T.C.
İNÖNÜ ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

1-BOYUTLU BURGERS TİPİ DENKLEMLERİN SONLU FARK ÇÖZÜMLERİ

YUSUF UÇAR

YÜKSEK LİSANS TEZİ

MATEMATİK ANABİLİM DALI

MALATYA
Temmuz 2005

Fen Bilimleri Enstitüsü Müdürlüğü'ne,

Bu çalışma Jürimiz tarafından Matematik Anabilim dalında YÜKSEK LİSANS TEZİ olarak kabul edilmiştir.

Doç. Dr. Ali ÖZDEŞ
Başkan

Doç. Dr. Selçuk KUTLUAY
Danışman

Yrd. Doç. Dr. Sibel ÖZER
Üye

Onay

Yukarıdaki imzaların adı geçen öğretim üyelerine ait olduğunu onaylarım.

..../..../.......

Prof. Dr. Ali ŞAHİN
Enstitü Müdürü

ÖZET

Yüksek Lisans Tezi

1-BOYUTLU BURGERS TİPİ DENKLEMLERİN SONLU FARK ÇÖZÜMLERİ

YUSUF UÇAR
İnönü Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Anabilim Dalı
178 + xxi sayfa
2005

Tez Danışmanı : Doç. Dr. Selçuk KUTLUAY

Bu Yüksek Lisans tezi beş bölümden oluşmaktadır. Birinci bölümde sonlu fark yöntemleri ve kararlılık analizi ile ilgili bilgiler verildi.

İkinci bölümde 1-boyutlu Burgers denklemi için daha önce yapılan çalışmalardan bahsedildi. Ayrıca bu bölümde Hopf-Cole dönüşümü ve Burgers denklemi için gözönüne alınan model problemler verildi.

Üçüncü bölümde Burgers denklemi Hopf-Cole dönüşümü yardımıyla lineerleştirildikten sonra bazı sonlu fark yöntemleri uygulandı. Ayrıca bu bölümde kullanılan yöntemlerin kararlılık analizi incelendi.

Dördüncü bölümde Burgers denklemindeki UU_x non-lineer terimi yerine

değişik sonlu fark yaklaşımları alındı. Elde edilen nümerik çözümler analitik sonuçlarla ve önceki araştırmacıların verdikleri sonuçlarla karşılaştırıldı.

Beşinci bölümde, üçüncü ve dördüncü bölümlerde elde edilen nümerik sonuçlar değerlendirildi. Elde edilen nümerik sonuçların, her bir problemin analitik çözümü ve yayınlanmış nümerik sonuçlarla uyum içerisinde olduğu görüldü.

ANAHTAR KELİMELER: Burgers Denklemi, Sonlu Fark Yöntemleri, Hopf-Cole Dönüşümü.

ABSTRACT

MSc. Thesis

FINITE DIFFERENCE SOLUTIONS OF THE ONE-DIMENSIONAL BURGERS-LIKE EQUATIONS

YUSUF UÇAR
İnönü University
Graduate School of Natural and Applied Sciences
Department of Mathematics

178 + xxi pages
2005

Supervisor : Assoc. Prof. Selçuk KUTLUAY

This MSc. thesis consists of five chapters. In the first chapter, basic concepts of finite difference methods and stability analysis were given.

In the second chapter, previous studies on one-dimensional Burgers equation were mentioned. Also in this chapter Hopf-Cole transformation and model problems for Burgers equation to be considered in this study were given.

In the third chapter, some finite difference methods were applied to the Burgers equation after the linearization by Hopf-Cole transformation. The stability analysis of the methods used in this chapter was also investigated.

In the fourth chapter, the nonlinear term UU_x in the Burgers equation was replaced by various finite difference approximations to obtain numerical

solutions. The obtained numerical results were compared with analytical results and those given by previous authors.

In the fifth chapter, the numerical results obtained in third and fourth chapters were evaluated. The computed results were found to be in good agreement with analytical solution of each problem and published numerical results.

KEYWORDS: Burgers Equation, Finite Difference Methods, Hopf-Cole Transformation.

TEŞEKKÜR

Yüksek Lisans çalışmamı yöneten ve bu tezin hazırlanması sırasında bana yardımcı olan, her zaman yakın ilgi ve yardımlarını esirgemeyen çok kıymetli hocam Sayın Doç. Dr. Selçuk KUTLUAY' a, ayrıca yüksek lisans' ta üzerimde büyük emekleri olduğunu düşündüğüm Matematik bölüm başkanı Sayın Prof. Dr. Sadık KELEŞ' e ve diğer bölüm hocalarıma, çalışmalarımın her aşamasında bilgi ve görüşlerinden yararlandığım değerli hocam Arş. Gör. Dr. Alaattin ESEN' e, her zaman desteklerini aldığım değerli arkadaşım Muharrem ÖZLÜK' e ve sevgili aileme teşekkürü bir borç bilirim.

İÇİNDEKİLER

TABLOLAR LİSTESİ

ŞEKİLLER LİSTESİ

1. TEMEL KAVRAMLAR

Bu bölümde, sonraki bölümlerde kullanılacak bazı temel yöntemler ve kavramlar hakkında bilgi verildi.

1.1 Sonlu Fark Yöntemleri

Sonlu fark yöntemleri, lineer ve lineer olmayan bir çok kısmi diferansiyel denklemin çözümünde yaygın olarak kullanılmaktadır. Genel olarak bir sonlu fark yönteminin bir kısmi diferansiyel denkleme uygulanmasında aşağıdaki yol izlenir:

- Problemin çözüm bölgesi geometrik şekiller içeren kafeslere bölünür ve problemin yaklaşık çözümü her bir kafesin düğüm (mesh, grid) noktaları üzerinden hesaplanır.

- Diferansiyel denklemdeki türevler yerine Taylor serisi yardımı ile elde edilen uygun sonlu fark yaklaşımları yazılır. Böylece diferansiyel denklemin çözümü problemi, fark denklemlerinden oluşan bir cebirsel denklem sisteminin çözümü problemine indirgenir.

- Fark denkleminde ortaya çıkabilecek çözüm bölgesi içine düşmeyen hayali grid noktaları üzerindeki hayali değerleri yok etmek için problemin verilen sınır şartları yerine uygun sonlu fark yaklaşımları yazılır. Böylece elde edilen cebirsel denklem sistemi direkt veya iteratif yöntemlerden biri yardımı ile kolayca çözülür.

x ve t bağımsız değişkenlerine bağlı bir fonksiyon U olsun. Genel olarak sonlu fark yöntemlerinde $x \circ t$ düzlemin de $\Delta x (\equiv h)$ ve $\Delta t (\equiv k)$ kenar uzunluklu kafeslerin kesişim yerlerine mesh veya düğüm noktaları adı verilir. Örneğin $[0, \ell] \times [0, \infty)$ yarı açık bölgesi üzerinde, (x_m, t_n) ile ifade edilen bir düğüm noktası

$$\begin{aligned} x_m &= m\Delta x = mh, \quad m = 0, 1, 2..., N \\ t_n &= n\Delta t = nk, \qquad n = 0, 1, 2, ... \end{aligned}$$

olarak verilir. Temsili bir $P(mh, nk)$ düğüm noktası üzerinde U fonksiyonunun noktasal değeri için

$$U_p = U(mh, nk) = U_{m,n} = U_m^n$$

gösterimlerinden birisi kullanılır. Bu gösterimlerin kullanılması ve hataların ihmal edilmesiyle U fonksiyonun 1. ve 2. mertebeden türevlerine sonlu fark yaklaşımları Taylor serisi yardımı ile

$$\frac{\partial U}{\partial x} \cong \frac{U_{m+1}^n - U_m^n}{h} \tag{1.1.1}$$

$$\frac{\partial U}{\partial x} \cong \frac{U_m^n - U_{m-1}^n}{h} \tag{1.1.2}$$

$$\frac{\partial U}{\partial x} \cong \frac{U_{m+1}^n - U_{m-1}^n}{2h} \tag{1.1.3}$$

$$\frac{\partial U}{\partial t} \cong \frac{U_m^{n+1} - U_m^n}{k} \tag{1.1.4}$$

$$\frac{\partial U}{\partial t} \cong \frac{U_m^n - U_m^{n-1}}{k} \tag{1.1.5}$$

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} \cong \frac{U_m^n - 2U_{m+1}^n + U_{m+2}^n}{h^2} \tag{1.1.6}$$

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} \cong \frac{U_{m-2}^n - 2U_{m-1}^n + U_m^n}{h^2} \tag{1.1.7}$$

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} \cong \frac{U_{m-1}^n - 2U_m^n + U_{m+1}^n}{h^2} \tag{1.1.8}$$

olarak bulunur[1]. (1.1.1), (1.1.2) ve (1.1.3) ile verilen, x' e göre 1. mertebeden türev yaklaşımlarına sırasıyla iki nokta ileri (forward), geri (backward) ve üç nokta merkezi (central) fark formülleri denir. Benzer şekilde (1.1.4) ve (1.1.5) ile verilen t' ye göre 1. mertebeden türev yaklaşımlara sırasıyla ileri ve geri fark formülleri denir. (1.1.6), (1.1.7) ve (1.1.8) ile verilen x' e göre 2. mertebeden türev yaklaşımlarına da sırasıyla üç nokta ileri, geri ve merkezi fark formülleri denir.

Verilen bir diferansiyel denklemi sonlu fark formunda ifade etmek için çeşitli yöntemler kullanılır. Bunların başlıcaları

- Açık (Explicit) Yöntem
- Kapalı (Implicit) Yöntem
- Crank-Nicolson Yöntemi

dir. Bu yöntemleri ağırlıklı averaj yaklaşımı olarak ifade etmek mümkündür. Bunun için $0 \leq x \leq \ell$ ve $t > 0$ olmak üzere

$$\frac{\partial U}{\partial t} = \frac{\partial^2 U}{\partial x^2}, \quad 0 < x < \ell, \quad t > 0 \tag{1.1.9}$$

parabolik denklemini

$$U(0,t) = g_1(t), \quad t \geq 0$$

$$U(\ell,t) = g_2(t), \quad t \geq 0$$

sınır şartları ve

$$U(x,0) = f(x), \quad 0 \leq x \leq \ell$$

başlangıç şartına bağlı olarak gözönüne alalım. Burada $g_1(t), g_2(t)$ ve $f(x)$ problemin özel sınır şartlarında verilen değerleri ve ℓ ise çözüm bölgesinin tahmini uzunluğunu göstermektedir.

Genel olarak sonlu fark yaklaşımındaki temel fikir, istenilen $U(x,t)$ değerleri düğüm noktalar üzerinde olacak şekilde problemin çözüm bölgesinin N alt aralığa bölünmesidir. Burada herbir $\Delta t(\equiv k)$ zaman adımında, bu aralıkların uzunlukları genellikle $\Delta x(\equiv h) = \ell/N$ olacak şekilde eşit alınır. (1.1.9) diferansiyel denkleminde türevler yerine (1.1.1)-(1.1.8) ile verilen uygun fark formüllerinin yazılmasıyla, denklem için sonlu fark yaklaşımları elde edilir.

Bu bilgilerden sonra (1.1.9) denklemi için ağırlıklı averaj yaklaşımı aşağıdaki biçimde ifade edilebilir: $\lambda \in [0,1]$ ve $r = k/h^2$ olmak üzere (1.1.9) denkleminde $\partial U/\partial t$ için (1.1.4) ile verilen ileri fark yaklaşımı ve $\partial^2 U/\partial x^2$ için

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} = \frac{1}{h^2}\{\lambda(U_{m-1}^{n+1} - 2U_m^{n+1} + U_{m+1}^{n+1}) + (1-\lambda)(U_{m-1}^n - 2U_m^n + U_{m+1}^n)\}$$

fark yaklaşımının yazılması ile

$$-\lambda r U_{m-1}^{n+1} + (1+2\lambda r)U_m^{n+1} - \lambda r U_{m+1}^{n+1} = r(1-\lambda)U_{m-1}^n + (1-2r(1-\lambda))U_m^n + r(1-\lambda)U_{m+1}^n$$

cebirsel denklem sistemi elde edilir. Burada $m = 1, 2, ..., N-1$ dir. Bu yaklaşıma ağırlıklı averaj yaklaşımı denir ve bu yaklaşım $\lambda = 0,\ \lambda = 1/2$ ve $\lambda = 1$ için sırasıyla standart açık yöntem, Crank-Nicolson yöntemi ve kapalı yöntem olarak bilinir[1].

1.2 Kararlılık Analizleri

Bir diferansiyel denklemin sonlu fark yöntemleri ile çözümünde kararlılık analizi önemli rol oynar. Diferansiyel denkleme karşılık gelen sonlu fark denkleminin çözümünün diferansiyel denklemin tam çözümüne yakınsaması için gerekli olan şartlara kararlılık şartları ve bunların bulunması işlemine de kararlılık analizi denir.

Bir sonlu fark denkleminin (x_m, t_n) düğüm noktasındaki analitik çözümü $\mathbf{U}_m^n$ ve nümerik çözümü U_m^n olmak üzere kararlılık analizi

$$\mathbf{U}_m^n - U_m^n (\equiv Z_m^n) \tag{1.2.1}$$

hata değerinin n artarken m değerleri için sınırlı kalması esasına dayanır[2]. Lineer sonlu fark yaklaşımlarının kararlılık analizinin incelenmesinde genellikle Fourier Seri ve Matris Yöntemleri kullanılır.

1.2.1 Fourier Seri (*von Neumann*) Yöntemi

Fourier seri yöntemiyle kararlılık analizinde verilen zaman adımı için düğüm noktalarında Z hatasının uyumlu bir ayrışımı yapılır. Yöntemde Z hata fonksiyonu, $i = \sqrt{-1}$ olmak üzere,

$$Z(x) = \sum_j A_j \; e^{i\varphi_j x}$$

denklemi ile verilir. Genellikle $|\varphi_j|$ frekansları ve j keyfi değerleri gösterir. Burada φ herhangi bir reel sayı olmak üzere yalnızca $e^{i\varphi x}$ terimini gözönüne almak yeterlidir. Kolaylık olması bakımından başlangıç zamanı $t = 0$ alınırsa t' nin artışına göre hata dağılımını incelemek için sonlu fark yaklaşımının $t = 0$ zamanında $e^{i\varphi x}$' e indirgenen bir çözümünü bulmak yeterlidir. Böyle bir çözüm von Neumann yönteminde, $\alpha = \alpha(\varphi)$ genellikle karmaşık bir sayı olmak üzere,

$$U_m^n = e^{\alpha nk} e^{i\varphi mh} = \eta^n e^{i\varphi mh}$$

olarak alınır. Eğer $|\eta| \leq 1$ eşitsizliği sağlanırsa $e^{i\varphi x}$ gerçek hata bileşeni zamana göre artmaz. Böylece sonlu fark yaklaşımının von Neumann yöntemine göre kararlı olabilmesi için

$$|\eta| \leq 1$$

eşitsizliğinin sağlanması gerekir[2].

1.2.2 Matris Yöntemi

Sonlu fark yaklaşımlarının kararlılığının incelenmesinde kullanılan bir diğer yöntem de matris yöntemidir. Kısaca matris yöntemi, verilen sınır şartlarına bağlı denklemin sonlu fark yaklaşımına karşılık gelen matrisin özdeğerlerindeki hata dağılımını inceler.

Birbiri ardına gelen iki zaman adımında bir sonlu fark yaklaşımı, A ve B karesel matrisler olmak üzere, matris formunda

$$AU^{n+1} = BU^n \tag{1.2.2}$$

olarak gösterilebilir. (1.2.2) matris gösteriminde her bir zaman adımı için $A = I$ olması durumu, açık sonlu fark yaklaşımına karşılık gelir. Aksi durumda yani $A \neq I$ olduğunda (1.2.2) denklemi, $C = A^{-1}B(|A| \neq 0)$ olmak üzere, açık biçimde

$$U^{n+1} = CU^n$$

olarak yazılabilir. Bu ifade de (1.2.1) hata tanımı kullanılırsa

$$Z^{n+1} = CZ^n$$

eşitliği bulunur. Böylece bu denklem başlangıç hatasına bağlı olarak

$$Z^{n+1} = C^{n+1}Z^0$$

biçiminde yazılabilir. Buradan açıkça $\|Z^{n+1}\| \leq \|C^{n+1}\|\|Z^0\|$ dır. (1.2.2) ile tanımlanan yaklaşım $\|Z^{n+1}\|$ normunun sınırlı olması durumunda kararlı olacaktır. $\|Z^{n+1}\|$ normunun sınırlı olması K parametresinin, h ve k dan bağımsız bir sabit sayı olmak üzere

$$\|C^{n+1}\| \leq K$$

olması ile mümkündür. Zaman adımından bağımsız herhangi bir C matrisi için $\rho(C)$ ile gösterilen ve C matrisinin mutlak değerce en büyük özdeğerine eşit olan spektral yarıçap matrisin normu ile yakından ilgilidir ve $n \neq 0$ olmak üzere bu ilişki

$$\rho^{n+1}(C) \leq \|C^{n+1}\| \leq \|C\|^{n+1}$$

dir[2]. Bu durumda (1.2.2) üzerine temellenen hesaplamada hata dağılımını kontrol etmek için aşağıdaki iki durumu gözardı etmemek gerekir[2].

- Kararlılık için gerekli şart spektral yarıçapın $\rho(C) \leq 1$ olması $n \to \infty$ için hata vektöründe $Z^n \to 0$ olduğunu garantiler. Ancak n' nin sonlu olması durumunda Z^n' nin büyüklüğü için bir şey söylenemez.

- Kararlılık için yeterli şart $\|C\| \leq 1$ şartını sağlamasıdır. Bu ise n artarken hataların azaldığını garantiler.

2. BURGERS DENKLEMİ

2.1 Giriş

Burgers denklemine, litaretürde ilk olarak $U = U(x,t)$ verilen bölge üzerinde ve ν bir parametre olmak üzere

$$\frac{\partial U}{\partial t} + U\frac{\partial U}{\partial x} = \nu\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} \tag{2.1.1}$$

biçiminde Bateman' ın[3] makalesinde rastlanmıştır. 1939-1945 yılları arasında Burgers'in yazdığı değişik makalelerle[4, 5] problemin çeşitli yönlerini incelemesi ve bu konuda bir teori oluşturmasındaki katkısından dolayı (2.1.1) denklemi o tarihten sonra Burgers denklemi olarak anılmaya başlamıştır. Burgers denklemi ısı iletimi[6], gaz dinamiği[7], şok dalgaları[4, 5], izotropik katılardaki elastik dalgalar[8], sayı teorisi[9] ve stokastik süreçlerdeki işlemlerde[6] model olarak kullanılmıştır. Miller[10] yüksek lisans tezinde predictor-corrector yöntemini kullanarak sonlu fark yaklaşımlarıyla Burgers denklemini türbülansın model problemi olarak incelemiştir. Cole[6] ve Hopf[11] birbirlerinden bağımsız olarak Burgers denklemini lineer difüzyon denklemine dönüştürerek keyfi bir başlangıç şartı için problemin tam çözümünü verdiler. Benton ve Platzman[12] bir boyutlu Burgers denkleminin analitik çözümünü incelemişlerdir. Ancak bu çözümler sonsuz seriler içerdiğinden viskosite parametresinin küçük değerleri için oldukça yavaş yakınsamaktadır. Bu nedenle Burgers denkleminin birçok yöntemle nümerik çözümleri yapılmıştır. Karpman[13] Burgers denklemini, sadeleştirilmiş Navier-Stokes denklemi olarak ele almış ve Navier-Stokes denklemine uygulanan nümerik yöntemlerin kararlılık analizlerinde model problem olarak kullanmıştır. Caldwell vd.[14] sonlu eleman yöntemiyle Burgers denklemini nümerik olarak çözmüşlerdir. Caldwell ve Smith[15] farklı nümerik yaklaşımların karşılaştırmalarını vermişlerdir. Evans ve Abdullah[16] değişik sınır ve başlangıç şartları ile verilen Burgers denklemini grup açık yöntemi ile çözmüşlerdir. Nguyen ve Reynen[17] parçalı lineer baz fonksiyonlarını kullanarak en küçük kareler zayıf formülasyonu üzerine temellenmiş sonlu eleman yöntemini probleme uygulamışlardır. Varoğlu ve Finn[18] ağırlıklı kalan formülasyonu üzerine temellenmiş bir çeşit sonlu eleman yöntemini uygulayarak kararlı ve oldukça yakın değerler elde etmişlerdir. Rubin ve Graves[19] Burgers denkleminin nümerik çözümü için yarı lineerleştirme ve spline fonksiyon tekniğini kulanmışlardır. Rubin ve Khosla[20] ile Caldwell[21] Burgers denkleminin çözümünü kübik spline fonksiyonlarını kullanarak vermişlerdir. Jain, Holla ve Lohar[22, 23, 24] makalelerinde kapalı sonlu fark yaklaşımları ile kübik spline fonksiyonlarını kullanarak Burgers denkleminin çözümlerini vermişlerdir. Ali vd.[25, 26, 27] B-spline galerkin yöntemi, Method of Lines yöntemi ve collocation yöntemiyle denklemin nümerik çözümlerini elde etmişlerdir. Kakuda ve Tosaka[28] genelleştirilmiş sınır eleman yöntemi ile Burgers denkleminin nümerik çözümlerini vermişlerdir. Öziş ve Özdeş[29] varyasyonel yöntemi kullanarak tam çözüme yakınsayan bir çözüm dizisi bulmuşlardır. Mittal ve Singhal[30], Bazley[31] tarafından geliştirilen tekniği uygulayarak elde ettikleri adi diferansiyel denklem sistemini Runga-Kutta-Chebychev yöntemleriyle çözmüşlerdir. Gardner vd.[32] kuadratik B-spline fonksiyonlarını kullanarak Petrov-Galerkin yöntemini, Katsuhiro[33] ise yeni bir sonlu değişken fark yöntemini uygulamıştır. Hon ve Mao[34] multiquadric yöntemini nonlineer Burgers denklemine uygulamışlardır. Chino ve Tosaka[35] Burgers denkleminin sınır eleman analizini dual reciprocity yöntemiyle yapmışlardır. Abd-el-Malek ve El-Mansi[36] Burgers denklemini çözmek için grup teoretik yöntemlerini kullanmışlardır. Lin ve Zhou[37] multiresolution yöntemini Burgers denklemine uygulamışlardır. Kutluay vd.[38] kuadratik B-spline fonksiyonlarını kullanarak en küçük kareler yöntemiyle, Kutluay ve Esen[39] lumped galerkin yöntemi ve lineerleştirimiş kapalı sonlu fark yaklaşımıyla [40], Kutluay vd.[41] açık ve tam açık sonlu fark yaklaşımlarıyla Burgers tipi denklemlerin nümerik çözümlerini vermişlerdir. Bahadır ve Sağlam[42] sonlu farklarla lineerleştirilmiş Burgers denklemine karışık sınır elemanları yöntemini uygulamışlardır. Öziş vd.[43, 44] lineer ve kuadratik baz fonksiyonlarını kullanarak galerkin yöntemiyle sonuçlar elde ederken, Raslan[45] kuadratik B-spline fonksiyonlarını, Dağ vd.[46] kübik B-spline fonksiyonlarını, Ramadan vd.[47] septik B-spline fonksiyonlarını kullanarak collocation yöntemiyle çözüme ulaşmışlardır. Dağ vd.[48] time-splitted Burgers denkleminin nümerik çözümlerini kuadratik ve kübik B-spline fonksiyonlarını kullanarak galerkin yöntemiyle çözmüşlerdir. Abdou ve Soliman[49] varyasyonel iterasyon yöntemini uygulamışlardır. Aksan ve Özdeş[50] $sin(n\pi x)$ fonksiyonlarını kullanarak galerkin yöntemiyle yine Aksan[51] lineer B-spline fonksiyonlarını kullanarak galerkin yöntemiyle sonuçlar elde etmişlerdir. Kadalbajoo vd.[52] bir parametreye bağlı olarak düzgün yakınsayan sonlu fark yaklaşımı ile Burgers denklemini çözmüşlerdir. Inc[53] Adomian decomposition yöntemiyle, Abbasbandy ve Darvishi[54] ise modifiye Adomian decomposition yöntemi ile çözüme ulaşmışlardır. Darvishi ve Javidi[55] pseudospektral yöntemle sonuçlar elde etmişlerdir. Öziş ve Aslan[56] asimptotik açılım yöntemi ile büyük Reynolds sayıları içeren Burgers denklemini nümerik olarak çözmüşlerdir. Hassanien vd.[57] dördüncü mertebeden sonlu fark yaklaşımlarıyla denklemin çözümlerini elde etmişlerdir. Gülsu ve Öziş[58] restrictive

Taylor yaklaşımını kullanarak klasik açık sonlu fark yaklaşımını Burgers denklemine uygulamışlardır.

2.2 Hopf-Cole Dönüşümü

Burgers denkleminin önemli özelliklerinden birisi $U(x,t)$ denklemin bir çözümü olmak üzere,

$$U(x,t) = -2\nu \frac{\theta_x}{\theta} \tag{2.2.1}$$

dönüşümü ile

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} = \nu \frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} \tag{2.2.2}$$

lineer ısı denklemine dönüşmesidir. Bu dönüşüm ilk olarak Hopf[11] tarafından yine aynı yıllarda bağımsız olarak Cole[6] tarafından da verildiğinden Hopf-Cole dönüşümü olarak bilinir.

1951 yılında Cole tarafından ısı denklemi ile Burgers denklemi arasındaki ilişkiyi ve Burgers denkleminin çözümünün tekliğini gösteren iki teorem aşağıda verilmiştir.

Teorem:

(2.2.2) ısı denkleminin herhangi bir çözümü $\theta(x,t)$ olmak üzere (2.1.1) Burgers denkleminin çözümü

$$U(x,t) = -2\nu \frac{\theta_x}{\theta}$$

biçimindedir.

İspat:

$$f = f(x,t)$$

kendisi ve her mertebeden kısmi türevleri sürekli olan bir fonksiyon olmak üzere (2.1.1) denkleminde

$$U(x,t) = f_x(x,t) \tag{2.2.3}$$

dönüşümü yapılırsa

$$f_{xt} + f_x f_{xx} = \nu f_{xxx} \tag{2.2.4}$$

elde edilir.

f sürekli olduğundan $f_{xt} = f_{tx}$ eşitliği gözönüne alınarak (2.2.4) denkleminin x' e göre integrali alındığında integrasyon sabitlerinin sıfır kabul edilmesiyle

$$f_t + \frac{1}{2}(f_x)^2 = \nu f_{xx} \tag{2.2.5}$$

elde edilir.

$$f(x,t) = F[\theta(x,t)]$$

olarak alınır ve (2.2.5) denkleminde yerine yazılırsa;

$$F'(\theta)\theta_t + \frac{1}{2}[F'(\theta)\theta_x]^2 = \nu\{[F'(\theta)\theta_x]'\} = \nu F''(\theta)\theta_x^2 + \nu F'(\theta)\theta_{xx}$$

denklemi elde edilir. $\theta(x,t)$ fonksiyonunun (2.2.2) ısı denklemini sağladığı gözönüne alınırsa

$$[F'(\theta)]^2 = 2\nu F''(\theta)$$

olur. Bu denklemde

$$\frac{1}{P(\theta)} = F'(\theta)$$

dönüşümü yapılırsa

$$\frac{1}{[P(\theta)]^2} = 2\nu\frac{-P^{'}(\theta)}{[P(\theta)]^2} \ \Rightarrow P^{'}(\theta) = \frac{-1}{2\nu} \ \Rightarrow P(\theta) = \frac{-1}{2\nu}(\theta - c_1)$$

elde edilir. Bu denklemde $c_1 = 0$ alınırsa

$$dF = -2\nu\theta^{-1}d\theta$$

veya

$$f(x,t) = F(\theta) = -2\nu ln(\theta) + c_2$$

bulunur. Son olarak (2.2.3) den

$$U(x,t) = -2\nu[ln\theta + c_2]_x$$

veya

$$U(x,t) = -2\nu\frac{\theta_x}{\theta}$$

bulunur. Böylece teoremin ispatı tamamlanmış olur.

Şimdi $\theta(x,t)$ başlangıç değerini bulmak için (2.2.1) de $x = \xi$ dönüşümü yapılarak 0' dan x' e kadar integral alınırsa,

$$\int_0^x U(\xi,t)d\xi = -2\nu \ln\theta(\xi,t) \mid_0^x = -2\nu[\ln\theta(x,t) - \ln\theta(0,t)] = -2\nu\ln[\frac{\theta(x,t)}{\theta(0,t)}]$$

$$-(2\nu)^{-1}\int_0^x U(\xi,t)d\xi = \ln[\frac{\theta(x,t)}{\theta(0,t)}]$$

elde edilir. Böylece

$$\theta(x,t) = \theta(0,t)\ e^{-(2\nu)^{-1}\int_0^x U(\xi,t)d\xi} \tag{2.2.6}$$

olarak bulunur. $U(x,t)$ nin başlangıç değeri

$$U(x,0) = U_0(x)$$

olmak üzere $c_0 = \theta(0,0)$ için

$$\theta(x,0) = \theta_0(x) = c_0\ e^{-(2\nu)^{-1}\int_0^x U_0(\xi)d\xi} \tag{2.2.7}$$

şeklinde c_0 sabitine bağlı olarak bulunur.

Teorem:

$$\frac{\partial U}{\partial t}+U\frac{\partial U}{\partial x}=\nu\frac{\partial^2 U}{\partial x^2}$$

Burgers denkleminin

$$U(x,t)=-2\nu\frac{\theta_x}{\theta}$$

ile verilen çözümü tektir.

İspat:

(2.1.1) Burgers denklemini sağlayan herhangi bir $U(x,t)$ çözümü (2.2.2) ısı denklemini sağlayan (2.2.6) biçiminde bir $\theta(x,t)$ fonksiyonu tanımlar. Buna göre (2.1.1) denkleminin $U(x,0)\equiv V(x,0)$ olacak şekilde $U(x,t)$ ve $V(x,t)$ gibi iki çözümü olsun. $\theta(x,0)$ yalnızca $U(x,0)\equiv V(x,0)$' a bağlı olduğundan (2.2.7) den $\theta(x,0)$ her bir durumda c_0 sabitine kadar aynıdır. Sınır değerleri her iki durumda da aynı olduğundan (2.2.2) ısı denkleminin $\theta(x,t)$ çözümü aynıdır. $U(x,t)$ ve $V(x,t)$ (2.2.1) kullanılarak elde edildiğinden;

$$U(x,t)\equiv V(x,t)$$

olur, yani çözüm tektir.

2.3 Model Problemler

Bu çalışmada (2.1.1) ile verilen Burgers denklemi

$$U\left(a,t\right)=U\left(b,t\right)=0,\ t>0 \tag{2.3.1}$$

sınır şartları ve aşağıdaki üç farklı başlangıç şartı için gözönüne alındı.

Problem 1: Bu problem için başlangıç şartı

$$U(x,0) = \sin(\pi x),\ \ 0 < x < 1 \tag{2.3.2}$$

dır. (2.2.1) ile verilen Hopf-Cole dönüşümü kullanılırsa (2.3.1) ve (2.3.2) şartlarını sağlayan (2.1.1) Burgers denklemi ile verilen problem

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} = \nu \frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2},\ \ 0 < x < 1,\ t > 0 \tag{2.3.3}$$

$$\theta(x,0) = \exp\left\{-(2\pi\nu)^{-1}\left[1 - \cos(\pi x)\right]\right\},\ \ 0 \le x \le 1. \tag{2.3.4}$$

$$\theta_x(0,t) = \theta_x(1,t) = 0,\ t > 0 \tag{2.3.5}$$

biçiminde lineer ısı iletim problemine dönüşür. Bu lineerleştirilmiş başlangıç değer probleminin Fourier seri çözümü

$$\theta(x,t) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \exp\left(-n^2\pi^2\nu t\right)\cos(n\pi x) \tag{2.3.6}$$

dir[6]. Burada a_0 ve a_n katsayıları Fourier katsayıları olup sırasıyla

$$a_0 = \int_0^1 \exp\left\{-(2\pi\nu)^{-1}\left[1 - \cos(\pi x)\right]\right\} dx$$

$$a_n = 2\int_0^1 \exp\left\{-(2\pi\nu)^{-1}\left[1 - \cos(\pi x)\right]\right\}\cos(n\pi x)\, dx\ \ (n = 1, 2, 3, ...)$$

dir. Eğer $\theta(x,t)$, (2.3.4) başlangıç ve (2.3.5) sınır şartlarına bağlı (2.3.3) ısı iletim denkleminin bir çözümü ise (2.2.1) dönüşümü (2.3.1) ve (2.3.2) başlangıç ve sınır şartlarına bağlı (2.1.1) ile verilen Burgers denkleminin bir çözümüdür[6].

Problem 2: Bu problemde başlangıç şartı

$$U(x,0) = 4x(1-x),\ \ 0 < x < 1 \tag{2.3.7}$$

olarak alındı. (2.2.1) Hopf-Cole dönüşümü kullanılsa (2.3.7) başlangıç şartı

$$\theta(x,0) = \exp\left\{-x^2(3\nu)^{-1}(3-2x)\right\},\ \ 0 \le x \le 1 \tag{2.3.8}$$

biçimine dönüşür. Önceki probleme benzer olarak, lineerleştirilmiş bu problemin Fourier seri çözümü (2.3.6) denklemi ile aynı bulunur. Ancak (2.3.6) daki a_0 ve a_n Fourier katsayıları sırasıyla

$$a_0 = \int_0^1 \exp\left\{-x^2\,(3\nu)^{-1}\,(3-2x)\right\} dx$$

$$a_n = 2\int_0^1 \exp\left\{-x^2\,(3\nu)^{-1}\,(3-2x)\right\} \cos(n\pi x)\, dx \;\; (n = 1, 2, 3, ...)$$

dir.

Problem 3: Bu problem için başlangıç şartı

$$U(x,1) = \frac{x}{1+\exp[(1/4\nu)(x^2-(1/4))]} \qquad (2.3.9)$$

dir. Bu problemin tam çözümü, $t_0 = \exp(1/8\nu)$ olmak üzere,

$$U(x,t) = \frac{x/t}{1+(t/t_0)^{\frac{1}{2}}\exp(x^2/4\nu t)}, \quad t \geq 1$$

dir[38]. (2.2.1) ile verilen Hopf-Cole dönüşümü kullanılırsa (2.3.1) ve (2.3.9) şartlarını sağlayan (2.1.1) denklemi ile verilen problem

$$\frac{\partial\theta}{\partial t} = \nu\frac{\partial^2\theta}{\partial x^2}\,, \qquad a < x < b$$

$$\theta(x,0) = \exp\left\{\frac{-x^2}{4\nu} + \ln\left[\frac{\exp(\frac{-1}{16\nu})\exp(\frac{1}{4\nu})+1}{\exp(\frac{-1}{16\nu})+1}\right]\right\}, \;\; a \leq x \leq b$$

$$\theta_x(a,t) = \theta_x(b,t) = 0, \; t > 1$$

biçiminde ısı problemine dönüşür.

3. HOPF-COLE DÖNÜŞÜMÜ YARDIMIYLA LİNEERLEŞTİRİLMİŞ BURGERS DENKLEMİNİN SONLU FARK ÇÖZÜMLERİ

Bu kısımda

$$\frac{\partial U}{\partial t} + U\frac{\partial U}{\partial x} = \nu\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} \tag{3.1}$$

Burgers denklemi Hopf-Cole dönüşümü yardımıyla lineerleştirildikten sonra aşağıdaki klasik sonlu fark yöntemleri yardımıyla nümerik olarak çözüldü.

- Açık (Explicit) yöntem
- Kapalı (Implicit) yöntem
- Crank-Nicolson yöntemi
- Hopscotch yöntemi

3.1 Açık (Explicit) Sonlu Fark Yöntemi (ASFY)

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} = \nu\frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2}\ , \quad 0 < x < 1, \quad t > 0 \tag{3.1.1}$$

$$\theta_x(0,t) = \theta_x(1,t) = 0\ , \quad t > 0 \tag{3.1.2}$$

$$\theta_0 = \theta(x,0) = 0\ , \quad 0 \le x \le 1 \tag{3.1.3}$$

ısı iletim problemini gözönüne alalım. Burada $\theta(x,0)$ problem için verilen başlangıç şartıdır. (3.1.1) denkleminde θ_t türevi yerine

$$\theta_t \cong \frac{\theta_i^{j+1} - \theta_i^j}{k}$$

ileri fark yaklaşımı, θ_{xx} türevi yerine

$$\theta_{xx} \cong \frac{\theta_{i-1}^j - 2\theta_i^j + \theta_{i+1}^j}{h^2}$$

merkezi fark yaklaşımı yazılır ve $r = \nu k/h^2$ alınırsa

$$\theta_i^{j+1} = r\theta_{i-1}^j + (1-2r)\theta_i^j + r\theta_{i+1}^j \ , \quad i = 0(1)N \ , \quad j = 0(1)J \qquad (3.1.4)$$

açık sonlu fark yaklaşımı bulunur. Bu fark denkleminde $i = 0$ ve $i = N$ için ortaya çıkan θ_{-1} ve θ_{N+1} hayali değerler (3.1.2) sınır şartındaki θ_x türevi yerine merkezi sonlu fark yaklaşımlarının kullanılmasıyla kolayca yok edilerek

$$\theta_i^{j+1} = (1-2r)\theta_i^j + 2r\theta_{i+1}^j \ , \quad i = 0$$

$$\theta_i^{j+1} = r\theta_{i-1}^j + (1-2r)\theta_i^j + r\theta_{i+1}^j \ , \quad i = 1(1)N-1$$

$$\theta_i^{j+1} = 2r\theta_{i-1}^j + (1-2r)\theta_i^j \ , \quad i = N$$

lineer cebirsel denklem sistemi elde edilir. Bu cebirsel denklem sistemi matris formunda kapalı olarak

$$\underline{\theta}^{j+1} = A\underline{\theta}^j$$

biçiminde yazılabilir. Burada

$$A = \begin{bmatrix} 1-2r & 2r & & & & \\ r & 1-2r & r & & & \\ & r & 1-2r & r & & \\ & & & \ddots & & \\ & & & r & 1-2r & r \\ & & & & 2r & 1-2r \end{bmatrix}_{(N+1)\times(N+1)}$$

ve $\underline{\theta}^j = \begin{bmatrix} \theta_0^j & \theta_1^j & \theta_2^j & \ldots & \theta_{N-1}^j & \theta_N^j \end{bmatrix}^T$ dir. Bu sistem direkt yöntemlerden biri ile çözülür ve elde edilen θ_i^j değerleri

$$U(x_i, t_j) = \frac{-\nu}{h}\left(\frac{\theta_{i+1}^j - \theta_{i-1}^j}{\theta_i^j}\right), \quad i = 1(1)N-1, \quad j = 0(1)J$$

Hopf-Cole dönüşümünde kullanılırsa Burgers denkleminin yaklaşık çözümleri bulunmuş olur.

Nümerik Sonuçlar

Bu çalışmada bütün hesaplamalar Intel P4 bilgisayarda Fortran derleyicisi kullanılarak yapıldı. Nümerik çözümlerin analitik sonuçlara ne kadar yakın olduğunu göstermek için $U(x_i, t_j)$ ve $U_{i,j}$ sırasıyla $U(x,t)$ nin (x_i, t_j) noktasındaki tam ve nümerik değerleri olmak üzere,

$$\| e \|_1 = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N-1}\left|1 - \frac{U_{i,j}}{U(x_i, t_j)}\right| \quad ,$$

$$L_2 = \left[h\sum_{i=1}^{N}\left|U(x_i, t_j) - U_{i,j}\right|^2\right]^{\frac{1}{2}} \quad ,$$

ve

$$L_\infty = \max_i \left|U(x_i, t_j) - U_{i,j}\right|$$

olarak tanımlanan hata normları hesaplandı.

$\nu = 1$, $k = 0.00001$ değerleri ve değişik mesh uzunluğu h için Problem 1' in Açık Sonlu Fark Yöntemi (ASFY) ile elde edilen $t = 0.1$ deki nümerik çözümlerinin problemin tam çözümü ile karşılaştırılması Tablo 3.1 de verildi. Tablodan da kolayca görüldüğü gibi elde edilen nümerik değerler problemin tam değerlerine yakındır. Mesh uzunluğu h nin küçük seçilmesi durumunda elde edilen nümerik çözümlerin tam çözüme oldukça yaklaştığı açıkca görülmektedir.

Tablo 3.2 de $h = 0.0125$ ve $k = 0.0001$ alınarak kinematik viskosite ν nün 1, 0.1, ve 0.01 değerleri için Problem 1' in çeşitli t zamanında ASFY ile elde edilen nümerik çözümleri problemin tam çözümü ile karşılaştırıldı. Tablodan her bir ν değeri için elde edilen nümerik değerlerin tam değerlerle uyum içinde olduğu görülmektedir.

Problem 2' nin ASFY ile elde edilen nümerik çözümleri ile problemin tam çözümü Tablo 3.3 ve Tablo 3.4 de verildi. Elde edilen nümerik sonuçların analitik sonuçlara yeterince yakın olduğu açıkca görülmektedir.

$\nu = 0.5$, $h = 0.05$ ve $k = 0.0001$ değerleri için Problem 3' ün çeşitli t zamanlarında ASFY ile elde edilen nümerik sonuçlar problemin tam çözümü ile karşılaştırıldı. Tablo 3.5 den sonuçların iyi olduğu görülmektedir.

Tablo 3.1: **ASFY:** $t = 0.1$, $\nu = 1$, $k = 0.00001$ için Problem 1' in nümerik ve tam çözümleri

x	Nümerik Çözüm $h = 0.1$	$h = 0.05$	$h = 0.025$	$h = 0.0125$	Tam Çözüm
0.1	0.10863	0.10931	0.10948	0.10952	0.10954
0.2	0.20805	0.20935	0.20967	0.20975	0.20979
0.3	0.28946	0.29128	0.29173	0.29184	0.29190
0.4	0.34501	0.34719	0.34773	0.34786	0.34792
0.5	0.36845	0.37079	0.37137	0.37151	0.37158
0.6	0.35601	0.35828	0.35884	0.35898	0.35905
0.7	0.30728	0.30924	0.30973	0.30985	0.30991
0.8	0.22588	0.22733	0.22769	0.22778	0.22782
0.9	0.11966	0.12043	0.12062	0.12067	0.12069
$\|e\|_1 \times 10^3$	7.57090	2.02419	0.55416	0.17604	
$L_2 \times 10^3$	2.21295	0.56052	0.14951	0.04689	
$L_\infty \times 10^3$	3.12466	0.79150	0.21147	0.06633	

Tablo 3.2: **ASFY:** $\nu = 1$, $\nu = 0.1$, $\nu = 0.01$; $h = 0.0125$, $k = 0.0001$ için Problem 1' in nümerik ve tam çözümleri

		$\nu = 1.0$ $(k = 0.00001)$		$\nu = 0.1$		$\nu = 0.01$	
x	t	Nümerik	Tam	Nümerik	Tam	Nümerik	Tam
0.25	0.4	0.01357	0.01357	0.30880	0.30889	0.34229	0.34191
	0.6	0.00189	0.00189	0.24068	0.24074	0.26902	0.26896
	0.8	0.00026	0.00026	0.19564	0.19568	0.22146	0.22148
	1.0	0.00004	0.00004	0.16254	0.16256	0.18816	0.18819
	3.0	0.00000	0.00000	0.02720	0.02720	0.07511	0.07511
0.50	0.4	0.01924	0.01924	0.56953	0.56963	0.66876	0.66071
	0.6	0.00267	0.00267	0.44712	0.44721	0.53243	0.52942
	0.8	0.00037	0.00037	0.35917	0.35924	0.44046	0.43914
	1.0	0.00005	0.00005	0.29187	0.29192	0.37508	0.37442
	3.0	0.00000	0.00000	0.04020	0.04020	0.15018	0.15018
0.75	0.4	0.01363	0.01363	0.62541	0.62544	0.94061	0.91026
	0.6	0.00189	0.00189	0.48714	0.48721	0.77946	0.76724
	0.8	0.00026	0.00026	0.37386	0.37392	0.65299	0.64740
	1.0	0.00004	0.00004	0.28743	0.28747	0.55893	0.55605
	3.0	0.00000	0.00000	0.02977	0.02977	0.22486	0.22481

Tablo 3.3: **ASFY:** $t = 0.1$, $\nu = 1$, $k = 0.00001$ için Problem 2' nin nümerik ve tam çözümleri

x	Nümerik Çözüm $h = 0.1$	$h = 0.05$	$h = 0.025$	$h = 0.0125$	Tam Çözüm
0.1	0.11196	0.11266	0.11283	0.11287	0.11289
0.2	0.21446	0.21580	0.21613	0.21621	0.21625
0.3	0.29846	0.30033	0.30080	0.30091	0.30097
0.4	0.35586	0.35810	0.35866	0.35880	0.35886
0.5	0.38020	0.38261	0.38320	0.38335	0.38342
0.6	0.36753	0.36986	0.37045	0.37059	0.37066
0.7	0.31735	0.31938	0.31988	0.32001	0.32007
0.8	0.23337	0.23486	0.23524	0.23533	0.23537
0.9	0.12366	0.12445	0.12465	0.12470	0.12472
$\|e\|_1 \times 10^3$	7.55178	2.02168	0.55371	0.17597	
$L_2 \times 10^3$	2.27981	0.57817	0.15427	0.04839	
$L_\infty \times 10^3$	3.22181	0.81698	0.21837	0.06846	

Tablo 3.4: **ASFY:** $\nu = 1$, $\nu = 0.1$, $\nu = 0.01$; $h = 0.0125$, $k = 0.0001$ için Problem 2' nin nümerik ve tam çözümleri

		$\nu = 1.0$ $(k = 0.00001)$		$\nu = 0.1$		$\nu = 0.01$	
x	t	Nümerik	Tam	Nümerik	Tam	Nümerik	Tam
0.25	0.4	0.01400	0.01400	0.31743	0.31752	0.36273	0.36226
	0.6	0.00195	0.00195	0.24608	0.24614	0.28211	0.28204
	0.8	0.00027	0.00027	0.19952	0.19956	0.23044	0.23045
	1.0	0.00004	0.00004	0.16557	0.16560	0.19466	0.19469
	3.0	0.00000	0.00000	0.02776	0.02776	0.07613	0.07613
0.50	0.4	0.01985	0.01985	0.58443	0.58454	0.69282	0.68368
	0.6	0.00276	0.00276	0.45789	0.45798	0.55164	0.54832
	0.8	0.00038	0.00038	0.36733	0.36740	0.45513	0.45371
	1.0	0.00005	0.00005	0.29829	0.29834	0.38636	0.38568
	3.0	0.00000	0.00000	0.04106	0.04106	0.15219	0.15218
0.75	0.4	0.01407	0.01407	0.64559	0.64562	0.95327	0.92050
	0.6	0.00195	0.00195	0.50260	0.50268	0.79643	0.78299
	0.8	0.00027	0.00027	0.38527	0.38534	0.66879	0.66272
	1.0	0.00004	0.00004	0.29581	0.29586	0.57238	0.56932
	3.0	0.00000	0.00000	0.03044	0.03044	0.22779	0.22774

Tablo 3.5: **ASFY:** $\nu = 0.5$, $h = 0.05$, $k = 0.0001$ ve $[a, b] = [0, 8]$ için Problem 3' ün nümerik ve tam çözümleri

	$t = 1.5$		$t = 3.0$		$t = 4.5$	
x	Nümerik	Tam	Nümerik	Tam	Nümerik	Tam
0.5	0.15319	0.15327	0.06425	0.06426	0.03799	0.03799
1.0	0.26565	0.26577	0.11879	0.11880	0.07186	0.07187
1.5	0.30402	0.30412	0.15506	0.15509	0.09792	0.09793
2.0	0.26138	0.26142	0.16760	0.16762	0.11338	0.11339
2.5	0.17219	0.17217	0.15627	0.15630	0.11697	0.11698
3.0	0.08813	0.08807	0.12737	0.12738	0.10948	0.10949
3.5	0.03587	0.03582	0.09132	0.09132	0.09368	0.09369
4.0	0.01189	0.01186	0.05798	0.05797	0.07360	0.07361
4.5	0.00326	0.00325	0.03286	0.03284	0.05330	0.05330
5.0	0.00075	0.00074	0.01675	0.01674	0.03572	0.03572
5.5	0.00014	0.00014	0.00773	0.00772	0.02224	0.02224
6.0	0.00002	0.00002	0.00324	0.00324	0.01291	0.01292
6.5	0.00000	0.00000	0.00124	0.00124	0.00698	0.00702
7.0	0.00000	0.00000	0.00043	0.00043	0.00345	0.00358
7.5	0.00000	0.00000	0.00013	0.00014	0.00139	0.00172

3.2 Kapalı (Implicit) Sonlu Fark Yöntemi (KSFY)

(3.1.1)-(3.1.3) denklemleri ile verilen ısı iletim problemini tekrar gözönüne alalım. (3.1.1) denkleminde θ_t türevi yerine

$$\theta_t \cong \frac{\theta_i^{j+1} - \theta_i^j}{k}$$

ileri fark yaklaşımı, θ_{xx} türevi yerine

$$\theta_{xx} \cong \frac{\theta_{i-1}^{j+1} - 2\theta_i^{j+1} + \theta_{i+1}^{j+1}}{h^2}$$

merkezi fark yaklaşımı yazılır ve $r = \nu k/h^2$ alınırsa

$$-r\theta_{i-1}^{j+1} + (1 + 2r)\theta_i^{j+1} - r\theta_{i+1}^{j+1} = \theta_i^j \ , \quad i = 0(1)N \ , \quad j = 0(1)J \qquad (3.2.1)$$

kapalı sonlu fark yaklaşımı bulunur. Bu fark denkleminde $i = 0$ ve $i = N$ için ortaya çıkan θ_{-1} ve θ_{N+1} hayali değerler (3.1.2) sınır şartındaki θ_x türevi yerine merkezi sonlu fark yaklaşımlarının kullanılmasıyla kolayca yok edilerek

$$(1+2r)\theta_i^{j+1} - 2r\theta_{i+1}^{j+1} = \theta_i^j \ , \quad i = 0$$

$$-r\theta_{i-1}^{j+1} + (1+2r)\theta_i^{j+1} - r\theta_{i+1}^{j+1} = \theta_i^j \ , \quad i = 1(1)N-1$$

$$-2r\theta_{i-1}^{j+1} + (1+2r)\theta_i^{j+1} = \theta_i^j \ , \quad i = N$$

lineer cebirsel denklem sistemi elde edilir. Bu cebirsel denklem sistemi matris formunda kapalı olarak

$$A\underline{\theta}^{j+1} = \underline{\theta}^j$$

biçiminde yazılabilir. Burada

$$A = \begin{bmatrix} 1+2r & -2r & & & & & \\ -r & 1+2r & -r & & & & \\ & & -r & 1+2r & -r & & \\ & & & & \ddots & & \\ & & & & -r & 1+2r & -r \\ & & & & & -2r & 1+2r \end{bmatrix}_{(N+1)\times(N+1)}$$

ve $\underline{\theta}^j = \begin{bmatrix} \theta_0^j & \theta_1^j & \theta_2^j & \ldots & \theta_{N-1}^j & \theta_N^j \end{bmatrix}^T$ dir. Bu sistem direkt yöntemlerden biri ile çözülür ve elde edilen θ_i^j değerleri

$$U(x_i, t_j) = \frac{-\nu}{h}\left(\frac{\theta_{i+1}^j - \theta_{i-1}^j}{\theta_i^j}\right) \ , \quad i = 1(1)N-1, \quad j = 0(1)J$$

Hopf-Cole dönüşümünde kullanılırsa Burgers denkleminin yaklaşık çözümleri bulunmuş olur.

Nümerik Sonuçlar

Tablo 3.6 da $\nu = 1$, $k = 0.00001$ değerleri ve değişik mesh uzunluğu h için Problem 1' in Kapalı Sonlu Fark Yöntemi (KSFY) ile elde edilen $t = 0.1$ deki nümerik çözümleri problemin tam çözümü ile karşılaştırıldı. Tablodan da kolayca görüldüğü gibi elde edilen nümerik değerler problemin tam değerlerine oldukça yakındır. Mesh uzunluğu h nin küçük seçilmesi durumunda elde edilen nümerik çözümlerin tam çözüme yaklaştığı açıkca görülmektedir.

$h = 0.0125$ ve $k = 0.0001$ alınarak kinematik viskosite ν nün 1, 0.1, ve 0.01 değerleri için Problem 1' in çeşitli t zamanında KSFY ile elde edilen nümerik çözümleri ile problemin tam çözümü Tablo 3.7 de karşlaştırıldı. Tablo 3.7 den her bir ν değeri için elde edilen nümerik değerlerin tam değerlerle uyum içinde olduğu açıkca görülmektedir.

Problem 2' nin KSFY ile elde edilen nümerik çözümleri ile problemin tam çözümü Tablo 3.8 ve Tablo 3.9 da verildi. Elde edilen nümerik sonuçların analitik sonuçlara yeterince yakın olduğu görülmektedir.

Tablo 3.10 da $\nu = 0.5$, $h = 0.05$ ve $k = 0.0001$ değerleri için Problem 3' ün çeşitli t zamanında KSFY ile elde edilen nümerik sonuçlar ile problemin tam çözümü karşılaştırıldı. Tablo 3.10 dan sonuçların iyi olduğu görülmektedir.

Tablo 3.6: **KSFY:** $t = 0.1$, $\nu = 1$, $k = 0.00001$ için Problem 1' in nümerik ve tam çözümleri

x	Nümerik Çözüm $h = 0.1$	$h = 0.05$	$h = 0.025$	$h = 0.0125$	Tam Çözüm
0.1	0.10864	0.10932	0.10949	0.10953	0.10954
0.2	0.20807	0.20937	0.20969	0.20978	0.20979
0.3	0.28949	0.29131	0.29176	0.29187	0.29190
0.4	0.34504	0.34722	0.34776	0.34790	0.34792
0.5	0.36849	0.37082	0.37140	0.37155	0.37158
0.6	0.35605	0.35831	0.35888	0.35902	0.35905
0.7	0.30731	0.30927	0.30976	0.30988	0.30991
0.8	0.22590	0.22735	0.22771	0.22780	0.22782
0.9	0.11967	0.12044	0.12063	0.12068	0.12069
$\|e\|_1 \times 10^3$	7.48527	1.93210	0.45920	0.07975	
$L_2 \times 10^3$	2.18796	0.53506	0.12394	0.02129	
$L_\infty \times 10^3$	3.08929	0.75546	0.17542	0.03020	

Tablo 3.7: **KSFY:** $\nu = 1$, $\nu = 0.1$, $\nu = 0.01$; $h = 0.0125$, $k = 0.0001$ için Problem 1' in nümerik ve tam çözümleri

		$\nu = 1.0$		$\nu = 0.1$		$\nu = 0.01$	
x	t	Nümerik	Tam	Nümerik	Tam	Nümerik	Tam
0.25	0.4	0.01360	0.01357	0.30886	0.30889	0.34225	0.34191
	0.6	0.00190	0.00189	0.24073	0.24074	0.26901	0.26896
	0.8	0.00026	0.00026	0.19567	0.19568	0.22147	0.22148
	1.0	0.00004	0.00004	0.16256	0.16256	0.18817	0.18819
	3.0	0.00000	0.00000	0.02721	0.02720	0.07511	0.07511
0.50	0.4	0.01928	0.01924	0.56957	0.56963	0.66815	0.66071
	0.6	0.00268	0.00267	0.44716	0.44721	0.53207	0.52942
	0.8	0.00037	0.00037	0.35921	0.35924	0.44025	0.43914
	1.0	0.00005	0.00005	0.29190	0.29192	0.37494	0.37442
	3.0	0.00000	0.00000	0.04022	0.04020	0.15018	0.15018
0.75	0.4	0.01366	0.01363	0.62532	0.62544	0.93924	0.91026
	0.6	0.00190	0.00189	0.48711	0.48721	0.77830	0.76724
	0.8	0.00026	0.00026	0.37386	0.37392	0.65220	0.64740
	1.0	0.00004	0.00004	0.28745	0.28747	0.55840	0.55605
	3.0	0.00000	0.00000	0.02978	0.02977	0.22483	0.22481

Tablo 3.8: **KSFY:** $t = 0.1$, $\nu = 1$, $k = 0.00001$ için Problem 2' nin nümerik ve tam çözümleri

x	Nümerik Çözüm $h = 0.1$	$h = 0.05$	$h = 0.025$	$h = 0.0125$	Tam Çözüm
0.1	0.11197	0.11267	0.11284	0.11288	0.11289
0.2	0.21448	0.21582	0.21615	0.21624	0.21625
0.3	0.29849	0.30036	0.30083	0.30094	0.30097
0.4	0.35590	0.35814	0.35870	0.35883	0.35886
0.5	0.38024	0.38264	0.38324	0.38339	0.38342
0.6	0.36756	0.36990	0.37048	0.37063	0.37066
0.7	0.31738	0.31941	0.31991	0.32004	0.32007
0.8	0.23339	0.23489	0.23526	0.23535	0.23537
0.9	0.12367	0.12446	0.12466	0.12471	0.12472
$\|e\|_1 \times 10^3$	7.46603	1.92948	0.45864	0.07958	
$L_2 \times 10^3$	2.25403	0.55191	0.12788	0.02198	
$L_\infty \times 10^3$	3.18536	0.77983	0.18121	0.03124	

Tablo 3.9: **KSFY:** $\nu = 1$, $\nu = 0.1$, $\nu = 0.01$; $h = 0.0125$, $k = 0.0001$ için Problem 2' nin nümerik ve tam çözümleri

		$\nu = 1.0$		$\nu = 0.1$		$\nu = 0.01$	
x	t	Nümerik	Tam	Nümerik	Tam	Nümerik	Tam
0.25	0.4	0.01403	0.01400	0.31749	0.31752	0.36268	0.36226
	0.6	0.00196	0.00195	0.24613	0.24614	0.28210	0.28204
	0.8	0.00027	0.00027	0.19955	0.19956	0.23044	0.23045
	1.0	0.00004	0.00004	0.16559	0.16560	0.19467	0.19469
	3.0	0.00000	0.00000	0.02777	0.02776	0.07613	0.07613
0.50	0.4	0.01989	0.01985	0.58447	0.58454	0.69214	0.68368
	0.6	0.00277	0.00276	0.45793	0.45798	0.55123	0.54832
	0.8	0.00038	0.00038	0.36737	0.36740	0.45489	0.45371
	1.0	0.00005	0.00005	0.29833	0.29834	0.38621	0.38568
	3.0	0.00000	0.00000	0.04108	0.04106	0.15218	0.15218
0.75	0.4	0.01410	0.01407	0.64550	0.64562	0.95193	0.92050
	0.6	0.00196	0.00195	0.50257	0.50268	0.79521	0.78299
	0.8	0.00027	0.00027	0.38527	0.38534	0.66793	0.66272
	1.0	0.00004	0.00004	0.29583	0.29586	0.57180	0.56932
	3.0	0.00000	0.00000	0.03045	0.03044	0.22776	0.22774

Tablo 3.10: **KSFY:** $\nu = 0.5$, $h = 0.05$, $k = 0.0001$ ve $[a, b] = [0, 8]$ için Problem 3' ün nümerik ve tam çözümleri

	$t = 1.5$		$t = 3.0$		$t = 4.5$	
x	Nümerik	Tam	Nümerik	Tam	Nümerik	Tam
0.5	0.15320	0.15327	0.06426	0.06426	0.03799	0.03799
1.0	0.26566	0.26577	0.11879	0.11880	0.07187	0.07187
1.5	0.30402	0.30412	0.15507	0.15509	0.09793	0.09793
2.0	0.26137	0.26142	0.16760	0.16762	0.11338	0.11339
2.5	0.17219	0.17217	0.15627	0.15630	0.11698	0.11698
3.0	0.08812	0.08807	0.12736	0.12738	0.10948	0.10949
3.5	0.03587	0.03582	0.09132	0.09132	0.09368	0.09369
4.0	0.01189	0.01186	0.05798	0.05797	0.07360	0.07361
4.5	0.00326	0.00325	0.03286	0.03284	0.05330	0.05330
5.0	0.00075	0.00074	0.01675	0.01674	0.03572	0.03572
5.5	0.00014	0.00014	0.00773	0.00772	0.02224	0.02224
6.0	0.00002	0.00002	0.00325	0.00324	0.01291	0.01292
6.5	0.00000	0.00000	0.00124	0.00124	0.00698	0.00702
7.0	0.00000	0.00000	0.00043	0.00043	0.00345	0.00358
7.5	0.00000	0.00000	0.00013	0.00014	0.00139	0.00172

3.3 Crank-Nicolson Sonlu Fark Yöntemi (CNSFY)

(3.1.1)-(3.1.3) deklemleri ile verilen başlangıç ve sınır değer problemini tekrar gözönüne alalım. (3.1.1) denkleminde θ_t türevi yerine

$$\theta_t \cong \frac{\theta_i^{j+1} - \theta_i^j}{k}$$

ileri fark yaklaşımı, θ_{xx} türevi yerine

$$\theta_{xx} \cong \frac{1}{2}[\frac{\theta_{i-1}^{j+1} - 2\theta_i^{j+1} + \theta_{i+1}^{j+1}}{h^2} + \frac{\theta_{i-1}^j - 2\theta_i^j + \theta_{i+1}^j}{h^2}]$$

merkezi fark yaklaşımı yazılır ve $r = \nu k/h^2$ alınırsa

$$-r\theta_{i-1}^{j+1} + (2+2r)\theta_i^{j+1} - r\theta_{i+1}^{j+1} = r\theta_{i-1}^j + (2-2r)\theta_i^j + r\theta_{i+1}^j \,, \quad i = 0(1)N \,, \quad j = 0(1)J \qquad (3.3.1)$$

Crank-Nicolson sonlu fark yaklaşımı bulunur. Bu fark denkleminde $i = 0$ ve $i = N$ için ortaya çıkan θ_{-1} ve θ_{N+1} hayali değerler (3.1.2) sınır şartındaki θ_x

türevi yerine merkezi sonlu fark yaklaşımlarının kullanılmasıyla kolayca yok edilerek

$$(2+2r)\theta_i^{j+1} - 2r\theta_{i+1}^{j+1} = (2-2r)\theta_i^j + 2r\theta_{i+1}^j \ , \quad i=0$$

$$-r\theta_{i-1}^{j+1} + (2+2r)\theta_i^{j+1} - r\theta_{i+1}^{j+1} = r\theta_{i-1}^j + (2-2r)\theta_i^j + r\theta_{i+1}^j \ , \quad i=1(1)N-1$$

$$-2r\theta_{i-1}^{j+1} + (2+2r)\theta_i^{j+1} = r\theta_{i-1}^j + (2-2r)\theta_i^j \ , \quad i=N$$

lineer cebirsel denklem sistemi elde edilir. Bu cebirsel denklem sistemi matris formunda kapalı olarak

$$A\underline{\theta}^{j+1} = (4I - A)\underline{\theta}^j$$

biçiminde yazılabilir. Burada

$$A = \begin{bmatrix} 2+2r & -2r & & & & & \\ -r & 2+2r & -r & & & & \\ & & -r & 2+2r & -r & & \\ & & & & \ddots & & \\ & & & & -r & 2+2r & -r \\ & & & & & -2r & 2+2r \end{bmatrix}_{(N+1)\times(N+1)}$$

ve $\underline{\theta}^j = \begin{bmatrix} \theta_0^j & \theta_1^j & \theta_2^j & \ldots & \theta_{N-1}^j & \theta_N^j \end{bmatrix}^T$ dir. Bu sistem direkt yöntemlerden biri ile çözülür ve elde edilen θ_i^j değerleri

$$U(x_i, t_j) = \frac{-\nu}{h}\left(\frac{\theta_{i+1}^j - \theta_{i-1}^j}{\theta_i^j}\right) \ , \quad i=1(1)N-1, \quad j=0(1)J$$

Hopf-Cole dönüşümünde kullanılırsa Burgers denkleminin yaklaşık çözümleri bulunmuş olur.

Nümerik Sonuçlar

Problem 1' in $\nu = 1$, $k = 0.00001$ değerleri ve değişik mesh uzunluğu h için Crank-Nicolson Sonlu Fark Yöntemi (CNSFY) ile elde edilen $t = 0.1$ deki nümerik çözümleri ile problemin tam çözümü Tablo 3.11 de karşılaştırıldı. Tablo 3.11 den de kolayca görüldüğü gibi elde edilen nümerik değerler problemin tam değerlerine oldukça yakındır. Mesh uzunluğu h nin küçük seçilmesi durumunda elde edilen nümerik çözümlerin tam çözümle uyumlu olduğu açıkca görülmektedir.

Yine Problem 1' in $h = 0.0125$ ve $k = 0.0001$ değerleri ve kinematik viskosite ν nün 1, 0.1, ve 0.01 değerleri için çeşitli t zamanında CNSFY ile elde edilen nümerik çözümleri ile problemin tam çözümü Tablo 3.12 de karşılaştırıldı. Tablo 3.12 den her bir ν değeri için elde edilen nümerik değerlerin tam değerlere oldukça yakın olduğu görülmektedir.

Tablo 3.13 ve Tablo 3.14 de Problem 2' nin CNSFY ile elde edilen nümerik çözümleri ile problemin tam çözümü verildi. Tablolardan, elde edilen nümerik sonuçların analitik sonuçlara oldukça yakın olduğu açıkca görülmektedir.

$\nu = 0.5$, $h = 0.05$ ve $k = 0.0001$ değerleri için Problem 3' ün çeşitli t zamanında CNSFY ile elde edilen nümerik sonuçlar ile problemin tam çözümü Tablo 3.15 de karşılaştırıldı. Tablodan sonuçların iyi olduğu açıkca görülmektedir.

Tablo 3.11: **CNSFY:** $t = 0.1$, $\nu = 1$, $k = 0.00001$ için Problem 1' in nümerik ve tam çözümleri

x	Nümerik Çözüm $h = 0.1$	$h = 0.05$	$h = 0.025$	$h = 0.0125$	Tam Çözüm
0.1	0.10863	0.10931	0.10948	0.10952	0.10954
0.2	0.20806	0.20936	0.20968	0.20977	0.20979
0.3	0.28947	0.29129	0.29175	0.29186	0.29190
0.4	0.34503	0.34720	0.34774	0.34788	0.34792
0.5	0.36847	0.37080	0.37138	0.37153	0.37158
0.6	0.35603	0.35829	0.35886	0.35900	0.35905
0.7	0.30729	0.30925	0.30974	0.30986	0.30991
0.8	0.22589	0.22734	0.22770	0.22779	0.22782
0.9	0.11966	0.12043	0.12062	0.12067	0.12069
$\|e\|_1 \times 10^3$	7.52808	1.97815	0.50668	0.12789	
$L_2 \times 10^3$	2.20045	0.54779	0.13672	0.03409	
$L_\infty \times 10^3$	3.10697	0.77348	0.19344	0.04824	

Tablo 3.12: **CNSFY:** $\nu = 1$, $\nu = 0.1$, $\nu = 0.01$; $h = 0.0125$, $k = 0.0001$ için Problem 1' in nümerik ve tam çözümleri

		$\nu = 1.0$		$\nu = 0.1$		$\nu = 0.01$	
x	t	Nümerik	Tam	Nümerik	Tam	Nümerik	Tam
0.25	0.4	0.01358	0.01357	0.30883	0.30889	0.34227	0.34191
	0.6	0.00189	0.00189	0.24070	0.24074	0.26901	0.26896
	0.8	0.00026	0.00026	0.19565	0.19568	0.22146	0.22148
	1.0	0.00004	0.00004	0.16255	0.16256	0.18816	0.18819
	3.0	0.00000	0.00000	0.02721	0.02720	0.07511	0.07511
0.50	0.4	0.01924	0.01924	0.56955	0.56963	0.66846	0.66071
	0.6	0.00267	0.00267	0.44714	0.44721	0.53225	0.52942
	0.8	0.00037	0.00037	0.35919	0.35924	0.44036	0.43914
	1.0	0.00005	0.00005	0.29188	0.29192	0.37501	0.37442
	3.0	0.00000	0.00000	0.04021	0.04020	0.15018	0.15018
0.75	0.4	0.01363	0.01363	0.62536	0.62544	0.93993	0.91026
	0.6	0.00189	0.00189	0.48713	0.48721	0.77888	0.76724
	0.8	0.00026	0.00026	0.37386	0.37392	0.65259	0.64740
	1.0	0.00004	0.00004	0.28744	0.28747	0.55866	0.55605
	3.0	0.00000	0.00000	0.02978	0.02977	0.22485	0.22481

Tablo 3.13: **CNSFY:** $t = 0.1$, $\nu = 1$, $k = 0.00001$ için Problem 2' nin nümerik ve tam çözümleri

	Nümerik Çözüm				Tam
x	$h = 0.1$	$h = 0.05$	$h = 0.025$	$h = 0.0125$	Çözüm
0.1	0.11197	0.11266	0.11283	0.11288	0.11289
0.2	0.21447	0.21581	0.21614	0.21622	0.21625
0.3	0.29848	0.30035	0.30081	0.30093	0.30097
0.4	0.35588	0.35812	0.35868	0.35882	0.35886
0.5	0.38022	0.38262	0.38322	0.38337	0.38342
0.6	0.36755	0.36988	0.37046	0.37061	0.37066
0.7	0.31737	0.31939	0.31990	0.32002	0.32007
0.8	0.23338	0.23488	0.23525	0.23534	0.23537
0.9	0.12366	0.12445	0.12465	0.12470	0.12472
$\|e\|_1 \times 10^3$	7.50890	1.97558	0.50617	0.12778	
$L_2 \times 10^3$	2.26692	0.56504	0.14107	0.03518	
$L_\infty \times 10^3$	3.20358	0.79841	0.19979	0.04982	

Tablo 3.14: **CNSFY:** $\nu = 1$, $\nu = 0.1$, $\nu = 0.01$; $h = 0.0125$, $k = 0.0001$ için Problem 2' nin nümerik ve tam çözümleri

		$\nu = 1.0$		$\nu = 0.1$		$\nu = 0.01$	
x	t	Nümerik	Tam	Nümerik	Tam	Nümerik	Tam
0.25	0.4	0.01401	0.01400	0.31746	0.31752	0.36271	0.36226
	0.6	0.00195	0.00195	0.24610	0.24614	0.28210	0.28204
	0.8	0.00027	0.00027	0.19953	0.19956	0.23044	0.23045
	1.0	0.00004	0.00004	0.16558	0.16560	0.19466	0.19469
	3.0	0.00000	0.00000	0.02776	0.02776	0.07613	0.07613
0.50	0.4	0.01985	0.01985	0.58445	0.58454	0.69248	0.68368
	0.6	0.00276	0.00276	0.45791	0.45798	0.55143	0.54832
	0.8	0.00038	0.00038	0.36735	0.36740	0.45501	0.45371
	1.0	0.00005	0.00005	0.29831	0.29834	0.38629	0.38568
	3.0	0.00000	0.00000	0.04107	0.04106	0.15218	0.15218
0.75	0.4	0.01407	0.01407	0.64554	0.64562	0.95260	0.92050
	0.6	0.00195	0.00195	0.50259	0.50268	0.79582	0.78299
	0.8	0.00027	0.00027	0.38527	0.38534	0.66836	0.66272
	1.0	0.00004	0.00004	0.29582	0.29586	0.57209	0.56932
	3.0	0.00000	0.00000	0.03044	0.03044	0.22778	0.22774

Tablo 3.15: **CNSFY:** $\nu = 0.5$, $h = 0.05$, $k = 0.0001$ ve $[a,b] = [0,8]$ için Problem 3' ün nümerik ve tam çözümleri

	$t = 1.5$		$t = 3.0$		$t = 4.5$	
x	Nümerik	Tam	Nümerik	Tam	Nümerik	Tam
0.5	0.15320	0.15327	0.06426	0.06426	0.03799	0.03799
1.0	0.26565	0.26577	0.11879	0.11880	0.07187	0.07187
1.5	0.30402	0.30412	0.15507	0.15509	0.09793	0.09793
2.0	0.26138	0.26142	0.16760	0.16762	0.11338	0.11339
2.5	0.17219	0.17217	0.15627	0.15630	0.11697	0.11698
3.0	0.08813	0.08807	0.12737	0.12738	0.10948	0.10949
3.5	0.03587	0.03582	0.09132	0.09132	0.09368	0.09369
4.0	0.01189	0.01186	0.05798	0.05797	0.07360	0.07361
4.5	0.00326	0.00325	0.03286	0.03284	0.05330	0.05330
5.0	0.00075	0.00074	0.01675	0.01674	0.03572	0.03572
5.5	0.00014	0.00014	0.00773	0.00772	0.02224	0.02224
6.0	0.00002	0.00002	0.00324	0.00324	0.01291	0.01292
6.5	0.00000	0.00000	0.00124	0.00124	0.00698	0.00702
7.0	0.00000	0.00000	0.00043	0.00043	0.00345	0.00358
7.5	0.00000	0.00000	0.00013	0.00014	0.00139	0.00172

3.4 Kararlılık Analizi

(3.1.1) ile verilen ısı denklemi yani

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} = \nu \frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2}\ , \quad 0 < x < 1, \quad t > 0$$

denklemi için ağırlıklı averaj yaklaşımı, $\lambda \in [0,1]$ olmak üzere,

$$\frac{\theta_m^{n+1} - \theta_m^n}{k} = \nu[\lambda(\frac{\theta_{m-1}^{n+1} - 2\theta_m^{n+1} + \theta_{m+1}^{n+1}}{h^2}) + (1-\lambda)(\frac{\theta_{m-1}^n - 2\theta_m^n + \theta_{m+1}^n}{h^2})] \tag{3.4.1}$$

dir. Bu yaklaşım $\lambda = 0$, $\lambda = 1/2$ ve $\lambda = 1$ için sırasıyla standart açık, Crank-Nicolson ve kapalı yöntem olarak bilinir [1]. Şimdi (3.4.1) yaklaşımına von Neumann kararlılık yöntemini uygulayalım. Bunun için θ_m^n yerine

$$\theta_m^n = e^{i\beta ph}\xi^q\ , \quad i = \sqrt{-1}$$

yazılır ve gerekli düzenlemeler yapılırsa

$$\xi - r\nu\lambda\xi(e^{i\beta h} - 2 + e^{-i\beta h}) = 1 + r\nu(1-\lambda)(e^{i\beta h} - 2 + e^{-i\beta h})$$

elde edilir. Burada $r = k/h^2$ dir. Son eşitlikte $e^{i\beta h} = \cos\beta h + i\sin\beta h$ Euler formülünün kullanılmasıyla

$$\xi - r\nu\lambda\xi(2\cos\beta h - 2) = 1 + r\nu(1-\lambda)(2\cos\beta h - 2) \tag{3.4.2}$$

bulunur.

$$\cos\beta h = 1 - 2\sin^2\frac{\beta h}{2}$$

olduğundan (3.4.2) dan ξ parametresi

$$\xi = \frac{1 - 4r\nu(1-\lambda)sin^2\frac{\beta h}{2}}{1 + 4r\nu\lambda sin^2\frac{\beta h}{2}}$$

olarak elde edilir.

- $\lambda = 0$ ise (3.4.1) yaklaşımı (3.1.4) ile verilen açık sonlu fark yaklaşımına karşılık gelir. Yöntemin kararlı olması için gerek ve yeter şart $\mid \xi \mid \leq 1$ olmasıdır. $\mid \xi \mid \leq 1$ şartı r kararlılık parametresinin $r \leq \frac{1}{2\nu}$ olması ile mümkündür. Böylece açık yöntem $r \leq \frac{1}{2\nu}$ olması durumunda kararlıdır.

- $\lambda = 1$ ise (3.4.1) yaklaşımı (3.2.1) ile verilen tamamen kapalı sonlu fark yaklaşımına karşılık gelir. Yöntemin karalı olması için yine gerek ve yeter şart $\mid \xi \mid \leq 1$ olmasıdır. Bu şart her $r > 0$ için sağlanacağından kapalı yöntem şartsız kararlıdır.

- $\lambda = 1/2$ ise (3.4.1) yaklaşımı (3.3.1) ile verilen Crank-Nicolson sonlu fark yaklaşımına karşılık gelir. Yine kararlılık için gerek ve yeter şart ξ parametresinin $\mid \xi \mid \leq 1$ şartını sağlamasıdır. Bu şart her $r > 0$ için sağlanacağından Crank-Nicolson sonlu fark yöntemi şartsız kararlıdır.

3.5 Hopscotch Sonlu Fark Yöntemi (HSFY)

(3.1.1)-(3.1.3) denklemleri ile verilen ısı iletim problemini tekrar ele alalım. (3.1.1) denkleminde θ_t türevi yerine

$$\theta_t \cong \frac{\theta_i^{j+1} - \theta_i^j}{k}$$

ileri fark yaklaşımı, θ_{xx} türevi yerine $(i+j)$ çiftse

$$\theta_{xx} \cong \frac{\theta_{i-1}^j - 2\theta_i^j + \theta_{i+1}^j}{h^2}$$

merkezi fark yaklaşımı, $(i+j)$ tekse

$$\theta_{xx} \cong \frac{\theta_{i-1}^{j+1} - 2\theta_i^{j+1} + \theta_{i+1}^{j+1}}{h^2}$$

merkezi fark yaklaşımı yazılır ve $r = \nu k/h^2$ alınırsa

$$\theta_i^{j+1} = \theta_i^j + r(\theta_{i-1}^j - 2\theta_i^j + \theta_{i+1}^j) \quad , \quad (i+j,\ cift\ ise) \tag{3.5.1}$$

$$\theta_i^{j+1} = \frac{\theta_i^j + r(\theta_{i-1}^{j+1} + \theta_{i+1}^{j+1})}{1+2r} \quad , \quad (i+j,\ tek\ ise) \tag{3.5.2}$$

denklemleri elde edilir[59]. (3.5.1) ve (3.5.2) fark denklemlerin de $i = 0$ ve $i = N$ için ortaya çıkan θ_{-1} ve θ_{N+1} hayali değerleri (3.1.2) sınır şartındaki θ_x türevi yerine merkezi sonlu fark yaklaşımlarının kullanılmasıyla kolayca yok edilerek lineer cebirsel denklem sistemi elde edilir. Bu cebirsel denklem sistemi direk yöntemlerden biri ile çözülür ve elde edilen θ_i^j çözümleri

$$U(x_i, t_j) = \frac{-\nu}{h}\left(\frac{\theta_{i+1}^j - \theta_{i-1}^j}{\theta_i^j}\right) , \quad i = 1(1)N-1, \quad j = 0(1)J$$

Hopf-Cole dönüşümünde kullanılırsa Burgers denkleminin yaklaşık çözümleri bulunmuş olur.

Nümerik Sonuçlar

$\nu = 1$, $k = 0.00001$ değerleri ve değişik mesh uzunluğu h için Problem 1' in Hopscotch Sonlu Fark Yaklaşımı (HSFY) ile elde edilen $t = 0.1$ deki nümerik çözümlerinin problemin tam çözümü ile karşılaştırılması Tablo 3.16 da verildi. Tablodan da kolayca görüldüğü gibi elde edilen nümerik değerler problemin tam değerlerine yakındır. Mesh uzunluğu h nin küçük seçilmesi durumunda elde edilen nümerik çözümlerin tam çözüme oldukça yaklaştığı görülmektedir.

Tablo 3.17 de $h = 0.0125$ ve $k = 0.0001$ alınarak kinematik viskosite ν nün 1, 0.1, ve 0.01 değerleri için Problem 1' in çeşitli t zamanında HSFY ile elde edilen nümerik çözümleri problemin tam çözümü ile karşılaştırıldı. Tablodan her bir ν değeri için elde edilen nümerik değerlerin tam değerlerle uyum içinde olduğu açıkca görülmektedir.

Problem 2' nin HSFY ile elde edilen nümerik çözümleri ile problemin tam çözümü Tablo 3.18 ve Tablo 3.19 da verildi. Elde edilen nümerik sonuçların analitik sonuçlara yeterince yakın olduğu açıkca görülmektedir.

$\nu = 0.5$, $h = 0.05$ ve $k = 0.0001$ değerleri için Problem 3' ün çeşitli t zamanında HSFY ile elde edilen nümerik sonuçlar problemin tam çözümü ile karşılaştırıldı. Tablo 3.20 den sonuçların iyi olduğu görülmektedir.

Tablo 3.16: **HSFY:** $t = 0.1$, $\nu = 1$, $k = 0.00001$ için Problem 1' in nümerik ve tam çözümleri

x	Nümerik Çözüm $h = 0.1$	$h = 0.05$	$h = 0.025$	$h = 0.0125$	Tam Çözüm
0.1	0.10863	0.10932	0.10949	0.10955	0.10954
0.2	0.20806	0.20937	0.20971	0.20981	0.20979
0.3	0.28948	0.29132	0.29179	0.29194	0.29190
0.4	0.34504	0.34724	0.34781	0.34801	0.34792
0.5	0.36849	0.37086	0.37149	0.37172	0.37158
0.6	0.35606	0.35837	0.35900	0.35926	0.35905
0.7	0.30734	0.30935	0.30992	0.31019	0.30991
0.8	0.22594	0.22745	0.22791	0.22818	0.22782
0.9	0.11972	0.12055	0.12086	0.12111	0.12069
$\|e\|_1 \times 10^3$	7.41763	1.67024	0.63981	1.49842	
$L_2 \times 10^3$	2.17680	0.46935	0.10000	0.23487	
$L_\infty \times 10^3$	3.08310	0.72173	0.22342	0.43819	

Tablo 3.17: **HSFY:** $\nu = 1$, $\nu = 0.1$, $\nu = 0.01$; $h = 0.0125$, $k = 0.0001$ için Problem 1' in nümerik ve tam çözümleri

		$\nu = 1.0 (k = 0.00001)$		$\nu = 0.1$		$\nu = 0.01$	
x	t	Nümerik	Tam	Nümerik	Tam	Nümerik	Tam
0.25	0.4	0.01361	0.01357	0.30883	0.30889	0.34227	0.34191
	0.6	0.00190	0.00189	0.24071	0.24074	0.26901	0.26896
	0.8	0.00026	0.00026	0.19566	0.19568	0.22146	0.22148
	1.0	0.00004	0.00004	0.16257	0.16256	0.18816	0.18819
	3.0	0.00000	0.00000	0.02725	0.02720	0.07511	0.07511
0.50	0.4	0.01929	0.01924	0.56957	0.56963	0.66846	0.66071
	0.6	0.00268	0.00267	0.44719	0.44721	0.53225	0.52942
	0.8	0.00037	0.00037	0.35927	0.35924	0.44036	0.43914
	1.0	0.00005	0.00005	0.29199	0.29192	0.37501	0.37442
	3.0	0.00000	0.00000	0.04029	0.04020	0.15018	0.15018
0.75	0.4	0.01368	0.01363	0.62570	0.62544	0.93994	0.91026
	0.6	0.00190	0.00189	0.48753	0.48721	0.77889	0.76724
	0.8	0.00026	0.00026	0.37427	0.37392	0.65260	0.64740
	1.0	0.00004	0.00004	0.28782	0.28747	0.55867	0.55605
	3.0	0.00000	0.00000	0.02986	0.02977	0.22485	0.22481

Tablo 3.18: **HSFY:** $t = 0.1$, $\nu = 1$, $k = 0.00001$ için Problem 2' nin nümerik ve tam çözümleri

x	Nümerik Çözüm $h = 0.1$	$h = 0.05$	$h = 0.025$	$h = 0.0125$	Tam Çözüm
0.1	0.11197	0.11267	0.11285	0.11290	0.11289
0.2	0.21448	0.21582	0.21617	0.21628	0.21625
0.3	0.29849	0.30037	0.30086	0.30102	0.30097
0.4	0.35590	0.35816	0.35875	0.35895	0.35886
0.5	0.38024	0.38268	0.38333	0.38357	0.38342
0.6	0.36758	0.36996	0.37061	0.37088	0.37066
0.7	0.31741	0.31949	0.32009	0.32037	0.32007
0.8	0.23344	0.23499	0.23547	0.23575	0.23537
0.9	0.12372	0.12458	0.12490	0.12515	0.12472
$\|e\|_1 \times 10^3$	7.39869	1.66589	0.63892	1.50866	
$L_2 \times 10^3$	2.24255	0.51346	0.10296	0.24479	
$L_\infty \times 10^3$	3.17906	0.74433	0.23117	0.45337	

Tablo 3.19: **HSFY:** $\nu = 1$, $\nu = 0.1$, $\nu = 0.01$; $h = 0.0125$, $k = 0.0001$ için Problem 2' nin nümerik ve tam çözümleri

		$\nu = 1.0 (k = 0.00001)$		$\nu = 0.1$		$\nu = 0.01$	
x	t	Nümerik	Tam	Nümerik	Tam	Nümerik	Tam
0.25	0.4	0.01404	0.01400	0.31746	0.31752	0.36271	0.36226
	0.6	0.00196	0.00195	0.24611	0.24614	0.28210	0.28204
	0.8	0.00027	0.00027	0.19954	0.19956	0.23044	0.23045
	1.0	0.00004	0.00004	0.16560	0.16560	0.19466	0.19469
	3.0	0.00000	0.00000	0.02780	0.02776	0.07613	0.07613
0.50	0.4	0.01991	0.01985	0.58447	0.58454	0.69248	0.68368
	0.6	0.00277	0.00276	0.45796	0.45798	0.55144	0.54832
	0.8	0.00039	0.00038	0.36743	0.36740	0.45501	0.45371
	1.0	0.00005	0.00005	0.29842	0.29834	0.38629	0.38568
	3.0	0.00000	0.00000	0.04115	0.04106	0.15218	0.15218
0.75	0.4	0.01412	0.01407	0.64589	0.64562	0.95261	0.92050
	0.6	0.00196	0.00195	0.50300	0.50268	0.79583	0.78299
	0.8	0.00027	0.00027	0.38570	0.38534	0.66837	0.66272
	1.0	0.00004	0.00004	0.29621	0.29586	0.57209	0.56932
	3.0	0.00000	0.00000	0.03053	0.03044	0.22778	0.22774

Tablo 3.20: **HSFY:** $\nu = 0.5$, $h = 0.05$, $k = 0.0001$ ve $[a, b] = [0, 8]$ için Problem 3' ün nümerik ve tam çözümleri

	$t = 1.5$		$t = 3.0$		$t = 4.5$	
x	Nümerik	Tam	Nümerik	Tam	Nümerik	Tam
0.5	0.15320	0.15327	0.06426	0.06426	0.03799	0.03799
1.0	0.26565	0.26577	0.11879	0.11880	0.07187	0.07187
1.5	0.30402	0.30412	0.15507	0.15509	0.09793	0.09793
2.0	0.26138	0.26142	0.16760	0.16762	0.11338	0.11339
2.5	0.17219	0.17217	0.15627	0.15630	0.11697	0.11698
3.0	0.08813	0.08807	0.12737	0.12738	0.10948	0.10949
3.5	0.03587	0.03582	0.09132	0.09132	0.09368	0.09369
4.0	0.01189	0.01186	0.05798	0.05797	0.07360	0.07361
4.5	0.00326	0.00325	0.03286	0.03284	0.05330	0.05330
5.0	0.00075	0.00074	0.01675	0.01674	0.03572	0.03572
5.5	0.00014	0.00014	0.00773	0.00772	0.02224	0.02224
6.0	0.00002	0.00002	0.00324	0.00324	0.01291	0.01292
6.5	0.00000	0.00000	0.00124	0.00124	0.00698	0.00702
7.0	0.00000	0.00000	0.00043	0.00043	0.00345	0.00358
7.5	0.00000	0.00000	0.00013	0.00014	0.00139	0.00172

3.6 Klasik Sonlu Fark Yöntemlerinin Karşılaştırılması

Problem 1 ve Problem 2' nin $t = 0.1$, $N = 40$ ve $\nu = 1$ için ASFY, KSFY, CNSFY ve HSFY ile elde edilen nümerik değerleri ve tam çözümleri Tablo 3.21 ve Tablo 3.24 de karşılaştırıldı. Ayrıca ν parametresinin 0.1 ve 0.01 değerleri için değişik t zamanında ASFY, KSFY, CNSFY ve HSFY ile elde edilen nümerik çözümler ve analitik çözüm Tablo 3.22, Tablo 3.23, Tablo 3.25 ve Tablo 3.26 da karşılaştırıldı. Tablolardan kolayca görüldüğü gibi uygulanan dört yöntemin birbiriyle uyum içerisinde ve nümerik değerlerin analitik çözüme çok yakın olduğu açıkca görülmektedir.

Tablo 3.27, Tablo 3.28 ve Tablo 3.29 da Problem 1' in $t = 0.1$ zamanında $\nu = 1$ ve mesh uzunluğu h nin değişik değerleri için ASFY, KSFY, CNSFY ve HSFY ile elde edilen hata normları verildi. Özellikle aralık sayısı N nin büyük seçilmesi durumunda KSFY ile elde edilen sonuçların diğer üç yöntemle elde edilen sonuçlardan daha iyi olduğu görülmektedir.

$t = 1.5$, $t = 3$ ve $t = 4.5$ zamanlarında $h = 0.05$ ve $\nu = 0.5$ değerleri için Problem 3' ün ASFY, KSFY, CNSFY ve HSFY ile elde edilen hata normları Tablo 3.30 da karşılaştırıldı. Tablodan her bir yöntem için bulunan hata normlarının uyum içinde olduğu kolayca görülmektedir.

Tablo 3.21: $t = 0.1$, $\nu = 1$, $k = 0.00001$, $N = 40$ için Problem 1' in nümerik sonuçlarının karşılaştırılması

x	ASFY	KSFY	CNSFY	HSFY	Tam Çözüm
0.1	0.10948	0.10949	0.10948	0.10949	0.10954
0.2	0.20967	0.20969	0.20968	0.20971	0.20979
0.3	0.29173	0.29176	0.29175	0.29179	0.29190
0.4	0.34773	0.34776	0.34774	0.34781	0.34792
0.5	0.37137	0.37140	0.37138	0.37149	0.37158
0.6	0.35884	0.35888	0.35886	0.35900	0.35905
0.7	0.30973	0.30976	0.30974	0.30992	0.30990
0.8	0.22769	0.22771	0.22770	0.22791	0.22782
0.9	0.12062	0 .12063	0.12062	0.12086	0.12069
$\|e\|_1 \times 10^3$	0.55416	0.45920	0.50668	0.63981	
$L_2 \times 10^3$	0.14951	0.12394	0.13672	0.10000	
$L_\infty \times 10^3$	0.21147	0.17542	0.19344	0.22342	

Tablo 3.22: $\nu = 0.1$, $N = 80$, $k = 0.0001$ için Problem 1' in nümerik çözümlerinin karşılaştırılması

x	t	ASFY	KSFY	CNSFY	HSFY	Tam Çözüm
0.25	0.4	0.30880	0.30886	0.30883	0.30883	0.30889
	0.6	0.24068	0.24073	0.24070	0.24071	0.24074
	0.8	0.19564	0.19567	0.19565	0.19566	0.19568
	1.0	0.16254	0.16256	0.16255	0.16257	0.16256
	3.0	0.02720	0.02721	0.02721	0.02725	0.02720
0.50	0.4	0.56953	0.56957	0.56955	0.56957	0.56963
	0.6	0.44712	0.44716	0.44714	0.44719	0.44721
	0.8	0.35917	0.35921	0.35919	0.35927	0.35924
	1.0	0.29187	0.29190	0.29188	0.29199	0.29192
	3.0	0.04020	0.04022	0.04021	0.04029	0.04020
0.75	0.4	0.62541	0.62532	0.62536	0.62570	0.62544
	0.6	0.48714	0.48711	0.48713	0.48753	0.48721
	0.8	0.37386	0.37386	0.37386	0.37427	0.37392
	1.0	0.28743	0.28745	0.28744	0.28782	0.28747
	3.0	0.02977	0.02978	0.02978	0.02986	0.02977

Tablo 3.23: $\nu = 0.01$, $N = 80$, $k = 0.0001$ için Problem 1' in nümerik çözümlerinin karşılaştırılması

x	t	ASFY	KSFY	CNSFY	HSFY	Tam Çözüm
0.25	0.4	0.34229	0.34225	0.34227	0.34227	0.34191
	0.6	0.26902	0.26901	0.26901	0.26901	0.26896
	0.8	0.22146	0.22147	0.22146	0.22146	0.22148
	1.0	0.18816	0.18817	0.18816	0.18816	0.18819
	3.0	0.07511	0.07511	0.07511	0.07511	0.07511
0.50	0.4	0.66876	0.66815	0.66846	0.66846	0.66071
	0.6	0.53243	0.53207	0.53225	0.53225	0.52942
	0.8	0.44046	0.44025	0.44036	0.44036	0.43914
	1.0	0.37508	0.37494	0.37501	0.37501	0.37442
	3.0	0.15018	0.15018	0.15018	0.15018	0.15018
0.75	0.4	0.94061	0.93924	0.93993	0.93994	0.91026
	0.6	0.77946	0.77830	0.77888	0.77889	0.76724
	0.8	0.65299	0.65220	0.65259	0.65260	0.64740
	1.0	0.55893	0.55840	0.55866	0.55867	0.55605
	3.0	0.22486	0.22483	0.22485	0.22485	0.22481

Tablo 3.24: $t = 0.1$, $\nu = 1$, $k = 0.00001$, $N = 40$ için Problem 2' nin nümerik sonuçlarının karşılaştırılması

x	ASFY	KSFY	CNSFY	HSFY	Tam Çözüm
0.1	0.11283	0.11284	0.11283	0.11285	0.11289
0.2	0.21613	0.21615	0.21614	0.21617	0.21625
0.3	0.30080	0.30083	0.30081	0.30086	0.30097
0.4	0.35866	0.35870	0.35868	0.35875	0.35886
0.5	0.38320	0.38324	0.38322	0.38333	0.38342
0.6	0.37045	0.37048	0.37046	0.37061	0.37066
0.7	0.31988	0.31991	0.31990	0.32009	0.32007
0.8	0.23524	0.23526	0.23525	0.23547	0.23537
0.9	0.12465	0.12466	0.12465	0.12490	0.12472
$\|e\|_1 \times 10^3$	0.55371	0.45864	0.50617	0.63892	
$L_2 \times 10^3$	0.15427	0.12788	0.14107	0.10296	
$L_\infty \times 10^3$	0.21837	0.18121	0.19979	0.23117	

Tablo 3.25: $\nu = 0.1$, $N = 80$, $k = 0.0001$ için Problem 2' nin nümerik çözümlerinin karşılaştırılması

x	t	ASFY	KSFY	CNSFY	HSFY	Tam Çözüm
0.25	0.4	0.31743	0.31749	0.31746	0.31746	0.31752
	0.6	0.24608	0.24613	0.24610	0.24611	0.24614
	0.8	0.19952	0.19955	0.19953	0.19954	0.19956
	1.0	0.16557	0.16559	0.16558	0.16560	0.16560
	3.0	0.02776	0.02777	0.02776	0.02780	0.02776
0.50	0.4	0.58443	0.58447	0.58445	0.58447	0.58454
	0.6	0.45789	0.45793	0.45791	0.45796	0.45798
	0.8	0.36733	0.36737	0.36735	0.36743	0.36740
	1.0	0.29829	0.29833	0.29831	0.29842	0.29834
	3.0	0.04106	0.04108	0.04107	0.04115	0.04106
0.75	0.4	0.64559	0.64550	0.64554	0.64589	0.64562
	0.6	0.50260	0.50257	0.50259	0.50300	0.50268
	0.8	0.38527	0.38527	0.38527	0.38570	0.38534
	1.0	0.29581	0.29583	0.29582	0.29621	0.29586
	3.0	0.03044	0.03045	0.03044	0.03053	0.03044

Tablo 3.26: $\nu = 0.01$, $N = 80$, $k = 0.0001$ için Problem 2' nin nümerik çözümlerinin karşılaştırılması

x	t	ASFY	KSFY	CNSFY	HSFY	Tam Çözüm
0.25	0.4	0.36273	0.36268	0.36271	0.36271	0.36226
	0.6	0.28211	0.28210	0.28210	0.28210	0.28204
	0.8	0.23044	0.23044	0.23044	0.23044	0.23045
	1.0	0.19466	0.19467	0.19466	0.19466	0.19469
	3.0	0.07613	0.07613	0.07613	0.07613	0.07613
0.50	0.4	0.69282	0.69214	0.69248	0.69248	0.68368
	0.6	0.55164	0.55123	0.55143	0.55144	0.54832
	0.8	0.45513	0.45489	0.45501	0.45501	0.45371
	1.0	0.38636	0.38621	0.38629	0.38629	0.38568
	3.0	0.15219	0.15218	0.15218	0.15218	0.15218
0.75	0.4	0.95327	0.95193	0.95260	0.95261	0.92050
	0.6	0.79643	0.79521	0.79582	0.79583	0.78299
	0.8	0.66879	0.66793	0.66836	0.66837	0.66272
	1.0	0.57238	0.57180	0.57209	0.57209	0.56932
	3.0	0.22779	0.22776	0.22778	0.22778	0.22774

Tablo 3.27: $t = 0.1$, $\nu = 1$, $k = 0.00001$ için Problem 1' in $\|e\|_1$ normunun karşılaştırılması

	$\|e\|_1 \times 10^3$			
Yöntem	$N = 10$	$N = 20$	$N = 40$	$N = 80$
ASFY	7.57090	2.02419	0.55416	0.17604
KSFY	7.48527	1.93210	0.45920	0.07975
CNSFY	7.52808	1.97815	0.50668	0.12789
HSFY	7.41763	1.67024	0.63981	1.49842

Tablo 3.28: $t = 0.1$, $\nu = 1$, $k = 0.00001$ için Problem 1' in L_2 normunun karşılaştırılması

	$L_2 \times 10^3$			
Yöntem	$N = 10$	$N = 20$	$N = 40$	$N = 80$
ASFY	2.21295	0.56052	0.14951	0.04689
KSFY	2.18796	0.53506	0.12394	0.02129
CNSFY	2.20045	0.54779	0.13672	0.03409
HSFY	2.17680	0.46935	0.10000	0.23487

Tablo 3.29: $t = 0.1$, $\nu = 1$, $k = 0.00001$ için Problem 1' in L_∞ normunun karşılaştırılması

	$L_\infty \times 10^3$			
Yöntem	$N = 10$	$N = 20$	$N = 40$	$N = 80$
ASFY	3.12466	0.79150	0.21147	0.06633
KSFY	3.08929	0.75546	0.17542	0.03020
CNSFY	3.10697	0.77348	0.19344	0.04824
HSFY	3.08310	0.72173	0.22342	0.43819

Tablo 3.30: $\nu = 0.5$, $h = 0.05$, $k = 0.0001$ ve $[a, b] = [0, 8]$ için Problem 3' ün hata normlarının karşılaştırılması

	$t = 1.5$			$t = 3.0$			$t = 4.5$		
Yöntem	$\|e\|_1 \times 10$	$L_2 \times 10^3$	$L_\infty \times 10^3$	$\|e\|_1 \times 10$	$L_2 \times 10^3$	$L_\infty \times 10^3$	$\|e\|_1 \times 10$	$L_2 \times 10^3$	$L_\infty \times 10^3$
ASFY	0.14017	0.05157	0.12480	0.21445	0.01398	0.03573	0.34620	0.14083	0.71275
KSFY	0.14839	0.04768	0.11255	0.21393	0.01267	0.03572	0.34597	0.14076	0.71273
CNSFY	0.14428	0.04959	0.11856	0.21419	0.01323	0.03573	0.34607	0.14079	0.71274
HSFY	0.13729	0.04972	0.11891	0.21366	0.01328	0.03564	0.34550	0.14056	0.71160

4. UU_x NON-LİNEER TERİMİ İÇİN BAZI SONLU FARK YAKLAŞIMLARI VE BURGERS DENKLEMİNİN SONLU FARK ÇÖZÜMLERİ

Bu bölümde

$$U_t + UU_x = \nu U_{xx} \tag{4.1}$$

Burgers denklemindeki UU_x non-lineer teriminin yerine aşağıdaki sonlu fark yaklaşımları kullanılarak lineer denklem sistemleri elde edilmiştir.

4.1 Hopscotch Yöntemi (HY)

1965 yılında Gordon[60] kendi çalışmasında kullandığı bu yöntem için simetrik olmayan fark denklemi adını kullanmıştır. Ancak 1970 yılında A.R. Gourlay[59] bu tekniği düzenleyerek "Hopscotch" adını vermiştir. xy düzleminde L ikinci mertebeden lineer eliptik diferansiyel operatör ve R bir kapalı bölge olmak üzere Gordon

$$\frac{\partial U}{\partial t} = LU + g \tag{4.1.1}$$

denklemlerinde açık ve kapalı sonlu fark yaklaşımlarını sırasıyla kullanarak

$$U_{ij}^{m+1} = U_{ij}^{m} + k(L_h U_{ij}^{m} + g_{ij}^{m}) \tag{4.1.2}$$

$$U_{ij}^{m+1} = U_{ij}^{m} + k(L_h U_{ij}^{m+1} + g_{ij}^{m+1}) \qquad (4.1.3)$$

algoritmasına ulaşmıştır. Burada L_h, L lineer operatörün bir sonlu fark gösterimidir. $(i, j, m+1)$ noktasında çözüme ulaşabilmek için Gordon önce $(i+j)$ çift olmak üzere (4.1.2) deki bütün denklemleri daha sonra $(i+j)$ tek olmak üzere (4.1.3) deki denklemleri kullanmıştır.

Gourlay ise (4.1.2) ve (4.1.3) deki denklemler yerine

$$\theta_{ij} = \begin{cases} 1, & m+i+j \quad tek \quad ise \\ 0, & m+i+j \quad cift \quad ise \end{cases}$$

fonksiyonunu kullanarak (4.1.1) denklemi için

$$U_{ij}^{m+1} - k\theta_{ij}^{m+1}(L_h U_{ij}^{m+1} + g_{ij}^{m+1}) = U_{ij}^{m} + k\theta_{ij}^{m}(L_h U_{ij}^{m} + g_{ij}^{m}) \qquad (4.1.4)$$

sonlu fark yaklaşımını elde etmiştir[59].

Hopscotch Yöntemini

$$U_t + UU_x = \nu U_{xx}$$

Burgers denklemine uygulayabilmek için $f(U) = \frac{1}{2}U^2$ [61] ve $f_j^n = f(U_j^n)$ olmak üzere $f' = UU_x$ dönüşümü yapılır ve f' yerine açık ve kapalı merkezi fark yaklaşımları alınırsa aşağıdaki denklemler bulunur.

$$\frac{U_i^{j+1} - U_i^j}{k} + \frac{f_{i+1}^j - f_{i-1}^j}{2h} = \nu\left(\frac{U_{i-1}^j - 2U_i^j + U_{i+1}^j}{h^2}\right)$$

$$U_i^{j+1} = U_i^j - \frac{k}{4h}[(U_{i+1}^j)^2 - (U_{i-1}^j)^2] + \frac{\nu k}{h^2}(U_{i-1}^j - 2U_i^j + U_{i+1}^j) \ , \qquad (i+j, \ cift \ ise)$$

$$\frac{U_i^{j+1}-U_i^j}{k}+\frac{f_{i+1}^{j+1}-f_{i-1}^{j+1}}{2h}=\nu(\frac{U_{i+1}^{j+1}-2U_i^{j+1}+U_{i-1}^{j+1}}{h^2})$$

$$U_i^{j+1}=\frac{h^2}{h^2+2\nu k}[U_i^j-\frac{k}{4h}[(U_{i+1}^{j+1})^2-(U_{i-1}^{j+1})^2]+\frac{\nu k}{h^2}(U_{i+1}^{j+1}+U_{i-1}^{j+1})]\ , \quad (i+j,\ tek\ ise)$$

Nümerik Sonuçlar

Problem 1, Problem 2 ve Problem 3' ün Hopscotch Yöntemi (HY) ile elde edilen nümerik çözümleri Tablo 4.1-4.8 de verildi.

Tablo 4.1 de Problem 1' in $t = 0.1$, $\nu = 1$, $k = 0.00001$ alınarak mesh uzunluğu h nin değişik değerleri için nümerik ve tam çözümü karşılaştırıldı. Tablodan nümerik çözümlerin tam çözüme yakın olduğu açıkca görülmektedir. Mesh uzunluğu h nin gittikçe küçük seçilmesi durumunda elde edilen nümerik çözümlerin analitik çözüme oldukça yaklaştığı görülmektedir.

Tablo 4.2 de Problem 1' in $h = 0.0125$, $k = 0.0001$ alınarak kinematik viskosite ν nün 1, 0.1, 0.001 değerleri için çeşitli t zamanlarında nümerik çözümler analitik çözümle karşılaştırıldı. Elde edilen sonuçların analitik çözümle uyum içerisinde olduğu kolayca görülmektedir.

Tablo 4.3 te Problem 1' in $h = 0.0125$, $k = 0.00001$ alınarak ν nün 0.005, 0.001, 0.0005, 0.0001 değerleri için HY ile elde edilen nümerik sonuçlar ile önceki araştırmacıların verdikleri sonuçlar karşılaştırıldı. Tablodan sonuçların uyum içerisinde olduğu kolayca görülmektedir.

Tablo 4.4 ve Tablo 4.5 te Problem 2' nin mesh uzunluğu h ve kinematik viskosite ν nün değişik değerleri için farklı t zamanlarında elde edilen nümerik çözümler ile tam çözüm karşılaştırıldı.

Tablo 4.6 ve Tablo 4.7 de Problem 2' nin ν =0.005, 0.001, 0.0005, 0.0001 değerleri için çeşitli zamanlarda elde edilen nümerik çözümler ile önceki araştırmacıların elde ettikleri sonuçlar karşılaştırıldı. Tablolardan HY ile elde edilen sonuçların yeterince iyi olduğu görülmektedir.

Tablo 4.8 de Problem 3' ün ν =0.5, $h = 0.05$, $k = 0.0001$ değerleri için HY ile edilen nümerik sonuçlar ile tam çözüm karşılaştırıldı. Tablodan nümerik sonuçların analitik çözüme yakın olduğu kolayca görülmektedir.

Tablo 4.1: **HY:** $t = 0.1$, $\nu = 1$, $k = 0.00001$ için Problem 1' in nümerik ve tam çözümleri

x	Nümerik Çözüm $h = 0.1$	$h = 0.05$	$h = 0.025$	$h = 0.0125$	Tam Çözüm
0.1	0.11053	0.10979	0.10960	0.10955	0.10954
0.2	0.21168	0.21026	0.20991	0.20982	0.20979
0.3	0.29447	0.29254	0.29206	0.29193	0.29190
0.4	0.35091	0.34867	0.34811	0.34797	0.34792
0.5	0.37466	0.37235	0.37177	0.37162	0.37158
0.6	0.36191	0.35976	0.35922	0.35909	0.35905
0.7	0.31228	0.31050	0.31005	0.30994	0.30991
0.8	0.22950	0.22824	0.22792	0.22784	0.22782
0.9	0.12156	0.12091	0.12074	0.12070	0.12069
$\|e\|_1 \times 10^3$	7.40620	1.95234	0.49965	0.12103	
$L_2 \times 10^3$	2.16915	0.54191	0.13515	0.03232	
$L_\infty \times 10^3$	3.08193	0.76985	0.19227	0.04599	

Tablo 4.2: **HY:** $\nu = 1$, $\nu = 0.1$, $\nu = 0.01$; $h = 0.0125$, $k = 0.0001$ için Problem 1' in nümerik ve tam çözümleri

		$\nu = 1.0$		$\nu = 0.1$		$\nu = 0.01$	
x	t	Nümerik	Tam	Nümerik	Tam	Nümerik	Tam
0.25	0.4	0.01355	0.01357	0.30895	0.30889	0.34198	0.34191
	0.6	0.00188	0.00189	0.24079	0.24074	0.26901	0.26896
	0.8	0.00026	0.00026	0.19572	0.19568	0.22151	0.22148
	1.0	0.00004	0.00004	0.16260	0.16256	0.18822	0.18819
	3.0	0.00000	0.00000	0.02721	0.02720	0.07512	0.07511
0.50	0.4	0.01920	0.01924	0.56975	0.56963	0.66086	0.66071
	0.6	0.00266	0.00267	0.44730	0.44721	0.52952	0.52942
	0.8	0.00037	0.00037	0.35932	0.35924	0.43921	0.43914
	1.0	0.00005	0.00005	0.29199	0.29192	0.37447	0.37442
	3.0	0.00000	0.00000	0.04022	0.04020	0.15019	0.15018
0.75	0.4	0.01360	0.01363	0.62546	0.62544	0.91057	0.91026
	0.6	0.00188	0.00189	0.48728	0.48721	0.76744	0.76724
	0.8	0.00026	0.00026	0.37399	0.37392	0.64752	0.64740
	1.0	0.00004	0.00004	0.28754	0.28747	0.55614	0.55605
	3.0	0.00000	0.00000	0.02979	0.02977	0.22484	0.22481

Tablo 4.3: **HY:** $h = 0.0125$, $k = 0.00001$; $\nu = 0.005$, $\nu = 0.001$, $\nu = 0.0005$ ve $\nu = 0.0001$ için Problem 1' in nümerik sonuçların karşılaştırılması

		[40]				HY			
x	t	$\nu = 0.005$	$\nu = 0.001$	$\nu = 0.0005$	$\nu = 0.0001$	$\nu = 0.005$	$\nu = 0.001$	$\nu = 0.0005$	$\nu = 0.0001$
0.25	0.01	0.69111	0.69137	0.69141	0.69143	0.69127	0.69153	0.69156	0.69159
	0.05	0.63220	0.63319	0.63331	0.63341	0.63219	0.63319	0.63331	0.63341
	0.10	0.56820	0.56962	0.56979	0.56994	0.56819	0.56962	0.56979	0.56994
	0.15	0.51409	0.51565	0.51584	0.51600	0.51419	0.51575	0.51594	0.51610
	0.25	0.42986	0.43133	0.43152	0.43166	0.42994	0.43140	0.43159	0.43173
0.50	0.01	0.99900	0.99940	0.99945	0.99949	0.99902	0.99941	0.99946	0.99950
	0.05	0.98569	0.98755	0.98778	0.98797	0.98569	0.98755	0.98778	0.98797
	0.10	0.95145	0.95461	0.95500	0.95532	0.95145	0.95461	0.95500	0.95532
	0.15	0.90488	0.90865	0.90912	0.90950	0.90498	0.90875	0.90922	0.90960
	0.25	0.80158	0.80531	0.80578	0.80615	0.80168	0.80542	0.80588	0.80625
0.75	0.01	0.72275	0.72305	0.72309	0.72312	0.72259	0.72289	0.72293	0.72296
	0.05	0.78663	0.78853	0.78877	0.78896	0.78663	0.78853	0.78877	0.78896
	0.10	0.86589	0.87068	0.87128	0.87176	0.86590	0.87068	0.87128	0.87176
	0.15	0.93250	0.94035	0.94134	0.94212	0.93239	0.94024	0.94122	0.94201
	0.25	0.98773	0.99776	0.99900	0.99999	0.98772	0.99776	0.99900	0.99999

Tablo 4.4: **HY:** $t = 0.1$, $\nu = 1$, $k = 0.00001$ için Problem 2' nin nümerik ve tam çözümleri

x	Nümerik Çözüm $h = 0.1$	$h = 0.05$	$h = 0.025$	$h = 0.0125$	Tam Çözüm
0.1	0.11393	0.11315	0.11296	0.11291	0.11289
0.2	0.21820	0.21674	0.21637	0.21628	0.21625
0.3	0.30362	0.30163	0.30113	0.30101	0.30097
0.4	0.36194	0.35963	0.35905	0.35891	0.35886
0.5	0.38659	0.38422	0.38362	0.38347	0.38342
0.6	0.37359	0.37140	0.37084	0.37070	0.37066
0.7	0.32250	0.32068	0.32022	0.32010	0.32007
0.8	0.23710	0.23581	0.23548	0.23540	0.23537
0.9	0.12561	0.12494	0.12477	0.12473	0.12472
$\|e\|_1 \times 10^3$	7.38413	1.95363	0.50044	0.12125	
$L_2 \times 10^3$	2.22969	0.55913	0.13957	0.03338	
$L_\infty \times 10^3$	3.16428	0.79362	0.19850	0.04750	

Tablo 4.5: **HY:** $\nu = 1$, $\nu = 0.1$, $\nu = 0.01$; $h = 0.0125$, $k = 0.0001$ için Problem 2' nin nümerik ve tam çözümleri

		$\nu = 1.0$		$\nu = 0.1$		$\nu = 0.01$	
x	t	Nümerik	Tam	Nümerik	Tam	Nümerik	Tam
0.25	0.4	0.01398	0.01400	0.31759	0.31752	0.36238	0.36226
	0.6	0.00194	0.00195	0.24619	0.24614	0.28213	0.28204
	0.8	0.00027	0.00027	0.19960	0.19956	0.23052	0.23045
	1.0	0.00004	0.00004	0.16563	0.16560	0.19474	0.19469
	3.0	0.00000	0.00000	0.02777	0.02776	0.07614	0.07613
0.50	0.4	0.01981	0.01985	0.58466	0.58454	0.68383	0.68368
	0.6	0.00275	0.00276	0.45808	0.45798	0.54844	0.54832
	0.8	0.00038	0.00038	0.36749	0.36740	0.45381	0.45371
	1.0	0.00005	0.00005	0.29842	0.29834	0.38575	0.38568
	3.0	0.00000	0.00000	0.04108	0.04106	0.15220	0.15218
0.75	0.4	0.01404	0.01407	0.64564	0.64562	0.92073	0.92050
	0.6	0.00194	0.00195	0.50274	0.50268	0.78317	0.78299
	0.8	0.00027	0.00027	0.38541	0.38534	0.66285	0.66272
	1.0	0.00004	0.00004	0.29593	0.29586	0.56942	0.56932
	3.0	0.00000	0.00000	0.03045	0.03044	0.22778	0.22774

Tablo 4.6: **HY:** $h = 0.0125$, $k = 0.00001$; $\nu = 0.005$ ve $\nu = 0.001$ için Problem 2' nin nümerik sonuçların karşılaştırılması

		[30]		[40]		HY	
x	t	$\nu = 0.005$	$\nu = 0.001$	$\nu = 0.005$	$\nu = 0.001$	$\nu = 0.005$	$\nu = 0.001$
0.25	0.05	0.67590	0.67711	0.67609	0.67738	0.67609	0.67738
	0.15	0.55176	0.55315	0.55250	0.55496	0.55261	0.55506
	0.25	0.43326	0.44450	0.46081	0.46349	0.46089	0.46356
0.50	0.05	0.98812	0.98957	0.98829	0.98983	0.98829	0.98983
	0.15	0.91808	0.92073	0.91887	0.92241	0.91896	0.92250
	0.25	0.81389	0.80709	0.82346	0.82748	0.82355	0.82757
0.75	0.05	0.82318	0.82497	0.82332	0.82522	0.82332	0.82522
	0.15	0.94539	0.95063	0.94646	0.95282	0.94638	0.95273
	0.25	0.97717	0.97296	0.99002	0.99815	0.99002	0.99815

Tablo 4.7: **HY:** $h = 0.0125$, $k = 0.00001$; $\nu = 0.0005$ ve $\nu = 0.0001$ için Problem 2' nin nümerik sonuçların karşılaştırılması

		[40]		HY	
x	t	$\nu = 0.0005$	$\nu = 0.0001$	$\nu = 0.0005$	$\nu = 0.0001$
0.25	0.05	0.67754	0.67767	0.67754	0.67767
	0.15	0.55526	0.55551	0.55537	0.55561
	0.25	0.46382	0.46409	0.46390	0.46417
0.50	0.05	0.99002	0.99017	0.99002	0.99017
	0.15	0.92285	0.92320	0.92294	0.92329
	0.25	0.82798	0.82838	0.82807	0.82847
0.75	0.05	0.82456	0.82565	0.82546	0.82565
	0.15	0.95361	0.95424	0.95352	0.95415
	0.25	0.99915	0.99996	0.99915	0.99996

Tablo 4.8: **HY:** $\nu = 0.5$, $h = 0.05$, $k = 0.0001$ ve $[a, b] = [0, 8]$ için Problem 3' ün nümerik ve tam çözümleri

	$t = 1.5$		$t = 3.0$		$t = 4.5$	
x	Nümerik	Tam	Nümerik	Tam	Nümerik	Tam
0.5	0.15332	0.15327	0.06428	0.06426	0.03800	0.03799
1.0	0.26583	0.26577	0.11884	0.11880	0.07189	0.07187
1.5	0.30416	0.30412	0.15512	0.15509	0.09795	0.09793
2.0	0.26140	0.26142	0.16764	0.16762	0.11341	0.11339
2.5	0.17213	0.17217	0.15630	0.15630	0.11700	0.11698
3.0	0.08805	0.08807	0.12737	0.12738	0.10949	0.10949
3.5	0.03582	0.03582	0.09131	0.09132	0.09368	0.09369
4.0	0.01186	0.01186	0.05796	0.05797	0.07360	0.07361
4.5	0.00325	0.00325	0.03284	0.03284	0.05329	0.05330
5.0	0.00074	0.00074	0.01674	0.01674	0.03571	0.03572
5.5	0.00014	0.00014	0.00772	0.00772	0.02223	0.02224
6.0	0.00002	0.00002	0.00324	0.00324	0.01290	0.01292
6.5	0.00000	0.00000	0.00124	0.00124	0.00697	0.00702
7.0	0.00000	0.00000	0.00043	0.00043	0.00345	0.00358
7.5	0.00000	0.00000	0.00013	0.00014	0.00139	0.00172

4.2 Sonlu Fark Yaklaşımı 1 (SFY1)

(4.1) Burgers denkleminde UU_x non-lineer teriminin yerine

$$UU_x \cong U_i^j\left(\frac{U_{i+1}^j - U_{i-1}^j}{2h}\right)$$

sonlu fark yaklaşımı U_{xx} türevinin yerine

$$U_{xx} \cong \frac{U_{i-1}^j - 2U_i^j + U_{i+1}^j}{h^2}$$

açık sonlu fark yaklaşımı yazılır ve gerekli düzenlemeler yapılırsa

$$U_i^{j+1} = U_i^j + \frac{\nu k}{h^2}(U_{i-1}^j - 2U_i^j + U_{i+1}^j) - \frac{k}{2h}U_i^j(U_{i+1}^j - U_{i-1}^j)\ ,\quad i = 1(1)N-1,\quad j = 0(1)J$$

açık sonlu fark yaklaşımı bulunur.

Nümerik Sonuçlar

Problem 1, Problem 2 ve Problem 3' ün SFY1 ile elde edilen nümerik çözümleri Tablo 4.9-4.16 da verildi.

$\nu = 1$, $k = 0.00001$ değerleri ve değişik mesh uzunluğu h için Problem 1' in SFY1 ile elde edilen $t = 0.1$ deki nümerik çözümleri ile problemin tam çözümünün karşılaştırılması Tablo 4.9 da verildi. Tablodan da görüleceği gibi h nin yeterince küçük seçilmesiyle elde edilen nümerik çözümler analitik çözümle uyum içindedir.

$h = 0.0125$, $k = 0.0001$ değerleri ve kinematik viskosite ν nün 1, 0.1, 0.001 değerleri için Problem 1' in çeşitli t zamanlarında SFY1 ile elde edilen nümerik çözümler ile analitik çözümün karşılaştırılması Tablo 4.10 da verildi. Tablodan, elde edilen sonuçların analitik çözüme yakın olduğu görülmektedir.

$h = 0.0125$, $k = 0.00001$ alınarak ν nün 0.005, 0.001, 0.0005, 0.0001 değerleri için Problem 1' in SFY1 ile elde edilen nümerik sonuçlar ile önceki araştırmacıların verdikleri sonuçların karşılaştırılması Tablo 4.11 de verildi. Tablodan sonuçların uyum içerisinde olduğu açıkca görülmektedir.

Mesh uzunluğu h ve kinematik viskosite ν nün değişik değerleri için Problem 2' nin farklı t zamanlarında SFY1 ile elde edilen nümerik çözümleri ile tam çözümü Tablo 4.12 ve Tablo 4.13 te karşılaştırıldı.

ν =0.005, 0.001, 0.0005, 0.0001 değerleri için Problem 2' nin çeşitli zamanlarda SFY1 ile elde edilen nümerik çözümler ile önceki araştırmacıların elde ettikleri sonuçlar Tablo 4.14 ve Tablo 4.15 de karşılaştırıldı. Tablolardan SFY1 ile elde edilen sonuçların diğer araştırmacılarınkilerine yakın olduğu görülmektedir.

Tablo 4.16 da Problem 3' ün ν =0.5, $h = 0.05$, $k = 0.0001$ değerleri için SFY1 ile edilen nümerik sonuçlar ile tam çözüm karşılaştırıldı. Tablodan nümerik sonuçların analitik çözüme yakın olduğu kolayca görülmektedir.

Tablo 4.9: **SFY1:** $t = 0.1$, $\nu = 1$, $k = 0.00001$ için Problem 1' in nümerik ve tam çözümleri

	Nümerik Çözüm				Tam
x	$h = 0.1$	$h = 0.05$	$h = 0.025$	$h = 0.0125$	Çözüm
0.1	0.11029	0.10972	0.10958	0.10954	0.10954
0.2	0.21127	0.21015	0.20987	0.20981	0.20979
0.3	0.29404	0.29242	0.29202	0.29192	0.29190
0.4	0.35063	0.34859	0.34808	0.34795	0.34792
0.5	0.37464	0.37233	0.37175	0.37161	0.37158
0.6	0.36219	0.35982	0.35923	0.35908	0.35905
0.7	0.31277	0.31061	0.31007	0.30993	0.30991
0.8	0.23002	0.22836	0.22794	0.22784	0.22782
0.9	0.12189	0.12098	0.12076	0.12070	0.12069
$\|e\|_1 \times 10^3$	7.48857	1.94093	0.46225	0.08079	
$L_2 \times 10^3$	2.20194	0.54052	0.12553	0.02184	
$L_\infty \times 10^3$	3.14782	0.77302	0.18053	0.03194	

Tablo 4.10: **SFY1:** $\nu = 1$, $\nu = 0.1$, $\nu = 0.01$; $h = 0.0125$, $k = 0.0001$ için Problem 1' in nümerik ve tam çözümleri

		$\nu = 1.0 (k = 0.00001)$		$\nu = 0.1$		$\nu = 0.01$	
x	t	Nümerik	Tam	Nümerik	Tam	Nümerik	Tam
0.25	0.4	0.01358	0.01357	0.30889	0.30889	0.34190	0.34191
	0.6	0.00189	0.00189	0.24074	0.24074	0.26895	0.26896
	0.8	0.00026	0.00026	0.19568	0.19568	0.22147	0.22148
	1.0	0.00004	0.00004	0.16257	0.16256	0.18818	0.18819
	3.0	0.00000	0.00000	0.02721	0.02720	0.07511	0.07511
0.50	0.4	0.01924	0.01924	0.56967	0.56963	0.66073	0.66071
	0.6	0.00267	0.00267	0.44725	0.44721	0.52941	0.52942
	0.8	0.00037	0.00037	0.35929	0.35924	0.43912	0.43914
	1.0	0.00005	0.00005	0.29197	0.29192	0.37440	0.37442
	3.0	0.00000	0.00000	0.04022	0.04020	0.15017	0.15018
0.75	0.4	0.01364	0.01363	0.62567	0.62544	0.91050	0.91026
	0.6	0.00189	0.00189	0.48745	0.48721	0.76731	0.76724
	0.8	0.00026	0.00026	0.37412	0.37392	0.64740	0.64740
	1.0	0.00004	0.00004	0.28763	0.28747	0.55604	0.55605
	3.0	0.00000	0.00000	0.02979	0.02977	0.22483	0.22481

Tablo 4.11: **SFY1:** $h = 0.0125$, $k = 0.00001$; $\nu = 0.005$, $\nu = 0.001$, $\nu = 0.0005$ ve $\nu = 0.0001$ için Problem 1' in nümerik sonuçların karşılaştırılması

		[40]				$SFY1$			
x	t	$\nu = 0.005$	$\nu = 0.001$	$\nu = 0.0005$	$\nu = 0.0001$	$\nu = 0.005$	$\nu = 0.001$	$\nu = 0.0005$	$\nu = 0.0001$
0.25	0.01	0.69111	0.69137	0.69141	0.69143	0.69126	0.69152	0.69155	0.69158
	0.05	0.63220	0.63319	0.63331	0.63341	0.63215	0.63314	0.63327	0.63337
	0.10	0.56820	0.56962	0.56979	0.56994	0.56813	0.56955	0.56973	0.56987
	0.15	0.51409	0.51565	0.51584	0.51600	0.51412	0.51568	0.51587	0.51602
	0.25	0.42986	0.43133	0.43152	0.43166	0.42987	0.43134	0.43152	0.43167
0.50	0.01	0.99900	0.99940	0.99945	0.99949	0.99902	0.99941	0.99946	0.99950
	0.05	0.98569	0.98755	0.98778	0.98797	0.98568	0.98753	0.98777	0.98795
	0.10	0.95145	0.95461	0.95500	0.95532	0.95140	0.95456	0.95495	0.95527
	0.15	0.90488	0.90865	0.90912	0.90950	0.90489	0.90867	0.90914	0.90951
	0.25	0.80158	0.80531	0.80578	0.80615	0.80156	0.80530	0.80577	0.80614
0.75	0.01	0.72275	0.72305	0.72309	0.72312	0.72261	0.72290	0.72294	0.72297
	0.05	0.78663	0.78853	0.78877	0.78896	0.78671	0.78861	0.78885	0.78904
	0.10	0.86589	0.87068	0.87128	0.87176	0.86605	0.87084	0.87144	0.87192
	0.15	0.93250	0.94035	0.94134	0.94212	0.93258	0.94042	0.94140	0.94219
	0.25	0.98773	0.99776	0.99900	0.99999	0.98775	0.99778	0.99902	1.00000

Tablo 4.12: **SFY1:** $t = 0.1$, $\nu = 1$, $k = 0.00001$ için Problem 2' nin nümerik ve tam çözümleri

x	Nümerik Çözüm $h = 0.1$	$h = 0.05$	$h = 0.025$	$h = 0.0125$	Tam Çözüm
0.1	0.11366	0.11308	0.11294	0.11290	0.11289
0.2	0.21776	0.21662	0.21634	0.21627	0.21625
0.3	0.30316	0.30151	0.30109	0.30099	0.30097
0.4	0.36163	0.35954	0.35902	0.35889	0.35886
0.5	0.38657	0.38420	0.38360	0.38345	0.38342
0.6	0.37390	0.37146	0.37084	0.37069	0.37066
0.7	0.32303	0.32080	0.32024	0.32010	0.32007
0.8	0.23765	0.23593	0.23550	0.23540	0.23537
0.9	0.12596	0.12502	0.12479	0.12473	0.12472
$\|e\|_1 \times 10^3$	7.46601	1.94219	0.46316	0.08122	
$L_2 \times 10^3$	2.26400	0.55779	0.12969	0.02261	
$L_\infty \times 10^3$	3.23900	0.79835	0.18652	0.03310	

Tablo 4.13: **SFY1:** $\nu = 1$, $\nu = 0.1$, $\nu = 0.01$; $h = 0.0125$, $k = 0.0001$ için Problem 2' nin nümerik ve tam çözümleri

		$\nu = 1.0 (k = 0.00001)$		$\nu = 0.1$		$\nu = 0.01$	
x	t	Nümerik	Tam	Nümerik	Tam	Nümerik	Tam
0.25	0.4	0.01401	0.01400	0.31751	0.31752	0.36224	0.36226
	0.6	0.00195	0.00195	0.24613	0.24614	0.28202	0.28204
	0.8	0.00027	0.00027	0.19956	0.19956	0.23044	0.23045
	1.0	0.00004	0.00004	0.16561	0.16560	0.19468	0.19469
	3.0	0.00000	0.00000	0.02777	0.02776	0.07613	0.07613
0.50	0.4	0.01985	0.01985	0.58457	0.58454	0.68368	0.68368
	0.6	0.00276	0.00276	0.45802	0.45798	0.54829	0.54832
	0.8	0.00038	0.00038	0.36745	0.36740	0.45369	0.45371
	1.0	0.00005	0.00005	0.29840	0.29834	0.38565	0.38568
	3.0	0.00000	0.00000	0.04108	0.04106	0.15217	0.15218
0.75	0.4	0.01407	0.01407	0.64586	0.64562	0.92068	0.92050
	0.6	0.00195	0.00195	0.50292	0.50268	0.78304	0.78299
	0.8	0.00027	0.00027	0.38554	0.38534	0.66272	0.66272
	1.0	0.00004	0.00004	0.29602	0.29586	0.56930	0.56932
	3.0	0.00000	0.00000	0.03046	0.03044	0.22776	0.22774

Tablo 4.14: **SFY1:** $h = 0.0125$, $k = 0.00001$; $\nu = 0.005$ ve $\nu = 0.001$ için Problem 2' nin nümerik sonuçların karşılaştırılması

		[30]		[40]		$SFY1$	
x	t	$\nu = 0.005$	$\nu = 0.001$	$\nu = 0.005$	$\nu = 0.001$	$\nu = 0.005$	$\nu = 0.001$
0.25	0.05	0.67590	0.67711	0.67609	0.67738	0.67603	0.67732
	0.15	0.55176	0.55315	0.55250	0.55496	0.55250	0.55495
	0.25	0.43326	0.44450	0.46081	0.46349	0.46077	0.46344
0.50	0.05	0.98812	0.98957	0.98829	0.98983	0.98828	0.98982
	0.15	0.91808	0.92073	0.91887	0.92241	0.91889	0.92243
	0.25	0.81389	0.80709	0.82346	0.82748	0.82344	0.82746
0.75	0.05	0.82318	0.82497	0.82332	0.82522	0.82338	0.82529
	0.15	0.94539	0.95063	0.94646	0.95282	0.94650	0.95285
	0.25	0.97717	0.97296	0.99002	0.99815	0.99004	0.99816

Tablo 4.15: **SFY1:** $h = 0.0125$, $k = 0.00001$; $\nu = 0.0005$ ve $\nu = 0.0001$ için Problem 2' nin nümerik sonuçların karşılaştırılması

		[40]		$SFY1$	
x	t	$\nu = 0.0005$	$\nu = 0.0001$	$\nu = 0.0005$	$\nu = 0.0001$
0.25	0.05	0.67754	0.67767	0.67748	0.67761
	0.15	0.55526	0.55551	0.55526	0.55550
	0.25	0.46382	0.46409	0.46377	0.46404
0.50	0.05	0.99002	0.99017	0.99001	0.99016
	0.15	0.92285	0.92320	0.92287	0.92322
	0.25	0.82798	0.82838	0.82796	0.82836
0.75	0.05	0.82456	0.82565	0.82553	0.82572
	0.15	0.95361	0.95424	0.95364	0.95427
	0.25	0.99915	0.99996	0.99917	0.99997

Tablo 4.16: **SFY1:** $\nu = 0.5$, $h = 0.05$, $k = 0.0001$ ve $[a, b] = [0, 8]$ için Problem 3' ün nümerik ve tam çözümleri

	$t = 1.5$		$t = 3.0$		$t = 4.5$	
x	Nümerik	Tam	Nümerik	Tam	Nümerik	Tam
0.5	0.15329	0.15327	0.06427	0.06426	0.03799	0.03799
1.0	0.26580	0.26577	0.11882	0.11880	0.07188	0.07187
1.5	0.30415	0.30412	0.15510	0.15509	0.09794	0.09793
2.0	0.26141	0.26142	0.16763	0.16762	0.11339	0.11339
2.5	0.17213	0.17217	0.15629	0.15630	0.11698	0.11698
3.0	0.08804	0.08807	0.12736	0.12738	0.10948	0.10949
3.5	0.03581	0.03582	0.09130	0.09132	0.09367	0.09369
4.0	0.01186	0.01186	0.05796	0.05797	0.07359	0.07361
4.5	0.00325	0.00325	0.03283	0.03284	0.05329	0.05330
5.0	0.00074	0.00074	0.01673	0.01674	0.03570	0.03572
5.5	0.00014	0.00014	0.00772	0.00772	0.02223	0.02224
6.0	0.00002	0.00002	0.00324	0.00324	0.01290	0.01292
6.5	0.00000	0.00000	0.00124	0.00124	0.00697	0.00702
7.0	0.00000	0.00000	0.00043	0.00043	0.00345	0.00358
7.5	0.00000	0.00000	0.00013	0.00014	0.00139	0.00172

4.3 Sonlu Fark Yaklaşımı 2 (SFY2)

(4.1) Burgers denkleminde UU_x non-lineer teriminin yerine

$$UU_x \cong U_i^j\left(\frac{U_{i+1}^{j+1} - U_{i-1}^{j+1}}{2h}\right)$$

sonlu fark yaklaşımı U_{xx} türevinin yerine

$$U_{xx} \cong \frac{U_{i-1}^{j+1} - 2U_i^{j+1} + U_{i+1}^{j+1}}{h^2}$$

kapalı sonlu fark yaklaşımı yazılır ve gerekli düzenlemeler yapılırsa

$$-\left(\frac{hU_i^j + 2\nu}{2h^2}\right)U_{i-1}^{j+1} + \left(\frac{h^2 + 2\nu k}{kh^2}\right)U_i^{j+1} + \left(\frac{hU_i^j - 2\nu}{2h^2}\right)U_{i+1}^{j+1} = \frac{U_i^j}{k} \quad ,$$
$$i = 1(1)N-1, \quad j = 0(1)J$$

kapalı sonlu fark yaklaşımı bulunur.

Nümerik Sonuçlar

Problem 1, Problem 2 ve Problem 3' ün SFY2 ile elde edilen nümerik çözümleri Tablo 4.17-4.24 de verildi.

Tablo 4.17 ve 4.18 de Problem 1' in mesh uzunluğu h ve kinematik viskosite ν nün değişik değerleri için SFY2 ile elde edilen nümerik çözümleri ile problemin tam çözümü karşılaştırılırken, Tablo 4.19 da ν nün bazı küçük değerleri için elde edilen nümerik çözümleri ile önceki araştırmacıların elde ettikleri nümerik sonuçlar karşılaştırıldı.

Tablo 4.20 ve 4.21 de Problem 2' nin mesh uzunluğu h ve kinematik viskosite ν nün değişik değerleri için SFY2 ile elde edilen nümerik çözümleri ile problemin tam çözümü karşılaştırıldı. Tablo 4.22 de ν nün 0.005 ve 0.001 değerleri için elde edilen nümerik çözümler ve Tablo 4.22 de ν nün 0.0005 ve 0.0001 değerleri için elde edilen nümerik çözümleri ile önceki araştırmacıların elde ettikleri nümerik sonuçlar karşılaştırıldı.

Tablo 4.24 de Problem 3' ün $h = 0.05$, $k = 0.0001$ ve $\nu = 0.5$ değerleri için SFY2 ile elde edilen $t = 1.5$, $t = 3$, ve $t = 4.5$ zamanlarındaki nümerik çözümleri ve problemin tam çözümü verildi.

Tablolara bakıldığında SFY2 ile elde edilen nümerik sonuçların tam çözüme yakın olduğu ve literatürde mevcut olan önceki araştırmacıların verdiği sonuçlarla uyum içerisinde olduğu açıkca görülmektedir.

Tablo 4.17: **SFY2:** $t = 0.1$, $\nu = 1$, $k = 0.00001$ için Problem 1' in nümerik ve tam çözümleri

	Nümerik Çözüm				Tam
x	$h = 0.1$	$h = 0.05$	$h = 0.025$	$h = 0.0125$	Çözüm
0.1	0.11030	0.10973	0.10959	0.10955	0.10954
0.2	0.21129	0.21017	0.20989	0.20981	0.20979
0.3	0.29407	0.29245	0.29204	0.29193	0.29190
0.4	0.35066	0.34862	0.34811	0.34796	0.34792
0.5	0.37468	0.37237	0.37178	0.37162	0.37158
0.6	0.36223	0.35985	0.35926	0.35909	0.35905
0.7	0.31280	0.31064	0.31010	0.30995	0.30991
0.8	0.23004	0.22838	0.22796	0.22785	0.22782
0.9	0.12190	0.12099	0.12077	0.12071	0.12069
$\|e\|_1 \times 10^3$	7.57496	2.03043	0.54473	0.12564	
$L_2 \times 10^3$	2.22710	0.56521	0.14768	0.03367	
$L_\infty \times 10^3$	3.18259	0.80792	0.21163	0.04844	

Tablo 4.18: **SFY2:** $\nu = 1$, $\nu = 0.1$, $\nu = 0.01$; $h = 0.0125$, $k = 0.0001$ için Problem 1' in nümerik ve tam çözümleri

		$\nu = 1.0$		$\nu = 0.1$		$\nu = 0.01$	
x	t	Nümerik	Tam	Nümerik	Tam	Nümerik	Tam
0.25	0.4	0.01360	0.01357	0.30891	0.30889	0.34193	0.34191
	0.6	0.00190	0.00189	0.24076	0.24074	0.26898	0.26896
	0.8	0.00026	0.00026	0.19569	0.19568	0.22149	0.22148
	1.0	0.00004	0.00004	0.16258	0.16256	0.18820	0.18819
	3.0	0.00000	0.00000	0.02722	0.02720	0.07511	0.07511
0.50	0.4	0.01928	0.01924	0.56969	0.56963	0.66075	0.66071
	0.6	0.00268	0.00267	0.44727	0.44721	0.52944	0.52942
	0.8	0.00037	0.00037	0.35931	0.35924	0.43915	0.43914
	1.0	0.00005	0.00005	0.29199	0.29192	0.37443	0.37442
	3.0	0.00000	0.00000	0.04023	0.04020	0.15018	0.15018
0.75	0.4	0.01366	0.01363	0.62562	0.62544	0.91038	0.91026
	0.6	0.00190	0.00189	0.48745	0.48721	0.76730	0.76724
	0.8	0.00026	0.00026	0.37414	0.37392	0.64743	0.64740
	1.0	0.00004	0.00004	0.28766	0.28747	0.55607	0.55605
	3.0	0.00000	0.00000	0.02979	0.02977	0.22484	0.22481

Tablo 4.19: **SFY2:** $h = 0.0125$, $k = 0.00001$; $\nu = 0.005$, $\nu = 0.001$, $\nu = 0.0005$ ve $\nu = 0.0001$ için Problem 1' in nümerik sonuçların karşılaştırılması

		[40]				$SFY2$			
x	t	$\nu = 0.005$	$\nu = 0.001$	$\nu = 0.0005$	$\nu = 0.0001$	$\nu = 0.005$	$\nu = 0.001$	$\nu = 0.0005$	$\nu = 0.0001$
0.25	0.01	0.69111	0.69137	0.69141	0.69143	0.69126	0.69152	0.69155	0.69158
	0.05	0.63220	0.63319	0.63331	0.63341	0.63215	0.63314	0.63327	0.63337
	0.10	0.56820	0.56962	0.56979	0.56994	0.56813	0.56955	0.56973	0.56987
	0.15	0.51409	0.51565	0.51584	0.51600	0.51412	0.51568	0.51587	0.51603
	0.25	0.42986	0.43133	0.43152	0.43166	0.42987	0.43134	0.43152	0.43167
0.50	0.01	0.99900	0.99940	0.99945	0.99949	0.99902	0.99941	0.99946	0.99950
	0.05	0.98569	0.98755	0.98778	0.98797	0.98567	0.98753	0.98776	0.98795
	0.10	0.95145	0.95461	0.95500	0.95532	0.95139	0.95455	0.95495	0.95526
	0.15	0.90488	0.90865	0.90912	0.90950	0.90489	0.90866	0.90913	0.90951
	0.25	0.80158	0.80531	0.80578	0.80615	0.80156	0.80530	0.80576	0.80614
0.75	0.01	0.72275	0.72305	0.72309	0.72312	0.72261	0.72290	0.72294	0.72297
	0.05	0.78663	0.78853	0.78877	0.78896	0.78671	0.78861	0.78885	0.78904
	0.10	0.86589	0.87068	0.87128	0.87176	0.86605	0.87083	0.87143	0.87191
	0.15	0.93250	0.94035	0.94134	0.94212	0.93256	0.94041	0.94139	0.94217
	0.25	0.98773	0.99776	0.99900	0.99999	0.98773	0.99775	0.99899	0.99998

Tablo 4.20: **SFY2:** $t = 0.1$, $\nu = 1$, $k = 0.00001$ için Problem 2' nin nümerik ve tam çözümleri

	Nümerik Çözüm				Tam
x	$h = 0.1$	$h = 0.05$	$h = 0.025$	$h = 0.0125$	Çözüm
0.1	0.11367	0.11309	0.11294	0.11290	0.11289
0.2	0.21778	0.21664	0.21635	0.21627	0.21625
0.3	0.30319	0.30153	0.30111	0.30100	0.30097
0.4	0.36166	0.35958	0.35905	0.35891	0.35886
0.5	0.38660	0.38423	0.38363	0.38347	0.38342
0.6	0.37393	0.37149	0.37088	0.37071	0.37066
0.7	0.32306	0.32083	0.32026	0.32011	0.32007
0.8	0.23768	0.23596	0.23552	0.23541	0.23537
0.9	0.12598	0.12504	0.12480	0.12474	0.12472
$\|e\|_1 \times 10^3$	7.55239	2.03162	0.54553	0.12590	
$L_2 \times 10^3$	2.28993	0.58323	0.15251	0.03478	
$L_\infty \times 10^3$	3.27482	0.83351	0.21855	0.05004	

Tablo 4.21: **SFY2:** $\nu = 1$, $\nu = 0.1$, $\nu = 0.01$; $h = 0.0125$, $k = 0.0001$ için Problem 2' nin nümerik ve tam çözümleri

		$\nu = 1.0$		$\nu = 0.1$		$\nu = 0.01$	
x	t	Nümerik	Tam	Nümerik	Tam	Nümerik	Tam
0.25	0.4	0.01404	0.01400	0.31754	0.31752	0.36227	0.36226
	0.6	0.00196	0.00195	0.24615	0.24614	0.28205	0.28204
	0.8	0.00027	0.00027	0.19957	0.19956	0.23046	0.23045
	1.0	0.00004	0.00004	0.16562	0.16560	0.19470	0.19469
	3.0	0.00000	0.00000	0.02777	0.02776	0.07613	0.07613
0.50	0.4	0.01989	0.01985	0.58459	0.58454	0.68369	0.68368
	0.6	0.00277	0.00276	0.45804	0.45798	0.54832	0.54832
	0.8	0.00038	0.00038	0.36747	0.36740	0.45372	0.45371
	1.0	0.00005	0.00005	0.29842	0.29834	0.38568	0.38568
	3.0	0.00000	0.00000	0.04109	0.04106	0.15218	0.15218
0.75	0.4	0.01410	0.01407	0.64581	0.64562	0.92056	0.92050
	0.6	0.00196	0.00195	0.50292	0.50268	0.78302	0.78299
	0.8	0.00027	0.00027	0.38556	0.38534	0.66273	0.66272
	1.0	0.00004	0.00004	0.29605	0.29586	0.56933	0.56932
	3.0	0.00000	0.00000	0.03046	0.03044	0.22777	0.22774

Tablo 4.22: **SFY2:** $h = 0.0125$, $k = 0.00001$; $\nu = 0.005$ ve $\nu = 0.001$ için Problem 2' nin nümerik sonuçların karşılaştırılması

		[30]		[40]		$SFY2$	
x	t	$\nu = 0.005$	$\nu = 0.001$	$\nu = 0.005$	$\nu = 0.001$	$\nu = 0.005$	$\nu = 0.001$
0.25	0.05	0.67590	0.67711	0.67609	0.67738	0.67603	0.67732
	0.15	0.55176	0.55315	0.55250	0.55496	0.55250	0.55495
	0.25	0.43326	0.44450	0.46081	0.46349	0.46077	0.46344
0.50	0.05	0.98812	0.98957	0.98829	0.98983	0.98828	0.98981
	0.15	0.91808	0.92073	0.91887	0.92241	0.91889	0.92242
	0.25	0.81389	0.80709	0.82346	0.82748	0.82344	0.82746
0.75	0.05	0.82318	0.82497	0.82332	0.82522	0.82338	0.82529
	0.15	0.94539	0.95063	0.94646	0.95282	0.94649	0.95283
	0.25	0.97717	0.97296	0.99002	0.99815	0.99002	0.99814

Tablo 4.23: **SFY2:** $h = 0.0125$, $k = 0.00001$; $\nu = 0.0005$ ve $\nu = 0.0001$ için Problem 2' nin nümerik sonuçların karşılaştırılması

		[40]		$SFY2$	
x	t	$\nu = 0.0005$	$\nu = 0.0001$	$\nu = 0.0005$	$\nu = 0.0001$
0.25	0.05	0.67754	0.67767	0.67748	0.67761
	0.15	0.55526	0.55551	0.55526	0.55550
	0.25	0.46382	0.46409	0.46378	0.46404
0.50	0.05	0.99002	0.99017	0.99001	0.99016
	0.15	0.92285	0.92320	0.92286	0.92322
	0.25	0.82798	0.82838	0.82796	0.82836
0.75	0.05	0.82456	0.82565	0.82552	0.82571
	0.15	0.95361	0.95424	0.95362	0.95426
	0.25	0.99915	0.99996	0.99915	0.99995

Tablo 4.24: **SFY2:** $\nu = 0.5$, $h = 0.05$, $k = 0.0001$ ve $[a,b] = [0,8]$ için Problem 3' ün nümerik ve tam çözümleri

	$t=1.5$		$t=3.0$		$t=4.5$	
x	Nümerik	Tam	Nümerik	Tam	Nümerik	Tam
0.5	0.15330	0.15327	0.06427	0.06426	0.03800	0.03799
1.0	0.26581	0.26577	0.11882	0.11880	0.07188	0.07187
1.5	0.30415	0.30412	0.15511	0.15509	0.09794	0.09793
2.0	0.26140	0.26142	0.16763	0.16762	0.11339	0.11339
2.5	0.17212	0.17217	0.15629	0.15630	0.11698	0.11698
3.0	0.08804	0.08807	0.12736	0.12738	0.10948	0.10949
3.5	0.03581	0.03582	0.09129	0.09132	0.09367	0.09369
4.0	0.01186	0.01186	0.05795	0.05797	0.07359	0.07361
4.5	0.00325	0.00325	0.03283	0.03284	0.05328	0.05330
5.0	0.00074	0.00074	0.01673	0.01674	0.03570	0.03572
5.5	0.00014	0.00014	0.00772	0.00772	0.02223	0.02224
6.0	0.00002	0.00002	0.00324	0.00324	0.01290	0.01292
6.5	0.00000	0.00000	0.00124	0.00124	0.00697	0.00702
7.0	0.00000	0.00000	0.00043	0.00043	0.00345	0.00358
7.5	0.00000	0.00000	0.00013	0.00014	0.00139	0.00172

4.4 Sonlu Fark Yaklaşımı 3 (SFY3)

(4.1) Burgers denkleminde UU_x non-lineer teriminin yerine

$$UU_x \cong U_i^j \left(\frac{1}{2}\left[\frac{U_{i+1}^{j+1} - U_{i-1}^{j+1}}{2h} + \frac{U_{i+1}^j - U_{i-1}^j}{2h}\right]\right)$$

sonlu fark yaklaşımı U_{xx} türevinin yerine

$$U_{xx} \cong \frac{1}{2}\left[\frac{U_{i-1}^{j+1} - 2U_i^{j+1} + U_{i+1}^{j+1}}{h^2} + \frac{U_{i-1}^j - 2U_i^j + U_{i+1}^j}{h^2}\right]$$

Crank-Nicolson sonlu fark yaklaşımı yazılır ve gerekli düzenlemeler yapılırsa

$$\begin{aligned} -\left(\frac{hU_i^j + 2\nu}{4h^2}\right)U_{i-1}^{j+1} + \left(\frac{h^2 + \nu k}{kh^2}\right)U_i^{j+1} + \left(\frac{hU_i^j - 2\nu}{4h^2}\right)U_{i+1}^{j+1} &= \frac{U_i^j}{k} - \frac{U_i^j}{4h}(U_{i+1}^j - U_{i-1}^j) \\ &+ \frac{\nu}{2h^2}(U_{i-1}^j - 2U_i^j + U_{i+1}^j) \ , \quad i = 1(1)N-1, \quad j = 0(1)J \end{aligned}$$

kapalı sonlu fark yaklaşımı bulunur.

Nümerik Sonuçlar

Problem 1, Problem 2 ve Problem 3' ün SFY3 ile elde edilen nümerik çözümleri Tablo 4.25-4.32 de verildi.

Tablo 4.25 de Problem 1' in $t = 0.1$, $\nu = 1$, $k = 0.00001$ alınarak mesh uzunluğu h nin değişik değerleri için nümerik ve tam çözümü karşılaştırıldı. Elde edilen sonuçların mesh uzunluğu h nin gittikçe küçük seçilmesi durumunda analitik çözüme oldukça yaklaştığı görülmektedir.

Tablo 4.26 da Problem 1' in $h = 0.0125$, $k = 0.0001$ alınarak kinematik viskosite ν nün 1, 0.1, 0.001 değerleri için çeşitli t zamanlarında nümerik çözümleri ile analitik çözüm karşılaştırıldı. SFY 3 ile elde edilen sonuçların analitik çözümle uyum içerisinde olduğu gözlendi.

Tablo 4.27 de Problem 1' in $h = 0.0125$, $k = 0.00001$ alınarak ν nün 0.005, 0.001, 0.0005, 0.0001 değerleri için SFY3 ile elde edilen nümerik sonuçlar ile önceki araştırmacıların verdikleri sonuçlar karşılaştırıldı. Elde edilen sonuçların önceki araştırmacılarınkine yakın değerler olduğu görüldü.

Tablo 4.28 ve Tablo 4.29 da Problem 2' nin mesh uzunluğu h ve kinematik viskosite ν nün değişik değerleri için farklı t zamanlarında elde edilen nümerik çözümler ile tam çözüm karşılaştırıldı. Nümerik çözümlerin tam çözümle uyum içinde olduğu görüldü.

Tablo 4.30 ve Tablo 4.31 de Problem 2' nin ν =0.005, 0.001, 0.0005, 0.0001 değerleri için çeşitli zamanlarda elde edilen nümerik çözümler ile önceki araştırmacıların elde ettikleri sonuçlar karşılaştırıldı. Tablolardan SFY3 ile elde edilen sonuçların önceki araştırmacıların verdikleri sonuçlara yeterince yakın olduğu görülmektedir.

Tablo 4.32 de Problem 3' ün ν =0.5, $h = 0.05$, $k = 0.0001$ değerleri için SFY3 ile edilen nümerik sonuçlar ile tam çözüm karşılaştırıldı. Tablodan nümerik sonuçların analitik çözüme yakın oldukça olduğu kolayca görülmektedir.

Tablo 4.25: **SFY3:** $t = 0.1$, $\nu = 1$, $k = 0.00001$ için Problem 1' in nümerik ve tam çözümleri

	Nümerik Çözüm				Tam
x	$h = 0.1$	$h = 0.05$	$h = 0.025$	$h = 0.0125$	Çözüm
0.1	0.11029	0.10973	0.10959	0.10955	0.10954
0.2	0.21128	0.21016	0.20988	0.20981	0.20979
0.3	0.29406	0.29244	0.29203	0.29193	0.29190
0.4	0.35064	0.34860	0.34809	0.34797	0.34792
0.5	0.37466	0.37235	0.37177	0.37163	0.37158
0.6	0.36221	0.35984	0.35924	0.35910	0.35905
0.7	0.31279	0.31062	0.31009	0.30995	0.30991
0.8	0.23003	0.22837	0.22796	0.22785	0.22782
0.9	0.12189	0.12099	0.12076	0.12071	0.12069
$\|e\|_1 \times 10^3$	7.53214	1.98724	0.50987	0.12907	
$L_2 \times 10^3$	2.21463	0.55329	0.13832	0.03460	
$L_\infty \times 10^3$	3.16535	0.79106	0.19849	0.04975	

Tablo 4.26: **SFY3:** $\nu = 1$, $\nu = 0.1$, $\nu = 0.01$; $h = 0.0125$, $k = 0.0001$ için Problem 1' in nümerik ve tam çözümleri

		$\nu = 1.0$		$\nu = 0.1$		$\nu = 0.01$	
x	t	Nümerik	Tam	Nümerik	Tam	Nümerik	Tam
0.25	0.4	0.01358	0.01357	0.30890	0.30889	0.34192	0.34191
	0.6	0.00189	0.00189	0.24075	0.24074	0.26896	0.26896
	0.8	0.00026	0.00026	0.19569	0.19568	0.22148	0.22148
	1.0	0.00004	0.00004	0.16258	0.16256	0.18819	0.18819
	3.0	0.00000	0.00000	0.02722	0.02720	0.07511	0.07511
0.50	0.4	0.01925	0.01924	0.56968	0.56963	0.66074	0.66071
	0.6	0.00267	0.00267	0.44727	0.44721	0.52943	0.52942
	0.8	0.00037	0.00037	0.35931	0.35924	0.43914	0.43914
	1.0	0.00005	0.00005	0.29199	0.29192	0.37442	0.37442
	3.0	0.00000	0.00000	0.04023	0.04020	0.15018	0.15018
0.75	0.4	0.01364	0.01363	0.62565	0.62544	0.91044	0.91026
	0.6	0.00189	0.00189	0.48746	0.48721	0.76731	0.76724
	0.8	0.00026	0.00026	0.37414	0.37392	0.64742	0.64740
	1.0	0.00004	0.00004	0.28765	0.28747	0.55606	0.55605
	3.0	0.00000	0.00000	0.02979	0.02977	0.22484	0.22481

Tablo 4.27: **SFY3:** $h = 0.0125$, $k = 0.00001$; $\nu = 0.005$, $\nu = 0.001$, $\nu = 0.0005$ ve $\nu = 0.0001$ için Problem 1' in nümerik sonuçların karşılaştırılması

		[40]				$SFY3$			
x	t	$\nu = 0.005$	$\nu = 0.001$	$\nu = 0.0005$	$\nu = 0.0001$	$\nu = 0.005$	$\nu = 0.001$	$\nu = 0.0005$	$\nu = 0.0001$
0.25	0.01	0.69111	0.69137	0.69141	0.69143	0.69126	0.69152	0.69155	0.69158
	0.05	0.63220	0.63319	0.63331	0.63341	0.63215	0.63314	0.63327	0.63337
	0.10	0.56820	0.56962	0.56979	0.56994	0.56813	0.56955	0.56973	0.56987
	0.15	0.51409	0.51565	0.51584	0.51600	0.51412	0.51568	0.51587	0.51603
	0.25	0.42986	0.43133	0.43152	0.43166	0.42987	0.43134	0.43152	0.43167
0.50	0.01	0.99900	0.99940	0.99945	0.99949	0.99902	0.99941	0.99946	0.99950
	0.05	0.98569	0.98755	0.98778	0.98797	0.98567	0.98753	0.98776	0.98795
	0.10	0.95145	0.95461	0.95500	0.95532	0.95140	0.95455	0.95495	0.95526
	0.15	0.90488	0.90865	0.90912	0.90950	0.90489	0.90866	0.90913	0.90951
	0.25	0.80158	0.80531	0.80578	0.80615	0.80156	0.80530	0.80577	0.80614
0.75	0.01	0.72275	0.72305	0.72309	0.72312	0.72261	0.72290	0.72294	0.72297
	0.05	0.78663	0.78853	0.78877	0.78896	0.78671	0.78861	0.78885	0.78904
	0.10	0.86589	0.87068	0.87128	0.87176	0.86605	0.87083	0.87143	0.87191
	0.15	0.93250	0.94035	0.94134	0.94212	0.93257	0.94041	0.94140	0.94218
	0.25	0.98773	0.99776	0.99900	0.99999	0.98774	0.99776	0.99900	0.99999

Tablo 4.28: **SFY3:** $t = 0.1$, $\nu = 1$, $k = 0.00001$ için Problem 2' nin nümerik ve tam çözümleri

x	Nümerik Çözüm $h = 0.1$	$h = 0.05$	$h = 0.025$	$h = 0.0125$	Tam Çözüm
0.1	0.11366	0.11309	0.11294	0.11290	0.11289
0.2	0.21777	0.21663	0.21635	0.21628	0.21625
0.3	0.30317	0.30152	0.30110	0.30100	0.30097
0.4	0.36165	0.35956	0.35904	0.35891	0.35886
0.5	0.38659	0.38422	0.38362	0.38347	0.38342
0.6	0.37391	0.37147	0.37086	0.37071	0.37066
0.7	0.32304	0.32081	0.32025	0.32011	0.32007
0.8	0.23767	0.23595	0.23551	0.23541	0.23537
0.9	0.12597	0.12503	0.12480	0.12474	0.12472
$\|e\|_1 \times 10^3$	7.50957	1.98846	0.51073	0.12941	
$L_2 \times 10^3$	2.27708	0.57096	0.14287	0.03576	
$L_\infty \times 10^3$	3.25707	0.81655	0.20502	0.05142	

Tablo 4.29: **SFY3:** $\nu = 1$, $\nu = 0.1$, $\nu = 0.01$; $h = 0.0125$, $k = 0.0001$ için Problem 2' nin nümerik ve tam çözümleri

		$\nu = 1.0$		$\nu = 0.1$		$\nu = 0.01$	
x	t	Nümerik	Tam	Nümerik	Tam	Nümerik	Tam
0.25	0.4	0.01401	0.01400	0.31753	0.31752	0.36225	0.36226
	0.6	0.00195	0.00195	0.24615	0.24614	0.28203	0.28204
	0.8	0.00027	0.00027	0.19957	0.19956	0.23045	0.23045
	1.0	0.00004	0.00004	0.16562	0.16560	0.19469	0.19469
	3.0	0.00000	0.00000	0.02777	0.02776	0.07613	0.07613
0.50	0.4	0.01986	0.01985	0.58458	0.58454	0.68368	0.68368
	0.6	0.00276	0.00276	0.45803	0.45798	0.54831	0.54832
	0.8	0.00038	0.00038	0.36747	0.36740	0.45371	0.45371
	1.0	0.00005	0.00005	0.29842	0.29834	0.38567	0.38568
	3.0	0.00000	0.00000	0.04109	0.04106	0.15218	0.15218
0.75	0.4	0.01407	0.01407	0.64585	0.64562	0.92062	0.92050
	0.6	0.00195	0.00195	0.50293	0.50268	0.78303	0.78299
	0.8	0.00027	0.00027	0.38556	0.38534	0.66273	0.66272
	1.0	0.00004	0.00004	0.29604	0.29586	0.56931	0.56932
	3.0	0.00000	0.00000	0.03046	0.03044	0.22777	0.22774

Tablo 4.30: **SFY3:** $h = 0.0125$, $k = 0.00001$; $\nu = 0.005$ ve $\nu = 0.001$ için Problem 2' nin nümerik sonuçların karşılaştırılması

		[30]		[40]		$SFY3$	
x	t	$\nu = 0.005$	$\nu = 0.001$	$\nu = 0.005$	$\nu = 0.001$	$\nu = 0.005$	$\nu = 0.001$
0.25	0.05	0.67590	0.67711	0.67609	0.67738	0.67603	0.67732
	0.15	0.55176	0.55315	0.55250	0.55496	0.55250	0.55495
	0.25	0.43326	0.44450	0.46081	0.46349	0.46077	0.46344
0.50	0.05	0.98812	0.98957	0.98829	0.98983	0.98828	0.98982
	0.15	0.91808	0.92073	0.91887	0.92241	0.91889	0.92243
	0.25	0.81389	0.80709	0.82346	0.82748	0.82344	0.82746
0.75	0.05	0.82318	0.82497	0.82332	0.82522	0.82338	0.82529
	0.15	0.94539	0.95063	0.94646	0.95282	0.94649	0.95284
	0.25	0.97717	0.97296	0.99002	0.99815	0.99003	0.99815

Tablo 4.31: **SFY3:** $h = 0.0125$, $k = 0.00001$; $\nu = 0.0005$ ve $\nu = 0.0001$ için Problem 2' nin nümerik sonuçların karşılaştırılması

		[40]		$SFY3$	
x	t	$\nu = 0.0005$	$\nu = 0.0001$	$\nu = 0.0005$	$\nu = 0.0001$
0.25	0.05	0.67754	0.67767	0.67748	0.67761
	0.15	0.55526	0.55551	0.55526	0.55550
	0.25	0.46382	0.46409	0.46378	0.46404
0.50	0.05	0.99002	0.99017	0.99001	0.99016
	0.15	0.92285	0.92320	0.92287	0.92322
	0.25	0.82798	0.82838	0.82796	0.82836
0.75	0.05	0.82456	0.82565	0.82553	0.82572
	0.15	0.95361	0.95424	0.95363	0.95426
	0.25	0.99915	0.99996	0.99916	0.99996

Tablo 4.32: **SFY3:** $\nu = 0.5$, $h = 0.05$, $k = 0.0001$ ve $[a,b] = [0,8]$ için Problem 3' ün nümerik ve tam çözümleri

	$t = 1.5$		$t = 3.0$		$t = 4.5$	
x	Nümerik	Tam	Nümerik	Tam	Nümerik	Tam
0.5	0.15329	0.15327	0.06427	0.06426	0.03799	0.03799
1.0	0.26581	0.26577	0.11882	0.11880	0.07188	0.07187
1.5	0.30415	0.30412	0.15510	0.15509	0.09794	0.09793
2.0	0.26141	0.26142	0.16763	0.16762	0.11339	0.11339
2.5	0.17213	0.17217	0.15629	0.15630	0.11698	0.11698
3.0	0.08804	0.08807	0.12736	0.12738	0.10948	0.10949
3.5	0.03581	0.03582	0.09130	0.09132	0.09367	0.09369
4.0	0.01186	0.01186	0.05795	0.05797	0.07359	0.07361
4.5	0.00325	0.00325	0.03283	0.03284	0.05328	0.05330
5.0	0.00074	0.00074	0.01673	0.01674	0.03570	0.03572
5.5	0.00014	0.00014	0.00772	0.00772	0.02223	0.02224
6.0	0.00002	0.00002	0.00324	0.00324	0.01290	0.01292
6.5	0.00000	0.00000	0.00124	0.00124	0.00697	0.00702
7.0	0.00000	0.00000	0.00043	0.00043	0.00345	0.00358
7.5	0.00000	0.00000	0.00013	0.00014	0.00139	0.00172

4.5 Sonlu Fark Yaklaşımı 4 (SFY4)

(4.1) Burgers denkleminde UU_x non-lineer teriminin yerine

$$UU_x \cong U_i^{j+1}\left(\frac{U_{i+1}^j - U_{i-1}^j}{2h}\right)$$

sonlu fark yaklaşımı U_{xx} türevinin yerine

$$U_{xx} \cong \frac{U_{i-1}^j - 2U_i^j + U_{i+1}^j}{h^2}$$

açık sonlu fark yaklaşımı yazılır ve gerekli düzenlemeler yapılırsa

$$U_i^{j+1} = \frac{2h^2 U_i^j + 2\nu k(U_{i-1}^j - 2U_i^j + U_{i+1}^j)}{2h^2 + kh(U_{i+1}^j - U_{i-1}^j)} \quad , \quad i = 1(1)N-1, \quad j = 0(1)J$$

açık sonlu fark yaklaşımı bulunur.

Nümerik Sonuçlar

Problem 1, Problem 2 ve Problem 3' ün SFY4 ile elde edilen nümerik çözümleri Tablo 4.33-4.40 da verildi.

$\nu = 1$, $k = 0.00001$ değerleri ve değişik mesh uzunluğu h için Problem 1' in SFY4 ile elde edilen $t = 0.1$ daki nümerik çözümleri ile problemin tam çözümünün karşılaştırılması Tablo 4.33 de verildi. Tablodan h nin gittikçe küçük seçilmesi durumunda elde edilen nümerik çözümlerin analitik çözüme yaklaştığı görülmektedir.

$h = 0.0125$, $k = 0.0001$ değerleri ve kinematik viskosite ν nün 1, 0.1, 0.001 değerleri için Problem 1' in çeşitli t zamanlarında SFY4 ile elde edilen nümerik çözümler ile analitik çözümün karşılaştırılması Tablo 4.34 de verildi. SFY4 ile elde edilen sonuçların analitik çözüm ile uyum içinde olduğu görüldü.

$h = 0.0125$, $k = 0.00001$ alınarak ν nün 0.005, 0.001, 0.0005, 0.0001 değerleri için Problem 1' in SFY4 ile elde edilen nümerik sonuçlar ile önceki araştırmacıların verdikleri sonuçların karşılaştırılması Tablo 4.35 de verildi. Tablodan sonuçların uyum içerisinde olduğu kolayca görülmektedir.

Mesh uzunluğu h ve kinematik viskosite ν nün değişik değerleri için Problem 2' nin farklı t zamanlarında SFY4 ile elde edilen nümerik çözümleri ile tam çözümü Tablo 4.36 ve Tablo 4.37 te karşılaştırıldı. Nümerik çözümlerin analitik çözüme yakın olduğu görülmektedir.

ν =0.005, 0.001, 0.0005, 0.0001 değerleri için Problem 2' nin çeşitli zamanlarda SFY4 ile elde edilen nümerik çözümler ile önceki araştırmacıların elde ettikleri sonuçlar Tablo 4.38 ve Tablo 4.39 da karşılaştırıldı. Tablolardan SFY4 ile elde edilen sonuçların önceki araştırmacıların verdiği sonuçlarla yeterince iyi olduğu görülmektedir.

Tablo 4.40 da Problem 3' ün $\nu = 0.5$, $h = 0.05$, $k = 0.0001$ değerleri için SFY4 ile edilen nümerik sonuçlar ile tam çözüm karşılaştırıldı. Tablodan, nümerik sonuçların analitik sonuçlara oldukça yakın olduğu görülmektedir.

Tablo 4.33: **SFY4:** $t = 0.1$, $\nu = 1$, $k = 0.00001$ için Problem 1' in nümerik ve tam çözümleri

x	Nümerik Çözüm $h = 0.1$	$h = 0.05$	$h = 0.025$	$h = 0.0125$	Tam Çözüm
0.1	0.11029	0.10972	0.10958	0.10955	0.10954
0.2	0.21127	0.21016	0.20988	0.20981	0.20979
0.3	0.29404	0.29242	0.29202	0.29192	0.29190
0.4	0.35063	0.34859	0.34808	0.34795	0.34792
0.5	0.37464	0.37233	0.37175	0.37161	0.37158
0.6	0.36219	0.35982	0.35923	0.35908	0.35905
0.7	0.31277	0.31061	0.31007	0.30993	0.30991
0.8	0.23002	0.22836	0.22794	0.22784	0.22782
0.9	0.12189	0.12098	0.12076	0.12070	0.12069
$\|e\|_1 \times 10^3$	7.48932	1.94175	0.46309	0.08164	
$L_2 \times 10^3$	2.20208	0.54067	0.12568	0.02196	
$L_\infty \times 10^3$	3.14759	0.77306	0.18047	0.03176	

Tablo 4.34: **SFY4:** $\nu = 1$, $\nu = 0.1$, $\nu = 0.01$; $h = 0.0125$, $k = 0.0001$ için Problem 1' in nümerik ve tam çözümleri

		$\nu = 1.0 (k = 0.00001)$		$\nu = 0.1$		$\nu = 0.01$	
x	t	Nümerik	Tam	Nümerik	Tam	Nümerik	Tam
0.25	0.4	0.01358	0.01357	0.30891	0.30889	0.34193	0.34191
	0.6	0.00189	0.00189	0.24076	0.24074	0.26898	0.26896
	0.8	0.00026	0.00026	0.19570	0.19568	0.22149	0.22148
	1.0	0.00004	0.00004	0.16259	0.16256	0.18820	0.18819
	3.0	0.00000	0.00000	0.02722	0.02720	0.07512	0.07511
0.50	0.4	0.01924	0.01924	0.56970	0.56963	0.66078	0.66071
	0.6	0.00267	0.00267	0.44728	0.44721	0.52946	0.52942
	0.8	0.00037	0.00037	0.35931	0.35924	0.43916	0.43914
	1.0	0.00005	0.00005	0.29199	0.29192	0.37444	0.37442
	3.0	0.00000	0.00000	0.04023	0.04020	0.15018	0.15018
0.75	0.4	0.01364	0.01363	0.62569	0.62544	0.91053	0.91026
	0.6	0.00189	0.00189	0.48747	0.48721	0.76736	0.76724
	0.8	0.00026	0.00026	0.37414	0.37392	0.64746	0.64740
	1.0	0.00004	0.00004	0.28764	0.28747	0.55609	0.55605
	3.0	0.00000	0.00000	0.02979	0.02977	0.22484	0.22481

Tablo 4.35: **SFY4:** $h = 0.0125$, $k = 0.00001$; $\nu = 0.005$, $\nu = 0.001$, $\nu = 0.0005$ ve $\nu = 0.0001$ için Problem 1' in nümerik sonuçların karşılaştırılması

		[40]				$SFY4$			
x	t	$\nu = 0.005$	$\nu = 0.001$	$\nu = 0.0005$	$\nu = 0.0001$	$\nu = 0.005$	$\nu = 0.001$	$\nu = 0.0005$	$\nu = 0.0001$
0.25	0.01	0.69111	0.69137	0.69141	0.69143	0.69126	0.69152	0.69155	0.69158
	0.05	0.63220	0.63319	0.63331	0.63341	0.63215	0.63314	0.63327	0.63337
	0.10	0.56820	0.56962	0.56979	0.56994	0.56813	0.56955	0.56973	0.56987
	0.15	0.51409	0.51565	0.51584	0.51600	0.51412	0.51568	0.51587	0.51603
	0.25	0.42986	0.43133	0.43152	0.43166	0.42987	0.43134	0.43152	0.43167
0.50	0.01	0.99900	0.99940	0.99945	0.99949	0.99902	0.99941	0.99946	0.99950
	0.05	0.98569	0.98755	0.98778	0.98797	0.98568	0.98753	0.98777	0.98795
	0.10	0.95145	0.95461	0.95500	0.95532	0.95140	0.95456	0.95495	0.95527
	0.15	0.90488	0.90865	0.90912	0.90950	0.90489	0.90867	0.90914	0.90952
	0.25	0.80158	0.80531	0.80578	0.80615	0.80157	0.80531	0.80577	0.80614
0.75	0.01	0.72275	0.72305	0.72309	0.72312	0.72261	0.72291	0.72294	0.72297
	0.05	0.78663	0.78853	0.78877	0.78896	0.78671	0.78861	0.78885	0.78904
	0.10	0.86589	0.87068	0.87128	0.87176	0.86606	0.87084	0.87144	0.87192
	0.15	0.93250	0.94035	0.94134	0.94212	0.93258	0.94042	0.94141	0.94219
	0.25	0.98773	0.99776	0.99900	0.99999	0.98775	0.99778	0.99902	1.00000

Tablo 4.36: **SFY4:** $t = 0.1$, $\nu = 1$, $k = 0.00001$ için Problem 2' nin nümerik ve tam çözümleri

x	Nümerik Çözüm $h = 0.1$	$h = 0.05$	$h = 0.025$	$h = 0.0125$	Tam Çözüm
0.1	0.11366	0.11308	0.11294	0.11290	0.11289
0.2	0.21776	0.21662	0.21634	0.21627	0.21625
0.3	0.30316	0.30151	0.30109	0.30099	0.30097
0.4	0.36163	0.35955	0.35902	0.35889	0.35886
0.5	0.38657	0.38420	0.38360	0.38345	0.38342
0.6	0.37390	0.37146	0.37084	0.37069	0.37066
0.7	0.32303	0.32080	0.32024	0.32010	0.32007
0.8	0.23765	0.23593	0.23550	0.23539	0.23537
0.9	0.12596	0.12502	0.12479	0.12473	0.12472
$\|e\|_1 \times 10^3$	7.46679	1.94303	0.46403	0.08210	
$L_2 \times 10^3$	2.26415	0.55795	0.12984	0.02273	
$L_\infty \times 10^3$	3.23876	0.79813	0.18645	0.03289	

Tablo 4.37: **SFY4:** $\nu = 1$, $\nu = 0.1$, $\nu = 0.01$; $h = 0.0125$, $k = 0.0001$ için Problem 2' nin nümerik ve tam çözümleri

		$\nu = 1.0 (k = 0.00001)$		$\nu = 0.1$		$\nu = 0.01$	
x	t	Nümerik	Tam	Nümerik	Tam	Nümerik	Tam
0.25	0.4	0.01401	0.01400	0.31754	0.31752	0.36228	0.36226
	0.6	0.00195	0.00195	0.24616	0.24614	0.28205	0.28204
	0.8	0.00027	0.00027	0.19957	0.19956	0.23046	0.23045
	1.0	0.00004	0.00004	0.16562	0.16560	0.19470	0.19469
	3.0	0.00000	0.00000	0.02777	0.02776	0.07614	0.07613
0.50	0.4	0.01986	0.01985	0.58460	0.58454	0.68373	0.68368
	0.6	0.00276	0.00276	0.45805	0.45798	0.54835	0.54832
	0.8	0.00038	0.00038	0.36748	0.36740	0.45373	0.45371
	1.0	0.00005	0.00005	0.29842	0.29834	0.38569	0.38568
	3.0	0.00000	0.00000	0.04109	0.04106	0.15218	0.15218
0.75	0.4	0.01407	0.01407	0.64588	0.64562	0.92070	0.92050
	0.6	0.00195	0.00195	0.50294	0.50268	0.78309	0.78299
	0.8	0.00027	0.00027	0.38556	0.38534	0.66277	0.66272
	1.0	0.00004	0.00004	0.29603	0.29586	0.56935	0.56932
	3.0	0.00000	0.00000	0.03046	0.03044	0.22778	0.22774

Tablo 4.38: **SFY4:** $h = 0.0125$, $k = 0.00001$; $\nu = 0.005$ ve $\nu = 0.001$ için Problem 2' nin nümerik sonuçların karşılaştırılması

		[30]		[40]		$SFY4$	
x	t	$\nu = 0.005$	$\nu = 0.001$	$\nu = 0.005$	$\nu = 0.001$	$\nu = 0.005$	$\nu = 0.001$
0.25	0.05	0.67590	0.67711	0.67609	0.67738	0.67603	0.67732
	0.15	0.55176	0.55315	0.55250	0.55496	0.55250	0.55495
	0.25	0.43326	0.44450	0.46081	0.46349	0.46077	0.46345
0.50	0.05	0.98812	0.98957	0.98829	0.98983	0.98828	0.98982
	0.15	0.91808	0.92073	0.91887	0.92241	0.91889	0.92243
	0.25	0.81389	0.80709	0.82346	0.82748	0.82345	0.82747
0.75	0.05	0.82318	0.82497	0.82332	0.82522	0.82338	0.82529
	0.15	0.94539	0.95063	0.94646	0.95282	0.94650	0.95285
	0.25	0.97717	0.97296	0.99002	0.99815	0.99004	0.99816

Tablo 4.39: **SFY4:** $h = 0.0125$, $k = 0.00001$; $\nu = 0.0005$ ve $\nu = 0.0001$ için Problem 2' nin nümerik sonuçların karşılaştırılması

		[40]		$SFY4$	
x	t	$\nu = 0.0005$	$\nu = 0.0001$	$\nu = 0.0005$	$\nu = 0.0001$
0.25	0.05	0.67754	0.67767	0.67749	0.67761
	0.15	0.55526	0.55551	0.55526	0.55550
	0.25	0.46382	0.46409	0.46378	0.46405
0.50	0.05	0.99002	0.99017	0.99001	0.99016
	0.15	0.92285	0.92320	0.92287	0.92323
	0.25	0.82798	0.82838	0.82797	0.82837
0.75	0.05	0.82456	0.82565	0.82553	0.82572
	0.15	0.95361	0.95424	0.95364	0.95427
	0.25	0.99915	0.99996	0.99917	0.99997

Tablo 4.40: **SFY4:** $\nu = 0.5$, $h = 0.05$, $k = 0.0001$ ve $[a, b] = [0, 8]$ için Problem 3' ün nümerik ve tam çözümleri

	$t = 1.5$		$t = 3.0$		$t = 4.5$	
x	Nümerik	Tam	Nümerik	Tam	Nümerik	Tam
0.5	0.15329	0.15327	0.06427	0.06426	0.03799	0.03799
1.0	0.26580	0.26577	0.11882	0.11880	0.07188	0.07187
1.5	0.30415	0.30412	0.15510	0.15509	0.09794	0.09793
2.0	0.26141	0.26142	0.16763	0.16762	0.11339	0.11339
2.5	0.17213	0.17217	0.15629	0.15630	0.11698	0.11698
3.0	0.08804	0.08807	0.12736	0.12738	0.10948	0.10949
3.5	0.03581	0.03582	0.09130	0.09132	0.09367	0.09369
4.0	0.01186	0.01186	0.05796	0.05797	0.07359	0.07361
4.5	0.00325	0.00325	0.03283	0.03284	0.05329	0.05330
5.0	0.00074	0.00074	0.01673	0.01674	0.03571	0.03572
5.5	0.00014	0.00014	0.00772	0.00772	0.02223	0.02224
6.0	0.00002	0.00002	0.00324	0.00324	0.01290	0.01292
6.5	0.00000	0.00000	0.00124	0.00124	0.00697	0.00702
7.0	0.00000	0.00000	0.00043	0.00043	0.00345	0.00358
7.5	0.00000	0.00000	0.00013	0.00014	0.00139	0.00172

4.6 Sonlu Fark Yaklaşımı 5 (SFY5)

(4.1) Burgers denkleminde UU_x non-lineer teriminin yerine

$$UU_x \cong U_i^{j+1}(\frac{U_{i+1}^j - U_{i-1}^j}{2h}) + U_i^j(\frac{U_{i+1}^{j+1} - U_{i-1}^{j+1}}{2h}) - U_i^j(\frac{U_{i+1}^j - U_{i-1}^j}{2h})$$

sonlu fark yaklaşımı[19] U_{xx} türevinin yerine

$$U_{xx} \cong \frac{U_{i-1}^j - 2U_i^j + U_{i+1}^j}{h^2}$$

açık sonlu fark yaklaşımı yazılır ve gerekli düzenlemeler yapılırsa

$$\begin{aligned} -\frac{U_i^j}{2h}U_{i-1}^{j+1} + (\frac{2h + k(U_{i+1}^j - U_{i-1}^j)}{2kh})U_i^{j+1} + \frac{U_i^j}{2h}U_{i+1}^{j+1} &= U_i^j(\frac{2h + k(U_{i+1}^j - U_{i-1}^j)}{2kh}) \\ &+ \frac{\nu}{h^2}(U_{i-1}^j - 2U_i^j + U_{i+1}^j) \quad , \quad i = 1(1)N-1, \quad j = 0(1)J \end{aligned}$$

kapalı sonlu fark yaklaşımı bulunur.

Nümerik Sonuçlar

Problem 1, Problem 2 ve Problem 3' ün SFY5 ile elde edilen nümerik çözümleri Tablo 4.41-4.48 de verildi.

Tablo 4.41 ve 4.42 de Problem 1' in mesh uzunluğu h ve kinematik viskosite ν nün değişik değerleri için SFY5 ile elde edilen nümerik çözümleri ile problemin tam çözümü karşılaştırılırken, Tablo 4.43 da ν nün 0.005, 0.001, 0.0005, 0.00001 değerleri için elde edilen nümerik çözümleri ile önceki araştırmacıların elde ettikleri nümerik sonuçlar karşılaştırıldı.

Tablo 4.44 ve 4.45 de Problem 2' nin mesh uzunluğu h ve kinematik viskosite ν nün değişik değerleri için SFY5 ile elde edilen nümerik çözümleri ile problemin tam çözümü karşılaştırıldı. Tablo 4.46 da ν nün 0.005 ve 0.001 değerleri için elde edilen nümerik çözümler ve Tablo 4.47 de ν nün 0.0005 ve 0.0001 değerleri için elde edilen nümerik çözümleri ile önceki araştırmacıların elde ettikleri nümerik sonuçlar karşılaştırıldı.

Tablo 4.48 de Problem 3' ün $h = 0.05$, $k = 0.0001$ ve $\nu = 0.5$ değerleri için SFY5 ile elde edilen $t = 1.5$, $t = 3$, ve $t = 4.5$ zamanlarındaki nümerik çözümleri ve problemin tam çözümü verildi.

Tablolara bakıldığında SFY5 ile elde edilen nümerik sonuçların tam çözüme oldukça yakın olduğu ve literatürde mevcut olan önceki araştırmacıların verdiği sonuçlarla uyum içerisinde olduğu kolayca görülmektedir.

Tablo 4.41: **SFY5:** $t = 0.1$, $\nu = 1$, $k = 0.00001$ için Problem 1' in nümerik ve tam çözümleri

x	Nümerik Çözüm $h = 0.1$	$h = 0.05$	$h = 0.025$	$h = 0.0125$	Tam Çözüm
0.1	0.11029	0.10972	0.10958	0.10955	0.10954
0.2	0.21127	0.21016	0.20988	0.20981	0.20979
0.3	0.29404	0.29242	0.29202	0.29192	0.29190
0.4	0.35063	0.34859	0.34808	0.34795	0.34792
0.5	0.37464	0.37233	0.37175	0.37161	0.37158
0.6	0.36219	0.35982	0.35922	0.35908	0.35905
0.7	0.31277	0.31061	0.31007	0.30993	0.30991
0.8	0.23002	0.22836	0.22794	0.22784	0.22782
0.9	0.12188	0.12098	0.12075	0.12070	0.12069
$\|e\|_1 \times 10^3$	7.48899	1.94141	0.46274	0.08129	
$L_2 \times 10^3$	2.20191	0.54050	0.12551	0.02178	
$L_\infty \times 10^3$	3.14694	0.77270	0.17997	0.03123	

Tablo 4.42: **SFY5:** $\nu = 1$, $\nu = 0.1$, $\nu = 0.01$; $h = 0.0125$, $k = 0.0001$ için Problem 1' in nümerik ve tam çözümleri

		$\nu = 1.0(k = 0.00001)$		$\nu = 0.1$		$\nu = 0.01$	
x	t	Nümerik	Tam	Nümerik	Tam	Nümerik	Tam
0.25	0.4	0.01358	0.01357	0.30892	0.30889	0.34196	0.34191
	0.6	0.00189	0.00189	0.24077	0.24074	0.26900	0.26896
	0.8	0.00026	0.00026	0.19570	0.19568	0.22151	0.22148
	1.0	0.00004	0.00004	0.16259	0.16256	0.18822	0.18819
	3.0	0.00000	0.00000	0.02722	0.02720	0.07512	0.07511
0.50	0.4	0.01924	0.01924	0.56970	0.56963	0.66079	0.66071
	0.6	0.00267	0.00267	0.44728	0.44721	0.52949	0.52942
	0.8	0.00037	0.00037	0.35932	0.35924	0.43920	0.43914
	1.0	0.00005	0.00005	0.29200	0.29192	0.37447	0.37442
	3.0	0.00000	0.00000	0.04023	0.04020	0.15019	0.15018
0.75	0.4	0.01364	0.01363	0.62562	0.62544	0.91040	0.91026
	0.6	0.00189	0.00189	0.48743	0.48721	0.76735	0.76724
	0.8	0.00026	0.00026	0.37412	0.37392	0.64748	0.64740
	1.0	0.00004	0.00004	0.28764	0.28747	0.55612	0.55605
	3.0	0.00000	0.00000	0.02979	0.02977	0.22486	0.22481

Tablo 4.43: **SFY5:** $h = 0.0125$, $k = 0.00001$; $\nu = 0.005$, $\nu = 0.001$, $\nu = 0.0005$ ve $\nu = 0.0001$ için Problem 1' in nümerik sonuçların karşılaştırılması

		[40]				$SFY5$			
x	t	$\nu = 0.005$	$\nu = 0.001$	$\nu = 0.0005$	$\nu = 0.0001$	$\nu = 0.005$	$\nu = 0.001$	$\nu = 0.0005$	$\nu = 0.0001$
0.25	0.01	0.69111	0.69137	0.69141	0.69143	0.69126	0.69152	0.69155	0.69158
	0.05	0.63220	0.63319	0.63331	0.63341	0.63215	0.63314	0.63327	0.63337
	0.10	0.56820	0.56962	0.56979	0.56994	0.56813	0.56955	0.56973	0.56987
	0.15	0.51409	0.51565	0.51584	0.51600	0.51413	0.51568	0.51587	0.51603
	0.25	0.42986	0.43133	0.43152	0.43166	0.42988	0.43134	0.43153	0.43167
0.50	0.01	0.99900	0.99940	0.99945	0.99949	0.99902	0.99941	0.99946	0.99950
	0.05	0.98569	0.98755	0.98778	0.98797	0.98567	0.98753	0.98776	0.98795
	0.10	0.95145	0.95461	0.95500	0.95532	0.95140	0.95455	0.95495	0.95526
	0.15	0.90488	0.90865	0.90912	0.90950	0.90489	0.90866	0.90913	0.90951
	0.25	0.80158	0.80531	0.80578	0.80615	0.80156	0.80530	0.80577	0.80614
0.75	0.01	0.72275	0.72305	0.72309	0.72312	0.72261	0.72291	0.72294	0.72297
	0.05	0.78663	0.78853	0.78877	0.78896	0.78671	0.78861	0.78885	0.78904
	0.10	0.86589	0.87068	0.87128	0.87176	0.86605	0.87083	0.87143	0.87191
	0.15	0.93250	0.94035	0.94134	0.94212	0.93256	0.94041	0.94139	0.94218
	0.25	0.98773	0.99776	0.99900	0.99999	0.98773	0.99775	0.99899	0.99998

Tablo 4.44: **SFY5:** $t = 0.1$, $\nu = 1$, $k = 0.00001$ için Problem 2' nin nümerik ve tam çözümleri

x	Nümerik Çözüm $h = 0.1$	$h = 0.05$	$h = 0.025$	$h = 0.0125$	Tam Çözüm
0.1	0.11366	0.11308	0.11294	0.11290	0.11289
0.2	0.21776	0.21663	0.21634	0.21627	0.21625
0.3	0.30316	0.30151	0.30109	0.30099	0.30097
0.4	0.36163	0.35955	0.35902	0.35889	0.35886
0.5	0.38657	0.38420	0.38360	0.38345	0.38342
0.6	0.37390	0.37146	0.37084	0.37069	0.37066
0.7	0.32303	0.32079	0.32023	0.32010	0.32007
0.8	0.23765	0.23593	0.23550	0.23539	0.23537
0.9	0.12596	0.12502	0.12479	0.12473	0.12472
$\|e\|_1 \times 10^3$	7.46643	1.94265	0.46364	0.08169	
$L_2 \times 10^3$	2.26395	0.55776	0.12966	0.02254	
$L_\infty \times 10^3$	3.23808	0.79747	0.18593	0.03232	

Tablo 4.45: **SFY5:** $\nu = 1$, $\nu = 0.1$, $\nu = 0.01$; $h = 0.0125$, $k = 0.0001$ için Problem 2' nin nümerik ve tam çözümleri

		$\nu = 1.0(k = 0.00001)$		$\nu = 0.1$		$\nu = 0.01$	
x	t	Nümerik	Tam	Nümerik	Tam	Nümerik	Tam
0.25	0.4	0.01401	0.01400	0.31755	0.31752	0.36231	0.36226
	0.6	0.00195	0.00195	0.24616	0.24614	0.28208	0.28204
	0.8	0.00027	0.00027	0.19958	0.19956	0.23049	0.23045
	1.0	0.00004	0.00004	0.16563	0.16560	0.19472	0.19469
	3.0	0.00000	0.00000	0.02777	0.02776	0.07614	0.07613
0.50	0.4	0.01986	0.01985	0.58459	0.58454	0.68373	0.68368
	0.6	0.00276	0.00276	0.45805	0.45798	0.54837	0.54832
	0.8	0.00038	0.00038	0.36748	0.36740	0.45377	0.45371
	1.0	0.00005	0.00005	0.29843	0.29834	0.38572	0.38568
	3.0	0.00000	0.00000	0.04109	0.04106	0.15219	0.15218
0.75	0.4	0.01407	0.01407	0.64581	0.64562	0.92057	0.92050
	0.6	0.00195	0.00195	0.50290	0.50268	0.78306	0.78299
	0.8	0.00027	0.00027	0.38554	0.38534	0.66278	0.66272
	1.0	0.00004	0.00004	0.29603	0.29586	0.56938	0.56932
	3.0	0.00000	0.00000	0.03046	0.03044	0.22779	0.22774

Tablo 4.46: **SFY5:** $h = 0.0125$, $k = 0.00001$; $\nu = 0.005$ ve $\nu = 0.001$ için Problem 2' nin nümerik sonuçların karşılaştırılması

		[30]		[40]		$SFY5$	
x	t	$\nu = 0.005$	$\nu = 0.001$	$\nu = 0.005$	$\nu = 0.001$	$\nu = 0.005$	$\nu = 0.001$
0.25	0.05	0.67590	0.67711	0.67609	0.67738	0.67603	0.67732
	0.15	0.55176	0.55315	0.55250	0.55496	0.55250	0.55495
	0.25	0.43326	0.44450	0.46081	0.46349	0.46077	0.46345
0.50	0.05	0.98812	0.98957	0.98829	0.98983	0.98828	0.98981
	0.15	0.91808	0.92073	0.91887	0.92241	0.91889	0.92242
	0.25	0.81389	0.80709	0.82346	0.82748	0.82344	0.82746
0.75	0.05	0.82318	0.82497	0.82332	0.82522	0.82338	0.82529
	0.15	0.94539	0.95063	0.94646	0.95282	0.94649	0.95283
	0.25	0.97717	0.97296	0.99002	0.99815	0.99002	0.99814

Tablo 4.47: **SFY5:** $h = 0.0125$, $k = 0.00001$; $\nu = 0.0005$ ve $\nu = 0.0001$ için Problem 2' nin nümerik sonuçların karşılaştırılması

		[40]		$SFY5$	
x	t	$\nu = 0.0005$	$\nu = 0.0001$	$\nu = 0.0005$	$\nu = 0.0001$
0.25	0.05	0.67754	0.67767	0.67749	0.67761
	0.15	0.55526	0.55551	0.55526	0.55551
	0.25	0.46382	0.46409	0.46378	0.46405
0.50	0.05	0.99002	0.99017	0.99001	0.99016
	0.15	0.92285	0.92320	0.92287	0.92322
	0.25	0.82798	0.82838	0.82796	0.82836
0.75	0.05	0.82456	0.82565	0.82553	0.82572
	0.15	0.95361	0.95424	0.95363	0.95426
	0.25	0.99915	0.99996	0.99915	0.99995

Tablo 4.48: **SFY5:** $\nu = 0.5$, $h = 0.05$, $k = 0.0001$ ve $[a,b] = [0,8]$ için Problem 3' ün nümerik ve tam çözümleri

	$t = 1.5$		$t = 3.0$		$t = 4.5$	
x	Nümerik	Tam	Nümerik	Tam	Nümerik	Tam
0.5	0.15329	0.15327	0.06427	0.06426	0.03799	0.03799
1.0	0.26580	0.26577	0.11882	0.11880	0.07188	0.07187
1.5	0.30415	0.30412	0.15510	0.15509	0.09794	0.09793
2.0	0.26141	0.26142	0.16763	0.16762	0.11339	0.11339
2.5	0.17213	0.17217	0.15629	0.15630	0.11698	0.11698
3.0	0.08804	0.08807	0.12736	0.12738	0.10948	0.10949
3.5	0.03581	0.03582	0.09130	0.09132	0.09367	0.09369
4.0	0.01186	0.01186	0.05796	0.05797	0.07359	0.07361
4.5	0.00325	0.00325	0.03283	0.03284	0.05329	0.05330
5.0	0.00074	0.00074	0.01673	0.01674	0.03570	0.03572
5.5	0.00014	0.00014	0.00772	0.00772	0.02223	0.02224
6.0	0.00002	0.00002	0.00324	0.00324	0.01290	0.01292
6.5	0.00000	0.00000	0.00124	0.00124	0.00697	0.00702
7.0	0.00000	0.00000	0.00043	0.00043	0.00345	0.00358
7.5	0.00000	0.00000	0.00013	0.00014	0.00139	0.00172

4.7 Sonlu Fark Yaklaşımı 6 (SFY6)

(4.1) Burgers denkleminde UU_x non-lineer teriminin yerine

$$UU_x \cong U_i^{j+1}\left(\frac{U_{i+1}^j - U_{i-1}^j}{2h}\right) + U_i^j\left(\frac{U_{i+1}^{j+1} - U_{i-1}^{j+1}}{2h}\right) - U_i^j\left(\frac{U_{i+1}^j - U_{i-1}^j}{2h}\right)$$

sonlu fark yaklaşımı[19] U_{xx} türevinin yerine

$$U_{xx} \cong \frac{U_{i-1}^{j+1} - 2U_i^{j+1} + U_{i+1}^{j+1}}{h^2}$$

kapalı sonlu fark yaklaşımı yazılır ve gerekli düzenlemeler yapılırsa

$$-\left(\frac{hU_i^j + 2\nu}{2h^2}\right)U_{i-1}^{j+1} + \left(\frac{2h^2 + kh(U_{i+1}^j - U_{i-1}^j) + 4\nu k}{2kh^2}\right)U_i^{j+1} + \left(\frac{hU_i^j - 2\nu}{2h^2}\right)U_{i+1}^{j+1} = U_i^j\left(\frac{2h + k(U_{i+1}^j - U_{i-1}^j)}{2kh}\right) \quad , \quad i = 1(1)N-1, \quad j = 0(1)J$$

kapalı sonlu fark yaklaşımı bulunur.

Nümerik Sonuçlar

Problem 1, Problem 2 ve Problem 3' ün SFY6 ile elde edilen nümerik çözümleri Tablo 4.49-4.56 da verildi.

Tablo 4.49 da Problem 1' in $t = 0.1$, $\nu = 1$, $k = 0.00001$ alınarak mesh uzunluğu h nin değişik değerleri için nümerik ve tam çözümü karşılaştırılırken Tablo 4.50 de $h = 0.0125$, $k = 0.0001$ alınarak ν nün 1, 0.1, 0.001 değerleri için çeşitli t zamanlarında nümerik çözümler analitik çözümle karşılaştırıldı. Tablolardan nümerik çözümlerin tam çözümle uyum içerisinde olduğu ve mesh uzunluğu h nin küçük seçilmesi durumunda nümerik çözümlerin analitik çözüme oldukça yaklaştığı görülmektedir.

Tablo 4.51 de Problem 1' in $h = 0.0125$, $k = 0.00001$ alınarak ν nün 0.005, 0.001, 0.0005, 0.0001 değerleri için SFY6 ile elde edilen nümerik sonuçlar ile önceki araştırmacıların verdikleri sonuçlar karşılaştırıldı. Tablodan sonuçların uyum içerisinde olduğu açıkca görülmektedir.

Tablo 4.52 ve Tablo 4.53 de Problem 2' nin mesh uzunluğu h ve kinematik viskosite ν nün değişik değerleri için farklı t zamanlarında elde edilen nümerik çözümler ile tam çözüm karşılaştırıldı. Tablolardan nümerik ve tam değerlerin uyumlu olduğu kolayca görülmektedir.

Tablo 4.54 ve Tablo 4.55 de Problem 2 için ν nün değişik değerleri için çeşitli zamanlarda elde edilen nümerik çözümler ile önceki araştırmacıların elde ettikleri sonuçlar karşılaştırıldı. Tablolardan SFY6 ile elde edilen sonuçların önceki araştırmacıların verdiği sonuçlar ile yeterince iyi olduğu görülmektedir.

Tablo 4.56 da Problem 3' ün $\nu = 0.5$, $h = 0.05$, $k = 0.0001$ değerleri için SFY6 ile edilen nümerik sonuçlar ile tam çözüm karşılaştırıldı. Tablodan nümerik sonuçların analitik çözüme yakın olduğu kolayca görülmektedir.

Tablo 4.49: **SFY6:** $t = 0.1$, $\nu = 1$, $k = 0.00001$ için Problem 1' in nümerik ve tam çözümleri

	Nümerik Çözüm				Tam
x	$h = 0.1$	$h = 0.05$	$h = 0.025$	$h = 0.0125$	Çözüm
0.1	0.11025	0.10969	0.10955	0.10951	0.10954
0.2	0.21121	0.21009	0.20981	0.20973	0.20979
0.3	0.29395	0.29233	0.29193	0.29181	0.29190
0.4	0.35052	0.34848	0.34797	0.34782	0.34792
0.5	0.37453	0.37221	0.37163	0.37147	0.37158
0.6	0.36208	0.35970	0.35911	0.35895	0.35905
0.7	0.31267	0.31051	0.30997	0.30982	0.30991
0.8	0.22994	0.22828	0.22787	0.22775	0.22782
0.9	0.12185	0.12094	0.12071	0.12065	0.12069
$\|e\|_1 \times 10^3$	7.20448	1.64187	0.14658	0.27744	
$L_2 \times 10^3$	2.11904	0.45789	0.04116	0.07394	
$L_\infty \times 10^3$	3.03278	0.65838	0.06323	0.10466	

Tablo 4.50: **SFY6:** $\nu = 1$, $\nu = 0.1$, $\nu = 0.01$; $h = 0.0125$, $k = 0.0001$ için Problem 1' in nümerik ve tam çözümleri

		$\nu = 1.0$		$\nu = 0.1$		$\nu = 0.01$	
x	t	Nümerik	Tam	Nümerik	Tam	Nümerik	Tam
0.25	0.4	0.01360	0.01357	0.30890	0.30889	0.34193	0.34191
	0.6	0.00189	0.00189	0.24073	0.24074	0.26896	0.26896
	0.8	0.00026	0.00026	0.19566	0.19568	0.22147	0.22148
	1.0	0.00004	0.00004	0.16255	0.16256	0.18817	0.18819
	3.0	0.00000	0.00000	0.02719	0.02720	0.07507	0.07511
0.50	0.4	0.01928	0.01924	0.56965	0.56963	0.66072	0.66071
	0.6	0.00268	0.00267	0.44721	0.44721	0.52940	0.52942
	0.8	0.00037	0.00037	0.35924	0.35924	0.43910	0.43914
	1.0	0.00005	0.00005	0.29191	0.29192	0.37437	0.37442
	3.0	0.00000	0.00000	0.04019	0.04020	0.15009	0.15018
0.75	0.4	0.01366	0.01363	0.62553	0.62544	0.91028	0.91026
	0.6	0.00190	0.00189	0.48734	0.48721	0.76721	0.76724
	0.8	0.00026	0.00026	0.37403	0.37392	0.64734	0.64740
	1.0	0.00004	0.00004	0.28755	0.28747	0.55597	0.55605
	3.0	0.00000	0.00000	0.02976	0.02977	0.22470	0.22481

Tablo 4.51: **SFY6:** $h = 0.0125$, $k = 0.00001$; $\nu = 0.005$, $\nu = 0.001$, $\nu = 0.0005$ ve $\nu = 0.0001$ için Problem 1' in nümerik sonuçların karşılaştırılması

		[40]				$SFY6$			
x	t	$\nu = 0.005$	$\nu = 0.001$	$\nu = 0.0005$	$\nu = 0.0001$	$\nu = 0.005$	$\nu = 0.001$	$\nu = 0.0005$	$\nu = 0.0001$
0.25	0.01	0.69111	0.69137	0.69141	0.69143	0.69123	0.69149	0.69152	0.69155
	0.05	0.63220	0.63319	0.63331	0.63341	0.63203	0.63302	0.63315	0.63325
	0.10	0.56820	0.56962	0.56979	0.56994	0.56792	0.56935	0.56952	0.56967
	0.15	0.51409	0.51565	0.51584	0.51600	0.51386	0.51541	0.51560	0.51576
	0.25	0.42986	0.43133	0.43152	0.43166	0.42953	0.43099	0.43118	0.43132
0.50	0.01	0.99900	0.99940	0.99945	0.99949	0.99897	0.99937	0.99942	0.99946
	0.05	0.98569	0.98755	0.98778	0.98797	0.98547	0.98733	0.98756	0.98775
	0.10	0.95145	0.95461	0.95500	0.95532	0.95102	0.95418	0.95457	0.95489
	0.15	0.90488	0.90865	0.90912	0.90950	0.90438	0.90815	0.90862	0.90900
	0.25	0.80158	0.80531	0.80578	0.80615	0.80087	0.80461	0.80507	0.80545
0.75	0.01	0.72275	0.72305	0.72309	0.72312	0.72258	0.72288	0.72291	0.72294
	0.05	0.78663	0.78853	0.78877	0.78896	0.78654	0.78844	0.78868	0.78887
	0.10	0.86589	0.87068	0.87128	0.87176	0.86566	0.87044	0.87104	0.87152
	0.15	0.93250	0.94035	0.94134	0.94212	0.93194	0.93978	0.94076	0.94154
	0.25	0.98773	0.99776	0.99900	0.99999	0.98671	0.99673	0.99797	0.99895

Tablo 4.52: **SFY6:** $t = 0.1$, $\nu = 1$, $k = 0.00001$ için Problem 2' nin nümerik ve tam çözümleri

x	Nümerik Çözüm $h = 0.1$	$h = 0.05$	$h = 0.025$	$h = 0.0125$	Tam Çözüm
0.1	0.11363	0.11305	0.11290	0.11286	0.11289
0.2	0.21770	0.21656	0.21627	0.21619	0.21625
0.3	0.30307	0.30141	0.30100	0.30088	0.30097
0.4	0.36152	0.35943	0.35891	0.35876	0.35886
0.5	0.38645	0.38408	0.38348	0.38331	0.38342
0.6	0.37378	0.37134	0.37072	0.37055	0.37066
0.7	0.32292	0.32069	0.32013	0.31998	0.32007
0.8	0.23758	0.23586	0.23542	0.23531	0.23537
0.9	0.12592	0.12498	0.12475	0.12468	0.12472
$\|e\|_1 \times 10^3$	7.18199	1.64313	0.14745	0.27710	
$L_2 \times 10^3$	2.17846	0.47252	0.04266	0.07627	
$L_\infty \times 10^3$	3.12013	0.67989	0.06573	0.10803	

Tablo 4.53: **SFY6:** $\nu = 1$, $\nu = 0.1$, $\nu = 0.01$; $h = 0.0125$, $k = 0.0001$ için Problem 2' nin nümerik ve tam çözümleri

		$\nu = 1.0$		$\nu = 0.1$		$\nu = 0.01$	
x	t	Nümerik	Tam	Nümerik	Tam	Nümerik	Tam
0.25	0.4	0.01403	0.01400	0.31753	0.31752	0.36227	0.36226
	0.6	0.00196	0.00195	0.24613	0.24614	0.28204	0.28204
	0.8	0.00027	0.00027	0.19954	0.19956	0.23044	0.23045
	1.0	0.00004	0.00004	0.16558	0.16560	0.19467	0.19469
	3.0	0.00000	0.00000	0.02775	0.02776	0.07609	0.07613
0.50	0.4	0.01989	0.01985	0.58454	0.58454	0.68365	0.68368
	0.6	0.00277	0.00276	0.45798	0.45798	0.54828	0.54832
	0.8	0.00038	0.00038	0.36740	0.36740	0.45367	0.45371
	1.0	0.00005	0.00005	0.29834	0.29834	0.38562	0.38568
	3.0	0.00000	0.00000	0.04105	0.04106	0.15209	0.15218
0.75	0.4	0.01410	0.01407	0.64571	0.64562	0.92045	0.92050
	0.6	0.00196	0.00195	0.50281	0.50268	0.78292	0.78299
	0.8	0.00027	0.00027	0.38545	0.38534	0.66264	0.66272
	1.0	0.00004	0.00004	0.29594	0.29586	0.56923	0.56932
	3.0	0.00000	0.00000	0.03043	0.03044	0.22764	0.22774

Tablo 4.54: **SFY6:** $h = 0.0125$, $k = 0.00001$; $\nu = 0.005$ ve $\nu = 0.001$ için Problem 2' nin nümerik sonuçların karşılaştırılması

		[30]		[40]		$SFY6$	
x	t	$\nu = 0.005$	$\nu = 0.001$	$\nu = 0.005$	$\nu = 0.001$	$\nu = 0.005$	$\nu = 0.001$
0.25	0.05	0.67590	0.67711	0.67609	0.67738	0.67590	0.67719
	0.15	0.55176	0.55315	0.55250	0.55496	0.55221	0.55466
	0.25	0.43326	0.44450	0.46081	0.46349	0.46040	0.46307
0.50	0.05	0.98812	0.98957	0.98829	0.98983	0.98808	0.98961
	0.15	0.91808	0.92073	0.91887	0.92241	0.91836	0.92190
	0.25	0.81389	0.80709	0.82346	0.82748	0.82272	0.82674
0.75	0.05	0.82318	0.82497	0.82332	0.82522	0.82321	0.82511
	0.15	0.94539	0.95063	0.94646	0.95282	0.94586	0.95221
	0.25	0.97717	0.97296	0.99002	0.99815	0.98900	0.99712

Tablo 4.55: **SFY6:** $h = 0.0125$, $k = 0.00001$; $\nu = 0.0005$ ve $\nu = 0.0001$ için Problem 2' nin nümerik sonuçların karşılaştırılması

		[40]		$SFY6$	
x	t	$\nu = 0.0005$	$\nu = 0.0001$	$\nu = 0.0005$	$\nu = 0.0001$
0.25	0.05	0.67754	0.67767	0.67735	0.67748
	0.15	0.55526	0.55551	0.55497	0.55521
	0.25	0.46382	0.46409	0.46341	0.46367
0.50	0.05	0.99002	0.99017	0.98981	0.98996
	0.15	0.92285	0.92320	0.92234	0.92269
	0.25	0.82798	0.82838	0.82724	0.82764
0.75	0.05	0.82456	0.82565	0.82535	0.82554
	0.15	0.95361	0.95424	0.95300	0.95363
	0.25	0.99915	0.99996	0.99812	0.99892

Tablo 4.56: **SFY6:** $\nu = 0.5$, $h = 0.05$, $k = 0.0001$ ve $[a, b] = [0, 8]$ için Problem 3' ün nümerik ve tam çözümleri

	$t = 1.5$		$t = 3.0$		$t = 4.5$	
x	Nümerik	Tam	Nümerik	Tam	Nümerik	Tam
0.5	0.15330	0.15327	0.06428	0.06426	0.03800	0.03799
1.0	0.26581	0.26577	0.11883	0.11880	0.07188	0.07187
1.5	0.30415	0.30412	0.15511	0.15509	0.09794	0.09793
2.0	0.26140	0.26142	0.16763	0.16762	0.11339	0.11339
2.5	0.17212	0.17217	0.15629	0.15630	0.11699	0.11698
3.0	0.08804	0.08807	0.12736	0.12738	0.10948	0.10949
3.5	0.03581	0.03582	0.09130	0.09132	0.09367	0.09369
4.0	0.01186	0.01186	0.05795	0.05797	0.07359	0.07361
4.5	0.00325	0.00325	0.03283	0.03284	0.05328	0.05330
5.0	0.00074	0.00074	0.01673	0.01674	0.03570	0.03572
5.5	0.00014	0.00014	0.00772	0.00772	0.02223	0.02224
6.0	0.00002	0.00002	0.00324	0.00324	0.01290	0.01292
6.5	0.00000	0.00000	0.00124	0.00124	0.00697	0.00702
7.0	0.00000	0.00000	0.00043	0.00043	0.00345	0.00358
7.5	0.00000	0.00000	0.00013	0.00014	0.00139	0.00172

4.8 Sonlu Fark Yaklaşımı 7 (SFY7)

(4.1) Burgers denkleminde UU_x non-lineer teriminin yerine

$$UU_x \cong U_i^{j+1}(\frac{U_{i+1}^j - U_{i-1}^j}{2h}) + U_i^j(\frac{U_{i+1}^{j+1} - U_{i-1}^{j+1}}{2h}) - U_i^j(\frac{U_{i+1}^j - U_{i-1}^j}{2h})$$

sonlu fark yaklaşımı[19] U_{xx} türevinin yerine

$$U_{xx} \cong \frac{1}{2}[\frac{U_{i-1}^{j+1} - 2U_i^{j+1} + U_{i+1}^{j+1}}{h^2} + \frac{U_{i-1}^j - 2U_i^j + U_{i+1}^j}{h^2}]$$

Crank-Nicolson sonlu fark yaklaşımı yazılır ve gerekli düzenlemeler yapılırsa

$$-(\frac{hU_i^j + \nu}{2h^2})U_{i-1}^{j+1} + (\frac{2h^2 + kh(U_{i+1}^j - U_{i-1}^j) + 2\nu k}{2kh^2})U_i^{j+1} + (\frac{hU_i^j - \nu}{2h^2})U_{i+1}^{j+1} =$$
$$U_i^j(\frac{2h + k(U_{i+1}^j - U_{i-1}^j)}{2kh}) + \frac{\nu}{2h^2}(U_{i-1}^j - 2U_i^j + U_{i+1}^j) \quad , \quad i = 1(1)N-1, \quad j = 0(1)J$$

kapalı sonlu fark yaklaşımı bulunur.

Nümerik Sonuçlar

Problem 1, Problem 2 ve Problem 3' ün SFY7 ile elde edilen nümerik çözümleri Tablo 4.57-4.64 de verildi.

$\nu = 1$, $k = 0.00001$ değerleri ve değişik mesh uzunluğu h için Problem 1' in SFY7 ile elde edilen $t = 0.1$ daki nümerik çözümleri ile problemin tam çözümünün karşılaştırılması Tablo 4.57 de verildi. Tablodan h nin yeterince küçük seçilmesi durumunda elde edilen nümerik çözümlerin analitik çözüme yakın olacağı görülmektedir.

$h = 0.0125$, $k = 0.0001$ değerleri ve kinematik viskosite ν nün 1, 0.1, 0.001 değerleri için Problem 1' in çeşitli t zamanlarında SFY7 ile elde edilen nümerik çözümler ile analitik çözümün karşılaştırılması Tablo 4.58 de verildi. Tablodan, elde edilen sonuçların analitik çözüme yakın olduğu görülmektedir.

$h = 0.0125$, $k = 0.00001$ alınarak ν nün 0.005, 0.001, 0.0005, 0.0001 değerleri için Problem 1' in SFY7 ile elde edilen nümerik sonuçlar ile önceki araştırmacıların verdikleri sonuçların karşılaştırılması Tablo 4.59 da verildi. Tablodan elde edilen sonuçların önceki araştırmacıların verdikleri sonuçlar ile uyum içerisinde olduğu görülmektedir.

Mesh uzunluğu h ve kinematik viskosite ν nün değişik değerleri için Problem 2' nin farklı t zamanlarında SFY7 ile elde edilen nümerik çözümleri ile tam çözümü Tablo 4.60 ve Tablo 4.61 de karşılaştırıldı. Tablolardan elde edilen sonuçların tam çözümle yeterince uyumlu olduğu görülmektedir.

ν =0.005, 0.001, 0.0005, 0.0001 değerleri için Problem 2' nin çeşitli zamanlarda SFY7 ile elde edilen nümerik çözümler ile önceki araştırmacıların elde ettikleri sonuçlar Tablo 4.62 ve Tablo 4.63 de karşılaştırıldı. Tablolardan SFY7 ile elde edilen sonuçların yeterince iyi olduğu görülmektedir.

Tablo 4.64 de Problem 3' ün $\nu = 0.5$, $h = 0.05$, $k = 0.0001$ değerleri için SFY7 ile edilen nümerik sonuçlar ile tam çözüm karşılaştırıldı. Tablodan, nümerik sonuçların analitik çözüme oldukça yakın olduğu görülmektedir.

Tablo 4.57: **SFY7:** $t = 0.1$, $\nu = 1$, $k = 0.00001$ için Problem 1' in nümerik ve tam çözümleri

x	Nümerik Çözüm $h = 0.1$	$h = 0.05$	$h = 0.025$	$h = 0.0125$	Tam Çözüm
0.1	0.11025	0.10968	0.10954	0.10950	0.10954
0.2	0.21120	0.21008	0.20980	0.20973	0.20979
0.3	0.29394	0.29232	0.29191	0.29181	0.29190
0.4	0.35050	0.34846	0.34795	0.34782	0.34792
0.5	0.37451	0.37220	0.37162	0.37146	0.37158
0.6	0.36206	0.35969	0.35909	0.35894	0.35905
0.7	0.31266	0.31049	0.30995	0.30981	0.30991
0.8	0.22993	0.22827	0.22786	0.22775	0.22782
0.9	0.12184	0.12094	0.12071	0.12065	0.12069
$\|e\|_1 \times 10^3$	7.16116	1.59699	0.10521	0.30001	
$L_2 \times 10^3$	2.10639	0.44549	0.03038	0.07993	
$L_\infty \times 10^3$	3.01508	0.64101	0.04832	0.11311	

Tablo 4.58: **SFY7:** $\nu = 1$, $\nu = 0.1$, $\nu = 0.01$; $h = 0.0125$, $k = 0.0001$ için Problem 1' in nümerik ve tam çözümleri

		$\nu = 1.0$		$\nu = 0.1$		$\nu = 0.01$	
x	t	Nümerik	Tam	Nümerik	Tam	Nümerik	Tam
0.25	0.4	0.01358	0.01357	0.30889	0.30889	0.34192	0.34191
	0.6	0.00189	0.00189	0.24073	0.24074	0.26896	0.26896
	0.8	0.00026	0.00026	0.19566	0.19568	0.22147	0.22148
	1.0	0.00004	0.00004	0.16255	0.16256	0.18817	0.18819
	3.0	0.00000	0.00000	0.02719	0.02720	0.07507	0.07511
0.50	0.4	0.01924	0.01924	0.56963	0.56963	0.66071	0.66071
	0.6	0.00267	0.00267	0.44720	0.44721	0.52940	0.52942
	0.8	0.00037	0.00037	0.35923	0.35924	0.43910	0.43914
	1.0	0.00005	0.00005	0.29191	0.29192	0.37437	0.37442
	3.0	0.00000	0.00000	0.04018	0.04020	0.15009	0.15018
0.75	0.4	0.01363	0.01363	0.62552	0.62544	0.91027	0.91026
	0.6	0.00189	0.00189	0.48733	0.48721	0.76721	0.76724
	0.8	0.00026	0.00026	0.37401	0.37392	0.64734	0.64740
	1.0	0.00004	0.00004	0.28754	0.28747	0.55597	0.55605
	3.0	0.00000	0.00000	0.02976	0.02977	0.22471	0.22481

Tablo 4.59: **SFY7:** $h = 0.0125$, $k = 0.00001$; $\nu = 0.005$, $\nu = 0.001$, $\nu = 0.0005$ ve $\nu = 0.0001$ için Problem 1' in nümerik sonuçların karşılaştırılması

		[40]				$SFY7$			
x	t	$\nu = 0.005$	$\nu = 0.001$	$\nu = 0.0005$	$\nu = 0.0001$	$\nu = 0.005$	$\nu = 0.001$	$\nu = 0.0005$	$\nu = 0.0001$
0.25	0.01	0.69111	0.69137	0.69141	0.69143	0.69123	0.69149	0.69152	0.69155
	0.05	0.63220	0.63319	0.63331	0.63341	0.63203	0.63302	0.63315	0.63325
	0.10	0.56820	0.56962	0.56979	0.56994	0.56792	0.56935	0.56952	0.56967
	0.15	0.51409	0.51565	0.51584	0.51600	0.51386	0.51541	0.51560	0.51576
	0.25	0.42986	0.43133	0.43152	0.43166	0.42953	0.43099	0.43118	0.43132
0.50	0.01	0.99900	0.99940	0.99945	0.99949	0.99897	0.99937	0.99942	0.99946
	0.05	0.98569	0.98755	0.98778	0.98797	0.98547	0.98733	0.98756	0.98775
	0.10	0.95145	0.95461	0.95500	0.95532	0.95102	0.95418	0.95457	0.95489
	0.15	0.90488	0.90865	0.90912	0.90950	0.90438	0.90815	0.90862	0.90900
	0.25	0.80158	0.80531	0.80578	0.80615	0.80087	0.80461	0.80507	0.80545
0.75	0.01	0.72275	0.72305	0.72309	0.72312	0.72258	0.72288	0.72291	0.72294
	0.05	0.78663	0.78853	0.78877	0.78896	0.78654	0.78844	0.78868	0.78887
	0.10	0.86589	0.87068	0.87128	0.87176	0.86566	0.87044	0.87104	0.87152
	0.15	0.93250	0.94035	0.94134	0.94212	0.93194	0.93978	0.94076	0.94154
	0.25	0.98773	0.99776	0.99900	0.99999	0.98671	0.99673	0.99797	0.99895

Tablo 4.60: **SFY7:** $t = 0.1$, $\nu = 1$, $k = 0.00001$ için Problem 2' nin nümerik ve tam çözümleri

x	Nümerik Çözüm $h = 0.1$	$h = 0.05$	$h = 0.025$	$h = 0.0125$	Tam Çözüm
0.1	0.11362	0.11304	0.11290	0.11286	0.11289
0.2	0.21769	0.21655	0.21626	0.21619	0.21625
0.3	0.30305	0.30140	0.30098	0.30087	0.30097
0.4	0.36150	0.35942	0.35889	0.35875	0.35886
0.5	0.38643	0.38406	0.38346	0.38331	0.38342
0.6	0.37376	0.37132	0.37071	0.37055	0.37066
0.7	0.32291	0.32068	0.32012	0.31997	0.32007
0.8	0.23756	0.23584	0.23541	0.23530	0.23537
0.9	0.12592	0.12498	0.12474	0.12468	0.12472
$\|e\|_1 \times 10^3$	7.13865	1.59826	0.10611	0.29962	
$L_2 \times 10^3$	2.16541	0.45974	0.03158	0.08244	
$L_\infty \times 10^3$	3.10190	0.66199	0.05047	0.11672	

Tablo 4.61: **SFY7:** $\nu = 1$, $\nu = 0.1$, $\nu = 0.01$; $h = 0.0125$, $k = 0.0001$ için Problem 2' nin nümerik ve tam çözümleri

		$\nu = 1.0$		$\nu = 0.1$		$\nu = 0.01$	
x	t	Nümerik	Tam	Nümerik	Tam	Nümerik	Tam
0.25	0.4	0.01401	0.01400	0.31752	0.31752	0.36227	0.36226
	0.6	0.00195	0.00195	0.24612	0.24614	0.28203	0.28204
	0.8	0.00027	0.00027	0.19954	0.19956	0.23044	0.23045
	1.0	0.00004	0.00004	0.16558	0.16560	0.19467	0.19469
	3.0	0.00000	0.00000	0.02774	0.02776	0.07609	0.07613
0.50	0.4	0.01985	0.01985	0.58453	0.58454	0.68365	0.68368
	0.6	0.00276	0.00276	0.45797	0.45798	0.54828	0.54832
	0.8	0.00038	0.00038	0.36739	0.36740	0.45367	0.45371
	1.0	0.00005	0.00005	0.29833	0.29834	0.38562	0.38568
	3.0	0.00000	0.00000	0.04104	0.04106	0.15209	0.15218
0.75	0.4	0.01407	0.01407	0.64571	0.64562	0.92044	0.92050
	0.6	0.00195	0.00195	0.50279	0.50268	0.78292	0.78299
	0.8	0.00027	0.00027	0.38543	0.38534	0.66264	0.66272
	1.0	0.00004	0.00004	0.29592	0.29586	0.56923	0.56932
	3.0	0.00000	0.00000	0.03042	0.03044	0.22764	0.22774

Tablo 4.62: **SFY7:** $h = 0.0125$, $k = 0.00001$; $\nu = 0.005$ ve $\nu = 0.001$ için Problem 2' nin nümerik sonuçların karşılaştırılması

		[30]		[40]		$SFY7$	
x	t	$\nu = 0.005$	$\nu = 0.001$	$\nu = 0.005$	$\nu = 0.001$	$\nu = 0.005$	$\nu = 0.001$
0.25	0.05	0.67590	0.67711	0.67609	0.67738	0.67590	0.67719
	0.15	0.55176	0.55315	0.55250	0.55496	0.55221	0.55466
	0.25	0.43326	0.44450	0.46081	0.46349	0.46040	0.46307
0.50	0.05	0.98812	0.98957	0.98829	0.98983	0.98808	0.98961
	0.15	0.91808	0.92073	0.91887	0.92241	0.91836	0.92190
	0.25	0.81389	0.80709	0.82346	0.82748	0.82272	0.82674
0.75	0.05	0.82318	0.82497	0.82332	0.82522	0.82321	0.82511
	0.15	0.94539	0.95063	0.94646	0.95282	0.94586	0.95221
	0.25	0.97717	0.97296	0.99002	0.99815	0.98900	0.99712

Tablo 4.63: **SFY7:** $h = 0.0125$, $k = 0.00001$; $\nu = 0.0005$ ve $\nu = 0.0001$ için Problem 2' nin nümerik sonuçların karşılaştırılması

		[40]		$SFY7$	
x	t	$\nu = 0.0005$	$\nu = 0.0001$	$\nu = 0.0005$	$\nu = 0.0001$
0.25	0.05	0.67754	0.67767	0.67735	0.67748
	0.15	0.55526	0.55551	0.55497	0.55521
	0.25	0.46382	0.46409	0.46341	0.46367
0.50	0.05	0.99002	0.99017	0.98981	0.98996
	0.15	0.92285	0.92320	0.92234	0.92269
	0.25	0.82798	0.82838	0.82724	0.82764
0.75	0.05	0.82456	0.82565	0.82535	0.82554
	0.15	0.95361	0.95424	0.95300	0.95363
	0.25	0.99915	0.99996	0.99812	0.99892

Tablo 4.64: **SFY7:** $\nu = 0.5$, $h = 0.05$, $k = 0.0001$ ve $[a, b] = [0, 8]$ için Problem 3' ün nümerik ve tam çözümleri

	$t = 1.5$		$t = 3.0$		$t = 4.5$	
x	Nümerik	Tam	Nümerik	Tam	Nümerik	Tam
0.5	0.15330	0.15327	0.06427	0.06426	0.03799	0.03799
1.0	0.26581	0.26577	0.11882	0.11880	0.07188	0.07187
1.5	0.30415	0.30412	0.15511	0.15509	0.09794	0.09793
2.0	0.26140	0.26142	0.16763	0.16762	0.11339	0.11339
2.5	0.17213	0.17217	0.15629	0.15630	0.11698	0.11698
3.0	0.08804	0.08807	0.12736	0.12738	0.10948	0.10949
3.5	0.03581	0.03582	0.09130	0.09132	0.09367	0.09369
4.0	0.01186	0.01186	0.05795	0.05797	0.07359	0.07361
4.5	0.00325	0.00325	0.03283	0.03284	0.05328	0.05330
5.0	0.00074	0.00074	0.01673	0.01674	0.03570	0.03572
5.5	0.00014	0.00014	0.00772	0.00772	0.02223	0.02224
6.0	0.00002	0.00002	0.00324	0.00324	0.01290	0.01292
6.5	0.00000	0.00000	0.00124	0.00124	0.00697	0.00702
7.0	0.00000	0.00000	0.00043	0.00043	0.00345	0.00358
7.5	0.00000	0.00000	0.00013	0.00014	0.00139	0.00172

4.9 Sonlu Fark Yaklaşımı 8 (SFY8)

(4.1) Burgers denkleminde UU_x non-lineer teriminin yerine

$$UU_x \cong \left(\frac{U_i^j + U_{i+1}^j}{2}\right)\left(\frac{U_{i+1}^j - U_{i-1}^j}{2h}\right)$$

sonlu fark yaklaşımı U_{xx} türevinin yerine

$$U_{xx} \cong \frac{U_{i-1}^j - 2U_i^j + U_{i+1}^j}{h^2}$$

açık sonlu fark yaklaşımı yazılır ve gerekli düzenlemeler yapılırsa

$$U_i^{j+1} = U_i^j + \frac{\nu k}{h^2}(U_{i-1}^j - 2U_i^j + U_{i+1}^j) - \frac{k}{4h}(U_i^j + U_{i+1}^j)(U_{i+1}^j - U_{i-1}^j) \quad , \qquad i = 1(1)N-1, \quad j = 0(1)J$$

açık sonlu fark yaklaşımı bulunur.

Nümerik Sonuçlar

Problem 1, Problem 2 ve Problem 3' ün SFY8 ile elde edilen nümerik çözümleri Tablo 4.65-4.72 de verildi.

Tablo 4.65 ve 4.66 da Problem 1' in mesh uzunluğu h ve kinematik viskosite ν nün değişik değerleri için SFY8 ile elde edilen nümerik çözümleri ile problemin tam çözümü karşılaştırılırken, Tablo 4.67 da ν nün bazı küçük değerleri için elde edilen nümerik çözümleri ile önceki araştırmacıların elde ettikleri nümerik sonuçlar karşılaştırıldı.

Tablo 4.68 ve 4.69 da Problem 2' nin mesh uzunluğu h ve kinematik viskosite ν nün değişik değerleri için SFY8 ile elde edilen nümerik çözümleri ile problemin tam çözümü karşılaştırıldı. Tablo 4.70 de ν nün 0.005 ve 0.001 değerleri için elde edilen nümerik çözümler ve Tablo 4.71 de ν nün 0.0005 ve 0.0001 değerleri için elde edilen nümerik çözümler ile önceki araştırmacıların elde ettikleri nümerik sonuçlar karşılaştırıldı.

Tablo 4.72 de Problem 3' ün $h = 0.05$, $k = 0.0001$ ve $\nu = 0.5$ değerleri için SFY8 ile elde edilen $t = 1.5$, $t = 3$, ve $t = 4.5$ zamanlarındaki nümerik çözümleri ve problemin tam çözümü verildi.

Tablolara bakıldığında SFY8 ile elde edilen nümerik sonuçların tam çözüme yakın olduğu ve literatürde mevcut olan önceki araştırmacıların verdiği sonuçlarla uyum içerisinde olduğu açıkca görülmektedir.

Tablo 4.65: **SFY8:** $t = 0.1$, $\nu = 1$, $k = 0.00001$ için Problem 1' in nümerik ve tam çözümleri

x	Nümerik Çözüm $h = 0.1$	$h = 0.05$	$h = 0.025$	$h = 0.0125$	Tam Çözüm
0.1	0.10853	0.10879	0.10910	0.10930	0.10954
0.2	0.20836	0.20861	0.20908	0.20940	0.20979
0.3	0.29049	0.29053	0.29105	0.29143	0.29190
0.4	0.34671	0.34651	0.34702	0.34742	0.34792
0.5	0.37048	0.37016	0.37065	0.37106	0.37158
0.6	0.35784	0.35759	0.35811	0.35852	0.35905
0.7	0.30846	0.30844	0.30899	0.30940	0.30991
0.8	0.22627	0.22650	0.22702	0.22738	0.22782
0.9	0.11954	0.11982	0.12018	0.12041	0.12069
$\|e\|_1 \times 10^3$	5.16036	5.08647	3.20834	1.79108	
$L_2 \times 10^3$	1.22273	1.20865	0.75396	0.41836	
$L_\infty \times 10^3$	1.54710	1.46757	0.93520	0.52521	

Tablo 4.66: **SFY8:** $\nu = 1$, $\nu = 0.1$, $\nu = 0.01$; $h = 0.0125$, $k = 0.0001$ için Problem 1' in nümerik ve tam çözümleri

x	t	$\nu = 1.0 (k = 0.00001)$ Nümerik	Tam	$\nu = 0.1$ Nümerik	Tam	$\nu = 0.01$ Nümerik	Tam
0.25	0.4	0.01354	0.01357	0.30563	0.30889	0.33557	0.34191
	0.6	0.00188	0.00189	0.23790	0.24074	0.26256	0.26896
	0.8	0.00026	0.00026	0.19323	0.19568	0.21550	0.22148
	1.0	0.00004	0.00004	0.16044	0.16256	0.18273	0.18819
	3.0	0.00000	0.00000	0.02671	0.02720	0.07279	0.07511
0.50	0.4	0.01919	0.01924	0.56631	0.56963	0.65592	0.66071
	0.6	0.00267	0.00267	0.44354	0.44721	0.52350	0.52942
	0.8	0.00037	0.00037	0.35564	0.35924	0.43295	0.43914
	1.0	0.00005	0.00005	0.28855	0.29192	0.36833	0.37442
	3.0	0.00000	0.00000	0.03947	0.04020	0.14681	0.15018
0.75	0.4	0.01360	0.01363	0.62040	0.62544	0.90873	0.91026
	0.6	0.00189	0.00189	0.48172	0.48721	0.76316	0.76724
	0.8	0.00026	0.00026	0.36875	0.37392	0.64218	0.64740
	1.0	0.00004	0.00004	0.28296	0.28747	0.55045	0.55605
	3.0	0.00000	0.00000	0.02919	0.02977	0.22093	0.22481

Tablo 4.67: **SFY8:** $h = 0.0125$, $k = 0.00001$; $\nu = 0.005$, $\nu = 0.001$, $\nu = 0.0005$ ve $\nu = 0.0001$ için Problem 1' in nümerik sonuçların karşılaştırılması

		[40]				$SFY8$			
x	t	$\nu = 0.005$	$\nu = 0.001$	$\nu = 0.0005$	$\nu = 0.0001$	$\nu = 0.005$	$\nu = 0.001$	$\nu = 0.0005$	$\nu = 0.0001$
0.25	0.01	0.69111	0.69137	0.69141	0.69143	0.69095	0.69121	0.69124	0.69127
	0.05	0.63220	0.63319	0.63331	0.63341	0.63062	0.63161	0.63173	0.63183
	0.10	0.56820	0.56962	0.56979	0.56994	0.56522	0.56663	0.56681	0.56695
	0.15	0.51409	0.51565	0.51584	0.51600	0.51011	0.51164	0.51183	0.51198
	0.25	0.42986	0.43133	0.43152	0.43166	0.42438	0.42580	0.42598	0.42612
0.50	0.01	0.99900	0.99940	0.99945	0.99949	0.99902	0.99941	0.99946	0.99950
	0.05	0.98569	0.98755	0.98778	0.98797	0.98561	0.98747	0.98770	0.98789
	0.10	0.95145	0.95461	0.95500	0.95532	0.95094	0.95411	0.95450	0.95482
	0.15	0.90488	0.90865	0.90912	0.90950	0.90371	0.90748	0.90795	0.90833
	0.25	0.80158	0.80531	0.80578	0.80615	0.79861	0.80231	0.80277	0.80313
0.75	0.01	0.72275	0.72305	0.72309	0.72312	0.72230	0.72259	0.72263	0.72266
	0.05	0.78663	0.78853	0.78877	0.78896	0.78531	0.78721	0.78745	0.78764
	0.10	0.86589	0.87068	0.87128	0.87176	0.86401	0.86882	0.86943	0.86991
	0.15	0.93250	0.94035	0.94134	0.94212	0.93095	0.93892	0.93992	0.94072
	0.25	0.98773	0.99776	0.99900	0.99999	0.98755	0.99775	0.99901	1.00001

Tablo 4.68: **SFY8:** $t = 0.1$, $\nu = 1$, $k = 0.00001$ için Problem 2' nin nümerik ve tam çözümleri

x	Nümerik Çözüm $h = 0.1$	$h = 0.05$	$h = 0.025$	$h = 0.0125$	Tam Çözüm
0.1	0.11182	0.11210	0.11244	0.11265	0.11289
0.2	0.21474	0.21501	0.21551	0.21585	0.21625
0.3	0.29947	0.29954	0.30008	0.30048	0.30097
0.4	0.35757	0.35739	0.35792	0.35834	0.35886
0.5	0.38225	0.38194	0.38246	0.38288	0.38342
0.6	0.36938	0.36914	0.36969	0.37011	0.37066
0.7	0.31853	0.31853	0.31911	0.31954	0.32007
0.8	0.23372	0.23398	0.23454	0.23492	0.23537
0.9	0.12350	0.12381	0.12419	0.12443	0.12472
$\|e\|_1 \times 10^3$	5.31528	5.16196	3.24837	1.81173	
$L_2 \times 10^3$	1.30072	1.26317	0.78585	0.43563	
$L_\infty \times 10^3$	1.64618	1.53233	0.97296	0.54560	

Tablo 4.69: **SFY8:** $\nu = 1$, $\nu = 0.1$, $\nu = 0.01$; $h = 0.0125$, $k = 0.0001$ için Problem 2' nin nümerik ve tam çözümleri

		$\nu = 1.0 (k = 0.00001)$		$\nu = 0.1$		$\nu = 0.01$	
x	t	Nümerik	Tam	Nümerik	Tam	Nümerik	Tam
0.25	0.4	0.01397	0.01400	0.31413	0.31752	0.35532	0.36226
	0.6	0.00194	0.00195	0.24321	0.24614	0.27502	0.28204
	0.8	0.00027	0.00027	0.19704	0.19956	0.22394	0.23045
	1.0	0.00004	0.00004	0.16342	0.16560	0.18881	0.19469
	3.0	0.00000	0.00000	0.02726	0.02776	0.07373	0.07613
0.50	0.4	0.01980	0.01985	0.58117	0.58454	0.67910	0.68368
	0.6	0.00275	0.00276	0.45422	0.45798	0.54228	0.54832
	0.8	0.00038	0.00038	0.36371	0.36740	0.44723	0.45371
	1.0	0.00005	0.00005	0.29489	0.29834	0.37924	0.38568
	3.0	0.00000	0.00000	0.04031	0.04106	0.14868	0.15218
0.75	0.4	0.01403	0.01407	0.64059	0.64562	0.91921	0.92050
	0.6	0.00195	0.00195	0.49707	0.50268	0.77919	0.78299
	0.8	0.00027	0.00027	0.38001	0.38534	0.65759	0.66272
	1.0	0.00004	0.00004	0.29120	0.29586	0.56364	0.56932
	3.0	0.00000	0.00000	0.02984	0.03044	0.22371	0.22774

Tablo 4.70: **SFY8:** $h = 0.0125$, $k = 0.00001$; $\nu = 0.005$ ve $\nu = 0.001$ için Problem 2' nin nümerik sonuçların karşılaştırılması

		[30]		[40]		$SFY8$	
x	t	$\nu = 0.005$	$\nu = 0.001$	$\nu = 0.005$	$\nu = 0.001$	$\nu = 0.005$	$\nu = 0.001$
0.25	0.05	0.67590	0.67711	0.67609	0.67738	0.67468	0.67597
	0.15	0.55176	0.55315	0.55250	0.55496	0.54852	0.55097
	0.25	0.43326	0.44450	0.46081	0.46349	0.45499	0.45765
0.50	0.05	0.98812	0.98957	0.98829	0.98983	0.98823	0.98978
	0.15	0.91808	0.92073	0.91887	0.92241	0.91799	0.92154
	0.25	0.81389	0.80709	0.82346	0.82748	0.82094	0.82495
0.75	0.05	0.82318	0.82497	0.82332	0.82522	0.82234	0.82425
	0.15	0.94539	0.95063	0.94646	0.95282	0.94546	0.95191
	0.25	0.97717	0.97296	0.99002	0.99815	0.98991	0.99814

Tablo 4.71: **SFY8:** $h = 0.0125$, $k = 0.00001$; $\nu = 0.0005$ ve $\nu = 0.0001$ için Problem 2' nin nümerik sonuçların karşılaştırılması

		[40]		$SFY8$	
x	t	$\nu = 0.0005$	$\nu = 0.0001$	$\nu = 0.0005$	$\nu = 0.0001$
0.25	0.05	0.67754	0.67767	0.67614	0.67626
	0.15	0.55526	0.55551	0.55127	0.55152
	0.25	0.46382	0.46409	0.45798	0.45825
0.50	0.05	0.99002	0.99017	0.98997	0.99012
	0.15	0.92285	0.92320	0.92198	0.92234
	0.25	0.82798	0.82838	0.82545	0.82585
0.75	0.05	0.82456	0.82565	0.82449	0.82468
	0.15	0.95361	0.95424	0.95271	0.95335
	0.25	0.99915	0.99996	0.99916	0.99997

Tablo 4.72: **SFY8:** $\nu = 0.5$, $h = 0.05$, $k = 0.0001$ ve $[a, b] = [0, 8]$ için Problem 3' ün nümerik ve tam çözümleri

	$t = 1.5$		$t = 3.0$		$t = 4.5$	
x	Nümerik	Tam	Nümerik	Tam	Nümerik	Tam
0.5	0.15259	0.15327	0.06387	0.06426	0.03774	0.03799
1.0	0.26523	0.26577	0.11822	0.11880	0.07145	0.07187
1.5	0.30375	0.30412	0.15444	0.15509	0.09741	0.09793
2.0	0.26092	0.26142	0.16695	0.16762	0.11281	0.11339
2.5	0.17163	0.17217	0.15561	0.15630	0.11637	0.11698
3.0	0.08775	0.08807	0.12673	0.12738	0.10888	0.10949
3.5	0.03571	0.03582	0.09079	0.09132	0.09311	0.09369
4.0	0.01184	0.01186	0.05761	0.05797	0.07312	0.07361
4.5	0.00325	0.00325	0.03263	0.03284	0.05292	0.05330
5.0	0.00074	0.00074	0.01663	0.01674	0.03545	0.03572
5.5	0.00014	0.00014	0.00768	0.00772	0.02207	0.02224
6.0	0.00002	0.00002	0.00322	0.00324	0.01281	0.01292
6.5	0.00000	0.00000	0.00123	0.00124	0.00693	0.00702
7.0	0.00000	0.00000	0.00043	0.00043	0.00343	0.00358
7.5	0.00000	0.00000	0.00013	0.00014	0.00138	0.00172

4.10 Sonlu Fark Yaklaşımı 9 (SFY9)

(4.1) Burgers denkleminde UU_x non-lineer teriminin yerine

$$UU_x \cong \left(\frac{U_i^j + U_{i+1}^j}{2}\right)\left(\frac{U_{i+1}^{j+1} - U_{i-1}^{j+1}}{2h}\right)$$

sonlu fark yaklaşımı U_{xx} türevinin yerine

$$U_{xx} \cong \frac{U_{i-1}^{j+1} - 2U_i^{j+1} + U_{i+1}^{j+1}}{h^2}$$

açık sonlu fark yaklaşımı yazılır ve gerekli düzenlemeler yapılırsa

$$-\left(\frac{h(U_i^j + U_{i+1}^j) + 4\nu}{4h^2}\right)U_{i-1}^{j+1} + \left(\frac{h^2 + 2\nu k}{kh^2}\right)U_i^{j+1} + \left(\frac{h(U_i^j + U_{i+1}^j) - 4\nu}{4h^2}\right)U_{i+1}^{j+1} = \frac{U_i^j}{k} \quad ,$$
$$i = 1(1)N-1, \quad j = 0(1)J$$

kapalı sonlu fark yaklaşımı bulunur.

Nümerik Sonuçlar

Problem 1, Problem 2 ve Problem 3' ün SFY9 ile elde edilen nümerik çözümleri Tablo 4.73-4.80 de verildi.

$\nu = 1$, $k = 0.00001$ değerleri ve değişik mesh uzunluğu h için Problem 1' in SFY9 ile elde edilen $t = 0.1$ deki nümerik çözümleri ile problemin tam çözümünün karşılaştırılması Tablo 4.73 de verildi. $h = 0.0125$, $k = 0.0001$ değerleri ve kinematik viskosite ν nün 1, 0.1, 0.001 değerleri için Problem 1' in çeşitli t zamanlarında SFY9 ile elde edilen nümerik çözümler ile analitik çözümün karşılaştırılması Tablo 4.74 de verildi. Tablolardan, nümerik çözümlerin analitik çözüm ile uyum içerisinde olduğu ve h nin gittikçe küçük seçilmesi durumunda nümerik çözümlerin analitik çözüme yakın olduğu görülmektedir.

$h = 0.0125$, $k = 0.00001$ alınarak ν nün 0.005, 0.001, 0.0005, 0.0001 değerleri için Problem 1' in SFY9 ile elde edilen nümerik sonuçlar ile önceki araştırmacıların verdikleri sonuçların karşılaştırılması Tablo 4.75 de verildi. Tablodan sonuçların uyum içerisinde olduğu açıkca görülmektedir.

Mesh uzunluğu h ve kinematik viskosite ν nün değişik değerleri için Problem 2' nin farklı t zamanlarında SFY9 ile elde edilen nümerik çözümleri ile tam çözümü Tablo 4.76 ve Tablo 4.77 de karşılaştırıldı. Tablolardan görüldüğü gibi elde edilen nümerik çözümler tam çözümle uyumludur.

ν =0.005, 0.001, 0.0005, 0.0001 değerleri için Problem 2' nin çeşitli zamanlarda SFY9 ile elde edilen nümerik çözümler ile önceki araştırmacıların elde ettikleri sonuçlar Tablo 4.78 ve Tablo 4.79 da karşılaştırıldı. Elde edilen sonuçların önceki araştırmacıların verdiği sonuçlara yakın olduğu görülmektedir.

Tablo 4.80 de Problem 3' ün $\nu = 0.5$, $h = 0.05$, $k = 0.0001$ değerleri için SFY9 ile edilen nümerik sonuçlar ile tam çözüm karşılaştırıldı. Tablodan nümerik çözümlerin analitik çözüme yeterince yakın olduğu açıkca görülmektedir.

Tablo 4.73: **SFY9:** $t = 0.1$, $\nu = 1$, $k = 0.00001$ için Problem 1' in nümerik ve tam çözümleri

x	Nümerik Çözüm $h = 0.1$	$h = 0.05$	$h = 0.025$	$h = 0.0125$	Tam Çözüm
0.1	0.10854	0.10880	0.10911	0.10931	0.10954
0.2	0.20838	0.20863	0.20910	0.20942	0.20979
0.3	0.29052	0.29056	0.29108	0.29145	0.29190
0.4	0.34675	0.34655	0.34705	0.34745	0.34792
0.5	0.37052	0.37019	0.37069	0.37109	0.37158
0.6	0.35788	0.35763	0.35815	0.35856	0.35905
0.7	0.30849	0.30847	0.30902	0.30943	0.30991
0.8	0.22629	0.22652	0.22704	0.22740	0.22782
0.9	0.11955	0.11983	0.12019	0.12043	0.12069
$\|e\|_1 \times 10^3$	5.07293	4.99376	3.11308	1.69454	
$L_2 \times 10^3$	1.19870	1.18334	0.72852	0.39289	
$L_\infty \times 10^3$	1.52438	1.43388	0.90025	0.48957	

Tablo 4.74: **SFY9:** $\nu = 1$, $\nu = 0.1$, $\nu = 0.01$; $h = 0.0125$, $k = 0.0001$ için Problem 1' in nümerik ve tam çözümleri

		$\nu = 1.0$		$\nu = 0.1$		$\nu = 0.01$	
x	t	Nümerik	Tam	Nümerik	Tam	Nümerik	Tam
0.25	0.4	0.01357	0.01357	0.30567	0.30889	0.33561	0.34191
	0.6	0.00189	0.00189	0.23793	0.24074	0.26259	0.26896
	0.8	0.00026	0.00026	0.19325	0.19568	0.21552	0.22148
	1.0	0.00004	0.00004	0.16045	0.16256	0.18275	0.18819
	3.0	0.00000	0.00000	0.02672	0.02720	0.07279	0.07511
0.50	0.4	0.01923	0.01924	0.56634	0.56963	0.65594	0.66071
	0.6	0.00267	0.00267	0.44357	0.44721	0.52354	0.52942
	0.8	0.00037	0.00037	0.35567	0.35924	0.43298	0.43914
	1.0	0.00005	0.00005	0.28858	0.29192	0.36836	0.37442
	3.0	0.00000	0.00000	0.03948	0.04020	0.14682	0.15018
0.75	0.4	0.01363	0.01363	0.62037	0.62544	0.90861	0.91026
	0.6	0.00189	0.00189	0.48174	0.48721	0.76315	0.76724
	0.8	0.00026	0.00026	0.36879	0.37392	0.64221	0.64740
	1.0	0.00004	0.00004	0.28301	0.28747	0.55049	0.55605
	3.0	0.00000	0.00000	0.02920	0.02977	0.22095	0.22481

Tablo 4.75: **SFY9:** $h = 0.0125$, $k = 0.00001$; $\nu = 0.005$, $\nu = 0.001$, $\nu = 0.0005$ ve $\nu = 0.0001$ için Problem 1' in nümerik sonuçların karşılaştırılması

		[40]				$SFY9$			
x	t	$\nu = 0.005$	$\nu = 0.001$	$\nu = 0.0005$	$\nu = 0.0001$	$\nu = 0.005$	$\nu = 0.001$	$\nu = 0.0005$	$\nu = 0.0001$
0.25	0.01	0.69111	0.69137	0.69141	0.69143	0.69095	0.69121	0.69124	0.69127
	0.05	0.63220	0.63319	0.63331	0.63341	0.63062	0.63161	0.63173	0.63183
	0.10	0.56820	0.56962	0.56979	0.56994	0.56522	0.56663	0.56681	0.56695
	0.15	0.51409	0.51565	0.51584	0.51600	0.51011	0.51164	0.51183	0.51198
	0.25	0.42986	0.43133	0.43152	0.43166	0.42439	0.42581	0.42598	0.42612
0.50	0.01	0.99900	0.99940	0.99945	0.99949	0.99901	0.99941	0.99946	0.99950
	0.05	0.98569	0.98755	0.98778	0.98797	0.98560	0.98747	0.98770	0.98788
	0.10	0.95145	0.95461	0.95500	0.95532	0.95094	0.95410	0.95450	0.95481
	0.15	0.90488	0.90865	0.90912	0.90950	0.90370	0.90747	0.90794	0.90832
	0.25	0.80158	0.80531	0.80578	0.80615	0.79861	0.80231	0.80277	0.80313
0.75	0.01	0.72275	0.72305	0.72309	0.72312	0.72230	0.72259	0.72263	0.72266
	0.05	0.78663	0.78853	0.78877	0.78896	0.78530	0.78721	0.78745	0.78764
	0.10	0.86589	0.87068	0.87128	0.87176	0.86400	0.86882	0.86942	0.86990
	0.15	0.93250	0.94035	0.94134	0.94212	0.93093	0.93891	0.93991	0.94071
	0.25	0.98773	0.99776	0.99900	0.99999	0.98752	0.99772	0.99898	0.99999

Tablo 4.76: **SFY9:** $t = 0.1$, $\nu = 1$, $k = 0.00001$ için Problem 2' nin nümerik ve tam çözümleri

	Nümerik Çözüm				Tam
x	$h = 0.1$	$h = 0.05$	$h = 0.025$	$h = 0.0125$	Çözüm
0.1	0.11183	0.11211	0.11245	0.11266	0.11289
0.2	0.21476	0.21503	0.21553	0.21587	0.21625
0.3	0.29950	0.29957	0.30011	0.30051	0.30097
0.4	0.35761	0.35743	0.35796	0.35837	0.35886
0.5	0.38229	0.38198	0.38250	0.38292	0.38342
0.6	0.36941	0.36918	0.36972	0.37015	0.37066
0.7	0.31856	0.31857	0.31914	0.31957	0.32007
0.8	0.23375	0.23401	0.23456	0.23494	0.23537
0.9	0.12351	0.12382	0.12420	0.12444	0.12472
$\|e\|_1 \times 10^3$	5.22774	5.06925	3.15318	1.71534	
$L_2 \times 10^3$	1.27588	1.23706	0.75962	0.40937	
$L_\infty \times 10^3$	1.62269	1.49921	0.93719	0.50901	

Tablo 4.77: **SFY9:** $\nu = 1$, $\nu = 0.1$, $\nu = 0.01$; $h = 0.0125$, $k = 0.0001$ için Problem 2' nin nümerik ve tam çözümleri

		$\nu = 1.0$		$\nu = 0.1$		$\nu = 0.01$	
x	t	Nümerik	Tam	Nümerik	Tam	Nümerik	Tam
0.25	0.4	0.01400	0.01400	0.31417	0.31752	0.35536	0.36226
	0.6	0.00195	0.00195	0.24323	0.24614	0.27505	0.28204
	0.8	0.00027	0.00027	0.19706	0.19956	0.22397	0.23045
	1.0	0.00004	0.00004	0.16343	0.16560	0.18883	0.19469
	3.0	0.00000	0.00000	0.02726	0.02776	0.07373	0.07613
0.50	0.4	0.01985	0.01985	0.58120	0.58454	0.67911	0.68368
	0.6	0.00276	0.00276	0.45426	0.45798	0.54231	0.54832
	0.8	0.00038	0.00038	0.36374	0.36740	0.44727	0.45371
	1.0	0.00005	0.00005	0.29492	0.29834	0.37927	0.38568
	3.0	0.00000	0.00000	0.04032	0.04106	0.14869	0.15218
0.75	0.4	0.01406	0.01407	0.64055	0.64562	0.91909	0.92050
	0.6	0.00195	0.00195	0.49709	0.50268	0.77917	0.78299
	0.8	0.00027	0.00027	0.38005	0.38534	0.65760	0.66272
	1.0	0.00004	0.00004	0.29124	0.29586	0.56367	0.56932
	3.0	0.00000	0.00000	0.02985	0.03044	0.22373	0.22774

Tablo 4.78: **SFY9:** $h = 0.0125$, $k = 0.00001$; $\nu = 0.005$ ve $\nu = 0.001$ için Problem 2' nin nümerik sonuçların karşılaştırılması

		[30]		[40]		$SFY9$	
x	t	$\nu = 0.005$	$\nu = 0.001$	$\nu = 0.005$	$\nu = 0.001$	$\nu = 0.005$	$\nu = 0.001$
0.25	0.05	0.67590	0.67711	0.67609	0.67738	0.67468	0.67597
	0.15	0.55176	0.55315	0.55250	0.55496	0.54852	0.55097
	0.25	0.43326	0.44450	0.46081	0.46349	0.45499	0.45765
0.50	0.05	0.98812	0.98957	0.98829	0.98983	0.98823	0.98977
	0.15	0.91808	0.92073	0.91887	0.92241	0.91799	0.92153
	0.25	0.81389	0.80709	0.82346	0.82748	0.82093	0.82495
0.75	0.05	0.82318	0.82497	0.82332	0.82522	0.82234	0.82425
	0.15	0.94539	0.95063	0.94646	0.95282	0.94545	0.95190
	0.25	0.97717	0.97296	0.99002	0.99815	0.98989	0.99812

Tablo 4.79: **SFY9:** $h = 0.0125$, $k = 0.00001$; $\nu = 0.0005$ ve $\nu = 0.0001$ için Problem 2' nin nümerik sonuçların karşılaştırılması

		[40]		$SFY9$	
x	t	$\nu = 0.0005$	$\nu = 0.0001$	$\nu = 0.0005$	$\nu = 0.0001$
0.25	0.05	0.67754	0.67767	0.67614	0.67626
	0.15	0.55526	0.55551	0.55128	0.55152
	0.25	0.46382	0.46409	0.45799	0.45825
0.50	0.05	0.99002	0.99017	0.98996	0.99012
	0.15	0.92285	0.92320	0.92198	0.92233
	0.25	0.82798	0.82838	0.82545	0.82585
0.75	0.05	0.82456	0.82565	0.82449	0.82468
	0.15	0.95361	0.95424	0.95270	0.95334
	0.25	0.99915	0.99996	0.99914	0.99995

Tablo 4.80: **SFY9:** $\nu = 0.5$, $h = 0.05$, $k = 0.0001$ ve $[a, b] = [0, 8]$ için Problem 3' ün nümerik ve tam çözümleri

	$t = 1.5$		$t = 3.0$		$t = 4.5$	
x	Nümerik	Tam	Nümerik	Tam	Nümerik	Tam
0.5	0.15260	0.15327	0.06387	0.06426	0.03774	0.03799
1.0	0.26524	0.26577	0.11823	0.11880	0.07145	0.07187
1.5	0.30376	0.30412	0.15445	0.15509	0.09741	0.09793
2.0	0.26092	0.26142	0.16695	0.16762	0.11281	0.11339
2.5	0.17162	0.17217	0.15561	0.15630	0.11637	0.11698
3.0	0.08774	0.08807	0.12672	0.12738	0.10888	0.10949
3.5	0.03571	0.03582	0.09078	0.09132	0.09311	0.09369
4.0	0.01184	0.01186	0.05760	0.05797	0.07311	0.07361
4.5	0.00325	0.00325	0.03263	0.03284	0.05292	0.05330
5.0	0.00074	0.00074	0.01663	0.01674	0.03545	0.03572
5.5	0.00014	0.00014	0.00768	0.00772	0.02207	0.02224
6.0	0.00002	0.00002	0.00322	0.00324	0.01281	0.01292
6.5	0.00000	0.00000	0.00124	0.00124	0.00693	0.00702
7.0	0.00000	0.00000	0.00043	0.00043	0.00343	0.00358
7.5	0.00000	0.00000	0.00013	0.00014	0.00138	0.00172

4.11 Sonlu Fark Yaklaşımı 10 (SFY10)

(4.1) Burgers denkleminde UU_x non-lineer teriminin yerine

$$UU_x \cong (\frac{U_{i-1}^j + U_i^j}{2})(\frac{U_{i+1}^j - U_{i-1}^j}{2h})$$

sonlu fark yaklaşımı U_{xx} türevinin yerine

$$U_{xx} \cong \frac{U_{i-1}^j - 2U_i^j + U_{i+1}^j}{h^2}$$

açık sonlu fark yaklaşımı yazılır ve gerekli düzenlemeler yapılırsa

$$U_i^{j+1} = U_i^j + \frac{\nu k}{h^2}(U_{i-1}^j - 2U_i^j + U_{i+1}^j) - \frac{k}{4h}(U_{i-1}^j + U_i^j)(U_{i+1}^j - U_{i-1}^j) \quad ,$$
$$i = 1(1)N-1, \quad j = 0(1)J$$

açık sonlu fark yaklaşımı bulunur.

Nümerik Sonuçlar

Problem 1, Problem 2 ve Problem 3' ün SFY10 ile elde edilen nümerik çözümleri Tablo 4.81-4.88 de verildi.

Problem 1' in, Tablo 4.81 de $t = 0.1$, $\nu = 1$, $k = 0.00001$ alınarak mesh uzunluğu h nin değişik değerleri için nümerik ve tam çözümü karşılaştırılırken, Tablo 4.82 de $h = 0.0125$, $k = 0.0001$ alınarak ν nün 1, 0.1, 0.001 değerleri için çeşitli t zamanlarında elde edilen nümerik çözümler ile analitik çözüm karşılaştırıldı. Mesh uzunluğu h nin küçük seçilmesi durumunda elde edilen nümerik çözümlerin analitik çözüme oldukça yaklaştığı görülmektedir.

Tablo 4.83 te Problem 1' in $h = 0.0125$, $k = 0.00001$ alınarak ν nün 0.005, 0.001, 0.0005, 0.0001 değerleri için SFY10 ile elde edilen nümerik sonuçlar ile önceki araştırmacıların verdikleri sonuçlar karşılaştırıldı. Tablodan sonuçların uyum içerisinde olduğu açıkca görülmektedir.

Tablo 4.84 ve Tablo 4.85 te Problem 2' nin mesh uzunluğu h ve kinematik viskosite ν nün değişik değerleri için farklı t zamanlarında elde edilen nümerik çözümleri tam çözümü ile karşılaştırıldı ve çözümlerin birbirleriyle uyumlu olduğu görüldü.

Tablo 4.86 ve Tablo 4.87 de Problem 2' nin ν =0.005, 0.001, 0.0005, 0.0001 değerleri için çeşitli zamanlarda elde edilen nümerik çözümler ile önceki araştırmacıların elde ettikleri sonuçlar karşılaştırıldı. Tablolardan SFY10 ile elde edilen sonuçların önceki araştırmacıların verdikleri sonuçlar ile yeterince iyi olduğu görülmektedir.

Tablo 4.88 de Problem 3' ün $\nu = 0.5$, $h = 0.05$, $k = 0.0001$ değerleri için SFY10 ile edilen nümerik sonuçlar ile tam çözüm karşılaştırıldı. Tablodan nümerik sonuçların analitik çözüme yakın olduğu kolayca görülmektedir.

Tablo 4.81: **SFY10:** $t = 0.1$, $\nu = 1$, $k = 0.00001$ için Problem 1' in nümerik ve tam çözümleri

x	Nümerik Çözüm $h=0.1$	$h=0.05$	$h=0.025$	$h=0.0125$	Tam Çözüm
0.1	0.11233	0.11073	0.11008	0.10979	0.10954
0.2	0.21462	0.21181	0.21070	0.21021	0.20979
0.3	0.29805	0.29443	0.29301	0.29241	0.29190
0.4	0.35483	0.35073	0.34915	0.34848	0.34792
0.5	0.37883	0.37451	0.37285	0.37216	0.37158
0.6	0.36627	0.36198	0.36032	0.35963	0.35905
0.7	0.31662	0.31266	0.31112	0.31046	0.30991
0.8	0.23329	0.23011	0.22884	0.22829	0.22782
0.9	0.12395	0.12207	0.12131	0.12098	0.12069
$\|e\|_1 \times 10^3$	20.17995	8.98421	4.13742	1.95388	
$L_2 \times 10^3$	5.54227	2.27512	1.00165	0.46118	
$L_\infty \times 10^3$	7.25241	2.94809	1.28242	0.58562	

Tablo 4.82: **SFY10:** $\nu = 1$, $\nu = 0.1$, $\nu = 0.01$; $h = 0.0125$, $k = 0.0001$ için Problem 1' in nümerik ve tam çözümleri

		$\nu = 1.0 (k = 0.00001)$		$\nu = 0.1$		$\nu = 0.01$	
x	t	Nümerik	Tam	Nümerik	Tam	Nümerik	Tam
0.25	0.4	0.01361	0.01357	0.31220	0.30889	0.34826	0.34191
	0.6	0.00189	0.00189	0.24363	0.24074	0.27542	0.26896
	0.8	0.00026	0.00026	0.19818	0.19568	0.22757	0.22148
	1.0	0.00004	0.00004	0.16475	0.16256	0.19378	0.18819
	3.0	0.00000	0.00000	0.02772	0.02720	0.07754	0.07511
0.50	0.4	0.01929	0.01924	0.57306	0.56963	0.66554	0.66071
	0.6	0.00268	0.00267	0.45099	0.44721	0.53531	0.52942
	0.8	0.00037	0.00037	0.36296	0.35924	0.44530	0.43914
	1.0	0.00005	0.00005	0.29541	0.29192	0.38050	0.37442
	3.0	0.00000	0.00000	0.04099	0.04020	0.15362	0.15018
0.75	0.4	0.01367	0.01363	0.63065	0.62544	0.91232	0.91026
	0.6	0.00190	0.00189	0.49295	0.48721	0.77147	0.76724
	0.8	0.00026	0.00026	0.37935	0.37392	0.65262	0.64740
	1.0	0.00004	0.00004	0.29222	0.28747	0.56162	0.55605
	3.0	0.00000	0.00000	0.03039	0.02977	0.22876	0.22481

Tablo 4.83: **SFY10:** $h = 0.0125$, $k = 0.00001$; $\nu = 0.005$, $\nu = 0.001$, $\nu = 0.0005$ ve $\nu = 0.0001$ için Problem 1' in nümerik sonuçların karşılaştırılması

		[40]				$SFY10$			
x	t	$\nu = 0.005$	$\nu = 0.001$	$\nu = 0.0005$	$\nu = 0.0001$	$\nu = 0.005$	$\nu = 0.001$	$\nu = 0.0005$	$\nu = 0.0001$
0.25	0.01	0.69111	0.69137	0.69141	0.69143	0.69157	0.69183	0.69187	0.69189
	0.05	0.63220	0.63319	0.63331	0.63341	0.63371	0.63471	0.63484	0.63494
	0.10	0.56820	0.56962	0.56979	0.56994	0.57107	0.57251	0.57269	0.57283
	0.15	0.51409	0.51565	0.51584	0.51600	0.51816	0.51975	0.51994	0.52010
	0.25	0.42986	0.43133	0.43152	0.43166	0.43537	0.43688	0.43707	0.43722
0.50	0.01	0.99900	0.99940	0.99945	0.99949	0.99902	0.99941	0.99946	0.99950
	0.05	0.98569	0.98755	0.98778	0.98797	0.98576	0.98761	0.98785	0.98803
	0.10	0.95145	0.95461	0.95500	0.95532	0.95190	0.95505	0.95545	0.95576
	0.15	0.90488	0.90865	0.90912	0.90950	0.90614	0.90991	0.91039	0.91076
	0.25	0.80158	0.80531	0.80578	0.80615	0.80456	0.80834	0.80881	0.80918
0.75	0.01	0.72275	0.72305	0.72309	0.72312	0.72290	0.72320	0.72324	0.72327
	0.05	0.78663	0.78853	0.78877	0.78896	0.78802	0.78992	0.79016	0.79035
	0.10	0.86589	0.87068	0.87128	0.87176	0.86789	0.87264	0.87323	0.87371
	0.15	0.93250	0.94035	0.94134	0.94212	0.93395	0.94167	0.94264	0.94341
	0.25	0.98773	0.99776	0.99900	0.99999	0.98793	0.99780	0.99902	1.00000

Tablo 4.84: **SFY10:** $t = 0.1$, $\nu = 1$, $k = 0.00001$ için Problem 2' nin nümerik ve tam çözümleri

	Nümerik Çözüm				Tam
x	$h = 0.1$	$h = 0.05$	$h = 0.025$	$h = 0.0125$	Çözüm
0.1	0.11580	0.11413	0.11345	0.11316	0.11289
0.2	0.22126	0.21835	0.21719	0.21669	0.21625
0.3	0.30733	0.30359	0.30213	0.30150	0.30097
0.4	0.36600	0.36177	0.36014	0.35945	0.35886
0.5	0.39091	0.38646	0.38474	0.38403	0.38342
0.6	0.37812	0.37370	0.37198	0.37126	0.37066
0.7	0.32703	0.32293	0.32133	0.32065	0.32007
0.8	0.24107	0.23776	0.23644	0.23587	0.23537
0.9	0.12812	0.12617	0.12537	0.12503	0.12472
$\Vert e\Vert_1 \times 10^3$	20.28933	9.06219	4.17927	1.97538	
$L_2 \times 10^3$	5.73889	2.36284	1.04153	0.47989	
$L_\infty \times 10^3$	7.48657	3.05365	1.33023	0.60788	

Tablo 4.85: **SFY10:** $\nu = 1$, $\nu = 0.1$, $\nu = 0.01$; $h = 0.0125$, $k = 0.0001$ için Problem 2' nin nümerik ve tam çözümleri

		$\nu = 1.0 (k = 0.00001)$		$\nu = 0.1$		$\nu = 0.01$	
x	t	Nümerik	Tam	Nümerik	Tam	Nümerik	Tam
0.25	0.4	0.01405	0.01400	0.32096	0.31752	0.36920	0.36226
	0.6	0.00196	0.00195	0.24913	0.24614	0.28913	0.28204
	0.8	0.00027	0.00027	0.20214	0.19956	0.23709	0.23045
	1.0	0.00004	0.00004	0.16785	0.16560	0.20073	0.19469
	3.0	0.00000	0.00000	0.02829	0.02776	0.07865	0.07613
0.50	0.4	0.01991	0.01985	0.58801	0.58454	0.68828	0.68368
	0.6	0.00277	0.00276	0.46184	0.45798	0.55430	0.54832
	0.8	0.00038	0.00038	0.37121	0.36740	0.46015	0.45371
	1.0	0.00005	0.00005	0.30193	0.29834	0.39210	0.38568
	3.0	0.00000	0.00000	0.04187	0.04106	0.15576	0.15218
0.75	0.4	0.01411	0.01407	0.65083	0.64562	0.92219	0.92050
	0.6	0.00196	0.00195	0.50853	0.50268	0.78690	0.78299
	0.8	0.00027	0.00027	0.39092	0.38534	0.66784	0.66272
	1.0	0.00004	0.00004	0.30076	0.29586	0.57495	0.56932
	3.0	0.00000	0.00000	0.03108	0.03044	0.23186	0.22774

Tablo 4.86: **SFY10:** $h = 0.0125$, $k = 0.00001$; $\nu = 0.005$ ve $\nu = 0.001$ için Problem 2' nin nümerik sonuçların karşılaştırılması

		[30]		[40]		$SFY10$	
x	t	$\nu = 0.005$	$\nu = 0.001$	$\nu = 0.005$	$\nu = 0.001$	$\nu = 0.005$	$\nu = 0.001$
0.25	0.05	0.67590	0.67711	0.67609	0.67738	0.67743	0.67872
	0.15	0.55176	0.55315	0.55250	0.55496	0.55652	0.55898
	0.25	0.43326	0.44450	0.46081	0.46349	0.46657	0.46925
0.50	0.05	0.98812	0.98957	0.98829	0.98983	0.98834	0.98987
	0.15	0.91808	0.92073	0.91887	0.92241	0.91984	0.92337
	0.25	0.81389	0.80709	0.82346	0.82748	0.82599	0.83002
0.75	0.05	0.82318	0.82497	0.82332	0.82522	0.82435	0.82624
	0.15	0.94539	0.95063	0.94646	0.95282	0.94738	0.95364
	0.25	0.97717	0.97296	0.99002	0.99815	0.99016	0.99818

Tablo 4.87: **SFY10:** $h = 0.0125$, $k = 0.00001$; $\nu = 0.0005$ ve $\nu = 0.0001$ için Problem 2' nin nümerik sonuçların karşılaştırılması

		[40]		$SFY10$	
x	t	$\nu = 0.0005$	$\nu = 0.0001$	$\nu = 0.0005$	$\nu = 0.0001$
0.25	0.05	0.67754	0.67767	0.67888	0.67901
	0.15	0.55526	0.55551	0.55928	0.55953
	0.25	0.46382	0.46409	0.46959	0.46986
0.50	0.05	0.99002	0.99017	0.99006	0.99022
	0.15	0.92285	0.92320	0.92381	0.92416
	0.25	0.82798	0.82838	0.83052	0.83092
0.75	0.05	0.82456	0.82565	0.82648	0.82667
	0.15	0.95361	0.95424	0.95442	0.95504
	0.25	0.99915	0.99996	0.99917	0.99996

Tablo 4.88: **SFY10:** $\nu = 0.5$, $h = 0.05$, $k = 0.0001$ ve $[a, b] = [0, 8]$ için Problem 3' ün nümerik ve tam çözümleri

	$t = 1.5$		$t = 3.0$		$t = 4.5$	
x	Nümerik	Tam	Nümerik	Tam	Nümerik	Tam
0.5	0.15401	0.15327	0.06469	0.06426	0.03825	0.03799
1.0	0.26640	0.26577	0.11944	0.11880	0.07231	0.07187
1.5	0.30455	0.30412	0.15578	0.15509	0.09848	0.09793
2.0	0.26189	0.26142	0.16832	0.16762	0.11399	0.11339
2.5	0.17264	0.17217	0.15698	0.15630	0.11761	0.11698
3.0	0.08835	0.08807	0.12801	0.12738	0.11010	0.10949
3.5	0.03593	0.03582	0.09183	0.09132	0.09424	0.09369
4.0	0.01189	0.01186	0.05832	0.05797	0.07407	0.07361
4.5	0.00325	0.00325	0.03304	0.03284	0.05366	0.05330
5.0	0.00074	0.00074	0.01684	0.01674	0.03596	0.03572
5.5	0.00014	0.00014	0.00776	0.00772	0.02239	0.02224
6.0	0.00002	0.00002	0.00326	0.00324	0.01299	0.01292
6.5	0.00000	0.00000	0.00125	0.00124	0.00702	0.00702
7.0	0.00000	0.00000	0.00043	0.00043	0.00347	0.00358
7.5	0.00000	0.00000	0.00013	0.00014	0.00140	0.00172

4.12 Sonlu Fark Yaklaşımı 11 (SFY11)

(4.1) Burgers denkleminde UU_x non-lineer teriminin yerine

$$UU_x \cong \left(\frac{U_{i-1}^j + U_i^j}{2}\right)\left(\frac{U_{i+1}^{j+1} - U_{i-1}^{j+1}}{2h}\right)$$

sonlu fark yaklaşımı U_{xx} türevinin yerine

$$U_{xx} \cong \frac{U_{i-1}^{j+1} - 2U_i^{j+1} + U_{i+1}^{j+1}}{h^2}$$

açık sonlu fark yaklaşımı yazılır ve gerekli düzenlemeler yapılırsa

$$-\left(\frac{h(U_{i-1}^j + U_i^j) + 4\nu}{4h^2}\right)U_{i-1}^{j+1} + \left(\frac{h^2 + 2\nu k}{kh^2}\right)U_i^{j+1} + \left(\frac{h(U_{i-1}^j + U_i^j) - 4\nu}{4h^2}\right)U_{i+1}^{j+1} = \frac{U_i^j}{k} \quad ,$$
$$i = 1(1)N-1, \quad j = 0(1)J$$

kapalı sonlu fark yaklaşımı bulunur.

Nümerik Sonuçlar

Problem 1, Problem 2 ve Problem 3' ün SF11 ile elde edilen nümerik çözümleri Tablo 4.89-4.96 da verildi.

Tablo 4.89 ve 4.90 da Problem 1' in mesh uzunluğu h ve kinematik viskosite ν nün değişik değerleri için SFY11 ile elde edilen nümerik çözümleri ile problemin tam çözümü karşılaştırılırken, Tablo 4.91 de ν nün bazı küçük değerleri için elde edilen nümerik çözümleri ile önceki araştırmacıların elde ettikleri nümerik sonuçlar karşılaştırıldı.

Tablo 4.92 ve 4.93 de Problem 2' nin mesh uzunluğu h ve kinematik viskosite ν nün değişik değerleri için SFY11 ile elde edilen nümerik çözümleri ile problemin tam çözümü karşılaştırıldı. Tablo 4.94 de ν nün 0.005 ve 0.001 değerleri için elde edilen nümerik çözümler ve Tablo 4.95 de ν nün 0.0005 ve 0.0001 değerleri için elde edilen nümerik çözümler ile önceki araştırmacıların elde ettikleri nümerik sonuçlar karşılaştırıldı.

Tablo 4.96 da Problem 3' ün $h = 0.05$, $k = 0.0001$ ve $\nu = 0.5$ değerleri için SFY11 ile elde edilen $t = 1.5$, $t = 3$, ve $t = 4.5$ zamanlarındaki nümerik çözümleri ve problemin tam çözümü verildi.

Tablolara bakıldığında SFY11 ile elde edilen nümerik sonuçların tam çözüme yakın olduğu ve literatürde mevcut olan önceki araştırmacıların verdiği sonuçlarla uyum içerisinde olduğu açıkca görülmektedir.

Tablo 4.89: **SFY11:** $t = 0.1$, $\nu = 1$, $k = 0.00001$ için Problem 1' in nümerik ve tam çözümleri

x	Nümerik Çözüm $h = 0.1$	$h = 0.05$	$h = 0.025$	$h = 0.0125$	Tam Çözüm
0.1	0.11234	0.11074	0.11009	0.10980	0.10954
0.2	0.21464	0.21183	0.21071	0.21023	0.20979
0.3	0.29807	0.29446	0.29304	0.29244	0.29190
0.4	0.35487	0.35077	0.34918	0.34852	0.34792
0.5	0.37887	0.37454	0.37289	0.37219	0.37158
0.6	0.36630	0.36201	0.36036	0.35967	0.35905
0.7	0.31665	0.31270	0.31115	0.31050	0.30991
0.8	0.23332	0.23013	0.22886	0.22832	0.22782
0.9	0.12396	0.12209	0.12133	0.12099	0.12069
$\|e\|_1 \times 10^3$	20.26678	9.07666	4.23257	2.05036	
$L_2 \times 10^3$	5.56746	2.30052	1.02712	0.48666	
$L_\infty \times 10^3$	7.28783	2.98401	1.31851	0.62158	

Tablo 4.90: **SFY11:** $\nu = 1$, $\nu = 0.1$, $\nu = 0.01$; $h = 0.0125$, $k = 0.0001$ için Problem 1' in nümerik ve tam çözümleri

		$\nu = 1.0$		$\nu = 0.1$		$\nu = 0.01$	
x	t	Nümerik	Tam	Nümerik	Tam	Nümerik	Tam
0.25	0.4	0.01364	0.01357	0.31224	0.30889	0.34829	0.34191
	0.6	0.00190	0.00189	0.24366	0.24074	0.27545	0.26896
	0.8	0.00026	0.00026	0.19820	0.19568	0.22759	0.22148
	1.0	0.00004	0.00004	0.16477	0.16256	0.19380	0.18819
	3.0	0.00000	0.00000	0.02773	0.02720	0.07754	0.07511
0.50	0.4	0.01933	0.01924	0.57309	0.56963	0.66556	0.66071
	0.6	0.00269	0.00267	0.45102	0.44721	0.53535	0.52942
	0.8	0.00037	0.00037	0.36299	0.35924	0.44533	0.43914
	1.0	0.00005	0.00005	0.29544	0.29192	0.38053	0.37442
	3.0	0.00000	0.00000	0.04100	0.04020	0.15363	0.15018
0.75	0.4	0.01370	0.01363	0.63031	0.62544	0.91221	0.91026
	0.6	0.00190	0.00189	0.49297	0.48721	0.77146	0.76724
	0.8	0.00026	0.00026	0.37939	0.37392	0.65264	0.64740
	1.0	0.00004	0.00004	0.29227	0.28747	0.56165	0.55605
	3.0	0.00000	0.00000	0.03040	0.02977	0.22878	0.22481

Tablo 4.91: **SFY11:** $h = 0.0125$, $k = 0.00001$; $\nu = 0.005$, $\nu = 0.001$, $\nu = 0.0005$ ve $\nu = 0.0001$ için Problem 1' in nümerik sonuçların karşılaştırılması

		[40]				$SFY11$			
x	t	$\nu = 0.005$	$\nu = 0.001$	$\nu = 0.0005$	$\nu = 0.0001$	$\nu = 0.005$	$\nu = 0.001$	$\nu = 0.0005$	$\nu = 0.0001$
0.25	0.01	0.69111	0.69137	0.69141	0.69143	0.69157	0.69183	0.69187	0.69189
	0.05	0.63220	0.63319	0.63331	0.63341	0.63372	0.63471	0.63484	0.63494
	0.10	0.56820	0.56962	0.56979	0.56994	0.57107	0.57251	0.57269	0.57283
	0.15	0.51409	0.51565	0.51584	0.51600	0.51817	0.51975	0.51995	0.52010
	0.25	0.42986	0.43133	0.43152	0.43166	0.43537	0.43689	0.43708	0.43723
0.50	0.01	0.99900	0.99940	0.99945	0.99949	0.99902	0.99941	0.99946	0.99950
	0.05	0.98569	0.98755	0.98778	0.98797	0.98576	0.98761	0.98784	0.98803
	0.10	0.95145	0.95461	0.95500	0.95532	0.95190	0.95505	0.95544	0.95575
	0.15	0.90488	0.90865	0.90912	0.90950	0.90613	0.90991	0.91038	0.91076
	0.25	0.80158	0.80531	0.80578	0.80615	0.80456	0.80834	0.80881	0.80918
0.75	0.01	0.72275	0.72305	0.72309	0.72312	0.72290	0.72320	0.72324	0.72327
	0.05	0.78663	0.78853	0.78877	0.78896	0.78802	0.78992	0.79016	0.79035
	0.10	0.86589	0.87068	0.87128	0.87176	0.86788	0.87263	0.87323	0.87370
	0.15	0.93250	0.94035	0.94134	0.94212	0.93394	0.94166	0.94263	0.94340
	0.25	0.98773	0.99776	0.99900	0.99999	0.98791	0.99778	0.99900	0.99997

Tablo 4.92: **SFY11:** $t = 0.1$, $\nu = 1$, $k = 0.00001$ için Problem 2' nin nümerik ve tam çözümleri

x	Nümerik Çözüm $h = 0.1$	$h = 0.05$	$h = 0.025$	$h = 0.0125$	Tam Çözüm
0.1	0.11581	0.11414	0.11346	0.11317	0.11289
0.2	0.22128	0.21838	0.21721	0.21671	0.21625
0.3	0.30736	0.30362	0.30216	0.30153	0.30097
0.4	0.36603	0.36181	0.36017	0.35948	0.35886
0.5	0.39095	0.38649	0.38478	0.38406	0.38342
0.6	0.37816	0.37373	0.37202	0.37130	0.37066
0.7	0.32706	0.32297	0.32136	0.32068	0.32007
0.8	0.24109	0.23778	0.23646	0.23589	0.23537
0.9	0.12813	0.12618	0.12539	0.12504	0.12472
$\|e\|_1 \times 10^3$	20.37603	9.15451	4.27427	2.07169	
$L_2 \times 10^3$	5.76481	2.38900	1.06777	0.50615	
$L_\infty \times 10^3$	7.52297	3.09062	1.36709	0.64482	

Tablo 4.93: **SFY11:** $\nu = 1$, $\nu = 0.1$, $\nu = 0.01$; $h = 0.0125$, $k = 0.0001$ için Problem 2' nin nümerik ve tam çözümleri

		$\nu = 1.0$		$\nu = 0.1$		$\nu = 0.01$	
x	t	Nümerik	Tam	Nümerik	Tam	Nümerik	Tam
0.25	0.4	0.01408	0.01400	0.32100	0.31752	0.36923	0.36226
	0.6	0.00196	0.00195	0.24916	0.24614	0.28916	0.28204
	0.8	0.00027	0.00027	0.20215	0.19956	0.23712	0.23045
	1.0	0.00004	0.00004	0.16786	0.16560	0.20075	0.19469
	3.0	0.00000	0.00000	0.02830	0.02776	0.07866	0.07613
0.50	0.4	0.01995	0.01985	0.58804	0.58454	0.68828	0.68368
	0.6	0.00277	0.00276	0.46188	0.45798	0.55434	0.54832
	0.8	0.00039	0.00038	0.37124	0.36740	0.46019	0.45371
	1.0	0.00005	0.00005	0.30196	0.29834	0.39213	0.38568
	3.0	0.00000	0.00000	0.04189	0.04106	0.15577	0.15218
0.75	0.4	0.01414	0.01407	0.65079	0.64562	0.92207	0.92050
	0.6	0.00196	0.00195	0.50855	0.50268	0.78687	0.78299
	0.8	0.00027	0.00027	0.39096	0.38534	0.66785	0.66272
	1.0	0.00004	0.00004	0.30080	0.29586	0.57497	0.56932
	3.0	0.00000	0.00000	0.03109	0.03044	0.23187	0.22774

Tablo 4.94: **SFY11:** $h = 0.0125$, $k = 0.00001$; $\nu = 0.005$ ve $\nu = 0.001$ için Problem 2' nin nümerik sonuçların karşılaştırılması

		[30]		[40]		$SFY11$	
x	t	$\nu = 0.005$	$\nu = 0.001$	$\nu = 0.005$	$\nu = 0.001$	$\nu = 0.005$	$\nu = 0.001$
0.25	0.05	0.67590	0.67711	0.67609	0.67738	0.67743	0.67872
	0.15	0.55176	0.55315	0.55250	0.55496	0.55653	0.55898
	0.25	0.43326	0.44450	0.46081	0.46349	0.46657	0.46926
0.50	0.05	0.98812	0.98957	0.98829	0.98983	0.98833	0.98987
	0.15	0.91808	0.92073	0.91887	0.92241	0.91984	0.92336
	0.25	0.81389	0.80709	0.82346	0.82748	0.82599	0.83002
0.75	0.05	0.82318	0.82497	0.82332	0.82522	0.82434	0.82624
	0.15	0.94539	0.95063	0.94646	0.95282	0.94736	0.95362
	0.25	0.97717	0.97296	0.99002	0.99815	0.99014	0.99816

Tablo 4.95: **SFY11:** $h = 0.0125$, $k = 0.00001$; $\nu = 0.0005$ ve $\nu = 0.0001$ için Problem 2' nin nümerik sonuçların karşılaştırılması

		[40]		$SFY11$	
x	t	$\nu = 0.0005$	$\nu = 0.0001$	$\nu = 0.0005$	$\nu = 0.0001$
0.25	0.05	0.67754	0.67767	0.67888	0.67901
	0.15	0.55526	0.55551	0.55929	0.55953
	0.25	0.46382	0.46409	0.46959	0.46986
0.50	0.05	0.99002	0.99017	0.99006	0.99021
	0.15	0.92285	0.92320	0.92380	0.92415
	0.25	0.82798	0.82838	0.83052	0.83092
0.75	0.05	0.82456	0.82565	0.82648	0.82667
	0.15	0.95361	0.95424	0.95440	0.95503
	0.25	0.99915	0.99996	0.99915	0.99994

Tablo 4.96: **SFY11:** $\nu = 0.5$, $h = 0.05$, $k = 0.0001$ ve $[a, b] = [0, 8]$ için Problem 3' ün nümerik ve tam çözümleri

	$t = 1.5$		$t = 3.0$		$t = 4.5$	
x	Nümerik	Tam	Nümerik	Tam	Nümerik	Tam
0.5	0.15402	0.15327	0.06469	0.06426	0.03826	0.03799
1.0	0.26641	0.26577	0.11944	0.11880	0.07232	0.07187
1.5	0.30455	0.30412	0.15579	0.15509	0.09849	0.09793
2.0	0.26188	0.26142	0.16833	0.16762	0.11400	0.11339
2.5	0.17263	0.17217	0.15698	0.15630	0.11761	0.11698
3.0	0.08835	0.08807	0.12800	0.12738	0.11010	0.10949
3.5	0.03593	0.03582	0.09182	0.09132	0.09424	0.09369
4.0	0.01189	0.01186	0.05831	0.05797	0.07407	0.07361
4.5	0.00326	0.00325	0.03304	0.03284	0.05366	0.05330
5.0	0.00074	0.00074	0.01684	0.01674	0.03596	0.03572
5.5	0.00014	0.00014	0.00776	0.00772	0.02239	0.02224
6.0	0.00002	0.00002	0.00326	0.00324	0.01299	0.01292
6.5	0.00000	0.00000	0.00125	0.00124	0.00702	0.00702
7.0	0.00000	0.00000	0.00043	0.00043	0.00347	0.00358
7.5	0.00000	0.00000	0.00013	0.00014	0.00140	0.00172

4.13 Sonlu Fark Yaklaşımı 12 (SFY12)

(4.1) Burgers denkleminde UU_x non-lineer teriminin yerine

$$UU_x \cong \left(\frac{U_{i+1}^j + U_i^j + U_{i-1}^j}{3}\right)\left(\frac{U_{i+1}^j - U_{i-1}^j}{2h}\right)$$

sonlu fark yaklaşımı[62] U_{xx} türevinin yerine

$$U_{xx} \cong \frac{U_{i-1}^j - 2U_i^j + U_{i+1}^j}{h^2}$$

açık sonlu fark yaklaşımı yazılır ve gerekli düzenlemeler yapılırsa

$$U_i^{j+1} = U_i^j + \frac{\nu k}{h^2}(U_{i-1}^j - 2U_i^j + U_{i+1}^j) - \frac{k}{6h}(U_{i+1}^j + U_i^j + U_{i-1}^j)(U_{i+1}^j - U_{i-1}^j) \quad ,$$
$$i = 1(1)N-1, \quad j = 0(1)J$$

açık sonlu fark yaklaşımı bulunur.

Nümerik Sonuçlar

Problem 1, Problem 2 ve Problem 3' ün SFY12 ile elde edilen nümerik çözümleri Tablo 4.97-4.104 de verildi.

Tablo 4.97 de Problem 1' in $t = 0.1$, $\nu = 1$, $k = 0.00001$ alınarak mesh uzunluğu h nin değişik değerleri için nümerik ve tam çözümü karşılaştırıldı. Tablodan nümerik çözümlerin tam çözüme yakın olduğu açıkca görülmektedir. Mesh uzunluğu h nin yeterince küçük seçilmesi durumunda elde edilen nümerik çözümlerin analitik çözüme oldukça yaklaştığı görülmektedir.

Tablo 4.98 de Problem 1' in $h = 0.0125$, $k = 0.0001$ alınarak kinematik viskosite ν nün 1, 0.1, 0.001 değerleri için çeşitli t zamanlarında nümerik çözümler analitik çözümle karşılaştırıldı. Elde edilen nümerik çözümlerin analitik çözümle uyum içerisinde olduğu açıkca görülmektedir.

Tablo 4.99 da Problem 1' in $h = 0.0125$, $k = 0.00001$ alınarak ν nün 0.005, 0.001, 0.0005, 0.0001 değerleri için SFY12 ile elde edilen nümerik sonuçlar ile önceki araştırmacıların verdikleri sonuçlar karşılaştırıldı. Tablodan elde edilen sonuçların önceki araştırmacılarınki ile uyum içerisinde görülmektedir.

Tablo 4.100 ve Tablo 4.101 de Problem 2' nin mesh uzunluğu h ve kinematik viskosite ν nün değişik değerleri için farklı t zamanlarında elde edilen nümerik çözümler ile tam çözüm karşılaştırıldı. Tablolardan sonuçların birbirleriyle uyumlu olduğu görülmektedir.

Tablo 4.102 ve Tablo 4.103 de Problem 2' nin ν =0.005, 0.001, 0.0005, 0.0001 değerleri için çeşitli zamanlarda elde edilen nümerik çözümler ile önceki araştırmacıların elde ettikleri sonuçlar karşılaştırıldı ve sonuçların birbirleriyle uyumlu olduğu gözlendi.

Tablo 4.104 de Problem 3' ün $\nu = 0.5$, $h = 0.05$, $k = 0.0001$ değerleri için SFY12 ile edilen nümerik sonuçlar ile tam çözüm karşılaştırıldı. Tablodan nümerik sonuçların analitik çözüme yakın olduğu kolayca görülmektedir.

Tablo 4.97: **SFY12:** $t = 0.1$, $\nu = 1$, $k = 0.00001$ için Problem 1' in nümerik ve tam çözümleri

	Nümerik Çözüm				Tam
x	$h = 0.1$	$h = 0.05$	$h = 0.025$	$h = 0.0125$	Çözüm
0.1	0.11045	0.10976	0.10959	0.10955	0.10954
0.2	0.21153	0.21022	0.20989	0.20981	0.20979
0.3	0.29432	0.29249	0.29203	0.29192	0.29190
0.4	0.35080	0.34863	0.34809	0.34795	0.34792
0.5	0.37464	0.37233	0.37175	0.37161	0.37158
0.6	0.36199	0.35977	0.35921	0.35907	0.35905
0.7	0.31244	0.31053	0.31005	0.30993	0.30991
0.8	0.22967	0.22827	0.22792	0.22784	0.22782
0.9	0.12166	0.12093	0.12074	0.12070	0.12069
$\|e\|_1 \times 10^3$	7.40156	1.91742	0.45611	0.07922	
$L_2 \times 10^3$	2.16489	0.53142	0.12321	0.02117	
$L_\infty \times 10^3$	3.06414	0.75208	0.17442	0.03003	

Tablo 4.98: **SFY12:** $\nu = 1$, $\nu = 0.1$, $\nu = 0.01$; $h = 0.0125$, $k = 0.0001$ için Problem 1' in nümerik ve tam çözümleri

		$\nu = 1.0 (k = 0.00001)$		$\nu = 0.1$		$\nu = 0.01$	
x	t	Nümerik	Tam	Nümerik	Tam	Nümerik	Tam
0.25	0.4	0.01358	0.01357	0.30891	0.30889	0.34193	0.34191
	0.6	0.00189	0.00189	0.24076	0.24074	0.26897	0.26896
	0.8	0.00026	0.00026	0.19569	0.19568	0.22148	0.22148
	1.0	0.00004	0.00004	0.16258	0.16256	0.18819	0.18819
	3.0	0.00000	0.00000	0.02721	0.02720	0.07511	0.07511
0.50	0.4	0.01924	0.01924	0.56970	0.56963	0.66079	0.66071
	0.6	0.00267	0.00267	0.44727	0.44721	0.52945	0.52942
	0.8	0.00037	0.00037	0.35929	0.35924	0.43915	0.43914
	1.0	0.00005	0.00005	0.29197	0.29192	0.37442	0.37442
	3.0	0.00000	0.00000	0.04022	0.04020	0.15017	0.15018
0.75	0.4	0.01364	0.01363	0.62553	0.62544	0.91058	0.91026
	0.6	0.00189	0.00189	0.48732	0.48721	0.76738	0.76724
	0.8	0.00026	0.00026	0.37402	0.37392	0.64746	0.64740
	1.0	0.00004	0.00004	0.28755	0.28747	0.55608	0.55605
	3.0	0.00000	0.00000	0.02978	0.02977	0.22483	0.22481

Tablo 4.99: **SFY12:** $h = 0.0125$, $k = 0.00001$; $\nu = 0.005$, $\nu = 0.001$, $\nu = 0.0005$ ve $\nu = 0.0001$ için Problem 1' in nümerik sonuçların karşılaştırılması

		[40]				$SFY12$			
x	t	$\nu = 0.005$	$\nu = 0.001$	$\nu = 0.0005$	$\nu = 0.0001$	$\nu = 0.005$	$\nu = 0.001$	$\nu = 0.0005$	$\nu = 0.0001$
0.25	0.01	0.69111	0.69137	0.69141	0.69143	0.69126	0.69152	0.69156	0.69158
	0.05	0.63220	0.63319	0.63331	0.63341	0.63218	0.63317	0.63330	0.63340
	0.10	0.56820	0.56962	0.56979	0.56994	0.56817	0.56959	0.56977	0.56991
	0.15	0.51409	0.51565	0.51584	0.51600	0.51417	0.51572	0.51592	0.51607
	0.25	0.42986	0.43133	0.43152	0.43166	0.42991	0.43138	0.43156	0.43171
0.50	0.01	0.99900	0.99940	0.99945	0.99949	0.99902	0.99941	0.99946	0.99950
	0.05	0.98569	0.98755	0.98778	0.98797	0.98569	0.98755	0.98778	0.98796
	0.10	0.95145	0.95461	0.95500	0.95532	0.95144	0.95459	0.95499	0.95530
	0.15	0.90488	0.90865	0.90912	0.90950	0.90495	0.90873	0.90920	0.90957
	0.25	0.80158	0.80531	0.80578	0.80615	0.80164	0.80538	0.80584	0.80621
0.75	0.01	0.72275	0.72305	0.72309	0.72312	0.72260	0.72290	0.72293	0.72296
	0.05	0.78663	0.78853	0.78877	0.78896	0.78666	0.78856	0.78880	0.78899
	0.10	0.86589	0.87068	0.87128	0.87176	0.86595	0.87073	0.87133	0.87181
	0.15	0.93250	0.94035	0.94134	0.94212	0.93246	0.94030	0.94129	0.94207
	0.25	0.98773	0.99776	0.99900	0.99999	0.98774	0.99777	0.99901	1.00000

Tablo 4.100: **SFY12:** $t = 0.1$, $\nu = 1$, $k = 0.00001$ için Problem 2' nin nümerik ve tam çözümleri

x	Nümerik Çözüm $h = 0.1$	$h = 0.05$	$h = 0.025$	$h = 0.0125$	Tam Çözüm
0.1	0.11383	0.11312	0.11295	0.11290	0.11289
0.2	0.21805	0.21669	0.21635	0.21627	0.21625
0.3	0.30346	0.30158	0.30111	0.30099	0.30097
0.4	0.36182	0.35959	0.35903	0.35889	0.35886
0.5	0.38657	0.38420	0.38360	0.38345	0.38342
0.6	0.37368	0.37140	0.37083	0.37069	0.37066
0.7	0.32266	0.32071	0.32021	0.32009	0.32007
0.8	0.23727	0.23584	0.23548	0.23539	0.23537
0.9	0.12572	0.12497	0.12478	0.12473	0.12472
$\|e\|_1 \times 10^3$	7.37898	1.91874	0.45704	0.07965	
$L_2 \times 10^3$	2.22476	0.54820	0.12725	0.02190	
$L_\infty \times 10^3$	3.14470	0.77501	0.17993	0.03101	

Tablo 4.101: **SFY12:** $\nu = 1$, $\nu = 0.1$, $\nu = 0.01$; $h = 0.0125$, $k = 0.0001$ için Problem 2' nin nümerik ve tam çözümleri

		$\nu = 1.0(k = 0.00001)$		$\nu = 0.1$		$\nu = 0.01$	
x	t	Nümerik	Tam	Nümerik	Tam	Nümerik	Tam
0.25	0.4	0.01401	0.01400	0.31755	0.31752	0.36231	0.36226
	0.6	0.00195	0.00195	0.24616	0.24614	0.28207	0.28204
	0.8	0.00027	0.00027	0.19957	0.19956	0.23047	0.23045
	1.0	0.00004	0.00004	0.16562	0.16560	0.19470	0.19469
	3.0	0.00000	0.00000	0.02777	0.02776	0.07613	0.07613
0.50	0.4	0.01985	0.01985	0.58461	0.58454	0.68376	0.68368
	0.6	0.00276	0.00276	0.45804	0.45798	0.54836	0.54832
	0.8	0.00038	0.00038	0.36746	0.36740	0.45374	0.45371
	1.0	0.00005	0.00005	0.29840	0.29834	0.38570	0.38568
	3.0	0.00000	0.00000	0.04108	0.04106	0.15218	0.15218
0.75	0.4	0.01407	0.01407	0.64572	0.64562	0.92074	0.92050
	0.6	0.00195	0.00195	0.50279	0.50268	0.78312	0.78299
	0.8	0.00027	0.00027	0.38544	0.38534	0.66278	0.66272
	1.0	0.00004	0.00004	0.29594	0.29586	0.56935	0.56932
	3.0	0.00000	0.00000	0.03045	0.03044	0.22776	0.22774

Tablo 4.102: **SFY12:** $h = 0.0125$, $k = 0.00001$; $\nu = 0.005$ ve $\nu = 0.001$ için Problem 2' nin nümerik sonuçların karşılaştırılması

		[30]		[40]		$SFY12$	
x	t	$\nu = 0.005$	$\nu = 0.001$	$\nu = 0.005$	$\nu = 0.001$	$\nu = 0.005$	$\nu = 0.001$
0.25	0.05	0.67590	0.67711	0.67609	0.67738	0.67607	0.67736
	0.15	0.55176	0.55315	0.55250	0.55496	0.55257	0.55502
	0.25	0.43326	0.44450	0.46081	0.46349	0.46085	0.46352
0.50	0.05	0.98812	0.98957	0.98829	0.98983	0.98829	0.98983
	0.15	0.91808	0.92073	0.91887	0.92241	0.91894	0.92248
	0.25	0.81389	0.80709	0.82346	0.82748	0.82352	0.82754
0.75	0.05	0.82318	0.82497	0.82332	0.82522	0.82334	0.82524
	0.15	0.94539	0.95063	0.94646	0.95282	0.94642	0.95277
	0.25	0.97717	0.97296	0.99002	0.99815	0.99004	0.99816

Tablo 4.103: **SFY12:** $h = 0.0125$, $k = 0.00001$; $\nu = 0.0005$ ve $\nu = 0.0001$ için Problem 2' nin nümerik sonuçların karşılaştırılması

		[40]		$SFY12$	
x	t	$\nu = 0.0005$	$\nu = 0.0001$	$\nu = 0.0005$	$\nu = 0.0001$
0.25	0.05	0.67754	0.67767	0.67752	0.67765
	0.15	0.55526	0.55551	0.55533	0.55557
	0.25	0.46382	0.46409	0.46385	0.46412
0.50	0.05	0.99002	0.99017	0.99002	0.99017
	0.15	0.92285	0.92320	0.92292	0.92327
	0.25	0.82798	0.82838	0.82804	0.82844
0.75	0.05	0.82456	0.82565	0.82548	0.82567
	0.15	0.95361	0.95424	0.95356	0.95419
	0.25	0.99915	0.99996	0.99916	0.99997

Tablo 4.104: **SFY12:** $\nu = 0.5$, $h = 0.05$, $k = 0.0001$ ve $[a, b] = [0, 8]$ için Problem 3' ün nümerik ve tam çözümleri

	$t = 1.5$		$t = 3.0$		$t = 4.5$	
x	Nümerik	Tam	Nümerik	Tam	Nümerik	Tam
0.5	0.15331	0.15327	0.06428	0.06426	0.03800	0.03799
1.0	0.26582	0.26577	0.11883	0.11880	0.07188	0.07187
1.5	0.30415	0.30412	0.15511	0.15509	0.09795	0.09793
2.0	0.26141	0.26142	0.16764	0.16762	0.11340	0.11339
2.5	0.17213	0.17217	0.15629	0.15630	0.11699	0.11698
3.0	0.08805	0.08807	0.12737	0.12738	0.10949	0.10949
3.5	0.03582	0.03582	0.09131	0.09132	0.09368	0.09369
4.0	0.01186	0.01186	0.05796	0.05797	0.07360	0.07361
4.5	0.00325	0.00325	0.03284	0.03284	0.05329	0.05330
5.0	0.00074	0.00074	0.01673	0.01674	0.03571	0.03572
5.5	0.00014	0.00014	0.00772	0.00772	0.02223	0.02224
6.0	0.00002	0.00002	0.00324	0.00324	0.01290	0.01292
6.5	0.00000	0.00000	0.00124	0.00124	0.00697	0.00702
7.0	0.00000	0.00000	0.00043	0.00043	0.00345	0.00358
7.5	0.00000	0.00000	0.00013	0.00014	0.00139	0.00172

4.14 Sonlu Fark Yaklaşımı 13 (SFY13)

(4.1) Burgers denkleminde UU_x non-lineer teriminin yerine

$$UU_x \cong \left(\frac{U_{i+1}^j + U_i^j + U_{i-1}^j}{3}\right)\left(\frac{U_{i+1}^{j+1} - U_{i-1}^{j+1}}{2h}\right)$$

sonlu fark yaklaşımı[62] U_{xx} türevinin yerine

$$U_{xx} \cong \frac{U_{i-1}^{j+1} - 2U_i^{j+1} + U_{i+1}^{j+1}}{h^2}$$

kapalı sonlu fark yaklaşımı yazılır ve gerekli düzenlemeler yapılırsa

$$-\left(\left(\frac{U_{i+1}^j + U_i^j + U_{i-1}^j}{6h}\right) + \frac{\nu}{h^2}\right)U_{i-1}^{j+1} + \left(\frac{h^2 + 2\nu k}{kh^2}\right)U_i^{j+1} +$$
$$\left(\left(\frac{U_{i+1}^j + U_i^j + U_{i-1}^j}{6h}\right) - \frac{\nu}{h^2}\right)U_{i+1}^{j+1} = \frac{U_i^j}{k} \quad , \quad i = 1(1)N-1, \quad j = 0(1)J$$

kapalı sonlu fark yaklaşımı bulunur.

Nümerik Sonuçlar

Problem 1, Problem 2 ve Problem 3' ün SFY13 ile elde edilen nümerik çözümleri Tablo 4.105-4.112 de verildi.

$\nu = 1$, $k = 0.00001$ değerleri ve değişik mesh uzunluğu h için Problem 1' in SFY13 ile elde edilen $t = 0.1$ deki nümerik çözümleri ile problemin tam çözümünün karşılaştırılması Tablo 4.105 de verildi. $h = 0.0125$, $k = 0.0001$ değerleri ve kinematik viskosite ν nün 1, 0.1, 0.001 değerleri için Problem 1' in çeşitli t zamanlarında SFY13 ile elde edilen nümerik çözümler ile analitik çözümün karşılaştırılması Tablo 4.106 da verildi. Tablolardan, nümerik çözümlerin analitik çözüm ile uyum içerisinde olduğu ve h nin küçük seçilmesi durumunda nümerik çözümlerin analitik çözüme yakın olduğu görülmektedir.

$h = 0.0125$, $k = 0.00001$ alınarak ν nün 0.005, 0.001, 0.0005, 0.0001 değerleri için Problem 1' in SFY13 ile elde edilen nümerik sonuçlar ile önceki araştırmacıların verdikleri sonuçların karşılaştırılması Tablo 4.107 de verildi. Tablodan sonuçların uyum içerisinde olduğu kolayca görülmektedir.

Mesh uzunluğu h ve kinematik viskosite ν nün değişik değerleri için Problem 2' nin farklı t zamanlarında SFY13 ile elde edilen nümerik çözümleri ile tam çözümü Tablo 4.108 ve Tablo 4.109 da karşılaştırıldı. Tablolardan kolayca görüldüğü üzere sonuçlar birbirleriyle uyum içerisindedir.

ν =0.005, 0.001, 0.0005, 0.0001 değerleri için Problem 2' nin çeşitli zamanlarda SFY13 ile elde edilen nümerik çözümler ile önceki araştırmacıların elde ettikleri sonuçlar Tablo 4.110 ve Tablo 4.111 de karşılaştırıldı ve sonuçların birbirleriyle uyumlu olduğu görüldü.

Tablo 4.112 de Problem 3' ün $\nu = 0.5$, $h = 0.05$, $k = 0.0001$ değerleri için SFY13 ile edilen nümerik sonuçlar ile tam çözüm karşılaştırıldı. Tablodan nümerik çözümlerin analitik çözüme yakın olduğu kolayca görülmektedir.

Tablo 4.105: **SFY13:** $t = 0.1$, $\nu = 1$, $k = 0.00001$ için Problem 1' in nümerik ve tam çözümleri

x	Nümerik Çözüm $h = 0.1$	$h = 0.05$	$h = 0.025$	$h = 0.0125$	Tam Çözüm
0.1	0.11046	0.10977	0.10960	0.10956	0.10954
0.2	0.21155	0.21024	0.20991	0.20983	0.20979
0.3	0.29434	0.29252	0.29206	0.29195	0.29190
0.4	0.35084	0.34866	0.34812	0.34799	0.34792
0.5	0.37468	0.37237	0.37179	0.37164	0.37158
0.6	0.36203	0.35980	0.35925	0.35911	0.35905
0.7	0.31247	0.31056	0.31008	0.30996	0.30991
0.8	0.22969	0.22830	0.22795	0.22786	0.22782
0.9	0.12168	0.12094	0.12075	0.12071	0.12069
$\|e\|_1 \times 10^3$	7.48870	2.01000	0.55132	0.17574	
$L_2 \times 10^3$	2.19034	0.55702	0.14886	0.04683	
$L_\infty \times 10^3$	3.10002	0.78817	0.21071	0.06631	

Tablo 4.106: **SFY13:** $\nu = 1$, $\nu = 0.1$, $\nu = 0.01$; $h = 0.0125$, $k = 0.0001$ için Problem 1' in nümerik ve tam çözümleri

x	t	$\nu = 1.0$ Nümerik	$\nu = 1.0$ Tam	$\nu = 0.1$ Nümerik	$\nu = 0.1$ Tam	$\nu = 0.01$ Nümerik	$\nu = 0.01$ Tam
0.25	0.4	0.01361	0.01357	0.30895	0.30889	0.34196	0.34191
	0.6	0.00190	0.00189	0.24078	0.24074	0.26900	0.26896
	0.8	0.00026	0.00026	0.19571	0.19568	0.22151	0.22148
	1.0	0.00004	0.00004	0.16260	0.16256	0.18821	0.18819
	3.0	0.00000	0.00000	0.02722	0.02720	0.07512	0.07511
0.50	0.4	0.01928	0.01924	0.56974	0.56963	0.66081	0.66071
	0.6	0.00268	0.00267	0.44730	0.44721	0.52949	0.52942
	0.8	0.00037	0.00037	0.35932	0.35924	0.43919	0.43914
	1.0	0.00005	0.00005	0.29200	0.29192	0.37446	0.37442
	3.0	0.00000	0.00000	0.04023	0.04020	0.15019	0.15018
0.75	0.4	0.01366	0.01363	0.62550	0.62544	0.91046	0.91026
	0.6	0.00190	0.00189	0.48734	0.48721	0.76738	0.76724
	0.8	0.00026	0.00026	0.37406	0.37392	0.64748	0.64740
	1.0	0.00004	0.00004	0.28760	0.28747	0.55611	0.55605
	3.0	0.00000	0.00000	0.02979	0.02977	0.22484	0.22481

Tablo 4.107: **SFY13:** $h = 0.0125$, $k = 0.00001$; $\nu = 0.005$, $\nu = 0.001$, $\nu = 0.0005$ ve $\nu = 0.0001$ için Problem 1' in nümerik sonuçların karşılaştırılması

		[40]				$SFY13$			
x	t	$\nu = 0.005$	$\nu = 0.001$	$\nu = 0.0005$	$\nu = 0.0001$	$\nu = 0.005$	$\nu = 0.001$	$\nu = 0.0005$	$\nu = 0.0001$
0.25	0.01	0.69111	0.69137	0.69141	0.69143	0.69126	0.69152	0.69156	0.69158
	0.05	0.63220	0.63319	0.63331	0.63341	0.63218	0.63317	0.63330	0.63340
	0.10	0.56820	0.56962	0.56979	0.56994	0.56817	0.56959	0.56977	0.56991
	0.15	0.51409	0.51565	0.51584	0.51600	0.51417	0.51572	0.51592	0.51607
	0.25	0.42986	0.43133	0.43152	0.43166	0.42991	0.43138	0.43157	0.43171
0.50	0.01	0.99900	0.99940	0.99945	0.99949	0.99902	0.99941	0.99946	0.99950
	0.05	0.98569	0.98755	0.98778	0.98797	0.98568	0.98754	0.98777	0.98796
	0.10	0.95145	0.95461	0.95500	0.95532	0.95143	0.95459	0.95498	0.95530
	0.15	0.90488	0.90865	0.90912	0.90950	0.90494	0.90872	0.90919	0.90957
	0.25	0.80158	0.80531	0.80578	0.80615	0.80164	0.80538	0.80584	0.80621
0.75	0.01	0.72275	0.72305	0.72309	0.72312	0.72260	0.72290	0.72293	0.72296
	0.05	0.78663	0.78853	0.78877	0.78896	0.78666	0.78856	0.78880	0.78899
	0.10	0.86589	0.87068	0.87128	0.87176	0.86594	0.87073	0.87133	0.87181
	0.15	0.93250	0.94035	0.94134	0.94212	0.93244	0.94029	0.94127	0.94206
	0.25	0.98773	0.99776	0.99900	0.99999	0.98772	0.99775	0.99899	0.99998

Tablo 4.108: **SFY13:** $t = 0.1$, $\nu = 1$, $k = 0.00001$ için Problem 2' nin nümerik ve tam çözümleri

x	Nümerik Çözüm $h = 0.1$	$h = 0.05$	$h = 0.025$	$h = 0.0125$	Tam Çözüm
0.1	0.11384	0.11313	0.11296	0.11291	0.11289
0.2	0.21807	0.21671	0.21637	0.21629	0.21625
0.3	0.30349	0.30161	0.30114	0.30102	0.30097
0.4	0.36185	0.35963	0.35907	0.35893	0.35886
0.5	0.38660	0.38423	0.38364	0.38349	0.38342
0.6	0.37372	0.37144	0.37087	0.37072	0.37066
0.7	0.32270	0.32074	0.32025	0.32012	0.32007
0.8	0.23730	0.23586	0.23550	0.23541	0.23537
0.9	0.12574	0.12498	0.12479	0.12474	0.12472
$\|e\|_1 \times 10^3$	7.46611	2.01126	0.55214	0.17600	
$L_2 \times 10^3$	2.25100	0.57460	0.15369	0.04835	
$L_\infty \times 10^3$	3.18163	0.81218	0.21731	0.06839	

Tablo 4.109: **SFY13:** $\nu = 1$, $\nu = 0.1$, $\nu = 0.01$; $h = 0.0125$, $k = 0.0001$ için Problem 2' nin nümerik ve tam çözümleri

		$\nu = 1.0$		$\nu = 0.1$		$\nu = 0.01$	
x	t	Nümerik	Tam	Nümerik	Tam	Nümerik	Tam
0.25	0.4	0.01404	0.01400	0.31758	0.31752	0.36234	0.36226
	0.6	0.00196	0.00195	0.24618	0.24614	0.28210	0.28204
	0.8	0.00027	0.00027	0.19959	0.19956	0.23050	0.23045
	1.0	0.00004	0.00004	0.16563	0.16560	0.19473	0.19469
	3.0	0.00000	0.00000	0.02778	0.02776	0.07614	0.07613
0.50	0.4	0.01990	0.01985	0.58464	0.58454	0.68377	0.68368
	0.6	0.00277	0.00276	0.45807	0.45798	0.54839	0.54832
	0.8	0.00038	0.00038	0.36749	0.36740	0.45378	0.45371
	1.0	0.00005	0.00005	0.29843	0.29834	0.38573	0.38568
	3.0	0.00000	0.00000	0.04109	0.04106	0.15219	0.15218
0.75	0.4	0.01410	0.01407	0.64568	0.64562	0.92063	0.92050
	0.6	0.00196	0.00195	0.50281	0.50268	0.78310	0.78299
	0.8	0.00027	0.00027	0.38548	0.38534	0.66280	0.66272
	1.0	0.00004	0.00004	0.29598	0.29586	0.56938	0.56932
	3.0	0.00000	0.00000	0.03046	0.03044	0.22778	0.22774

Tablo 4.110: **SFY13:** $h = 0.0125$, $k = 0.00001$; $\nu = 0.005$ ve $\nu = 0.001$ için Problem 2' nin nümerik sonuçların karşılaştırılması

		[30]		[40]		$SFY13$	
x	t	$\nu = 0.005$	$\nu = 0.001$	$\nu = 0.005$	$\nu = 0.001$	$\nu = 0.005$	$\nu = 0.001$
0.25	0.05	0.67590	0.67711	0.67609	0.67738	0.67607	0.67736
	0.15	0.55176	0.55315	0.55250	0.55496	0.55257	0.55502
	0.25	0.43326	0.44450	0.46081	0.46349	0.46085	0.46352
0.50	0.05	0.98812	0.98957	0.98829	0.98983	0.98828	0.98982
	0.15	0.91808	0.92073	0.91887	0.92241	0.91893	0.92247
	0.25	0.81389	0.80709	0.82346	0.82748	0.82351	0.82753
0.75	0.05	0.82318	0.82497	0.82332	0.82522	0.82334	0.82524
	0.15	0.94539	0.95063	0.94646	0.95282	0.94641	0.95276
	0.25	0.97717	0.97296	0.99002	0.99815	0.99002	0.99814

Tablo 4.111: **SFY13:** $h = 0.0125$, $k = 0.00001$; $\nu = 0.0005$ ve $\nu = 0.0001$ için Problem 2' nin nümerik sonuçların karşılaştırılması

		[40]		$SFY13$	
x	t	$\nu = 0.0005$	$\nu = 0.0001$	$\nu = 0.0005$	$\nu = 0.0001$
0.25	0.05	0.67754	0.67767	0.67752	0.67765
	0.15	0.55526	0.55551	0.55533	0.55558
	0.25	0.46382	0.46409	0.46386	0.46412
0.50	0.05	0.99002	0.99017	0.99001	0.99017
	0.15	0.92285	0.92320	0.92291	0.92326
	0.25	0.82798	0.82838	0.82803	0.82843
0.75	0.05	0.82456	0.82565	0.82548	0.82567
	0.15	0.95361	0.95424	0.95355	0.95418
	0.25	0.99915	0.99996	0.99915	0.99995

Tablo 4.112: **SFY13:** $\nu = 0.5$, $h = 0.05$, $k = 0.0001$ ve $[a, b] = [0, 8]$ için Problem 3' ün nümerik ve tam çözümleri

	$t = 1.5$		$t = 3.0$		$t = 4.5$	
x	Nümerik	Tam	Nümerik	Tam	Nümerik	Tam
0.5	0.15332	0.15327	0.06428	0.06426	0.03800	0.03799
1.0	0.26583	0.26577	0.11884	0.11880	0.07188	0.07187
1.5	0.30416	0.30412	0.15512	0.15509	0.09795	0.09793
2.0	0.26140	0.26142	0.16764	0.16762	0.11340	0.11339
2.5	0.17213	0.17217	0.15629	0.15630	0.11699	0.11698
3.0	0.08804	0.08807	0.12736	0.12738	0.10949	0.10949
3.5	0.03582	0.03582	0.09130	0.09132	0.09368	0.09369
4.0	0.01186	0.01186	0.05796	0.05797	0.07359	0.07361
4.5	0.00325	0.00325	0.03284	0.03284	0.05329	0.05330
5.0	0.00074	0.00074	0.01673	0.01674	0.03571	0.03572
5.5	0.00014	0.00014	0.00772	0.00772	0.02223	0.02224
6.0	0.00002	0.00002	0.00324	0.00324	0.01290	0.01292
6.5	0.00000	0.00000	0.00124	0.00124	0.00697	0.00702
7.0	0.00000	0.00000	0.00043	0.00043	0.00345	0.00358
7.5	0.00000	0.00000	0.00013	0.00014	0.00139	0.00172

4.15 Sonlu Fark Yaklaşımı 14 (SFY14)

(4.1) Burgers denkleminde UU_x non-lineer teriminin yerine

$$UU_x \cong (\frac{U_{i+1}^{j+1} + U_i^{j+1} + U_{i-1}^{j+1}}{3})(\frac{U_{i+1}^{j} - U_{i-1}^{j}}{2h})$$

sonlu fark yaklaşımı[62] U_{xx} türevinin yerine

$$U_{xx} \cong \frac{U_{i-1}^{j} - 2U_i^{j} + U_{i+1}^{j}}{h^2}$$

açık sonlu fark yaklaşımı yazılır ve gerekli düzenlemeler yapılırsa

$$(\frac{U_{i+1}^{j} - U_{i-1}^{j}}{6h})U_{i-1}^{j+1} + (\frac{6h + k(U_{i+1}^{j} - U_{i-1}^{j})}{6kh})U_i^{j+1} + (\frac{U_{i+1}^{j} - U_{i-1}^{j}}{6h})U_{i+1}^{j+1} =$$
$$\frac{U_i^j}{k} + \frac{\nu}{h^2}(U_{i-1}^{j} - 2U_i^{j} + U_{i+1}^{j}) \quad , \quad i = 1(1)N-1, \quad j = 0(1)J$$

kapalı sonlu fark yaklaşımı bulunur.

Nümerik Sonuçlar

Problem 1, Problem 2 ve Problem 3' ün SFY14 ile elde edilen nümerik çözümleri Tablo 4.113-4.120 de verildi.

Tablo 4.113 ve 4.114 de Problem 1' in mesh uzunluğu h ve kinematik viskosite ν nün değişik değerleri için SFY14 ile elde edilen nümerik çözümleri ile problemin tam çözümü karşılaştırılırken, Tablo 4.115 de ν nün bazı küçük değerleri için elde edilen nümerik çözümleri ile önceki araştırmacıların elde ettikleri nümerik sonuçlar karşılaştırıldı.

Tablo 4.116 ve 4.117 de Problem 2' nin mesh uzunluğu h ve kinematik viskosite ν nün değişik değerleri için SFY14 ile elde edilen nümerik çözümleri ile problemin tam çözümü karşılaştırıldı. Tablo 4.118 de ν nün 0.005 ve 0.001 değerleri için elde edilen nümerik çözümler ve Tablo 4.119 da ν nün 0.0005 ve 0.0001 değerleri için elde edilen nümerik çözümler ile önceki araştırmacıların elde ettikleri nümerik sonuçlar karşılaştırıldı.

Tablo 4.120 de Problem 3' ün $h = 0.05$, $k = 0.0001$ ve $\nu = 0.5$ değerleri için SFY14 ile elde edilen $t = 1.5$, $t = 3$, ve $t = 4.5$ zamanlarındaki nümerik çözümleri ve problemin tam çözümü verildi.

Tablolardan kolayca görüleceği gibi SFY14 ile elde edilen nümerik sonuçlar tam çözüme oldukça yakındır ve literatürde mevcut olan önceki araştırmacıların verdiği sonuçlarla uyum içerisindedir.

Tablo 4.113: **SFY14:** $t = 0.1$, $\nu = 1$, $k = 0.00001$ için Problem 1' in nümerik ve tam çözümleri

x	Nümerik Çözüm $h = 0.1$	$h = 0.05$	$h = 0.025$	$h = 0.0125$	Tam Çözüm
0.1	0.11045	0.10976	0.10959	0.10955	0.10954
0.2	0.21153	0.21022	0.20989	0.20981	0.20979
0.3	0.29432	0.29249	0.29203	0.29192	0.29190
0.4	0.35080	0.34863	0.34809	0.34795	0.34792
0.5	0.37464	0.37233	0.37175	0.37161	0.37158
0.6	0.36199	0.35977	0.35921	0.35907	0.35905
0.7	0.31243	0.31053	0.31005	0.30993	0.30991
0.8	0.22967	0.22827	0.22792	0.22783	0.22782
0.9	0.12166	0.12093	0.12074	0.12070	0.12069
$\|e\|_1 \times 10^3$	7.40224	1.91819	0.45691	0.08003	
$L_2 \times 10^3$	2.16508	0.53162	0.12342	0.02139	
$L_\infty \times 10^3$	3.06447	0.75244	0.17476	0.03037	

Tablo 4.114: **SFY14:** $\nu = 1$, $\nu = 0.1$, $\nu = 0.01$; $h = 0.0125$, $k = 0.0001$ için Problem 1' in nümerik ve tam çözümleri

		$\nu = 1.0(k = 0.00001)$		$\nu = 0.1$		$\nu = 0.01$	
x	t	Nümerik	Tam	Nümerik	Tam	Nümerik	Tam
0.25	0.4	0.01358	0.01357	0.30894	0.30889	0.34197	0.34191
	0.6	0.00189	0.00189	0.24078	0.24074	0.26900	0.26896
	0.8	0.00026	0.00026	0.19571	0.19568	0.22151	0.22148
	1.0	0.00004	0.00004	0.16260	0.16256	0.18821	0.18819
	3.0	0.00000	0.00000	0.02721	0.02720	0.07512	0.07511
0.50	0.4	0.01924	0.01924	0.56974	0.56963	0.66084	0.66071
	0.6	0.00267	0.00267	0.44730	0.44721	0.52950	0.52942
	0.8	0.00037	0.00037	0.35932	0.35924	0.43919	0.43914
	1.0	0.00005	0.00005	0.29199	0.29192	0.37446	0.37442
	3.0	0.00000	0.00000	0.04022	0.04020	0.15019	0.15018
0.75	0.4	0.01364	0.01363	0.62555	0.62544	0.91061	0.91026
	0.6	0.00189	0.00189	0.48734	0.48721	0.76744	0.76724
	0.8	0.00026	0.00026	0.37403	0.37392	0.64751	0.64740
	1.0	0.00004	0.00004	0.28757	0.28747	0.55613	0.55605
	3.0	0.00000	0.00000	0.02979	0.02977	0.22484	0.22481

Tablo 4.115: **SFY14:** $h = 0.0125$, $k = 0.00001$; $\nu = 0.005$, $\nu = 0.001$, $\nu = 0.0005$ ve $\nu = 0.0001$ için Problem 1' in nümerik sonuçların karşılaştırılması

		[40]				$SFY14$			
x	t	$\nu = 0.005$	$\nu = 0.001$	$\nu = 0.0005$	$\nu = 0.0001$	$\nu = 0.005$	$\nu = 0.001$	$\nu = 0.0005$	$\nu = 0.0001$
0.25	0.01	0.69111	0.69137	0.69141	0.69143	0.69126	0.69152	0.69156	0.69158
	0.05	0.63220	0.63319	0.63331	0.63341	0.63218	0.63317	0.63330	0.63340
	0.10	0.56820	0.56962	0.56979	0.56994	0.56817	0.56960	0.56977	0.56992
	0.15	0.51409	0.51565	0.51584	0.51600	0.51417	0.51572	0.51592	0.51607
	0.25	0.42986	0.43133	0.43152	0.43166	0.42991	0.43138	0.43157	0.43171
0.50	0.01	0.99900	0.99940	0.99945	0.99949	0.99902	0.99941	0.99946	0.99950
	0.05	0.98569	0.98755	0.98778	0.98797	0.98569	0.98755	0.98778	0.98796
	0.10	0.95145	0.95461	0.95500	0.95532	0.95144	0.95459	0.95499	0.95531
	0.15	0.90488	0.90865	0.90912	0.90950	0.90495	0.90873	0.90920	0.90957
	0.25	0.80158	0.80531	0.80578	0.80615	0.80164	0.80538	0.80585	0.80622
0.75	0.01	0.72275	0.72305	0.72309	0.72312	0.72260	0.72290	0.72293	0.72296
	0.05	0.78663	0.78853	0.78877	0.78896	0.78666	0.78856	0.78880	0.78899
	0.10	0.86589	0.87068	0.87128	0.87176	0.86595	0.87073	0.87133	0.87181
	0.15	0.93250	0.94035	0.94134	0.94212	0.93246	0.94030	0.94129	0.94207
	0.25	0.98773	0.99776	0.99900	0.99999	0.98774	0.99777	0.99901	1.00000

Tablo 4.116: **SFY14:** $t = 0.1$, $\nu = 1$, $k = 0.00001$ için Problem 2' nin nümerik ve tam çözümleri

x	Nümerik Çözüm $h = 0.1$	$h = 0.05$	$h = 0.025$	$h = 0.0125$	Tam Çözüm
0.1	0.11383	0.11312	0.11295	0.11290	0.11289
0.2	0.21805	0.21669	0.21636	0.21627	0.21625
0.3	0.30346	0.30158	0.30111	0.30099	0.30097
0.4	0.36182	0.35959	0.35903	0.35889	0.35886
0.5	0.38657	0.38420	0.38360	0.38345	0.38342
0.6	0.37368	0.37140	0.37083	0.37069	0.37066
0.7	0.32266	0.32071	0.32021	0.32009	0.32007
0.8	0.23727	0.23584	0.23548	0.23539	0.23537
0.9	0.12572	0.12497	0.12478	0.12473	0.12472
$\|e\|_1 \times 10^3$	7.37968	1.91954	0.45787	0.08049	
$L_2 \times 10^3$	2.22496	0.54842	0.12747	0.02213	
$L_\infty \times 10^3$	3.14506	0.77540	0.18031	0.03138	

Tablo 4.117: **SFY14:** $\nu = 1$, $\nu = 0.1$, $\nu = 0.01$; $h = 0.0125$, $k = 0.0001$ için Problem 2' nin nümerik ve tam çözümleri

x	t	$\nu = 1.0 (k = 0.00001)$ Nümerik	Tam	$\nu = 0.1$ Nümerik	Tam	$\nu = 0.01$ Nümerik	Tam
0.25	0.4	0.01401	0.01400	0.31757	0.31752	0.36235	0.36226
	0.6	0.00195	0.00195	0.24618	0.24614	0.28210	0.28204
	0.8	0.00027	0.00027	0.19959	0.19956	0.23050	0.23045
	1.0	0.00004	0.00004	0.16563	0.16560	0.19473	0.19469
	3.0	0.00000	0.00000	0.02777	0.02776	0.07614	0.07613
0.50	0.4	0.01985	0.01985	0.58465	0.58454	0.68381	0.68368
	0.6	0.00276	0.00276	0.45807	0.45798	0.54841	0.54832
	0.8	0.00038	0.00038	0.36748	0.36740	0.45379	0.45371
	1.0	0.00005	0.00005	0.29842	0.29834	0.38574	0.38568
	3.0	0.00000	0.00000	0.04108	0.04106	0.15219	0.15218
0.75	0.4	0.01407	0.01407	0.64573	0.64562	0.92077	0.92050
	0.6	0.00195	0.00195	0.50281	0.50268	0.78317	0.78299
	0.8	0.00027	0.00027	0.38546	0.38534	0.66284	0.66272
	1.0	0.00004	0.00004	0.29596	0.29586	0.56940	0.56932
	3.0	0.00000	0.00000	0.03045	0.03044	0.22778	0.22774

Tablo 4.118: **SFY14:** $h = 0.0125$, $k = 0.00001$; $\nu = 0.005$ ve $\nu = 0.001$ için Problem 2' nin nümerik sonuçların karşılaştırılması

		[30]		[40]		$SFY14$	
x	t	$\nu = 0.005$	$\nu = 0.001$	$\nu = 0.005$	$\nu = 0.001$	$\nu = 0.005$	$\nu = 0.001$
0.25	0.05	0.67590	0.67711	0.67609	0.67738	0.67607	0.67736
	0.15	0.55176	0.55315	0.55250	0.55496	0.55257	0.55503
	0.25	0.43326	0.44450	0.46081	0.46349	0.46085	0.46353
0.50	0.05	0.98812	0.98957	0.98829	0.98983	0.98829	0.98983
	0.15	0.91808	0.92073	0.91887	0.92241	0.91894	0.92248
	0.25	0.81389	0.80709	0.82346	0.82748	0.82352	0.82754
0.75	0.05	0.82318	0.82497	0.82332	0.82522	0.82334	0.82525
	0.15	0.94539	0.95063	0.94646	0.95282	0.94642	0.95277
	0.25	0.97717	0.97296	0.99002	0.99815	0.99004	0.99816

Tablo 4.119: **SFY14:** $h = 0.0125$, $k = 0.00001$; $\nu = 0.0005$ ve $\nu = 0.0001$ için Problem 2' nin nümerik sonuçların karşılaştırılması

		[40]		$SFY14$	
x	t	$\nu = 0.0005$	$\nu = 0.0001$	$\nu = 0.0005$	$\nu = 0.0001$
0.25	0.05	0.67754	0.67767	0.67752	0.67765
	0.15	0.55526	0.55551	0.55533	0.55558
	0.25	0.46382	0.46409	0.46386	0.46413
0.50	0.05	0.99002	0.99017	0.99002	0.99017
	0.15	0.92285	0.92320	0.92292	0.92327
	0.25	0.82798	0.82838	0.82804	0.82844
0.75	0.05	0.82456	0.82565	0.82548	0.82567
	0.15	0.95361	0.95424	0.95356	0.95419
	0.25	0.99915	0.99996	0.99916	0.99997

Tablo 4.120: **SFY14:** $\nu = 0.5$, $h = 0.05$, $k = 0.0001$ ve $[a, b] = [0, 8]$ için Problem 3' ün nümerik ve tam çözümleri

	$t = 1.5$		$t = 3.0$		$t = 4.5$	
x	Nümerik	Tam	Nümerik	Tam	Nümerik	Tam
0.5	0.15331	0.15327	0.06428	0.06426	0.03800	0.03799
1.0	0.26582	0.26577	0.11883	0.11880	0.07188	0.07187
1.5	0.30415	0.30412	0.15511	0.15509	0.09795	0.09793
2.0	0.26141	0.26142	0.16764	0.16762	0.11340	0.11339
2.5	0.17214	0.17217	0.15630	0.15630	0.11699	0.11698
3.0	0.08805	0.08807	0.12737	0.12738	0.10949	0.10949
3.5	0.03582	0.03582	0.09131	0.09132	0.09368	0.09369
4.0	0.01186	0.01186	0.05796	0.05797	0.07360	0.07361
4.5	0.00325	0.00325	0.03284	0.03284	0.05329	0.05330
5.0	0.00074	0.00074	0.01673	0.01674	0.03571	0.03572
5.5	0.00014	0.00014	0.00772	0.00772	0.02223	0.02224
6.0	0.00002	0.00002	0.00324	0.00324	0.01290	0.01292
6.5	0.00000	0.00000	0.00124	0.00124	0.00697	0.00702
7.0	0.00000	0.00000	0.00043	0.00043	0.00345	0.00358
7.5	0.00000	0.00000	0.00013	0.00014	0.00139	0.00172

4.16 Sonlu Fark Yaklaşımı 15 (SFY15)

(4.1) Burgers denkleminde UU_x non-lineer teriminin yerine

$$UU_x \cong \frac{1}{2}[U_i^{j+1}(\frac{U_{i+1}^j - U_{i-1}^j}{2h}) + U_i^j(\frac{U_{i+1}^{j+1} - U_{i-1}^{j+1}}{2h})]$$

sonlu fark yaklaşımı[15] U_{xx} türevinin yerine

$$U_{xx} \cong \frac{U_{i-1}^{j+1} - 2U_i^{j+1} + U_{i+1}^{j+1}}{h^2}$$

açık sonlu fark yaklaşımı yazılır ve gerekli düzenlemeler yapılırsa

$$-\frac{U_i^j}{4h}U_{i-1}^{j+1} + (\frac{4h + k(U_{i+1}^j - U_{i-1}^j)}{4kh})U_i^{j+1} + \frac{U_i^j}{4h}U_{i+1}^{j+1} = \frac{U_i^j}{k} + \frac{\nu}{h^2}(U_{i-1}^j - 2U_i^j + U_{i+1}^j) \quad ,$$
$$i = 1(1)N-1, \quad j = 0(1)J$$

kapalı sonlu fark yaklaşımı bulunur.

Nümerik Sonuçlar

Problem 1, Problem 2 ve Problem 3' ün SFY15 ile elde edilen nümerik çözümleri Tablo 4.121-4.128 de verildi.

Tablo 4.121 de Problem 1' in $t = 0.1$, $\nu = 1$, $k = 0.00001$ alınarak mesh uzunluğu h nin değişik değerleri için nümerik ve tam çözümü karşılaştırıldı. Tablodan nümerik çözümlerin tam çözümle uyum içerisinde olduğu ve mesh uzunluğu h nin küçük seçilmesi durumunda elde edilen nümerik çözümlerin analitik çözüme oldukça yaklaştığı görülmektedir.

Tablo 4.122 de Problem 1' in $h = 0.0125$, $k = 0.0001$ alınarak kinematik viskosite ν nün 1, 0.1, 0.001 değerleri için çeşitli t zamanlarında nümerik çözümler analitik çözümle karşılaştırıldı ve her iki çözümün birbirleriyle uyumlu olduğu görüldü.

Tablo 4.123 de Problem 1' in $h = 0.0125$, $k = 0.00001$ alınarak ν nün 0.005, 0.001, 0.0005, 0.0001 değerleri için SFY15 ile elde edilen nümerik sonuçlar ile önceki araştırmacıların verdikleri sonuçlar karşılaştırıldı. Tablodan sonuçların uyum içerisinde olduğu kolayca görülmektedir.

Tablo 4.124 ve Tablo 4.125 de Problem 2' nin mesh uzunluğu h ve kinematik viskosite ν nün değişik değerleri için farklı t zamanlarında elde edilen nümerik çözümler ile tam çözüm karşılaştırıldı. Tablolardan sonuçların iyi olduğu görülmektedir.

Tablo 4.126 ve Tablo 4.127 de Problem 2' nin ν =0.005, 0.001, 0.0005, 0.0001 değerleri için çeşitli zamanlarda elde edilen nümerik çözümler ile önceki araştırmacıların elde ettikleri sonuçlar karşılaştırıldı ve sonuçların birbirlerine yakın olduğu görüldü.

Tablo 4.128 de Problem 3' ün $\nu = 0.5$, $h = 0.05$, $k = 0.0001$ değerleri için SFY15 ile edilen nümerik sonuçlar ile tam çözüm karşılaştırıldı. Tablodan nümerik sonuçların analitik çözüme yakın olduğu kolayca görülmektedir.

Tablo 4.121: **SFY15:** $t = 0.1$, $\nu = 1$, $k = 0.00001$ için Problem 1' in nümerik ve tam çözümleri

x	Nümerik Çözüm $h = 0.1$	$h = 0.05$	$h = 0.025$	$h = 0.0125$	Tam Çözüm
0.1	0.11029	0.10972	0.10958	0.10955	0.10954
0.2	0.21127	0.21015	0.20988	0.20981	0.20979
0.3	0.29404	0.29242	0.29202	0.29192	0.29190
0.4	0.35063	0.34859	0.34808	0.34795	0.34792
0.5	0.37464	0.37233	0.37175	0.37161	0.37158
0.6	0.36219	0.35982	0.35923	0.35908	0.35905
0.7	0.31277	0.31061	0.31007	0.30993	0.30991
0.8	0.23002	0.22836	0.22794	0.22784	0.22782
0.9	0.12189	0.12098	0.12076	0.12070	0.12069
$\|e\|_1 \times 10^3$	7.48878	1.94117	0.46249	0.08104	
$L_2 \times 10^3$	2.20192	0.54051	0.12552	0.02180	
$L_\infty \times 10^3$	3.14738	0.77284	0.18025	0.03154	

Tablo 4.122: **SFY15:** $\nu = 1$, $\nu = 0.1$, $\nu = 0.01$; $h = 0.0125$, $k = 0.0001$ için Problem 1' in nümerik ve tam çözümleri

		$\nu = 1.0 (k = 0.00001)$		$\nu = 0.1$		$\nu = 0.01$	
x	t	Nümerik	Tam	Nümerik	Tam	Nümerik	Tam
0.25	0.4	0.01358	0.01357	0.30890	0.30889	0.34193	0.34191
	0.6	0.00189	0.00189	0.24075	0.24074	0.26898	0.26896
	0.8	0.00026	0.00026	0.19569	0.19568	0.22149	0.22148
	1.0	0.00004	0.00004	0.16258	0.16256	0.18820	0.18819
	3.0	0.00000	0.00000	0.02721	0.02720	0.07512	0.07511
0.50	0.4	0.01924	0.01924	0.56968	0.56963	0.66076	0.66071
	0.6	0.00267	0.00267	0.44727	0.44721	0.52945	0.52942
	0.8	0.00037	0.00037	0.35930	0.35924	0.43916	0.43914
	1.0	0.00005	0.00005	0.29199	0.29192	0.37443	0.37442
	3.0	0.00000	0.00000	0.04023	0.04020	0.15018	0.15018
0.75	0.4	0.01364	0.01363	0.62565	0.62544	0.91045	0.91026
	0.6	0.00189	0.00189	0.48744	0.48721	0.76733	0.76724
	0.8	0.00026	0.00026	0.37412	0.37392	0.64744	0.64740
	1.0	0.00004	0.00004	0.28763	0.28747	0.55608	0.55605
	3.0	0.00000	0.00000	0.02979	0.02977	0.22484	0.22481

Tablo 4.123: **SFY15:** $h = 0.0125$, $k = 0.00001$; $\nu = 0.005$, $\nu = 0.001$, $\nu = 0.0005$ ve $\nu = 0.0001$ için Problem 1' in nümerik sonuçların karşılaştırılması

		[40]				$SFY15$			
x	t	$\nu = 0.005$	$\nu = 0.001$	$\nu = 0.0005$	$\nu = 0.0001$	$\nu = 0.005$	$\nu = 0.001$	$\nu = 0.0005$	$\nu = 0.0001$
0.25	0.01	0.69111	0.69137	0.69141	0.69143	0.69126	0.69152	0.69155	0.69158
	0.05	0.63220	0.63319	0.63331	0.63341	0.63215	0.63314	0.63327	0.63337
	0.10	0.56820	0.56962	0.56979	0.56994	0.56813	0.56955	0.56973	0.56987
	0.15	0.51409	0.51565	0.51584	0.51600	0.51412	0.51568	0.51587	0.51603
	0.25	0.42986	0.43133	0.43152	0.43166	0.42987	0.43134	0.43152	0.43167
0.50	0.01	0.99900	0.99940	0.99945	0.99949	0.99902	0.99941	0.99946	0.99950
	0.05	0.98569	0.98755	0.98778	0.98797	0.98567	0.98753	0.98776	0.98795
	0.10	0.95145	0.95461	0.95500	0.95532	0.95140	0.95455	0.95495	0.95527
	0.15	0.90488	0.90865	0.90912	0.90950	0.90489	0.90866	0.90914	0.90951
	0.25	0.80158	0.80531	0.80578	0.80615	0.80156	0.80530	0.80577	0.80614
0.75	0.01	0.72275	0.72305	0.72309	0.72312	0.72261	0.72290	0.72294	0.72297
	0.05	0.78663	0.78853	0.78877	0.78896	0.78671	0.78861	0.78885	0.78904
	0.10	0.86589	0.87068	0.87128	0.87176	0.86605	0.87083	0.87143	0.87192
	0.15	0.93250	0.94035	0.94134	0.94212	0.93257	0.94041	0.94140	0.94218
	0.25	0.98773	0.99776	0.99900	0.99999	0.98774	0.99776	0.99900	0.99999

Tablo 4.124: **SFY15:** $t = 0.1$, $\nu = 1$, $k = 0.00001$ için Problem 2' nin nümerik ve tam çözümleri

	Nümerik Çözüm				Tam
x	$h = 0.1$	$h = 0.05$	$h = 0.025$	$h = 0.0125$	Çözüm
0.1	0.11366	0.11308	0.11294	0.11290	0.11289
0.2	0.21776	0.21662	0.21634	0.21627	0.21625
0.3	0.30316	0.30151	0.30109	0.30099	0.30097
0.4	0.36163	0.35955	0.35902	0.35889	0.35886
0.5	0.38657	0.38420	0.38360	0.38345	0.38342
0.6	0.37390	0.37146	0.37084	0.37069	0.37066
0.7	0.32303	0.32079	0.32024	0.32010	0.32007
0.8	0.23765	0.23593	0.23550	0.23539	0.23537
0.9	0.12596	0.12502	0.12479	0.12473	0.12472
$\|e\|_1 \times 10^3$	7.46622	1.94242	0.46340	0.08145	
$L_2 \times 10^3$	2.26398	0.55777	0.12967	0.02256	
$L_\infty \times 10^3$	3.23854	0.79791	0.18622	0.03266	

Tablo 4.125: **SFY15:** $\nu = 1$, $\nu = 0.1$, $\nu = 0.01$; $h = 0.0125$, $k = 0.0001$ için Problem 2' nin nümerik ve tam çözümleri

		$\nu = 1.0(k = 0.00001)$		$\nu = 0.1$		$\nu = 0.01$	
x	t	Nümerik	Tam	Nümerik	Tam	Nümerik	Tam
0.25	0.4	0.01401	0.01400	0.31753	0.31752	0.36227	0.36226
	0.6	0.00195	0.00195	0.24615	0.24614	0.28205	0.28204
	0.8	0.00027	0.00027	0.19957	0.19956	0.23046	0.23045
	1.0	0.00004	0.00004	0.16562	0.16560	0.19470	0.19469
	3.0	0.00000	0.00000	0.02777	0.02776	0.07614	0.07613
0.50	0.4	0.01985	0.01985	0.58458	0.58454	0.68371	0.68368
	0.6	0.00276	0.00276	0.45803	0.45798	0.54833	0.54832
	0.8	0.00038	0.00038	0.36747	0.36740	0.45373	0.45371
	1.0	0.00005	0.00005	0.29841	0.29834	0.38569	0.38568
	3.0	0.00000	0.00000	0.04109	0.04106	0.15218	0.15218
0.75	0.4	0.01407	0.01407	0.64584	0.64562	0.92062	0.92050
	0.6	0.00195	0.00195	0.50291	0.50268	0.78305	0.78299
	0.8	0.00027	0.00027	0.38554	0.38534	0.66275	0.66272
	1.0	0.00004	0.00004	0.29602	0.29586	0.56934	0.56932
	3.0	0.00000	0.00000	0.03046	0.03044	0.22777	0.22774

Tablo 4.126: **SFY15:** $h = 0.0125$, $k = 0.00001$; $\nu = 0.005$ ve $\nu = 0.001$ için Problem 2' nin nümerik sonuçların karşılaştırılması

		[30]		[40]		$SFY15$	
x	t	$\nu = 0.005$	$\nu = 0.001$	$\nu = 0.005$	$\nu = 0.001$	$\nu = 0.005$	$\nu = 0.001$
0.25	0.05	0.67590	0.67711	0.67609	0.67738	0.67603	0.67732
	0.15	0.55176	0.55315	0.55250	0.55496	0.55250	0.55495
	0.25	0.43326	0.44450	0.46081	0.46349	0.46077	0.46344
0.50	0.05	0.98812	0.98957	0.98829	0.98983	0.98828	0.98982
	0.15	0.91808	0.92073	0.91887	0.92241	0.91889	0.92243
	0.25	0.81389	0.80709	0.82346	0.82748	0.82344	0.82746
0.75	0.05	0.82318	0.82497	0.82332	0.82522	0.82338	0.82529
	0.15	0.94539	0.95063	0.94646	0.95282	0.94649	0.95284
	0.25	0.97717	0.97296	0.99002	0.99815	0.99003	0.99815

Tablo 4.127: **SFY15:** $h = 0.0125$, $k = 0.00001$; $\nu = 0.0005$ ve $\nu = 0.0001$ için Problem 2' nin nümerik sonuçların karşılaştırılması

		[40]		$SFY15$	
x	t	$\nu = 0.0005$	$\nu = 0.0001$	$\nu = 0.0005$	$\nu = 0.0001$
0.25	0.05	0.67754	0.67767	0.67749	0.67761
	0.15	0.55526	0.55551	0.55526	0.55550
	0.25	0.46382	0.46409	0.46378	0.46404
0.50	0.05	0.99002	0.99017	0.99001	0.99016
	0.15	0.92285	0.92320	0.92287	0.92322
	0.25	0.82798	0.82838	0.82796	0.82836
0.75	0.05	0.82456	0.82565	0.82553	0.82572
	0.15	0.95361	0.95424	0.95363	0.95426
	0.25	0.99915	0.99996	0.99916	0.99996

Tablo 4.128: **SFY15:** $\nu = 0.5$, $h = 0.05$, $k = 0.0001$ ve $[a, b] = [0, 8]$ için Problem 3' ün nümerik ve tam çözümleri

	$t = 1.5$		$t = 3.0$		$t = 4.5$	
x	Nümerik	Tam	Nümerik	Tam	Nümerik	Tam
0.5	0.15329	0.15327	0.06427	0.06426	0.03799	0.03799
1.0	0.26580	0.26577	0.11882	0.11880	0.07188	0.07187
1.5	0.30415	0.30412	0.15510	0.15509	0.09794	0.09793
2.0	0.26141	0.26142	0.16763	0.16762	0.11339	0.11339
2.5	0.17213	0.17217	0.15629	0.15630	0.11698	0.11698
3.0	0.08804	0.08807	0.12736	0.12738	0.10948	0.10949
3.5	0.03581	0.03582	0.09130	0.09132	0.09367	0.09369
4.0	0.01186	0.01186	0.05796	0.05797	0.07359	0.07361
4.5	0.00325	0.00325	0.03283	0.03284	0.05329	0.05330
5.0	0.00074	0.00074	0.01673	0.01674	0.03570	0.03572
5.5	0.00014	0.00014	0.00772	0.00772	0.02223	0.02224
6.0	0.00002	0.00002	0.00324	0.00324	0.01290	0.01292
6.5	0.00000	0.00000	0.00124	0.00124	0.00697	0.00702
7.0	0.00000	0.00000	0.00043	0.00043	0.00345	0.00358
7.5	0.00000	0.00000	0.00013	0.00014	0.00139	0.00172

4.17 Sonlu Fark Yaklaşımı 16 (SFY16)

(4.1) Burgers denkleminde UU_x non-lineer teriminin yerine

$$UU_x \cong \frac{1}{2}[U_i^{j+1}(\frac{U_{i+1}^j - U_{i-1}^j}{2h}) + U_i^j(\frac{U_{i+1}^{j+1} - U_{i-1}^{j+1}}{2h})]$$

sonlu fark yaklaşımı[15] U_{xx} türevinin yerine

$$U_{xx} \cong \frac{U_{i-1}^{j+1} - 2U_i^{j+1} + U_{i+1}^{j+1}}{h^2}$$

kapalı sonlu fark yaklaşımı yazılır ve gerekli düzenlemeler yapılırsa

$$-(\frac{hU_i^j + 4\nu}{4h^2})U_{i-1}^{j+1} + (\frac{4h^2 + kh(U_{i+1}^j - U_{i-1}^j) + 8\nu k}{4kh^2})U_i^{j+1} + (\frac{hU_i^j - 4\nu}{4h^2})U_{i+1}^{j+1} = \frac{U_i^j}{k} \quad ,$$

$$i = 1(1)N-1, \quad j = 0(1)J$$

kapalı sonlu fark yaklaşımı bulunur.

Nümerik Sonuçlar

Problem 1, Problem 2 ve Problem 3' ün SFY16 ile elde edilen nümerik çözümleri Tablo 4.129-4.136 da verildi.

$\nu = 1$, $k = 0.00001$ değerleri ve değişik mesh uzunluğu h için Problem 1' in SFY16 ile elde edilen $t = 0.1$ deki nümerik çözümleri ile problemin tam çözümünün karşılaştırılması Tablo 4.129 da verildi. $h = 0.0125$, $k = 0.0001$ değerleri ve kinematik viskosite ν nün 1, 0.1, 0.001 değerleri için Problem 1' in çeşitli t zamanlarında SFY16 ile elde edilen nümerik çözümler ile analitik çözümün karşılaştırılması Tablo 4.130 da verildi. Tablolardan, nümerik çözümlerin analitik çözüm ile uyum içerisinde olduğu ve h nin küçük seçilmesi durumunda nümerik çözümlerin analitik çözüme yakın olduğu görülmektedir.

$h = 0.0125$, $k = 0.00001$ alınarak ν nün 0.005, 0.001, 0.0005, 0.0001 değerleri için Problem 1' in SFY16 ile elde edilen nümerik sonuçlar ile önceki araştırmacıların verdikleri sonuçların karşılaştırılması Tablo 4.131 de verildi. Tablodan sonuçların uyum içerisinde olduğu kolayca görülmektedir.

Mesh uzunluğu h ve kinematik viskosite ν nün değişik değerleri için Problem 2' nin farklı t zamanlarında SFY16 ile elde edilen nümerik çözümleri ile tam çözümü Tablo 4.132 ve Tablo 4.133 de karşılaştırıldı. Tablolardan çözümlerin uyumlu olduğu görülmektedir.

$\nu = 0.005$, 0.001, 0.0005, 0.0001 değerleri için Problem 2' nin çeşitli zamanlarda SFY16 ile elde edilen nümerik çözümler ile önceki araştırmacıların elde ettikleri sonuçlar Tablo 4.134 ve Tablo 4.135 de karşılaştırıldı. Tablolardan SFY16 ile elde edilen sonuçların önceki araştırmacıların verdiği sonuçlar ile yeterince iyi olduğu görülmektedir.

Tablo 4.136 da Problem 3' ün $\nu = 0.5$, $h = 0.05$, $k = 0.0001$ değerleri için SFY16 ile edilen nümerik sonuçlar ile tam çözüm karşılaştırıldı. Tablodan nümerik sonuçların analitik çözüme oldukça yakın olduğu görülmektedir.

Tablo 4.129: **SFY16:** $t = 0.1$, $\nu = 1$, $k = 0.00001$ için Problem 1' in nümerik ve tam çözümleri

x	Nümerik Çözüm $h = 0.1$	$h = 0.05$	$h = 0.025$	$h = 0.0125$	Tam Çözüm
0.1	0.11030	0.10973	0.10959	0.10955	0.10954
0.2	0.21129	0.21017	0.20989	0.20982	0.20979
0.3	0.29407	0.29245	0.29205	0.29194	0.29190
0.4	0.35066	0.34862	0.34811	0.34798	0.34792
0.5	0.37468	0.37237	0.37179	0.37164	0.37158
0.6	0.36223	0.35985	0.35926	0.35911	0.35905
0.7	0.31280	0.31064	0.31010	0.30997	0.30991
0.8	0.23004	0.22838	0.22797	0.22786	0.22782
0.9	0.12190	0.12099	0.12077	0.12071	0.12069
$\|e\|_1 \times 10^3$	7.57617	2.03404	0.55801	0.17787	
$L_2 \times 10^3$	2.22746	0.56620	0.15125	0.04754	
$L_\infty \times 10^3$	3.18307	0.80934	0.21664	0.06793	

Tablo 4.130: **SFY16:** $\nu = 1$, $\nu = 0.1$, $\nu = 0.01$; $h = 0.0125$, $k = 0.0001$ için Problem 1' in nümerik ve tam çözümleri

		$\nu = 1.0$		$\nu = 0.1$		$\nu = 0.01$	
x	t	Nümerik	Tam	Nümerik	Tam	Nümerik	Tam
0.25	0.4	0.01361	0.01357	0.30893	0.30889	0.34193	0.34191
	0.6	0.00190	0.00189	0.24077	0.24074	0.26898	0.26896
	0.8	0.00026	0.00026	0.19570	0.19568	0.22149	0.22148
	1.0	0.00004	0.00004	0.16259	0.16256	0.18820	0.18819
	3.0	0.00000	0.00000	0.02722	0.02720	0.07512	0.07511
0.50	0.4	0.01928	0.01924	0.56972	0.56963	0.66077	0.66071
	0.6	0.00268	0.00267	0.44730	0.44721	0.52945	0.52942
	0.8	0.00037	0.00037	0.35933	0.35924	0.43916	0.43914
	1.0	0.00005	0.00005	0.29201	0.29192	0.37444	0.37442
	3.0	0.00000	0.00000	0.04024	0.04020	0.15018	0.15018
0.75	0.4	0.01366	0.01363	0.62568	0.62544	0.91046	0.91026
	0.6	0.00190	0.00189	0.48749	0.48721	0.76734	0.76724
	0.8	0.00026	0.00026	0.37417	0.37392	0.64745	0.64740
	1.0	0.00004	0.00004	0.28768	0.28747	0.55608	0.55605
	3.0	0.00000	0.00000	0.02980	0.02977	0.22484	0.22481

Tablo 4.131: **SFY16:** $h = 0.0125$, $k = 0.00001$; $\nu = 0.005$, $\nu = 0.001$, $\nu = 0.0005$ ve $\nu = 0.0001$ için Problem 1' in nümerik sonuçların karşılaştırılması

		[40]				$SFY16$			
x	t	$\nu = 0.005$	$\nu = 0.001$	$\nu = 0.0005$	$\nu = 0.0001$	$\nu = 0.005$	$\nu = 0.001$	$\nu = 0.0005$	$\nu = 0.0001$
0.25	0.01	0.69111	0.69137	0.69141	0.69143	0.69126	0.69152	0.69155	0.69158
	0.05	0.63220	0.63319	0.63331	0.63341	0.63215	0.63314	0.63327	0.63337
	0.10	0.56820	0.56962	0.56979	0.56994	0.56813	0.56955	0.56973	0.56987
	0.15	0.51409	0.51565	0.51584	0.51600	0.51412	0.51568	0.51587	0.51603
	0.25	0.42986	0.43133	0.43152	0.43166	0.42987	0.43134	0.43152	0.43167
0.50	0.01	0.99900	0.99940	0.99945	0.99949	0.99902	0.99941	0.99946	0.99950
	0.05	0.98569	0.98755	0.98778	0.98797	0.98567	0.98753	0.98776	0.98795
	0.10	0.95145	0.95461	0.95500	0.95532	0.95140	0.95455	0.95495	0.95527
	0.15	0.90488	0.90865	0.90912	0.90950	0.90489	0.90866	0.90914	0.90951
	0.25	0.80158	0.80531	0.80578	0.80615	0.80156	0.80530	0.80577	0.80614
0.75	0.01	0.72275	0.72305	0.72309	0.72312	0.72261	0.72290	0.72294	0.72297
	0.05	0.78663	0.78853	0.78877	0.78896	0.78671	0.78861	0.78885	0.78904
	0.10	0.86589	0.87068	0.87128	0.87176	0.86605	0.87083	0.87143	0.87192
	0.15	0.93250	0.94035	0.94134	0.94212	0.93257	0.94041	0.94140	0.94218
	0.25	0.98773	0.99776	0.99900	0.99999	0.98774	0.99776	0.99900	0.99999

Tablo 4.132: **SFY16:** $t = 0.1$, $\nu = 1$, $k = 0.00001$ için Problem 2' nin nümerik ve tam çözümleri

x	Nümerik Çözüm $h = 0.1$	$h = 0.05$	$h = 0.025$	$h = 0.0125$	Tam Çözüm
0.1	0.11367	0.11309	0.11295	0.11291	0.11289
0.2	0.21778	0.21664	0.21636	0.21629	0.21625
0.3	0.30319	0.30153	0.30112	0.30101	0.30097
0.4	0.36166	0.35958	0.35906	0.35892	0.35886
0.5	0.38660	0.38423	0.38364	0.38349	0.38342
0.6	0.37393	0.37149	0.37088	0.37073	0.37066
0.7	0.32306	0.32083	0.32027	0.32013	0.32007
0.8	0.23768	0.23596	0.23553	0.23542	0.23537
0.9	0.12598	0.12504	0.12480	0.12474	0.12472
$\|e\|_1 \times 10^3$	7.55363	2.03527	0.55885	0.17817	
$L_2 \times 10^3$	2.29030	0.58427	0.15621	0.04910	
$L_\infty \times 10^3$	3.27531	0.83493	0.22372	0.07013	

Tablo 4.133: **SFY16:** $\nu = 1$, $\nu = 0.1$, $\nu = 0.01$; $h = 0.0125$, $k = 0.0001$ için Problem 2' nin nümerik ve tam çözümleri

		$\nu = 1.0$		$\nu = 0.1$		$\nu = 0.01$	
x	t	Nümerik	Tam	Nümerik	Tam	Nümerik	Tam
0.25	0.4	0.01404	0.01400	0.31756	0.31752	0.36228	0.36226
	0.6	0.00196	0.00195	0.24617	0.24614	0.28205	0.28204
	0.8	0.00027	0.00027	0.19958	0.19956	0.23046	0.23045
	1.0	0.00004	0.00004	0.16563	0.16560	0.19470	0.19469
	3.0	0.00000	0.00000	0.02778	0.02776	0.07614	0.07613
0.50	0.4	0.01990	0.01985	0.58462	0.58454	0.68371	0.68368
	0.6	0.00277	0.00276	0.45807	0.45798	0.54834	0.54832
	0.8	0.00038	0.00038	0.36749	0.36740	0.45373	0.45371
	1.0	0.00005	0.00005	0.29844	0.29834	0.38569	0.38568
	3.0	0.00000	0.00000	0.04110	0.04106	0.15218	0.15218
0.75	0.4	0.01410	0.01407	0.64587	0.64562	0.92063	0.92050
	0.6	0.00196	0.00195	0.50297	0.50268	0.78306	0.78299
	0.8	0.00027	0.00027	0.38560	0.38534	0.66276	0.66272
	1.0	0.00004	0.00004	0.29607	0.29586	0.56934	0.56932
	3.0	0.00000	0.00000	0.03047	0.03044	0.22778	0.22774

Tablo 4.134: **SFY16:** $h = 0.0125$, $k = 0.00001$; $\nu = 0.005$ ve $\nu = 0.001$ için Problem 2' nin nümerik sonuçların karşılaştırılması

		[30]		[40]		$SFY16$	
x	t	$\nu = 0.005$	$\nu = 0.001$	$\nu = 0.005$	$\nu = 0.001$	$\nu = 0.005$	$\nu = 0.001$
0.25	0.05	0.67590	0.67711	0.67609	0.67738	0.67603	0.67732
	0.15	0.55176	0.55315	0.55250	0.55496	0.55250	0.55495
	0.25	0.43326	0.44450	0.46081	0.46349	0.46077	0.46344
0.50	0.05	0.98812	0.98957	0.98829	0.98983	0.98828	0.98982
	0.15	0.91808	0.92073	0.91887	0.92241	0.91889	0.92243
	0.25	0.81389	0.80709	0.82346	0.82748	0.82344	0.82746
0.75	0.05	0.82318	0.82497	0.82332	0.82522	0.82338	0.82529
	0.15	0.94539	0.95063	0.94646	0.95282	0.94649	0.95284
	0.25	0.97717	0.97296	0.99002	0.99815	0.99003	0.99815

Tablo 4.135: **SFY16:** $h = 0.0125$, $k = 0.00001$; $\nu = 0.0005$ ve $\nu = 0.0001$ için Problem 2' nin nümerik sonuçların karşılaştırılması

		[40]		$SFY16$	
x	t	$\nu = 0.0005$	$\nu = 0.0001$	$\nu = 0.0005$	$\nu = 0.0001$
0.25	0.05	0.67754	0.67767	0.67749	0.67761
	0.15	0.55526	0.55551	0.55526	0.55550
	0.25	0.46382	0.46409	0.46378	0.46404
0.50	0.05	0.99002	0.99017	0.99001	0.99016
	0.15	0.92285	0.92320	0.92287	0.92322
	0.25	0.82798	0.82838	0.82796	0.82836
0.75	0.05	0.82456	0.82565	0.82553	0.82572
	0.15	0.95361	0.95424	0.95363	0.95426
	0.25	0.99915	0.99996	0.99916	0.99996

Tablo 4.136: **SFY16:** $\nu = 0.5$, $h = 0.05$, $k = 0.0001$ ve $[a, b] = [0, 8]$ için Problem 3' ün nümerik ve tam çözümleri

	$t = 1.5$		$t = 3.0$		$t = 4.5$	
x	Nümerik	Tam	Nümerik	Tam	Nümerik	Tam
0.5	0.15330	0.15327	0.06427	0.06426	0.03800	0.03799
1.0	0.26581	0.26577	0.11883	0.11880	0.07188	0.07187
1.5	0.30415	0.30412	0.15511	0.15509	0.09794	0.09793
2.0	0.26141	0.26142	0.16763	0.16762	0.11340	0.11339
2.5	0.17212	0.17217	0.15629	0.15630	0.11699	0.11698
3.0	0.08804	0.08807	0.12736	0.12738	0.10948	0.10949
3.5	0.03581	0.03582	0.09130	0.09132	0.09367	0.09369
4.0	0.01186	0.01186	0.05795	0.05797	0.07359	0.07361
4.5	0.00325	0.00325	0.03283	0.03284	0.05328	0.05330
5.0	0.00074	0.00074	0.01673	0.01674	0.03570	0.03572
5.5	0.00014	0.00014	0.00772	0.00772	0.02223	0.02224
6.0	0.00002	0.00002	0.00324	0.00324	0.01290	0.01292
6.5	0.00000	0.00000	0.00124	0.00124	0.00697	0.00702
7.0	0.00000	0.00000	0.00043	0.00043	0.00345	0.00358
7.5	0.00000	0.00000	0.00013	0.00014	0.00139	0.00172

4.18 Sonlu Fark Yaklaşımı 17 (SFY17)

(4.1) Burgers denkleminde UU_x non-lineer teriminin yerine

$$UU_x \cong \frac{1}{2}[U_i^{j+1}(\frac{U_{i+1}^j - U_{i-1}^j}{2h}) + U_i^j(\frac{U_{i+1}^{j+1} - U_{i-1}^{j+1}}{2h})]$$

sonlu fark yaklaşımı[15] U_{xx} türevinin yerine

$$U_{xx} \cong \frac{1}{2}[\frac{U_{i-1}^{j+1} - 2U_i^{j+1} + U_{i+1}^{j+1}}{h^2} + \frac{U_{i-1}^j - 2U_i^j + U_{i+1}^j}{h^2}]$$

Crank Nicolson sonlu fark yaklaşımı yazılır ve gerekli düzenlemeler yapılırsa

$$-(\frac{hU_i^j + 2\nu}{4h^2})U_{i-1}^{j+1} + (\frac{4h^2 + kh(U_{i+1}^j - U_{i-1}^j) + 4\nu k}{4kh^2})U_i^{j+1} + (\frac{hU_i^j - 2\nu}{4h^2})U_{i+1}^{j+1} =$$
$$\frac{U_i^j}{k} + \frac{\nu}{2h^2}(U_{i-1}^j - 2U_i^j + U_{i+1}^j) \quad , \quad i = 1(1)N-1, \quad j = 0(1)J$$

kapalı sonlu fark yaklaşımı bulunur.

Nümerik Sonuçlar

Problem 1, Problem 2 ve Problem 3' ün SFY17 ile elde edilen nümerik çözümleri Tablo 4.137-4.144 de verildi.

Tablo 4.137 ve 4.138 de Problem 1' in mesh uzunluğu h ve kinematik viskosite ν nün değişik değerleri için SFY17 ile elde edilen nümerik çözümleri ile problemin tam çözümü karşılaştırılırken, Tablo 4.139 da ν nün bazı küçük değerleri için elde edilen nümerik çözümleri ile önceki araştırmacıların elde ettikleri nümerik sonuçlar karşılaştırıldı.

Tablo 4.140 ve 4.141 de Problem 2' nin mesh uzunluğu h ve kinematik viskosite ν nün değişik değerleri için SFY17 ile elde edilen nümerik çözümleri ile problemin tam çözümü karşılaştırıldı. Tablo 4.142 de ν nün 0.005 ve 0.001 değerleri için elde edilen nümerik çözümler ve Tablo 4.143 de ν nün 0.0005 ve 0.0001 değerleri için elde edilen nümerik çözümler ile önceki araştırmacıların elde ettikleri nümerik sonuçlar karşılaştırıldı.

Tablo 4.144 de Problem 3' ün $h = 0.05$, $k = 0.0001$ ve $\nu = 0.5$ değerleri için SFY17 ile elde edilen $t = 1.5$, $t = 3$, ve $t = 4.5$ zamanlarındaki nümerik çözümleri ve problemin tam çözümü verildi.

Tablolara bakıldığında SFY17 ile elde edilen nümerik sonuçların tam çözüme yakın olduğu ve literatürde mevcut olan önceki araştırmacıların verdiği sonuçlarla uyum içerisinde olduğu açıkca görülmektedir.

Tablo 4.137: **SFY17:** $t = 0.1$, $\nu = 1$, $k = 0.00001$ için Problem 1' in nümerik ve tam çözümleri

x	Nümerik Çözüm $h = 0.1$	$h = 0.05$	$h = 0.025$	$h = 0.0125$	Tam Çözüm
0.1	0.11029	0.10973	0.10959	0.10955	0.10954
0.2	0.21128	0.21016	0.20989	0.20982	0.20979
0.3	0.29406	0.29244	0.29203	0.29193	0.29190
0.4	0.35064	0.34860	0.34809	0.34797	0.34792
0.5	0.37466	0.37235	0.37177	0.37163	0.37158
0.6	0.36221	0.35984	0.35924	0.35909	0.35905
0.7	0.31279	0.31062	0.31008	0.30995	0.30991
0.8	0.23003	0.22837	0.22796	0.22785	0.22782
0.9	0.12189	0.12099	0.12076	0.12071	0.12069
$\|e\|_1 \times 10^3$	7.53249	1.98763	0.51027	0.12948	
$L_2 \times 10^3$	2.21470	0.55336	0.13839	0.03467	
$L_\infty \times 10^3$	3.16523	0.79110	0.19845	0.04972	

Tablo 4.138: **SFY17:** $\nu = 1$, $\nu = 0.1$, $\nu = 0.01$; $h = 0.0125$, $k = 0.0001$ için Problem 1' in nümerik ve tam çözümleri

		$\nu = 1.0$		$\nu = 0.1$		$\nu = 0.01$	
x	t	Nümerik	Tam	Nümerik	Tam	Nümerik	Tam
0.25	0.4	0.01358	0.01357	0.30892	0.30889	0.34193	0.34191
	0.6	0.00189	0.00189	0.24076	0.24074	0.26898	0.26896
	0.8	0.00026	0.00026	0.19570	0.19568	0.22149	0.22148
	1.0	0.00004	0.00004	0.16259	0.16256	0.18820	0.18819
	3.0	0.00000	0.00000	0.02722	0.02720	0.07512	0.07511
0.50	0.4	0.01925	0.01924	0.56970	0.56963	0.66076	0.66071
	0.6	0.00267	0.00267	0.44728	0.44721	0.52945	0.52942
	0.8	0.00037	0.00037	0.35932	0.35924	0.43916	0.43914
	1.0	0.00005	0.00005	0.29200	0.29192	0.37443	0.37442
	3.0	0.00000	0.00000	0.04023	0.04020	0.15018	0.15018
0.75	0.4	0.01364	0.01363	0.62566	0.62544	0.91046	0.91026
	0.6	0.00189	0.00189	0.48747	0.48721	0.76733	0.76724
	0.8	0.00026	0.00026	0.37415	0.37392	0.64744	0.64740
	1.0	0.00004	0.00004	0.28766	0.28747	0.55608	0.55605
	3.0	0.00000	0.00000	0.02979	0.02977	0.22484	0.22481

Tablo 4.139: **SFY17:** $h = 0.0125$, $k = 0.00001$; $\nu = 0.005$, $\nu = 0.001$, $\nu = 0.0005$ ve $\nu = 0.0001$ için Problem 1' in nümerik sonuçların karşılaştırılması

		[40]				$SFY17$			
x	t	$\nu = 0.005$	$\nu = 0.001$	$\nu = 0.0005$	$\nu = 0.0001$	$\nu = 0.005$	$\nu = 0.001$	$\nu = 0.0005$	$\nu = 0.0001$
0.25	0.01	0.69111	0.69137	0.69141	0.69143	0.69126	0.69152	0.69155	0.69158
	0.05	0.63220	0.63319	0.63331	0.63341	0.63215	0.63314	0.63327	0.63337
	0.10	0.56820	0.56962	0.56979	0.56994	0.56813	0.56955	0.56973	0.56987
	0.15	0.51409	0.51565	0.51584	0.51600	0.51412	0.51568	0.51587	0.51603
	0.25	0.42986	0.43133	0.43152	0.43166	0.42987	0.43134	0.43152	0.43167
0.50	0.01	0.99900	0.99940	0.99945	0.99949	0.99902	0.99941	0.99946	0.99950
	0.05	0.98569	0.98755	0.98778	0.98797	0.98567	0.98753	0.98776	0.98795
	0.10	0.95145	0.95461	0.95500	0.95532	0.95140	0.95455	0.95495	0.95527
	0.15	0.90488	0.90865	0.90912	0.90950	0.90489	0.90866	0.90914	0.90951
	0.25	0.80158	0.80531	0.80578	0.80615	0.80156	0.80530	0.80577	0.80614
0.75	0.01	0.72275	0.72305	0.72309	0.72312	0.72261	0.72290	0.72294	0.72297
	0.05	0.78663	0.78853	0.78877	0.78896	0.78671	0.78861	0.78885	0.78904
	0.10	0.86589	0.87068	0.87128	0.87176	0.86605	0.87083	0.87143	0.87192
	0.15	0.93250	0.94035	0.94134	0.94212	0.93257	0.94041	0.94140	0.94218
	0.25	0.98773	0.99776	0.99900	0.99999	0.98774	0.99776	0.99900	0.99999

Tablo 4.140: **SFY17:** $t = 0.1$, $\nu = 1$, $k = 0.00001$ için Problem 2' nin nümerik ve tam çözümleri

x	Nümerik Çözüm $h = 0.1$	$h = 0.05$	$h = 0.025$	$h = 0.0125$	Tam Çözüm
0.1	0.11366	0.11309	0.11294	0.11290	0.11289
0.2	0.21777	0.21663	0.21635	0.21628	0.21625
0.3	0.30317	0.30152	0.30110	0.30100	0.30097
0.4	0.36165	0.35956	0.35904	0.35891	0.35886
0.5	0.38659	0.38422	0.38362	0.38347	0.38342
0.6	0.37391	0.37147	0.37086	0.37071	0.37066
0.7	0.32304	0.32081	0.32025	0.32011	0.32007
0.8	0.23766	0.23594	0.23551	0.23541	0.23537
0.9	0.12597	0.12503	0.12480	0.12474	0.12472
$\|e\|_1 \times 10^3$	7.50994	1.98886	0.51114	0.12983	
$L_2 \times 10^3$	2.27715	0.57103	0.14294	0.03583	
$L_\infty \times 10^3$	3.25694	0.81643	0.20498	0.05138	

Tablo 4.141: **SFY17:** $\nu = 1$, $\nu = 0.1$, $\nu = 0.01$; $h = 0.0125$, $k = 0.0001$ için Problem 2' nin nümerik ve tam çözümleri

		$\nu = 1.0$		$\nu = 0.1$		$\nu = 0.01$	
x	t	Nümerik	Tam	Nümerik	Tam	Nümerik	Tam
0.25	0.4	0.01401	0.01400	0.31754	0.31752	0.36227	0.36226
	0.6	0.00195	0.00195	0.24616	0.24614	0.28205	0.28204
	0.8	0.00027	0.00027	0.19958	0.19956	0.23046	0.23045
	1.0	0.00004	0.00004	0.16562	0.16560	0.19470	0.19469
	3.0	0.00000	0.00000	0.02778	0.02776	0.07614	0.07613
0.50	0.4	0.01986	0.01985	0.58460	0.58454	0.68371	0.68368
	0.6	0.00276	0.00276	0.45805	0.45798	0.54834	0.54832
	0.8	0.00038	0.00038	0.36748	0.36740	0.45373	0.45371
	1.0	0.00005	0.00005	0.29843	0.29834	0.38569	0.38568
	3.0	0.00000	0.00000	0.04109	0.04106	0.15218	0.15218
0.75	0.4	0.01407	0.01407	0.64585	0.64562	0.92063	0.92050
	0.6	0.00195	0.00195	0.50294	0.50268	0.78306	0.78299
	0.8	0.00027	0.00027	0.38557	0.38534	0.66275	0.66272
	1.0	0.00004	0.00004	0.29605	0.29586	0.56934	0.56932
	3.0	0.00000	0.00000	0.03046	0.03044	0.22778	0.22774

Tablo 4.142: **SFY17:** $h = 0.0125$, $k = 0.00001$; $\nu = 0.005$ ve $\nu = 0.001$ için Problem 2' nin nümerik sonuçların karşılaştırılması

		[30]		[40]		$SFY17$	
x	t	$\nu = 0.005$	$\nu = 0.001$	$\nu = 0.005$	$\nu = 0.001$	$\nu = 0.005$	$\nu = 0.001$
0.25	0.05	0.67590	0.67711	0.67609	0.67738	0.67603	0.67732
	0.15	0.55176	0.55315	0.55250	0.55496	0.55250	0.55495
	0.25	0.43326	0.44450	0.46081	0.46349	0.46077	0.46344
0.50	0.05	0.98812	0.98957	0.98829	0.98983	0.98828	0.98982
	0.15	0.91808	0.92073	0.91887	0.92241	0.91889	0.92243
	0.25	0.81389	0.80709	0.82346	0.82748	0.82344	0.82746
0.75	0.05	0.82318	0.82497	0.82332	0.82522	0.82338	0.82529
	0.15	0.94539	0.95063	0.94646	0.95282	0.94649	0.95284
	0.25	0.97717	0.97296	0.99002	0.99815	0.99003	0.99815

Tablo 4.143: **SFY17:** $h = 0.0125$, $k = 0.00001$; $\nu = 0.0005$ ve $\nu = 0.0001$ için Problem 2' nin nümerik sonuçların karşılaştırılması

		[40]		$SFY17$	
x	t	$\nu = 0.0005$	$\nu = 0.0001$	$\nu = 0.0005$	$\nu = 0.0001$
0.25	0.05	0.67754	0.67767	0.67749	0.67761
	0.15	0.55526	0.55551	0.55526	0.55550
	0.25	0.46382	0.46409	0.46378	0.46404
0.50	0.05	0.99002	0.99017	0.99001	0.99016
	0.15	0.92285	0.92320	0.92287	0.92322
	0.25	0.82798	0.82838	0.82796	0.82836
0.75	0.05	0.82456	0.82565	0.82553	0.82572
	0.15	0.95361	0.95424	0.95363	0.95426
	0.25	0.99915	0.99996	0.99916	0.99996

Tablo 4.144: **SFY17:** $\nu = 0.5$, $h = 0.05$, $k = 0.0001$ ve $[a, b] = [0, 8]$ için Problem 3' ün nümerik ve tam çözümleri

	$t = 1.5$		$t = 3.0$		$t = 4.5$	
x	Nümerik	Tam	Nümerik	Tam	Nümerik	Tam
0.5	0.15329	0.15327	0.06427	0.06426	0.03799	0.03799
1.0	0.26581	0.26577	0.11882	0.11880	0.07188	0.07187
1.5	0.30415	0.30412	0.15511	0.15509	0.09794	0.09793
2.0	0.26141	0.26142	0.16763	0.16762	0.11339	0.11339
2.5	0.17213	0.17217	0.15629	0.15630	0.11698	0.11698
3.0	0.08804	0.08807	0.12736	0.12738	0.10948	0.10949
3.5	0.03581	0.03582	0.09130	0.09132	0.09367	0.09369
4.0	0.01186	0.01186	0.05795	0.05797	0.07359	0.07361
4.5	0.00325	0.00325	0.03283	0.03284	0.05328	0.05330
5.0	0.00074	0.00074	0.01673	0.01674	0.03570	0.03572
5.5	0.00014	0.00014	0.00772	0.00772	0.02223	0.02224
6.0	0.00002	0.00002	0.00324	0.00324	0.01290	0.01292
6.5	0.00000	0.00000	0.00124	0.00124	0.00697	0.00702
7.0	0.00000	0.00000	0.00043	0.00043	0.00345	0.00358
7.5	0.00000	0.00000	0.00013	0.00014	0.00139	0.00172

4.19 Sonlu Fark Yaklaşımlarının Karşılaştırılması

Tablo 4.145 de Problem 1' in $\nu = 1$, $k = 0.00001$ değerleri için $t = 0.1$ zamanında 4. bölümde uygulanan tüm sonlu fark yaklaşımlarının $\|e\|_1$ hata normlarının karşılaştırılması verildi. Tablodan uygulanan yaklaşımların $\|e\|_1$ hata normlarının birbirine oldukça yakın olduğu görülmektedir.

Tablo 4.146 da Problem 1' in $\nu = 1$, $k = 0.00001$ değerleri için $t = 0.1$ zamanında 4. bölümde uygulanan tüm sonlu fark yaklaşımlarının L_2 hata normlarının karşılaştırılması verildi. Tablodan bazı yaklaşımların diğer yaklaşımlara göre daha iyi sonuçlar verdiği görülmektedir.

Tablo 4.147 de Problem 1' in $\nu = 1$, $k = 0.00001$ değerleri için $t = 0.1$ zamanında 4. bölümde uygulanan tüm sonlu fark yaklaşımlarının L_∞ hata normlarının karşılaştırılması verildi. Tablodan uygulanan tüm yaklaşımlarda L_∞ hata normunun birbirlerine çok yakın olduğu açıkca görülmektedir.

Tablo 4.148 de Problem 3' ün $\nu = 0.5$, $k = 0.0001$ ve $h = 0.05$ değerleri için $t = 1.5$, $t = 1.5$ ve $t = 1.5$ zamanlarında 4. bölümde uygulanan tüm sonlu fark yaklaşımlarının $\|e\|_1$, L_2 ve L_∞ hata normları karşılaştırıldı. Tablodan bazı yaklaşımların diğer yaklaşımlara göre hata normlarının küçük çıktığı kolayca görülmektedir.

Şekil 4.1-4.4 ile Problem 1' in HY ile elde edilen çözümleri değişik kinematik viskosite ($\nu = 1, 0.1, 0.01, 0.005$) değerleri için grafikler yardımıyla gösterildi. Grafiklerden de görüldüğü gibi $\nu \leq 0.01$ küçük viskosite değerlerinde yaklaşık olarak $t = 0.6$ zamanından itibaren sağ sınıra yakın keskin düşüşler başlamaktadır. Burgers denkleminin yapısından kaynaklanan bu durum Şekil 4.3 ve Şekil 4.4 de açıkca görülmektedir.

Şekil 4.5-4.8 ile Problem 3' ün SFY5 ile elde edilen nümerik çözümleri farklı kinematik viskosite ($\nu = 0.5, 0.05, 0.005, 0.001$) değerleri için grafikler yardımıyla gösterildi.

Tablo 4.145: $t = 0.1$, $\nu = 1$, $k = 0.00001$ için Problem 1' in $\|e\|_1$ normunun karşılaştırılması

	$\|e\|_1 \times 10^3$			
Yöntem	$N = 10$	$N = 20$	$N = 40$	$N = 80$
HY	7.40620	1.95234	0.49965	0.12103
SFY1	7.48857	1.94093	0.46225	0.08079
SFY2	7.57496	2.03043	0.54473	0.12564
SFY3	7.53214	1.98724	0.50987	0.12907
SFY4	7.48932	1.94175	0.46309	0.08164
SFY5	7.48899	1.94141	0.46274	0.08129
SFY6	7.20448	1.64187	0.14658	0.27744
SFY7	7.16116	1.59699	0.10521	0.30001
SFY8	5.16036	5.08647	3.20834	1.79108
SFY9	5.07293	4.99376	3.11308	1.69454
SFY10	20.17995	8.98421	4.13742	1.95388
SFY11	20.26678	9.07666	4.23257	2.05036
SFY12	7.40156	1.91742	0.45611	0.07922
SFY13	7.48870	2.01000	0.55132	0.17574
SFY14	7.40224	1.91819	0.45691	0.08003
SFY15	7.48878	1.94117	0.46249	0.08104
SFY16	7.57617	2.03404	0.55801	0.17787
SFY17	7.53249	1.98763	0.51027	0.12948

Tablo 4.146: $t = 0.1$, $\nu = 1$, $k = 0.00001$ için Problem 1' in L_2 normunun karşılaştırılması

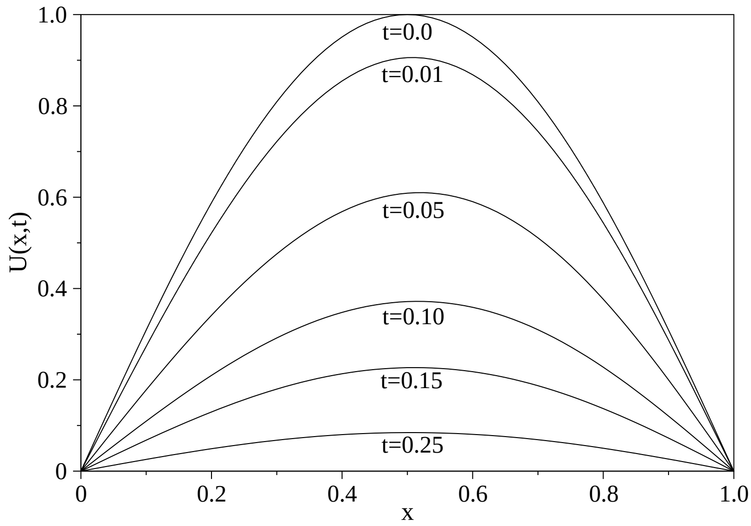
	$L_2 \times 10^3$			
Yöntem	$N = 10$	$N = 20$	$N = 40$	$N = 80$
HY	2.16915	0.54191	0.13515	0.03232
SFY1	2.20194	0.54052	0.12553	0.02184
SFY2	2.22710	0.56521	0.14768	0.03367
SFY3	2.21463	0.55329	0.13832	0.03460
SFY4	2.20208	0.54067	0.12568	0.02196
SFY5	2.20191	0.54050	0.12551	0.02178
SFY6	2.11904	0.45789	0.04116	0.07394
SFY7	2.10639	0.44549	0.03038	0.07993
SFY8	1.22273	1.20865	0.75396	0.41836
SFY9	1.19870	1.18334	0.72852	0.39289
SFY10	5.54227	2.27512	1.00165	0.46118
SFY11	5.56746	2.30052	1.02712	0.48666
SFY12	2.16489	0.53142	0.12321	0.02117
SFY13	2.19034	0.55702	0.14886	0.04683
SFY14	2.16508	0.53162	0.12342	0.02139
SFY15	2.20192	0.54051	0.12552	0.02180
SFY16	2.22746	0.56620	0.15125	0.04754
SFY17	2.21470	0.55336	0.13839	0.03467

Tablo 4.147: $t = 0.1$, $\nu = 1$, $k = 0.00001$ için Problem 1' in L_∞ normunun karşılaştırılması

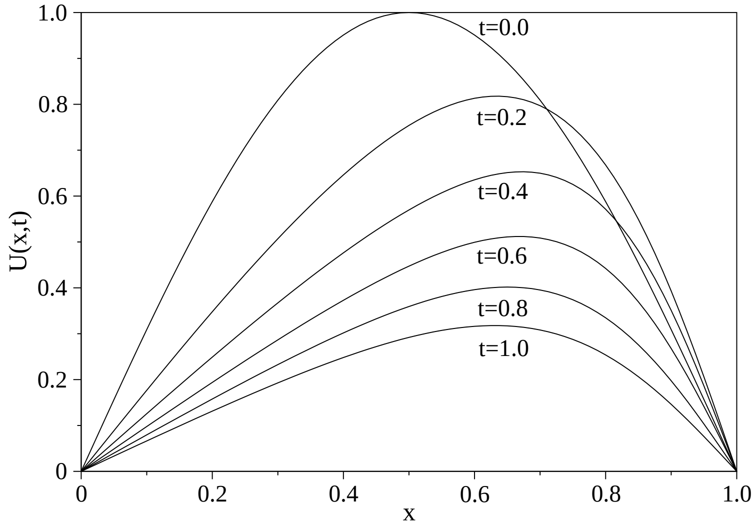
	$L_\infty \times 10^3$			
Yöntem	$N = 10$	$N = 20$	$N = 40$	$N = 80$
HY	3.08193	0.76985	0.19227	0.04599
SFY1	3.14782	0.77302	0.18053	0.03194
SFY2	3.18259	0.80792	0.21163	0.04844
SFY3	3.16535	0.79106	0.19849	0.04975
SFY4	3.14759	0.77306	0.18047	0.03176
SFY5	3.14694	0.77270	0.17997	0.03123
SFY6	3.03278	0.65838	0.06323	0.10466
SFY7	3.01508	0.64101	0.04832	0.11311
SFY8	1.54710	1.46757	0.93520	0.52521
SFY9	1.52438	1.43388	0.90025	0.48957
SFY10	7.25241	2.94809	1.28242	0.58562
SFY11	7.28783	2.98401	1.31851	0.62158
SFY12	3.06414	0.75208	0.17442	0.03003
SFY13	3.10002	0.78817	0.21071	0.06631
SFY14	3.06447	0.75244	0.17476	0.03037
SFY15	3.14738	0.77284	0.18025	0.03154
SFY16	3.18307	0.80934	0.21664	0.06793
SFY17	3.16523	0.79110	0.19845	0.04972

Tablo 4.148: $\nu = 0.5$, $h = 0.05$, $k = 0.0001$ ve $[a, b] = [0, 8]$ için Problem 3' ün hata normlarının karşılaştırılması

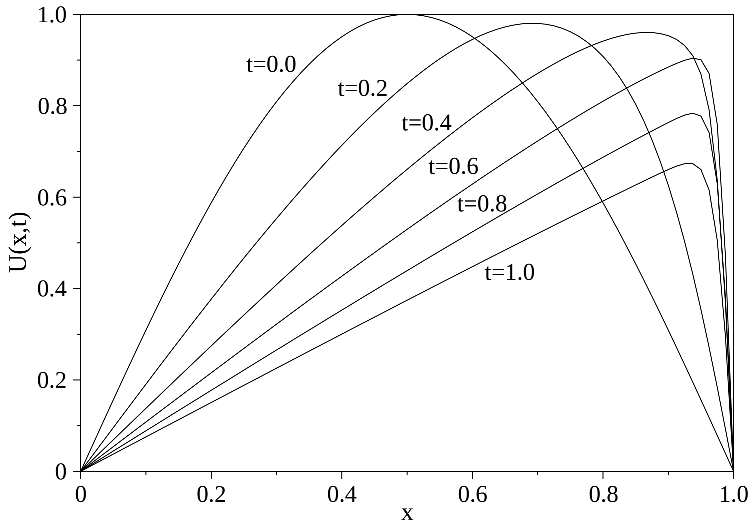
	$t = 1.5$			$t = 3.0$			$t = 4.5$		
Yöntem	$\|e\|_1 \times 10$	$L_2 \times 10^3$	$L_\infty \times 10^3$	$\|e\|_1 \times 10$	$L_2 \times 10^3$	$L_\infty \times 10^3$	$\|e\|_1 \times 10$	$L_2 \times 10^3$	$L_\infty \times 10^3$
HY	0.11872	0.02437	0.06425	0.21388	0.01725	0.03757	0.34849	0.14152	0.71285
SFY1	0.11463	0.01613	0.03887	0.21388	0.01289	0.03576	0.34898	0.14156	0.71289
SFY2	0.12269	0.02077	0.04832	0.21356	0.01573	0.03575	0.34915	0.14165	0.71287
SFY3	0.11848	0.01844	0.04358	0.21371	0.01429	0.03575	0.34907	0.14160	0.71288
SFY4	0.11464	0.01632	0.03821	0.21388	0.01288	0.03576	0.34895	0.14155	0.71289
SFY5	0.11467	0.01663	0.04006	0.21391	0.01328	0.03576	0.34902	0.14159	0.71289
SFY6	0.12270	0.02098	0.04769	0.21356	0.01575	0.03575	0.34911	0.14163	0.71287
SFY7	0.11851	0.01879	0.04387	0.21373	0.01447	0.03575	0.34906	0.14160	0.71288
SFY8	0.12788	0.31242	0.69222	0.26009	0.41417	0.68752	0.40861	0.41458	0.71367
SFY9	0.13547	0.31166	0.68305	0.25872	0.41401	0.68919	0.40857	0.41468	0.71366
SFY10	0.13130	0.32225	0.76115	0.25471	0.42065	0.70098	0.38363	0.41478	0.71206
SFY11	0.13918	0.32354	0.77044	0.25441	0.42098	0.70509	0.38345	0.41470	0.71204
SFY12	0.11487	0.01959	0.04855	0.21394	0.01429	0.03576	0.34860	0.14146	0.71287
SFY13	0.12293	0.02434	0.05954	0.21365	0.01720	0.03575	0.34876	0.14155	0.71285
SFY14	0.11489	0.01996	0.05024	0.21395	0.01453	0.03576	0.34857	0.14146	0.71287
SFY15	0.11465	0.01637	0.03945	0.21389	0.01308	0.03576	0.34900	0.14157	0.71289
SFY16	0.12268	0.02074	0.04708	0.21355	0.01559	0.03575	0.34910	0.14162	0.71287
SFY17	0.11849	0.01854	0.04326	0.21371	0.01429	0.03575	0.34905	0.14159	0.71288



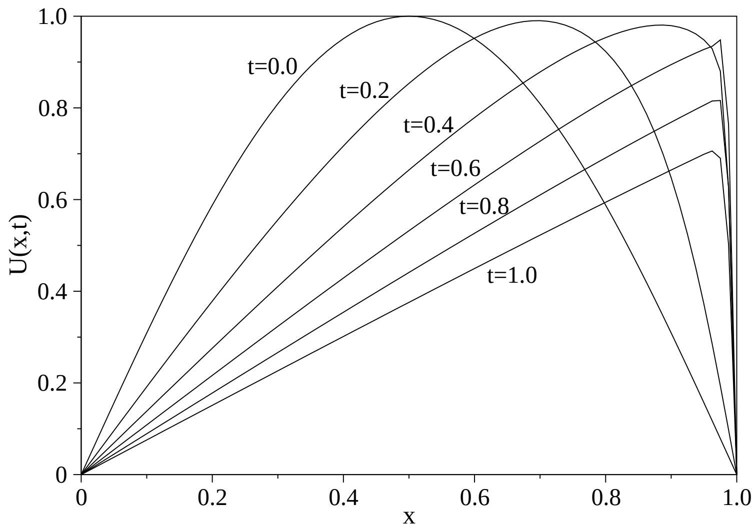
Şekil 4.1: $\nu = 1$, $k = 0.0001$, $h = 0.0125$ değerleri için Problem 1' in HY ile elde edilen nümerik çözümlerin değişik zamanlarda gösterimi.



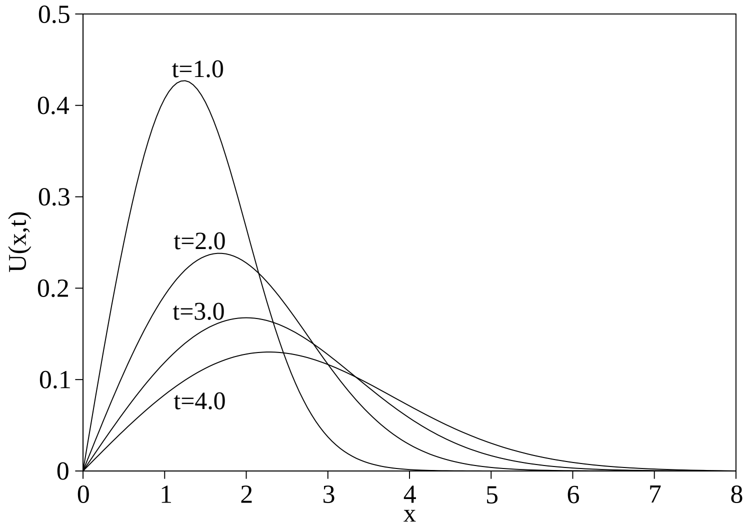
Şekil 4.2: $\nu = 0.1$, $k = 0.0001$, $h = 0.0125$ değerleri için Problem 1' in HY ile elde edilen nümerik çözümlerin değişik zamanlarda gösterimi.



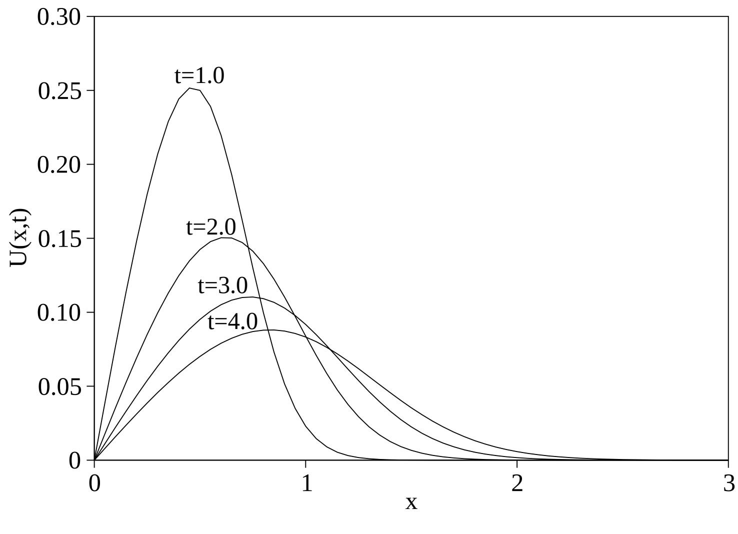
Şekil 4.3: $\nu = 0.01$, $k = 0.0001$, $h = 0.0125$ değerleri için Problem 1' in HY ile elde edilen nümerik çözümlerin değişik zamanlarda gösterimi.



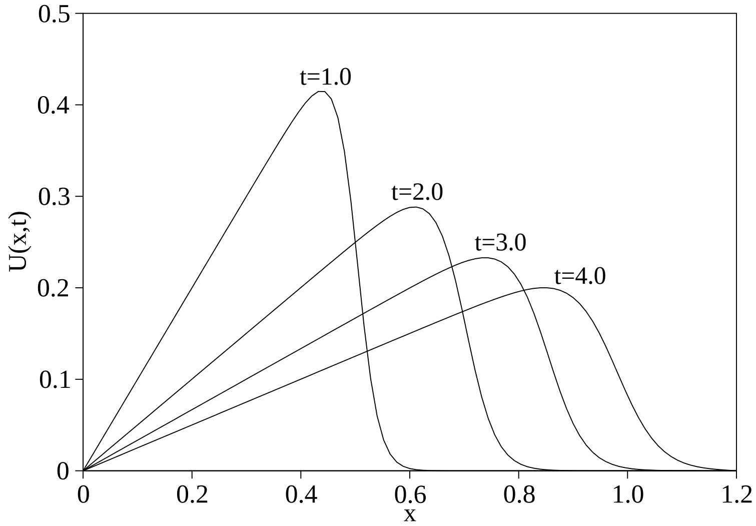
Şekil 4.4: $\nu = 0.005$, $k = 0.0001$, $h = 0.0125$ değerleri için Problem 1' in HY ile elde edilen nümerik çözümlerin değişik zamanlarda gösterimi.



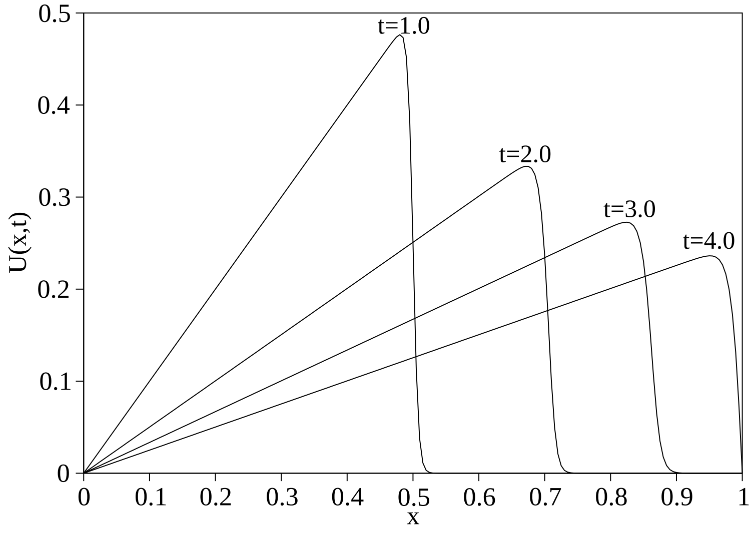
Şekil 4.5: $\nu = 0.5$, $k = 0.0001$, $h = 0.05$ ve $[a, b] = [0, 8]$ değerleri için Problem 3' ün SFY5 ile elde edilen nümerik çözümlerin değişik zamanlarda gösterimi.



Şekil 4.6: $\nu = 0.05$, $k = 0.0001$, $h = 0.05$ ve $[a, b] = [0, 8]$ değerleri için Problem 3' ün SFY5 ile elde edilen nümerik çözümlerin değişik zamanlarda gösterimi.



Şekil 4.7: $\nu = 0.005$, $k = 0.005$, $h = 0.012$ ve $[a, b] = [0, 1.2]$ değerleri için Problem 3' ün SFY5 ile elde edilen nümerik çözümlerin değişik zamanlarda gösterimi.



Şekil 4.8: $\nu = 0.001$, $k = 0.01$, $h = 0.005$ ve $[a, b] = [0, 1]$ değerleri için Problem 3' ün SFY5 ile elde edilen nümerik çözümlerin değişik zamanlarda gösterimi.

4.20 Kararlılık Analizi

(4.1) ile verilen Burgers denklemi yani

$$\frac{\partial U}{\partial t} + U\frac{\partial U}{\partial x} = \nu\frac{\partial^2 U}{\partial x^2}$$

denklemi için ağırlıklı averaj yaklaşımı, $\lambda \in [0,1]$ olmak üzere,

$$\begin{array}{l} \frac{U_m^{n+1}-U_m^n}{k} + \hat{U}[\lambda(\frac{U_{m+1}^{n+1}-U_{m-1}^{n+1}}{2h}) + (1-\lambda)(\frac{U_{m+1}^{n}-U_{m-1}^{n}}{2h})] = \\ \nu[\lambda(\frac{U_{m-1}^{n+1}-2U_m^{n+1}+U_{m+1}^{n+1}}{h^2}) + (1-\lambda)(\frac{U_{m-1}^{n}-2U_m^{n}+U_{m+1}^{n}}{h^2})] \end{array} \quad (4.19.1)$$

dir. Bu yaklaşım $\lambda = 0,\ \lambda = 1/2$ ve $\lambda = 1$ için sırasıyla standart açık, Crank-Nicolson ve kapalı yöntem olarak bilinir[1].

Şimdi (4.19.1) yaklaşımına von Neumann kararlılık yöntemini uygulayalım. Bunun için U_m^n yerine

$$U_m^n = e^{i\beta ph}\xi^q\ , \quad i = \sqrt{-1}$$

yazılır ve gerekli düzenlemeler yapılırsa

$$\xi(\frac{1}{k} - \hat{U}\lambda(\frac{e^{i\beta h}-e^{-i\beta h}}{2h}) - \nu\lambda(\frac{e^{i\beta h}-2+e^{-i\beta h}}{h^2})) = \frac{1}{k} - \hat{U}(1-\lambda)(\frac{e^{i\beta h}-e^{-i\beta h}}{2h}) - \nu(1-\lambda)(\frac{e^{i\beta h}-2+e^{-i\beta h}}{h^2})$$

elde edilir. Son eşitlikte $e^{i\beta h} = \cos\beta h + i\sin\beta h$ Euler formülünün kullanılmasıyla

$$\xi = \frac{\frac{1}{k} - \hat{U}(1-\lambda)\frac{i\sin\beta h}{h} + \nu(1-\lambda)(\frac{2\cos\beta h-2}{h^2})}{\frac{1}{k} - \hat{U}\lambda\frac{i\sin\beta h}{h} - \nu\lambda(\frac{2\cos\beta h-2}{h^2})}$$

bulunur.

$$\cos\beta h = 1 - 2\sin^2\frac{\beta h}{2}$$

olduğundan

$$\xi = \frac{1-(1-\lambda)[\frac{4\nu k}{h^2}\sin^2\frac{\beta h}{2} + i\frac{\hat{U}k}{h}\sin\beta h]}{1+\lambda[\frac{4\nu k}{h^2}\sin^2\frac{\beta h}{2} + i\frac{\hat{U}k}{h}\sin\beta h]}$$

elde edilir. Bu eşitlikte $r = k/h^2$ yazılırsa

$$\xi = \frac{1 - (1-\lambda)[4\nu r \sin^2 \frac{\beta h}{2} + i\frac{\hat{U}k}{h} \sin \beta h]}{1 + \lambda[4\nu r \sin^2 \frac{\beta h}{2} + i\frac{\hat{U}k}{h} \sin \beta h]}$$

elde edilir.

- $\lambda = 0$ ise (4.19.1) yaklaşımı açık sonlu fark yaklaşımına karşılık gelir. Yöntemin kararlı olması için gerek ve yeter şart $\mid \xi \mid \leq 1$ olmasıdır. $\mid \xi \mid \leq 1$ ise $0 \leq \mid \xi \mid^2 \leq 1$ olur.

$$\mid \xi \mid^2 = (1 - 4\nu r \sin^2 \frac{\beta h}{2})^2 + (\frac{\hat{U}k}{h} \sin \beta h)^2$$

ifadesi $\mid \xi \mid^2 \leq 1$ eşitsizliğinde

$$\sin \beta h = 2 \sin \frac{\beta h}{2} \cos \frac{\beta h}{2}$$

kullanılır ve gerekli düzenlemeler yapılırsa;

$$1 - 8\nu r \sin^2 \frac{\beta h}{2} + 16\nu^2 r^2 \sin^4 \frac{\beta h}{2} + \frac{\hat{U}^2 k^2}{h^2} 4 \sin^2 \frac{\beta h}{2} \cos^2 \frac{\beta h}{2} \leq 1$$

elde edilir. Buradan

$$r[\hat{U}^2 h^2 + (4\nu^2 - \hat{U}^2 h^2) \sin^2 \frac{\beta h}{2}] \leq 2\nu$$

bulunur. Böylece yöntemin kararlı olması için r parametresinin

$$r \leq min(\frac{2\nu}{\hat{U}^2 h^2}, \frac{1}{2\nu})$$

eşitsizliğini sağlayacak şekilde seçilmesi gerekir.

- $\lambda = 1$ ise (4.19.1) yaklaşımı tamamen kapalı sonlu fark yaklaşımına karşılık gelir. Yöntemin kararlı olması için yine gerek ve yeter şart $\mid \xi \mid \leq 1$ olmasıdır. Bu şart her $r > 0$ için sağlanacağından kapalı yöntem şartsız kararlıdır.

- $\lambda = 1/2$ ise (4.19.1) yaklaşımı Crank-Nicolson sonlu fark yaklaşımına karşılık gelir. Yine kararlılık için gerek ve yeter şart ξ parametresinin $\mid \xi \mid \leq 1$ şartını sağlamasıdır. Bu şart her $r > 0$ için sağlanacağından Crank-Nicolson sonlu fark yöntemi şartsız kararlıdır.

5. SONUÇ VE ÖNERİLER

Bu çalışmada 1-Boyutlu Burgers tipi denklemlerin sonlu fark çözümleri verildi.

Tezin birinci bölümünde sonlu fark yöntemleri ve kararlılık analizleri ile ilgili temel kavramlar verildi. Tezin ikinci bölümünde 1-Boyutlu Burgers denkleminin literatürde mevcut olan önceki araştırmacılar tarafından verilen nümerik çözümleri elde edildi. Ayrıca bu bölümde Hopf-Cole dönüşümü ve Burgers denklemi için gözönüne alınan farklı başlangıç şartlarına sahip olan model problemler verildi.

Tezin üçüncü bölümünde Hopf-Cole dönüşümü yardımıyla lineerleştirilen Burgers denkleminin klasik sonlu fark çözümleri araştırıldı. Elde edilen nümerik çözümler analitik çözümler ile karşılaştırıldı ve hata normları hesaplandı. Yöntemler kendi içerisinde konum-zaman adımlarının ve viskosite parametresinin farklı değerleri için karşılaştırıldı. Ayrıca bu bölümde kullanılan yöntemlerin kararlılık analizi incelendi.

Tezin dördüncü bölümünde 1-boyutlu Burgers denklemindeki UU_x non-lineer terim yerine değişik sonlu fark yaklaşımları yazılarak nümerik çözümler elde edildi. Sonuçlar, analitik çözümlerle ve önceki araştırmacıların verdiği nümerik sonuçlarla karşılaştırıldı. Ayrıca hata normları hesaplandı. Uygulanan değişik sonlu fark yaklaşımları ile elde edilen nümerik sonuçlar ve hata normları kendi aralarında karşılaştırıldı. Nümerik sonuçların değişik zamanlar için grafikleri çizildi. Burgers denkleminde UU_x non-lineer terimindeki U yerine yerel sabit alınarak ağırlıklı averaj yaklaşımı ile kararlılık analizi incelendi.

Elde edilen nümerik sonuçların, her bir model problemin analitik çözümü ve yayınlanmış nümerik sonuçlarla uyum içerisinde olduğu görüldü. Sonuç olarak UU_x non-lineer terimi yerine bu tezde kullanılan değişik sonlu fark yaklaşımları Burgers denklemine kolayca uygulanabildiği gibi mühendislikte karşılaşılan bu tip non-lineer yapıya sahip problemlere de rahatlıkla uygulanabilir.

KAYNAKLAR

[1] G.D. Smith, *"Numerical Solution of Partial Differantial Equations:Finite Difference Methods" , 3rd Edn., Clarendon Press,Oxford,(1987).*

[2] A.R. Mitchell ve D.F. Griffiths, *"The Finite Difference Method in Partial Differential Equations," John Wiley Sons Ltd.,(1990).*

[3] H. Bateman, *"Some recent researches on the motion of fluids" , Mon. Weather,Rev.,43,163-170,(1915).*

[4] J.M. Burgers, *"Mathematical examples illustrating relations occuring in the theory of turbulent fluid motion." , Trans. Roy, Neth. Acad. Sci., AMsterdam,17,1-53,(1939).*

[5] J.M. Burgers, *"A Model for one-dimensional compressible turbulence with two sets of characteristics." Proc. Roy. Neth. Acad. Sci. Amsterdam, B58,1-18,(1955).*

[6] J.D. Cole, *" On a quasi lineer parabolic equation occuring in aerodynamics.", Quart. Appl. Math.,9,225-236,(1951).*

[7] M.J. Lichthill, *" Viscosity effects in sound waves of finite amplitude, in surveys in mechanics (G.K.Batchlor ve R.M.Davies, Editörler)", Cambridge Univ. Press, Cambridge,250-351,(1956).*

[8] L.A. Pospelov, *"Propagation of finite-amplitude elastic waves", Soviet Physics Acoust. 11, 302-304,(1966).*

[9] B. Van der Poll, *"On a non-linear partial differential equations satisfied by the logarithm of the Jacobien theta-functions, with arithmetical applications", Proc. Acad. Sci. Amsterdam, A13, 261-284,(1951).*

[10] E.L. Miller, *"Predictor-corrector studies of Burger's model turbulent flow" M.S. Thesis, University of Delaware, Newark, Delaware (1966).*

[11] E. Hopf, *" The Partial Differential equation $U_t + UU_x = \nu U_{xx}$", Comm. Pure Appl. Math.,3,201-230, (1950).*

[12] E.R. Benton ve G.W. Platzman, *"A table of solutions of the one-dimensional Burgers equation.", Quarterly of Appl. Math., Jully, (1972).*

[13] V.I. Karpman, *"Nonlinear Waves in Dispersive Media", Pergamon Press,New York,(1975).*

[14] J. Caldwell, P. Wanless, A.E. Cook, *"A finite element approach to Burgers equation ", Appl. Math. Modelling 5, 189-193,(1981).*

[15] J. Caldwell, P. Smith, *"Solution of Burger's equation with large Reynolds number", Appl. Math. Modelling 6, 381-385,(1982).*

[16] D.J. Evans, A.R. Abdullah, *"The group explicit method for the solution of Burger's equation", Computing, 32, 239-253,(1984).*

[17] H. Nguyen, J. Reynen, *"A space-time finite element approach to Burgers equation", in: E. Hinton et al. (Eds.), Numerical Methods for Nonlinear Problems, vol.3, Pneridge Press, 718-728,(1987).*

[18] E. Varoğlu, W.D.L. Finn, *"Space time finite elements incorporating characteristics for the Burgers' equations", Int. J. Num. Methods Eng., 16, 171-184,(1980).*

[19] S.G. Rubin, R.A. Graves, *"Cubic spline approximation for problems in fluid mechanics", Nasa TR R-436, Washington, D.C.,(1975).*

[20] S.G. Rubin, P.K. Khosla, *"Higher-order numerical solutions using cubic splines", AIAA Journal, vol.14, no 7,851-858,(1976).*

[21] J. Caldwell, *"Application of cubic splines to the nonlinear Burgers' equation ", in: E. Hinton et al. (Eds.), Numerical Methods for Nonlinear Problems, vol.3, Pneridge Press, 253-261,(1987).*

[22] P.C. Jain, D.N. Holla, *"Numerical solution of coupled Burgers equation", Int. J. Nonlinear Mech. , 13, 213-222,(1978).*

[23] P.C. Jain, B.L. Lohar, *"Cubic spline technique for coupled non-linear parabolic equations", Comp. Math. Appl. , 5, 179-185,(1979).*

[24] B.L. Lohar, P.C. Jain, *"Variable mesh cubic spline technique for N-wave solutions of Burgers' equations", J. Comput. Phys. , 39, 433-442,(1981).*

[25] A.H.A. Ali, L.R.T. Gardner, G.A. Gardner *"A Galerkin approach to the solution of Burgers equation ", University College of North Wales, Bangor (U.K.), Maths Preprint series, no: 90.04,(1990)*

[26] L.R.T. Gardner, G.A. Gardner, A.H.A. Ali, *"A Method of Lines solution for Burgers equation ", Proceeding of the Asian Pacific Conference on Computational Mechanics, Hong Kong, 11-13 Aralık,(1991).*

[27] A.H.A. Ali, L.R.T. Gardner, G.A. Gardner *"A Collocation method for Burgers equation using cubic splines", Comp. Meth. Appl. Mech. Eng. , 325-337, (1992).*

[28] K. Kakuda, N. Tosaka, *"The generalized boundary element approach to Burgers' equation", Int. J. Num. Methods Eng., 29, 245-261,(1990).*

[29] T. Öziş, A.Özdeş, *"A direct variational method to Burgers' equation", J. Comput. Appl. Math., 71, 163-175, (1996).*

[30] R.C. Mittal ve Poonam Singhal, *"Numerical Solution of Burger's Equation" Communications in Numerical Methods in Engıneering, Vol.9, 397-406(1993).*

[31] N.W. Bazley, *"Approximation of operators with reproducing non-linearities" Manuscripta Math., 18, 353-369, (1976).*

[32] L.R.T. Gardner, G.A. Gardner, A. Doğan, *"A Petrov-Galerkin finite element scheme for Burgers equation ", Arab. J. Sci. Eng., 22, 99-109, (1997).*

[33] S. Katsuhiro, *"A new finite variable difference method with application to non-linear Burgers' equation ", Nonlinear Analysis, Theory, Methods Applications, vol. 30, no. 4, 2169-2180, (1997).*

[34] Y.C. Hon, X.Z. Mao, *"An efficient numerical scheme for Burgers' equation", Appl. Math. Comput., 95, 37-50, (1998).*

[35] E. Chino, N. Tosaka, *"Dual reciprocity boundary elements analysis of time-independent Burgers' equation ", Engineering Analysis with Boundary Elements, vol. 21, 261-270, (1998).*

[36] M.B. Abd-el-Malek, S.M.A. El-Mansi, *"Group theoretic methods applied to Burgers' equation ", J. Comp. Appl. Math., 115, 1-12, (2000).*

[37] E.B. Lin, X. Zhou, *"Connection coefficient on an interval and wavelet solution of Burgers' equation ", J. Comp. Appl. Math., 135, 63-78, (2001)*

[38] S. Kutluay, A.Esen, I. Dag, *"Numerical solutions of the Burgers' equation by the least squares quadratic B-spline finite element method", J. Comp. Appl. Math., 167, 21-33, (2004).*

[39] S. Kutluay, A.Esen, *"A Lumped Galerkin Method for solving the Burgers' equation ", Int. J. Comput. Math., vol. 81, no. 11, 1433-1444, (2004).*

[40] S. Kutluay, A.Esen, *"A Linearized Numerical Scheme for Burgers-like equations ", Appl. Math. Comp., 156, 295-305, (2004).*

[41] S. Kutluay, A.R. Bahadir, A. Özdeş, *"Numerical solution of one-dimensional Burgers equation: explicit and exact-explicit finite difference methods", Appl. Math. Comp., 103, 251-261, (1999).*

[42] A.R. Bahadir, M. Saglam, *"A mixed finite difference and boundary element approach to one-dimensional Burgers equation", Appl. Math. Comput., 160, 663-673, (2005).*

[43] T. Öziş, E.N. Aksan, A. Özdeş, *"A finite element approach for solution of Burgers equation", Appl. Math. Comput., 139, 417-428, (2003).*

[44] T. Öziş, A. Esen, S. Kutluay, *"Numerical solution of Burgers equation by quadratic B-spline finite elements", Appl. Math. Comput., 165, 237-249, (2005).*

[45] K.R. Raslan, *"A collocation solution for Burgers equation using quadratic B-spline finite elements", Intern. J. Computer Math., vol. 80, no. 7, 931-938, (2003).*

[46] İ. Dağ, D. Irk, B. Saka, *"A numerical solution of Burgers equation using cubic B-splines", Appl. Math. Comput., 163, 199-211, (2005).*

[47] M.A. Ramadan, T.S. El-Danaf, F.E.I. Abd Alaal, *"Numerical solution of Burgers equation using septic B-splines", Chaos, Solitons and Fractals, 26, 795-804, (2005).*

[48] İ. Dağ, B. Saka, A. Boz, *"B-spline galerkin methods for numerical solution of Burgers equation", Appl. Math. Comput., 166, 506-522, (2005).*

[49] M.A. Abdou, A.A. Soliman, *"Variational iteration method for solving Burger's and coupled Burger's equation", J. Comput. Appl. Math., 181, 245-251, (2005).*

[50] E. N. Aksan, A. Özdeş, *"A numerical solution of Burger's equation", Appl. Math. Comput., 156, 395-402, (2004).*

[51] E.N. Aksan, *"A numerical solution of Burger's equation by finite element method constructed on the method of discretization on time", Appl. Math. Comput., Article in Press, (2005).*

[52] M.K. Kadalbajoo, K.K. Sharma, A. Awasthi, *"A parameter-uniform implicit difference scheme for solving time-dependent Burgers' equation", Appl. Math. Comput., Article in Press, (2005).*

[53] M. Inc, *"On numerical solutions of one-dimensional nonlinear Burger's equation and convergence of the decomposition method", Appl. Math. Comput., Article in Press, (2005).*

[54] S. Abbasbandy, M.T. Darvishi, *"A numerical solution of Burgers' equation by modified Adomian method", Appl. Math. Comput., 163, 1265-1272, (2005).*

[55] M.T. Darvishi, M. Javidi, *"A numerical solution of Burgers' equation by pseudospectral method and Darvishi's preconditioning", Article in Press, (2005).*

[56] T. Öziş, Y. Aslan, *"The semi-approximate approach for solving Burgers' equation with high Reynolds number", Appl. Math. Comput., 163, 131-145, (2005).*

[57] I.A. Hassanien, A.A. Salama, H.A. Hosham, *"Fourth-order finite difference method for solving Burgers' equation", Article in Press, (2005).*

[58] M. Gülsu, T. Öziş, *"Numerical solution of Burgers' equation with restrictive Taylor approximation", Article in Press, (2005).*

[59] A.R. Gourlay, *" Hopscotch: a Fast Second-order Partial Differantial Equation Solver", J.Inst.Maths. Applics, 6, 375-390, (1970).*

[60] P. Gordon, *" Nonsymmetric Difference Equations", SIAM J., 13, 667-673, (1965).*

[61] I.S. Greig ve J.LI Morris, *"A Hopscotch Method for the Korteweg-de Vries Equations", J. Comp. Phys. 20, 64-80 (1976).*

[62] N.J. Zabusky, M.D. Kruskal, *"Interaction of "Solitons" in a collisionless plasma and the recurence of initial states", Phys. Rev. Lett., 15, 240-243 (1965).*

ÖZGEÇMİŞ

09.08.1975 tarihinde Malatya' da doğdu. İlk ve orta öğrenimini Malatya' da tamamladı. 1997 yılında Karadeniz Teknik Üniversitesi Mühendislik-Mimarlık Fakültesi Bilgisayar Mühendisliği bölümünden mezun oldu. Halen İnönü Üniversitesi Akçadağ Meslek Yüksek Okulunda Öğretim Görevlisi olarak çalışmaktadır.

Sürekli Adres: İnönü Üniversitesi, Akçadağ Meslek
Yüksekokulu, 44280 Malatya,
yucar@inonu.edu.tr