\varphi)
\end{aligned}$$

elde edilir. Lokal koordinatlarda ise (III.2.19) dan

$$\begin{aligned}
\tau(\psi\circ\varphi)^\gamma &= g^{ij}(\psi\circ\varphi)^\gamma_{;ij} \\
&= g^{ij}(\psi^\gamma_a\varphi^a_{;ij} + \psi^\gamma_{;ab}\varphi^a_i\varphi^b_j) \\
&= \psi^\gamma_a g^{ij}\varphi^a_{;ij} + g^{ij}\psi^\gamma_{;ab}\varphi^a_i\varphi^b_j
\end{aligned}$$

bulunur.

(III.2.22) den iki harmonik dönüşümün bileşkesinin daima harmonik olmayacağını söyleyebiliriz:

III.2.5.Örnek.

$$\begin{aligned}
\varphi : R &\to R^2 \\
x &\to \varphi(x) = (x,0)
\end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned}
\psi : R^2 &\to R \\
(x,y) &\to x^2 - y^2
\end{aligned}$$

dönüşümlerini gözönüne alalım. $\Gamma(\varphi) = 0$ ve $\Gamma(\psi) = 0$ olduğundan φ ve ψ harmonik dönüşümlerdir. Ancak

$$\begin{aligned}
\psi\circ\varphi : R &\to R \\
x &\to x^2
\end{aligned}$$

ile tanımlanan bileşke dönüşümü için $\Gamma(\psi\circ\varphi) = 2$ olduğundan $\psi\circ\varphi$ harmonik değildir.

III.2.11.Tanım. M, N ve P Riemann manifoldları

$$\varphi : M \to N$$

bir C^∞ dönüşüm olsun. Bu durumda

$$\psi : N \to P$$

bir lokal harmonik dönüşüm olmak üzere $\psi\circ\varphi$ bileşke dönüşümünü harmonik yapan φ, C^∞ dönüşümlerinin sınıfına **harmonik morfizmlerin sınıfı** denir[13].

Ancak φ bir harmonik dönüşüm olmak üzere $\psi \circ \varphi$ bileşke dönüşümünü harmonik yapan ψ, C^∞ dönüşümlerinin sınıfı daha kolay izah edilebilir:

III.2.6.Önerme. (Total geodezik dönüşümler ile harmonik dönüşümlerin bileşkesi)

M, N ve P Riemann manifoldları

$$\varphi : M \to N$$

bir harmonik dönüşüm ve

$$\psi : N \to P$$

bir total geodezik dönüşüm olsun. Bu durumda $\psi \circ \varphi$ bileşke dönüşümü harmoniktir[1].

İspat. φ harmonik ise $\tau(\varphi) = 0$ dır. Diğer taraftan ψ total geodezik ise $\nabla d\psi = 0$ olur. Böylece (III.2.22) den ispat açıktır.

III.2.7.Önerme. (Altmanifoldlara dönüşümler)

M, N ve P Riemann manifoldları

$$\varphi : M \to N$$

bir C^∞ dönüşüm ve

$$\psi : N \to P$$

bir izometrik immersiyon olsun. Bu durumda φ nin harmonik olması için gerek ve yeter şart $\tau(\psi \circ \varphi)$ nin N ye dik olmasıdır[1].

İspat. (III.2.22) denkleminde $d\psi(\tau(\varphi))$, $\tau(\psi \circ \varphi)$ kesitinin teğet bileşenidir ve φ harmonik olduğundan bu teğet bileşen sıfırdır. Öyleyse $\tau(\psi \circ \varphi)$ kesiti sadece normal bileşene sahiptir. Buradan $\tau(\psi \circ \varphi) \in \Gamma(TN^\perp)$ olduğu kolayca görülür.

III.2.8.Önerme. (Küreye dönüşümler)

M bir Riemann manifoldu, S^n bir n-küre ve

$$\varphi : M \to S^n$$

bir C^∞ dönüşüm olsun.

$$i : S^n \to R^{n+1}$$

inclusion dönüşümü olmak üzere $\phi = i \circ \varphi$ dönüşümünü gözönüne alalım. Bu durumda φ nin harmonik olması için gerek ve yeter şart bir $v : M \to R$ fonksiyonu için $\Delta\phi = v\phi$ olmasıdır. Üstelik bu durumda

$$v = -|d\phi|^2 = -|d\varphi|^2$$

dir[1].

İspat. R^{n+1} üzerinde Christoffel sembolleri sıfır olduğundan

$$\phi = i \circ \varphi : M \to R^{n+1}$$

dönüşümü için $\tau(\phi) = \Delta\phi$ yazılabilir. Önerme III.2.7 den φ nin harmonik olması için gerek ve yeter şart $\Delta\phi$ nin S^n küresine dik olmasıdır. $\Delta\phi$ nin S^n küresine dik olması için gerek ve yeter şart ise $v : M \to R$ bir fonksiyon olmak üzere $\Delta\phi = v\phi$ olmasıdır. Bu durumda (III.2.22) deki bileşke kuralı gereği

$$\Delta\phi = \tau(i \circ \varphi) = -|d\phi|^2\phi$$

olur ve ispat tamamlanır.

III.2.12.Tanım. M bir Riemann manifoldu,

$$\varphi : M \to S^n$$

bir C^∞ dönüşüm ve $i : S^n \to R^{n+1}$ inclusion dönüşümü olsun. $\phi = i \circ \varphi$ dönüşümünün bileşenleri M üzerindeki Laplasyanın aynı karakteristik değere sahip bütün karakteristik fonksiyonları ise φ ye **karakteristik dönüşüm** denir[1].

III.2.9.Önerme. M bir Riemann manifoldu ve

$$\varphi : M \to S^n$$

bir C^∞ dönüşüm olsun. Bu durumda φ nin karakteristik dönüşüm olması için gerek ve yeter şart φ nin sabit enerji yoğunluğuna sahip bir harmonik dönüşüm olmasıdır[1].

İspat. Karakteristik dönüşümlerin tanımından $\phi = i \circ \varphi$ nin bileşenleri aynı karakteristik değere sahip karakteristik fonksiyonlar olduğundan

$$\Delta \phi^\alpha = v\phi^\alpha \quad (\alpha = 1, ..., n+1)$$

yazılabilir. Öyleyse Önerme III.2.8 den φ nin harmonik olduğu söylenebilir. ϕ nin bileşenleri aynı karakteristik değere sahip karakteristik fonksiyonlar olduğundan $v = -|d\varphi|^2$ sabittir. Buradan

$$d(e(\varphi)) = \frac{1}{2} d(|d\varphi|^2) = 0$$

bulunur. Bu ise φ nin sabit enerji yoğunluğuna sahip olduğunu gösterir.

III.3.6.Örnek. (Radyal Projeksiyon)

$n \in \{1, 2, ...\}$ için

$$\begin{aligned} \varphi : R^{n+1} \backslash \{0\} &\to S^n \\ x &\to \frac{x}{|x|} \end{aligned}$$

radyal projeksiyonunu gözönüne alalım.

$$i : S^n \to R^{n+1}$$

inclusion dönüşümü olmak üzere $\phi = i \circ \varphi$ için

$$\Delta \phi = -\frac{n}{|x|} \phi$$

dir. Böylece Önerme III.2.8 den φ nin harmonik olduğu söylenebilir.

III.2.10.Önerme. (Küre üzerindeki Laplasyan)

$U' \subset R^m$ bir açık altküme olmak üzere

$$F : U' \to R$$

C^∞ dönüşümünün bir kısıtlanmışı

$$f : U \to R \quad , \quad U \subset S^{m-1}$$

fonksiyonu olsun. Bu durumda U nun her noktasında

$$\Delta^{S^{m-1}} f = \Delta^{R^m} F - \frac{\partial^2 F}{\partial r^2} - (m-1)\frac{\partial F}{\partial r} \qquad \text{(III.2.24)}$$

dir. Burada $\frac{\partial}{\partial r}$ radyal yöndeki türevi göstermektedir[11].

İspat.

$$i : S^{m-1} \to R^m$$

inclusion dönüşümü ve $\{e_1, ..., e_{m-1}\}$, S^{m-1} için bir ortonormal baz olsun. $x \in S^{m-1}$ alalım. S^{m-1} üzerinde $\gamma_k(0) = x$ ve $\gamma_k'(0) = e_k(x)$ olacak şekilde

$$\gamma_k : (-\varepsilon, \varepsilon) \to S^{m-1}$$

geodeziklerini tanımlayalım. S^{m-1} e dik yöndeki türevi $\frac{\partial}{\partial r}$ ile gösterelim ve $\gamma_k''(0) = -\frac{\partial}{\partial r}$ olsun. $U' \subset R^m$ bir açık altküme olmak üzere

$$F : U' \to R$$

C^∞ dönüşümünün bir kısıtlanmışı

$$f : U \to R \quad , \quad U \subset S^{m-1}$$

fonksiyonu ise

$$f = F \circ i$$

yazılabilir. Böylece (III.2.22) den

$$\begin{aligned}
\Delta^{S^{m-1}} f &= \Delta^{S^{m-1}}(F \circ i) \\
&= dF(\tau(i)) + iz\, \nabla dF(di, di) \\
&= dF\Big(\sum_{k=1}^{m-1} \frac{\partial^2 i^\alpha}{(\partial x^k)^2}\Big) + \sum_{k=1}^{m-1} \nabla dF(di(e_k), di(e_k)) \\
&= dF\Big(\sum_{k=1}^{m-1} \gamma_k''(0)\Big) + \sum_{k=1}^{m-1} \nabla dF(e_k, e_k) \\
&= dF\Big(\sum_{k=1}^{m-1} \big(-\frac{\partial}{\partial r}\big)\Big) + \Delta^{R^m}(F) - \frac{\partial^2 F}{\partial r^2} \\
&= -(m-1)\frac{\partial F}{\partial r} + \Delta^{R^m}(F) - \frac{\partial^2 F}{\partial r^2}
\end{aligned}$$

elde edilir ve ispat tamamlanır.

III.2.7.Örnek. (Küresel Harmonikler)

$U' \subset R^m$ bir açık altküme olmak üzere

$$F : U' \to R$$

(p-yinci dereceden harmonik polinom) p-yinci dereceden harmonik fonksiyonunun S^{m-1} küresinin bir açığı üzerine kısıtlanmışı

$$f : U \to R$$

olsun. F, p-yinci dereceden harmonik fonksiyon ise

$$F = r^p f \qquad \text{(III.2.25)}$$

yazılabilir. (III.2.25) ve Önerme III.2.10 gözönüne alınırsa

$$\Delta^{S^{m-1}} f = -p(p+m-2)f \qquad \text{(III.2.26)}$$

elde edilir.

III.2.11.Önerme. (Polinom Harmonik Dönüşümler)

$$F : R^m \to R^n$$

bileşenleri aynı dereceden birer polinom olan bir harmonik dönüşüm olsun.

$$\varphi : S^{m-1} \to S^{n-1}$$

dönüşümü F nin kısıtlanmışı olarak düşünülürse φ sabit enerji yoğunluğuna sahip bir harmonik dönüşüm olur. Bu durumda φ nin enerji yoğunluğu

$$e(\varphi) = \frac{1}{2}p(p+m-2) \qquad \text{(III.2.27)}$$

ile verilir[1].

İspat. Önerme III.2.10 daki ifadede F yerine $F^\alpha : R^m \to R$, $(\alpha = 1, ..., n)$, koordinat fonksiyonları ve F^α ların kısıtlanmışı da $\varphi^\alpha : S^{m-1} \to R$ fonksiyonları olarak düşünülürse (III.2.26) dan $\forall \alpha = 1, ..., n$ için

$$\Delta^{S^{m-1}} \varphi^\alpha = -p(p+m-2)\varphi^\alpha \tag{III.2.28}$$

yazılabilir. Ayrıca

$$i : S^{n-1} \to R^n$$

inclusion dönüşümü olmak üzere

$$\phi = i \circ \varphi : S^{m-1} \to R^n$$

dönüşümü için de (III.2.28) den

$$\Delta \phi = -p(p+m-2)\phi$$

elde edilir. Böylece Önerme III.2.8 den φ nin harmonik olduğu söylenebilir. Burada

$$v = -|d\varphi|^2 = -p(p+m-2)$$

olacağından enerji yoğunluğu tanımından

$$e(\varphi) = \frac{1}{2} p(p+m-2)$$

eşitliğine ulaşılır.

III.2.13.Tanım. Herbir bileşeni aynı p-yinci dereceden homojen polinom olan

$$F : R^m \to R^n$$

harmonik dönüşümüne veya bu dönüşümün S^{m-1} küresine kısıtlanmışı olan

$$\phi : S^{m-1} \to R^n$$

dönüşümüne **p-yinci mertebeden homojen polinom harmonik dönüşümler** veya **karakteristik dönüşümler** denir[1].

III.2.12.Önerme. Küreler arasında tanımlanan bir harmonik dönüşümün sabit enerji yoğunluğuna sahip olması için gerek ve yeter şart bu dönüşümün bir karakteristik dönüşüm olmasıdır (veya denk olarak bu dönüşümün herbir bileşeninin aynı mertebeden birer küresel harmonik olmasıdır)[1].

III.2.14.Tanım. $p+1$-inci mertebeden, $(p=0,1,...)$, bir homojen

$$P : R^m \to R$$

polinomunun gradiyenti

$$|(grad\,P)_x|^2 = |x|^{2p} \quad , \quad x \in R^m \tag{III.2.29}$$

şartını sağlıyorsa bu polinoma **eikonal polinom** denir[1]. Bu durumda

$$F = grad\,P : R^m \to R^m$$

dönüşümü p-yinci dereceden homojen polinom dönüşümdür ve F,

$$\varphi : S^{m-1} \to S^{m-1}$$

dönüşümüne kısıtlanır. P harmonik ise $grad\,P$ de harmoniktir. Gerçekten P harmonik ise

$$\Delta P = \frac{\partial^2 P}{\partial x_i^2} = 0 \quad i = 1, ..., m$$

dır. Diğer taraftan

$$\Delta(grad\,P) = (\Delta(grad\,P)^1, ..., \Delta(grad\,P)^m)$$

ve

$$\Delta(grad\,P)^i = \frac{\partial}{\partial x_i}(\Delta P) = 0$$

olduğundan $grad\,P$ de harmoniktir. Böylece Önerme III.2.11 den φ de harmonik olur.

III.2.8.Örnek.

$$\begin{array}{rcl} P : R^5 & \to & R \\ (u,v,x,y,z) & \to & \frac{1}{3}u^3 - uv^2 + \frac{1}{2}u(x^2+y^2-2z^2) + \frac{\sqrt{3}}{2}v(x^2-y^2) + \sqrt{3}xyz \end{array}$$

ile tanımlanan 3.dereceden bir homojen P polinomu için

$$\begin{array}{rcl} |grad\,P|^2 & = & u^4+v^4+x^4+y^4+z^4+2x^2u^2+2x^2z^2+2x^2v^2+2x^2y^2 \\ & + & 2y^2u^2+2y^2z^2+2y^2v^2+2u^2z^2+2z^2v^2+2v^2u^2 \\ & = & |x|^4 \end{array}$$

bulunur ki bu P nin eikonal olduğunu gösterir. Ayrıca P harmoniktir. Öyleyse

$$F = grad\, P : R^5 \to R^5$$

dönüşümü de harmonik olur. Bu durumda Önerme III.2.11 den F nin kısıtlanmışı olan $\varphi : S^4 \to S^4$ dönüşümünün sabit enerji yoğunluklu bir harmonik dönüşüm olduğu söylenebilir. Yani φ bir kuadratik karakteristik dönüşümdür.

(M^m, g), (N^n, h) Riemann manifoldları ve

$$\varphi : M^m \to N^n$$

bir zayıf konform dönüşüm olsun. Bu durumda λ, φ nin konform faktörü ve Λ, φ nin kare konform faktörü olmak üzere (II.1.2) ve enerji yoğunluğunun tanımı gözönüne alınırsa $x \in M^m$ için

$$\Lambda(x) = \lambda(x)^2 = \frac{1}{m}|d\varphi_x|^2 = \frac{2}{m}e(\varphi)_x \qquad \text{(III.2.30)}$$

bulunur. Şimdi bir zayıf konform dönüşümün tensiyon alanını inceleyelim:

III.2.13.Önerme. (M^m, g), (N^n, h) Riemann manifoldları ve

$$\varphi : M^m \to N^n$$

bir zayıf konform dönüşüm olsun. Bu durumda bir regüler noktada φ nin tensiyon alanının normal bileşeni

$$(\tau(\varphi))^{\perp} = (boy\, M)\Lambda\mu^M \qquad \text{(III.2.31)}$$

ile verilir[1].

İspat. $\{e_1, ..., e_m\}$, regüler bir $x \in M^m$ noktasını merkez alan bir normal çatı sistemi olsun. Bu durumda x in bir komşuluğunda φ immersiyon olduğundan N^n üzerinde bir $\{e'_1, ..., e'_n\}$ lokal ortonormal çatısı vardır öyleki $i = 1, ..., m$ için Lemma II.1.1 den

$$d\varphi(e_i) = \lambda e'_i$$

dür. Buradan

$$\tau(\varphi) \quad = \quad \sum_{i=1}^{m} \nabla d\varphi(e_i, e_i)$$

$$
\begin{aligned}
&= \sum_{i=1}^{m}\{\nabla^{\varphi}_{e_i} d\varphi(e_i) - d\varphi(\nabla^{M}_{e_i} e_i)\} \\
&= \sum_{i=1}^{m} \nabla^{\varphi}_{e_i} d\varphi(e_i) \\
&= \sum_{i=1}^{m} \nabla^{\varphi}_{e_i} (\lambda e_i') \\
&= \sum_{i=1}^{m}\{e_i(\lambda) e_i' + \lambda \nabla^{\varphi}_{e_i} e_i'\} \\
&= \sum_{i=1}^{m} e_i(\lambda) e_i' + \sum_{i=1}^{m} \lambda \nabla^{N}_{d\varphi(e_i)} e_i' \\
&= \sum_{i=1}^{m} e_i(\lambda) e_i' + \sum_{i=1}^{m} \lambda^2 \nabla^{N}_{e_i'} e_i'
\end{aligned}
$$

elde edilir. Öyleyse

$$
\begin{aligned}
(\tau(\varphi))^{\perp} &= (\sum_{i=1}^{m} \lambda^2 \nabla^{N}_{e_i'} e_i')^{\perp} \\
&= \sum_{i=1}^{m} \lambda^2 B(e_i, e_i) \\
&= \lambda^2 \dot{I}z\, B \\
&= \lambda^2 (boy\, M) \mu^M \\
&= (boy\, M) \Lambda \mu^M
\end{aligned}
$$

eşitliğine ulaşılır ve böylece ispat tamamlanır.

III.3.Stress-Enerji Tensörü

(M, g) ve (N, h) Riemann manifoldları olmak üzere

$$\varphi : M \to N$$

bir C^{∞} dönüşüm olsun. Bu kısımda φ nin enerjisinin, tanım kümesi üzerindeki g metriğinin değişmesiyle nasıl değişeceği incelenecektir.

g metriğinin bir 1-parametreli C^∞ varyasyonunu yani

$$g(0) = g$$

olacak şekilde bir C^∞ $g(u)$ ailesini düşünelim.

$$\delta g = \frac{\partial g}{\partial u}|_{u=0} \in \Gamma(\odot^2 T^* M) \qquad \text{(III.3.1)}$$

olsun. Böylece δg, M üzerinde bir simetrik, 2-kovaryant tensör alanı olur.

III.3.1.Lemma. (Tanım kümesi üzerindeki metriğin varyasyonu)

M kompakt olmak üzere (M, g) , (N, h) Riemann manifoldları ve

$$\varphi : M \to N$$

bir C^∞ dönüşüm olsun. Bu durumda M üzerindeki metriğin bir $g(u)$ varyasyonuna göre φ nin enerjisinin birinci varyasyonu

$$\frac{dE(\varphi)}{du}|_{u=0} = \frac{1}{2}\int_M < S(\varphi), \delta g > v_g \qquad \text{(III.3.2)}$$

ile verilir. Burada $S(\varphi) \in \Gamma(\odot^2 T^* M)$, M üzerinde

$$S(\varphi) = e(\varphi) g - \varphi^* h$$

şeklinde tanımlı bir simetrik, 2-kovaryant tensör alanıdır[1].

İspat. M üzerindeki lokal koordinatlar $(x^1, ..., x^m)$ olmak üzere

$$g(u) = g_{ij} dx^i dx^j$$

yazılabilir. Bu durumda

$$\begin{aligned} \frac{dE(\varphi)}{du}|_{u=0} &= \frac{d}{du}\int_M e(\varphi)\, v_g|_{u=0} \\ &= \int_M \frac{de(\varphi)}{du}\, v_g|_{u=0} \\ &= \int_M \frac{de(\varphi)}{dg_{ij}} \delta g_{ij}\, v_g|_{u=0} \\ &+ \int_M e(\varphi) \frac{\partial}{\partial g_{ij}}(v_g) \delta g_{ij}|_{u=0} \end{aligned} \qquad \text{(III.3.3)}$$

dir. Ayrıca $v_g = \sqrt{\det\, g_{ij}}\, dx^1...dx^m$ olduğundan $a, b \in \{1, 2, ...\}$ için

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial\, g_{ab}}(v_g) &= \frac{1}{2}(\det\, g_{ij})^{-\frac{1}{2}}(kofaktör\, g_{ab})\, dx^1...dx^m \\
&= \frac{1}{2}(\det\, g_{ij})^{-1}(kofaktör\, g_{ab})(\det\, g_{ij})^{\frac{1}{2}}\, dx^1...dx^m \\
&= \frac{1}{2}g^{ab}v_g \qquad \text{(III.3.4)}
\end{aligned}
$$

ve

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial\, g_{ab}}(e(\varphi)) &= \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial\, g_{ab}}(|d\varphi|)^2 \\
&= \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial\, g_{ab}}(g^{ij}\varphi_i^\alpha\varphi_j^\beta h_{\alpha\beta}) \\
&= \frac{1}{2}\frac{\partial\, g^{ij}}{\partial\, g_{ab}}\varphi_i^\alpha\varphi_j^\beta h_{\alpha\beta} \\
&= -\frac{1}{2}g^{ia}g^{ib}\varphi_i^\alpha\varphi_j^\beta h_{\alpha\beta} \\
&= -\frac{1}{2}(\varphi^*h)^{ab} \qquad \text{(III.3.5)}
\end{aligned}
$$

bulunur. (III.3.4) ve (III.3.5), (III.3.3) de yerine yazılırsa

$$
\begin{aligned}
\frac{dE(\varphi)}{du}|_{u=0} &= \frac{1}{2}\int_M < e(\varphi)g^{ij} - (\varphi^*h)^{ij}, \delta g_{ij} > |_{u=0} \\
&= \frac{1}{2}\int_M < S(\varphi), \delta g > \, v_g
\end{aligned}
$$

bulunur.

III.3.1.Tanım. M kompakt olmak üzere (M, g), (N, h) Riemann manifoldları ve

$$\varphi : M \to N$$

bir C^∞ dönüşüm olsun. Bu durumda M üzerinde

$$S(\varphi) = e(\varphi)g - \varphi^*h \qquad \text{(III.3.6)}$$

şeklinde tanımlı simetrik, 2-kovaryant tensör alanına φ nin **stress-enerji tensörü** denir[1].

III.3.1.Önerme. M kompakt olmak üzere

$$\varphi : M \to N$$

Rieman manifoldları arasında sabit olmayan bir C^∞ dönüşüm olsun. Bu durumda φ nin tanım kümesi üzerindeki metrik değişimine göre enerji fonksiyonunun bir extremumu olması için gerek ve yeter şart $S(\varphi) = 0$ olmasıdır[1].

İspat. φ nin tanım kümesi üzerindeki metrik değişimine göre enerji fonksiyonunun bir extremumu olması için gerek ve yeter şart

$$\frac{dE(\varphi)}{du}|_{u=0} = 0$$

olmasıdır. Bu durumda (III.3.2) den $\delta g \neq 0$ olduğundan $S(\varphi) = 0$ olmalıdır.

III.3.1.Sonuç. Riemann manifoldları arasında tanımlı bir

$$\varphi : (M^m, g) \to (N^n, h)$$

C^∞ dönüşümünün tanım kümesi üzerindeki metrik değişimine göre enerji fonksiyonunun bir extremumu olması için gerek ve yeter şart φ nin sabit olması ya da $m = 2$ iken φ nin zayıf konform olmasıdır[1].

İspat. Önerme III.3.1 ve (III.3.6) eşitliği gözönüne alınırsa $S(\varphi) = 0$ olması için gerek ve yeter şart $\varphi^* h = e(\varphi)g$ olmasıdır. Bu durumda M üzerindeki bir $\{e_1, ..., e_m\}$ ortonormal bazı için

$$\sum_{i=1}^{m} \varphi^* h(e_i, e_i) = \sum_{i=1}^{m} e(\varphi) g(e_i, e_i) \qquad \text{(III.3.7)}$$

dir. Diğer taraftan zayıf konformluk şartı ve (III.2.30) eşitliği gözönüne alınarak $x \in M^m$ için

$$\sum_{i=1}^{m} h(d\varphi_x(e_i), d\varphi_x(e_i)) = \sum_{i=1}^{m} \frac{2}{m} e(\varphi) g(e_i, e_i) \qquad \text{(III.3.8)}$$

yazılabilir. Tanım I.1.31 kullanılarak (III.3.7) ve (III.3.8) birleştirilirse

$$(m-2)e(\varphi) = 0$$

elde edilir. Öyleyse $m = 2$ dir ya da $e(\varphi) = 0$ dır. $m = 2$ ve $e(\varphi) \neq 0$ ise $\Lambda(x) = e(\varphi) \neq 0$ ve φ zayıf konform olur. $e(\varphi) = 0$ ise $\frac{1}{2}|d\varphi|^2 = 0$ olacağından φ sabittir.

Sonuç III.3.1 ile Teorem III.2.1 birleştirilirse bir M^2 yüzeyinden tanımlanan zayıf konform dönüşümler için bir varyasyonel karakterizasyona ulaşılabilir. 2-boyutlu Riemann manifoldundan tanımlanan bir dönüşümün enerjisi konform değişmez olduğundan bu karakterizasyonu elde etmek için M^2 üzerinde bir konform yapıya sahip olmak yetecektir.

III.3.2.Sonuç. (Konform Harmonik Dönüşümler için varyasyonel karakterizasyon)

$$\varphi : (M^2, g) \to (N^n, h)$$

C^∞ dönüşümü kompakt bir Riemannian (ya da konform) yüzeyden bir Riemann manifolduna tanımlansın. Bu durumda φ nin tanım kümesi üzerindeki metriğin varyasyonlarına ve φ nin C^∞, $\{\varphi_t\}$ varyasyonlarına göre enerji fonksiyonelinin kritik noktası olması için gerek ve yeter şart φ nin bir zayıf konform harmonik dönüşüm olmasıdır[1].

İspat. φ, tanım kümesi üzerindeki metriğin varyasyonlarına göre enerji fonksiyonelinin kritik noktası ise Sonuç III.3.1 den φ zayıf konformdur. Ayrıca φ, kendisinin C^∞ $\{\varphi_t\}$ varyasyonlarına göre enerji fonksiyonelinin kritik noktası ise Teorem III.2.1 den φ harmoniktir. Böylece φ, zayıf konform harmonik dönüşüm olur.

III.3.2.Lemma. (M^m, g) ve (N^n, h) Riemann manifoldları ve

$$\varphi : (M^m, g) \to (N^n, h)$$

bir C^∞ dönüşüm olsun. Bu durumda

$$h(\tau(\varphi), d\varphi) = -div\, S(\varphi) \qquad \text{(III.3.9)}$$

dir. Yani $\forall X \in \Gamma(TM)$ için

$$h(\tau(\varphi), d\varphi(X)) = -(div\, S(\varphi))(X) \qquad \text{(III.3.10)}$$

dir. Burada $\{X_1, ..., X_m\}$ ve $\{e_1, ..., e_m\}$ sırasıyla M^m üzerinde keyfi ve ortonormal çatılar olmak üzere (I.3.17) deki tanımıyla $div\, S(\varphi)$

$$div : \Gamma(T^*M \otimes T^*M) \to \Gamma(T^*M)$$

$$\begin{aligned} div\, S(\varphi) &= \dot{I}z\, \nabla S(\varphi) \\ &= g^{ij} \nabla_{X_i}(S(\varphi))(X_j) \\ &= \sum_{i=1}^{m} (\nabla_{e_i}(S(\varphi))(e_i) \end{aligned}$$

ile verilir[1].

İspat. $x \in M^m$ noktasında bir normal çatı sistemini gözönüne alalım.

$$\begin{aligned} S(\varphi)(e_i, e_j) &= (e(\varphi)g - \varphi^* h)(e_i, e_j) \\ &= e(\varphi)g(e_i, e_j) - \varphi^* h(e_i, e_j) \\ &= \frac{1}{2}|d\varphi_x|^2 g_{ij} - h(d\varphi(e_i), d\varphi(e_j)) \\ &= \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{m} < d\varphi(e_k), d\varphi(e_k) > \delta_{ij} - < d\varphi(e_i), d\varphi(e_j) > \end{aligned}$$

olduğundan

$$\begin{aligned} (div\, S(\varphi))(e_j) &= \sum_{i=1}^{m} \nabla_{e_i}(S(\varphi)(e_i, e_j)) \\ &= \sum_{i=1}^{m} \nabla_{e_i}(\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{m} < d\varphi(e_k), d\varphi(e_k) > \delta_{ij} - < d\varphi(e_i), d\varphi(e_j) >) \\ &= \frac{1}{2}\sum_{i,k=1}^{m} e_i(< d\varphi(e_k), d\varphi(e_k) >)\delta_{ij} - \sum_{i=1}^{m} e_i(< d\varphi(e_i), d\varphi(e_j) >) \\ &= \sum_{i,k=1}^{m} < \nabla^{\varphi}_{e_i} d\varphi(e_k), d\varphi(e_k) > \delta_{ij} - \sum_{i=1}^{m} < \nabla^{\varphi}_{e_i} d\varphi(e_i), d\varphi(e_j) > \\ &- \sum_{i=1}^{m} < d\varphi(e_i), \nabla^{\varphi}_{e_i} d\varphi(e_j) > \\ &= \sum_{j,k=1}^{m} < \nabla^{\varphi}_{e_j} d\varphi(e_k), d\varphi(e_k) > - \sum_{i=1}^{m} < \nabla^{\varphi}_{e_i} d\varphi(e_i), d\varphi(e_j) > \\ &- \sum_{i=1}^{m} < d\varphi(e_i), \nabla^{\varphi}_{e_i} d\varphi(e_j) > \qquad \text{(III.3.11)} \end{aligned}$$

elde edilir. (III.3.11) de $k = i$ alınırsa

$$\begin{aligned}(div\, S(\varphi))(e_j) &= \sum_{i,j=1}^{m} < d\varphi(e_i), \nabla^{\varphi}_{e_j} d\varphi(e_i) - \nabla^{\varphi}_{e_i} d\varphi(e_j) > - \sum_{i=1}^{m} < \nabla^{\varphi}_{e_i} d\varphi(e_i), d\varphi(e_j) > \\ &= - < \tau(\varphi), d\varphi(e_j) >\end{aligned}$$

bulunur ve böylece ispat tamamlanır.

III.3.2.Önerme. (Conservation Kuralı) Bir harmonik dönüşümün stress-enerji tensörünün divergensi sıfırdır[1].

III.3.3.Önerme.

(i) (M, g) ve (N, h) Riemann manifoldları ve

$$\varphi : (M, g) \to (N, h)$$

bir C^{∞} immersiyon olsun. Bu durumda φ nin tensiyon alanının teğet bileşeninin sıfır olması için gerek ve yeter şart $div\, S(\varphi) = 0$ olmasıdır[1].

(ii) (M, g) ve (N, h) Riemann manifoldları ve

$$\varphi : (M, g) \to (N, h)$$

yoğun bir küme üzerinde bir C^{∞} submersiyon olsun. Bu durumda φ nin harmonik olması için gerek ve yeter şart $div\, S(\varphi) = 0$ olmasıdır[1].

İspat.

(i) φ nin tensiyon alanının teğet bileşeni sıfır olsun. Bu durumda $\forall X \in TM$ için

$$\begin{aligned}(div\, S(\varphi))(X) &= - < \tau(\varphi), d\varphi(X) > \\ &= - < \mathcal{V}(\tau(\varphi)) + \mathcal{H}(\tau(\varphi)), d\varphi(X) > \\ &= - < \mathcal{V}(\tau(\varphi)), d\varphi(X) > - < \mathcal{H}(\tau(\varphi)), d\varphi(X) > \\ &= 0\end{aligned}$$

olur. Tersine $div\, S(\varphi) = 0$ ise (III.3.9) dan $\forall X \in TM$ için

$$- < \tau(\varphi), d\varphi(X) >= 0$$

elde edilir. Buradan φ nin tensiyon alanının teğet bileşeninin sıfır olduğu görülür.

(ii) φ bir submersiyon ve harmonik dönüşüm olsun. Bu durumda Teorem III.2.1 ve Lemma III.3.2 den $div\, S(\varphi) = 0$ bulunur. Tersine $div\, S(\varphi) = 0$ ise $\forall X \in TM$ için ya $d\varphi(X) = 0$ ya da $\tau(\varphi) = 0$ dır. φ sabit olamayacağından $\tau(\varphi) = 0$ olur. Bu da φ nin harmonik olduğunu gösterir.

III.3.4.Önerme. (M^m, g) ve (N^n, h) Riemann manifoldları ve

$$\varphi : (M^m, g) \to (N^n, h)$$

bir zayıf konform dönüşüm olsun. Bu durumda φ nin tensiyon alanının teğet bileşeninin bütün regüler noktalarda sıfır olması için gerek ve yeter şart $m = 2$ ya da φ nin sabit konform faktöre sahip olmasıdır[1]. (Yani φ nin sabit ya da bir homotetik immersiyon olmasıdır.)

İspat. φ, λ konform faktörüne sahip bir zayıf konform dönüşüm olsun. Bu durumda (III.3.6) dan ve zayıf konformluk tanımından

$$\begin{aligned} S(\varphi) &= e(\varphi)g - \varphi^* h \\ &= \frac{m}{2}\lambda^2 g - \lambda^2 g \\ &= \frac{1}{2}\lambda^2(m-2)g \end{aligned} \qquad \text{(III.3.12)}$$

bulunur. Böylece $\{e_1, ..., e_m\}$, M^m üzerinde ortonormal bir çatı olmak üzere (III.3.12), $div\, S(\varphi)$ nin tanımında yerine yazılırsa

$$\begin{aligned} (div\, S(\varphi))(e_j) &= \sum_{i=1}^{m} \nabla_{e_i}(S(\varphi)(e_i, e_j)) \\ &= \sum_{i=1}^{m} e_i(\frac{1}{2}\lambda^2(m-2)g_{ij}) \\ &= \sum_{j=1}^{m} \frac{1}{2}(m-2)d(\lambda^2) \end{aligned}$$

elde edilir. (III.3.9) eşitliğinden

$$\begin{aligned} \tau(\varphi)^T = 0 &\Leftrightarrow div\, S(\varphi) = 0 \\ &\Leftrightarrow m = 2 \quad \text{ya da} \quad d(\lambda^2) = 0 \\ &\Leftrightarrow m = 2 \quad \text{ya da} \quad \lambda \text{ sabittir} \end{aligned}$$

olur.

III.4.Minimal Kritik (Branched) İmmersiyonlar

Bu kısımda zayıf konform dönüşümlerin harmonikliği incelenecektir.

III.4.1.Önerme.

(i) 2-boyutlu bir Riemann manifoldundan (veya bir konform yüzeyden) tanımlanan bir zayıf konform dönüşümün harmonik olması için gerek ve yeter şart bu dönüşümün görüntüsünün regüler noktalarda minimal olmasıdır[1].

(ii) Boyutu 2 den farklı bir Riemann manifoldundan tanımlanan bir zayıf konform dönüşümün harmonik olması için gerek ve yeter şart bu dönüşümün homotetik ve görüntüsünün minimal olmasıdır[1].

İspat.

(i) M^2 ve N^n Riemann manifoldları , $x \in M^2$ ve

$$\varphi : M^2 \to N^n$$

Λ kare konform faktörüne sahip bir zayıf konform dönüşüm olsun. Önerme III.3.4 den φ nin tensiyon alanının teğet bileşeni sıfırdır. Dolayısıyla tensiyon alanının sıfır olması için gerek ve yeter şart tensiyon alanının normal bileşeninin sıfır olmasıdır. Önerme III.2.13 den

$$\tau(\varphi)^{\perp} = (boy\, M)\Lambda\mu^{M}$$

olduğundan $\tau(\varphi)^{\perp} = 0$ şartının sağlanabilmesi için gerek ve yeter şart φ nin x noktasında minimal olmasıdır.

(ii) M, boyutu 2 den farklı bir Riemann manifoldu, N^n keyfi bir Riemann manifoldu olmak üzere

$$\varphi : M^m \to N^n$$

Λ kare konform faktörüne sahip bir zayıf konform dönüşüm ve $x \in M^m$ bir regüler nokta olsun. Bu durumda φ nin tensiyon alanı için

$$\tau(\varphi) = \tau(\varphi)^{\perp} + \tau(\varphi)^{T}$$

yazılabileceğinden

$$\tau(\varphi) = 0 \Leftrightarrow \tau(\varphi)^{\perp} = 0 \quad \text{ve} \quad \tau(\varphi)^{T} = 0$$

dır. Önerme III.3.4 den φ nin tensiyon alanının teğet bileşeninin x noktasında sıfır olması için gerek ve yeter şart φ nin sabit konform faktöre sahip olmasıdır. Ayrıca Önerme III.2.13 den regüler noktalarda $\tau(\varphi)^{\perp} = 0$ şartının sağlanabilmesi için gerek ve yeter şart φ nin x noktasında minimal olmasıdır. Böylece ispat tamamlanmış olur.

III.4.1.Sonuç. Konform yüzeyden tanımlanan bir konform harmonik dönüşüm ile (konform) minimal immersiyon aynıdır.

III.4.1.Tanım. Konform yüzeyden tanımlanan bir zayıf konform harmonik dönüşüme **minimal kritik (branched) immersiyon** adı verilir[1].

M^m, N^n Riemann manifoldları ve

$$\varphi : M^m \to N^n$$

bir zayıf konform dönüşüm olsun. $m = n$ ise Sonuç II.1.1 den minimallik otomatik olarak var olacağından eşit boyutlu manifoldlar arasında tanımlanan dönüşümler için Önerme III.4.1 den aşağıdaki sonuca ulaşılır:

III.4.2.Sonuç.

(i) Boyutları eşit ve 2 olan Riemann manifoldları arasında tanımlı bir zayıf konform dönüşüm harmoniktir[1].

(ii) Boyutları eşit ve 2 den farklı olan Riemann manifoldları arasında tanımlanan bir zayıf konform dönüşümün harmonik olması için gerek ve yeter şart φ nin homotetik olmasıdır[1].

III.4.2.Önerme. (Konform dönüşüm ile bileşke)

Boyutları eşit ve 2 olan Riemann manifoldları arasında tanımlı bir zayıf konform

$$\varphi : M^2 \to N^2$$

dönüşümü ile N^2 den keyfi bir P Riemann manifolduna tanımlı bir

$$\psi : N^2 \to P$$

harmonik dönüşümünün bileşkesi harmoniktir[1].

İspat. Sonuç III.4.2 den φ, harmoniktir. Öyleyse

$$\tau(\psi \circ \varphi) = d\psi(\tau(\varphi)) + iz\, \nabla d\psi(d\varphi, d\varphi)$$

eşitliğinin sağ tarafındaki ilk terim sıfır olur. Diğer taraftan Lemma II.1.1 den M^2 nin bir $\{e_1, e_2\}$ ortonormal bazı için N^2 üzerinde

$$d\varphi(e_i) = \lambda e'_i$$

olacak şekilde bir $\{e'_1, e'_2\}$ ortonormal bazının olduğunu söyleyebiliriz. Bu durumda

$$\begin{aligned}
\tau(\psi \circ \varphi) &= iz\, \nabla d\psi(d\varphi, d\varphi) \\
&= \sum_{i=1}^{2} \nabla d\psi(d\varphi(e_i), d\varphi(e_i)) \\
&= \sum_{i=1}^{2} \nabla d\psi(\lambda e'_i, \lambda e'_i) \\
&= \sum_{i=1}^{2} \{\nabla^{\psi}_{\lambda e'_i} d\psi(\lambda e'_i) - d\psi(\nabla^{N}_{\lambda e'_i} \lambda e'_i)\} \\
&= \sum_{i=1}^{2} \lambda \{\nabla^{\psi}_{e'_i} d\psi(\lambda e'_i) - d\psi(\nabla^{N}_{e'_i} \lambda e'_i)\} \\
&= \sum_{i=1}^{2} \lambda \{\nabla^{\psi}_{e'_i} \lambda d\psi(e'_i) - d\psi(\nabla^{N}_{e'_i} \lambda e'_i)\} \\
&= \sum_{i=1}^{2} \{\lambda e'_i(\lambda) d\psi(e'_i) + \lambda^2 \nabla^{\psi}_{e'_i} d\psi(e'_i) - \lambda d\psi(e'_i(\lambda) e'_i + \lambda \nabla^{N}_{e'_i} e'_i) \\
&= \lambda^2 \sum_{i=1}^{2} \{\nabla^{\psi}_{e'_i} d\psi(e'_i) - d\psi(\nabla^{N}_{e'_i} e'_i)\} \\
&= \lambda^2 iz\, \nabla d\psi
\end{aligned} \tag{III.4.1}$$

bulunur. ψ harmonik olduğundan $\psi \circ \varphi$ de harmoniktir.

III.4.3.Sonuç. (M^2, g) Riemann manifoldundan tanımlı bir C^∞ dönüşümün harmonikliği sadece M^2 üzerindeki konform yapıya bağlıdır. Özel olarak bir konform ya da Riemann yüzeyden tanımlanan harmonik dönüşümler iyi tanımlıdır[1].

İspat. (M^2, g) bir Riemann manifoldu ve g metriğine konform olarak denk olan $\tilde{g}$ metriği

$$\tilde{g} = \Lambda g$$

olsun. Bu durumda

$$I : (M^2, \tilde{g}) \to (M^2, g)$$

birim dönüşümü ve bu dönüşümün tersi konformdur. Önerme III.4.2 den

$$\varphi : (M^2, g) \to N$$

dönüşümünün harmonik olması için gerek ve yeter şart

$$\varphi = \varphi \circ I : (M^2, \tilde{g}) \to N$$

dönüşümünün harmonik olmasıdır.

III.5.Harmonik Morfizmler

$$\varphi : M^2 \to N^2$$

2-boyutlu Riemann manifoldları arasında bir zayıf konform dönüşüm olsun. Eğer $f : V \to R$, $V \subset N^2$ açık altküme ve $\varphi^{-1}(V) \neq \emptyset$ olacak şekilde bir harmonik fonksiyon ise Önerme III.4.2 den $f \circ \varphi$ harmonik olur.

Şimdi keyfi boyutlu Riemann manifoldları arasında tanımlanan ve yukarıdaki özelliğe sahip dönüşümleri karakterize edelim:

III.5.1.Tanım. M, N Riemann manifoldları ve

$$\varphi : M \to N$$

bir C^∞ dönüşüm olsun. $V \subset N$ açık altküme ve $\varphi^{-1}(V) \neq \emptyset$ olacak şekildeki her

$$f : V \to R$$

harmonik fonksiyonu için $f \circ \varphi$, $\varphi^{-1}(V)$ üzerinde harmonik oluyorsa φ ye **harmonik morfizm** denir[11].

Çoğu zaman $f \circ \varphi$ bileşke fonksiyonunu f nin $\varphi^*(f)$ ile gösterilen pullbacki olarak düşünebiliriz. Böylece bir harmonik morfizm, (lokal) harmonik fonksiyonları harmonik fonksiyonlara geri çeken bir C^∞ dönüşümdür. Denk olarak bir harmonik morfizm, harmonik fonksiyonların germlerini harmonik fonksiyonların germlerine geri çeker[1].

Harmonik morfizmlere açık örnekler sabit dönüşümler ve izometrilerdir.

III.5.1.Önerme. (Zayıf Konform Dönüşümler)

2-boyutlu Riemann manifoldları arasında tanımlanan zayıf konform dönüşümler harmonik morfizmlerdir[1].

İspat. Önerme III.4.2 den 2-boyutlu Riemann manifoldları arasında tanımlanan bir zayıf konform dönüşüm ile bir harmonik dönüşümün bileşkesinin harmonik olduğunu biliyoruz. Buradan Tanım III.5.1 gözönüne alınırsa ispat açıktır.

III.5.2.Önerme. (Bileşkeler)

(i) İki harmonik morfizmin bileşkesi yine bir harmonik morfizmdir[11].

(ii) Keyfi bir Riemann manifoldundan 2-boyutlu bir Riemann manifolduna tanımlanan

$$\varphi : M^m \to N^2$$

harmonik morfizmi ile P, 2-boyutlu Riemann manifoldu olmak üzere

$$N^2 \to P^2$$

zayıf konform dönüşümünün bileşkesi bir harmonik morfizmdir[11].

İspat.

(i) Tanım III.5.1 den açıktır.

(ii) Önerme III.5.1 ve (i) şartından ispat kolayca görülebilir.

Önerme III.5.2 nin (ii) kısmı ile Önerme III.4.2 karşılaştırıldığında yüzeylere tanımlanan harmonik morfizmlerin konform değişmezliği hakkında aşağıdaki sonuca ulaşılır:

III.5.1.Sonuç. (Konform değişmezlik)

Keyfi bir Riemann manifoldundan 2-boyutlu bir N Riemann manifolduna tanımlı harmonik morfizm fikri sadece N üzerindeki konform yapıya bağlıdır. Özel olarak bir konform ya da Riemann yüzeye tanımlanan harmonik morfizmler iyi tanımlıdır[1].

III.5.1.Örnek. M, N ve P Riemann manifoldları ve

$$F : M \times N \to P$$

bir C^∞ dönüşümü olsun. Eğer $F_z(x) = F_x(z) = F(x,z)$ olarak tanımlanan

$$\begin{array}{rcl} F_z : M & \to & P \\ x & \to & F_z(x) \end{array}$$

ve

$$\begin{array}{rcl} F_x : N & \to & P \\ z & \to & F_x(z) \end{array}$$

kısmi dönüşümleri $\forall (x,z) \in M \times N$ için harmonik morfizm oluyor ise F ye her değişkende ayrı ayrı harmonik morfizmdir denir[1]. Böyle bir F dönüşümü çarpım manifoldundan tanımlanan bir harmonik morfizmdir. Gerçekten $V \subset P$ açık bir altküme olmak üzere bir C^∞, $f : V \to R$ fonksiyonu ve $(x,z) \in F^{-1}(V)$ için

$$f \circ F : M \times N \to R$$

bileşke fonksiyonunun Laplasyanı

$$\Delta^{M\times N}(f \circ F)(x,z) = \Delta^N(f \circ F_x)(z) + \Delta^M(f \circ F_z)(x)$$

olduğundan F bir harmonik morfizm olur.

Her değişkende ayrı ayrı harmonik morfizmlere en basit örnek; M ve N Riemann manifoldları olmak üzere bir Riemann çarpımından tanımlanan

$$M \times N \to N$$

doğal izdüşüm fonksiyonudur.

III.5.2.Örnek. Örnek III.2.4 den 1-boyutlu bir N^1 Riemann manifoldunun bir U açığı üzerinde tanımlı bir f harmonik fonksiyonunun total geodezik olduğunu biliyoruz. Böylece M bir Riemann manifoldu olmak üzere sonuç III.2.5 deki bileşke kuralı

$$\varphi : M \to N^1$$

harmonik dönüşümünün bir harmonik morfizm olduğunu gösterir. Özel olarak M üzerindeki bir harmonik fonksiyon M den R ye bir harmonik morfizm tanımlar.

Önerme III.4.2 nin ispatı incelendiğinde M ve N Riemann manifoldları olmak üzere

$$\varphi : M \to N$$

dönüşümü harmonik ve (III.4.1) eşitliğinin sağlandığını garantileyecek bir şartı sağlıyorsa φ nin bir harmonik morfizm olacağı sonucuna ulaşırız. (III.4.1) eşitliğini sağlayan şart bölüm II.2 de verilen yatay zayıf konformluk şartıdır.

III.5.3.Önerme. (M^m, g) ve (N^n, h) Riemann manifoldları olsun. Bu durumda harmonik ve yatay zayıf konform

$$\varphi : M^m \to N^n$$

dönüşümü bir harmonik morfizmdir[1].

İspat. f, N^n nin bir açık altkümesi üzerinde rel değerli bir fonksiyon olsun. Bu durumda N^n üzerindeki bir $\{y^1, ..., y^n\}$ C^∞ koordinatlarına göre (III.2.23) eşitliği $Y_\alpha = \frac{\partial}{\partial y^\alpha}$, $\alpha = 1, ..., n$, olmak üzere

$$\Delta(f \circ \varphi) = df(\tau(\varphi)) + \nabla df(Y_\alpha, Y_\beta) g(grad\, \varphi^\alpha, grad\, \varphi^\beta) \qquad \text{(III.5.1)}$$

şeklinde yazılabilir. φ harmonik ise $\tau(\varphi) = 0$ dır ve (III.5.1) deki eşitliğin sağ tarafındaki toplamın ilk terimi sıfır olur. Ek olarak φ yatay zayıf konform ise (II.2.10) dan

$$\Delta(f \circ \varphi) = \Lambda h^{\alpha\beta} \nabla df(Y_\alpha, Y_\beta) = \Lambda \Delta f$$

bulunur. Dolayısıyla f harmonik ise $f \circ \varphi$ de harmonik olur. Bu da φ nin bir harmonik morfizm olduğunu gösterir.

KAYNAKLAR

[1] BAIRD, P., WOOD, J.C., *Harmonic Morphisms Between Riemannian Manifolds*, Clarendon Press, Oxford, 2003.

[2] BEJANCU, A., *Geometry of CR-Submanifolds*, D.Reidel Publishing Company, 1986.

[3] HACISALİHOĞLU, H.H., *Diferansiyel Geometri*, İnönü Üniversitesi Fen-Ed.Fak.Mat.No:2,1982.

[4] HACISALİHOĞLU, H.H., EKMEKÇİ,N., *Tensör Geometri*, Ankara Ünv. Fen Fakültesi, 2003.

[5] YANO, K., KON,M., *Structures on Manifolds*, World Scientific Publishing Company Pte. Ltd., 1984.

[6] BOOTHBY, W.M., *Introduction to Differentiable Manifolds and Riemannian Geometry*, Academic Press ,INC., 1986.

[7] HELGASON, S., *Differential Geometry, Lie Groups and Symmetric Spaces*, Academic Press,INC., 1978.

[8] SPIVAK, M., *A Comprehensive Introducton to Differential Geometry*, vol:1, vol:4, Second Edition, Publish or Perish, INC., Berkeley, 1979.

[9] FUGLEDE, B., *Harmonic Morphisms Between Riemannian Manifolds*, Ann.Inst.Fourier(Grenoble), 28(2), 107-44, 1978.

[10] ISHIHARA, T., *A mapping of Riemannian manifolds which preserves harmonic functions*, J.Math.Kyoto Üniv., 19,215-29, 1979.

[11] SVENSSON, M., *Polynomial Harmonic Morphisms*, Master Thesis, Lund Universitet, November 1998.

[12] LEE, John M., *Introduction to Smooth Manifolds*, Springer-Verlag, 2003.

[13] SIGMUNDUR, G., *The Geometry of Harmonic Morphisms*, PhD Thesis, University of Leeds, Department of Pure Mathematics, 1992.

[14] ÇAKAR, Ö., *Fonksiyonel Analize Giriş*, Ankara Üniversitesi Fen Fak. Yayınları , Ankara, 2004.

[15] O'NEILL, B., *Semi-Riemann Geometry*, Academic Press, New York, 1983.

[16] KOBAYASHI, S., NOMIZU, K., *Foundations of Differantial Geometry*, vol:1, A Wiley-Interscience Publication, Wiley, New York.

[17] DO CARMO, M.P., *Riemannian Geometry*, Birkhauser Boston, 1992.

[18] ŞAHİN, B., *CR-Altmanifoldların Geometrisi*, Yüksek Lisans Tezi, İnönü Üniversitesi, 1996.

[19] CHEN, B.Y., *Geometry of Submanifols*, M.Dekker, New York, 1973.

[20] HACISALİHOĞLU, H.H., *Yüksek Boyutlu Uzaylarda Dönüşümler ve Geometriler*, İnönü Üniversitesi Temel Bilimler Fakültesi Yayınları Mat. No:1, 1980.

ÖZGEÇMİŞ

03.02.1980 yılında Malatya'da doğdu. İlk ve orta öğrenimini Malatya ve Ankara'da tamamladı. 1997 de Hacettepe Üniversitesi Fen Fakültesi Matematik Bölümüne girmeye hak kazandı. 2002 de buradan mezun oldu. Aynı yıl İnönü Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalında Yüksek Lisansa başladı.