

T.C
İNÖNÜ ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

ZAMAN İÇEREN PROBLEMLERİN ÇÖZÜMÜNE
BİR NÜMERİK YAKLAŞIM

ŞULEHAN BAŞER GÜVEN

YÜKSEK LİSANS TEZİ
MATEMATİK ANABİLİM DALI

MALATYA
2005

Fen Bilimleri Enstitüsü Müdürlüğüne

Bu çalışma , Jürimiz tarafından Matematik Anabilim dalında YÜKSEK LİSANS TEZİ olarak kabul edilmiştir.

(İmza)

BAŞKAN

(İmza)

ÜYE

(İmza)

ÜYE

ONAY

Yukarıdaki imzaların adı geçen öğretim üyelerine ait olduğunu onaylarım.

.../.../2005

Prof. Dr. Ali ŞAHİN
Enstitü Müdürü

ÖZET

Yüksek Lisans Tezi

ZAMAN İÇEREN PROBLEMLERİN ÇÖZÜMÜNE BİR NÜMERİK YAKLAŞIM

Şulehan BAŞER GÜVEN

İnönü Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü

Matematik Anabilim Dalı

46+vii sayfa

2005

Danışman: Doç. Dr. Ali Özdeş

Bu çalışma beş bölümden oluşmaktadır. Birinci bölümde sonraki bölümlerde kullanılmış olan bazı temel kavram ve yöntemlere yer verildi.

İkinci bölümde diffusion-convection denklemi tanıtıldı ve denklemin bir yarı analitik çözümü olan piecewise analitik çözümü verildi. Diffusion-convection denkleminin piecewise çözümü ile analitik çözüm karşılaştırılmaları tablolar halinde sunuldu.

Üçüncü bölümde MOL yöntemiyle diskrize edilen diffusion-convection denklemi Euler ve Runge-Kutta yöntemleri ile çözüldü. Diffusion-convection denkleminin nümerik ve analitik çözüm karşılaştırılmaları tablolar halinde sunuldu.

Dördüncü bölümde Euler ve Runge-Kutta yöntemleri için kararlılık analizi yapıldı.

Beşinci bölümde çalışmamızda kullanılan yöntemlerden elde edilen sonuçlar değerlendirildi.

ANAHTAR KELİMELER : Diffusion-convection denklemi, MOL yöntemi, Euler yöntemi, Runge-Kutta yöntemi, Piecewise analitik yöntem

ABSTRACT

Master Thesis

A NUMERICAL APPROACH TO PROBLEMS INCLUDING TIME

Şulehan BAŞER GÜVEN

Inonu University

Institute of Natural and Applied Sciences

Mathematics Department

46+vii pages

2005

Supervisor: Assoc. Prof. Dr. Ali Özdeş

This study consists of five chapters. Chapter 1 includes some basic concepts and methods which were used in the latter chapters.

In chapter 2, diffusion-convection equation was introduced and piecewise analytical method which is the half-analytical solution of this equation was given. The comparison of piecewise analytical solution and analytical solution of diffusion-convection equation were presented in the tables.

In chapter 3, diffusion-convection equation which we obtained by discretizing with MOL method was solved with Euler and Runge-Kutta methods. The comparison of numerical and analytical solution of diffusion-convection equation were presented in the tables.

In chapter 4, stability analysis for Euler and Runge-Kutta methods was made.

In chapter 5, the results obtained by the methods used in this study were evaluated.

KEYWORDS: Diffusion-convection equation, The method of lines (MOL), Euler method, Runge-Kutta method, Piecewise analytical method

TEŞEKKÜR

Yüksek lisans süresince bilgileri ve desteğiyle bana yol gösteren tez danışmanım ve çok değerli hocam Doç. Dr. Ali ÖZDEŞ'e, çalışmalarım süresince bilgisinden faydalandığım sevgili hocam Dr. Alaattin ESEN'e, çok sevdiğim arkadaşlarım Selcen YÜKSEL, Yusuf UÇAR ve Muharrem ÖZLÜK'e, bütün bölüm hocalarıma, maddi manevi desteklerini esirgemeyen eşime ve aileme teşekkürü bir borç bilirim.

İÇİNDEKİLER

ÖZET.....	i
ABSTRACT.....	ii
TEŞEKKÜR	iii
İÇİNDEKİLER	iv
ŞEKİL DİZİNİ	v
TABLolar DİZİNİ	vi
GİRİŞ	1
1. BAZI TEMEL KAVRAM VE YÖNTEMLER	3
1.1. Türevlere Sonlu Fark Yaklaşımları	3
1.1.1 Birinci Mertebeden Türevler İçin Sonlu Fark Yaklaşımları	3
1.1.2.İkinci Mertebeden Türevler İçin Sonlu Fark Yaklaşımları	4
1.2. Zamana Bağlı Isı İletim Denkleminin Sonlu Fark Gösterimi	6
1.2.1.Açık(Explicit) Yöntem	6
1.2.2.Kapalı (Implicit) Yöntem	7
1.3. Crank-Nicolson Yöntemi	7
1.4. Vektör ve Matris Normları	8
1.5. Bir Matrisin Özdeğer ve Özvektörleri Üzerine Genel Tanım ve Teoremler	10
1.6. Adi Türevli Diferansiyel Denklemler İçin Çözüm Yöntemleri	11
1.6.1.Euler Yöntemi	11
1.6.2.Runge-Kutta Yöntemi	11
1.7. Method Of Lines (MOL Yöntemi)	12
2. DIFFUSION-CONVECTION DENKLEMİ VE BİR YARI ANALİTİK ÇÖZÜM	14
2.1. Piecewise Analitik Çözüm	15
3. DIFFUSION-CONVECTION DENKLEMİNİN NÜMERİK ÇÖZÜMLERİ	23
3.1. Euler Yöntemi	23
3.2. Runge-Kutta Yöntemi	29
4. KARARLILIK ANALİZİ	35
4.1. Euler Yöntemi İçin Kararlılık Analizi	35
4.2. Runge-Kutta Yöntemi İçin Kararlılık Analizi	38
5. SONUÇ VE KARŞILAŞTIRMA	42
KAYNAKLAR	44
ÖZGEÇMİŞ	46

ŞEKİL DİZİNİ

Şekil 3.1. Örnek 3.1 için $t=2$ anında $h=0.01$, $k= 0.0025$ değerleri için Piecewise ve Euler yöntemleri ile elde edilen nümerik çözümlerin analitik çözümle karşılaştırılması	25
Şekil 3.2. Örnek 3.2 için $t=2$ anında $h=0.01$, $k= 0.0025$ değerleri için Piecewise ve Euler yöntemleri ile elde edilen nümerik çözümlerin analitik çözümle karşılaştırılması	27
Şekil 3.3. Örnek 3.3 için $t=2$ anında $h=0.01$, $k= 0.0025$ değerleri için Piecewise ve Euler yöntemleri ile elde edilen nümerik çözümlerin analitik çözümle karşılaştırılması	29
Şekil 3.4. Örnek 3.4 için $t=2$ anında $h=0.01$, $k= 0.0025$ değerleri için Piecewise ve Runge-Kutta yöntemleri ile elde edilen nümerik çözümlerin analitik çözümle karşılaştırılması.....	31
Şekil 3.5. Örnek 3.5 için $t=2$ anında $h=0.01$, $k= 0.0025$ değerleri için Piecewise ve Runge-Kutta yöntemleri ile elde edilen nümerik çözümlerin analitik çözümle karşılaştırılması.....	32
Şekil 3.6. Örnek 3.6 için $t=2$ anında $h=0.01$, $k= 0.0025$ değerleri için Piecewise ve Runge-Kutta yöntemleri ile elde edilen nümerik çözümlerin analitik çözümle karşılaştırılması	34

TABLolar DİZİNİ

Tablo 2.1. Örnek 2.1' in $t=1$ için elde edilen nümerik ve tam çözümlerinin karşılaştırılması ($h=0.01, k=0.01$)	20
Tablo 2.2. Örnek 2.1' in $t=1$ için elde edilen nümerik ve tam çözümlerinin karşılaştırılması ($h=0.005, k=0.005$)	20
Tablo 2.3. Örnek 2.2' nin $t=1$ için elde edilen nümerik ve tam çözümlerinin karşılaştırılması ($h=0.01, k=0.01$)	21
Tablo 2.4. Örnek 2.2' nin $t=1$ için elde edilen nümerik ve tam çözümlerinin karşılaştırılması ($h=0.005, k=0.005$)	21
Tablo 2.5. Örnek 2.3' ün $t=1$ için elde edilen nümerik ve tam çözümlerinin karşılaştırılması ($h=0.01, k=0.01$)	22
Tablo 2.6. Örnek 2.3' ün $t=1$ için elde edilen nümerik ve tam çözümlerinin karşılaştırılması ($h=0.005, k=0.005$)	22
Tablo 3.1. Örnek 3.1'in $t=1$ için elde edilen nümerik ve analitik çözümlerinin karşılaştırılması ($N=100, h=0.01, k=0.0025$).....	24
Tablo 3.2. Örnek 3.1' in $t=1$ için elde edilen nümerik ve analitik çözümlerinin karşılaştırılması ($N=200, h=0.005, k=0.0005$)	24
Tablo 3.3. Örnek 3.2'nin $t=1$ için elde edilen nümerik ve analitik çözümlerinin karşılaştırılması ($N=100, h=0.01, k=0.0025$)	26
Tablo 3.4. Örnek 3.2' nin $t=1$ için elde edilen nümerik ve analitik çözümlerinin karşılaştırılması ($N=200, h=0.005, k=0.0005$).....	26
Tablo 3.5. Örnek 3.3'ün $t=1$ için elde edilen nümerik ve analitik çözümlerinin karşılaştırılması ($N=100, h=0.01, k=0.0025$)	28
Tablo 3.6. Örnek 3.3' ün $t=1$ için elde edilen nümerik ve analitik çözümlerinin karşılaştırılması ($N=200, h=0.005, k=0.0005$).....	28
Tablo 3.7. Örnek 3.4'ün $t=1$ için elde edilen nümerik ve analitik çözümlerinin karşılaştırılması ($N=100, h=0.01, k=0.0025$)	30
Tablo 3.8. Örnek 3.4' ün $t=1$ için elde edilen nümerik ve analitik çözümlerinin karşılaştırılması ($N=200, h=0.005, k=0.0005$).....	30

Tablo 3.9. Örnek 3.5'in $t=1$ için elde edilen nümerik ve analitik çözümlerinin karşılaştırılması ($N =100$, $h=0.01$, $k= 0.0025$)	31
Tablo 3.10. Örnek 3.5' in $t=1$ için elde edilen nümerik ve analitik çözümlerinin karşılaştırılması ($N =200$, $h=0.005$, $k= 0.0005$).....	32
Tablo 3.11. Örnek 3.6'nın $t=1$ için elde edilen nümerik ve analitik çözümlerinin karşılaştırılması ($N =100$, $h=0.01$, $k= 0.0025$)	33
Tablo 3.12. Örnek 3.6' nın $t=1$ için elde edilen nümerik ve analitik çözümlerinin karşılaştırılması ($N =200$, $h=0.005$, $k= 0.0005$).....	33
Tablo 5.1. Örnek 2.1'in $t=1$ için elde edilen nümerik ve analitik çözümlerinin karşılaştırılması ($N =100$, $h=0.01$, $k= 0.0025$)	41
Tablo 5.2. Örnek 2.2' nin $t=1$ için elde edilen nümerik ve analitik çözümlerinin karşılaştırılması ($N =100$, $h=0.01$, $k= 0.0025$)	42
Tablo 5.3. Örnek 2.3'ün $t=1$ için elde edilen nümerik ve analitik çözümlerinin karşılaştırılması ($N =100$, $h=0.01$, $k= 0.0025$)	42

GİRİŞ

Bilimde ve matematikte birçok olayın matematiksel modeli olarak kullanılan diffusion-convection denklemi;

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \varepsilon \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - a \frac{\partial u}{\partial x},$$

şeklinde bir boyutlu, parabolik, lineer bir kısmi diferansiyel denklemdir. Burada ε , ($0 < \varepsilon \leq 1$) difüzyon katsayısı ve a ise ısı iletim hızıdır.

Denklem lineer kısmi diferansiyel denklem olmasına rağmen analitik olarak kolayca çözülebilir bir denklem değildir. Yaklaşık analitik çözüm 1978 de Siemieniuch ve Gladwell [1] tarafından verilmiştir. Ancak bu çözüm, denklemi tam olarak sağlamasına rağmen sınır şartlarının değişik seçimi için oluşturulan başlangıç-sınır değer problemlerini sağlamamaktadır [2]. Bu nedenle denklem, özellikle yaklaşık çözüm veya sayısal çözümle uğraşan araştırmacıların ilgisini çekmiştir ve denklemin günümüze kadar pek çok sayısal çözümü verilmiştir.

Siemieniuch ve Gladwell [1] denklemin bir açık sonlu fark çözümünü, Sousa [3] ise denklemin kararlılık limitlerini de içeren çeşitli sonlu fark teknikleri ile çözümünü verdi. Kriventsev ve Ninokata [4] da denklem için bir tam sonlu fark yöntemi verdi.

Yaklaşık çözüm için sonlu eleman yöntemleri de yaygın olarak kullanıldı. Keramidas ve Papatheodorou [5] sonlu eleman yöntemi üzerine kurulmuş bir model ile denklemin çözümünü ve hata tahminlerini verdi. Donea ve diğerleri [6] ise denklemin en küçük kareler üzerine kurulmuş bir sonlu eleman çözümünü, Anziam [7] Sinc-Galerkin sonlu eleman çözümünü, Mueller ve Shores [8] ise yine aynı yıl Sinc-Galerkin yöntemi ile denklemin çözümünü elde ettiler.

Denklem için 1997 yılında Rızwan-Uddin [9] bir integral yöntemi çözümü, Juncu ve Popa [10] ise standart sonlu eleman tekniği üzerine kurulan Gram matris yaklaşımını verdiler. Company ve diğerleri [11] ise denkleme Simpson integral tekniği üzerine kurulmuş bir fourier dönüşümü uygulayarak bir yaklaşık çözüm verdi.

Son yıllarda popüler olan yarı analitik çözüm yöntemleri de denklemin çözümünü bulmak için kullanıldı. Adomian [12] decomposition yönteminin bir uygulamasını yaptı. Lecot ve Schmid [13] zamanı ayrıştırma üzerine temellenmiş parçacık yaklaşım metodunu kullandı. N.A. Ismail ve diğerleri [14] tarafından denklemin kısıtlanmış Taylor yaklaşım yöntemi ile bir yarı analitik çözümü verildi.

Yakın tarihte Ramos [15] tarafından bu tür denklemlerin yarı analitik çözümlerinden elde edilmesinde kullanılan bir çözüm yöntemi verildi.

Bu çalışmada, ayrıştırma tekniği üzerine kurulmuş nümerik yöntemlerle diffusion-convection denklemi için yaklaşık çözümler verildi. Ayrıştırma tekniği olarak method of lines (MOL) ve nümerik yöntemler olarak da Euler ve Runge-Kutta yöntemleri kullanıldı. Daha sonra, kullanılan yöntemler için kararlılık analizi yapıldı.

1. BÖLÜM

BAZI TEMEL KAVRAM VE YÖNTEMLER

Bu bölümde, çalışmamıza temel teşkil edecek, Analiz ve Nümerik Analizin bazı temel teorem, tanım ve yöntemlerini kısaca gözden geçireceğiz.

1.1. Türevlere Sonlu Fark Yaklaşımları

Sonlu fark yaklaşımlarını oluşturmak için fonksiyonların Taylor açılımları kullanılır. $U(x,t)$, x ve t bağımsız değişkenlerine göre yeterince türevlenebilir bir fonksiyon olsun. h ve k sırasıyla x ve t yönündeki artma miktarları olmak üzere $U(x+h,t)$ ve $U(x-h,t)$ fonksiyonlarının x civarında Taylor seri açılımları

$$U(x+h,t) = U(x,t) + h \frac{\partial U}{\partial x} + \frac{h^2}{2!} \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{h^3}{3!} \frac{\partial^3 U}{\partial x^3} + \dots \quad (1.1)$$

$$U(x-h,t) = U(x,t) - h \frac{\partial U}{\partial x} + \frac{h^2}{2!} \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} - \frac{h^3}{3!} \frac{\partial^3 U}{\partial x^3} + \dots \quad (1.2)$$

dir.

Önce 1. mertebeden türevler için fark yaklaşımlarını verelim.

1.1.1. Birinci Mertebeden Türevler İçin Sonlu Fark Yaklaşımları

$U(x,t)$ fonksiyonunun x yönündeki 1. mertebeden $\partial U/\partial x$ türevini göz önüne alalım. Sırasıyla (1.1) ve (1.2) açılımları $\partial U/\partial x$ için çözümlerse ve diğer taraftan (1.1) ve (1.2) eşitlikleri taraf tarafa çıkarılıp $\partial U/\partial x$ için çözümlerse, x noktası civarında $U(x,t)$ fonksiyonunun 1. mertebeden türev yaklaşımları sırasıyla

$$\begin{aligned}\frac{\partial U}{\partial x} &= \frac{U(x+h,t)-U(x,t)}{h} + O(h) \\ \frac{\partial U}{\partial x} &= \frac{U(x,t)-U(x-h,t)}{h} + O(h) \\ \frac{\partial U}{\partial x} &= \frac{U(x+h,t)-U(x-h,t)}{2h} + O(h^2)\end{aligned}$$

yaklaşımları yazılabilir. Burada “ O ” sonsuz terimli bir eşitliğin sonlu bir terimde kesildiğini, $O(h)$ terimi hatanın $h \rightarrow 0$ olduğunda h ile orantılı olduğunu gösterir ve buna kesme (*truncation*) hatası adı verilir [16].

Benzer şekilde $U(x,t+k)$ ve $U(x,t-k)$ fonksiyonlarının t civarındaki Taylor açılımı yapıp gerekli düzenlemeler yapılırsa $U(x,t)$ fonksiyonunun t yönündeki 1. mertebeden türev yaklaşımları,

$$\begin{aligned}\frac{\partial U}{\partial t} &= \frac{U(x,t+k)-U(x,t)}{k} + O(k) \\ \frac{\partial U}{\partial t} &= \frac{U(x,t)-U(x,t-k)}{k} + O(k)\end{aligned}$$

şeklinde elde edilir. Burada $O(k)$ gösterimi hatanın k mertebesinde olduğunu ve böylece k ile orantılı olarak azalacağını göstermektedir.

1.1.2. İkinci Mertebeden Türevler İçin Sonlu Fark Yaklaşımları

$U(x,t)$ fonksiyonunun $\partial^2 U / \partial x^2$ ikinci mertebeden türev yaklaşımını bulmak için $U(x+2h,t)$ ve $U(x-2h,t)$ fonksiyonlarının x civarındaki

$$U(x+2h,t) = U(x,t) + 2h \frac{\partial U}{\partial x} + \frac{4h^2}{2} \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{4h^3}{3} \frac{\partial^3 U}{\partial x^3} + \dots \quad (1.3)$$

$$U(x-2h,t) = U(x,t) - 2h \frac{\partial U}{\partial x} + \frac{4h^2}{2} \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} - \frac{4h^3}{3} \frac{\partial^3 U}{\partial x^3} + \dots \quad (1.4)$$

Taylor seri açılımlarını göz önüne alalım. (1.1) ve (1.3) denklemlerinden $\partial U / \partial x$ yok edilir ve $\partial^2 U / \partial x^2$ için çözülürse, diğer taraftan (1.2) ve (1.4) denklemlerinden $\partial U / \partial x$ yok edilir ve $\partial^2 U / \partial x^2$ için çözülürse ve yine benzer şekilde (1.1) ve (1.2) denklemlerinden $\partial U / \partial x$ yok edilir $\partial^2 U / \partial x^2$ için çözülürse sırasıyla

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} = \frac{U(x,t) - 2U(x+h,t) + U(x+2h,t)}{h^2} + O(h)$$

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} = \frac{U(x-2h,t) - 2U(x-h,t) + U(x,t)}{h^2} + O(h)$$

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} = \frac{U(x-h,t) - 2U(x,t) + U(x+h,t)}{h^2} + O(h^2)$$

yaklaşımları bulunur.

Kabul edelim ki l sonlu bir sayı olmak üzere problemin çözüm bölgesi $0 \leq x \leq l$ ve $t > 0$ olsun. Sonlu fark yaklaşımında problemin çözüm bölgesi N alt aralığa bölünür. Genellikle işlemlerde kolaylık bakımından bu aralıklar her zaman adımı $\Delta t \equiv k$ de $h \equiv \Delta x = l / N$ olacak şekilde eşit ve (x_i, t_j) mesh noktaları,

$$x_i = i\Delta x = ih, \quad i = 0, 1, 2, \dots, N$$

$$t_j = j\Delta t = jk, \quad j = 0, 1, 2, \dots$$

olarak alınır, öyle ki $U(x,t)$ bağımlı değişkeni sadece bu mesh noktalarında değerlendirilir.

Bir $P(ih, jk)$ mesh noktası üzerinde U nun değeri

$$U_p = U(ih, jk) \cong U_{i,j} \cong U_i^j$$

ifadelerinin biri ile gösterilir.

Bu gösterimin kullanılması ve hataların ihmal edilmesiyle 1. ve 2. mertebeden türevlere sonlu fark yaklaşım formülleri

$$\frac{\partial U}{\partial x} \cong \frac{U_{i+1}^j - U_i^j}{h}$$

$$\frac{\partial U}{\partial x} \cong \frac{U_i^j - U_{i-1}^j}{h}$$

$$\frac{\partial U}{\partial x} \cong \frac{U_{i+1}^j - U_{i-1}^j}{2h}$$

$$\frac{\partial U}{\partial t} \cong \frac{U_i^{j+1} - U_i^j}{k}$$

$$\frac{\partial U}{\partial t} \cong \frac{U_i^j - U_i^{j-1}}{k}$$

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} \cong \frac{U_i^j - 2U_{i+1}^j + U_{i+2}^j}{h^2}$$

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} \cong \frac{U_{i-2}^j - 2U_{i-1}^j + U_i^j}{h^2}$$

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} \cong \frac{U_{i-1}^j - 2U_i^j + U_{i+1}^j}{h^2}$$

şeklinde ifade edilir.

1.2. Zamana Bağlı Isı İletim Denkleminin Sonlu Fark Gösterimi

1.2.1. Açık (Explicit) Yöntem

$$\frac{\partial U}{\partial t} = \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} \quad (1.5)$$

parabolik denklemde kısmi türevler yerine

$$\frac{\partial U}{\partial t} = \frac{U_i^{j+1} - U_i^j}{k}$$

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} = \frac{U_{i+1}^j - 2U_i^j + U_{i-1}^j}{h^2}$$

ifadeleri yazılırsa

$$\frac{U_i^{j+1} - U_i^j}{k} = \frac{U_{i+1}^j - 2U_i^j + U_{i-1}^j}{h^2}$$

olur. Bu eşitlikte $r = k/h^2$ seçersek

$$U_i^{j+1} = rU_{i+1}^j + (1 - 2r)U_i^j + rU_{i-1}^j \quad \begin{array}{l} i = 1, 2, \dots, N-1 \\ j = 0, 1, 2, \dots \end{array}$$

sonlu fark formülü elde edilir. Burada $\Delta x \equiv h$ ve $\Delta t \equiv k$ dır.

1.2.2. Kapalı (Implicit) Yöntem

(1.5) denkleminde

$$\frac{\partial U}{\partial t} = \frac{U_i^{j+1} - U_i^j}{k}$$

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} = \frac{U_{i+1}^{j+1} - 2U_i^{j+1} + U_{i-1}^{j+1}}{h^2}$$

ifadeleri yerine yazılır ve $r = k/h^2$ seçilirse

$$-rU_{i+1}^{j+1} + (1+2r)U_i^{j+1} - rU_{i-1}^{j+1} = U_i^j$$

elde edilir.

1.3. Crank-Nicolson Sonlu Fark Yöntemi

(1.5) denkleminde yine

$$\frac{\partial U}{\partial t} = \frac{U_i^{j+1} - U_i^j}{k}$$

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} = \frac{1}{2} \left(\frac{U_{i+1}^{j+1} - 2U_i^{j+1} + U_{i-1}^{j+1}}{h^2} + \frac{U_{i+1}^j - 2U_i^j + U_{i-1}^j}{h^2} \right)$$

alınırsa,

$$\frac{U_i^{j+1} - U_i^j}{k} = \frac{1}{2} \left[\frac{U_{i+1}^{j+1} - 2U_i^{j+1} + U_{i-1}^{j+1}}{h^2} + \frac{U_{i+1}^j - 2U_i^j + U_{i-1}^j}{h^2} \right]$$

Crank-Nicolson sonlu fark yaklaşımı elde edilir.

1.4. Vektör ve Matris Normları

1.4.1. Tanım: $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$, \mathbb{R}^n üzerinde bir vektör olsun.

$$\begin{aligned} \|\cdot\|: \mathbb{R}^n &\rightarrow \mathbb{R} \\ x &\rightarrow \|x\| \end{aligned}$$

ile tanımlanan dönüşüme bir vektör normu denir. Vektör normu, vektörün büyüklüğünün pozitif reel sayılarla verilen bir ölçüsüdür ve $\|x\|$ ile gösterilir. $c \in \mathbb{R}$ ve $x, y \in \mathbb{R}^n$ olmak üzere vektör normu,

i) $x \neq 0$ ise $\|x\| > 0$ ve $\|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0$

ii) $\|cx\| = |c|\|x\|$

iii) $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$

özelliklerine sahiptir [17].

Bir $x \in \mathbb{R}^n$ vektörünün p -normu

$$\|x\|_p = \left(\sum_{i=1}^n |x_i|^p \right)^{1/p}$$

ile tanımlanır ve genellikle $p = 1, 2, \infty$ için norm tanımları kullanılır [17]. Bunlar kısaca

$\|x\|_1$, $\|x\|_2$ ve $\|x\|_\infty$ sembolleri ile gösterilir ve sırasıyla

$$\|x\|_1 = |x_1| + |x_2| + \dots + |x_n| = \sum_{i=1}^n |x_i|$$

$$\|x\|_2 = \left(|x_1|^2 + |x_2|^2 + \dots + |x_n|^2 \right)^{1/2} = \left(\sum_{i=1}^n |x_i|^2 \right)^{1/2}$$

ve

$$\|x\|_{\infty} = \max_{1 \leq i \leq n} |x_i|$$

olarak tanımlanır [18].

1.4.2. Tanım: $A = [a_{ij}]_{n \times n}$ reel bir matris olsun.

$$\begin{aligned} \|\cdot\|: \mathbb{R}^n &\rightarrow \mathbb{R} \\ A &\rightarrow \|A\| \end{aligned}$$

şeklinde tanımlanan dönüşüme \mathbb{R}^n üzerinde bir matris normu denir. Matris normu, matrisin büyüklüğünün pozitif reel sayılarla verilen bir ölçüsüdür. $A, B \in \mathbb{R}^n$ ve $c \in \mathbb{R}$ olmak üzere bir matris normu,

- i) $\|A\| \geq 0$ ve $\|A\| = 0 \Leftrightarrow A = 0_{n \times n}$
- ii) $\|cA\| = |c| \|A\|$
- iii) $\|A + B\| \leq \|A\| + \|B\|$
- iv) $\|AB\| \leq \|A\| \|B\|$

özelliklerine sahiptir [17].

1.4.3. Tanım: $\|\cdot\|$, \mathbb{R}^n üzerinde bir vektör normu ise

$$\|A\| = \max_{\|x\|=1} \|Ax\|$$

ifadesi $n \times n$ tipindeki matrislerin kümesi üzerinde bir matris normu tanımlar. Bu norma ikincil (*subordinate*) veya doğal matris normu denir [18].

Bir $A \in \mathbb{R}^n$ matrisi üzerinde genellikle $\|A\|_1$, $\|A\|_2$ ve $\|A\|_{\infty}$ ile gösterilen sırasıyla

$$\|A\|_1 = \max_{1 \leq j \leq n} \sum_{i=1}^n |a_{ij}|$$

$$\|A\|_{\infty} = \max_{1 \leq i \leq n} \sum_{j=1}^n |a_{ij}|$$

$$\|A\|_2 = \sqrt{\rho(A^T A)} \quad \text{dır.}$$

1.5. Bir Matrisin Özdeğer ve Özvektörleri Üzerine Genel Tanım ve Teoremler

1.5.1. Tanım: $A \in IR_n^n$ ve $\lambda \in IR$ olmak üzere

$$P(\lambda) = \det(A - \lambda I_n)$$

olarak tanımlanan P polinomuna A matrisinin karakteristik polinomu denir [17].

1.5.2. Tanım: $A \in IR_n^n$ matrisinin karakteristik polinomu P ise P polinomunun köklerine A matrisinin karakteristik değerleri veya özdeğerleri denir [17].

1.5.3 Tanım: $A \in IR_n^n$ matrisinin özdeğerleri λ_i ($i = 1, 2, \dots, n$) olmak üzere sıfırdan farklı bir $x \in IR^n$ vektörü için

$$(A - \lambda I_n)x = 0$$

özelliğini sağlayan x vektörüne A matrisinin λ özdeğerine karşılık gelen karakteristik vektörü denir [17].

1.5.4. Tanım: $A \in IR_n^n$ matrisinin λ_i ($i = 1, 2, \dots, n$) özdeğerlerinin modülünün en büyüğüne A matrisinin spektral yarıçapı denir ve $\rho(A)$ ile gösterilir. Buna göre A matrisinin $\rho(A)$ spektral yarıçapı

$$\rho(A) = \max_i |\lambda_i|$$

dir [18].

1.5.5. Teorem (Gerschgorin Teoremi)

Bir $A \in IR_n^n$ matrisinin özdeğerlerinin modülünün en büyüğü matrisin herhangi satır veya herhangi sütun bileşenlerinin modülleri toplamını geçemez. Yani,

$$\rho(A) \leq \|A\|_1 \quad \text{veya} \quad \rho(A) \leq \|A\|_\infty$$

dir [18].

1.5.6. Teorem (Gerschgorin Çember Teoremi veya Brauer Teoremi)

Bir $A = [a_{ij}] \in \mathbb{R}_n^n$ matrisinin a_{ss} diagonal elemanı hariç s . satırındaki bileşenlerinin mutlak değerleri toplamı P_s ile gösterilsin. Bu takdirde A matrisinin herbir λ_i özdeğeri $|\lambda_i - a_{ss}| \leq P_s$ çemberlerinin en az birinin içinde veya üzerinde bulunur [18].

1.5.7. Teorem: $A \in \mathbb{R}_n^n$ matrisinin λ_i özdeğerleri, Gerschgorin Çember Teoremi yardımıyla tahmin edildiğinde, $|\lambda_i| \leq 1$ şartı, $\|A\|_\infty \leq 1$ veya $\|A\|_1 \leq 1$ ' e denktir [18].

1.6. Birinci mertebeden adi türevli diferansiyel denklemler için çözüm yöntemleri

1.6.1. Euler Yöntemi

Euler yöntemi $\frac{dy}{dx} = f(x, y)$ şeklinde birinci mertebe adi diferansiyel

denklemlerin nümerik çözümünde oldukça etkili ve basit bir yöntemdir. Artış miktarı h nın küçük değerleri için oldukça iyi çözümler üretir. Algoritması aşağıdaki gibi verilebilir.

Algoritma :

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y)$$

$y(x_0) = y_0$, başlangıç değer problemi verilsin.

$h > 0$, $n = 0, 1, 2, \dots$ için

$$x_{n+1} = x_n + h ,$$

$$y_{n+1} = y_n + hf(x_n, y_n)$$

hesaplanır [17].

1.6.2. Runge-Kutta Yöntemi

Benzer şekilde Runge-Kutta yöntemi de $\frac{dy}{dx} = f(x, y)$ şeklindeki birinci mertebe

adi diferansiyel denklemlerin nümerik çözümünde kullanılan etkili yöntemlerden

birisidir. Artış miktarı h nın durumuna bağlı olmaksızın oldukça iyi çözümler veren bir yöntemdir. Algoritması aşağıdaki gibi yazılabilir.

Algoritma:

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y)$$

$y(x_0) = y_0$, başlangıç değeri verilsin.

$h > 0$, $n = 0, 1, 2, \dots$ için

$$x_{n+1} = x_n + h \quad \text{ve}$$

$$k_1 = f(x_n, y_n)$$

$$k_2 = f(x_n + h, y_n + k_1)$$

$$y_{n+1} = y_n + \frac{1}{2}h(k_1 + k_2)$$

hesaplanır [17].

1.7. Method of Lines (MOL)

Bu yöntem, kısmi diferansiyel denklemlerin nümerik çözümlerini elde etmekte kullanılan bir yaklaşımdır. Yöntem, fen ve mühendislikte çok yaygınlaşmış, W.E. Schiesser [19] ve arkadaşlarının çalışmalarında geniş yer almıştır.

MOL, farklı tipteki kısmi türevli diferansiyel denklemlerin, başlangıç ve sınır değerlerini içeren problemlerinde oldukça geniş bir uygulama alanı bulmuştur [19]. Yöntemdeki temel düşünce; konum yönündeki kısmi türevlerin sonlu fark yaklaşımlarıyla yeniden düzenlenip, sadece zaman türevlerine (veya eğer denklem zamandan bağımsız ise konum yönündeki 1. türevlere) bağlı bir birinci mertebeden adi diferansiyel denklem sistemi oluşturmaktır. Böylece bir kısmi türevli denklem daha kolay çözülebilen adi türevli denkleme dönüştürülmüş olur.

Bir örnek verecek olursak; diffusion-convection denklemi olarak bilinen

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \varepsilon \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - a \frac{\partial u}{\partial x}$$

denkleminde x' e bağlı türevlerin yerine

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} = \frac{U_{i+1} - 2U_i + U_{i-1}}{h^2}$$
$$\frac{\partial U}{\partial x} = \frac{U_{i+1} - U_{i-1}}{2h}$$

şeklinde sonlu fark yaklaşımlarını alırsak

$$\frac{dU}{dt} = \frac{\varepsilon}{h^2} (U_{i+1} - 2U_i + U_{i-1}) - \frac{a}{2h} (U_{i+1} - U_{i-1})$$

elde edilir. Başlangıç ve sınır değerlerinden dolayı eşitliğin sağ tarafı bilindiği göz önünde bulundurulursa t bağımsız değişkenli birinci mertebeden bir adi türevli denklem sistemi elde edilir.

2. BÖLÜM

DIFFUSION-CONVECTION DENKLEMİ VE BİR YARI ANALİTİK ÇÖZÜM

Bu bölümde, bilimde ve mühendislikte birçok olayın matematiksel modeli olarak kullanılan diffusion-convection denkleminin bir yarı analitik (piecewise) çözümü verilecektir.

Diffusion-convection denklemi,

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \varepsilon \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - a \frac{\partial u}{\partial x}, \quad 0 \leq x \leq 1, \quad t \geq 0 \quad (2.1)$$

şeklinde bir boyutlu, lineer, parabolik bir kısmi diferansiyel denklemdir.

Denklem,

$$\begin{aligned} u(0,t) &= g_1(t), \quad t > 0 \\ u(1,t) &= g_2(t), \quad t > 0 \end{aligned}$$

Dirichlet sınır şartları ve

$$u(x,0) = f(x), \quad 0 \leq x \leq 1,$$

başlangıç şartına bağlı olarak verilsin. Burada $g_1(t)$, $g_2(t)$ ve $f(x)$ fonksiyonlarının verildiğini kabul edelim.

Denklemden ε difüzyon katsayısı olup, $0 < \varepsilon \leq 1$ şeklinde bir sabit, x konum koordinatı, t zaman, u bağımlı değişken ve $a \in \mathbb{R}$ ısı iletim hızıdır.

Diffusion-convection denklemi birçok alandaki problemlerde uygulanmaktadır. Örneğin, kütle transferi, enerji transferi, nötron transferi, moment transferi gibi [14].

Denklem lineer bir kısmi diferansiyel denklem olmasına rağmen analitik olarak kolayca çözülebilen bir denklem değildir. Yaklaşık analitik çözüm olarak J.L. Siemieniuch ve I. Gladwell [1] tarafından verilen

$$\begin{aligned} u(x,t) = & \frac{1}{2} \left[\operatorname{erfc} \left(\frac{x - \lambda t}{2\sqrt{t}} \right) + \exp(\lambda x) \operatorname{erfc} \left(\frac{x + \lambda t}{2\sqrt{t}} \right) \right] + \exp(\lambda) \left[\left(1 + \frac{1}{2} \lambda (2 - x + \lambda t) \right) \right. \\ & \left. \operatorname{erfc} \left(\frac{2 - x + \lambda t}{2\sqrt{t}} \right) - \lambda \sqrt{\frac{t}{\pi}} \exp \left(-\frac{(2 - x + \lambda t)^2}{4t} \right) \right] \end{aligned}$$

ifadesi kullanılmaktadır. Bu aslında, denklemin tam olarak sağlanmasına rağmen sınır şartlarının değişik seçimi için oluşturulan başlangıç-sınır değer problemlerini sağlamamaktadır [1].

Bu tür denklemlerin yarı-analitik çözümünü elde etmek için J.I. Ramos tarafından genel bir yaklaşım yöntemi verildi [15].

Biz diffusion-convection denkleminin için bu yöntemi kullanarak bir analitik çözüm bulacağız;

2.1. Piecewise-analitik çözüm

J.I. Ramos, 2004 yılında genel denkleminin

$$\frac{\partial u}{\partial t} + a(x,t)\frac{\partial u}{\partial x} + b(x,t)u = \varepsilon \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + f(x,t), \quad 0 < x < 1, \quad t > 0$$

başlangıç şartı,

$$u(x,0) = u_0(x), \quad 0 \leq x \leq 1$$

sınır şartları,

$$u(0,t) = u(1,t) = 0, \quad t \geq 0$$

şeklindeki kısmi diferansiyel problemlerin analitik çözümü için, zamana bağlı türev terimini diskrize edip, kısmi türevli denklemin her bir zaman adımında bir adi türevli denkleme dönüştürdü ve böylece bu tür denklemler için bu şekilde bir yarı analitik çözüm bulunabileceğini gösterdi.

Şimdi bu yöntemi (2.1) denkleminin uygulayalım:

Zamana bağlı türev için ileri fark formülü kullanılarak denklemin diskrize edilirse aşağıdaki lineer adi diferansiyel denklemin elde edilir.

$$\frac{1}{k}u + a \frac{du}{dx} - \varepsilon \frac{d^2 u}{dx^2} = \frac{u^n}{k}, \quad 0 < x < 1, \quad t^n \leq t \leq t^{n+1},$$

eşitliğinde k , t yönünde mesh uzunluğu ve n , n . zaman adımı olmak üzere $u \equiv u^{n+1}$,

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{u^{n+1} - u^n}{k} \text{ dir.}$$

$[0,1]$ aralığı $h = x_{i+1} - x_i$ olmak üzere, N eşit parçaya bölünsün. Bu durumda, $\frac{u_i^n}{k} \equiv S_i$

olmak üzere yukarıdaki denklemin

$$\frac{1}{k}u + a \frac{du}{dx} - \varepsilon \frac{d^2u}{dx^2} = \frac{u_i^n}{k} \equiv S_i, \quad x_{i-1} < x < x_{i+1}, \quad t^n \leq t \leq t^{n+1}$$

şeklinde yazılabilir. Gerekli düzenlemeler yapılırsa,

$$\varepsilon \frac{d^2u}{dx^2} - a \frac{du}{dx} - \frac{1}{k}u = -S_i$$

veya

$$\frac{d^2u}{dx^2} - \frac{a}{\varepsilon} \frac{du}{dx} - \frac{1}{\varepsilon k}u = -\frac{S_i}{\varepsilon} \quad (2.2)$$

elde edilir. Bu denklem, u bağımlı, x bağımsız değişkenli, sabit katsayılı homojen olmayan bir adi türevli denklemdir.

$m \in \mathbb{R}$ veya $m \in \mathbb{C}$ olmak üzere $u = e^{m(x-x_i)}$ şeklindeki çözümleri bulmak için (2.2) denkleminde türevler yerine yazılırsa

$$\begin{aligned} m^2 e^{m(x-x_i)} - \frac{a}{\varepsilon} m e^{m(x-x_i)} - \frac{1}{\varepsilon k} e^{m(x-x_i)} &= -\frac{S_i}{\varepsilon} \\ e^{m(x-x_i)} \left(m^2 - \frac{a}{\varepsilon} m - \frac{1}{\varepsilon k} \right) &= -\frac{S_i}{\varepsilon}, \end{aligned}$$

elde edilir.

Burada, $2G_i = -\frac{a}{\varepsilon}$ ve $H_i = -\frac{1}{\varepsilon k}$ şeklinde alınırsa denklemin karakteristik polinomu

$$m^2 + 2G_i m + H_i = 0$$

şeklinde yazılabilir. $\Delta > 0$ ve $H_i \neq 0$ olduğundan karakteristik polinomun iki farklı kökü m_1 ve m_2 ise (2.2) nin genel çözümü

$$u = c_1 e^{m_1(x-x_i)} + c_2 e^{m_2(x-x_i)} + \alpha_i$$

şeklindedir.

Burada α_i özel çözüm olup $\alpha_i = -\frac{S_i}{\varepsilon H_i}$ dir. Şöyle ki,

$$\begin{aligned}
-\frac{1}{\varepsilon k} u &= -\frac{S_i}{\varepsilon} \\
u &= \frac{S_i}{\varepsilon} \varepsilon k \\
u &= \frac{S_i}{\varepsilon} \left(-\frac{1}{H_i} \right) \\
u &= -\frac{S_i}{\varepsilon H_i} \\
u &= \alpha_i
\end{aligned}$$

olur. Eğer genel çözüm

$$u(x_{i-1}) = u_{i-1}, \quad u(x_i) = u_i, \quad u(x_{i+1}) = u_{i+1}$$

olacak şekilde değerlendirilirse, c_1 ve c_2 sabitleri için

$$\begin{aligned}
u_{i-1} &= c_1 e^{-m_1 h} + c_2 e^{-m_2 h} + \alpha_i \\
u_i &= c_1 + c_2 + \alpha_i \\
u_{i+1} &= c_1 e^{m_1 h} + c_2 e^{m_2 h} + \alpha_i
\end{aligned}$$

Bu üç denklem arasından c_1 yok edilirse;

$$\begin{aligned}
u_{i-1} &= (u_i - c_2 - \alpha_i) e^{-m_1 h} + c_2 e^{-m_2 h} + \alpha_i \\
&= u_i e^{-m_1 h} - c_2 e^{-m_1 h} - \alpha_i e^{-m_1 h} + c_2 e^{-m_2 h} + \alpha_i \\
u_{i-1} &= u_i e^{-m_1 h} - \alpha_i e^{-m_1 h} - c_2 (e^{-m_1 h} - e^{-m_2 h}) + \alpha_i \\
-c_2 &= \frac{u_{i-1} - (u_i - \alpha_i) e^{-m_1 h} - \alpha_i}{e^{-m_1 h} - e^{-m_2 h}} \tag{2.3}
\end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned}
u_{i+1} &= (u_i - c_2 - \alpha_i) e^{m_1 h} + c_2 e^{m_2 h} + \alpha_i \\
u_{i+1} &= u_i e^{m_1 h} - \alpha_i e^{m_1 h} - c_2 (e^{m_1 h} - e^{m_2 h}) + \alpha_i \\
-c_2 &= \frac{u_{i+1} - (u_i - \alpha_i) e^{m_1 h} - \alpha_i}{e^{m_1 h} - e^{m_2 h}} \tag{2.4}
\end{aligned}$$

olarak elde edilir. (2.3) ve (2.4) eşitliğinden

$$\frac{u_{i-1} - (u_i - \alpha_i) e^{-m_1 h} - \alpha_i}{e^{-m_1 h} - e^{-m_2 h}} = \frac{u_{i+1} - (u_i - \alpha_i) e^{m_1 h} - \alpha_i}{e^{m_1 h} - e^{m_2 h}}$$

cebirsal denklem sistemi bulunmuş olur. Gerekli düzenlemeler yapılırsa,

$$\frac{1}{e^{-m_1h} - e^{-m_2h}} u_{i-1} + \frac{-e^{-m_1h} u_i + \alpha_i (e^{-m_1h} - 1)}{e^{-m_1h} - e^{-m_2h}} = \frac{1}{e^{m_1h} - e^{m_2h}} u_{i+1} + \frac{-e^{m_1h} u_i + \alpha_i (e^{m_1h} - 1)}{e^{m_1h} - e^{m_2h}}$$

$$\frac{1}{e^{-m_1h} - e^{-m_2h}} u_{i-1} - \frac{1}{e^{m_1h} - e^{m_2h}} u_{i+1} + \left(\frac{-e^{-m_1h}}{e^{-m_1h} - e^{-m_2h}} + \frac{e^{m_1h}}{e^{m_1h} - e^{m_2h}} \right) u_i = \alpha_i \left(\frac{-e^{-m_1h} + 1}{e^{-m_1h} - e^{-m_2h}} + \frac{e^{m_1h} - 1}{e^{m_1h} - e^{m_2h}} \right)$$

şeklinde genel formda ifade edilebilir. Burada u_{i-1} nin katsayısına p , u_{i+1} nin katsayısına q , α_i nin katsayısına da s denilirse

$$p = \frac{1}{e^{-m_1h} - e^{-m_2h}}$$

$$q = \frac{1}{e^{m_1h} - e^{m_2h}}$$

$$s = p(1 - e^{-m_1h}) + q(e^{m_1h} - 1)$$

olmak üzere,

$$A = \begin{bmatrix} -pe^{-m_1h} + qe^{m_1h} & -q & 0 & 0 \\ p & -pe^{-m_1h} + qe^{m_1h} & -q & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & p & -pe^{-m_1h} + qe^{m_1h} & -q \\ 0 & 0 & p & -pe^{-m_1h} + qe^{m_1h} \end{bmatrix}_{(N-1) \times (N-1)}$$

$$U = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ u_{N-2} \\ u_{N-1} \end{bmatrix} \quad \text{ve} \quad B = \begin{bmatrix} \alpha_1 s \\ \alpha_2 s \\ \cdot \\ \cdot \\ \alpha_{N-2} s \\ \alpha_{N-1} s \end{bmatrix}$$

şeklinde alınırsa $AU=B$ eşitliği aşağıdaki matris formunda yazılabilir.

$$\begin{bmatrix}
 -pe^{-m_1h} + qe^{m_1h} & -q & 0 & 0 \\
 p & -pe^{-m_1h} + qe^{m_1h} & -q & 0 \\
 \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\
 \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\
 0 & p & -pe^{-m_1h} + qe^{m_1h} & -q \\
 0 & 0 & p & -pe^{-m_1h} + qe^{m_1h}
 \end{bmatrix}
 \begin{bmatrix}
 u_1 \\
 u_2 \\
 \cdot \\
 \cdot \\
 u_{N-2} \\
 u_{N-1}
 \end{bmatrix}
 =
 \begin{bmatrix}
 \alpha_1 s \\
 \alpha_2 s \\
 \cdot \\
 \cdot \\
 \alpha_{N-2} s \\
 \alpha_{N-1} s
 \end{bmatrix}
 \quad (2.5)$$

Eğer başlangıç ve sınır değerleri ile, denklemdaki ε ve a sabitleri verilirse bu sistem bilinen bir yolla çözümlenerek diffusion-convection denklemi için yaklaşık çözümler elde edilir. Biz burada aşağıdaki üç örnek için yarı analitik çözümler elde ettik ve denklemlerin analitik çözümlerle karşılaştırmasını da tablolar halinde verdik.

Örnek 2.1. $\frac{\partial u}{\partial t} + 0.1 \frac{\partial u}{\partial x} = 0.02 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad 0 \leq x \leq 1, \quad t \geq 0,$

denklemini göz önüne alınsın. Denklemin analitik çözümü $u(x,t) = e^{1.1771243444677046x - 0.09t}$ dir [14]. Denklem başlangıç ve sınır şartları ile düşünülürse, çözüm sistemi (2.5) den sırasıyla $N = 100$ ve $N = 200$ için Crout yöntemi ile çözüldü ve sonuçlar Tablo 2.1 ve Tablo 2.2 de değerlendirildi.

Tablo 2.1. Örnek 2.1' in $t=1$ için elde edilen nümerik ve tam çözümlerinin karşılaştırılması ($h=0.01, k=0.01$)

x	Piecewise analitik çözüm	Tam çözüm
0.0	0.91393118	0.91393118
0.1	1.03076857	1.02810000
0.2	1.16042563	1.15653085
0.3	1.30573634	1.30100537
0.4	1.46894492	1.46352770
0.5	1.65245936	1.64635242
0.6	1.85887819	1.85201577
0.7	2.09102599	2.08337057
0.8	2.35184426	2.34362650
0.9	2.64391685	2.63639357
1.0	2.96573347	2.96573347

Tablo 2.2. Örnek 2.1' in $t=1$ için elde edilen nümerik ve tam çözümlerinin karşılaştırılması ($h=0.005, k=0.005$)

x	Piecewise analitik çözüm	Tam çözüm
0.0	0.91393118	0.91393118
0.1	1.02944006	1.02810000
0.2	1.15849404	1.15653085
0.3	1.30339553	1.30100537
0.4	1.46626702	1.46352770
0.5	1.64944101	1.64635242
0.6	1.85548614	1.85201577
0.7	2.08724034	2.08337057
0.8	2.34777459	2.34362650
0.9	2.64017959	2.63639357
1.0	2.96573347	2.96573347

Örnek 2.2. $\frac{\partial u}{\partial t} + 0.1 \frac{\partial u}{\partial x} = 0.01 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad 0 \leq x \leq 1, \quad t \geq 0,$

denklemini göz önüne alınsın. Denklemin analitik çözümü $u(x,t) = e^{9x-0.09t}$ [14] olup Örnek 2.1 için yapılan işlemler tekrarlanarak, sonuçlar Tablo 2.3 ve Tablo 2.4 de karşılaştırıldı.

Tablo 2.3. Örnek 2.2' nin $t=1$ için elde edilen nümerik ve tam çözümlerinin karşılaştırılması ($h=0.01, k=0.01$)

x	Piecewise analitik çözüm	Tam çözüm
0.0	0.91393118	0.91393118
0.1	2.26194762	2.24790801
0.2	5.56825362	5.52896161
0.3	13.69694246	13.59905226
0.4	33.68924268	33.44826946
0.5	82.86217733	82.26946321
0.6	203.80706893	202.35027108
0.7	501.25312608	497.70119611
0.8	1232.37294801	1224.14767305
0.9	3026.18372703	3010.91645604
1.0	7405.66107180	7405.66107180

Tablo 2.4. Örnek 2.2' nin $t=1$ için elde edilen nümerik ve tam çözümlerinin karşılaştırılması ($h=0.005, k=0.005$)

x	Piecewise analitik çözüm	Tam çözüm
0.0	0.91393118	0.91393118
0.1	2.25504962	2.24790801
0.2	5.54903591	5.52896161
0.3	13.64911383	13.59905226
0.4	33.57151859	33.44826946
0.5	82.57261911	82.26946321
0.6	203.09527655	202.35027108
0.7	499.51568416	497.70119611
0.8	1228.33015391	1224.14767305
0.9	3018.60864316	3010.91645604
1.0	7405.66107180	7405.66107180

Örnek 2.3. $\frac{\partial u}{\partial t} + 3.5 \frac{\partial u}{\partial x} = 0.022 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad 0 \leq x \leq 1, \quad t \geq 0,$

denklemini ele alalım. Denklemin analitik çözümü $u(x,t) = e^{0.028547979919275532x - 0.0999t}$ dir [14]. Benzer şekilde, Örnek 2.1 ve Örnek 2.2 de yapılan işlemler tekrarlanarak bulunan çözümler tablolarında karşılaştırılmıştır.

Tablo 2.5. Örnek 2.3' ün $t=1$ için elde edilen nümerik ve tam çözümlerinin karşılaştırılması ($h=0.01, k=0.01$)

x	Piecewise analitikçözüm	Tam çözüm
0.0	0.90492791	0.90492791
0.1	0.90851925	0.90751498
0.2	0.91121409	0.91010946
0.3	0.91391693	0.91271135
0.4	0.91662778	0.91532068
0.5	0.91934667	0.91793747
0.6	0.92207363	0.92056174
0.7	0.92480868	0.92319351
0.8	0.92755183	0.92583281
0.9	0.93030313	0.92847965
1.0	0.93113406	0.93113406

Tablo 2.6. Örnek 2.3' ün $t=1$ için elde edilen nümerik ve tam çözümlerinin karşılaştırılması ($h=0.005, k=0.005$)

x	Piecewise analitik çözüm	Tam çözüm
0.0	0.90492791	0.90492791
0.1	0.90801805	0.90751498
0.2	0.91066375	0.91010946
0.3	0.91331716	0.91271135
0.4	0.91597830	0.91532068
0.5	0.91864720	0.91793747
0.6	0.92132387	0.92056174
0.7	0.92400834	0.92319351
0.8	0.92670063	0.92583281
0.9	0.92940077	0.92847965
1.0	0.93113406	0.93113406

3. BÖLÜM

DIFFUSION-CONVECTION DENKLEMİNİN NÜMERİK ÇÖZÜMLERİ

Bu bölümde MOL yöntemiyle diskrize edilerek birinci mertebe bir adi diferansiyel denkleme dönüştürülmüş olan diffusion-convection denkleminin yaklaşık çözümleri; 1.Bölümde verilen Euler ve Runge-Kutta algoritmaları uygulanarak elde edilecektir.

3.1. Euler Yöntemi

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \varepsilon \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - a \frac{\partial u}{\partial x}, \quad 0 \leq x \leq 1, \quad t \geq 0$$

Bu denklem için Dirichlet sınır şartları

$$\begin{aligned} u(0,t) &= g_1(t), \quad t > 0 \\ u(1,t) &= g_2(t), \quad t > 0 \end{aligned}$$

başlangıç şartı ,

$$u(x,0) = f(x), \quad 0 \leq x \leq 1$$

başlangıç değer problemini göz önüne alalım. Denklem MOL yöntemi ile diskrize edilirse;

$$\frac{dU}{dt} = \left(\frac{\varepsilon}{h^2} - \frac{a}{2h} \right) U_{i+1} - \frac{2\varepsilon}{h^2} U_i + \left(\frac{\varepsilon}{h^2} + \frac{a}{2h} \right) U_{i-1} \quad i = 1, 2, \dots, N-1$$

adi türevli diferansiyel denklem sistemi elde edilir. Bu sisteme Euler yöntemi algoritmasının uygulanması ile

$$U_i^{j+1} = U_i^j + k \left(\frac{2\varepsilon - ah}{2h^2} \right) U_{i+1}^j - \frac{2\varepsilon k}{h^2} U_i^j + k \left(\frac{2\varepsilon + ah}{2h^2} \right) U_{i-1}^j \quad i = 1, 2, \dots, N-1 \quad (3.1)$$

çözüm formülü bulunur.

Örnek 3.1. $\frac{\partial u}{\partial t} + 0.1 \frac{\partial u}{\partial x} = 0.02 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad 0 \leq x \leq 1, t \geq 0,$

$a = 0.1$ ve $\varepsilon = 0.02$ değerleri için diffusion-convection denkleminin analitik çözümünün

$$u(x,t) = e^{1.1771243444677046x - 0.09t}$$

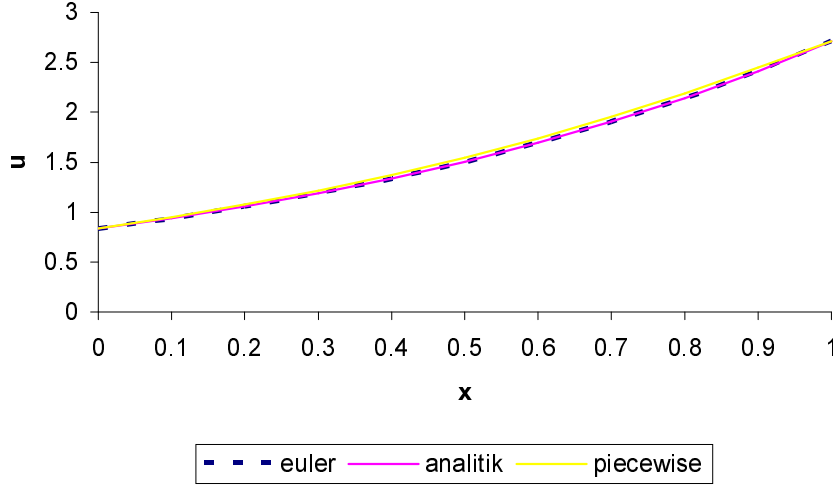
olduğu Bölüm 2 de verilmişti. Seçilen bu ε ve a değerleri için diffusion-convection denkleminin nümerik çözümleri, (3.1) ifadesi kullanılarak, $t = 1$ değerinde, kararlılık şartı sağlanacak şekilde alınarak elde edildi. Sonuçlar Tablo 3.1 ve Tablo 3.2 de analitik çözümle karşılaştırıldı.

Tablo 3.1. Örnek 3.1' in $t=1$ için elde edilen nümerik ve analitik çözümlerinin karşılaştırılması ($N = 100, h=0.01, k= 0.0025$)

x	Piecewise analitik çözüm	Euler çözümü	Analitik çözüm
0.0	0.91393118	0.91393118	0.91393118
0.1	1.03616297	1.02809323	1.02810000
0.2	1.16993119	1.15651916	1.15653085
0.3	1.31802825	1.30099014	1.30100537
0.4	1.48337792	1.46350971	1.46352770
0.5	1.66887137	1.64633191	1.64635242
0.6	1.87731016	1.85199269	1.85201577
0.7	2.11134798	2.08334528	2.08337057
0.8	2.37282985	2.34360044	2.34362650
0.9	2.66066831	2.63637264	2.63639357
1.0	2.96573347	2.96573347	2.96573347

Tablo 3.2. Örnek 3.1' in $t=1$ için elde edilen nümerik ve analitik çözümlerinin karşılaştırılması ($N = 200, h=0.005, k= 0.0005$)

x	Piecewise analitik çözüm	Euler çözümü	Analitik çözüm
0.0	0.91393118	0.91393118	0.91393118
0.1	1.03795406	1.02809858	1.02810000
0.2	1.17296881	1.15652839	1.15653085
0.3	1.32185810	1.30100216	1.30100537
0.4	1.48781085	1.46352392	1.46352770
0.5	1.67388367	1.64634812	1.64635242
0.6	1.88294132	1.85201089	1.85201577
0.7	2.11759849	2.08336529	2.08337057
0.8	2.37939002	2.34362101	2.34362650
0.9	2.6606079	2.63638924	2.63639357
1.0	2.96573347	2.96573347	2.96573347



Şekil 3.1. Örnek 3.1 için $t=2$ anında $h=0.01$, $k= 0.0025$ değerleri için Piecewise ve Euler yöntemleri ile elde edilen nümerik çözümlerin analitik çözümle karşılaştırılması

Örnek 3.2. $\frac{\partial u}{\partial t} + 0.1 \frac{\partial u}{\partial x} = 0.01 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ $0 \leq x \leq 1, t \geq 0,$

$a = 0.1$ ve $\varepsilon = 0.01$ değerleri için diffusion-convection denkleminin analitik çözümünün

$$u(x, t) = e^{9x - 0.09t}$$

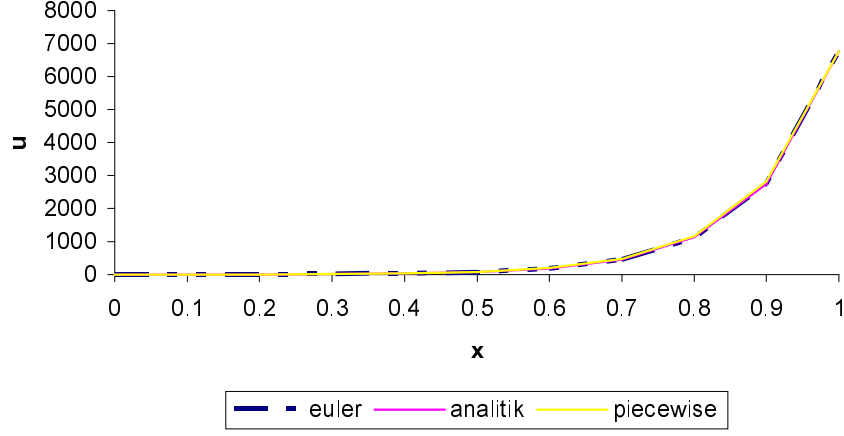
olduğu Bölüm 2 de verilmişti. Benzer şekilde, $t = 1$ değerinde, kararlılık şartı sağlanacak şekilde alınarak elde edilen nümerik çözümler Tablo 3.3 ve Tablo 3.4 de analitik çözümle karşılaştırıldı.

Tablo 3.3. Örnek 3.2' nin $t=1$ için elde edilen nümerik ve analitik çözümlerinin karşılaştırılması ($N =100$, $h=0.01$, $k= 0.0025$)

x	Piecewise analitik çözüm	Euler çözümü	Analitik çözüm
0.0	0.91393118	0.91393118	0.91393118
0.1	2.29663533	2.24665479	2.24790801
0.2	5.66629840	5.52529717	5.52896161
0.3	13.94086812	13.58984145	13.59905226
0.4	34.28955877	33.42557047	33.44826946
0.5	84.33870433	82.21364602	82.26946321
0.6	207.43708929	202.21335367	202.35027108
0.7	510.12535877	497.37152743	497.70119611
0.8	1253.04006246	1223.41317774	1224.14767305
0.9	3063.35821344	3009.68504138	3010.91645604
1.0	7405.66107180	7405.66107180	7405.66107180

Tablo 3.4. Örnek 3.2' nin $t=1$ için elde edilen nümerik ve analitik çözümlerinin karşılaştırılması ($N =200$, $h=0.005$, $k= 0.0005$)

x	Piecewise analitik çözüm	Euler çözümü	Analitik çözüm
0.0	0.91393118	0.91393118	0.91393118
0.1	2.30681564	2.24759569	2.24790801
0.2	5.69390039	5.52804831	5.52896161
0.3	14.00888686	13.59675577	13.59905226
0.4	34.45679037	33.44261138	33.44826946
0.5	84.75003667	82.25555336	82.26946321
0.6	208.44959545	202.31611955	202.35027108
0.7	512.62569383	497.61909477	497.70119611
0.8	1259.11613179	1223.96460391	1224.14767305
0.9	3075.25703098	3010.61026046	3010.91645604
1.0	7405.66107180	7405.66107180	7405.66107180



Şekil 3.2. Örnek 3.2 için $t=2$ anında $h=0.01$, $k= 0.0025$ değerleri için Piecewise ve Euler yöntemleri ile elde edilen nümerik çözümlerin analitik çözümle karşılaştırılması

Örnek 3.3. $\frac{\partial u}{\partial t} + 3.5 \frac{\partial u}{\partial x} = 0.022 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ $0 \leq x \leq 1$, $t \geq 0$,

$a = 3.5$ ve $\varepsilon = 0.022$ değerleri için diffusion-convection denkleminin analitik çözümünün

$$u(x, t) = e^{0.028547979919275532x - 0.0999t}$$

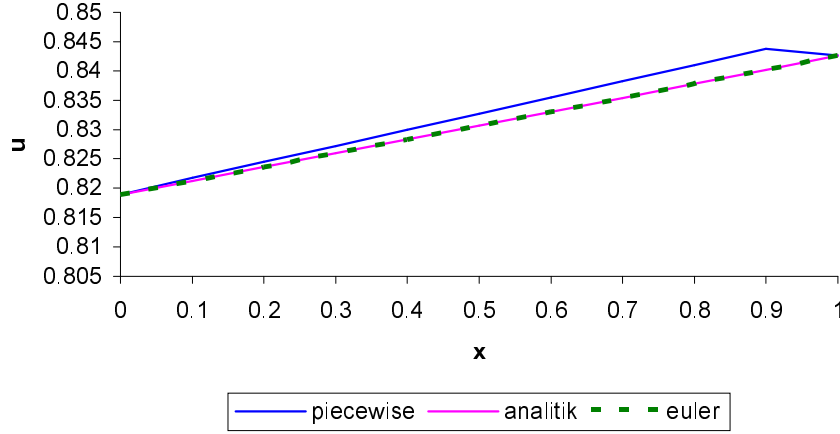
olduğu Bölüm 2 de verilmişti. Örnek 3.1 ve Örnek 3.2 deki işlemler tekrarlanarak, sonuçlar Tablo 3.5 ve Tablo 3.6 da analitik çözümle karşılaştırıldı.

Tablo 3.5. Örnek 3.3' ün $t=1$ için elde edilen nümerik ve analitik çözümlerinin karşılaştırılması ($N=100$, $h=0.01$, $k=0.0025$)

x	Piecewise analitik çözüm	Euler çözümü	Analitik çözüm
0.0	0.90492791	0.90492791	0.90492791
0.1	0.90814253	0.90751466	0.90751498
0.2	0.91114099	0.91010881	0.91010946
0.3	0.91414936	0.91271037	0.91271135
0.4	0.91716765	0.91531937	0.91532068
0.5	0.92019591	0.91793583	0.91793747
0.6	0.92323417	0.92055977	0.92056174
0.7	0.92628246	0.92319120	0.92319351
0.8	0.92934081	0.92583014	0.92583281
0.9	0.93240926	0.92847651	0.92847965
1.0	0.93113406	0.93113406	0.93113406

Tablo 3.6. Örnek 3.3' ün $t=1$ için elde edilen nümerik ve analitik çözümlerinin karşılaştırılması ($N=200$, $h=0.005$, $k=0.0005$)

x	Piecewise analitik çözüm	Euler çözümü	Analitik çözüm
0.0	0.90492791	0.90492791	0.90492791
0.1	0.90808444	0.90751492	0.90751498
0.2	0.91120647	0.91010933	0.91010946
0.3	0.91433923	0.91271115	0.91271135
0.4	0.91748276	0.91532042	0.91532068
0.5	0.92063710	0.91793714	0.91793747
0.6	0.92380228	0.92056134	0.92056174
0.7	0.92697835	0.92319305	0.92319351
0.8	0.93016533	0.92583228	0.92583281
0.9	0.93336327	0.92847905	0.92847965
1.0	0.93113406	0.93113406	0.93113406



Şekil 3.3. Örnek 3.3 için $t=2$ anında $h=0.01$, $k= 0.0025$ değerleri için Piecewise ve Euler yöntemleri ile elde edilen nümerik çözümlerin analitik çözümle karşılaştırılması

3.2. Runge- Kutta Yöntemi

$$\frac{dU}{dt} = \left(\frac{\varepsilon}{h^2} - \frac{a}{2h} \right) U_{i+1} - \frac{2\varepsilon}{h^2} U_i + \left(\frac{\varepsilon}{h^2} + \frac{a}{2h} \right) U_{i-1} \quad i = 1, 2, \dots, N-1$$

şeklinde diskrize edilmiş diffusion-convection denklemine ikinci mertebe Runge-Kutta yöntemi algoritmasını uyguladığımızda

$$\left(1 + \frac{\varepsilon k}{h^2} \right) U_i^{j+1} + \left(\frac{-\varepsilon k}{2h^2} + \frac{ak}{4h} \right) U_{i+1}^{j+1} + \left(\frac{-\varepsilon k}{2h^2} - \frac{ak}{4h} \right) U_{i-1}^{j+1} = \left(\frac{\varepsilon k}{2h^2} + \frac{ak}{4h} \right) U_{i-1}^j + \left(1 - \frac{\varepsilon k}{h^2} \right) U_i^j + \left(\frac{\varepsilon k}{2h^2} - \frac{ak}{4h} \right) U_{i+1}^j$$

$i = 1, 2, \dots, N-1$ çözüm formülü bulunur. Bu ifade, kapalı formda bir cebirsel denklem sistemi göstermektedir. Bu cebirsel denklem sistemini yine ε ve a nın farklı değerlerinde aşağıdaki örnekler için Crout yöntemi kullanılarak çözüldü. Sonuçlar tablo ve grafiklerle verildi.

Örnek 3.4. $\frac{\partial u}{\partial t} + 0.1 \frac{\partial u}{\partial x} = 0.02 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$, $0 \leq x \leq 1$, $t \geq 0$, diffusion-convection

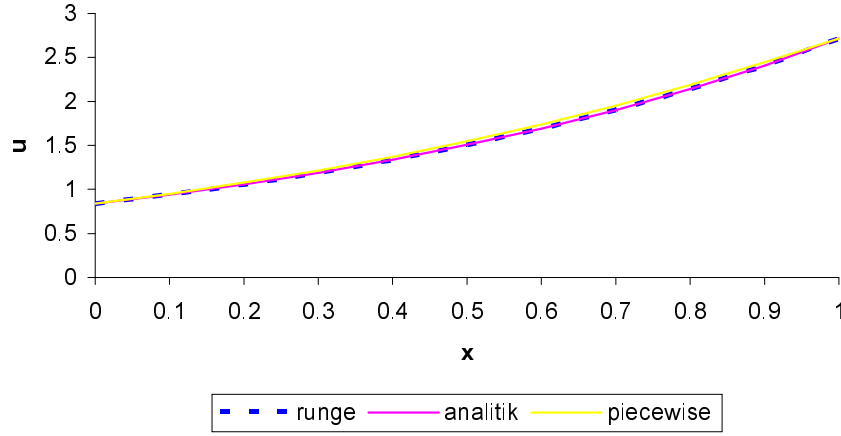
denkleminin farklı h ve k değerleri için analitik çözümü ve nümerik çözümleri Tablo 3.7 ve Tablo 3.8 de verildi.

Tablo 3.7. Örnek 3.4' ün $t=1$ için elde edilen nümerik ve analitik çözümlerinin karşılaştırılması ($N = 100$, $h=0.01$, $k= 0.0025$)

x	Piecewise analitik çözüm	Runge-Kutta çözümü	Analitik çözüm
0.0	0.91393118	0.91393118	0.91393118
0.1	1.03616297	1.02809870	1.02810000
0.2	1.16993119	1.15652861	1.15653085
0.3	1.31802825	1.30100243	1.30100537
0.4	1.48337792	1.46352424	1.46352770
0.5	1.66887137	1.64634849	1.64635242
0.6	1.87731016	1.85201130	1.85201577
0.7	2.11134798	2.08336574	2.08337057
0.8	2.37282985	2.34362148	2.34362650
0.9	2.66066831	2.63638962	2.63639357
1.0	2.96573347	2.96573347	2.96573347

Tablo 3.8. Örnek 3.4' ün $t=1$ için elde edilen nümerik ve analitik çözümlerinin karşılaştırılması ($N = 200$, $h=0.005$, $k= 0.0005$)

x	Piecewise analitik çözüm	Runge-Kutta çözümü	Analitik çözüm
0.0	0.91393118	0.91393118	0.91393118
0.1	1.03795406	1.02809967	1.02810000
0.2	1.17296881	1.15653028	1.15653085
0.3	1.32185810	1.30100462	1.30100537
0.4	1.48781085	1.46352683	1.46352770
0.5	1.67388367	1.64635143	1.64635242
0.6	1.88294132	1.85201461	1.85201577
0.7	2.11759849	2.08336939	2.08337057
0.8	2.37939002	2.34362522	2.34362650
0.9	2.66606079	2.63639264	2.63639357
1.0	2.96573347	2.96573347	2.96573347



Şekil 3.4. Örnek 3.4 için $t=2$ anında $h=0.01$, $k= 0.0025$ değerleri için Piecewise ve Runge-Kutta yöntemleri ile elde edilen nümerik çözümlerin analitik çözümle karşılaştırılması

Örnek 3.5. $\frac{\partial u}{\partial t} + 0.1\frac{\partial u}{\partial x} = 0.01\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ $0 \leq x \leq 1$, $t \geq 0$, diffusion-convection

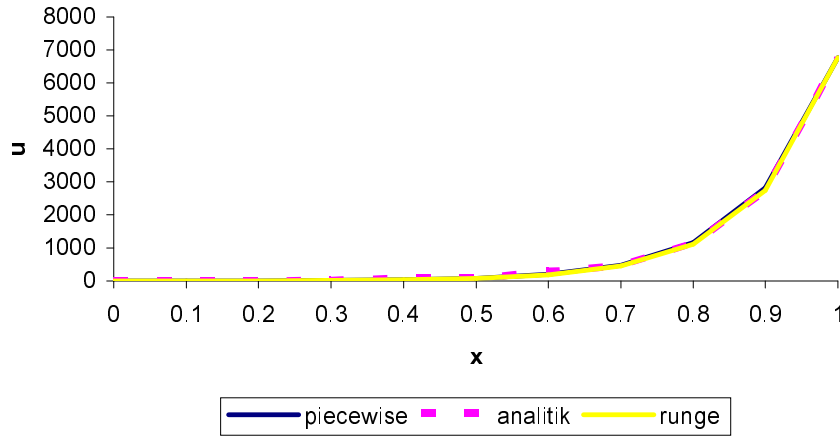
denkleminin analitik çözümü ve nümerik çözümleri aşağıdaki tablolarda verildi.

Tablo 3.9. Örnek 3.5' in $t=1$ için elde edilen nümerik ve analitik çözümlerinin karşılaştırılması ($N=100$, $h=0.01$, $k= 0.0025$)

x	Piecewise analitik çözüm	Runge-Kutta çözümü	Analitik çözüm
0.0	0.91393118	0.91393118	0.91393118
0.1	2.29663533	2.24667395	2.24790801
0.2	5.66629840	5.52535295	5.52896161
0.3	13.94086812	13.58998106	13.59905226
0.4	34.28955877	33.42591409	33.44826946
0.5	84.33870433	82.21449185	82.26946321
0.6	207.43708929	202.21543915	202.35027108
0.7	510.12535877	497.37661609	497.70119611
0.8	1253.04006246	1223.42465627	1224.14767305
0.9	3063.35821344	3009.70426629	3010.91645604
1.0	7405.66107180	7405.66107180	7405.66107180

Tablo 3.10. Örnek 3.5' in $t=1$ için elde edilen nümerik ve analitik çözümlerinin karşılaştırılması ($N=200$, $h=0.005$, $k=0.0005$)

x	Piecewise analitik çözüm	Runge-Kutta çözümü	Analitik çözüm
0.0	0.91393118	0.91393118	0.91393118
0.1	2.30681564	2.24759945	2.24790801
0.2	5.69390039	5.52805930	5.52896161
0.3	14.00888686	13.59678336	13.59905226
0.4	34.45679037	33.44267935	33.44826946
0.5	84.75003667	82.25572056	82.26946321
0.6	208.44959545	202.31653010	202.35027108
0.7	512.62569383	497.62008691	497.70119611
0.8	1259.11613179	1223.96682039	1224.14767305
0.9	3075.25703098	3010.61397649	3010.91645604
1.0	7405.66107180	7405.66107180	7405.66107180



Şekil 3.5. Örnek 3.5 için $t=2$ anında $h=0.01$, $k=0.0025$ değerleri için Piecewise ve Runge-Kutta yöntemleri ile elde edilen nümerik çözümlerin analitik çözümle karşılaştırılması

Örnek 3.6. $\frac{\partial u}{\partial t} + 3.5 \frac{\partial u}{\partial x} = 0.022 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ $0 \leq x \leq 1, t \geq 0$, diffusion-convection

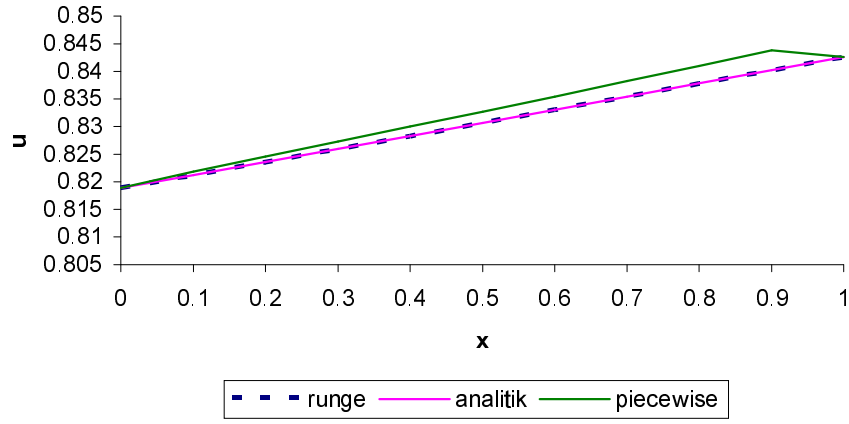
denklemini için bulunan analitik çözüm ve analitik çözümler Tablo 3.11 ve Tablo 3.12 de karşılaştırıldı.

Tablo 3.11. Örnek 3.6' nın $t=1$ için elde edilen nümerik ve analitik çözümlerinin karşılaştırılması ($N=100, h=0.01, k=0.0025$)

x	Piecewise analitik çözüm	Runge-Kutta çözümü	Analitik çözüm
0.0	0.90492791	0.904927906	0.904927906
0.1	0.90814253	0.907514984	0.907514984
0.2	0.91114099	0.910109457	0.910109458
0.3	0.91414936	0.912711348	0.912711349
0.4	0.91716765	0.915320677	0.915320678
0.5	0.92019591	0.917937466	0.917937467
0.6	0.92323417	0.920561736	0.920561737
0.7	0.92628246	0.923193509	0.923193509
0.8	0.92934081	0.925832805	0.925832806
0.9	0.93240926	0.928479647	0.928479647
1.0	0.93113406	0.931134057	0.931134057

Tablo 3.12. Örnek 3.6' nın $t=1$ için elde edilen nümerik ve analitik çözümlerinin karşılaştırılması ($N=200, h=0.005, k=0.0005$)

x	Piecewise analitik çözüm	Runga-Kutta çözümü	Analitik çözüm
0.0	0.90492791	0.904927906	0.904927906
0.1	0.90808444	0.907514984	0.907514984
0.2	0.91120647	0.910109457	0.910109458
0.3	0.91433923	0.912711348	0.912711349
0.4	0.91748276	0.915320677	0.915320678
0.5	0.92063710	0.917937467	0.917937467
0.6	0.92380228	0.920561737	0.920561737
0.7	0.92697835	0.923193509	0.923193509
0.8	0.93016533	0.925832806	0.925832806
0.9	0.93336327	0.928479648	0.928479647
1.0	0.93113406	0.931134057	0.931134057



Şekil 3.6. Örnek 3.6 için $t=2$ anında $h=0.01$, $k= 0.0025$ değerleri için Piecewise ve Runge-Kutta yöntemleri ile elde edilen nümerik çözümlerin analitik çözümlerle karşılaştırılması

4. BÖLÜM

KARARLILIK ANALİZİ

Bu bölümde, diffusion-convection denkleminin çözümü için kullanılan nümerik yöntemlerin kararlılığı araştırıldı. Kararlılık için bilinen yöntemlerden matris yöntemi kullanıldı.

4.1. Euler Yöntemi İçin Kararlılık Analizi

3. Bölümde Euler algoritmasını uygulayarak elde ettiğimiz

$$U_i^{j+1} = k \left(\frac{2\varepsilon - ah}{2h^2} \right) U_{i+1}^j + \left(1 - \frac{2\varepsilon k}{h^2} \right) U_i^j + k \left(\frac{2\varepsilon + ah}{2h^2} \right) U_{i-1}^j \quad i = 1, 2, \dots, N-1$$

çözüm formülünü matris formunda yazarsak

$$\begin{bmatrix} 1 - \frac{2\varepsilon k}{h^2} & k \left(\frac{2\varepsilon - ah}{2h^2} \right) & & & & & & & & \\ k \left(\frac{2\varepsilon + ah}{2h^2} \right) & 1 - \frac{2\varepsilon k}{h^2} & k \left(\frac{2\varepsilon - ah}{2h^2} \right) & & & & & & & \\ & & & \cdot & & & & & & \\ & & & & \cdot & & & & & \\ & & & & & \cdot & & & & \\ & & & & & & & & & \\ & & & & & & k \left(\frac{2\varepsilon + ah}{2h^2} \right) & 1 - \frac{2\varepsilon k}{h^2} & k \left(\frac{2\varepsilon - ah}{2h^2} \right) & \\ & & & & & & k \left(\frac{2\varepsilon + ah}{2h^2} \right) & 1 - \frac{2\varepsilon k}{h^2} & & \\ & & & & & & & & & \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_1^j \\ U_2^j \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ U_{N-2}^j \\ U_{N-1}^j \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} U_1^{j+1} \\ U_2^{j+1} \\ \cdot \\ \cdot \\ U_{N-2}^{j+1} \\ U_{N-1}^{j+1} \end{bmatrix}$$

elde ederiz.

Katsayılar matrisinin 1. satırı için,

$$a_{ss} = 1 - \frac{2\varepsilon k}{h^2}, \quad P_s = \left| k \left(\frac{2\varepsilon - ah}{2h^2} \right) \right|$$

dir. Burada $h < \frac{2\varepsilon}{a}$ seçilerek Brauer teoremi gereğince

$$|\lambda - a_{ss}| = P_s \quad \text{den,}$$

$$\left| \lambda - \left(1 - \frac{2\varepsilon k}{h^2} \right) \right| = k \left(\frac{2\varepsilon - ah}{2h^2} \right)$$

eşitliğini

$$\lambda_1 - \left(1 - \frac{2\varepsilon k}{h^2} \right) = k \left(\frac{2\varepsilon - ah}{2h^2} \right)$$

$$\lambda_2 - \left(1 - \frac{2\varepsilon k}{h^2} \right) = -k \left(\frac{2\varepsilon - ah}{2h^2} \right)$$

şeklinde yazarsak $r = k/h^2$ olmak üzere

$$\lambda_1 = 1 + r \left(\frac{ah - 6\varepsilon}{2} \right)$$

$$\lambda_2 = 1 - r \left(\frac{2\varepsilon + ah}{2} \right)$$

olur.

Matris yönteminde kararlılık için $|\lambda| \leq 1$ olması gerektiğinden [18]

$$|\lambda_1| \leq 1 \quad \text{için} \quad r \leq \frac{4}{6\varepsilon - ah},$$

$$|\lambda_2| \leq 1 \quad \text{için} \quad r \leq \frac{4}{2\varepsilon + ah}$$

bulunur.

Katsayılar matrisinin 2. satırı - (N-2). satırı için,

$$a_{ss} = 1 - \frac{2\varepsilon k}{h^2}, \quad P_s = \left| k \left(\frac{2\varepsilon + ah}{2h^2} \right) \right| + \left| k \left(\frac{2\varepsilon - ah}{2h^2} \right) \right|$$

dir. Böylece $|\lambda - a_{ss}| = P_s$ den

$$\left| \lambda - \left(1 - \frac{2\varepsilon k}{h^2} \right) \right| = r \left(\frac{2\varepsilon + ah}{2} \right) + r \left(\frac{2\varepsilon - ah}{2} \right)$$

veya

$$|\lambda - (1 - 2\varepsilon r)| = 2\varepsilon r$$

bulunur. Buradan

$$\lambda_3 = 1 - 4\epsilon r$$

$$\lambda_4 = 1$$

elde edilir. Kararlılık için gerek ve yeter şart $|\lambda_3| \leq 1$ ve $|\lambda_4| \leq 1$ olmasıdır. $|\lambda_3| \leq 1$ den

$$r \leq \frac{1}{2\epsilon} \text{ bulunur.}$$

Katsayılar matrisinin (N-1). satırı için,

$$a_{ss} = 1 - \frac{2\epsilon k}{h^2}, \quad P_s = \left| k \left(\frac{2\epsilon + ah}{2h^2} \right) \right| \text{ dir.}$$

$$|\lambda - a_{ss}| = P_s \text{ den}$$

$$|\lambda - (1 - 2\epsilon r)| = r \left(\frac{2\epsilon + ah}{2} \right)$$

elde edilir. Bunun çözümünden

$$\lambda_5 = 1 - r \left(\frac{6\epsilon + ah}{2} \right)$$

ve

$$\lambda_6 = 1 + r \left(\frac{ah - 2\epsilon}{2} \right)$$

bulunur. Kararlılık için gerek ve yeter şart $|\lambda_5| \leq 1$ ve $|\lambda_6| \leq 1$ olmasıdır. Böylece

$$|\lambda_5| \leq 1 \text{ den } r \leq \frac{4}{6\epsilon + ah}$$

ve

$$|\lambda_6| \leq 1 \text{ den } r \leq \frac{4}{2\epsilon - ah}$$

bulunur. O halde kararlılık için

$$r \leq \min \left\{ \frac{4}{6\epsilon - ah}, \frac{4}{2\epsilon + ah}, \frac{1}{2\epsilon}, \frac{4}{6\epsilon + ah}, \frac{4}{2\epsilon - ah} \right\}$$

olmalıdır. Buradan kararlılık parametresi

$$r \leq \frac{1}{2\epsilon}$$

olarak elde edilir.

Bir A matrisinin özdeğeri λ_s ise A^{-1} matrisinin özdeğeri $1/\lambda_s$ dir [18].

Dolayısıyla kararlılık için

$$\left| 2\frac{1}{\lambda_s} - 1 \right| \leq 1 \quad s = 1, 2, \dots$$

şartı sağlanmalıdır [18]. Burada $h < \frac{2\varepsilon}{a}$ olarak alınmıştır.

Katsayılar matrisinin 1. satırı için,

$$a_{ss} = 1 + \varepsilon r, \quad P_s = \left| \frac{ak}{4h} - \frac{\varepsilon r}{2} \right|$$

olup Brauer teoremi gereğince

$$|\lambda - a_{ss}| = P_s \text{ den}$$

$$|\lambda - (1 + \varepsilon r)| = \left| \frac{ahr}{4} - \frac{\varepsilon r}{2} \right|$$

eşitliği elde edilir. Buradan

$$\lambda_1 = 1 + r \left(\frac{\varepsilon}{2} + \frac{ah}{4} \right)$$

ve

$$\lambda_2 = 1 + r \left(\frac{3\varepsilon}{2} - \frac{ah}{4} \right)$$

bulunur.

$$\left| \frac{2}{\lambda_s} - 1 \right| \leq 1 \quad s = 1, 2 \text{ için } r > 0 \text{ olduğu görülür.}$$

Katsayılar matrisinin 2. satırı- (N-2). satırı için,

$$a_{ss} = 1 + \varepsilon r, \quad P_s = \left| - \left(\frac{ak}{4h} + \frac{\varepsilon r}{2} \right) + \left| \frac{ak}{4h} - \frac{\varepsilon r}{2} \right| \right|$$

olup

$$|\lambda - (1 + \varepsilon r)| = \varepsilon r$$

eşitliğinden

$$\begin{matrix} 3 & 1 \\ 4 & 2 \ r \ 1 \end{matrix}$$

bulunur.

$$\left| \frac{2}{\lambda_s} - 1 \right| \leq 1 \quad s=3,4 \quad \text{için} \quad r > 0 \quad \text{olduğu görülür.}$$

Katsayılar matrisinin (N-1). satırı için,

$$a_{ss} = 1 + \varepsilon r, \quad P_s = \left| - \left(\frac{ak}{4h} + \frac{\varepsilon r}{2} \right) \right|$$

olup

$$|\lambda - (1 + \varepsilon r)| = \left(\frac{ak}{4h} + \frac{\varepsilon r}{2} \right)$$

eşitliğinden

$$\lambda_5 = 1 + r \left(\frac{\varepsilon}{2} - \frac{ah}{4} \right)$$

$$\lambda_6 = 1 + r \left(\frac{3\varepsilon}{2} + \frac{ah}{4} \right)$$

bulunur. Buradan da

$$\left| \frac{2}{\lambda_s} - 1 \right| \leq 1 \quad s=5,6 \quad \text{için} \quad \text{yine} \quad r > 0 \quad \text{olduğu görülür. Bu ise yöntemin şartsız kararlı}$$

olduğunu gösterir.

5. BÖLÜM

SONUÇ VE KARŞILAŞTIRMA

Bu çalışmada, sayısal değerlendirmeler açısından çok kullanışlı olmayan bir analitik çözüme sahip Diffusion-Convection denkleminin öncelikle bir yarı analitik çözümü verildi ki bu başlangıç ve sınır değerlerini de tam olarak sağlayan oldukça kullanışlı bir çözümdür. Daha sonra denklemin, son yıllarda oldukça popüler olan diskrize yöntemlerden MOL yöntemi ile diskrize ederek nümerik çözümlerini verdik. Ayrıca yöntemlerin kararlılık analizini de yaptık.

Denklemin katsayılarına bağlı olarak, üç farklı örnek üzerinde, kullanılan yöntemlerin performansını gözlemledik. Bulunan kararlılık parametresi sağlanacak şekilde h ve k değerleri seçilip çeşitli zaman değerlerinde sayısal sonuçlar bulundu. Bunlar tablo ve grafiklerle okuyucuya sunuldu. $t=0.5$ anında $h=0.01$, $k=0.001$ ve $N=100$ alınarak elde edilen nümerik çözümlerle analitik çözümlerin karşılaştırılması yapıldı (Tablo 5.1, Tablo 5.2, Tablo 5.3). Nümerik çözümlerin birbirleri ile oldukça uyumlu olduğu ve her iki çözümün de yine analitik çözüme oldukça yakın olduğu gözlemlendi.

Sonuç olarak kullanılan bu çözüm şeklinin bu tip denklemlerde oldukça başarılı olduğu ve lineer olmayan denklemler için de kolayca kullanılabileceği kanaatindeyiz.

Tablo 5.1. Örnek 2.1' in $t=0.5$ için elde edilen nümerik ve analitik çözümlerinin karşılaştırılması ($N=100$, $h=0.01$, $k=0.001$)

x	Euler çözümü	Runge-Kutta çözümü	Analitik çözüm
0.0	0.95599748	0.95599748	0.95599748
0.1	1.07541887	1.07542036	1.07542124
0.2	1.20975987	1.20976214	1.20976349
0.3	1.36088350	1.36088623	1.36088786
0.4	1.53088581	1.53088890	1.53089075
0.5	1.72212494	1.72212843	1.72213050
0.6	1.93725379	1.93725771	1.93726010
0.7	2.17925670	2.17926109	2.17926366
0.8	2.45149101	2.45149576	2.45149861
0.9	2.75773448	2.75773870	2.75774113
1.0	3.10223984	3.10223984	3.10223984

Tablo 5.2. Örnek 2.2' nin $t=0.5$ için elde edilen nümerik ve analitik çözümlerinin karşılaştırılması ($N=100$, $h=0.01$, $k=0.001$)

x	Euler çözümü	Runge-Kutta çözümü	Analitik çözüm
0.0	0.95599748	0.95599748	0.95599748
0.1	2.35066095	2.35066542	2.35137441
0.2	5.78151231	5.78152421	5.78344789
0.3	14.22020255	14.22023179	14.22498756
0.4	34.97605273	34.97612462	34.98782178
0.5	86.02720781	86.02738462	86.05615069
0.6	211.59279284	211.59322789	211.66402139
0.7	520.43451602	520.43559129	520.60931797
0.8	1280.07234081	1280.07499913	1280.49257294
0.9	3148.67445061	3148.67984177	3149.50250251
1.0	7746.52781599	7746.52781599	7746.52781599

Tablo 3.5 Örnek 2.3' ün $t=0.5$ için elde edilen nümerik ve analitik çözümlerinin karşılaştırılması ($N=100$, $h=0.01$, $k=0.001$)

x	Euler çözümü	Runge-Kutta çözümü	Analitik çözüm
0.0	0.95127699	0.95127699	0.95127699
0.1	0.95399643	0.95399657	0.95399657
0.2	0.95672366	0.95672393	0.95672393
0.3	0.95945867	0.95945909	0.95945909
0.4	0.96220151	0.96220206	0.96220206
0.5	0.96495219	0.96495288	0.96495288
0.6	0.96771073	0.96771156	0.96771156
0.7	0.97047716	0.97047813	0.97047813
0.8	0.97325149	0.97325260	0.97325261
0.9	0.97603376	0.97603501	0.97603501
1.0	0.97882538	0.97882538	0.97882538

KAYNAKLAR

- [1] J.L. Siemieniuch and I. Gladwell, “*Analysis of explicit difference methods for a diffusion convection equation,*” *Int. J.Num. Meth. Engng*, Vol.12, (1978), 899-916
- [2] H.S. Price, J.C. Cavendish and R.S. Varga, “*Numerical methods of higher-order accuracy for diffusion-convection equations,*” *Soc.Pet.Eng.J.* 8, (1968) , 293-303
- [3] E. Sousa, “*The controversial stability analysis,*” *Appl. Math. Comput.* 145, (2003), 777-794
- [4] V. Kriventsev , H. Ninokata, “*An effective, locally exact finite-difference scheme for convection-diffusion problems,*”*Taylor and Fransic*, Vol.36, No:2, (1999) 183-205
- [5] G.A. Keramidas and T.S. Papatheodorou, “*On error estimates of the numerical solution of the convection-diffusion equations,*” *Math. Comput. in Simulation* 25, (1983)
- [6] J. Donea, B. Roig and A. Huerta, “*High-order accurate time-stepping schemes for convection-diffusion problems,*” *Comput. Meth.Appl.Mech.Engrg.* 182, (2000), 249-275
- [7] J. Anziam, “*Numerical methods for parameter identification in a convection-diffusion equation,*” 45, (2004), 660-675
- [8] J.L. Mueller and T.S. Shores, “*A new Sinc-Galerkin method for convection-diffusion equations with mixed boundary conditions,*” *Appl. Math. Comput.* 47 (2004), 803-822
- [9] Rızwan-Uddin, “*A second-order space and time nodal method for the one-dimensional convection- diffusion equation,*” *Comput. and Fluids* Vol.26, No.3, (1997), 233-247
- [10] G.h. Juncu and C. Popa, “*Preconditioning by approximations of the Gram matrix for convection- diffusion equations,*” *Math. Comput. in Simulation* 48, (1998), 225-233
- [11] R. Company, L. Jodar and E. Ponsoda, “*Accurate numerical solution of initial value problems for the time dependent convection- diffusion equation,*” *Appl. Math. Letters* 16, (2003), 981-984
- [12] G. Adomian, “*Application of decomposition to convection- diffusion equation,*” Vol.1, No.1, (1988), 7-9
- [13] C. Lecot and W.Ch. Schmid, “*Particle approximation of convection- diffusion equation,*” *Math. Comput. in Simulation* 55, (2001), 123-130

- [14] H.N.A. Ismail, E.M.E. Elbarbary and G.S.E. Salem, “*Restrictive Taylor’s approximation for solving convection- diffusion equation,*” Appl. Math. Comput. 147, (2004), 355-363
- [15] J.I. Ramos, “*A piecewise-analytical method for singularly perturbed parabolic problems,*” Appl. Math. Comput. 161, (2005), 501-512
- [16] S. Kutluay, Predictor-Corrector yöntemi ve Yakınsaklık analizi, Yüksek Lisans Tezi, (1987)
- [17] R.L. Burden and J.D. Faires, Numerical Analysis, Prindle, Weber & Schmidt, Boston, (1980)
- [18] G.D. Smith, “*Numerical solution of partial differential equations : Finite difference methods,*” 3rd edition Clarendon Press, Oxford (1987)
- [19] Schiesser, W.E. The Numerical Method of Lines, Academic Press, New York, 1992

ÖZGEÇMİŞ

31.07.1978 tarihinde Ankara'da doğdu. İlk, orta ve lise eğitimini Ankara'da tamamladı. 1997 yılında İnönü Üniversitesi Fen-Edebiyat Fakültesine girmeye hak kazandı. 2001 yılında mezun olduktan sonra 2002 yılında İnönü Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalında yüksek lisansa başladı. Halen Malatya Kale ilçesi İzollu Lisesinde matematik öğretmeni olarak görev yapmaktadır.