T.C.
İNÖNÜ ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

MODÜLÜS FONKSİYONU YARDIMIYLA TANIMLANAN BAZI ÇİFT İNDİSLİ DİZİ UZAYLARI

Gülsen KILINÇ

DOKTORA TEZİ
MATEMATİK ANABİLİM DALI

MALATYA
Temmuz 2006

Fen Bilimleri Enstitüsü Müdürlüğü'ne,

Bu çalışma, Jürimiz tarafından Matematik Anabilim Dalı'nda DOKTORA TEZİ olarak kabul edilmiştir.

Prof. Dr. Feyzi BAŞAR

Başkan

Prof. Dr. Mikail ET

Üye

Prof. Dr. İhsan SOLAK

Üye

Doç. Dr. Hüsamettin COŞKUN

Üye

Doç. Dr. Bayram ŞAHİN

Üye

Onay

Yukarıdaki imzaların adı geçen öğretim üyelerine ait olduğunu onaylarım.

..... / ..... / ....

(İmza)

Prof. Dr. Ali ŞAHİN

Enstitü Müdürü

ÖZET

Doktora Tezi

MODÜLÜS FONKSİYONU YARDIMIYLA TANIMLANAN BAZI ÇİFT İNDİSLİ DİZİ UZAYLARI

Gülsen KILINÇ

İnönü Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Anabilim Dalı

48+iv sayfa

2006

Danışman: Prof. Dr. İhsan SOLAK

Üç bölüm olarak hazırlanan bu çalışmanın ilk bölümünde daha sonraki bölümlerde kullanılacak kavram tanımları ile bazı önemli teoremlere yer verilmiştir.

İkinci bölümünde modülüs fonksiyonu yardımıyla tanımlanan $L_u(f)$ skalar değerli çift dizi uzayı ile $L_u(X,f)$ vektör değerli çift dizi uzayları tanımlanarak bu uzayların cebirsel ve bazı topolojik özellikleri incelenmiştir. Ayrıca vektör değerli $L_u(X)$ ve $L_u(X,f)$ uzayları için baz işlevi gören operatörlerin bir ailesi verilmiştir.

Üçüncü bölümde ise $L_u(X)$, $L_u(X,f)$ ve $L_u(f)$ uzaylarının sürekli dualleri bulunmuş, vektör değerli çift dizi uzayları için perfektlik , normallik ve monotonluk tanımları verilerek sözkonusu uzayların α ve $\beta(\nu)$ dualleri belirlenmiştir.

ANAHTAR KELİMELER: Çift dizi uzayı, modülüs fonksiyonu, paranormlu uzay, vektör değerli çift dizi uzayı

ABSTRACT

Ph.D. Thesis

SOME DOUBLE SEQUENCE SPACES DEFINED BY A MODULUS FUNCTION

Gülsen KILINÇ

İnönü University
Graduate School of Natural and Applied Sciences
Department of Mathematics

48+iv pages

2006

Supervisor: Prof. Dr. İhsan SOLAK

In the first chapter of this work which was prepared as three chapter, definitions of some notions and important theorems which will be used in the following chapter are given.

In the second chapter of this work, by introducing the space $L_u(f)$ of scalar valued double sequences and the space $L_u(X,f)$ of vector valued double sequences some algebraic and topological properties of these spaces are studied. Also the family of operators which forms a basis on the spaces $L_u(X)$ and $L_u(X,f)$ are given.

In the last chapter of this work, topological duals of the spaces $L_u(X)$, $L_u(X,f)$ and $L_u(f)$ are found, and by giving perfectness, normality and monotonicity definitions for vector valued double sequence spaces, α and $\beta(\nu)$ duals of the spaces $L_u(X)$, $L_u(X,f)$ and $L_u(f)$ spaces are determined.

KEY WORDS: Double sequence space, Modulus function, paranormed space, vector valued double sequence space

TEŞEKKÜR

Bu çalışmayı bana vererek, hazırlanmasında desteğini esirgemeyen hocam Sayın Prof. Dr. İhsan Solak'a, gerek kaynak temininde ve gerekse karşılaştığım bazı problemleri tartışmak için bana zamanlarını ayıran değerli arkadaşlarım Dr. Yılmaz Yılmaz'a ve Doç. Dr. Bilal Altay'a, tezin yazımındaki desteklerinden dolayı yeğenim Semra Zeren'e, tezin yazım sonrası düzenlenmesinden dolayı değerli arkadaşım Dr. M. Kemal Özdemir'e ve manevi desteğinden dolayı eşim Kazım Kılınç'a teşekkürlerimi sunarım.

İÇİNDEKİLER

GİRİŞ

Tek dizilerin toplanabilme teorisi, 20.yüzyılın ikinci yarısında fonksiyonel analitik metotlar yardımıyla modern alanda hızlı bir gelişme göstermiştir. Fakat çift dizi uzaylarının topolojik yapısının güçlüğü paralel bir gelişmeye engel olmuştur. Bu güçlük, geleneksel fonksiyonel analiz metotlarının kullanımının daha komplike hâle gelmesinden doğar.

Çift dizi uzaylarında tek dizi uzaylarında olduğu gibi tek tür yakınsaklık yoktur. Birden fazla yakınsaklık çeşidi mevcuttur. Bu yakınsaklık çeşitlerinden Pringsheim anlamında yakınsaklık, doğal sıralı $\mathbb{N}\times\mathbb{N}$ cümlesi üzerindeki ağların yakınsaklığı gibi tanımlanır. Bu yakınsaklığın ana eksikliği, genel olarak bu yakınsaklığın dizinin sınırlılığını gerektirmemesidir. Hardy [16] tarafından tanımlanan regüler yakınsaklık bu olumsuzluğu giderir. Regüler yakınsaklık, Pringsheim anlamında yakınsaklığa ilâve olarak çift dizinin satır ve sütunlarının yakınsaklığını gerektirir. Pringsheim anlamında yakınsak dizilerin uzayı C_p ile, regüler yakınsak çift dizilerin uzayı da C_r ile gösterilir. Regüler yakınsak çift dizilerin uzayı oldukça basit bir yapıya sahiptir. Bu nedenle fonksiyonel analiz metotlarının rahatlıkla kullanıldığı yegâne çift dizi uzayıdır.

C_p uzayı doğal topolojisi ile metriklenemez. C_p' nin topolojisi, Boos, Leiger ve Zeller [9] tarafından verildi.

Bir çift dizinin her kolonu yakınsak ve de kolon limitlerinin dizisi de yakınsak ise bu çift diziye $c-$yakınsaktır denir. $c-$yakınsak dizilerin uzayı C_c ile gösterilir.

Pringsheim yakınsaklıkta k. satır l. sütun bağımsız olarak sonsuza gider. $e-$yakınsaklıkta ise dizinin k. satırı l. sütuna bağlı olarak sonsuza gider. $e-$yakınsaklık, Pringsheim yakınsaklığı genelleştirir. Boos, Leiger, Zeller $e-$yakınsak çift dizilerin C_e uzayının metriklenemediğini gösterdi. C_c uzayı, kolonları sınırlı olan $e-$yakınsak çift dizilerin C_{be} uzayının ayrılabilir kapalı altuzayıdır.

Kojima [19], Robison [18] ve Hamilton [20] klâsik analiz metotlarını kullanarak regüler yakınsak dizi uzaylarını, 4-boyutlu matrislerle tanımlanan dönüşümlerle bağlantılı olarak çalıştılar. Hamilton'un [20] çalışması bunlar arasında en kaydadeğer olanıdır. Çünkü Hamilton bu çalışmada; daha önce yapılan çalışmaların sonuçlarını ve 256 matris dönüşümünün tam şartlarını vermiştir.

Hill [21], fonksiyonel analiz metotlarını çift dizilere uygulayan ilk matematikçidir. Hill regüler yakınsak çift dizi uzayının topolojik dualini, ve regüler yakınsaklığa göre matrislerin perfectliğini tanımladı. Jürimäe [22] ise regüler yakınsaklığa göre 4-boyutlu matrislerin topolanabilme alanının topolojik yapısını ve topolojik dualini tanımladı. Fonksiyonel analiz metotları, Kull [23] tarafından da çift dizilerin matris dönüşümlerinin çalışılmasında kullanıldı. FDK-uzayı kavramı da ilk defa Stieglitz [24] daha sonra da Okutoyi [25] tarafından kullanıldı.

Türkmenoğlu [17] pozitif reel sayıların bir $t = (t_{mn})$ dizisi yardımı ile bazı çift dizi uzaylarını tanımlayarak bu uzayları, paranormlu çift dizi uzayı yapan şartları verdi. Ayrıca bu uzayların duallerini ve bu uzaylar arasındaki kapsama bağıntılarını gösterdi.

Moricz [8] de Pringsheim yakınsak, sıfıra Pringsheim yakınsak ve regüler yakınsak çift dizi uzaylarının bazı özelliklerini verdi. Jardas ve Sarapa [26] iki kompleks tek dizinin çarpımı ile tanımlanan çift dizilerin toplanabilirliğini çalışarak üç boyutlu matrisler için Steinhaus ve Silverman-Toeplitz tipi teoremleri ispatladı. Boos, Leiger ve Zeller [9] sonsuz matrislerin bir $A = \left(A^{(\nu)}\right)$ dizisinin bir uygulamasıyla "$\nu-$SM metot " kavramını tanımladı ve bu tip metotlar için tutarlılık teorisini verdi. Ayrıca C_e çift dizi uzayını inşa etti.

M. Zeltser [28] gliding hump tekniklerini kullanarak $\lambda, \mu \in \{C_e, C_{be}\}$ olmak üzere λ uzayından μ uzayına tanımlı 4-boyutlu matris dönüşümlerini karakterize etti. M. Zeltser [29] aynı argümanları kullanarak $C_e - SM$ ve $C_{be} - SM$ metotlarının koersiv ve konservatif olması için gerek ve yeter şartları belirleyen teoremleri verdi. Zeltser [30] ayrıca bir E çift dizi uzayı ile E nin bir $\nu-$yakınsaklığa göre $(\nu \in \{p, bp, r\})$ $E^{\beta(\nu)}$ β-dualinin $< E,\ E^{\beta(\nu)} >$ dual çiftini gözönüne alarak E için 2-oscillating özelliğini verdi. Ayrıca M. Zeltser [31] dört boyutlu matrislerle tanımlanan çift dizilerin toplanabilme metotlarının ikisinden bahseder. Bu metotlar c-yakınsaklığı ve regüler yakınsaklığı korur ve dört boyutlu matrislere, toplanabilmenin bazı bilinen sonuçlarını genişletir. Patterson [32], $\liminf$ ve $\limsup$, dört boyutlu matrislerin regülerliği kavramı ile bir çift dizinin çekirdeği tanımlarını kullanarak bir invaryant core teoremini ispatladı.

Mursaleen ve Edely [33], çift diziler için Cauchy ve istatistiksel yakınsaklık kavramlarını tanımlayarak Cesaro toplanabilir çift diziler ile istatistiksel yakınsak çift diziler arasındaki bağıntıyı verdiler.

Gökhan ve Çolak [34, 35] $M_u(t), C_p(t), C_{bp}(t)$ uzaylarının tam paranormlu olduğunu ispatlayarak $M_u(t)$ ve $C_{bp}(t)$ uzaylarının Köthe-Toeplitz duallerini verdiler.

B. Altay [27] ise toplamları sınırlı Pringsheim ve regüler yakınsak seri oluşturan çift dizilerin ve sınırlı salınımlı çift dizi uzaylarını oluşturarak bu uzayların bazı özellikleri ile $\alpha-$ ve $\beta(\nu)-$ duallerini verdi.

Modülüs fonksiyonu ilk defa 1953 de Nakano [4] tarafından tanımlanmış ve skaler FK-uzayları teorisinin bazı problemlerin çözümünde bu fonksiyon yardımıyla oluşturulan dizi uzayları kullanılmıştır. Bu problemlerin en önemlisi, A. Wilansky'nin "Birim vektörler dizisinin sınırlı olduğu en küçük FK-uzayı var mıdır?" sorusudur. Bu soruya W. H. Ruckle modülüs fonksiyonu yardımıyla elde ettiği dizi uzayı yardımıyla olumsuz cevap vermiştir. Birçok matematikçi tarafından modülüs fonksiyonu ile elde edilen dizi uzayları incelenmiştir.

[14] de Y. Yılmaz ise modülüs fonksiyonu yardımıyla inşa edilen vektör değerli dizi uzayları için operatör perfektlik, normallik, monotonluk kavramları ile bu uzayların bazılarının genelleştirilmiş Köthe-Toeplitz dualleri ile sürekli duallerini verdi.

Bu çalışmada; f modülüs fonksiyonu kullanılarak, $L(f)$ tek dizi uzayının benzeri bir çift dizi uzayının tanımlanması, bu uzayın bazı cebirsel ve topolojik özelliklerinin incelenmesi amaçlanmıştır. Ayrıca bu uzayın Köthe-Toeplitz ve sürekli duallerini de bulmak amaçlarımız arasındadır.

Yukarıda belirttiğimiz amaç doğrultusunda bu çalışmada $L_u(f)$ skaler değerli çift dizi uzayı ile $L_u(X, f)$ vektör değerli çift dizi uzayı tanımlanmış ve bu uzayların bazı topolojik özellikleri incelenmiştir. Ayrıca bu uzayların Köthe-Toeplitz ve sürekli dualleri elde edilmiştir.

BÖLÜM 1

TEMEL KAVRAMLAR VE TEOREMLER

1.1 Metrik ve Topolojik Vektör Uzayları

Bu bölümde, çalışmamızda kullanacağımız temel kavram ve teoremlere yer vereceğiz.

Tanım 1.1.1. *X boş olmayan herhangi bir cümle olmak üzere;*

$$d : X \times X \to \mathbb{R}$$

fonksiyonu her $x, y, z \in X$ için,

i) $x = y \Rightarrow d(x, y) = 0,$

ii) $d(x, y) = d(y, x),$

iii) $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$

özelliklerini sağlarsa d'ye X üzerinde bir yarımetrik, (X, d)'ye de bir yarımetrik uzay denir.

Eğer (i) de $\Rightarrow$ yerine $\Leftrightarrow$ alınırsa d'ye metrik denir.

Topolojisi yarımetrikten (metrikten) elde edilebilen bir topolojik uzaya yarımetriklenebilir (metriklenebilir) dir denir [1].

Tanım 1.1.2. *X ve Y yarımetrik uzaylar olmak üzere*

$$f : X \to Y$$

fonksiyonunun sürekli olması için gerek ve yeter şart X'de $x_n \to x$ olan her (x_n) dizisi için Y 'de $f(x_n) \to f(x)$ olmasıdır.

Bu, aslında dizisel süreklilik tanımıdır. Ancak yarımetriklenebilir topolojilerde süreklilikle çakışıktır [2].

Tanım 1.1.3. *Bir X topolojik uzayının her farklı x, y nokta çiftini ayıran ayrık N_x, N_y açık cümleleri varsa X uzayına T_2 uzayı veya Hausdorff uzayı, topolojisine de Hausdorff topolojisi denir.*

Metrik uzayların topolojileri Hausdorff iken yarımetrik uzaylarınki değildir [2].

Tanım 1.1.4. *X bir vektör uzayı ve $g : X \to \mathbb{R}$ bir fonksiyon olmak üzere*

i) $g(0) = 0$

ii) $g(x) \geq 0$

iii) $g(-x) = g(x)$

iv) $g(x + y) \leq g(x) + g(y)$

v) *(t_n) skalerlerin bir dizisi ve $t_n \to t$ olmak üzere $g(x_n - x) \to 0$ olan $(x_n) \subset X$ için*

$$g(t_n x_n - tx) \to 0$$

(skalerle çarpımın sürekliliği) şartları sağlanıyorsa g'ye X üzerinde bir paranorm ve (X, g) 'ye de paranormlu uzay denir. Ayrıca, $g(x) = 0 \Longrightarrow x = 0$ şartı da sağlanıyorsa paranorma totaldir denir [1].

Uyarı 1.1.1. *Eğer d fonksiyonu,*

$$d(x, y) = g(x - y)$$

ile tanımlanırsa d , X üzerinde bir yarımetriktir, g total ise d metriktir. Tanım 1.1.4'de g; (i), (ii), (iv) şartlarının yanısıra, mutlak homojenlik denilen

$\mathbf{i}_1$) *Her $t \in \mathbb{C}$ ve $x \in X$ için $g(tx) = |t|\, g(x)$*

*şartını da sağlarsa g'ye yarınorm üstelik total ise norm denir. (**$\boldsymbol{i}_1$**) şartı, (ii) ve (v) şartlarını gerektirmektedir. Bu nedenle her yarınorm (norm), bir paranorm (total paranorm)dur. Bir normlu uzay normdan elde edilen metriğe göre tam (yani, uzaydaki her Cauchy dizisi bu metriğe göre uzaydaki bir noktaya yakınsak) ise bu uzaya Banach uzayı denir.*

Tanım 1.1.5. *Bir topolojik vektör uzayı; üzerinde bir topoloji olan ve vektör uzayı işlemlerinin bu topolojide sürekli olduğu bir vektör uzayıdır. Kısaca TVU ile gösterilir ve bu topolojiye X için vektör topolojisi denir [1].*

Uyarı 1.1.2. *Tanım 1.1.4'deki (ii) ve (v) şartları, vektör uzayı işlemlerinin bu topolojide sürekli olduğunu göstermektedir. O halde her paranormlu uzay bir TVU uzayıdır. Bir X TVU'nun topolojisi bir d yarımetriğinden elde edilebiliyorsa*

$$p(x) = d(x, 0)$$

ile tanımlanan fonksiyon aynı topolojiyi veren paranormdur. Daha genel olarak topolojisi birinci sayılabilir olan bir TVU paranormlu uzaydır [1].

Tanım 1.1.6. *X ve Y vektör uzayları ve $T : X \to Y$ bir lineer dönüşüm olsun. T birebir ve örten ise T'ye bir lineer izomorfizm denir. Örtenlik şartı kaldırılırsa içine izomorfizm denir. Uzaylar topolojik ve T birebir, örten, sürekli ve tersi de sürekli bir dönüşüm ise bir homeomorfizm adını alır. X ve Y yarımetrik uzaylar, T birebir bir dönüşüm ve her $x, y \in X$ için*

$$d_X(x, y) = d_Y(Tx, Ty)$$

ise T'ye bir izometri denir (X bir metrik uzay ise birebirlik şartı gereksizdir). Uzaylar lineer yarımetrik ve T hem lineer izomorfizm, hem de bir izometri, yani izometrik izomorfi ise T'ye bir denklik dönüşümü ve bu iki uzaya da denktir denir [2].

Tanım 1.1.7. *X bir TVU ve (b_n), X de bir dizi olsun. Her $x \in X$ için X'in topolojisinde*

$$x - \sum_{n=1}^{m} t_n b_n \to 0 \qquad (m \to \infty)$$

olacak şekilde skalerlerin bir tek (t_n) dizisi mevcut ise (b_n) dizisine X için bir bazdır denir.

Bu, $x \in X$'in $x = \sum t_n b_n$ şeklinde tek türlü temsil edebileceği anlamına gelir.

Bu temsile göre

$$l_n(x) = t_n$$

ile l_n lineer fonksiyonellerini tanımlayalım. Eğer her bir $l_n \in X'$ ise (b_n), X için bir Schauder Bazıdır denir [1].

Uyarı 1.1.3. *Yukarıda tanımlanan baz kavramı, Hamel bazıyla karıştırılmamalıdır.*

Bir vektör uzayını geren, lineer bağımsız cümleye vektör uzayının Hamel bazı denir.

Zira, her vektör uzayı bir Hamel baza sahiptir. Bir TVU'nun Hamel bazı, uzayın topolojisine bağlı değildir. Fakat yukarıda verilen baz tanımı topolojiye bağlıdır. Sonlu boyutlu uzaylarda her iki baz kavramı çakışıktır.

Örnek 1.1.1. *$e_k = (0, 0, ..., 0, 1, 0, ...)$ $(1, k.yerde)$ olmak üzere birim vektörlerin (e_k) dizisi c_0, w ve $l_p\,(0 < p < \infty)$ (bu durumda sadece l_p yazacağız) uzayları için bir Schauder bazıdır. Ayrıca $e = (1, 1, ...)$ olmak üzere $(e, e_1, e_2, ...)$ dizisi, c için bir Schauder bazıdır. Diğer taraftan l_∞ bir baza sahip değildir, [2]. Burada w bütün kompleks terimli dizilerin uzayını, c_0 sıfıra yakısak dizilerin uzayını, l_∞ sınırlı dizilerin uzayını, c yakınsak dizilerin uzayını ve l_p ise*

$$l_p = \{x = (x_k) \in w : \sum |x_k|^p < \infty, 0 < p < \infty\}$$

uzayını göstermektedir.

Tanım 1.1.8 (*Modülüs fonksiyonu*). *$f : [0, \infty) \to [0, \infty)$ fonksiyonu, aşağıdaki özellikleri sağlıyorsa modülüs fonksiyonu adını alır. Her $t, z \in [0, \infty)$ için,*

i) $f(t) = 0 \Leftrightarrow t = 0$,

ii) $f(t + z) \leq f(t) + f(z)$,

iii) *f artandır,*

iv) *f sıfırda sağdan süreklidir [3].*

(ii) ve (iv) özelliklerinden dolayı f, $[0, \infty)$'da süreklidir. Örneğin $0 < r \leq 1$ için $f(t) = t^r$ fonksiyonu bir modülüs fonksiyonudur.

Modülüs fikri ilk defa Nakano tarafından [4]'de ortaya atılmıştır. Albert Wilansky'nin "*(e_k) birim vektörler dizisinin sınırlı olduğu en küçük FK-uzayı var mıdır?*" sorusunu cevaplamak için W. H. Ruckle f modülüs fonksiyonu ile oluşturulan $L(f)$ skalar FK-uzaylarını kullandı ve sorunun cevabının olumsuz olduğunu gösterdi [5].

Önerme 1.1.1. *f_1 , f_2 modülüs fonksiyonları ise $f_1 + f_2$, $f_1 \circ f_2$ fonksiyonları da modülüs fonksiyonudur. Fakat $f_1 - f_2$, f_1/f_2 , $f_1.f_2$, f_1^{-1} fonksiyonlarının modülüs fonksiyonu olması gerekmez, [6].*

Lemma 1.1.1. *f özdeşlik fonksiyonundan farklı, sınırsız bir modülüs fonksiyonu olsun. Bu durumda her $x \in [0, \infty)$ için*

$$f\left(\frac{x}{n}\right) > \frac{1}{n}$$

olacak şekilde bir n pozitif tamsayısı vardır [14].

İspat. $x \in [0, \infty)$ keyfi olsun ve böyle bir n olmadığını kabul edelim. Bu durumda her n pozitif tamsayısı için

$$f\left(\frac{x}{n}\right) \leq \frac{1}{n}$$

yani,

$$nf\left(\frac{x}{n}\right) \leq 1$$

yazarız. Bu durumda modülüs foksiyonunun (ii) şartından

$$\begin{aligned} f(x) &= f\left(n\frac{x}{n}\right) \\ &= f\left(\frac{x}{n} + \frac{x}{n} + \cdots + \frac{x}{n}\right) \\ &\leq f\left(\frac{x}{n}\right) + f\left(\frac{x}{n}\right) + \cdots + f\left(\frac{x}{n}\right) \\ &= nf\left(\frac{x}{n}\right) \end{aligned}$$

olduğundan $f(x) \leq 1$ elde ederiz. x keyfi olduğundan, aynı şekilde her $x \in [0, \infty)$ için

$$f(x) \leq 1$$

elde ederiz ki bu f'nin sınırsız olmasıyla çelişir. □

Tanım 1.1.9. *C, K cismi üzerinde bir lineer uzay olsun. Her $x, y, z \in C$ ve her $\alpha \in K$ için (vektörler arasında çarpma denilen)*

$$\cdot : C \times C \to C$$

işlemi aşağıdaki şartları sağlıyorsa C 'ye (K üzerinde) bir cebir denir. Burada K, reel veya kompleks sayılar cismini göstermektedir.

C$_1$) $\alpha(x \cdot y) = (\alpha x)\, y = x\,(\alpha y)\,.$

C$_2$) $x \cdot (y+z) = x \cdot y + x \cdot z$ *ve* $(x+y)\, z = x \cdot z + y \cdot z$

C$_3$) $x \cdot (y \cdot z) = (x \cdot y) \cdot z$

Şayet C bir cebir ve her $x, y \in C$ için $x \cdot y = y \cdot x$ ise C'ye *değişmeli cebir* denir. C'nin çarpma işlemine göre etkisiz elemanı varsa yani her $x \in C$ için $x \cdot e = e \cdot x = x$ olacak şekilde bir $e \in C$ varsa C'ye *birimli cebir* ve e'ye de *birim eleman* denir. Bu birim eleman, bazan 1_C ile de gösterilir.

C, birimli bir cebir ise bu e bir tektir [11].

Tanım 1.1.10 (*Normlu cebir, Banach cebiri*). *C bir cebir olmak üzere C de bir $\|\cdot\|$ normu tarif edilmiş olsun. Bu norm, her $x, y \in C$ için*

$$\|xy\| \leq \|x\| \, \|y\|$$

şartını sağlıyorsa ve C'nin birim elemanlı olması halinde de

$$\|e\| = 1$$

ise C'ye normlu cebir denir. $(C, \|\cdot\|)$ normlu cebiri, normlu lineer uzay olarak tam ise bu normlu cebire Banach cebiri adı verilir [11].

Tanım 1.1.11. *X normlu bir uzay olmak üzere*

$$L(X, \mathbb{C}) = \{ f \mid f : \; X \to \mathbb{C}, \; f \text{ lineer} \}$$

şeklinde tanımlanan $L(X, \mathbb{C})$'ye X'in cebirsel duali denir ve X^+ ile gösterilir.

$B(X, \mathbb{C}) = \{ f \mid f : \; X \to \mathbb{C}, \; f \text{ lineer ve sürekli} \}$ olarak tanımlanan $B(X, \mathbb{C})$'ye X'in *topolojik veya sürekli duali denir ve* X^* ile gösterilir. Çoğu zaman topolojik duale kısaca *dual* de denir [12]. Sürekli dual X' ile de gösterilir. Bu çalışmada X' gösterimi kullanılacaktır.

Tanım 1.1.12. *Metriklenebilir ve tam TVU uzayına veya kısaca tam ve total paranormlu uzaya Fréchet uzayı denir [1].*

Her Banach uzayı bir Fréchet uzayıdır, fakat tersi doğru değildir.

Teorem 1.1.1. *Bir Fréchet uzayının bazı, Schauder baz olmak zorundadır [1].*

Tanım 1.1.13. *X bir vektör uzayı ve $V \subseteq X$ olsun. $0 \leq t \leq 1$ ve $s + t = 1$ için $sV + tV \subseteq V$ ise V'ye konveks, $|t| \leq 1$ için $tV \subseteq V$ ise dengeli ve her $x \in X$ ve $|t| < \varepsilon$ için $tx \in V$ olacak şekilde bir $\varepsilon > 0$ varsa V'ye absorbe (yutan) cümle denir [1].*

Tanım 1.1.14. *Bir TVU uzayında sıfırın her komşuluğu sıfırın konveks bir komşuluğunu ihtiva ediyorsa bu uzaya lokal konvekstir denir [1].*

Yarınormlu uzaylar lokal konvekstir, fakat paranormlu uzaylar için bunu söylemek mümkün değildir. Lokal konveks uzayların topolojileri yarınormlar ailesi ile verilir. Lokal konveks uzaylar zengin dual uzaylara sahiptir. Bu nedenle dualite teorisi bu uzaylar üzerine kurulur [1].

Tanım 1.1.15. *Yarınormlu uzaylar arasındaki bir T lineer dönüşümü ve her $x \neq 0$ için*

$$\|Tx\| \leq K \|x\|$$

olacak şekilde bir $K > 0$ sayısı varsa T'ye sınırlıdır denir. Bu durumda

$$\|T\| = \sup \{\|Tx\| : \|x\| \leq 1\}$$

sayısına da T'nin normu denir. Buna göre sınırlı bir T lineer operatörü için

$$\|Tx\| \leq \|T\| \|x\|$$

eşitliği geçerlidir [1].

Uyarı 1.1.4. *Yarınormlu uzaylar arasındaki lineer operatörlerin sürekliliği ile sınırlılığı çakışıktır. O halde normu sonlu operatörlere süreklidir diyeceğiz.*

Tanım 1.1.16. *X bir TVU olmak üzere $f : X \to \mathbb{C}$ olarak tanımlı lineer dönüşümlere fonksiyonel denir ve bu elemanların cümlesi $X^{\mathbb{N}}$ ile gösterilir [1].*

Uyarı 1.1.5. *X bir yarınormlu uzay ise X' bir Banach uzayıdır. Bu durumda bir $f \in X'$ için*

$$\|f\| = \sup \{|f(x)| : x \in U\}.$$

Burada, $U = \{x \in X : \|x\| \leq 1\}$ *olup,* X *yarınormlu uzayının birim diski olarak adlandırılır [1].*

Şimdi, fonksiyonel analizde önemli bir yere sahip olan Hahn Banach teoremini birkaç versiyonuyla birlikte verelim.

Teorem 1.1.2 (*Hahn Banach Teoremi*). (X, p) *bir yarınormlu uzay,* S, X*'in bir alt vektör uzayı ve* f, S *üzerinde tanımlı ve her* $x \in S$ *için* $|f(x)| \leq p(x)$ *özelliğine sahip bir lineer fonksiyonel olsun. Bu durumda* f, X *üzerinde tanımlı ve* $|F(x)| \leq p(x)$ *şartını sağlayan bir* F *lineer fonksiyoneline genişletilebilir [1].*

Teorem 1.1.3 (*Hahn Banach Teoremi*). X *bir yarınormlu uzay,* S, X*'in bir alt vektör uzayı ve* $f \in S'$ *olsun. Bu durumda* f *bir* $F \in X'$ *fonksiyoneline*

$$\|f\| = \|F\|$$

olacak şekilde genişletilebilir [1].

Şimdi bu teoremin en kullanışlı versiyonlarından ikisini verelim.

Teorem 1.1.4. X *bir yarınormlu uzay,* S, X*'in bir alt vektör uzayı ve* $x \in X \backslash \bar{S}$ *olsun. Bu halde*

$$f(x) = 1, \ \|f\| = 1/d(x, S)$$

ve S *üzerinde sıfır operatörü olan bir* $f \in X'$ *vardır. Burada* $\bar{S}$, S*'nin kapanışını göstermektedir ve* $d(x, S) = \inf\{\|x - y\| : y \in S\}$*'dir [1].*

Teorem 1.1.5. x_0 *bir* X *normlu uzayındaki sıfırdan farklı bir vektör olsun. Bu durumda,*

$$\|f\| = 1 \ \text{ ve } f(x_0) = \|x_0\|$$

olacak şekilde bir $f \in X'$ *vardır [15].*

1.2 Çift Diziler ve Yakınsaklık Çeşitleri

Tanım 1.2.1. X *boş olmayan herhangi bir cümle olmak üzere*

$$\underset{(m,n) \to f(m,n) = x_{mn}}{f : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to X}$$

şeklinde tanımlanan f *fonksiyonuna bir çift dizi denir.*

Herhangi bir $x = (x_{mn})$ çift dizisinin x_{mn} elemanlarını,

$$\begin{bmatrix} x_{00} & x_{01} & x_{02} & \cdots & x_{0n} & \cdots \\ x_{10} & x_{11} & x_{12} & \cdots & x_{1n} & \cdots \\ x_{20} & x_{21} & x_{22} & \cdots & x_{2n} & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots \\ x_{m0} & x_{m1} & x_{m2} & \cdots & x_{mn} & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots \end{bmatrix}$$

şeklinde bir tablo olarak düşünebiliriz. Ω ile kompleks veya reel terimli bütün çift dizilerin cümlesini göstereceğiz. Buna göre;

$$\Omega = \{x = (x_{mn}) : \forall m, n \in \mathbb{N} \text{ için } x_{mn} \in \mathbb{C}\}$$

olup bu cümle , $\forall\ \alpha \in \mathbb{C}$ ve $\forall x, y \in \Omega$ için $\alpha x = (\alpha x_{mn})$ ve $x + y = (x_{mn} + y_{mn})$ işlemleri altında bir lineer uzaydır.

$x = (x_{mn})$ kompleks terimli bir çift dizi olmak üzere

$$\sup_{m,n \geq 0} |x_{mn}| < \infty$$

oluyorsa, x dizisine *sınırlıdır* denir. Bütün sınırlı çift dizilerin cümlesini $\mathcal{M}_u$ ile göstereceğiz. Buna göre;

$$\mathcal{M}_u = \left\{ x = (x_{mn}) \in \Omega : \|x\|_\infty = \sup_{m,n \in \mathbb{N}} |x_{mn}| < \infty \right\}$$

şeklinde olup, bu uzay $\|.\|_\infty$ normu ile Banach uzayı teşkil eder.

Kompleks terimli bir $x = (x_{mn})$ çift dizisi için, eğer verilen $\forall \varepsilon > 0$ için $m, n > N$ olduğunda

$$|x_{mn} - l| < \varepsilon$$

olacak şekilde bir N doğal sayısı bulunabiliyorsa $x = (x_{mn})$ dizisi, $l \in \mathbb{C}$ sayısına Pringsheim anlamında yakınsak ve l değerine de x dizisinin Pringsheim limiti denir. Pringsheim anlamında yakınsak bir $x = (x_{mn})$ dizisine kısaca $p-$yakınsak dizi diyeceğiz ve limitini de $p - \lim x_{mn} = l$ ile göstereceğiz. Pringsheim anlamında yakınsak dizilerin cümlesini $\mathcal{C}_P$ ile göstereceğiz. $\mathcal{C}_P$ cümlesi,

$$\mathcal{C}_P = \{x = (x_{mn}) \in \Omega \mid \exists p_x \in \mathbb{C},\ \ \forall \varepsilon > 0\ \exists k \in \mathbb{N},\ \forall m, n \geq k \ni |x_{mn} - p_x| < \varepsilon\}$$

biçiminde ifade edilebilir. $\mathcal{C}_P$ cümlesi, çift dizilerin koordinatsal toplama ve skalarla çarpma işlemleri altında lineer uzay olup,

$$\|x\|_c = \lim_{N\to\infty} \sup_{m,n\geq N} |x_{mn}|$$

yarınormu ile bir tam uzay teşkil ettiği Moricz [8] tarafından gösterildi.

Pringsheim anlamında yakınsak bir çift dizi, sınırlı olmak zorunda değildir. Pringsheim anlamında l noktasına yakınsak ve sınırlı bir $x = (x_{mn})$ dizisine, l noktasına Pringsheim anlamında sınırlı yakınsak dizi denir. Bu şekilde dizilerin cümlesini $\mathcal{C}_{bP}$ ile göstereceğiz. Buna göre;

$$\mathcal{C}_{bP} = \left\{ x = (x_{mn}) \in \mathcal{C}_P \mid \|x\|_\infty = \sup_{m,n\in\mathbb{N}} |x_{mn}| < \infty \right\} = \mathcal{C}_P \cap \mathcal{M}_u$$

şeklindedir. $\mathcal{C}_{bP}$ uzayının da $\|.\|_\infty$ normu ile Banach olduğu Moricz [8] tarafından gösterildi.

Pringsheim anlamında l noktasına yakınsak olmasına ilâve olarak

$$\lim_m x_{mn}, (n \in \mathbb{N}) \text{ ve } \lim_n x_{mn}, (m \in \mathbb{N})$$

limitleri mevcut olan x dizisine, l noktasına regüler yakınsaktır denir.

Regüler yakınsak bir $x = (x_{mn})$ dizisi için, $\lim_n \lim_m x_{mn}$ ve $\lim_m \lim_n x_{mn}$ limitleri mevcut ve Pringsheim limitine eşittirler. Regüler yakınsak dizilerin cümlesi,

$$\mathcal{C}_r = \{x = (x_{mn}) \in \mathcal{C}_P \mid \forall m \in \mathbb{N} : (x_{mn})_m \in c \text{ ve } \forall n \in \mathbb{N} \ni (x_{mn})_n \in c\}$$

olarak tanımlanabilir. Regüler yakınsaklığın Pringsheim anlamında yakınsaklıktan farkı, yakınsaklığın dizinin sınırlılığını gerektirmesidir.

Boos, Leiger ve Zeller [9], Pringsheim anlamında yakınsaklıktan daha zayıf olan çift dizilerin $e-$yakınsaklığını,

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists l_0 \in \mathbb{N} \ \forall l \geq l_0 \ \exists k_0 \in \mathbb{N} : k \geq k_0 \Rightarrow |x_{kl} - a| \leq \varepsilon$$

şeklinde tanımladı. $e-$yakınsak bir x dizisinde her $l \in \mathbb{N}$ için $\sup_k |x_{kl}|$ değeri sonlu ve $\lim_k x_{kl}$ mevcut ise x dizisine sırasıyla $be-$yakınsak ve $c-$yakınsak denir. $c-$yakınsak bir x dizisi için $\lim_k x_{kl}$ mevcut ve $e-$yakınsaklık limitine eşittir. Buna göre, $e-$yakınsak dizilerin cümlesi,

$$\mathcal{C}_e = \{x = (x_{mn}) \in \Omega \mid \exists a_x \in \mathbb{C}, \forall \varepsilon > 0 \text{ için } \exists n_0 \in \mathbb{N},$$
$$\forall n \geq n_0 \ \exists m_n \in \mathbb{N} \ni \forall m \geq m_n \text{ için } |x_{mn} - a_x| < \varepsilon\}$$

şeklindedir.

$\mathcal{V}$ herhangi bir yakınsaklık kavramını göstermek üzere, $\mathcal{V}-$ yakınsak bütün dizilerin cümlesini $\mathcal{C}_{\mathcal{V}}$ ve limitini $\mathcal{V}- \lim_{mn}$ ile göstereceğiz. Sıfıra $\mathcal{V}-$yakınsak olan dizilerin cümlesini de $\mathcal{C}_{0\mathcal{V}}$ ile göstereceğiz.

Genel olarak gözönüne alınan çift dizi uzayları,

$$e_{ij}^{kl} = \begin{cases} 1 \quad , & (k,l) = (i,j) \\ 0 \quad , & \text{diğer durumlarda} \end{cases}$$

olarak tanımlanan e^{kl} dizilerinin germiş olduğu Φ uzayını kapsarlar, burada $\Phi = span \left\{ e^{kl} : k, l \in \mathbb{N} \right\}$'dır [27].

Tanım 1.2.2. *Eğer verilen $\forall \varepsilon > 0$ için $m, n, p, q > N$ olduğunda*

$$|x_{mn} - x_{pq}| < \varepsilon$$

kalacak şekilde bir N doğal sayısı varsa $x = (x_{mn})$ kompleks terimli dizisine bir $p-$Cauchy dizisi denir [27].

Teorem 1.2.1. *Kompleks terimli bir $x = (x_{mn})$ dizisinin $p-$yakınsak olması için gerek ve yeter şart bir $p-$Cauchy dizisi olmasıdır [27].*

Tanım 1.2.3. *$x = (x_{kl})$ reel sayılarının bir çift dizisi ve*

$$\alpha_n(x) = \sup_{k,l \geq n} x_{kl} \quad \text{ve } \beta_n(x) = \inf_{k,l \geq n} x_{kl}$$

olsun. Bu durumda; en az bir $n \in \mathbb{N}$ sayısı için $\alpha_n(x) < \infty$ ve $\beta_n(x) > -\infty$ ise x dizisi Pringsheim anlamında bir üst ve alt limite sahiptir. Buna göre; bir x dizisinin Pringsheim alt limiti,

i) *Eğer her bir $n \in \mathbb{N}$ için $\beta_n(x) = -\infty$ ise*

$$p - \liminf x = -\infty,$$

ii) *Eğer bazı* $n \in \mathbb{N}$ *için* $\beta_n(x) > -\infty$ *ise*

$$p - \liminf x = \lim_{n\to\infty}\left(\inf_{k,l\geq n} x_{kl}\right) = \sup_n \beta_n(x)$$

ve Pringsheim üst limiti,

i) *Eğer her bir* $n \in \mathbb{N}$ *için* $\alpha_n(x) = +\infty$ *ise*

$$p - \limsup x = +\infty,$$

ii) *Eğer bazı* $n \in \mathbb{N}$ *için* $\alpha_n(x) < +\infty$ *ise*

$$p - \limsup x = \lim_{n\to\infty}\left(\sup_{k,l\geq n} x_{kl}\right) = \inf_n \beta_n(x)$$

şeklinde tanımlanır [27].

Örnek 1.2.1. $x = (x_{kl})$ *çift dizisi,*

$$x_{kl} = \begin{cases} k & , \quad l = 1 \\ -l & , \quad k = 1 \\ (-1)^k & , \quad k = l > 1 \\ 0 & , \quad \textit{diğer durumlarda} \end{cases}$$

şeklinde tanımlanırsa, $\sup x_{kl} = +\infty$ *ve* $\inf x_{kl} = -\infty$ *olduğu halde,* $n \geq 2$ *için* $\alpha_n(x) = 1$ *ve* $\beta_n(x) = -1$ *bulunduğundan*

$$p - \liminf x = -1 \quad \textit{ve} \quad p - \limsup x = 1$$

olur [27].

Teorem 1.2.2. (i) $\lim_{N\to\infty}\left(\sup_{m,n\geq N}\ x_{mn}\right) = L$ *olması için gerek ve yeter şart verilen her* $\varepsilon > 0$ *için*

(a) *Yeteri kadar büyük her* $m, n \geq N$ *için* $x_{mn} < L + \varepsilon$ *ve*

(b) *Sonsuz çoklukta* $(m,n) \in \mathbb{N}\times\mathbb{N}$ *için* $x_{mn} > L + \varepsilon$ *olmasıdır.*

(ii) $\lim_{N\to\infty}\left(\inf_{m,n\geq N} x_{mn}\right) = K$ *olması için gerek ve yeter şart verilen her* $\varepsilon > 0$ *için;*

(a) *Yeteri kadar büyük her* $m, n \geq N$ *için* $x_{mn} > K + \varepsilon$ *ve*

(b) *Sonsuz çoklukta* $(m, n) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ *için* $x_{mn} < K + \varepsilon$ *olmasıdır, [27].*

Tanım 1.2.4.

$$f : \underset{(m,n) \to f(m,n) = x_{mn}}{\mathbb{N} \times \mathbb{N} \to X}$$

dizisi verilmiş olsun.

$$i : \underset{m \to i(m) = i_m}{\mathbb{N} \to \mathbb{N}}$$

ve

$$j : \underset{n \to j(n) = j_n}{\mathbb{N} \to \mathbb{N}}$$

artan fonksiyonlar (diziler) olmak üzere

$$h : \underset{(m,n) \to h(m,n) = (i_m, i_n)}{\mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N} \times \mathbb{N}}$$

şeklinde tanımlayalım.Bu durumda

$$f \circ h : \underset{(m,n) \to f \circ h(m,n) = x_{i_m j_n}}{\mathbb{N} \times \mathbb{N} \to X}$$

bileşke fonksiyonuna (x_{mn}) *dizisinin bir alt dizisi denir.*

$\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ cümlesinin sonsuz çoklukta $(i_m j_n)$ dizisi bulunabileceğinden, bir (x_{mn}) dizisinin sonsuz çoklukta alt dizisi vardır. Burada alt diziyi, orjinal diziden bazı satır ve sütunları atmakla elde ediyoruz. $(x_{i_m j_n})$ alt dizisinin her teriminin, (x_{mn}) dizisinin bir terimi olduğu açıktır [27].

Teorem 1.2.3. *Yakınsak bir çift dizinin her alt dizisi yakınsaktır [27].*

Teorem 1.2.4. x *ve* y*, reel değerli iki çift dizi olsun. Bu durumda dizinin* $p-$*limitleri arasında aşağıdaki ilişkiler mevcuttur:*

1. $\liminf x \leq \limsup x,$

2. $p - \lim x = L \Leftrightarrow \liminf x = L = \limsup x,$

3. $\limsup (-x) = -\liminf x,$

4. $\limsup (x + y) \leq \limsup x + \limsup y,$

5. $\liminf\ (x+y) \geq \liminf\ x + \liminf\ y$,

6. Eğer z, x *çift dizisinin bir alt dizisi ise*

$$\liminf x \leq \liminf z \leq \limsup z \leq \limsup x, \text{ [27]}.$$

Tanım 1.2.5. *$m \leq m'$ ve $n \leq n'$ olduğunda $s_{mn} \leq s_{m'n'}$ oluyorsa (s_{mn}) dizisine monoton artan, $m \geq m'$ve $n \geq n'$ olduğunda $s_{mn} \leq s_{m'n'}$ oluyorsa (s_{mn}) dizisine monoton azalandır denir [14].*

Monoton çift diziler hakkındaki teoremler, monoton tek diziler hakkındaki teoremler ile aynı yapıya sahiptir.

Teorem 1.2.5. *Artan bir çift dizi üstten sınırlı ise limiti, mevcutsa supremumuna; azalan bir çift dizi alttan sınırlı ise limiti, mevcutsa infimumuna eşittir [27].*

1.3 Çift Seriler

Tanım 1.3.1. *(x_{mn}) çift dizisi verilmiş olsun. Şimdi,*

$$s_{mn} = \sum_{i=0}^{m}\sum_{j=0}^{n} x_{ij}$$

şeklinde tanımlanan (s_{mn}) dizisini gözönüne alalım. Bu durumda; $((x_{mn}), (s_{mn}))$ ikilisine bir çift seri denir. x_{mn} terimine serinin genel terimi, (s_{mn}) dizisine de serinin kısmi toplamlar dizisi denir. Eğer (s_{mn}) kısmi toplamlar dizisi bir s sayısına $\mathcal{V}-$yakınsak, yani

$$\mathcal{V}-\lim_{m,n} \sum_{i=0}^{\infty}\sum_{j=0}^{\infty} x_{ij} = s$$

ise $((x_{mn}), (s_{mn}))$ serisi $\mathcal{V}-$yakınsak ve serinin $\mathcal{V}-$toplamı s'dir denir. Yakınsak olmayan seriye ıraksak seri denir. Genel terimi x_{mn} ve toplamı s olan yakınsak seri,

$$\sum_{i=0}^{\infty}\sum_{j=0}^{\infty} x_{mn} = s$$

şeklinde gösterilir. Seri ister yakınsak ister ıraksak olsun, genel terimi x_{mn} olan seri

$$\sum_{i=0}^{\infty}\sum_{j=0}^{\infty} x_{mn}$$

ile gösterilir. $\mathcal{V}-$yakınsak çift seri oluşturan dizilerin uzayını $\mathcal{CS}_{\mathcal{V}}$ ile göstereceğiz.

Buna göre;

$$\mathcal{CS}_\nu = \left\{ x \in \Omega \mid \mathcal{V} - \sum_{i,j} x_{ij} = \mathcal{V} - \lim_{m,n} \sum_{i=0}^{m} \sum_{j=0}^{n} x_{ij} \text{ mevcut} \right\}$$

şeklindedir [27].

Teorem 1.3.1. *Yakınsak bir serinin genel teriminin limiti sıfırdır [27].*

Tanım 1.3.2.

$$R_{mn} = \sum_{i=m+1}^{\infty} \sum_{j=n+1}^{\infty} x_{ij} + \sum_{i=0}^{m} \sum_{j=n+1}^{\infty} x_{ij} + \sum_{i=m+1}^{\infty} \sum_{j=0}^{n} x_{ij}$$

toplamına $\sum_{i,j} x_{ij}$ *serisinin kalan kısmı denir [27].*

Teorem 1.3.2. *Yakınsak bir seride kalan kısmın limiti sıfırdır [27].*

Tanım 1.3.3. *Eğer* $\sum_{i=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} |x_{ij}|$ *serisi yakınsak ise,* $\sum_{i=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} x_{ij}$ *kompleks terimli serisi mutlak yakınsaktır denir [27].*

Teorem 1.3.3. *Mutlak yakınsak bir çift seri yakınsaktır [27].*

Teorem 1.3.4. *Pozitif reel terimli bir serinin yakınsak olması için gerek ve yeter şart bu serinin kısmi toplamlar dizisinin sınırlı olmasıdır [27].*

Teorem 1.3.5. *Reel terimli* (a_{ij}) *ve* (b_{ij}) *dizilerini gözönüne alalım.* $\forall i, j \in \mathbb{N}$ *için* $0 \leq a_{ij} \leq b_{ij}$ *ve* $\sum_{i=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} b_{ij}$ *serisi yakınsak ise bu durumda* $\sum_{i=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} a_{ij}$ *serisi de yakınsaktır ve*

$$\sum_{i=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} a_{ij} \leq \sum_{i=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} b_{ij}$$

eşitsizliği geçerlidir [27].

Bu çalışmada $\sum_{i=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} a_{ij}$ yerine kısaca $\sum\limits_{i,j} a_{ij}$ yazılacaktır.

Mutlak yakınsak seri oluşturan dizilerin cümlesini $\mathcal{L}_u$ ile göstereceğiz. Yani,

$$\mathcal{L}_u = \left\{ x \in \Omega \mid \|x\|_1 = \sum_{i,j} |x_{ij}| < \infty \right\}$$

Tanım 1.3.4. *Bir E dizi uzayının E^{α} ve $E^{\beta(v)}-$dualleri*

$$E^{\alpha}=\left\{(a_{ij})\in\Omega \mid \forall x\in E \text{ için } \sum_{i,j}|a_{ij}x_{ij}|<\infty\right\}$$

ve

$$E^{\beta(v)}=\left\{(a_{ij})\in\Omega \mid \forall x\in E \text{ için } \mathcal{V}-\sum_{i,j}a_{ij}x_{ij} \text{ mevcut}\right\}$$

ile tanımlanır [10].

Tanım 1.3.5. $\mathbb{C}$ *cismi üzerinde E_1 ve E_2, iki lineer uzay olsunlar. Her $(x,y)\in E_1\times E_2$ ikilisi için tanımlı*

$$\langle,\rangle : \underset{(x,y)\to\langle x,y\rangle}{E_1\times E_2}\to\mathbb{C}$$

fonksiyoneli;

$(D1)$**:** $\langle,\rangle$ *bilineer dönüşümdür, yani;*

$$\langle x,\alpha_1y_1+\alpha_2y_2\rangle=\alpha_1\langle x,y_1\rangle+\alpha_2\langle x,y_2\rangle$$

$$\langle \beta_1x_1+\beta_2x_2,y\rangle=\beta_1\langle x_1,y\rangle+\beta_2\langle x_2,y\rangle$$

$(D2)$**:** ***i)*** *Bütün $y\in E_2$'ler için $\langle x,y\rangle=0$ iken $x=0$,*

ii) *Bütün $x\in E_1$'ler için $\langle x,y\rangle=0$ iken $y=0$,*

şartlarını sağlıyorsa, bu durumda E_1 ve E_2 uzayları dualdir denir.

(D_1) şartı; bir $y\in E_2$ elemanının, E_1 uzayının E_1^{+} cebirsel dualinde bir fonksiyonel tanımladığını ifade eder. Farklı y elemanlarının farklı fonksiyoneller belirteceği açıktır.

$(D2)$'nin (ii) şartı, E_2 uzayının E_1^{+} cebirsel dualinin bir altuzayı olduğunu gösterir.

E çift dizi uzayı, $\beta(\mathcal{V})-$duali olan $E^{\beta(v)}$ uzayı ile

$$\langle,\rangle : E\times E^{\beta(v)}\to\mathbb{C},\qquad (x,\alpha)\to\mathcal{V}-\sum_{k,l}a_{kl}x_{kl}$$

bilineer formu altında dualdirler [27].

Tanım 1.3.6. *Herhangi bir* E *dizi uzayı, her* $x \in E$ *ve* $y \in \{0,1\}^{\mathbb{N}\times\mathbb{N}}$ *için* $xy = (x_{kl}y_{kl}) \in E$ *şartını sağlarsa monoton uzay olarak adlandırılır. Monoton bir uzayın* $\alpha-$ *ve* $\beta(\mathcal{V})-$*dualleri çakışıktır [10].*

BÖLÜM 2

MODÜLÜS FONKSİYONU İLE OLUŞTURULAN BAZI ÇİFT DİZİ UZAYLARI

Bu bölümde, modülüs fonksiyonu yardımıyla tanımlanmış dizi uzaylarına ve topolojik özelliklerine yer verilecektir.

2.1 $\mathcal{L}_u(f)$ Dizi Uzayı

f bir modülüs fonksiyonu olmak üzere

$$\mathcal{L}_u(f) = \left\{ x \in \Omega \mid \sum_{m,n} f(|x_{mn}|) < \infty \right\}$$

dizi uzayını tanımlayalım.

Şimdi de çift dizi uzayları için verilen DK-uzayı, FDK-uzayı ve BDK-uzayı kavramlarını verelim.

Tanım 2.1.1 (*DK-Uzayı*). *Bir lokal konveks (E, T) çift dizi uzayında*

$$r_{kl} : E \to R, \quad x = (x_{ij}) \to |x_{kl}|$$

olarak tanımlı bütün yarınormlar sürekli ise (E, T) uzayına bir DK-uzayı denir [10].

Tanım 2.1.2 (*FDK-Uzayı*). *Fréchet topolojisi ile bir DK-uzayına FDK-uzayı denir [10].*

Tanım 2.1.3 (*BDK-Uzayı*). *Normlu FDK-uzayına BDK-uzayı denir [10].*

Teorem 2.1.1. *$\mathcal{L}_u(f)$ dizi uzayı lineerdir.*

İspat. $x, y \in \mathcal{L}_u(f)$ ve $\lambda \in \mathbb{C}$ olsun. Bu durumda

$$\sum_{m,n} f(|x_{mn}|) < \infty \quad \text{ve} \quad \sum_{m,n} f(|y_{mn}|) < \infty$$

olup,

$$\begin{aligned}
\sum_{m,n} f\left(|\lambda x_{mn}+y_{mn}|\right) &\leq \sum_{m,n} f\left(|\lambda x_{mn}|+|y_{mn}|\right) \\
&\leq \sum_{m,n} f\left(|\lambda x_{mn}|\right)+f\left(|y_{mn}|\right) \\
&= \sum_{m,n} f\left(|\lambda x_{mn}|\right)+\sum_{m,n} f\left(|y_{mn}|\right) \\
&\leq T.\sum_{m,n} f\left(|x_{mn}|\right)+\sum_{m,n} f\left(|y_{mn}|\right) \\
&< \infty
\end{aligned}$$

dir. Burada T, $|\lambda| \leq T$ olacak şekilde bir pozitif tamsayıdır. Bu da $\lambda x+y \in \mathcal{L}_u(f)$ olması demektir. □

Teorem 2.1.2. *$\mathcal{L}_u(f)$ dizi uzayı, $g(x)=\sum_{m,n} f\left(|x_{mn}|\right)$ ile paranormlu bir uzaydır.*

İspat. i) $g(\theta)=\sum_{m,n} f\left(|\theta|\right)=0$.

ii) $\forall x \in \mathcal{L}_u(f)$ için $g(x)=g(-x)$ olduğu açıktır.

iii)

$$\begin{aligned}
g(x+y) = \sum_{m,n} f\left(|x_{mn}+y_{mn}|\right) &\leq \sum_{m,n} f\left(|x_{mn}|+|y_{mn}|\right) \\
&\leq \sum_{m,n} f\left(|x_{mn}|\right)+\sum_{m,n} f\left(|y_{mn}|\right) \\
&= g(x)+g(y).
\end{aligned}$$

iv) *a)* λ bir skaler ve $g(x) \to 0$ olsun.

$$\begin{aligned}
g(\lambda x) &= \sum_{m,n} f\left(|\lambda| \cdot |x_{mn}|\right) \\
&\leq T \cdot \sum_{m,n} f\left(|x_{mn}|\right).
\end{aligned}$$

Burada T, $|\lambda| \leq T$ olacak şekilde bir pozitif tamsayıdır. Böylece $g(\lambda x) \to 0$ olur.

b) $\lambda^r \to 0$ ve $x \in \mathcal{L}_u(f)$ olsun. Bu durumda $\sum_{m,n} f\left(|x_{mn}|\right) < \infty$ olacağından $\sum_{m,n=k+1}^{\infty} f\left(|x_{mn}|\right) < \frac{\varepsilon}{2}$ olacak şekilde $\varepsilon > 0$ ve $k > 0$ sayıları vardır.

Bu durumda, $h(t) = \sum_{m,n=1}^{k} f(t|x_{mn}|)$ diyelim. h, 0 noktasında süreklidir.
Bu hâlde $0 < \delta < 1$ olacak şekilde bir δ vardır $\ni 0 < t < \delta$ için

$$|h(t)| < \frac{\varepsilon}{2}$$

dir. $\lambda^r \to 0$ olduğundan $r > N$ için $|\lambda^r| < \delta$ olacak şekilde bir N vardır ve $r > N$ için

$$\begin{aligned} g(\lambda^r x) &= \sum_{m,n=1}^{k} f(|\lambda^r x_{mn}|) + \sum_{m,n=k+1}^{\infty} f(|\lambda^r x_{mn}|) \\ &\leq \frac{\varepsilon}{2} + \sum_{m,n=k+1}^{\infty} f(|x_{mn}|) \\ &\leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon \end{aligned}$$

Böylece ispat tamamlanır. $\square$

Ayrıca

$$\begin{aligned} & g(x) = 0 \\ \Rightarrow & \sum_{m,n=1}^{\infty} f(|x_{mn}|) = 0 \\ \Rightarrow & f(|x_{mn}|) = 0 \\ \Rightarrow & |x_{mn}| = 0 \\ \Rightarrow & x_{mn} = 0 \\ \Rightarrow & x = \theta \end{aligned}$$

olduğundan g paranormu totaldir.

Teorem 2.1.3. *$\mathcal{L}_u(f)$ dizi uzayı bir DK- uzayıdır.*

İspat. $\forall k, l \in \mathbb{N}$ için

$$\begin{aligned} P_{kl} : \mathcal{L}_u(f) &\to \mathbb{C} \\ x &\to P_{kl}(x) = x_{kl} \end{aligned}$$

fonksiyonları süreklidir.

$\forall\varepsilon>0$ için $\exists\delta>0$ var $\ni g(x)<\delta$ iken $\varepsilon>0$ için $\delta=f(\varepsilon)$ seçilirse

$$\sum_{k,l} f(|x_{kl}|)<f(\varepsilon)$$
$$\Rightarrow f(|x_{kl}|)<f(\varepsilon)$$

olup f'nin artanlığından

$$|x_{kl}|=|P_{kl}(x)|<\varepsilon$$

elde edilir. □

Teorem 2.1.4. $\mathcal{L}_u(f)$ *dizi uzayı tamdır.*

İspat. (X^l), $\mathcal{L}_u(f)$'de bir Cauchy dizisi olsun. Bu halde $\forall\varepsilon>0$ için $\exists\, n_0\in\mathbb{N}\ni$ $l,r>n_o$ için $g(x^l-x^r)<\varepsilon$ olur.

Her i,j için $P_{ij}(x)=x_{ij}$ koordinat fonksiyonları $\mathcal{L}_u(f)$ üzerinde sürekli olduğundan her $i,j\in\mathbb{N}\times\mathbb{N}$ için (x_{ij}^l), $\mathbb{C}$'de bir Cauchy dizisidir $(l>n_0)$.

$\mathbb{C}$ tam olduğundan bu Cauchy dizisi bir noktaya yakınsar. Bu noktaya x_{ij} diyelim. Bu limit noktaları yardımıyla $x=(x_{ij})$ çift dizisini oluşturalım. $x\in\mathcal{L}_u(f)$ ve $x^l\to x$ olduğunu göstermeliyiz.

$$\begin{aligned}
g(x^l-x^r)<\varepsilon &\Rightarrow \sum_{i,j} f\left(\left|x_{ij}^l-x_{ij}^r\right|\right)<\varepsilon\\
&\Rightarrow \sum_{i=0}^{m}\sum_{j=0}^{n} f\left(\left|x_{i,j}^l-x_{ij}^r\right|\right)<\varepsilon\\
&\Rightarrow \lim_r \sum_{i=0}^{m}\sum_{j=0}^{n} f\left(\left|x_{i,j}^l-x_{ij}^r\right|\right)=\sum_{i=0}^{m}\sum_{j=0}^{n} f\left(\left|x_{i,j}^l-x_{ij}\right|\right)<\varepsilon\\
&\Rightarrow g(x^l-x)<\varepsilon \ \text{ (her } l>n_0 \text{ için)}\\
&\Rightarrow x^l\to x
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\sum_{i=0}^{\infty}\sum_{j=0}^{\infty} f(|x_{i,j}|) &= \sum_{i=0}^{m}\sum_{j=0}^{n} f\left|x_{ij}-x_{i,j}^l+x_{ij}^l\right|\\
&\le \sum_{i=0}^{\infty}\sum_{j=0}^{\infty} f\left(\left|x_{i,j}-x_{ij}^l\right|\right)+\sum_{i=0}^{m}\sum_{j=0}^{n} f\left(\left|x_{i,j}^l\right|\right)\\
&<\varepsilon
\end{aligned}$$

bulunur. Bu da $x\in\mathcal{L}_u(f)$ olduğunu gösterir. □

Sonuç 2.1.1. *$\mathcal{L}_u(f)$ dizi uzayı FDK uzayıdır.*

Teorem 2.1.5. *$\mathcal{L}_u(f) \subseteq \mathcal{L}_u$ kapsaması mevcuttur.*

İspat. $x \in \mathcal{L}_u(f)$ fakat $x \notin \mathcal{L}_u$ olsun. O zaman, $\sum_{k,l} f(|x_{kl}|) < \infty$ ve $\sum_{k,l} |x_{kl}| = \infty$ olur.

$\sum |x_{kl}| = \infty$ olduğundan doğal sayıların bir (n_i, m_j) çift dizisi vardır öyleki

$$\sum_{k=n_i}^{n_{i+1}, m_{j+1}} |x_{kl}| > 1$$

$$\Rightarrow f(1) < f\left(\sum_{k=n_i}^{n_{i+1}} \sum_{l=m_j}^{m_{j+1}} |x_{kl}|\right) = \sum_{k=n_i}^{n_{i+1}} \sum_{l=m_j}^{m_{j+1}} f(|x_{kl}|)$$

$$\sum f(|x_{kl}|) < \infty \Rightarrow i, j \to \infty \text{ için } \sum_{k=n_i}^{n_{i+1}} \sum_{l=m_j}^{m_{j+1}} f(|x_{kl}|) \to 0$$

bulunur. Dolayısıyla $f(1) = 0$ elde edilir ki bu bir çelişkidir. O halde $\sum |x_{kl}| = \infty$ olamaz.

$$f(x) = x \text{ alırsak } \mathcal{L}_u(f) = \mathcal{L}_u \text{ olur.}$$

f sınırsız ise, $\mathcal{L}_u(f) \subset \mathcal{L}_u$ olur.

Birim vektörler çift dizisini δ ile gösterelim.

$$\delta = \begin{bmatrix} e_{11} & e_{12} & e_{13} & \cdots \\ e_{21} & e_{22} & e_{23} & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix}$$

$$e_{ij} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \cdots \end{bmatrix}$$

Burada 1, (i, j). yerdedir. □

Teorem 2.1.6. *Birim vektörler çift dizisi $\mathcal{L}_u(f)$'de sınırlıdır.*

İspat. $a \in \mathbb{C}$ olmak üzere

$$g(ae_{11}) = g(ae_{12}) = f(|a|)$$

olur. Yani herbir ae_{ij} ve ae_{kl}'lerin $\mathcal{L}_u(f)$'de orijine uzaklığı $f(|a|)$ kadardır.

$f(|\lambda|) < \varepsilon$ olacak şekilde bir $\lambda \in \mathbb{C}$ seçelim. Bu durumda $0 \leq a \leq \lambda$ için$f$'nin artanlığından

$$g(ae_{11}) = f(|a|) \leq f(|\lambda|) < \varepsilon \Rightarrow ae_{11} \in \{X : g(x) < \varepsilon\}$$

Farklı (i,j) ve (k,l) indisleri için

$$g(ae_{ij}) = g(ae_{kl}) = f(|a|)$$

olduğundan $a\delta \in \{x : g(x) < \varepsilon\}$ olup bu δ dizisinin her 0 merkezli yuvar tarafından yutulacağını gösterir. O halde δ dizisi $\mathcal{L}_u(f)$'de sınırlıdır. □

2.2 $\mathcal{L}_u(X,f)$ Dizi Uzayı

X herhangi bir Banach uzayı olmak üzere X değerli bütün çift dizilerin uzayını $\Omega(X)$ ile gösterelim. Yani,

$$\Omega(X) = \{f \mid f : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to X\}$$

ve $\Omega(X)$ üzerindeki topoloji de

$$P_{ij}(x) = \|x_{ij}\|$$

yarınormlar ailesi tarafından türetilen lokal konveks topolojidir.

$$\{P_{ij} \mid i,j \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}\}$$

ailesi sayılabilir olduğundan bu topoloji metriklenebilirdir. Bu metriği veren total paranorm da

$$g(x) = \sum_{i,j} \frac{1}{2^{i+j}} \frac{\|x_{ij}\|}{1 + \|x_{ij}\|}$$

ile verilir.

Bu bölümde modülüs fonksiyonu ile inşa edilen $\mathcal{L}_u(X,f)$ vektör değerli çift dizi uzayını tanımlayacağız ve özelliklerini inceleyeceğiz.

$$\mathcal{L}_u(X,f) = \{x \in \Omega(X) \mid \sum f(\|X_{mn}\|) < \infty\}$$

tanımlayalım. Burada $\|\cdot\|$, X uzayı üzerindeki normdur. $\mathcal{L}_u(X,f)$ cümlesinin bir lineer uzay olduğu modülüs fonksiyonunun özelliklerinden aşikârdır.

Teorem 2.2.1. *$P(x)=\sum\limits_{i,j} f(\|x_{ij}\|)$ fonksiyonu, $\mathcal{L}_u(X,f)$ üzerinde bir paranormdur.*

İspat. i) $x=\theta$ iken her i,j için $x_{ij}=0$ olup $P(\theta)=\sum\limits_{i,j} f(\|0\|)=0$

ii) $P(-x)=\sum\limits_{i,j} f(\|-x_{ij}\|)=\sum f(\|x_{ij}\|)=P(x)$

iii) $x,y\in\mathcal{L}_u(X,f)$ için,

$$\begin{aligned}P(x+y)&=\sum_{i,j} f(\|x_{ij}+y_{ij}\|)\le\sum_{i,j} f(\|x_{ij}\|)+f(\|y_{ij}\|)\\&=\sum_{i,j} f(\|x_{ij}\|)+\sum_{i,j} f(\|y_{ij}\|)\end{aligned}$$

iv) $x=\left(x^l\right)\in\mathcal{L}_u(X,f)$'de herhangi bir dizi ve $\lambda=\left(\lambda^l\right)$ de skalerlerin bir dizisi olsun. Şimdi, $\lambda^l\to\lambda^0$ ve $P\left(x^l-x^0\right)\to 0 \quad (l\to\infty)$ olduğunu kabul edelim. $\lambda=\left(\lambda^l\right)$ skaler dizisi yakınsak olduğundan $\forall l\in\mathbb{N}$ için $\left|\lambda^l\right|\le K$ olacak şekilde bir $K>0$ sayısı bulunabilir. Böylece,

$$\begin{aligned}P\left(\lambda^l x^l-\lambda^0 x^0\right)&=\sum_{i,j} f\left(\left\|\lambda^l x_{ij}^l-\lambda^0 x_{ij}^0\right\|\right)\\&=\sum_{i,j} f\left(\left\|\lambda^l x_{ij}^l-\lambda^l x_{ij}^0+\lambda^l x_{ij}^0-\lambda^0 x_{ij}^0\right\|\right)\\&\le\sum_{i,j} f\left(\left\|\lambda^l x_{ij}^l-\lambda^l x_{ij}^0\right\|\right)+f\left(\left\|\lambda^l x_{ij}^0-\lambda^0 x_{ij}^0\right\|\right)\\&\le\sum_{i,j} f\left(\left|\lambda^l\right|.\left\|x_{ij}^l-x_{ij}^0\right\|\right)+\sum_{i,j} f\left(\left|\lambda^l-\lambda^0\right|\left\|x_{ij}^0\right\|\right)\\&=K.P\left(x^l-x^0\right)+\sum_{i,j} f\left(\left|\lambda^l-\lambda^0\right|\left\|x_{ij}^0\right\|\right)\end{aligned}\tag{2.2.1}$$

olur.

K sabit ve $P\left(x^l-x^0\right)\to 0$ $(l\to\infty)$ olduğundan (2.2.1) eşitsizliğinin sağındaki ilk terim sıfıra gider. (2.2.1) eşitsizliğinin sağındaki ikinci terime bakalım.

$\forall l\in\mathbb{N}$ için $\left|\lambda^l-\lambda^0\right|\le T$ olacak şekilde bir $T\ge 0$ vardır ve

$$Tx^0=\left(Tx_{ij}^0\right)\in\mathcal{L}_u(X,f)$$

dir. $\varepsilon>0$ için $\exists\, i_0,j_0\ni\forall l\in\mathbb{N}$ için

$$\sum_{i>i_0}\sum_{j>j_0} f\left(\left|\lambda^l-\lambda^0\right|\left\|x_{ij}^0\right\|\right)+\sum_{i=0}^{i_0}\sum_{j=j_0+1}^{\infty} f\left(\left|\lambda^l-\lambda^0\right|\left\|x_{ij}^0\right\|\right)+\sum_{i=i_0+1}^{\infty}\sum_{j=0}^{j_0} f\left(\left|\lambda^l-\lambda^0\right|\left\|x_{ij}^0\right\|\right)$$

$$\begin{aligned}
&\le \sum_{i>i_0}\sum_{j>j_0} f\left(T\left\|x_{ij}^0\right\|\right)+\sum_{i=0}^{i_0}\sum_{j=j_0+1}^{\infty} f\left(T\left\|x_{ij}^0\right\|\right) \\
&\qquad +\sum_{i=i_0+1}^{\infty}\sum_{j=0}^{j_0} f\left(T\left\|x_{ij}^0\right\|\right) \\
&< \frac{\varepsilon}{6}+\frac{\varepsilon}{6}+\frac{\varepsilon}{6} \\
&= \frac{\varepsilon}{2}
\end{aligned}$$

kalır. Ayrıca,

$$\lim_{l\to\infty}\sum_{i=0}^{i_0}\sum_{j=0}^{j_0} f\left(\left|\lambda^l-\lambda^0\right|\left\|x_{ij}^0\right\|\right)=\sum_{i=0}^{i_0}\sum_{j=0}^{j_0} f\left(\lim_{l\to\infty}\left|\lambda^l-\lambda^0\right|\left\|x_{ij}^0\right\|\right)=0$$

olacağından aynı $\varepsilon>0$ için $\exists\ l_0 \ni l>l_0$ için

$$\sum_{i=0}^{i_0}\sum_{j=0}^{j_0} f\left(\left|\lambda^l-\lambda^0\right|\left\|x_{ij}^0\right\|\right)<\frac{\varepsilon}{2}$$

O halde $\forall\varepsilon>0$ ve $l>l_0$ için

$$\begin{aligned}
\sum_{i,j} f\left(\left|\lambda^l-\lambda^0\right|\left\|x_{ij}^0\right\|\right) &\le \sum_{i>i_0}\sum_{j>j_0} f\left(T\left\|x_{ij}^0\right\|\right)+\sum_{i=0}^{i_0}\sum_{j=j_0+1}^{\infty} f\left(T\left\|x_{ij}^0\right\|\right) \\
&\quad +\sum_{i=i_0+1}^{\infty}\sum_{j=0}^{j_0} f\left(T\left\|x_{ij}^0\right\|\right)+\sum_{i=0}^{i_0}\sum_{j=0}^{j_0} f\left(\left|\lambda^l-\lambda^0\right|\left\|x_{ij}^0\right\|\right) \\
&< \frac{\varepsilon}{6}+\frac{\varepsilon}{6}+\frac{\varepsilon}{6}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon
\end{aligned}$$

Böylece (2.2.1) eşitsizliğindeki ikinci terim de sıfıra gider. O hâlde

$$P\left(\lambda^l x^l-\lambda^0 x^0\right)\to 0 \quad (l\to\infty)$$

olur. Böylece, ispat tamamlanmış olur. □

Şimdi de vektör değerli FDK-uzayı kavramını tanımlayalım.

Tanım 2.2.1. $\lambda(X)\subset\Omega(X)$ *olmak üzere* $\lambda(X)$ *Fréchet dizi uzayı için*

$$\begin{aligned}
P_{kl} &: \lambda(X)\to X, \\
P_{kl}(x) &= x_{kl}
\end{aligned}$$

olarak tanımlı P_{kl} *koordinat dönüşümleri sürekli ise* $\lambda(X)$*'e bir FDK-uzayı denir.*

Teorem 2.2.2. *P paranormu ile $\mathcal{L}_u(X,f)$ uzayı, vektör değerli bir FDK-uzayıdır.*

İspat. i) $\mathcal{L}_u(X,f)$'nin bir lineer uzay olduğunu ve

$$P(x)=\sum_{i,j} f(\|x_{ij}\|)$$

fonksiyonunun da bu uzay üzerinde bir paranorm tanımladığını biliyoruz.

ii) Koordinat fonksiyonlarının sürekliliği, yani

$$P_{kl}:\mathcal{L}_u(X,f)\to X, \qquad P_{kl}(x)=x_{kl}$$

olarak tanımlı P_{kl} fonksiyonlarının sürekliliğini gösterelim.

$$\varepsilon>0 \text{ için } \delta=f(\varepsilon)$$

olarak seçilirse

$$P(x)=\sum_{k,l} f(\|x_{kl}\|)<\delta=f(\varepsilon)$$

iken

$$f(\|x_{kl}\|)<f(\varepsilon)$$

olup, f fonksiyonunun artanlığından $\|x_{kl}\|=\|P_{kl}(x)\|<\varepsilon$ kalır.

iii) $\mathcal{L}_u(X,f)$'nin tamlığını gösterelim. $\left(x^l\right)$, $\mathcal{L}_u(X,f)$'de bir Cauchy dizisi olsun.

Bu halde $\forall\varepsilon>0$ için $\exists n_o\in\mathbb{N}\ni l,r>n_0$ için

$$P\left(x^l-x^r\right)<\varepsilon$$

olur. Her $(i,j)\in\mathbb{N}\times\mathbb{N}$ için $p_{ij}(x)=x_{ij}$ fonksiyonları sürekli olduğundan her

$(i,j)\in\mathbb{N}\times\mathbb{N}$ için $\left(x_{ij}^l\right)$, X'de bir Cauchy dizisidir $(l>n_0)$.

X Banach uzayı olduğundan bu Cauchy dizisi bir noktaya yakınsar. Bu noktaya x_{ij} diyelim. Bu limit noktaları yardımıyla bir $x=(x_{ij})$ çift dizisini oluşturalım.

$$
\begin{aligned}
x^l \to x \Rightarrow P\left(x^l - x^r\right) &< \varepsilon \\
&\Rightarrow \sum_{i,j} f\left(\left\|x_{ij}^l - x_{ij}^r\right\|\right) < \varepsilon \\
&\Rightarrow \sum_{i=0}^{m}\sum_{j=0}^{n} f\left(\left\|x_{ij}^l - x_{ij}^r\right\|\right) < \varepsilon \\
&\Rightarrow \lim_r \sum_{i=0}^{m}\sum_{j=0}^{n} f\left(\left\|x_{ij}^l - x_{ij}^r\right\|\right) = \textstyle\sum_{i,j} f\left(\left\|x_{ij}^l - x_{ij}\right\|\right) < \varepsilon \\
&\Rightarrow P\left(x^l - x\right) < \varepsilon \text{ , her } l > n_0 \text{ için} \\
&\Rightarrow x^l \to x
\end{aligned}
$$

dir.

$$
\begin{aligned}
\textstyle\sum_{i,j} f\left(\left\|x_{ij}\right\|\right) &= \sum_{i}\sum_{j} f\left(\left\|x_{ij} - x_{ij}^l + x_{ij}^l\right\|\right) \\
&\leq \sum_{i=0}^{\infty}\sum_{j=0}^{\infty} f\left(\left\|x_{ij} - x_{ij}^l\right\|\right) + \textstyle\sum_{i=0}^{\infty}\sum_{j=0}^{\infty} f\left(\left\|x_{ij}^l\right\|\right) \\
&< \varepsilon
\end{aligned}
$$

bulunur. Bu da $x \in \mathcal{L}_u(X, f)$ olduğunu gösterir. □

Şimdi de $\mathcal{L}_u(X)$ ve $\mathcal{M}_u(X)$ uzaylarını,

$$
\mathcal{M}_u(X) = \left\{x = (x_{mn}) \in \Omega(X) : \sup_{m,n \in \mathbb{N}} \|x_{mn}\| < \infty\right\}
$$

ve

$$
\mathcal{L}_u(X) = \left\{x = (x_{mn}) \in \Omega(X) : \sum_{m,n} \|x_{mn}\| < \infty\right\}
$$

olarak tanımlayalım. Artık $\mathcal{L}_u(X)$ ve $\mathcal{M}_u(X)$ uzaylarına dair bazı yeni sonuçları verebiliriz.

Teorem 2.2.3. *$\mathcal{L}_u(X)$ ve $\mathcal{M}_u(X)$ bir BDK-uzayıdır.*

Önerme 2.2.1. *Her f modülüsü için $\mathcal{L}_u(X, f) \subset \mathcal{L}_u(X)$ kapsaması geçerlidir.*

İspat. $x \in \mathcal{L}_u(X,f)$ ve $x \notin \mathcal{L}_u(X)$ olsun. k_n ve l_n indislerinin artan bir (k_n) ve (l_n) dizisi bulunabilir $\ni$

$$\sum_{i=k_{n-1}}^{k_{n-1}} \sum_{i=l_{n-1}}^{l_{n-1}} \|X_{ij}\| \geq 1 \Rightarrow f(1) \leq f\left(\sum_{i=k_{n-1}}^{k_{n-1}} \sum_{j=l_{n-1}}^{l_{n-1}} \|X_{ij}\|\right) \leq \sum_{i=k_{n-1}}^{k_{n-1}} \sum_{j=l_{n-1}}^{l_{n-1}} f(\|X_{ij}\|)$$

$$\Rightarrow \sum_{i=k_{n-1}}^{k_{n-1}} \sum_{j=l_{n-1}}^{l_{n-1}} f(\|X_{ij}\|) < \infty$$

$$\Rightarrow \lim_n \sum_{i=k_{n-1}}^{k_{n-1}} \sum_{j=l_{n-1}}^{l_{n-1}} f(\|X_{ij}\|) = 0$$

olur ki bu da $f(1) = 0$ olması demektir. Bu ise f'nin modülüs olması ile çelişir. O halde $x \in \mathcal{L}_u(X)$ olmalıdır. □

Vektör değerli dizi uzayları için genel olarak bir Schauder baz vermek mümkün değildir, [13]. Burada vektör değerli bazı fonksiyon uzayları için baz işlevi gören, uzay üzerinde tanımlı operatörler ailesi verilmiştir. Bu çalışmanın özel bir durumu olarak sözgelimi $\mathcal{L}_u(X)$ üzerindeki baz işlevi görecek operatörlerin bir ailesini verebiliriz. Öncelikle [13]'deki aşağıdaki lemmayı verelim:

Lemma 2.2.1. *A bir cümle ve (X,P) bir lokal konveks uzay olsun. Bu durumda her $x \in \ell(A,X)$ için,*

$$x = \sum_{a\in A} (I_a \circ x)(a)$$

şeklinde temsil edilir. Burada X bir lokal konveks Haussdorf uzay ve P, X'in topolojisini belirleyen X üzerindeki yarınormlar ailesidir.

$$x \in \ell(A,X) \Leftrightarrow \exists \varepsilon_p > 0 \quad \ni \qquad \sum_{a\in A} (p \circ x)(a) \leq \varepsilon_p < \infty \quad (p \in P)$$

Ayrıca

$$I_a : X \to \ell(A,X)$$

$$b \neq a \Rightarrow y(b) = 0, \;\; y(a) = t \text{ ve } I_a(t) = y$$

şeklinde tanımlıdır [13].

Daha kesin olarak Lemma 2.2.1'in özel bir sonucu olan şu önermeyi verebiliriz.

Önerme 2.2.2. *Her bir $x \in \mathcal{L}_u(X)$,*

$$x = \sum_{i,j\in\mathbb{N}\times\mathbb{N}} I_{ij}(x_{ij})$$

şeklinde temsil edilebilir. Burada $I_{ij}: X \to \mathcal{L}_u(X)$, $\quad I_{ij}(t) = y \ni y_{ij} = t,\ y_{kl} = 0,$ $(k,l) \neq (i,j)$ *ise.*

Bu temsilin anlamı F, $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$'nin herhangi bir sonlu altcümlesi olmak üzere

$$S_F(x) = \sum_{(i,j)\in F} I_{ij}(x_{ij})$$

olarak tanımlı F ile elde edilen $(S_F(x) : F \in \mathcal{F})$ ağının $\mathcal{L}_u(X)$ 'in norm topolojisinde x noktasına yakınsaması anlamındadır.

Burada $\mathcal{F}$, $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$'in bütün sonlu altcümlelerinin ailesidir. Bu aile, $\subseteq$ içerme bağıntısı ile yönlendirilmiş bir ailedir.

Bu temsil bize doğrudan $\mathcal{L}_u(X)$'in sürekli dualinin $\mathcal{M}_u(X')$ olduğunu da göstermektedir. Bunun sonucu, daha genel olarak [13]'de ispatlanmıştır.

Şimdi göstereceğiz ki $\mathcal{L}_u(X,f)$ uzayının elemanları da aynı şekilde bir temsile sahiptir. Yani her $x \in \mathcal{L}_u(X,f)$ için $(S_F(x) : F \in \mathcal{F})$ açığının $\mathcal{L}_u(X,f)$'in paranorm topolojisinde x noktasına yakınsadığını göstereceğiz.

Teorem 2.2.4. *Her bir* $x \in \mathcal{L}_u(X,f)$,

$$x = \sum_{(i,j)\in F} I_{ij}(x_{ij})$$

şeklinde temsil edilebilir. Burada

$$I_{ij}: X \to \mathcal{L}_u(X,f)$$
$$I_{ij}(t) = y \ni y_{ij} = t,\ y_{kl} = 0, (k,l) \neq (i,j) \ \ \textit{ise}$$

ile tanımlanmaktadır.

İspat. Göstereceğiz ki verilen her $\varepsilon > 0$ için bir $F_0 = F_0(\varepsilon) \in \mathcal{F}$ vardır $\ni F_0 \subseteq F$ olduğunda $P(x - S_F(x)) < \varepsilon$'dur.

I_{ij}'lerin tanımından

$$S_F : \mathcal{L}_u(X,f) \to \mathcal{L}_u(X,f)$$
$$S_F(x_{ij}) = x_{ij} \quad , \quad \text{eğer } (i.j) \in F \textit{ ise}$$
$$S_F(x_{ij}) = 0 \quad , \quad \text{eğer } (i,j) \notin F \textit{ ise}$$

şeklinde belirli bir fonksiyondur.

$$\begin{aligned} P(x - S_F(x)) &= \sum_{(i,j)\in\mathbb{N}\times\mathbb{N}} f\left(\left\|x_{ij} - \{S_F(x)\}_{ij}\right\|\right) \\ &= \sum_{(i,j)\in\mathbb{N}\times\mathbb{N}\setminus F} f\left(\|x_{ij}\|\right) \end{aligned}$$

$x \in \mathcal{L}_u(X, f)$ olduğunda $\sum_{(i,j)\in\mathbb{N}\times\mathbb{N}} f(\|x_{ij}\|) < \infty$'dur. O halde $\varepsilon > 0$ için bir $F_0(\varepsilon)$ vardır $\ni$ $\sum_{(i,j)\in\mathbb{N}\times\mathbb{N}\setminus F_0} f(\|x_{ij}\|) < \varepsilon$ kalır. Buradan her $F \supseteq F_0$ için

$$\sum_{(i,j)\in\mathbb{N}\times\mathbb{N}\setminus F} f(\|x_{ij}\|) = P(S_F(x) - x) < \varepsilon$$

kalır. Bu ise, $(S_F(x) : F \in \mathcal{F})$ ağının x noktasına yakınsadığını gösterir. $\square$

X birimli bir Banach Cebiri ise ve X'i cebir yapan çarpma işlemi "." ile gösterilirse $\mathcal{L}_u(X)$ uzayı da koordinatsal çarpma işlemi,

$$x \odot y = z \ \ni \ z_{kl} = x_{kl}.y_{kl}$$

işlemi ile bir cebir yapısına sahiptir. Bu durumda $\mathcal{L}_u(X)$'de e^{ij} vektörleri

$$e^{ij}_{kl} = \begin{cases} 1 & , \ (i,j) = (k,l) \\ 0 & , \ (i,j) \neq (k,l) \end{cases}$$

şeklinde tanımlanabilir. Burada 1, X'in çarpmaya göre birimidir. Bu durumun önemli bir avantajı ise daha önce tanımladığımız

$$I_{ij} : X \to \mathcal{L}_u(X)$$

operatörlerinin e^{ij} elemanlarına denk olması ve

$$I_{ij}(t) = t \boxdot e^{ij}$$

şeklinde temsil edilmesidir. Burada

$$\boxdot : X \times \mathcal{L}_u(X) \to \mathcal{L}_u(X)$$

işlemi

$$(t, y) \to t \boxdot y = z \Leftrightarrow z_{ij} = t.y_{ij}$$

şeklinde tanımlıdır.

X, $\mathcal{L}_u(X)$ içerisindeki altuzaylara denktir. X birimli Banach Cebiri ise $\mathcal{L}_u(X, f)$ de aynı şeyleri sağlar.

Burada denklikten kasıt $I_{ij} \to e^{ij}$ dönüşümlerinin bir izometrik izomorfizm olmasıdır.

Tanım 2.2.2. *$E \subset \Omega$ olmak üzere her $x \in E$ için*

$$x = \nu - \textstyle\sum_{k,l} x_{kl} e^{kl}$$

ise E'ye bir $AK(r)$ uzayı denir.

Özel olarak $E \subset \Omega$'nin bir $AK(\nu)$ uzayı olması için gerek ve yeter şart her $x \in E$ ve E'deki her sürekli P yarınormu için

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N} \ni P\left(\sum_{k=m}^{t} \sum_{l=n}^{q} X_{kl} e^{kl}\right) < \varepsilon$$
$$(t \geq m, q \geq n, m \geq N \text{ veya } n \geq N)$$

kalmasıdır [10].

Teorem 2.2.4'den dolayı $\mathcal{L}_u(X, f)$ bir AK-uzayıdır.

BÖLÜM 3

DUAL UZAYLAR

3.1 Sürekli Dualler

Teorem 3.1.1. *X bir normlu uzay ve $f \in \mathcal{L}_u(X)'$ ise*

$$f(x) = \sum_{i,j} \Psi_{ij}\left[(x_{ij})\right], \quad \Psi \in \mathcal{M}_u(X')$$

şeklinde yazılır. Bu halde, $\mathcal{L}_u(X)' = \mathcal{M}_u(X')$ olur.

İspat. Lemma 2.2.1'den $(S_F(x) : \mathcal{F})$ sonlu toplamlar ağı x'e yakınsar. Burada, $x = \sum\limits_{i,j \in \mathbb{N}\times\mathbb{N}} I_{ij}(x_{ij}) \in \mathcal{L}_u(X)$'dir. $f \in \mathcal{L}_u(X)'$ ise o zaman f'nin sürekliliğinden

$$f(x) = \sum_{i,j} (f \circ I_{ij})(x_{ij})$$

elde ederiz.

$\Psi : \mathbb{N}\times\mathbb{N} \to X'$, $\Psi_{ij} = (f \circ I_{ij})$ olarak tanımlayalım. Bu iyi tanımlıdır. Çünkü $\forall (i,j) \in \mathbb{N}\times\mathbb{N}$ için

$$\|\Psi(i,j)\| \leq \|f\| . \|I_{ij}\| = \|f\| < \infty$$

$$\|\Psi\|_\infty = \sup\{\|\Psi(i,j)\| : (i,j) \in \mathbb{N}\times\mathbb{N}\} \leq \|f\|$$

olduğunu biliyoruz. O halde $\Psi \in \mathcal{M}_u(X')$'dir.

Üstelik,

$$\begin{aligned} \|f(x)\| &\leq \left\|\sum_{i,j} \Psi_{ij}(x_{ij})\right\| \\ &\leq \sum_{i,j} \|\Psi_{ij}\| \, \|(x_{ij})\| \\ &\leq \|\Psi\|_\infty . \|x\|_u \end{aligned}$$

dir. Buradan

$$\|f\| \leq \|\Psi\|_\infty \Rightarrow \|f\| \leq \|\Psi_{ij}\|$$

elde edilir. O halde $\|\Psi\|_\infty = \|f\|$ dir.

$$T : \mathcal{L}_u(X') \to \mathcal{M}_u(X')$$

izometri tanımlayabiliriz öyle ki $T_f = \Psi$ olur.

Her $\Psi \in \mathcal{M}_u(X')$ için $\mathcal{L}_u(X)$ üzerinde bir f lineer fonksiyonelini

$$f(x) = \sum\nolimits_{i,j \in \mathbb{N}\times\mathbb{N}} \Psi_{ij}(x_{ij})$$

ile tanımlayabiliriz. Bu halde, $T_f = \Psi$ olur. Çünkü $\Psi_{ij} = f \circ I_{ij}$ ve T süreklidir.

Çünkü $|f(x)| \leq \|\Psi\|_\infty . \|x\|_u$'dir.

T üzerinedir. Dolayısıyla T bir denkliktir. Yani T, $\mathcal{L}_u(X)'$'den $\mathcal{M}_u(X')$'ye bir lineer izometridir. □

Teorem 3.1.2. $\mathcal{L}_u(X,f)' = \mathcal{M}_u(X')$*'dır.*

İspat. $x \in \mathcal{L}_u(X,f)$ noktasının, $x = \sum_{i,j} I_{ij}(x_{ij})$ şeklinde bir temsile sahip olduğunu daha önce görmüştük. Buna göre; $g \in \mathcal{L}_u(X,f)'$ lineer fonksiyonelini x noktasına uygulayarak $g(x) = \sum_{i,j}(g \circ I_{ij})(x_{ij})$ yazabiliriz. Burada g ve I_{ij}'lerin sürekliliğinden dolayı $g \circ I_{ij}$ süreklidir. Şimdi $\Psi_{ij} = g \circ I_{ij}$ dönüşümünü tanımlayalım. Bunlar yardımıyla

$$\begin{aligned} \Psi : & \mathbb{N}\times\mathbb{N} \to X' \\ & (i,j) \mapsto \Psi_{ij} \end{aligned}$$

çift dizisini tanımlarsak her bir Ψ_{ij}'nin sürekliliği Ψ'nin iyi tanımlı olduğunu garanti eder. Burada,

$$\|\Psi_{ij}\| = \|g \circ I_{ij}\| \leq \|g\| \, \|I_{ij}\| = \|g\| \tag{3.1.1}$$

olduğundan $\Psi_{ij} \in X'$'dır. Şimdi Ψ nin $\mathcal{M}_u(X')$'de olduğunu göstereceğiz. Açık olarak,

$$\begin{aligned} |g(x)| &\leq \sum_{i,j} \|g \circ I_{ij}\| \, \|x_{ij}\| \\ &= \sum_{i,j} \|\Psi_{ij}\| \, \|x_{ij}\| \\ &\leq \|\Psi\|_\infty . \sum_{i,j} \|x_{ij}\| \\ &= \|\Psi\|_\infty . \|x\|_u \end{aligned}$$

olup, buradan $\|g\| \leq \|\Psi\|_{\infty}$ yazarız. Ayrıca (3.1.1)'den $\|\Psi\|_{\infty} \leq \|g\|$ olduğu aşikârdır. Yani $\|\Psi\|_{\infty} = \|g\|$'dir. Bu bize

$$T : \mathcal{L}_u (X, f)' \to \mathcal{M}_u (X'), \; Tg = \Psi$$

dönüşümünün bir izometri olduğunu verir. Ayrıca bu dönüşümün lineer olduğu açık olup her $g, h \in \mathcal{L}_u (X, f)'$ için

$$T(g) = T(h) \Rightarrow \|T(g-h)\| = \|g-h\| = 0 \Longleftrightarrow g = h$$

olduğundan T birebirdir. Yani, T içine bir izometridir. O halde, $\mathcal{L}_u (X, f)'$, $\mathcal{M}_u (X')$'nün bir altuzayına denktir. Diğer taraftan, $\mathcal{L}_u (X, f) \subseteq \mathcal{L}_u (X)$ olduğundan $\mathcal{L}_u (X, f)' \supseteq \mathcal{L}_u (X)' = \mathcal{M}_u (X')$'dir. Yani, T örten olup $\mathcal{L}_u (X, f)' = \mathcal{M}_u (X')$'dir.

□

Burada $X = \mathbb{C}$ alınırsa $\mathcal{L}_u (f)' = \mathcal{M}_u$ elde edilir.

Teorem 3.1.3. *f özdeşlik fonksiyonundan farklı, sınırsız bir modülüs fonksiyonu ise $\mathcal{L}_u (X, f)$ lokal konveks değildir.*

İspat. $\mathcal{L}_u (X, f)$ uzayının $D = \{x : P(x) \leq 1\}$ birim yuvarını düşünelim. Burada

$$P(x) = \sum_{i=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty} f(\|x_{ij}\|).$$

D birim yuvarı, sıfırı kapsayan

$$\{x : P(x) < 1\}$$

açık cümlesini ihtiva ettiğinden $\mathcal{L}_u (x, f)$'de sıfırın bir komşuluğudur. D'nin sıfırın hiçbir konveks komşuluğunu içermediğini göstereceğiz. N, sıfırın bir konveks komşuluğu olsun. Bu durumda N, bir $\delta > 0$ için

$$\{x : P(x) \leq \delta\}$$

yuvarını ihtiva eder. f'nin sınırsızlığından $f(\xi) = \delta$ olacak şekilde bir $\xi > 0$

seçebiliriz. Şimdi

$$I_{ij} : X \to \mathcal{L}_u(x,f)$$

$$I_{ij}(t) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & t & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & \cdots & \cdots \end{pmatrix}$$

içerme dönüşümlerini düzenleyelim.

$$U_{ij} \in S_x \ , S_x = \{x \in X : \|x\| = 1\}$$

olmak üzere her (i,j) için $I_{ij}(\xi U_{ij}) \in N$'dir. Çünkü

$$P(I_{ij}(\xi U_{ij})) = f(\|\xi U_{ij}\|) = f(\xi) = \delta$$

olduğundan

$$I_{ij}(\xi U_{ij}) \in \{x : p(x) \leq \delta\}$$

olur.

Lemma 1.1.1'den dolayı

$$f\left(\frac{\xi}{mn}\right) > \frac{1}{mn}$$

olacak şekilde $m, n \in \mathbb{Z}^+$ seçebiliriz. N konveks olduğundan

$$x = \frac{1}{mn}\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} I_{ij}(\xi U_{ij}) = \begin{pmatrix} \frac{\xi u_{11}}{mn} & \frac{\xi u_{12}}{mn} & \cdots & \frac{\xi u_{1n}}{mn} & 0 \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots \\ \frac{\xi u_{m1}}{mn} & \frac{\xi u_{m2}}{mn} & \cdots & \frac{\xi u_{mn}}{mn} & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & \cdots & \cdot & \cdot \end{pmatrix}$$

şeklinde oluşturulan x, N'dedir. Fakat

$$\begin{aligned} P(x) &= \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} f\left(\left\|\frac{\xi U_{ij}}{mn}\right\|\right) \\ &= \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} f\left(\left\|\frac{\xi}{mn}\right\|\right) = mnf\left(\frac{\xi}{mn}\right) > 1 \end{aligned}$$

olduğundan $x \notin D$ olur. Yani, $N \subseteq D$ olamaz. Bu, 0 ın komşuluğu olan D'nin konveks bir komşuluk içermeyeceğini gösterir. O halde, $\mathcal{L}_u(X,f)$ lokal konveks olamaz. $\square$

3.2 Köthe Toeplitz Dualler

Bu bölüme öncelikle skaler değerli bir E çift dizi uzayının E^{α} $\alpha-$dual ve $E^{\beta(\nu)}$ $\beta(\nu)-$dual uzay tanımlarını hatırlamakla işe başlıyoruz.

$$E^{\alpha}=\left\{(a_{ij})\in\Omega \mid \forall x\in E \text{ için } \sum_{i,j}|a_{ij}x_{ij}|<\infty\right\}$$

ve

$$E^{\beta(v)}=\left\{(a_{ij})\in\Omega \mid \forall x\in E \text{ için } \mathcal{V}-\sum_{i,j}a_{ij}x_{ij} \text{ mevcut}\right\}$$

Şimdi de vektör değerli çift dizi uzayları için yukarıdaki tanımların karşılığını vereceğiz.

Tanım 3.2.1. *E, $\Omega(X)$'in boş olmayan bir altcümlesi olsun. E'nin $\alpha-$dualini*

$$E^{\alpha}=\left\{(\rho_{nk})\in\Omega\left(X'\right) : \textit{her } x\in E \textit{ için } \sum_{n,k}|\rho_{nk}(x_{nk})|<\infty\right\}$$

ve v çift diziler için herhangi bir yakınsaklık çeşidi olmak üzere E'nin $\beta(v)-$dualini

$$E^{\beta(v)}=\left\{(\rho_{nk})\in\Omega\left(X'\right) : \textit{her } x\in E \textit{ için } v-\sum_{n,k}\rho_{nk}(x_{nk}) \textit{ mevcut}\right\}$$

olarak tanımlıyoruz.

Yukarıdaki tanımda $X=\mathbb{C}$ alınırsa skaler çift dizi uzaylarının $\alpha-$dual ve $\beta(v)-$dual uzay tanımlarını elde ederiz.

Daima $E^{\alpha}\subset E^{\beta(v)}$'dir. Ayrıca $\delta\in\{\alpha,\beta(\vartheta)\}$ olmak üzere, $E\subseteq F\subseteq\Omega(X)$ iken $E^{\delta}\supseteq F^{\delta}$'dır.

Tanım 3.2.2. *$E^{\alpha\alpha}=(E^{\alpha})^{\alpha}$ olmak üzere, $E=E^{\alpha\alpha}$ ise E ye perfekttir denir. Dikkat edilirse $E^{\alpha}\subset\Omega\left(X'\right)$ olduğu görülür. O halde, $E^{\alpha\alpha}\subset\Omega\left(X''\right)$ kapsaması mevcuttur.*

Tanım 3.2.3. *X, bir normlu uzay ise X' ve X'' birer Banach uzayıdır. Ayrıca her $x\in X$ için*

$$\widehat{x}:X'\to\mathbb{C},\ \widehat{x}(f)=f(x)$$

fonksiyonu lineerdir. Ayrıca her $x\in X$ için $\widehat{x}$ süreklidir. Gerçekten de

$$|\widehat{x}(f)|=|f(x)|\leq\|f\|.\|X\|$$

olup,

$$\|\widehat{x}\| \leq \|x\|$$

eşitsizliği geçerlidir. Burada $\widehat{x} \in X'$*'ler vasıtasıyla tanımlanan*

$$k : X \to X''$$
$$x \to k(x) = \widehat{x}$$

dönüşümüne X*'in* X'' *içerisine doğal gömülmesi denir [1].*

Önerme 3.2.1. *X normlu bir uzay olmak üzere yukarıdaki gibi tanımlanan k kanonik dönüşümü, içine bir izometrik izomorfidir [1].*

Tanım 3.2.4. *X bir normlu uzay olmak üzere k dönüşümü örten ise yani*

$$k(X) = X''$$

ise X uzayına yansımalıdır denir [1].

Yansımalı bir normlu uzay tamdır, yani Banach uzayıdır.

Skaler terimli dizi uzayları için $\lambda \subset \lambda^{\alpha\alpha}$ olduğunu biliyoruz. Eğer X yansımalı bir normlu uzay ise $E \subset \Omega(X)$ olmak üzere $E \subseteq E^{\delta\delta}$, $(\delta = \alpha, \beta(\nu))$.

Önerme 3.2.2. *X yansımalı bir normlu uzay ise $E \subset \Omega(X)$ için $E^{\delta} = E^{\delta\delta\delta}$ olur. $(\delta = \alpha, \beta(\nu))$*

İspat. Yukarıda X yansımalı bir normlu uzay ise $E \subset \Omega(X)$ olmak üzere $E \subset E^{\delta\delta}$ $(\delta = \alpha, \beta(\nu))$ olduğunu söylemiştik. O halde

$$E^{\delta\delta\delta} \subseteq E^{\delta} \tag{3.2.1}$$

yazabiliriz. X yansımalı ise X'de yansımalı olacağından $E^{\delta} \subseteq \Omega(X')$ için de

$$E^{\delta} \subseteq \left(E^{\delta}\right)^{\delta\delta} = E^{\delta\delta\delta} \tag{3.2.2}$$

elde ederiz. (3.2.1) ve (3.2.2)'den $E^{\delta} = E^{\delta\delta\delta}$ yazarız. □

Tanım 3.2.5. *$E \subset \Omega(X)$ bir çift dizi uzayı ve $x = (x_{nk}) \in E$ keyfi olsun. Her $(\rho_{nk}) \in \Omega(X')$ için*

$$|\rho_{nk}(y_{nk})| \leq |\rho_{nk}(x_{nk})|$$

iken $y = (y_{nk}) \in E$ oluyorsa E'ye normaldir denir.

Şimdi [14]'de verilen bazı sonuçları vektör değerli çift dizi uzayları için ifade edeceğiz.

Önerme 3.2.3. *λ bir normal dizi uzayı ise $\lambda(X) \subset \Omega(X)$ de normal olur.*

İspat. λ bir normal dizi uzayı olsun. $x \in \lambda(X)$ ve her $(g_{nk}) \in \Omega\left(X'\right)$için $|g_{nk}(y_{nk})| \leq |g_{nk}(x_{nk})|$ olsun. Hahn-Banach Teoremi'nden her k için

$$h_{nk}(y_{nk}) = \|y_{nk}\| \text{ ve } \|h_{nk}\| = 1$$

olacak şekilde bir $h_{nk} \in X'$ mevcuttur. h_{nk} elemanlarıyla oluşturulan $(h_{nk}) \in \Omega\left(X'\right)$ için de

$$|h_{nk}(y_{nk})| \leq |h_{nk}(x_{nk})|$$

olur. Yani

$$\begin{aligned}\|y_{nk}\| &\leq |h_{nk}(x_{nk})| \\ &\leq \|h_{nk}\| \|x_{nk}\| = \|x_{nk}\|\end{aligned}$$

olur. $(\|x_{nk}\|) \in \lambda$ ve λ normal olduğundan $\|y_{nk}\| \in \lambda$ yani

$$y = (y_{nk}) \in \lambda(X)$$

ve dolayısıyla $\lambda(X)$ normaldir. $\square$

Sonuç 3.2.1. *$L_u(X), \mathcal{M}_u(X), \Phi(X)$ ve $\Omega(X)$ uzayları normaldir.*

Teorem 3.2.1. *X yansımalı bir normlu uzay olsun. $E \subset \Omega(X)$ perfekt ise normaldir.*

İspat. E perfekt ise $E = E^{\alpha\alpha}$'dır. $x = (x_{nk}) \in E$ ve her $(g_{nk}) \in \Omega\left(X'\right)$ için

$$|g_{nk}(y_{nk})| \leq \quad |g_{nk}(x_{nk})|$$

olsun. $x \in E$ ise $E = E^{\alpha\alpha}$ olduğundan $x \in E^{\alpha\alpha} \subseteq \Omega\left(X''\right) = \Omega(X)$ olup her $(g_{nk}) \in E^{\alpha}$ için

$$\sum_{n,k} |g_{nk}(x_{nk})| < \infty$$

olur. $|g_{nk}(y_{nk})| \leq \ |g_{nk}(x_{nk})|$ olduğundan

$$\sum_{n,k} |g_{nk}(y_{nk})| < \infty.$$

Bu ise

$$y = (y_{nk}) \in E^{\alpha\alpha} = E$$

sonucunu verir. O halde E normaldir. $\square$

M. Zeltser'in verdiği Tanım 1.3.6'daki monotonluk tanımını, aşağıdaki şekilde X değerli dizi uzaylarına genişletebiliriz:

Tanım 3.2.6. *$E \subset \Omega(X)$ olmak üzere E'den alınan her $x = (x_{kl})$ ve her $y \in \{0,1\}^{\mathbb{N}x\mathbb{N}}$ için $x.y = (x_{kl}.y_{kl}) \in E$ olması durumunda E'ye monotondur denir.*

Teorem 3.2.2. *$E \subset \Omega(X)$ çift dizi uzayı normal ise monotondur.*

İspat. $x = (x_{nk}) \in E$, $y = (y_{nk}) \in \{0,1\}^{\mathbb{N}x\mathbb{N}}$ olmak üzere $z = (z_{nk})$ dizisini $z_{nk} = x_{nk}.y_{nk}$ ile tanımlayalım. $\{0,1\}^{\mathbb{N}x\mathbb{N}}$'in tanımı gereği y dizisinde ancak birbirinden farklı sonlu sayıda terim sonsuz defa tekrarlanmaktadır. Bu terimler $\mu_{1,}$ $\mu_2, ..., \mu_n$ olsun ve

$$\mu = \max\{|\mu_i| : 1 \leq i \leq n\}$$

diyelim. Her bir $|y_{nk}\ | \leq \mu$ olduğu aşikârdır. Ayrıca her $(g_{nk}) \in \Omega\left(X'\right)$ için

$$|g_{nk}(z_{nk})| = |y_{nk}g_{nk}(x_{nk})| = |y_{nk}| . |g_{nk}(x_{nk})| \leq \mu . |g_{nk}(x_{nk})|$$

olup E'nin normalliğinden $z \in E$ elde edilir. Bu ise E'nin monoton olduğunu gösterir. $\square$

Uyarı 3.2.1. *Skaler halde bir dizi uzayının perfektliği, normalliğini ve normalliği de monotonluğunu gerektirmektedir. Vektör değerli dizi uzayları için bu gerektirme ancak X'in yansımalı bir normlu uzay olması halinde geçerlidir.*

Sonuç 3.2.2. *$L_u(X), \mathcal{M}_u(X), \phi(X)$ ve $\Omega(X)$ uzaylarının Sonuç 3.2.1'den normal olduğunu biliyoruz. O halde bu uzaylar aynı zamanda monotondur.*

Teorem 3.2.3. *$E \subset \Omega(X)$ monoton bir çift dizi uzayı ise $E^{\alpha} = E^{\beta(v)}$'dir.*

İspat. Bunun için, $E^{\beta(v)} \subset E^{\alpha}$ olduğunu göstermek yeterlidir. $(g_{nk}) \in E^{\beta(v)}$ ise $v - \sum\limits_{n,k} g_{nk}(x_{nk})$ her $(x_{nk}) \in E$ için mevcuttur. Şimdi

$$z_{nk} = \begin{cases} \frac{|g_{nk}(x_{nk})|}{g_{nk}(x_{nk})} x_{nk} & , \ g_{nk}(x_{nk}) \neq 0 \\ 0 & , \ g_{nk}(x_{nk}) = 0 \end{cases}$$

dizisini tanımlarsak E monoton olduğundan $z=(z_{nk})\in E$'dir. O halde,

$$v-\sum_{n,k} g_{nk}(z_{nk})$$

da mevcuttur.

$$\begin{aligned} v-\sum_{n,k=1}^{\infty} g_{nk}(z_{nk}) &= \sum_{n,k=1}^{\infty} g_{nk}\left(\frac{|g_{nk}(x_{nk})|}{g_{nk}(x_{nk})}x_{nk}\right) \\ &= \sum_{n,k=1}^{\infty} \frac{|g_{nk}(x_{nk})|}{g_{nk}(x_{nk})} g_{nk}(x_{nk}) = \sum_{n,k=1}^{\infty} |g_{nk}(x_{nk})| \end{aligned}$$

olup, $(g_{nk})\in E^{\alpha}$'dır. □

Sonuç 3.2.3. *$L_u(X), M_u(X), \phi(X)$ ve $\Omega(X)$ uzaylarının $\alpha-$dualleri ve $\beta(v)-$dualleri çakışıktır.*

Teorem 3.2.4. *$L_u(f)$ çift dizi uzayı normaldir.*

İspat. $x=(x_{nk})\in L_u(f)$ olsun. Bu halde, $\sum_{n,k} f(|x_{nk}|)<\infty$'dur. $|y_{nk}|\le|x_{nk}|$ ise f'nin artanlığından

$$\begin{aligned} & f(|y_{nk}|)<f(|x_{nk}|) \\ \Rightarrow & \sum_{n,k} f(|y_{nk}|)<\sum_{n,k} f(|x_{nk}|)<\infty \\ \Rightarrow & \sum_{n,k} f(|y_{nk}|)<\infty \end{aligned}$$

elde dilir. Bu ise $y=(y_{nk})\in L_u(f)$ olması demektir. □

Sonuç 3.2.4. *$L_u(f)$ çift dizi uzayı monoton olup $L_u(f)^{\alpha}=L_u(f)^{\beta(\nu)}=M_u$'dur.*

Sonuç 3.2.5. *Önerme 3.2.2'den dolayı $L_u(f)$ normal olduğundan $L_u(X,f)$ de normaldir. Dolayısıyla $L_u(X,f)$ aynı zamanda monoton olup $\alpha-$dualleri ve $\beta(\nu)-$dualleri çakışıktır. Yani, $L_u(X,f)^{\alpha}=L_u(X,f)^{\beta(\nu)}$.*

Teorem 3.2.5. *λ normal bir skalar çift dizi uzayı ise $\lambda(X)^{\alpha}=\lambda^{\alpha}\left(X'\right)$.*

İspat. $(f_{nk})\in\lambda^{\alpha}\left(X'\right)\Rightarrow(\|f_{nk}\|)\in\lambda^{\alpha}$'dır. O halde, her $(U_k)\in\lambda$ için

$$\sum_{n,k}\|f_{nk}\||U_{nk}|<\infty$$

dur.

Diğer taraftan, her $x = (x_{nk}) \in \lambda(X)$ için $(\|x_{nk}\|) \in \lambda$ olup,

$$\sum_{n,k} |f_{nk}(x_{nk})| \leq \sum_{n,k} \|f_{nk}\| . \|x_{nk}\| < \infty$$

elde edilir. Yani, $(f_{nk}) \in \lambda(X)^{\alpha}$'dir.

Tersine $(f_{nk}) \in \lambda(X)^{\alpha}$ olsun. $(\|f_{nk}\|)$'nin tanımından herbir k için

$$\|f_{nk}\| \leq 2|f_{nk}(y_{nk})| \ , \ \|y_{nk}\| \leq 1$$

olacak şekilde bir $(y_{nk}) \in X$ vardır. Her $(U_{nk}) \in \lambda$ için

$$z_{nk} = u_{nk}.y_{nk}$$

ile $z = (z_{nk})$ dizisini tanımlarsak $z \in \lambda(X)$ olur. Çünkü

$$\|z_{nk}\| = |u_{nk}| . \|y_{nk}\| \leq |u_{nk}|$$

olup λ uzayının normalliğinden $(\|z_{nk}\|) \in \lambda$'dir. O halde

$$\begin{aligned} \sum_{n,k} \|f_{nk}\| . |u_{nk}| &\leq 2\sum_{n,k} |u_{nk}| . |f_{nk}(y_{nk})| \\ &= 2\sum_{n,k} |f_{nk}(u_{nk}y_{nk})| \\ &= 2\sum_{n,k} |f_{nk}(z_{nk})| < \infty \end{aligned}$$

olur. Yani, $(\|f_{nk}\|) \in \lambda^{\alpha}$ olup $(f_{nk}) \in \lambda^{\alpha}\left(X'\right)$ elde edilir. □

Sonuç 3.2.6. *X yansımalı bir normlu uzay olmak üzere*

$$\mathcal{L}_u(X)^{\alpha} = L_u(X)^{\beta(\nu)} = \mathcal{M}_u\left(X'\right)$$

dir.

[14, sf.68]'de verilen teoremin özel bir halini verelim.

Teorem 3.2.6. *λ normal bir çift dizi uzayı ise*

$$\lambda(X, f)^{\alpha} = \lambda(X, f)^{\beta(\nu)} = (\lambda(f))^{\alpha}(X')$$

dır.

Sonuç 3.2.7. *Teorem 3.2.6'de $\lambda = \mathcal{L}_u$ alınırsa*

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_u(X, f)^{\alpha} = \mathcal{L}_u(X, f)^{\beta(\nu)} &= (\mathcal{L}_u(f))^{\alpha}(X') \\ &= \mathcal{M}_u\left(X'\right) \end{aligned}$$

elde edilir.

KAYNAKLAR

[1] A. Wilansky, *Modern Methods in Topological Vector Spaces,* McGraw Hill Inc., New York, 1978.

[2] A. Wilansky, *Functional Analysis,* Blaisdel, 1964.

[3] I. J. Maddox, *Sequence spaces defined by a modulus,* Math. Proc. Camb. Phil. Soc., $Vol.$100, 1986.

[4] H. Nakano, *Concave modulares,* J. Math. Soc. Japan, $Vol.$5, $29-49$, 1953.

[5] W. H. Ruckle, *FK- Spaces in which the sequence of coordinate vectors is bounded,* Can. J. Math, Vol. 25(5), 1973.

[6] T. Bilgin, *Seminormlu Uzaylarda* $\ell(p,f,q,s)$ *Dizi Uzayı ve* $w(A,p,f,q,s)$ *Toplanabilme,* Doktora tezi, Erciyes Üniversitesi, Kayseri, 1992.

[7] P. K. Kamthan and Manjul Gupta, *Sequence Spaces and Series,* Marcel Dekker, Inc. Newyork and Bassel, 1981.

[8] F. Moricz, *Extensions of the spaces* c and c_0 *from single to double sequences,* Acta. Math. Hung., 57(1991), $no.1-2$, $129-136$.

[9] J. Boos, T. Leiger, K. Zeller, *Consistency theory for SM-methods,* Acta. Math. Hungar., 76(1997), $83-116$.

[10] M. Zeltser, *Investigation of double sequence spaces by soft and hard analytical methods,*Dissertationes Mathematicae Universitatis Tartuensis, Tartu, 2001.

[11] M. Bayraktar, *Fonksiyonel Analiz,* Erzurum, 1994.

[12] H. Kızmaz, *Fonksiyonel Analize Giriş, Karadeniz Teknik Üniversitesi Basımevi, Trabzon,* 1993.

[13] Y. Yılmaz, *Structural properties of some function spaces,* Nonlinear Analysis, 59 (2004), $959-971$.

[14] Y. Yılmaz, *Modülüs Fonksiyonu Yardımıyla Tanımlanmış Bazı Yeni Dizi Uzayları,* Doktora tezi, İnönü Üniversitesi, Malatya, 2003.

[15] I. J. Maddox, *Elements of Functional Analysis,* Cambridge University Press (Second Edition), Cambridge, 1988.

[16] G. H. Hardy, *On the convergence of certain multiple series,* Proc. Cambridge Philos. Soc. $19(1916-1919)$, $86-95$.

[17] A. Türkmenoğlu [A.Gökhan], *Bazı Çift İndisli Dizi Uzayları,* Doktora tezi, Fırat Üniv. Fen Bil. Enst., 1993.

[18] G. M. Robison, *Divergent double sequences and series,* Trans. Amer. Math. Soc. 28 (1926) , *no.*1, 50 − 73.

[19] T. Kojima, *On the theory of double sequence,* Tôhoku Math. J., 21 (1922) , 3 − 14.

[20] H. J. Hamilton, *Transformations of multiple sequences,* Duke Math. J., 2 (1936) , 29 − 60.

[21] J. D. Hill, *On perfect summability of double sequences,* Bull. Amer. Math. Soc., 46 (1940) , 327 − 331.

[22] E. Jurimäe, *Functional analysis methods in the theory of double series,* Uch. zp. Tartusskogo un-ta 55 (1958) , 3 − 7, (in Estonia) .

[23] I. G. Kull. Multiplication of summable double series, Uch. zap. Tartusskogo un-ta 62 (1958) , 3 − 59 (in Russian).

[24] M. Stieglitz, *Über die limitierbarkeit unbeschränkte Doppelfolgen,* Studia Math, 34 (1970) , 177 − 182.

[25] J. I. Okutoyı,*On four dimensional matrices,* Bull. Inst. Math. Acad. Sinica 23 (1995) , 79 − 93.

[26] C. Jardas, N. Sarapa, *On the summability of pairs of sequences,* Glas. Mat. Ser. III 26 (1991) , 67 − 78.

[27] B. Altay, *Bazı Yeni Çift Dizi Uzayları,* Doktora tezi, İnönü Üniv., Malatya, 2002.

[28] M. Zeltser, *Matrix transformations double sequences,* Acta Comment. Univ. Tartu Math. 4 (2000) , 39 − 51.

[29] M. Zeltser, *On conservative and coercive SM-methods,* Proc. Est. Acad. Sci. Phys. Math. 50 (2001) , 76 − 85.

[30] M. Zeltser, *Weak sequential completeness of $\beta-$duals of double sequence spaces,* Anal. Math. 27 (2001) , 223 − 238.

[31] M. Zeltser, *On conservative matrix methods for double sequence spaces,* Acta Math. Hungar. 95 (2002) , 225 − 242.

[32] R. F. Patterson, *Invariant core theorems for double sequences,* Southeast Asian Bull. Math. 24 (2000) , 421 − 429.

[33] Mursaleen, O. H. H. Edely, *Statistical convergence of double sequences,* J. Math. Anal. Appl. 288 (2003) , 223 − 231.

[34] A. Gökhan, R. Çolak, *The double sequence spaces* $c_2^P(p)$ *and* $c_2^{PB}(p)$, Appl. Math. Comput. 157 (2004), $491-501$.

[35] A. Gökhan, R. Çolak, *Double sequence spaces* $l_2^\infty(p)$, Appl. Math. Comput. 160(2005), $147-153$.

ÖZGEÇMİŞ

04.09.1971 tarihinde Malatya'da doğmuştur. İlk, orta ve lise eğitimini Malatya'da tamamladı. 1989 yılında İnönü Üniversitesi Fen-Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümü'ne kayıt yaptırdı. Haziran 1993'te lisans eğitimini tamamlayarak aynı yıl Eylül ayında İnönü Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalı'nda yüksek lisans programına kayıt yaptırdı. 1994 Eylül ayında İstanbul ili Eyüp ilçesi Akpınar Köyü'nde matematik öğretmeni olarak göreve başladı. 1996 yılında ise Malatya'ya atandı. 1997 yılında yüksek lisans eğitimini tamamladı. 2000 yılında İnönü Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalı'nda doktora programına kayıt yaptırdı. Halen Malatya'da matematik öğretmeni olarak görev yapmaktadır.