

**ÇUKUROVA ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Göknur AYKANAT

ÖMÜR MODELİ OLARAK GENELLEŞTİRİLMİŞ TERS ÜSTEL DAĞILIM

İSTATİSTİK ANABİLİM DALI

ADANA, 2013

ÇUKUROVA ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

ÖMÜR MODELİ OLARAK GENELLEŞTİRİLMİŞ TERS ÜSTEL DAĞILIM

Göknur AYKANAT

YÜKSEK LİSANS TEZİ

İSTATİSTİK ANABİLİM DALI

Bu Tez / /2013 Tarihinde Aşağıdaki Jüri Üyeleri Tarafından
Oybirliği/Oyçokluğu ile Kabul Edilmiştir.

.....
Doç. Dr. Ali İhsan GENÇ
DANIŞMAN

.....
Doç. Dr. Güzin YÜKSEL
ÜYE

.....
Yrd. Dr.Doç. Gülsen KIRAL
ÜYE

Bu Tez Enstitümüz İstatistik Anabilim Dalında hazırlanmıştır.
Kod No:

Prof. Dr. Mustafa GÖK
Enstitü Müdürü

Not: Bu tezde kullanılan özgün ve başka kaynaktan yapılan bildirişlerin, çizelge, şekil ve fotoğrafların kaynak gösterilmeden kullanımı, 5846 sayılı Fikir ve Sanat Eserleri Kanunundaki hükümlere tabidir.

ÖZ

YÜKSEK LİSANS TEZİ

ÖMÜR MODELİ OLARAK GENELLEŞTİRİLMİŞ TERS ÜSTEL DAĞILIM

Göknur AYKANAT

**ÇUKUROVA ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
İSTATİSTİK ANABİLİM DALI**

Danışman : Doç. Dr. Ali İhsan GENÇ

Yıl: 2013, Sayfa: 90

Jüri : Doç. Dr. Ali İhsan GENÇ

: Doç. Dr. Güzin YÜKSEL

: Yrd. Dr. Doç. Gülsen KIRAL

Güvenilirlik analizinde ömürleri modellemede yaygın olarak kullanılan gamma, Weibull ve üstel dağılımlara alternatif olarak yeni dağılım türleri geliştirilmiştir. Son yıllarda ömürleri modellemede üstel dağılımın farklı bir genişletilmesi olan genelleştirilmiş üstel dağılım kullanılmaktadır. Öte yandan, genelleştirilmiş ters üstel dağılım ise genelleştirilmiş üstel dağılımın bir dönüşümüdür. Bu çalışmada önce genelleştirilmiş ters üstel dağılımın özellikleri detaylı incelenmiş, sonra bu dağılım güvenilirlik analizinde sıkça kullanılan çeşitli veri kümelerini modellemede kullanılmış ve diğer dağılımla karşılaştırılmaları yapılmıştır.

Anahtar Kelimeler: Güvenilirlik Analizi, Genelleştirilmiş Ters Üstel Dağılım, Modelleme

ABSTRACT

MSc THESIS

**GENERALIZED INVERTED EXPONENTIAL DISTRIBUTION AS
LIFETIME MODEL**

Göknur AYKANAT

**ÇUKUROVA UNIVERSITY
INSTITUTE OF NATUREL AND APPLIED SCIENCES
DEPARTMENT OF STATISTICS**

Supervisor : Assoc. Prof. Dr. Ali İhsan GENÇ
Year: 2013, Pages: 90
Jury : Assoc. Prof. Dr. Ali İhsan GENÇ
: Assoc. Prof. Dr. Güzin YÜKSEL
: Asst. Prof. Dr. Gülşen KIRAL

New distributions have been developed as an alternative to commonly used models such as gamma, Weibull and exponential distribution, in modelling lifetime data in reliability analysis. Recently, a new distribution called the generalized exponential distribution, as an alternative generalization of the ordinary exponential distribution is used in lifetime modelling. On the other hand, generalized inverted exponential distribution is a transformation of the generalized exponential distribution. In this thesis, firstly the distributional properties of the inverted generalized exponential distribution are investigated in detail and then secondly the distribution is used to model some well-known real data sets in reliability literature, and is compared to commonly used models.

Keywords: Reliability Analysis, Generalized Inverted Exponential Distribution, Modelling

TEŞEKKÜR

Tez alıőmam boyunca değerli destek ve yardımlarını esirgemeyerek her zaman yanımda olan danışman hocam Doç. Dr. Ali İhsan GENÇ'e teşekkür ederim.

Ayrıca, eğitim hayatım boyunca aldığım her kararın arkasında olarak beni destekleyen ve yanımda olan sevgili aileme de teşekkür ederim.

İÇİNDEKİLER

SAYFA

ÖZ	I
ABSTRACT	II
TEŞEKKÜR	III
İÇİNDEKİLER	IV
ÇİZELGELER DİZİNİ	VIII
ŞEKİLLER DİZİNİ	X
SİMGELER VE KISALTMALAR	XII
1. GİRİŞ	1
2. GÜVENİLİRLİK TEORİSİNDEKİ TEMEL KAVRAMLAR	3
2.1. Giriş.	3
2.2. Temel Kavramlar	3
2.3. Tehlike Fonksiyonu Tipleri	6
2.3.1. Sabit Tehlike Fonksiyonu	6
2.3.1.1. Üstel Dağılım	6
2.3.2. Artan Tehlike Fonksiyonu	8
2.3.2.1. Weibull Dağılımı	8
2.3.3. Azalan Tehlike Fonksiyonu	10
2.3.4. U-Şekilli Tehlike Fonksiyonu	12
2.3.4.1. Chen (2000) in İki Parametrelili Ömür Dağılımı	12
3. GENELLEŞTİRİLMİŞ TERS ÜSTEL DAĞILIM VE ÖZELLİKLERİ	15
3.1. Giriş	15
3.2. Ters Üstel Dağılım (Inverted Exponential Distribution-IED)	15
3.3. Genelleştirilmiş Üstel Dağılım (Generalized Exponential Distribution-GED) ..	16
3.4. Genelleştirilmiş Ters Üstel Dağılım (Generalized Inverted Exponential Distribution-GIED)'in Tanımı	16
3.4.1. GIED in Olasılık Yoğunluk Fonksiyonu ve Kümülatif Dağılım Fonksiyonu	17
3.5. GIED'in Dağılımsal Özellikleri	18
3.5.1. Yoğunluk Fonksiyonunun Asimptotik Açılımı	18

3.5.2. Kümülatif Dağılım Fonksiyonunun Stokastik Sıralaması.....	19
3.5.3. Kantil Fonksiyonu ve Medyan.....	23
3.5.4. Moment Çıkaran Fonksiyon.....	24
3.5.5. Momentler.....	25
3.5.6. Mod.....	27
3.5.7. Sıra İstatistikleri.....	28
3.5.8. Parametre Tahminleri.....	31
3.5.8.1. Maksimum Olabilirlik Tahmin Edicileri.....	31
3.5.8.2. Bilgi Matrisi.....	35
3.5.8.3. En Küçük Kareler Tahmini.....	40
3.5.8.4. Ağırlıklı En Küçük Kareler Tahmini.....	42
3.5.8.5. Momentler Tahmini.....	43
4. BİR ÖMÜR DAĞILIMI OLARAK GENELLEŞTİRİLMİŞ TERS	
ÜSTEL DAĞILIM.....	45
4.1. Güvenilirlik Fonksiyonu.....	45
4.2. Tehlike Fonksiyonu.....	45
4.3. İlerleyen II. Tip Sansürlü Örnekleme ve Genelleştirilmiş Ters Üstel Dağılım	48
4.3.1. Olabilirlik Fonksiyonu.....	49
4.3.2. Genelleştirilmiş Ters Üstel Dağılımdan İlerleyen II. Tip Sansürlü	
Örnekleme Üretmek İçin Algoritma.....	49
4.3.3. Maksimum Olabilirlik Tahmini Ve Güvenilirlik Karakteristikleri.....	50
4.3.3.1. Log Olabilirlik Fonksiyonu.....	50
4.3.3.2. Fisher Bilgi Matrisi.....	52
4.4. En Uygun Modeli Belirlemede Kullanılan Bazı Kriterler.....	53
4.4.1. Akaike Bilgi Kriteri (AIC).....	54
4.4.2. Bayesian Bilgi Kriteri (BIC).....	54
5. GENELLEŞTİRİLMİŞ TERS ÜSTEL DAĞILIMIN TAHMİN	
YÖNTEMLERİ KULLANILARAK DİĞER ÖMÜR DAĞILIMLARI	
İLE KARŞILAŞTIRILMASI.....	55
5.1. Giriş.....	55
5.2. Sayısal Örnekler.....	55

5.2.1. Ball Bearings Veri Kümesi	55
5.2.2. Guinea Pigs Veri Kümesi	61
5.3. Tahmin Ediciler ve Karşılaştırılmaları	66
5.4. GIED in Güvenilirlik Fonksiyonu Tahminleri	68
5.5. GIED in Tehlike Fonksiyonu Tahminleri	71
5.6. Diğer Ömür Dağılımlarının Guinea Pigs Verisi İçin Karşılaştırılmaları	75
6. SONUÇLAR VE ÖNERİLER	79
KAYNAKLAR	81
ÖZGEÇMİŞ	85
EKLER	86

ÇİZELGELER DİZİNİ

SAYFA

Çizelge 3.1. GIED in çeşitli parametre değerlerinde moment hesaplamaları.....	28
Çizelge 3.2. GIED in α şekil parametresi için simülasyonu.....	33
Çizelge 3.3. GIED in λ ölçek parametresi için simülasyonu.....	34
Çizelge 5.1. Ball bearings verisi.....	56
Çizelge 5.2. GIED ve IED in Ball bearings veri seti için parametre tahminleri, olabilirlik oran test istatistikleri, p değeri, ξ^2 değeri ve standart hata değerlerinin karekökleri.....	57
Çizelge 5.3. Guinea Pigs verisi.....	62
Çizelge 5.4. GIED ve IED in Guinea pigs veri seti için parametre tahminleri, olabilirlik oran test istatistikleri, p değeri, ξ^2 değeri ve standart hata değerlerinin karekökleri.....	63
Çizelge 5.5. Guinea pigs verisi için AIC, BIC, K-S Test, ve $\text{Log}(L)$ değerleri.....	76

ŞEKİLLER DİZİNİ

SAYFA

Şekil 2.1. Üstel dağılımın tehlike fonksiyonu	7
Şekil 2.2. Üstel dağılımın olasılık yoğunluk fonksiyonu grafiği	8
Şekil 2.3. Weibull dağılımının tehlike fonksiyonu.....	9
Şekil 2.4. Weibull dağılımının olasılık yoğunluk fonksiyonu.....	10
Şekil 2.5. Weibull dağılımının tehlike fonksiyonu.....	11
Şekil 2.6. Weibull dağılımının olasılık yoğunluk fonksiyonu.....	11
Şekil 2.7. İki parametrelî ömür dağılımının tehlike fonksiyonu	13
Şekil 2.8. İki parametrelî ömür dağılımının olasılık yoğunluk fonksiyonu	13
Şekil 3.1. Genelleştirilmiş ters üstel dağılımın olasılık yoğunluk fonksiyonları	18
Şekil 4.1. Genelleştirilmiş ters üstel dağılımın güvenilirlik fonksiyonları.....	46
Şekil 4.2. Genelleştirilmiş ters üstel dağılımın tehlike fonksiyonları	46
Şekil 5.1. Ball bearings verisi için histogramı ve üzerindeki olasılık yoğunluk fonksiyonları uydurumları.....	59
Şekil 5.2. Ball bearings verisi için deneysel kümülatif dağılım fonksiyonu	60
Şekil 5.3. Ball bearings verisi için kantil fonksiyonu.....	61
Şekil 5.4. Guinea pigs verisi için histogramı ve üzerindeki olasılık yoğunluk fonksiyonları uydurumları.....	65
Şekil 5.5. Guinea pigs verisi için deneysel kümülatif dağılım fonksiyonu	65
Şekil 5.6. Guinea pigs verisi için kantil fonksiyonu.....	66
Şekil 5.7. GIED in güvenilirlik fonksiyonu grafikleri.....	69
Şekil 5.8. GIED in Guinea pigs verisi için güvenilirlik fonksiyonları.....	71
Şekil 5.9. GIED in Ball bearings verisi için tehlike fonksiyonları.....	73
Şekil 5.10. GIED in Guinea pigs verisi için tehlike fonksiyonları.....	75
Şekil 5.11. Guinea Pigs verisi için histogramı ve üzerindeki olasılık yoğunluk fonksiyonları uydurumları.....	77

SİMGELER VE KISALTMALAR

EKK	: En Küçük Kareler Tahmin (Least Squares Estimators)
MLE	: Maksimum Likelihood Tahmin (Maximum Likelihood Estimators)
AEKK	: Ağırlıklı En Küçük Kareler Tahmin (Weighted Least Squares Estimators)
MOM	: Momentler Yöntemi Tahmin (Method of Moment Estimators)
AIC	: Akaike Bilgi Kriteri (Akaike Information Criterion)
BIC	: Bayesian Bilgi Kriteri (Bayesian Information Criterion)
GED	: Genelleştirilmiş Üstel Dağılım (Generalized Exponential Distribution)
GIED	: Genelleştirilmiş Ters Üstel Dağılım (Generalized Inverted Exponential Distribution)
IED	: Ters Üstel Dağılım (Inverted Exponential Distribution)
EXP	: Üstel Dağılım (Exponential Distribution)
GAMMA	: Gamma Dağılımı (Gamma Distribution)
WEIBULL	: Weibull Dağılımı (Weibull Distribution)
KDF	: Kümülatif Dağılım Fonksiyonu (Cumulative Distribution Function)
OYF	: Olasılık Yoğunluk Fonksiyonu (Probability Density Function)
CV	: CV Katsayısı (Coefficient of Variation)
K-S	: Kolmogrov Smirnov Test İstatistiği (Kolmogorov–Smirnov Statistic)

1. GİRİŞ

Gamma dağılımı ve Weibull dağılımının güvenilirlik analizinde yaşam sürelerini modellemede kullanıldığı iyi bilinmektedir. Fakat her iki dağılımın da bazı dezavantajları vardır. Gamma dağılımının en büyük dezavantajı eğer şekil parametresi bir tam sayı değilse kümülatif dağılım fonksiyonunun ve tehlike fonksiyonunun kolayca hesaplanamayacağıdır. Gamma dağılımının aksine Weibull dağılımının kümülatif dağılım fonksiyonu ve tehlike fonksiyonu kolayca hesaplanabilmektedir. Şekil parametresi 1 den büyük olduğunda her iki dağılımın da tehlike fonksiyonu artandır. Fakat Weibull dağılımının 0 dan sonsuza kadar artış göstermektedir ki bu özellik modellemede bazı durumlarda uygun olmayabilir. Şekil parametresi 1 olduğunda her iki dağılım da üstel dağılıma indirgenir.

Gamma ve Weibull dağılımına alternatif olarak geliştirilmiş üstel (GED) dağılım Gupta ve Kundu (1999) tarafından tanımlanmıştır. GED in olasılık yoğunluk fonksiyonu $x > \mu$, $\alpha > 0$ ve $\lambda > 0$ olmak üzere

$$f(x; \alpha, \lambda, \mu) = \frac{\alpha}{\lambda} (1 - e^{-(x-\mu)/\lambda})^{\alpha-1} e^{-(x-\mu)/\lambda} \quad (1.1)$$

olarak verilmektedir.

Bu dağılım parametrelerinin özel durumlarında üstel dağılımı içermektedir ve üstel dağılımdan daha esnektir. Ayrıca gamma ve Weibull dağılımının bir takım dezavantajları bu dağılımda görülmemektedir. Genelleştirilmiş üstel dağılımın dağılımsal özellikleri bir çok yazar tarafından çalışılmış ve bu dağılım ömürleri modellemede kullanılmıştır (Gupta ve Kundu, 2007).

Son olarak Nadarajah ve Haghghi (2011), üstel dağılımın bir başka genelleştirmesini tanımlamıştır. Bu dağılımın olasılık yoğunluk fonksiyonu $x > 0$ $\alpha > 0$ ve $\lambda > 0$ olmak üzere

$$g(x; \alpha, \lambda) = \alpha \lambda (1 + \lambda x)^{\alpha-1} e^{1-(1+\lambda x)^\alpha} \quad (1.2)$$

olarak verilmektedir.

Abouammoh ve Alshingiti (2009), X genelleştirilmiş üstel dağılım olmak üzere $1/X$ dönüşümü yaparak genelleştirilmiş ters üstel dağılımı tanıtmış ve bunun yaşam analizinde Lin ve ark. (1989), tarafından çalışılan ters üstel dağılımın bir alternatifi olabileceğini belirtmiştir. Genelleştirilmiş ters üstel dağılımın olasılık yoğunluk fonksiyonu $x > 0$, $\alpha > 0$ ve $\lambda > 0$ olmak üzere

$$f(x; \alpha, \lambda) = \alpha \lambda \frac{1}{x^2} e^{-\lambda/x} [1 - e^{-\lambda/x}]^{\alpha-1} \quad (1.3)$$

şeklindedir.

Her ne kadar dağılımın yaşam analizi terimlerinde bazı özellikleri Abouammoh ve Alshingiti (2009) ve Krishna ve Kumar (2012) tarafından verilmiş olsa da bu çalışmada ek olarak dağılımın yoğunluğunun şekilleri, momentleri, çarpıklık ve basıklık durumları, sıra istatistikleri, vs. gibi dağılımsal özellikleri de incelenmiştir.

Bu çalışmada ikinci bölümde güvenilirlik teorisindeki temel kavramlar ayrıntılı olarak incelenmiştir. Üçüncü bölümde genelleştirilmiş ters üstel dağılım tanıtılarak özellikleri verilmiştir. Daha önceki çalışmalara ek olarak stokastik sıralama özellikleri ve yoğunluk fonksiyonunun asimptotik açılımı geliştirilmiştir. Dördüncü bölümde genelleştirilmiş ters üstel dağılımın ömür dağılımı olarak incelenmesi yapılmıştır. Ayrıca *ilerleyen II. tip sansürlü örneklemenin* bu dağılımla genel tanımları verilmiştir. Beşinci bölümde ise örnek iki veri kümesi alınarak bu dağılımla modelleme yapılmıştır. Parametre tahminleri farklı yöntemlerle incelenmiş ve genelleştirilmiş ters üstel dağılım diğer ömür dağılımları ile karşılaştırılarak kuvvetli ve zayıf yönleri ortaya konmuştur.

2. GÜVENİLİRLİK TEORİSİNDEKİ TEMEL KAVRAMLAR

2.1. Giriş

Güvenilirlik, bir nesnenin tanımlanmış bir amacı belli bir zaman aralığında, tam olarak yerine getirme olasılığıdır (Bentley, 1993: Andrews ve ark. 2002). Güvenilirlik teorisinde, sürekli dağılımlar zamana karşı dayanma süresi gibi herhangi bir değer alan değişkenleri modellemek için kullanılır (Moss, 2005).

Birçok alanda yaygın olarak kullanılan istatistik bilimi, güvenilirlik teorisinde olasılık dağılımlarıyla birlikte önemli bir yer edinmiştir. Olasılık dağılımları sistemler, alt sistemleri veya bileşenleri için zamana karşı bozulma ya da arızalanma modelleri olarak yaygın biçimde kullanılırlar (Hahn ve Shapiro, 1967: Bentley, 1993). Bir sistemin yaşam süresi; üretim miktarı, üretim için kullanılan madde veya çevresel koşullardaki değişim gibi birçok faktöre bağlıdır. Önce sistem ya da sistemin bir alt sistemi veya sistemin bir bileşeni için süre bir rastgele değişken olarak alınarak zamana karşı bozulma ya da arızalanma için uygun bir olasılık modeli oluşturulur. Sonra oluşturulan olasılık modelindeki parametreler tahmin edilir. Ayrıca oluşturulan olasılık modellerinin sağ kalım (survival) fonksiyonu, tehlike (hazard) fonksiyonu gibi bazı özellikleri incelenir (Meeker ve Escobar, 1998).

Bu bölümde güvenilirlik teorisindeki temel kavramlar verilecektir.

2.2. Temel Kavramlar

T negatif olmayan rastgele değişkeninin bir parçanın tükenmişlik süresi ya da ömrünü temsil ettiğini varsayalım. Parçanın t süresine kadar yaşayacak olması olasılığı, t süresinde o parçanın *güvenilirliği* (*reliability*) olarak adlandırılır ve

$$R(t) = P(T > t) = 1 - F(t), \quad t \geq 0 \quad (2.1)$$

ile tanımlanır. Burada $F(t)$, T nin kümülatif dağılım fonksiyonudur. Eğer T , mutlak sürekli bir rastgele değişken ve $f(t)$ onun olasılık yoğunluk fonksiyonu ise o zaman T nin tehlike fonksiyonu ya da tükenmişlik hızı (hazard rate) $h(t)$ aşağıdaki gibi tanımlanır:

$$h(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{P\{t \leq T \leq t + \Delta t / T \geq t\}}{\Delta t} = \frac{f(t)}{R(t)} \quad (2.2)$$

Bu yüzden $P(T > t)$ olasılığı, ömrün bir t eşik değerini aşması olasılığı olarak ifade edilir. $P\{t \leq T \leq t + \Delta t / T \geq t\}$, parçanın t süre kadar yaşadığı bilindiğinde bir Δt süresindeki yaşaması olasılığıdır. Aşağıdaki

$$\frac{P\{t \leq T \leq t + \Delta t / T \geq t\}}{\Delta t} \quad (2.3)$$

oranı limit alınarak olasılıktaki değişim hızı yani ölüm ya da tükenmişlik hızı ölçüldüğünden tehlike fonksiyonu veya tükenmişlik hızı olarak adlandırılır. (2.2) ile verilen eşitliğin ispatı aşağıdaki gibi verilebilir.

$$\begin{aligned} h(t) &= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{P((t \leq T \leq t + \Delta t) \cap (T \geq t))}{P(T \geq t)\Delta t} \\ &= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{P(t \leq T \leq t + \Delta t)}{(1 - P(T < t))\Delta t} \\ &= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{F(t + \Delta t) - F(t)}{(1 - F(t))\Delta t} \\ &= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{F(t + \Delta t) - F(t)}{R(t)\Delta t} \\ &= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{f(t + \Delta t)}{R(t)} = \frac{f(t)}{R(t)} \end{aligned} \quad (2.4)$$

Ayrıca $f(t)$ ve $h(t)$ arasında aşağıdaki matematiksel ilişkiler vardır:

$$1) R'(t) = \frac{\partial R(t)}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t}(1 - F(t)) = -f(t) \quad (2.5)$$

$$2) \frac{d}{dt} \log R(t) = \frac{R'(t)}{R(t)} = \frac{-f(t)}{R(t)} = -h(t) \quad (2.6)$$

$$3) \log R(x) \Big|_0^t = - \int_0^t h(x) dx \text{ ve } \log R(0) = \log(1 - F(0)) = 0 \text{ olduğundan}$$

$$\log R(t) = - \int_0^t h(x) dx \quad (2.7)$$

bulunur, yani

$$R(t) = e^{- \int_0^t h(x) dx} \quad (2.8)$$

elde edilir.

$$4) f(t) = h(t) e^{- \int_0^t h(x) dx} \quad (2.9)$$

$$R(t) = \frac{f(t)}{h(t)} \text{ ve } R(t) = e^{- \int_0^t h(x) dx} \text{ olduğundan } e^{- \int_0^t h(x) dx} = \frac{f(t)}{h(t)} \text{ yani}$$

$$f(t) = h(t) e^{- \int_0^t h(x) dx} \quad (2.10)$$

elde edilir.

Yukarıdaki sonuçlardan tehlike hızının ömür dağılımının olasılık yoğunluk fonksiyonundan elde edilebileceği görülür. Böylece ömürle ilişkili olasılık yoğunluk fonksiyonu ile tehlike hızı birbirlerinden elde edilebilir.

2.3. Tehlike Fonksiyonu Tipleri

Ömür modelini seçerken tehlike fonksiyonunun şeklini düşünmek ömür verilerinin analizinde yardımcı olur. Uygulamada kullanılan tehlike fonksiyonları dört tiptir.

- 1) Sabit Tehlike Fonksiyonu
- 2) Artan Tehlike Fonksiyonu
- 3) Azalan Tehlike Fonksiyonu
- 4) U-Şekilli Tehlike Fonksiyonu

Şimdi bu tipleri tek tek kısaca açıklayalım.

2.3.1. Sabit Tehlike Fonksiyonu

Eğer parçanın tükenmişlik hızı yaşından bağımsız ise tehlike fonksiyonu sabittir. Bu durumda kullanılmış bir parçanın tükenmişliğe olan eğilimi yeni bir parçanınki gibidir. Örneğin bir tabağın tükenmişliği kazara kırılması sonucu olur. Bu yüzden bir tabağın tükenmişlik hızı, yeni ya da kullanılmış fark etmez, sabittir. Sabit tehlike fonksiyonlu bir ömür dağılımı örneği olarak üstel dağılım verilebilir.

2.3.1.1. Üstel Dağılım

Üstel dağılımın dağılım fonksiyonu (kdf)

$$F_{EXP}(t) = (1 - e^{-\frac{t}{\lambda}}), t \geq 0, \lambda > 0 \quad (2.11)$$

ve olasılık yoğunluk fonksiyonu (oyf)

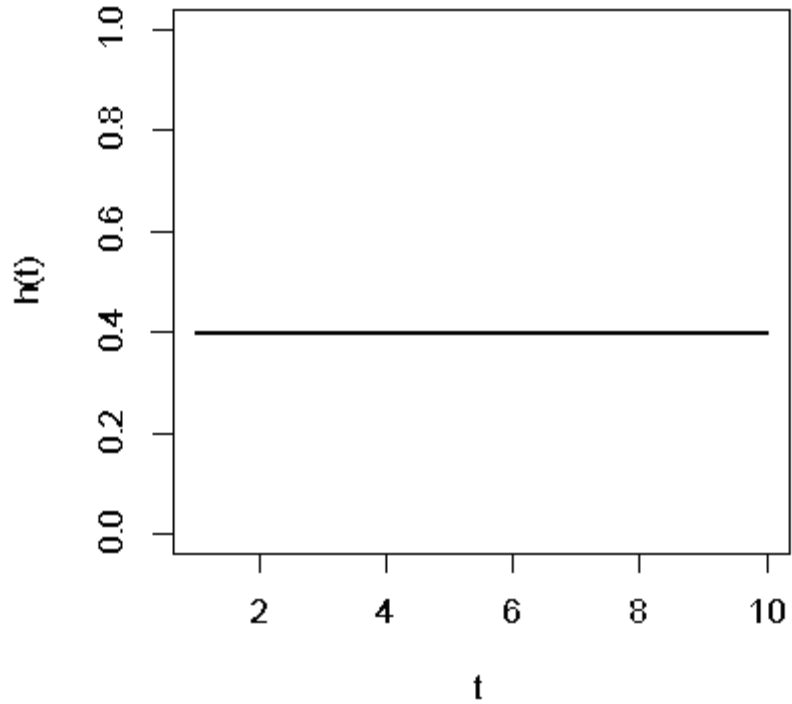
$$f_{EXP}(t) = \frac{1}{\lambda} e^{-\frac{t}{\lambda}}, \quad t > 0, \lambda > 0 \quad (2.12)$$

olup burada λ ölçek parametresidir.

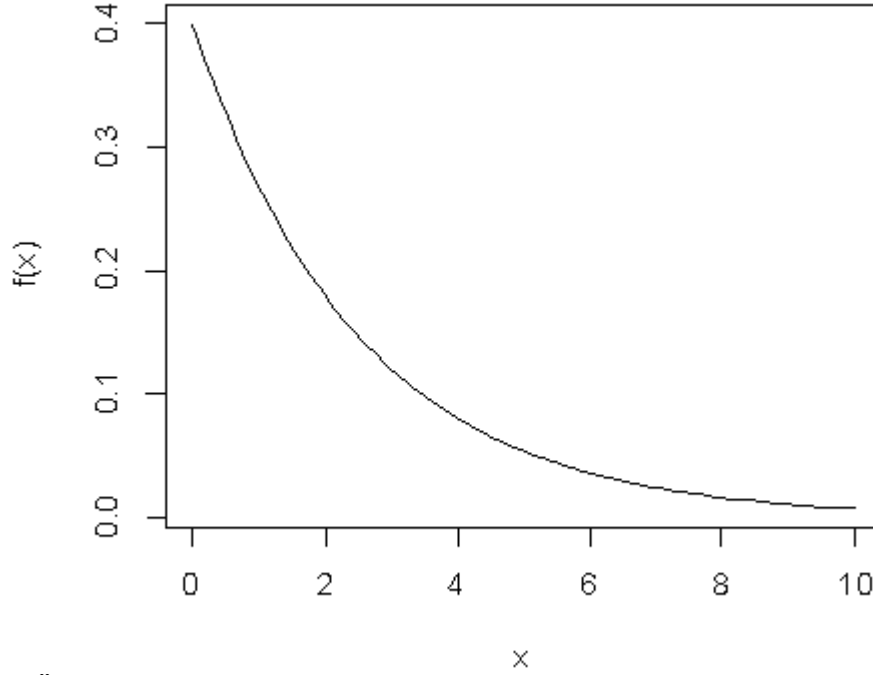
Üstel dağılımın tehlike fonksiyonu,

$$h(t) = \frac{1}{\lambda}, \quad t > 0, \lambda > 0 \quad (2.13)$$

şeklinde elde edilir. $\lambda = 2.5$ için $h(t)$ ve $f(t)$ nin grafikleri Şekil 2.1. ve Şekil 2.2. de verilmiştir.



Şekil 2.1. Üstel dağılımın tehlike fonksiyonu



Şekil 2.2. Üstel dağılımın olasılık yoğunluk fonksiyonu grafiği

Üstel dağılımın olasılık yoğunluk fonksiyonu Şekil 2.2.'den görüldüğü gibi azalan bir eğridir.

2.3.2. Artan Tehlike Fonksiyonu

Bir çift ayakkabı veya bir mobilyanın tüketilmişliği kullanım sonucunda zamanla artar. Böyle parçaların tükenmesi için temel sebep eskimedir. Bu parçaların ömür dağılımları artan tehlike fonksiyonuna sahip uygun modellerdir. Artan tehlike fonksiyonuna sahip bir ömür dağılım örneği olarak şekil parametresi 1 den büyük olmak koşulu ile Weibull dağılımı verilebilir.

2.3.2.1. Weibull Dağılımı

Weibull dağılımı üstel dağılımlı bir rastgele değişkenin bir kuvvet dönüşümü olarak karşımıza çıkar. Buna göre

$X \sim EXP(\lambda)$ olmak üzere $T = X^\gamma$ rastgele değişkeninin olasılık yoğunluk fonksiyonu,

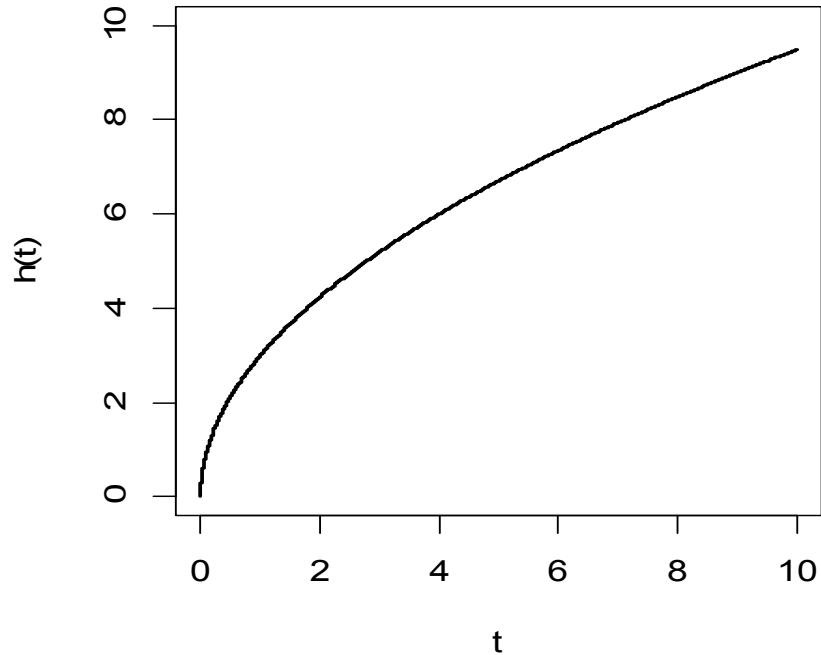
$$f_{WE}(t) = \lambda \gamma t^{\gamma-1} e^{-\lambda t^\gamma}, \quad t > 0, \gamma, \lambda > 0 \quad (2.14)$$

şeklindedir. Olasılık yoğunluk fonksiyonu bu şekilde olan bir T rastgele değişkenine *Weibull dağılımına* sahiptir denir. Burada γ şekil parametresi, λ ölçek parametresidir.

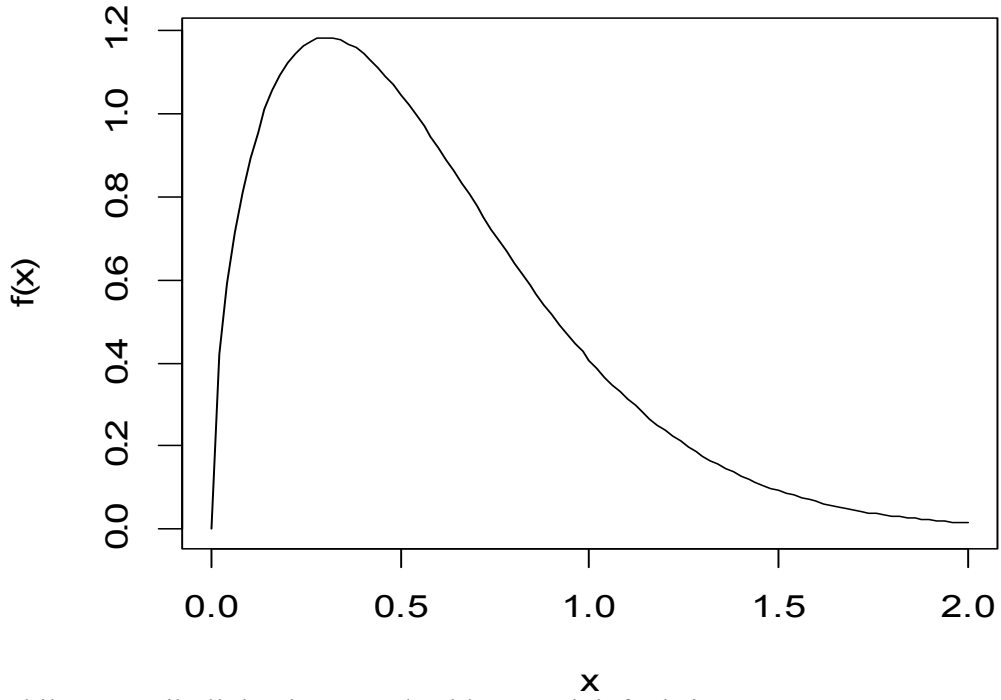
Weibull dağılımının tehlike fonksiyonu

$$h(t) = \lambda \gamma t^{\gamma-1}, \quad t > 0, \lambda > 0, \gamma > 0 \quad (2.15)$$

şeklindedir. $\gamma > 1$ için bu tehlike fonksiyonu artandır. $\lambda = 2$ ve $\gamma = 1.5$ için $h(t)$ ve $f(t)$ nin grafikleri Şekil 2.3. ve Şekil 2.4. de verilmiştir.



Şekil 2.3. Weibull dağılımının tehlike fonksiyonu



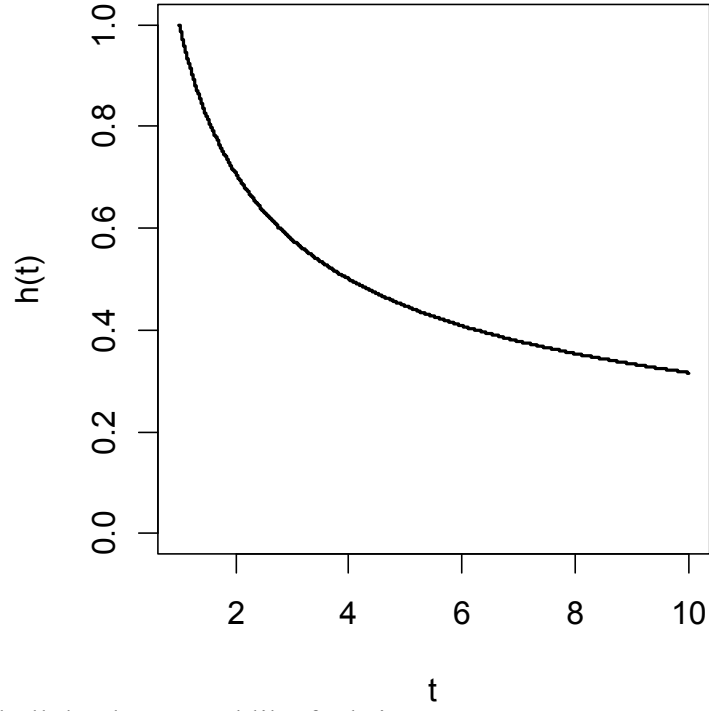
Şekil 2.4. Weibull dağılımının olasılık yoğunluk fonksiyonu

Weibull dağılımının olasılık yoğunluk fonksiyonu tek tepelidir. Önce artar daha sonra azalır.

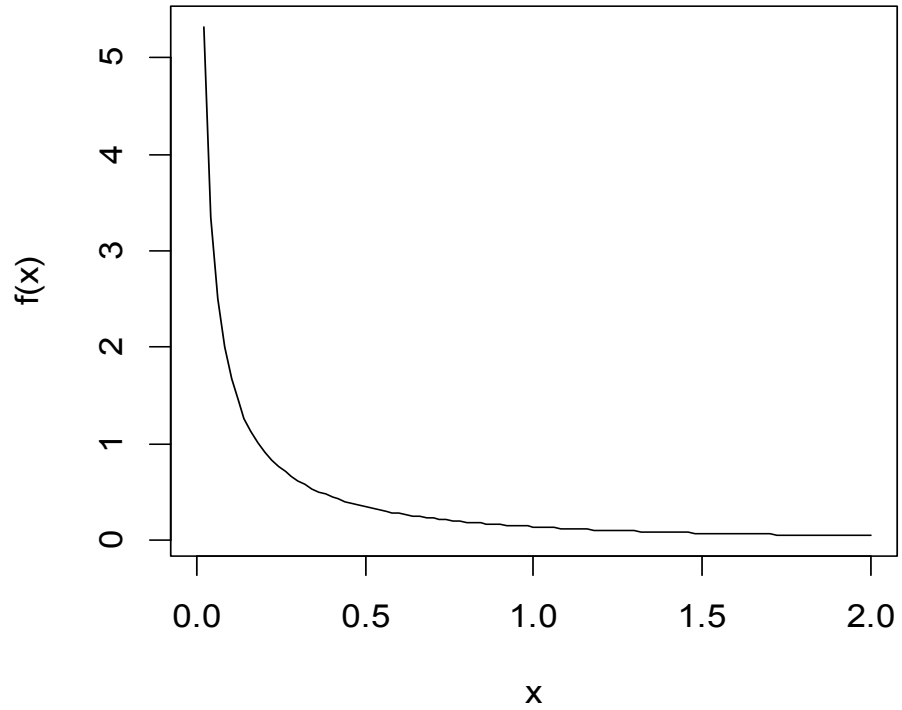
2.3.3. Azalan Tehlike Fonksiyonu

Azalan tehlike fonksiyonu oldukça nadirdir ve ameliyat sonrası bir hastanın iyileşme periyodu olarak örneklendirilebilir. Periyodun başlangıcında tehlike hızı cerrahi süresince olası dikkatsizlikten veya cerrahi sonrası olası enfeksiyonlardan dolayı yüksektir. Cerrahi süreçten sonra hasta güçlendikçe hayatta kalabilme süresi uzar. Böylece tehlike hızı hasta iyi olana kadar azalır.

$\gamma < 1$ için Weibull dağılımı azalan tehlike fonksiyonuna sahiptir. $\lambda = 2$ ve $\gamma = 0.5$ için $h(t)$ ve $f(t)$ 'nin grafikleri Şekil 2.5. ve Şekil 2.6.'da verilmiştir.



Şekil 2.5. Weibull dağılımının tehlike fonksiyonu



Şekil 2.6. Weibull dağılımının olasılık yoğunluk fonksiyonu

2.3.4. U-Şekilli Tehlike Fonksiyonu

Bir U-şekilli tehlike fonksiyonu farklı zaman periyotlarında yukarıda bahsedilen üç tip tehlike fonksiyonundan oluşur. Bebek ölümleri veya imalat hataları sonuçları bir elektronik bileşenin tehlike hızı başlangıçta yüksektir ve başlangıç periyodundan itibaren kademeli olarak azalır. Başlangıçta tükenme tehlikesi azalırken takip edilen periyotta sabit bir düzeye indirgenir. Bu sıradan bir yaşam periyodu olarak adlandırılır. Bir periyot süre geçtikten sonra da bileşen, yaşlanmaya ya da eskimeye maruz kalarak tükenme hızı artar. U-şekilli tehlike fonksiyonuna bir örnek olarak Chen (2000) tarafından tanımlanan iki parametrelili ömür dağılımı örneği verilebilir.

2.3.4.1. Chen (2000) in İki Parametrelili Ömür Dağılımı

Chen (2000) tarafından önerilen ömür dağılımının olasılık yoğunluk fonksiyonu

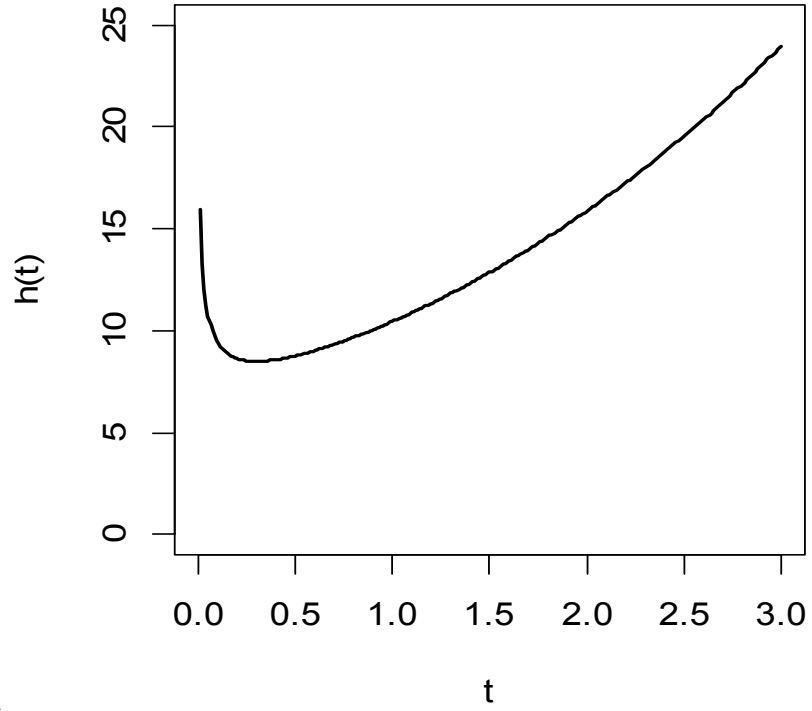
$$f_c(t) = \lambda \beta t^{\beta-1} e^{t^\beta} e^{\lambda(1-e^{t^\beta})}, \quad t > 0, \lambda > 0, \beta > 0 \quad (2.16)$$

şeklinde ifade edilir.

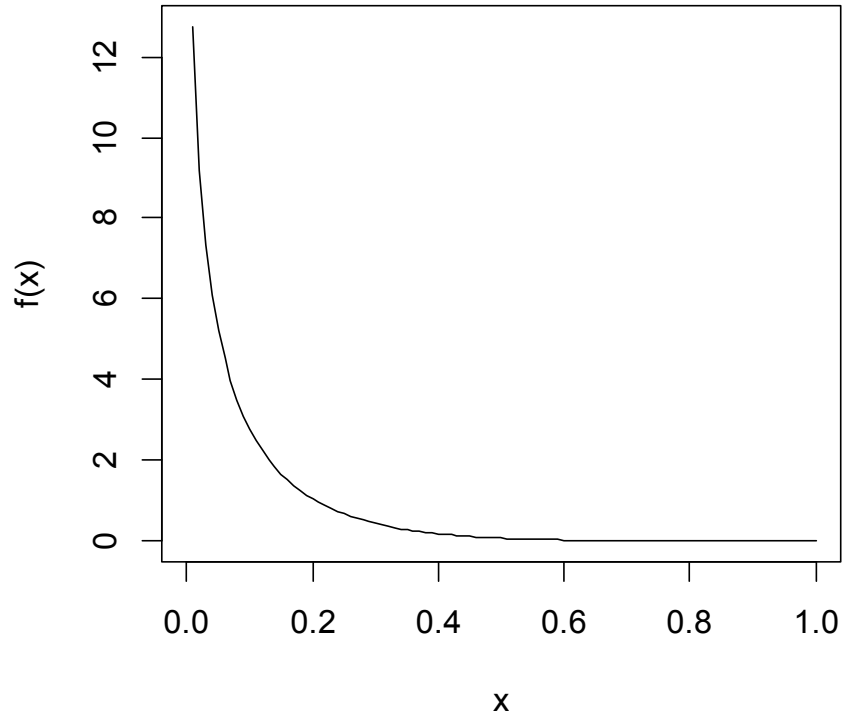
Tehlike fonksiyonu

$$h(t) = \lambda \beta t^{\beta-1} e^{t^\beta}, \quad t > 0, \lambda > 0, \beta > 0 \quad (2.17)$$

olarak hesaplanır. $h(t)$, $\beta < 1$ için U-şekilli iken aksi durumda artandır. $\lambda = 5.5$ ve $\beta = 0.7$ için, $h(t)$ ve $f(t)$ nin grafikleri Şekil 2.7. ve Şekil 2.8.' de verilmiştir.



Şekil 2.7. İki parametrelî ömür dağılımının tehlike fonksiyonu



Şekil 2.8. İki parametrelî ömür dağılımının olasılık yoğunluk fonksiyonu

3. GENELLEŞTİRİLMİŞ TERS ÜSTEL DAĞILIM VE ÖZELLİKLERİ

3.1. Giriş

Bu bölümde ters üstel dağılımın genelleştirilmiş bir versiyonu ele alınacaktır. Bu ömür dağılımı hata hızlarının şekillerini ve böylece yaşlanma kriterlerinin çeşitli şekillerini modellemeyi yapabilir.

Bu dağılım ters üstel dağılımın iki parametrelili kullanışlı bir başka genelleştirilmesi olarak düşünülebilir. Bu bölümde genelleştirilmiş ters üstel dağılımın (GIED-Generalized Inverted Exponential Distribution) dağılımsal özellikleri verilecektir. Dağılımın güvenilirlik ve parametrelerini hesaplamak için en çok olasılık tahmin yöntemi, en küçük kareler tahmin yöntemi, ağırlıklı en küçük kareler yöntemi ve momentler yöntemi uygulanacaktır.

3.2. Ters Üstel Dağılım (Inverted Exponential Distribution-IED)

Üstel dağılım güvenilirlik teorisinde belli durumlarda kullanılan dağılımlardan bir tanesidir. Çünkü bu dağılım sabit tehlike hızı ve belleksizlik özelliğine sahiptir. Eğer X rastgele değişkeni üstel dağılıma sahip ise $T = \frac{1}{X}$ rastgele değişkeni de ters üstel dağılıma (IED) sahiptir. Bu dağılım birçok yazar tarafından çalışılmıştır. Örneğin Killer ve Kamath (1982), ayrıca Duran ve Lewis (1989), ters gamma dağılımı ile birlikte bu dağılımı çalışmıştır.

Ters üstel dağılımın kümülatif dağılım fonksiyonu

$$F_{IED}(t) = (1 - e^{-\frac{\lambda}{t}}), \quad t \geq 0, \quad \lambda > 0 \quad (3.1)$$

şeklinde elde edilir. Dağılımın olasılık yoğunluk fonksiyonu

$$f_{IED}(t) = \frac{\lambda}{t^2} e^{-\frac{\lambda}{t}}, \quad t \geq 0, \lambda > 0 \quad (3.2)$$

olarak elde edilir.

3.3. Genelleştirilmiş Üstel Dağılım (Generalized Exponential Distribution-GED)

Genelleştirilmiş üstel dağılım Gupta ve Kundu (1999) tarafından önerilmiş ve üstel, gamma, Weibull gibi ömür dağılımlarının bir alternatifi olarak tanımlanmıştır.

Genelleştirilmiş üstel dağılımın olasılık yoğunluk fonksiyonu

$$f_{GED} = \alpha\lambda(1 - e^{-\lambda x})^{\alpha-1} e^{-\lambda x}, \quad x \geq 0, \alpha, \lambda > 0 \quad (3.3)$$

şeklindedir.

Genelleştirilmiş üstel dağılımın kümülatif dağılım fonksiyonu

$$F_{GED}(x) = (1 - e^{-\lambda x})^\alpha, \quad x \geq 0, \alpha, \lambda > 0 \quad (3.4)$$

olarak bulunur.

Genelleştirilmiş üstel dağılım $\alpha = 1$ durumunda üstel dağılıma indirgenir. Gupta ve Kundu (2001) de bu dağılımın parametre kestirimlerini çalışmıştır.

3.4. Genelleştirilmiş Ters Üstel Dağılım (Generalized Inverted Exponential Distribution-GIED)'in Tanımı

Genelleştirilmiş ters üstel dağılım aşağıdaki stokastik bağıntıyla tanımlanır (Abouammah ve Alshingiti, 2009).

$$Y \sim \text{GED} \text{ ise } X = \frac{1}{Y} \sim \text{GIED}$$

Bu kısımda GIED dağılımının özelliklerini detaylı bir şekilde ele alacağız.

3.4.1. GIED in Olasılık Yoğunluk Fonksiyonu ve Kümülatif Dağılım Fonksiyonu

Yukarıda GIED in tanımındaki fonksiyonel ilişkiye göre X in kümülatif dağılım fonksiyonu

$$\begin{aligned}
 F_X(x) &= P(X \leq x) \\
 &= P\left(\frac{1}{Y} \leq x\right) \\
 &= P\left(Y \geq \frac{1}{x}\right) \\
 &= 1 - P\left(Y \leq \frac{1}{x}\right) \\
 &= 1 - \left(1 - e^{-\frac{\lambda}{x}}\right)^\alpha
 \end{aligned} \tag{3.5}$$

olarak elde edilir.

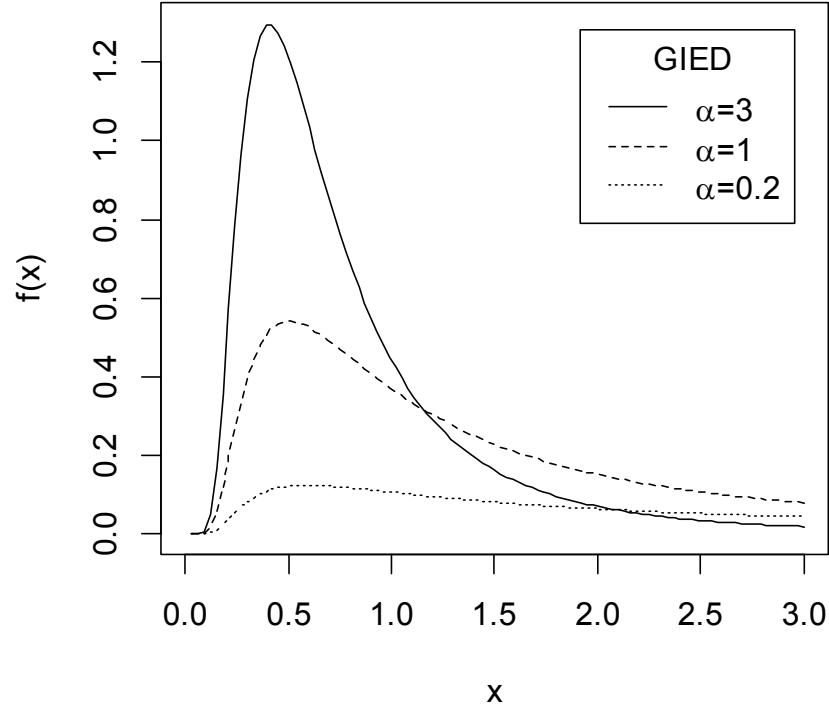
X in olasılık yoğunluk fonksiyonu

$$\frac{\partial F_X(x)}{\partial x} = \frac{\alpha\lambda}{x^2} \left(1 - e^{-\frac{\lambda}{x}}\right)^{\alpha-1} e^{-\frac{\lambda}{x}}, \quad x \geq 0, \quad \lambda, \alpha \geq 0 \tag{3.6}$$

şeklinde bulunur.

Genelleştirilmiş üstel dağılım $GED(\alpha, \lambda)$ ile gösterilir. Burada λ ölçek parametresi, α şekil parametresidir. $\alpha = 1$ için GIED, IED' a indirgenir.

$\alpha = 3$, $\alpha = 1$, $\alpha = 0.2$ şekil parametreleri ve $\lambda = 1$ ölçek parametresi için çizilen GIED in olasılık yoğunluk fonksiyonları Şekil 3.1. de verilmiştir.



Şekil 3.1. Genelleştirilmiş ters üstel dağılımın olasılık yoğunluk fonksiyonları

GIED in olasılık yoğunluk fonksiyonları tek tepelidir. Önce artar daha sonra azalır.

3.5. GIED'in Dağılımsal Özellikleri

3.5.1. Yoğunluk Fonksiyonunun Asimptotik Açılımı

Özellikle yaklaşım teorisinde yoğunluk fonksiyonlarının asimptotik formlarıyla çalışılır. Günümüzde bilgisayarların gelişmiş olmasından ötürü asimptotik değerler kolaylıkla hesaplanabilmektedir. Bu kısımda GIED in olasılık yoğunluk fonksiyonunun asimptotik açılımı bulunacaktır.

$$\alpha \text{ pozitif bir reel sayı ve } |z| < 1 \text{ ise } (1-z)^\alpha = \sum_{j=0}^{\infty} \binom{\alpha}{j} (-1)^j z^j \text{ açılımı}$$

kullanılarak

$$\begin{aligned}
f(t) &= \frac{\alpha\lambda}{t^2} \left(1 - e^{-\frac{\lambda}{t}}\right)^{\alpha-1} e^{-\frac{\lambda}{t}} \\
&= \frac{\alpha\lambda}{t^2} \sum_{j=0}^{\infty} \binom{\alpha-1}{j} (-1)^j e^{-\frac{\lambda(j+1)}{t}} \\
&= \sum_{j=0}^{\infty} w_j f_{IED}(t; \lambda(j+1))
\end{aligned} \tag{3.7}$$

elde edilir. Burada ağırlıklar

$$w_j = \binom{\alpha-1}{j} (-1)^j \frac{\alpha}{j+1} \tag{3.8}$$

şeklindedir. Böylece GIED in olasılık yoğunluk fonksiyonu IED in olasılık yoğunluk fonksiyonlarının bir lineer kombinasyonu olarak elde edilmiş olur.

3.5.2. Kümülatif Dağılım Fonksiyonunun Stokastik Sıralaması

Parametreleri farklı ve aynı dağılımdan alınan örneklemelerin kümülatif dağılım fonksiyonlarını daha ayrıntılı karşılaştırmak için daha fazla detaylı bilgiye ihtiyaç duyulur. Stokastik sıralama teorisi Bain ve Engelhardt (1991) ile Shaked ve Shanthikumar (2007) tarafından ayrıntılı olarak incelenmiştir.

GIED durumunda kdf nin stokastik sıralamasını incelerken genelliği kaybetmeksizin $\lambda = 1$ alınacaktır.

Teorem 1: Genelleştirilmiş ters üstel dağılımın kümülatif dağılım fonksiyonu stokastik azalandır.

$$\alpha_1 \geq \alpha_2 \text{ ise } F_{\alpha_2} <_{ST} F_{\alpha_1} \tag{3.9}$$

dir.

İspat:

$Y = \frac{1}{X}$ ve $X \sim \text{GED}$ olsun.

$$\begin{aligned}
 F_Y(y; \alpha_1) &= P(Y \leq y; \alpha_1) \\
 &= P\left(\frac{1}{X} \leq y; \alpha_1\right) \\
 &= P\left(X \geq \frac{1}{y}; \alpha_1\right) \\
 &= 1 - P\left(X \leq \frac{1}{y}; \alpha_1\right) \\
 &= 1 - F_X\left(\frac{1}{y}; \alpha_1\right)
 \end{aligned} \tag{3.10}$$

dir.

Genelleştirilmiş üstel dağılım stokastik artan olduğundan

$$\alpha_1 \geq \alpha_2 \text{ iken } F_X\left(\frac{1}{y}; \alpha_1\right) \geq F_X\left(\frac{1}{y}; \alpha_2\right) \tag{3.11}$$

dir. Buradan,

$$1 - F_X\left(\frac{1}{y}; \alpha_1\right) \leq 1 - F_X\left(\frac{1}{y}; \alpha_2\right) \tag{3.12}$$

(3.12) eşitliği kullanılarak

$$F_Y(y; \alpha_1) \leq F_Y(y; \alpha_2) \tag{3.13}$$

elde edilir. Böylece genelleştirilmiş ters üstel dağılım stokastik azalandır.

Teorem 2: $Y \sim \text{GIED}$ ve $\alpha_1 \geq \alpha_2$ ise $F_Y(y; \alpha_2) \underset{\text{HAZ}}{<} F_Y(y; \alpha_1)$ dir.

İspat: $y \in [0, F_Y^{-1}(1; \alpha_2)]$, $\alpha_1 \geq \alpha_2$ için

$$\frac{\overline{F}_Y(y; \alpha_1)}{\overline{F}_Y(y; \alpha_2)} \quad (3.14)$$

nin artmayan olduğunu göstereceğiz. Burada $\overline{F}_Y = 1 - F_Y$ dir.

$$\overline{F}_Y(y; \alpha_1) = \left(1 - e^{-\frac{1}{y}}\right)^{\alpha_1} \quad \text{ve} \quad \overline{F}_Y(y; \alpha_2) = \left(1 - e^{-\frac{1}{y}}\right)^{\alpha_2} \quad (3.15)$$

şeklindedir.

$$\begin{aligned} \frac{\overline{F}_Y(y; \alpha_1)}{\overline{F}_Y(y; \alpha_2)} &= \frac{\left(1 - e^{-\frac{1}{y}}\right)^{\alpha_1}}{\left(1 - e^{-\frac{1}{y}}\right)^{\alpha_2}} \\ &= \left(1 - e^{-\frac{1}{y}}\right)^{\alpha_1 - \alpha_2} \end{aligned} \quad (3.16)$$

olur. (3.16) eşitliğinin türevi alındığında

$$\left(\frac{\overline{F}_Y(y; \alpha_1)}{\overline{F}_Y(y; \alpha_2)}\right)' = (\alpha_2 - \alpha_1) \frac{1}{y^2} e^{-\frac{1}{y}} \left(1 - e^{-\frac{1}{y}}\right)^{\alpha_1 + \alpha_2 - 1} \quad (3.17)$$

elde edilir.

$\alpha_1 \geq \alpha_2$ iken $\alpha_2 - \alpha_1 \leq 0$ olduğundan

$$\left(\frac{\overline{F}_Y(y; \alpha_1)}{\overline{F}_Y(y; \alpha_2)} \right)' \leq 0 \quad (3.18)$$

bulunur. Yani,

$$F_Y(y; \alpha_2) \underset{HAZ}{<} F_Y(y; \alpha_1) \quad (3.19)$$

olur.

Teorem 3: $Y \sim \text{GIED}$ ve $f_Y(y; \alpha_1)$, $f_Y(y; \alpha_2)$ mevcut, $\alpha_1 \geq \alpha_2$ ise $F_Y(y; \alpha_2) \underset{LR}{<} F_Y(y; \alpha_1)$ dir.

İspat: $\alpha_1 \geq \alpha_2$ iken $\frac{f_Y(y; \alpha_2)}{f_Y(y; \alpha_1)}$ artmayan bir fonksiyon olduğunu göstereceğiz.

$$f_Y(y; \alpha_1) = \frac{\alpha_1}{y^2} e^{-\frac{1}{y}} \left(1 - e^{-\frac{1}{y}} \right)^{\alpha_1 - 1} \quad (3.20)$$

$$f_Y(y; \alpha_2) = \frac{\alpha_2}{y^2} e^{-\frac{1}{y}} \left(1 - e^{-\frac{1}{y}} \right)^{\alpha_2 - 1} \quad (3.21)$$

$$\frac{f_Y(y; \alpha_2)}{f_Y(y; \alpha_1)} = \frac{\alpha_2}{\alpha_1} \left(1 - e^{-\frac{1}{y}} \right)^{\alpha_2 - \alpha_1} \quad (3.22)$$

bulunur. (3.22) eşitliğinin türevi alındığında

$$\left(\frac{f_Y(y; \alpha_2)}{f_Y(y; \alpha_1)} \right)' = \frac{\alpha_2}{\alpha_1} (\alpha_2 - \alpha_1) \frac{1}{y^2} e^{-\frac{1}{y}} \left(1 - e^{-\frac{1}{y}} \right)^{\alpha_2 - \alpha_1 - 1} \quad (3.23)$$

elde edilir

$\alpha_1 \geq \alpha_2$ iken $\alpha_2 - \alpha_1 \leq 0$ olduğundan

$$\left(\frac{f_Y(y; \alpha_2)}{f_Y(y; \alpha_1)} \right)' \leq 0 \quad (3.24)$$

dir. Böylece

$$F_Y(y; \alpha_2) \underset{LR}{<} F_Y(y; \alpha_1) \quad (3.25)$$

olur.

3.5.3. Kantil Fonksiyonu ve Medyan

GIED in kantil fonksiyonu yani kümülatif dağılım fonksiyonunun tersi

$$F^{-1}(y) = - \frac{\lambda}{\ln(1 - (1 - y)^{\frac{1}{\alpha}})}, \quad 0 < y < 1 \quad (3.26)$$

olarak ifade edilir.

$y = \frac{1}{2}$ için dağılımın medyanı

$$m = F^{-1}\left(\frac{1}{2}\right) \quad (3.27)$$

$$= - \frac{\lambda}{\ln(1 - (0.5)^{\frac{1}{\alpha}})} \quad (3.28)$$

şeklinde elde edilir.

3.5.4. Moment Çıkaran Fonksiyon

$X \sim \text{GIED}$ ise X in moment çıkarar fonksiyonu

$$M(t) = E(e^{tx}) = \int_0^{\infty} e^{tx} f(x) dx = \int_0^{\infty} e^{tx} \frac{\alpha \lambda}{x^2} (1 - e^{-\frac{\lambda}{x}})^{\alpha-1} e^{-\frac{\lambda}{x}} dx, \quad x \geq 0, \alpha, \lambda > 0 \quad (3.29)$$

şeklinde tanımlanır.

$\frac{\lambda}{x} = u$ ise $-\frac{\lambda}{x^2} dx = du$ dönüşümü ve binom açılımı ile

$$M(t) = \alpha \sum_{j=0}^{\infty} (-1)^j \binom{\alpha-1}{j} \int_0^{\infty} e^{u^{\frac{\lambda}{t-(j+1)}}} du \quad (3.30)$$

elde edilir. Buradaki

$$\int_0^{\infty} e^{u^{\frac{\lambda}{t-(j+1)}}} du \quad (3.31)$$

integrali için Gradshteyn ve Ryzhik (2000) deki 3.471.9 formülü olan

$$\int_0^{\infty} x^{\nu-1} e^{-\frac{\beta}{x}-\gamma x} dx = 2 \left(\frac{\beta}{\gamma} \right)^{\frac{\nu}{2}} K_{\nu} (2\sqrt{\beta\gamma}), \quad \beta > 0, \gamma > 0 \quad (3.32)$$

ile hesaplama yapılırsa

$$\int_0^{\infty} e^{\frac{\lambda}{j+1}t-(j+1)u} du = 2 \left(-\frac{\lambda t}{j+1} \right) K_1 \left(2\sqrt{-\lambda t(j+1)} \right), \quad -\lambda t > 0, \lambda > 0, t < 0,$$

$$j+1 > 0 \quad (3.33)$$

şeklindedir. Burada K_ν fonksiyonu Bessel fonksiyonudur. Bulunan bu form $t < 0$ için tanımlı olduğundan kullanışsızdır. Sonuç olarak GIED'in moment çıkaran fonksiyonu için kapalı formda bir ifade yoktur denilebilir.

3.5.5. Momentler

GIED dağılımının k . ham momentini

$$E(X^k) = \mu_k = \int_0^{\infty} x^k \frac{\alpha\lambda}{x^2} \left(1 - e^{-\frac{\lambda}{x}} \right)^{\alpha-1} e^{-\frac{\lambda}{x}} dx, \quad x \geq 0, \alpha, \lambda > 0 \quad (3.34)$$

olup bu integralin analitik bir çözümü yoktur. Bu nedenle moment hesaplamaları bir paket program kullanılarak yaklaşık olarak elde edilir. Dağılımın ilk dört momentinin integral ifadeleri aşağıdaki gibidir.

$$E(X) = \mu = \mu_1 = \int_0^{\infty} \frac{\alpha\lambda}{x} \left(1 - e^{-\frac{\lambda}{x}} \right)^{\alpha-1} e^{-\frac{\lambda}{x}} dx, \quad x \geq 0, \alpha, \lambda > 0 \quad (3.35)$$

$$E(X^2) = \int_0^{\infty} \alpha\lambda \left(1 - e^{-\frac{\lambda}{x}} \right)^{\alpha-1} e^{-\frac{\lambda}{x}} dx, \quad x \geq 0, \alpha, \lambda > 0 \quad (3.36)$$

$$E(X^3) = \int_0^{\infty} \alpha\lambda x \left(1 - e^{-\frac{\lambda}{x}} \right)^{\alpha-1} e^{-\frac{\lambda}{x}} dx, \quad x \geq 0, \alpha, \lambda > 0 \quad (3.37)$$

$$E(X^4) = \int_0^{\infty} \alpha\lambda x^2 \left(1 - e^{-\frac{\lambda}{x}} \right)^{\alpha-1} e^{-\frac{\lambda}{x}} dx, \quad x \geq 0, \alpha, \lambda > 0 \quad (3.38)$$

Bu momentler kullanılarak varyans, değişim katsayısı (CV-coefficient of variation),

$CV = \sigma / \mu$, çarpıklık katsayısı $\gamma_1 = (\mu_3 - 3\mu_1\mu_2 + 2\mu_1^3) / (\mu_2 - \mu_1^2)^{3/2}$, sivrilik (basıklık) katsayısı $\gamma_2 = (\mu_4 - 4\mu_1\mu_3 + 6\mu_2\mu_1^2 - 3\mu_1^4) / (\mu_2 - \mu_1^2)^2$ hesaplanabilir (bknz. Çizelge 3.1.).

α bir doğal sayı ise momentler aşağıdaki gibi kapalı formada bulunabilir.

$$\begin{aligned}
E(X) &= \alpha\lambda \int_0^{\infty} \frac{1}{x} e^{-\frac{\lambda}{x}} \left(1 - e^{-\frac{\lambda}{x}}\right)^{\alpha-1} dx \\
&= \alpha\lambda \int_0^1 \frac{\ln u}{-\lambda} u(1-u)^{\alpha-1} \frac{\left(-\frac{\lambda}{\ln u}\right)^2}{\lambda u} du \\
&= -\alpha\lambda \int_0^1 \frac{(1-u)^{\alpha-1}}{\ln u} du \\
&= -\alpha\lambda \sum_{k=1}^{\infty} \binom{\alpha-1}{k} (-1)^k \ln(1+k), \quad \alpha > 1, \quad \alpha \in \mathbb{N}, \quad \lambda > 0
\end{aligned} \tag{3.39}$$

(3.39) eşitliği $\alpha \geq 2$ için Gradshteyn ve Ryzhik (2000)' deki 4.267-39 formülünden yararlanılarak elde edilir.

$$\begin{aligned}
E(X^2) &= \alpha\lambda^2 \int_0^{\infty} e^{-\frac{\lambda}{x}} \left(1 - e^{-\frac{\lambda}{x}}\right)^{\alpha-1} dx \\
&= \alpha\lambda^2 \int_0^1 u(1-u)^{\alpha-1} \frac{\left(-\frac{\lambda}{\ln u}\right)^2}{\ln u} du \\
&= \alpha\lambda^2 \int_0^1 \frac{(1-u)^{\alpha-1}}{\ln^2 u} du \\
&= \alpha\lambda^2 \sum_{k=0}^{\infty} \binom{\alpha-1}{k} (-1)^{k+\alpha-1} (\alpha-k) \ln(\alpha-k), \quad \alpha > 2, \quad \alpha \in \mathbb{N}
\end{aligned} \tag{3.40}$$

(3.40) eşitliği $\alpha \geq 3$ için aşağıdaki formülden yararlanılarak elde edilir.

$$\begin{aligned} E(X^n) &= \alpha(-\lambda)^n \int_0^1 \frac{(1-u)^{\alpha-1}}{\ln^n u} du \\ &= \alpha(-\lambda)^n \sum_{k=0}^{\infty} \binom{\alpha-1}{k} (-1)^k \frac{(k+1)^{n-1}}{(n-1)!} \ln(k+1), \quad \alpha > n, \quad \alpha \in \mathbb{N} \end{aligned} \quad (3.41)$$

dir (2.6.17.25, Prodnikov, 1986).

Dağılımın çeşitli parametre değerleri için moment hesaplamaları Mathematica 5.0 paket programında yapılmış ve Çizelge 3.1 de verilmiştir. Çizelge 3.1. den şekil parametresi α ve ölçek parametresi λ nın değerleri arttıkça 1. ve 2. moment değerlerinin azaldığını görülür. Ayrıca varyans, değişim katsayısı, sivrilik ve çarpıklık değerlerinde de azalış, medyan değerinde artış olduğu görülür. Ek olarak şekil parametresi sabit bir değer alındığında, ölçek parametresi değerlerindeki artıştan sivrilik ve çarpıklık katsayılarının etkilenmediği görülür.

3.5.6. Mod

Genelleştirilmiş ters üstel dağılımın mod'u oyf nin türevini sıfır yapan x^* değeridir. Buna göre mod

$$\lambda \left[1 - \alpha e^{\left(\frac{\lambda}{x^*} \right)} \right] - 2x^* \left[1 - e^{\frac{\lambda}{x^*}} \right] = 0 \quad (3.42)$$

(3.42) eşitliğindeki lineer olmayan denklemini sağlayan x^* değeridir. Görüldüğü gibi mod nümerik bir yöntem kullanılarak hesaplanabilir.

3. GENELLEŞTİRİLMİŞ TERS ÜSTEL DAĞILIM VE ÖZELLİKLERİ

Göknur AYKANAT

Çizelge 3.1. GIED in çeşitli parametre değerlerinde moment hesaplamaları

α	λ	$E(X)$	$E(X^2)$	Varyans	CV	γ_1	γ_2	Medyan
5	1	0.583273	0.481618	0.141411	0.12122	3.47105	45.0409	9.49122
5	2	1.16655	1.92647	0.565643	0.242444	3.47105	45.0409	18.9824
5	3	1.74982	4.33456	1.2727	0.363665	3.47105	45.0409	28.4737
5.5	1	0.549984	0.413188	0.110706	0.100645	2.99961	29.4113	10.4921
5.5	2	1.09997	1.65275	0.442825	0.20129	2.99961	29.4113	20.9841
5.5	3	1.64995	3.7187	0.996357	0.301935	2.99961	29.4113	31.4762
6	1	0.522759	0.36308	0.0898032	0.085893	2.67236	21.9949	11.4927
6	2	1.04552	1.45232	0.359213	0.171787	2.67236	21.9949	22.9855
6	3	1.56828	3.26772	0.808229	0.257681	2.67236	21.9949	34.4782
6.5	1	0.500005	0.324864	0.0748594	0.748587	2.4295	17.7266	12.4933
6.5	2	1.00001	1.29946	0.299437	0.149717	2.4295	17.7266	24.9867
6.5	3	1.50001	2.92378	0.673734	0.224576	2.4295	17.7266	37.48
7	1	0.480648	0.294781	0.0637584	0.066325	2.24066	14.9752	13.4938
7	2	0.961295	1.17912	0.255034	0.132651	2.24066	14.9752	26.9876
7	3	1.44194	2.65303	0.573826	0.198977	2.24066	14.9752	40.4815
7.5	1	0.463939	0.270493	0.0552542	0.059549	2.08868	13.0635	14.4943
7.5	2	0.927878	1.08197	0.221017	0.119098	2.08868	13.0635	28.9885
7.5	3	1.39182	2.43444	0.497287	0.178647	2.08868	13.0635	43.4828
8	1	0.449338	0.250477	0.0485723	0.054048	1.96311	11.6623	15.4946
8	2	0.898676	1.00191	0.194289	0.108097	1.96311	11.6623	30.9892
8	3	1.34801	2.25429	0.437151	0.162146	1.96311	11.6623	46.4839

3.5.7. Sıra İstatistikleri

İstatistiki veriler incelenirken genellikle dağılım hakkında herhangi bir bilgi yoktur. Veriler analiz edilirken, verilerin dağılımı hakkında önce görsel bazı bilgilere başvurulur. Bu görsel bilgiler genellikle *histogram*, *Box-Cox çiziti* ve *normal olasılık grafiği* dir. Bu grafiklerin oluşturulmasında verilerin sıralanmış halinden yararlanır. Ayrıca, veriler için *mod*, *medyan*, *yüzdeler*, *çeyreklikler* gibi değerler hesaplanırken de verilerin sıralanmış hali kullanılır (Akdi, 2011). Bu kısımda GIED dağılımına dayalı sıra istatistiklerinin özellikleri ele alınır.

3. GENELLEŞTİRİLMİŞ TERS ÜSTEL DAĞILIM VE ÖZELLİKLERİ

Göknur AYKANAT

X_1, X_2, \dots, X_n GIED den alınmış n birimlik rastgele örneklem olsun. $X_{(1)} \leq X_{(2)} \leq \dots \leq X_{(n)}$ örnekleme karşılık gelen sıra istatistiklerini gösterebiliriz. O zaman i . sıra istatistiği $X_{(i)}$ nin olasılık yoğunluk fonksiyonu

$$f_{X_{(i)}}(x) = \frac{n!}{(i-1)!(n-i)!} f(x) [F(x)]^{i-1} [1-F(x)]^{n-i} \quad (3.43)$$

dir.

f_{GIED} ve F_{GIED} (3.43) eşitliğinde yerlerine yazılınca,

$$\begin{aligned} f_{X_{(i)}}(x) &= \frac{n!}{(i-1)!(n-i)!} \frac{\alpha\lambda}{x^2} \left(1 - e^{-\frac{\lambda}{x}}\right)^{\alpha-1} e^{-\frac{\lambda}{x}} \left[1 - \left(1 - e^{-\frac{\lambda}{x}}\right)^\alpha\right]^{i-1} \left[\left(1 - e^{-\frac{\lambda}{x}}\right)^\alpha\right]^{n-i} \\ &= \frac{n!}{(i-1)!(n-i)!} \frac{\alpha\lambda}{x^2} \left(1 - e^{-\frac{\lambda}{x}}\right)^{\alpha(n+1-i)-1} e^{-\frac{\lambda}{x}} \left[1 - \left(1 - e^{-\frac{\lambda}{x}}\right)^\alpha\right]^{i-1}, \quad x \geq 0, \alpha, \lambda > 0 \end{aligned} \quad (3.44)$$

elde edilir.

Özel olarak,

$i = 1$ için minimum sıra istatistiğinin olasılık yoğunluk fonksiyonu

$$f_{X_{(1)}}(x) = \frac{n\alpha\lambda}{x^2} \left(1 - e^{-\frac{\lambda}{x}}\right)^{n\alpha-1} e^{-\frac{\lambda}{x}}, \quad x \geq 0, \alpha, \lambda > 0 \quad (3.45)$$

olarak elde edilir. Böylece $X_{(1)} \sim \text{GIED}(n\alpha, \lambda)$ olduğu görülür.

Bağımsız fakat özdeş dağılımlı olmama durumunda aşağıdaki ilginç sonuçlar vardır.

$X_i \sim \text{GIED}(\alpha_i, \lambda)$, $i = 1, 2, \dots, n$ ve X_i ler bağımsız olsun. O zaman,

$X_{(1)}$ in kümülatif dağılım fonksiyonu

$$\begin{aligned}
F_{X_{(1)}}(x) &= P(X_{(1)} \leq x) \\
&= 1 - P(X_{(1)} > x) \\
&= 1 - \prod_{i=1}^n P(X_i > x) \\
&= 1 - \left(\prod_{i=1}^n (1 - P(X_i \leq x)) \right) \\
&= 1 - \left(\prod_{i=1}^n (1 - F_{X_i}(x)) \right) \\
&= 1 - \left(\prod_{i=1}^n \left(1 - \left(1 - \left(1 - e^{-\frac{\lambda}{x}} \right)^{\alpha_i} \right) \right) \right) \\
&= 1 - \left(\prod_{i=1}^n \left(1 - e^{-\frac{\lambda}{x}} \right)^{\alpha_i} \right) \\
&= 1 - \left(1 - e^{-\frac{\lambda}{x}} \right)^{\sum_{i=1}^n \alpha_i}
\end{aligned} \tag{3.46}$$

dir. Böylece $X_{(1)} \sim \text{GIED} \left(\sum_{i=1}^n \alpha_i, \lambda \right)$ şeklinde ifade edilir.

$i = n$ için maksimum sıra istatistiğinin olasılık yoğunluk fonksiyonu:

$$f_{X_{(n)}}(x) = \frac{n\alpha\lambda}{x^2} \sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k \binom{n-1}{k} e^{-\frac{\lambda}{x}} \left(1 - e^{-\frac{\lambda}{x}} \right)^{\alpha(k+1)-1} \tag{3.47}$$

olarak bulunur.

3.5.8. Parametre Tahminleri**3.5.8.1. Maksimum Olabilirlik Tahmin Edicileri**

GIED(α, λ) den n birimlik bir rastgele örneklem t_1, t_2, \dots, t_n olsun. O zaman olabilirlik ve *log* olabilirlik fonksiyonu sırasıyla

$$l(\alpha, \lambda) = (\alpha^n \lambda^n) e^{\left(-\lambda \sum_{i=1}^n \frac{1}{t_i}\right)} \prod_{i=1}^n \left(\frac{1}{t_i}\right) \left[1 - e^{\left(-\frac{\lambda}{t_i}\right)}\right]^{\alpha-1}, \quad t \geq 0, \quad \alpha, \lambda > 0 \quad (3.48)$$

ve

$$\ln(\alpha, \lambda) = n \ln \alpha + n \ln \lambda - \lambda \sum_{i=1}^n \left(\frac{1}{t_i}\right) + \sum_{i=1}^n \ln \left(\frac{1}{t_i}\right) + (\alpha - 1) \sum_{i=1}^n \ln \left[1 - e^{\left(-\frac{\lambda}{t_i}\right)}\right] \quad (3.49)$$

olarak ifade edilir.

(3.49) eşitliğinin α ve λ ya göre birinci türevleri alınırsa olabilirlik tahmin denklemleri sırasıyla

$$\left(\frac{n}{\alpha}\right) + \sum_{i=1}^n \ln \left[1 - e^{\left(-\frac{\lambda}{t_i}\right)}\right] = 0 \quad (3.50)$$

ve

$$\left(\frac{n}{\lambda}\right) - \sum_{i=1}^n \left(\frac{1}{t_i}\right) + (\alpha - 1) \sum_{i=1}^n \frac{\left(\frac{1}{t_i}\right) e^{\left(-\frac{\lambda}{t_i}\right)}}{\left[1 - e^{\left(-\frac{\lambda}{t_i}\right)}\right]} = 0 \quad (3.51)$$

elde edilir. Burada,

$$\hat{\alpha} = -\frac{\sum_{i=1}^n \ln\left(1 - e^{-\frac{\hat{\lambda}}{t_i}}\right)}{n} \quad (3.52)$$

şeklindedir ve (3.51) eşitliğinde yerine yazılınca,

$$\left(\frac{n}{\hat{\lambda}}\right) - \sum_{i=1}^n \left(\frac{1}{t_i}\right) - \left(\frac{\sum_{i=1}^n \ln\left(1 - e^{-\frac{\hat{\lambda}}{t_i}}\right)}{n} + 1\right) \sum_{i=1}^n \frac{\frac{1}{t_i} e^{-\frac{\hat{\lambda}}{t_i}}}{1 - e^{-\frac{\hat{\lambda}}{t_i}}} = 0 \quad (3.53)$$

tek tahmin denklemi elde edilir.

Görüldüğü gibi tahmin denklemleri lineer değildir ve nümerik yöntemler kullanılarak çözümlenmelidir.

3. GENELLEŞTİRİLMİŞ TERS ÜSTEL DAĞILIM VE ÖZELLİKLERİ

Göknur AYKANAT

Çizelge 3.2. GIED in α şekil parametresi için simülasyonu

	$n = 20$	$n = 30$	$n = 40$	$n = 50$	$n = 100$
$(\alpha = 0.3)$					
$\hat{\alpha}$	0.3141039	0.3108054	0.3076047	0.3069189	0.3028042
$\hat{\alpha}/\alpha$	1.047013	1.036018	1.025349	1.023063	1.009347
<i>bias</i>	0.01410389	0.01080543	0.007604735	0.006918883	0.002804169
<i>mse</i>	0.0001989197	0.0001167573	5.783199e-05	4.787094e-05	7.863364e-06
$(\alpha = 0.5)$					
$\hat{\alpha}$	0.525651	0.518866	0.5143941	0.510268	0.5045839
$\hat{\alpha}/\alpha$	1.051302	1.037732	1.028788	1.020536	1.009168
<i>bias</i>	0.02565099	0.018866	0.01439409	0.01026798	0.004583855
<i>mse</i>	0.0006579733	0.0003559261	0.0002071899	0.0001054315	2.101172e-05
$(\alpha = 1)$					
$\hat{\alpha}$	1.058693	1.035813	1.027054	1.020546	1.009267
$\hat{\alpha}/\alpha$	1.058693	1.035813	1.027054	1.020546	1.009267
<i>bias</i>	0.0586934	0.0358131	0.02705354	0.02054583	0.009266508
<i>mse</i>	0.003444915	0.001282578	0.0007318939	0.0004221313	8.586817e-05
$(\alpha = 1.5)$					
$\hat{\alpha}$	1.575278	1.550659	1.537992	1.529992	1.514378
$\hat{\alpha}/\alpha$	1.050185	1.033773	1.025328	1.019995	1.009585
<i>bias</i>	0.0752777	0.05065921	0.03799221	0.02999198	0.01437787
<i>mse</i>	0.005666732	0.002566355	0.001443408	0.0008995192	0.0002067232
$(\alpha = 2)$					
$\hat{\alpha}$	2.101884	2.05984	2.048208	2.036724	2.017173
$\hat{\alpha}/\alpha$	1.050942	1.02992	1.024104	1.018362	1.008586
<i>bias</i>	0.1018837	0.0598403	0.04820817	0.03672379	0.01717272
<i>mse</i>	0.01038029	0.003580862	0.002324027	0.001348637	0.0002949024

3. GENELLEŞTİRİLMİŞ TERS ÜSTEL DAĞILIM VE ÖZELLİKLERİ

Göknur AYKANAT

Genelleştirilmiş ters üstel dağılımın örnekleme, α şekil parametresi için farklı değerler ve farklı büyüklükte örneklem alınarak oluşturulmuştur. Burada $\hat{\alpha}$ maksimum olabilirlik tahmin edicisi, $n = 20, 30, 40, 50, 100$, $\alpha = 0.3, 0.5, 1, 1.5, 2$, ve $\lambda = 1$ alınarak R 2.14 paket programında hesaplanmıştır.

Bu simülasyon çalışmasında görülür ki $\hat{\alpha}$ maksimum olabilirlik tahmin edicisi asimptotik olarak yansızdır. n arttıkça $\hat{\alpha}$ nın yanlılığı azalmakta ve sıfıra yaklaşmaktadır.

Çizelge 3.3. GIED in λ ölçek parametresi için simülasyonu

	$n = 20$	$n = 30$	$n = 40$	$n = 50$	$n = 100$
$(\alpha = 0.3)$					
$\hat{\lambda}$	1.200034	1.121648	1.092086	1.071732	1.034068
<i>bias</i>	0.2000341	0.1216485	0.09208562	0.0717316	0.03406838
<i>mse</i>	0.04001366	0.01479835	0.008479762	0.005145423	0.001160654
$(\alpha = 0.5)$					
$\hat{\lambda}$	1.109003	1.069381	1.053828	1.03819	1.016684
<i>bias</i>	0.1090027	0.06938132	0.05382833	0.0381904	0.01668426
<i>mse</i>	0.01188159	0.004813767	0.002897489	0.001458507	0.0002783647
$(\alpha = 1)$					
$\hat{\lambda}$	1.048916	1.036247	1.026394	1.020077	1.010537
<i>bias</i>	0.04891601	0.03624695	0.02639415	0.02007746	0.01053685
<i>mse</i>	0.002392776	0.001313841	0.0006966514	0.0004031045	0.0001110252
$(\alpha = 1.5)$					
$\hat{\lambda}$	1.036078	1.025076	1.018929	1.014673	1.007746
<i>bias</i>	0.03607796	0.02507643	0.01892934	0.01467307	0.007746098
<i>mse</i>	0.001301619	0.0006288273	0.0003583201	0.000215299	6.000203e-05
$(\alpha = 2)$					
$\hat{\lambda}$	1.025128	1.017821	1.014437	1.01171	1.006797
<i>bias</i>	0.02512764	0.01782054	0.01443743	0.01170954	0.006796654
<i>mse</i>	0.0006313982	0.0003175715	0.0002084395	0.0001371133	4.61945e-05

Ayrıca $\hat{\lambda}$ nın maksimum olabilirlik tahmin edicisi de, $n = 20, 30, 40, 50, 100$, $\alpha = 0.3, 0.5, 1, 1.5, 2$, ve $\lambda = 1$ alınarak R 2.14 paket programında hesaplanmıştır.

Bu simülasyon çalışmasında görülür ki $\hat{\lambda}$ maksimum olabilirlik tahmin edicisi asimptotik olarak yansızdır. n arttıkça $\hat{\lambda}$ nın yanlılığı azalmakta ve sifıra yaklaşmaktadır.

3.5.8.2. Bilgi Matrisi

Bilgi matrisi kestirim belirlemenin teorisinde ve uygulamasında merkezi rol oynar. Bu matris, bilgi miktarının bir özetini sağlar. Bilgi matrisinin modelleme, sistem analizi, kestirim, güven aralıkları hesaplanması, sınır tahminleri ve asimptotik varyans-kovaryans matrisinin hesaplanması gibi birçok uygulaması vardır. Bu kısımda GIED'in maksimum olabilirlik tahmin edicilerinin bilgi matrisi için tam bir ifade elde edilir.

(α, λ) nın maksimum olabilirlik tahmin edicileri $(\hat{\alpha}, \hat{\lambda})$ nın Bilgi matrisi

$$I(\alpha, \lambda) = -\frac{1}{n} \begin{bmatrix} E\left(\frac{\partial^2 l(\alpha, \lambda)}{\partial \alpha^2}\right) & E\left(\frac{\partial^2 l(\alpha, \lambda)}{\partial \alpha \partial \lambda}\right) \\ E\left(\frac{\partial^2 l(\alpha, \lambda)}{\partial \lambda \partial \alpha}\right) & E\left(\frac{\partial^2 l(\alpha, \lambda)}{\partial \lambda^2}\right) \end{bmatrix}_{\alpha=\hat{\alpha}, \lambda=\hat{\lambda}} \quad (3.54)$$

olarak tanımlanır.

Maksimum olabilirlik tahmin edicilerinin bilgi matrisini oluştururken aşağıdaki lemmalardan faydalanılır.

Lemma 1:

$$\int_0^1 x^{\mu-1} (1-x^r)^{v-1} \ln x dx = \frac{1}{r^2} B\left(\frac{\mu}{r}, v\right) \left(\psi\left(\frac{\mu}{r}\right) - \psi\left(\frac{\mu}{r} + v\right) \right) \quad (3.55)$$

Re $\mu > 0$, Re $v > 0$, $r > 0$ (4.253-1, Gradshteyn ve Ryzhik, 2000).

Lemma 2:

$$\int_0^1 (\ln x)^2 x^{p-1} (1-x^r)^{q-1} dx = \frac{1}{r^3} B\left(\frac{p}{r}, q\right) \left\{ \psi'\left(\frac{p}{r}\right) - \psi'\left(\frac{p}{r} + q\right) + \left[\psi\left(\frac{p}{r}\right) - \psi\left(\frac{p}{r} + q\right) \right]^2 \right\} \quad (3.56)$$

$p > 0$, $q > 0$, $r > 0$ (4.261-21, Gradshteyn ve Ryzhik, 2000).

Log-olabilirlilik fonksiyonunun ikinci kısmi türevleri:

$$\frac{\partial^2 l(\alpha, \lambda)}{\partial \alpha^2} = -\frac{n}{\alpha^2} \quad (3.57)$$

$$\frac{\partial^2 l(\alpha, \lambda)}{\partial \lambda \partial \alpha} = \sum_{i=1}^n \frac{\frac{1}{t_i} e^{-\frac{\lambda}{t_i}}}{1 - e^{-\frac{\lambda}{t_i}}} \quad (3.58)$$

$$\frac{\partial^2 l(\alpha, \lambda)}{\partial \lambda^2} = -\frac{n}{\lambda^2} - (\alpha - 1) \sum_{i=1}^n \frac{\frac{1}{t_i^2} e^{-\frac{\lambda}{t_i}}}{\left(1 - e^{-\frac{\lambda}{t_i}}\right)^2} \quad (3.59)$$

$$\frac{\partial^2 l(\alpha, \lambda)}{\partial \alpha \partial \lambda} = \sum_{i=1}^n \frac{\frac{1}{t_i} e^{-\frac{\lambda}{t_i}}}{1 - e^{-\frac{\lambda}{t_i}}} \quad (3.60)$$

olarak elde edilir.

Bilgi matrisini oluşturan bileşenler

$$E\left(\frac{\partial^2 l(\alpha, \lambda)}{\partial \alpha^2}\right) = -\frac{n}{\alpha^2} \quad (3.61)$$

$$\begin{aligned} E\left(\frac{\partial^2 l(\alpha, \lambda)}{\partial \lambda \partial \alpha}\right) &= nE\left(\frac{\frac{1}{t} e^{-\frac{\lambda}{t}}}{1 - e^{-\frac{\lambda}{t}}}\right) \\ &= n \int_0^{\infty} \frac{\frac{1}{t} e^{-\frac{\lambda}{t}}}{1 - e^{-\frac{\lambda}{t}}} \frac{\alpha \lambda}{t^2} \left(1 - e^{-\frac{\lambda}{t}}\right)^{\alpha-1} e^{-\frac{\lambda}{t}} dt \\ &= n \int_0^{\infty} \frac{\alpha \lambda}{t^3} \left(1 - e^{-\frac{\lambda}{t}}\right)^{\alpha-2} e^{-\frac{2\lambda}{t}} dt \end{aligned} \quad (3.62)$$

$\frac{\lambda}{t} = u$ ise $-\frac{\lambda}{t^2} dt = du$ ile (3.62) eşitliği yeniden düzenlenirse,

$$= \frac{n\alpha}{\lambda} \int_0^{\infty} u e^{-2u} (1 - e^{-u})^{\alpha-2} du \quad (3.63)$$

$e^{-u} = v$ ise $-e^{-u} du = dv$ ile (3.63) eşitliği tekrar düzenlenirse,

$$= -\frac{n\alpha}{\lambda} \int_0^1 \ln v (1 - v)^{\alpha-2} v dv \quad (3.64)$$

şeklinde bulunur. Lemma 1.' den,

$$E\left(\frac{\partial^2 l(\alpha, \lambda)}{\partial \lambda \partial \alpha}\right) = \frac{n\alpha}{\lambda} \left[\frac{\Gamma(\alpha-1)}{\alpha \Gamma(\alpha)} (\psi(\alpha+1) - \psi(2)) \right], \alpha > 2 \quad (3.65)$$

elde edilir.

$$\begin{aligned} E\left(\frac{\partial^2 l(\alpha, \lambda)}{\partial \lambda^2}\right) &= n \left[-\frac{1}{\lambda^2} - (\alpha-1) E\left(\frac{\frac{1}{t^2} e^{-\frac{\lambda}{t}}}{\left(1 - e^{-\frac{\lambda}{t}}\right)^2}\right) \right] \\ &= -\frac{n}{\lambda^2} - n(\alpha-1) E\left(\frac{\frac{1}{t^2} e^{-\frac{\lambda}{t}}}{\left(1 - e^{-\frac{\lambda}{t}}\right)^2}\right) \end{aligned} \quad (3.66)$$

dir. Burada,

$$\begin{aligned} E\left(\frac{\frac{1}{t^2} e^{-\frac{\lambda}{t}}}{\left(1 - e^{-\frac{\lambda}{t}}\right)^2}\right) &= \int_0^{\infty} \frac{\frac{1}{t^2} e^{-\frac{\lambda}{t}}}{\left(1 - e^{-\frac{\lambda}{t}}\right)^2} \frac{\alpha \lambda}{t^2} \left(1 - e^{-\frac{\lambda}{t}}\right)^{\alpha-1} e^{-\frac{\lambda}{t}} dt \\ &= \int_0^{\infty} \frac{\alpha \lambda}{t^4} \left(1 - e^{-\frac{\lambda}{t}}\right)^{\alpha-3} e^{-\frac{2\lambda}{t}} dt \end{aligned} \quad (3.67)$$

$\frac{\lambda}{t} = u$ ise $-\frac{\lambda}{t^2} dt = du$ ile (3.67) eşitliği tekrar düzenlenirse,

$$= \int_0^{\infty} \frac{\alpha}{\lambda^2} u^2 e^{-2u} \left(1 - e^{-u}\right)^{\alpha-3} du \quad (3.68)$$

$e^{-u} = v$ ise $-e^{-u} du = dv$ ile (3.68) eşitliği yeniden düzenlenirse,

$$= \frac{\alpha}{\lambda^2} \int_0^1 (\ln v)^2 (1-v)^{\alpha-3} v dv \quad (3.69)$$

elde edilir. Lemma 2.' den,

$$= \frac{\alpha}{\lambda^2} \left[\frac{\Gamma(\alpha-2)}{\Gamma(\alpha)} \{ \psi'(2) - \psi'(\alpha) + [\psi(2) - \psi(\alpha)]^2 \} \right] \quad (3.70)$$

bulunur. Buradan, (3.70) eşitliği (3.66) eşitliğinde yerine yazılınca,

$$E \left(\frac{\partial^2 l(\alpha, \lambda)}{\partial \lambda^2} \right) = -\frac{n}{\lambda^2} - \frac{n(\alpha-1)\alpha}{\lambda^2} \left[\frac{\Gamma(\alpha-2)}{\Gamma(\alpha)} \{ \psi'(2) - \psi'(\alpha) + [\psi(2) - \psi(\alpha)]^2 \} \right] \quad (3.71)$$

şeklinde elde edilir.

$$\begin{aligned} E \left(\frac{\partial^2 l(\alpha, \lambda)}{\partial \alpha \partial \lambda} \right) &= E \left(\frac{\partial^2 l(\alpha, \lambda)}{\partial \lambda \partial \alpha} \right) \\ &= \frac{n\alpha}{\lambda} \left[\frac{\Gamma(\alpha-1)}{\alpha \Gamma(\alpha)} (\psi(\alpha+1) - \psi(2)) \right] \end{aligned} \quad (3.72)$$

bulunur. Böylece (3.54) eşitliği

$$I(\alpha, \lambda) = \frac{1}{n} \left[\frac{\frac{n}{\alpha^2}}{\lambda \left[\frac{\Gamma(\alpha-1)}{\alpha \Gamma(\alpha)} (\psi(\alpha+1) - \psi(2)) \right]} - \frac{\frac{n\alpha \left[\frac{\Gamma(\alpha-1)}{\alpha \Gamma(\alpha)} (\psi(\alpha+1) - \psi(2)) \right]}{\lambda^2} - \frac{n}{\lambda^2} \frac{\alpha(\alpha-1)\alpha \left[\frac{\Gamma(\alpha-2)}{\Gamma(\alpha)} \{ \psi'(2) - \psi'(\alpha) + [\psi(2) - \psi(\alpha)]^2 \} \right]}{\lambda^2} \right]_{\alpha=\lambda, \lambda=\lambda} \quad (3.73)$$

şeklinde elde edilir.

$I^{-1}(\alpha, \lambda)$ varyans-kovaryans matrisidir. $(1 - \delta)100\%$ yaklaşımla α ve λ için güven aralıkları $\hat{\alpha} \pm \xi_{\delta/2} \sqrt{V(\hat{\alpha})}$ ve $\hat{\lambda} \pm \xi_{\delta/2} \sqrt{V(\hat{\lambda})}$ dir. Burada $V(\hat{\alpha})$ ve $V(\hat{\lambda})$ sırasıyla $\hat{\alpha}$ ve $\hat{\lambda}$ nın varyansıdır ki bu değerler $I^{-1}(\alpha, \lambda)$ nin birinci ve ikinci köşegen elemanlarıdır. $\xi_{\delta/2}$ standart normal dağılımın $\delta/2$ yüzdeliğinin üstündedir. $\alpha > 2$ için regülerlik koşulları sağlandığından $(\hat{\alpha}, \hat{\lambda})$ nın maksimum olabilirlik tahmin edicileri yukarıda bahsedilen asimptotik varyans kovaryans matrisi ile asimptotik normal dağılıma sahiptir. Daha düzgün bir ifadeyle $\sqrt{n}(\hat{\alpha} - \alpha, \hat{\lambda} - \lambda)$, 0 ortalama vektörü ve I^{-1} varyans-kovaryans matrisi ile asimptotik normaldir.

Kestirim denklemlerinden görülür ki genelleştirilmiş üstel dağılımın aksine genelleştirilmiş ters üstel dağılımında α ve λ nın maksimum olabilirlik tahmin edicileri parametre uzayının içinde ortaya çıkar.

3.5.8.3. En Küçük Kareler Tahmini

En küçük kareler tahmin yöntemi uygulamada sıklıkla kullanılan tahmin yöntemlerinden biridir. İki değişken arasındaki ilişkiyi tahmin etmek için kullanılır ve regresyon yöntemi olarak da bilinir (Akdi, 2011). Bu kısımda GIED parametreleri en küçük kareler yöntemiyle tahmin edilir.

X_1, X_2, \dots, X_n, F kümülatif dağılım fonksiyonlu herhangi bir dağılımdan alınmış bir rasgele örneklem ve $X_{(1)} \leq X_{(2)} \leq \dots \leq X_{(n)}$ örnekleme karşılık gelen sıra istatistikleri olsun. O zaman

$$E(f(X_{(i)})) = \frac{i}{n+1} \quad (3.74)$$

dir. $\theta = (\alpha, \lambda)$ nın en küçük kareler tahmin edicileri

$$Q(\theta) = \sum_{i=1}^n \left(F(X_i) - \frac{i}{n+1} \right)^2 \quad (3.75)$$

şeklinde tanımlanır (Abouammoh ve Alshingiti, 2009).

GIED in kümülatif dağılım fonksiyonu (3.75) eşitliğinde yerine yazılınca,

$$Q(\alpha, \lambda) = \sum_{i=1}^n \left(1 - \left(1 - e^{-\frac{\lambda}{x_{(i)}}} \right)^\alpha - \frac{i}{n+1} \right)^2 \quad (3.76)$$

elde edilir. Değeri Q nun minimize edilmesi ile bulunur. α ve λ ya göre birinci türevler sırasıyla,

$$\sum_{i=1}^n \left(1 - \left(1 - e^{-\frac{\lambda}{x_{(i)}}} \right)^\alpha - \frac{i}{n+1} \right) \left(1 - e^{-\frac{\lambda}{x_{(i)}}} \right)^\alpha \ln \left(1 - e^{-\frac{\lambda}{x_{(i)}}} \right) = 0 \quad (3.77)$$

ve

$$\sum_{i=1}^n \left(1 - \left(1 - e^{-\frac{\lambda}{x_{(i)}}} \right)^\alpha - \frac{i}{n+1} \right) \left(\frac{\left(1 - e^{-\frac{\lambda}{x_{(i)}}} \right)^{\alpha-1} e^{-\frac{\lambda}{x_{(i)}}}}{x_{(i)}} \right) = 0 \quad (3.78)$$

şeklindedir.

Bu denklemler lineer değildir. Dolayısıyla α ve λ nın en küçük kareler tahmin edicileri nümerik yöntemlerle hesaplanmalıdır.

3.5.8.4. Ağırlıklı En Küçük Kareler Tahmini

Ağırlıklı en küçük kareler yönteminin sıradan olanından farkı minimize edilecek toplama ağırlıkların eklenmesidir. Buna göre $\theta = (\alpha, \lambda)$ nın ağırlıklı en küçük kareler tahmin edicileri

$$Q(\theta) = \sum_{i=1}^n w_j \left(F(X_i) - \frac{i}{n+1} \right)^2 \quad (3.79)$$

olarak tanımlanır. Burada ağırlıklar

$$w_j = \frac{(n+1)^2(n+2)}{i(n-i+1)} \quad (3.80)$$

dir (bknz. Örn. Gupta ve Kundu, 2007).

GIED in kümülatif dağılım fonksiyonu (3.79) eşitliğinde yerine yazılınca,

$$Q(\alpha, \lambda) = \sum_{i=1}^n w_j \left(1 - \left(1 - e^{-\frac{\lambda}{x(i)}} \right)^\alpha - \frac{i}{n+1} \right)^2 \quad (3.81)$$

şeklinde elde edilir.

Değeri Q nun minimize edilmesi ile bulunur. α ve λ ya göre birinci türevler sırasıyla,

$$\sum_{i=1}^n \frac{(n+1)^2(n+2)}{i(n-i+1)} \left(1 - \left(1 - e^{-\frac{\lambda}{x(i)}} \right)^\alpha - \frac{i}{n+1} \right) \left(1 - e^{-\frac{\lambda}{x(i)}} \right)^\alpha \ln \left(1 - e^{-\frac{\lambda}{x(i)}} \right) = 0 \quad (3.82)$$

ve

$$\sum_{i=1}^n \frac{(n+1)^2(n+2)}{i(n-i+1)} \left(1 - \left(1 - e^{-\frac{\lambda}{x_{(i)}}} \right)^\alpha - \frac{i}{n+1} \right) \left(\frac{\left(1 - e^{-\frac{\lambda}{x_{(i)}}} \right)^{\alpha-1} e^{-\frac{\lambda}{x_{(i)}}}}{x_{(i)}} \right) = 0 \quad (3.83)$$

olarak elde edilir.

Bu denklemler lineer değildir. Dolayısıyla α ve λ nın ağırlıklı en küçük kareler kestiricileri nümerik yöntemlerle hesaplanmalıdır.

3.5.8.5. Momentler Tahmini

Tarihsel olarak en eski yöntemlerden biri olan momentler yöntemi, bir anakütlenin ilk birkaç momentini bir örneklemin ilgili momentlerine eşitleyip anakütlenin bilinmeyen katsayılarını bulmak için çözmek üzere istenen sayıda denklem elde etmektir (Freund, 1962).

Tanım 2:

X_1, X_2, \dots, X_n gibi bir gözlemler kümesinin k ' inci örneklem momenti, bu gözlemlerin k ' inci kuvvetlerinin ortalaması olup m'_k ile gösterilir:

$$m'_k = \frac{\sum_{i=1}^n x_k^i}{n} \quad (3.84)$$

dir.

Öyleyse bir kitlede r tane katsayı varsa, momentler yöntemi bu r katsayı için

$$m'_k = \mu'_k, \quad k = 1, 2, \dots, r \quad (3.85)$$

denklem takımının çözümünden oluşur (Freund, 1962).

GIED in birinci ve ikinci momentleri (3.35) ve (3.36) eşitlikleri ile verilen

$$E(X) = \int_0^{\infty} \frac{\alpha\lambda}{x} \left(1 - e^{-\frac{\lambda}{x}}\right)^{\alpha-1} e^{-\frac{\lambda}{x}} dx$$

$$E(X^2) = \int_0^{\infty} \alpha\lambda \left(1 - e^{-\frac{\lambda}{x}}\right)^{\alpha-1} e^{-\frac{\lambda}{x}} dx \quad (3.86)$$

dir. Bu integraller tam sayı olmayan α için ıraksaktır ve analitik çözümü yoktur.

Buradan momentler tahmini denklemleri

$$E(X) = \bar{x} \quad E(X^2) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i^2 \quad (3.87)$$

integrallerin ıraksak olmasından dolayı analitik olarak çözümsüzdür. Buna bir çözüm olarak düzgün dağılımdan simülasyon çalışması ile integrallerin yaklaşık değerleri

$$\int_0^{\infty} f(x) dx = \int_0^1 f\left(\frac{1}{t} - 1\right) \frac{1}{t^2} dt$$

$$\approx \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \frac{1}{u_i^2} f\left(\frac{1}{u_i} - 1\right) \quad (3.88)$$

(3.88) eşitliği ile hesaplanabilir. Burada $u_i \in U(0,1)$ dir. Sonuçta bulunacak tahminler yaklaşık olacaktır.

4. BİR ÖMÜR DAĞILIMI OLARAK GENELLEŞTİRİLMİŞ TERS ÜSTEL DAĞILIM

4.1. Güvenilirlik Fonksiyonu

GIED in güvenilirlik fonksiyonu

$$\begin{aligned} R(t) &= 1 - F(t) \\ &= \left[1 - e^{\left(-\frac{\lambda}{t}\right)} \right]^\alpha, \quad t \geq 0, \alpha, \lambda > 0 \end{aligned} \quad (4.1)$$

olarak bulunur.

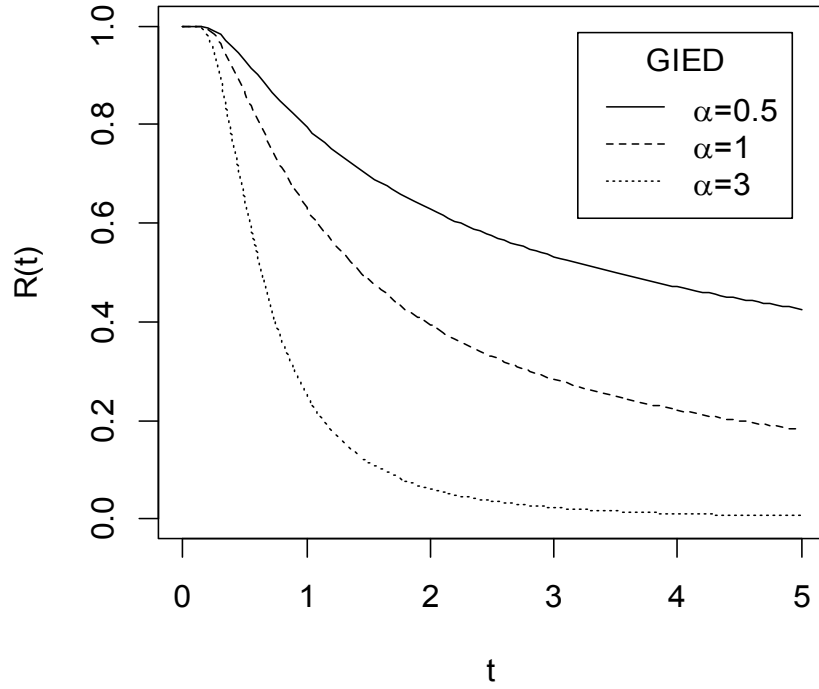
4.2. Tehlike Fonksiyonu

GIED in tehlike fonksiyonu:

$$\begin{aligned} h(t) &= \frac{f(t)}{R(t)} \\ &= \left(\frac{\alpha\lambda}{t^2} \right) \frac{e^{\left(-\frac{\lambda}{t}\right)}}{\left[1 - e^{\left(-\frac{\lambda}{t}\right)} \right]}, \quad t \geq 0, \alpha, \lambda > 0 \end{aligned} \quad (4.2)$$

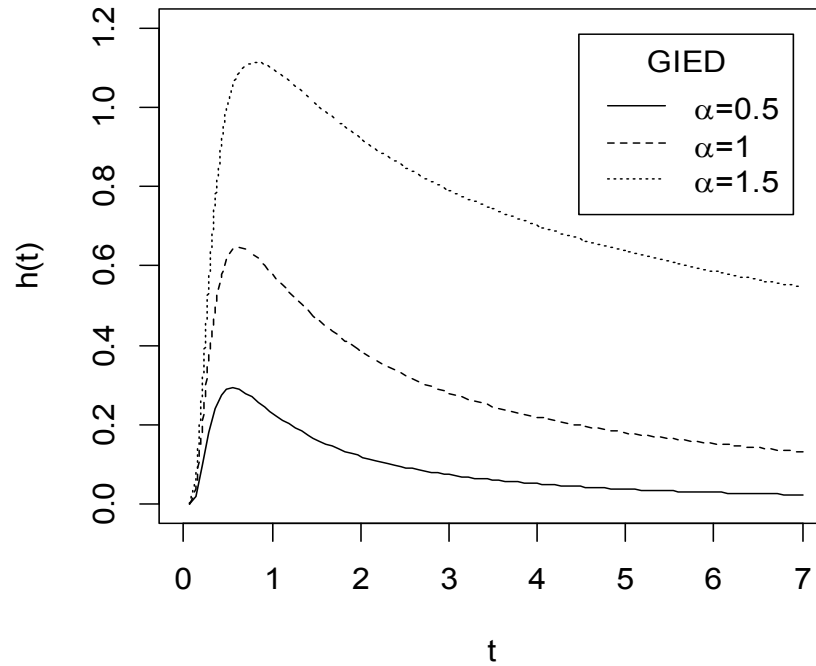
şeklinde bulunur.

$\alpha = 0.5$, $\alpha = 1$, $\alpha = 3$ şekil parametreleri ve $\lambda = 1$ ölçek parametresi için R 2.14 paket programında çizilen GIED in güvenilirlik fonksiyonları Şekil 4.1.' de verilmiştir.



Şekil 4.1. Genelleştirilmiş ters üstel dağılımın güvenilirlik fonksiyonları

$\alpha = 0.5, \alpha = 1, \alpha = 1.5$ şekil parametreleri ve $\lambda = 1$ ölçek parametresi için R 2.14 paket programında çizilen GIED in tehlike fonksiyonları Şekil 4.2.' de verilmiştir.



Şekil 4.2. Genelleştirilmiş ters üstel dağılımın tehlike fonksiyonları

Görüldüğü gibi tehlike fonksiyonu şekli tek tepelidir. Yani önce artar daha sonra azalır. Değişim noktası olan t_0 aşağıdaki gibi bulunur.

$$\ln(h(t)) = \ln(\alpha\lambda) + \ln\left(\frac{1}{t^2}\right) + \ln\left(\frac{e^{-\frac{\lambda}{t}}}{1 - e^{-\frac{\lambda}{t}}}\right) \quad (4.3)$$

(4.3) eşitliğinin türevi alınırsa

$$\frac{h'(t)}{h(t)} = -\frac{2}{t} + \frac{\lambda}{t^2\left(1 - e^{-\frac{\lambda}{t}}\right)} \quad (4.4)$$

$$h'(t) = h(t) \left[-\frac{2}{t} + \frac{\lambda}{t^2\left(1 - e^{-\frac{\lambda}{t}}\right)} \right] \quad (4.5)$$

elde edilir.

$h'(t) = 0$ denklemi çözülürse,

$$\lambda - 2t_0 \left[1 - e^{-\frac{\lambda}{t_0}} \right] = 0 \quad (4.6)$$

eşitliği kapalı formda bulunur. Buradan aşağıdaki sabit nokta problemi elde edilir.

$$t_0 = \frac{\lambda}{2} + t_0 e^{-\frac{\lambda}{t_0}} \quad (4.7)$$

Sabit nokta iterasyonu kullanılarak t_0 in yaklaşık bir değeri kolaylıkla bulunabilir.

4.3. İlerleyen II. Tip Sansürlü Örnekleme ve Genelleştirilmiş Ters Üstel Dağılım

Tanım 1: n özdeş parçanın bir yaşam testi deneyine tabi tutulduğunu varsayalım. Sistemde meydana gelen ilk bozulmadan sonra kalan sağlam $n - 1$ parçadan R_1 tanesi sistemden çekilsin. Sistem çalışmaya devam ederken 2. bozulmadan sonra sağlam kalan $n - R_1 - 1$ parçadan R_2 tanesi sistemden çekilsin ve bu şekilde devam edilsin. Yöntem m . bozulmadan sonra sağlam kalan R_m parçanın sistemden çekilmesine kadar devam eder. Bu yöntem *ilerleyen II. tip sansürlü örnekleme* adı verilir.

Açıkça,

$$\sum_{i=1}^{m-1} R_i + m = n \quad (4.8)$$

dir.

Eğer $R_1 = R_2 = \dots = R_m = 0$ ise örnekleme *tam örnekleme* yöntemidir.

Eğer $R_1 = R_2 = \dots = R_{m-1} = 0$ ve $R_m = n - m$ ise örnekleme klasik *II. tip sansürlü örnekleme* yöntemidir. Böylece $\tilde{R} = (R_1, R_2, \dots, R_m)$ örnekleme şeması elde edilir.

İlerleyen II. tip sansürlü örnekleme yöntemi yaşam testi deneyinin maliyetini ve süresini azalttığından çok kullanışlı bir yöntemdir.

Bu örnekleme yöntemi Cohen (1963) tarafından tanımlanmıştır. Bu örnekleme yönteminin teorisi ve uygulamaları Balakrishnan ve Aggarwala (2000) tarafından önerilmiştir.

Krishna ve Kumar (2012), genelleştirilmiş ters üstel dağılımı kullanarak *ilerleyen II. tip sansürlü örnekleme*yi güvenilirlik teorisinde kullanmıştır. Bu kısımda onların elde ettikleri bazı sonuçlar verilir.

4.3.1. Olabilirlik Fonksiyonu

x_1, x_2, \dots, x_m , $\tilde{R} = (R_1, R_2, \dots, R_m)$ sansürleme şemalı GIED(α, λ) dan ilerleyen II. tip sansürlü örneklem olsun. O zaman olabilirlik fonksiyonu:

$$L(\alpha, \lambda) = A \prod_{i=1}^m f(x_i) [1 - F(x_i)]^{R_i}$$

$$= A \prod_{i=1}^m \left[\frac{\alpha \lambda}{x_i^2} e^{-\frac{\lambda}{x_i}} \left(1 - e^{-\frac{\lambda}{x_i}}\right)^{\alpha-1} \left\{ \left(1 - e^{-\frac{\lambda}{x_i}}\right)^\alpha \right\}^{R_i} \right] \quad (4.9)$$

olarak tanımlanır. Burada

$$A = n(n - R_1 - 1)(n - R_1 - R_2 - 2) \dots (n - R_1 - R_2 - \dots - R_{m-1} - m + 1) \quad (4.10)$$

dir.

4.3.2. Genelleştirilmiş Ters Üstel Dağılımdan İlerleyen II. Tip Sansürlü Örneklem Üretmek İçin Algoritma

- 1) $U(0,1)$ düzgün dağılımdan (u_1, u_2, \dots, u_m) rastgele sayıları üret.
- 2) $z_i = -\log(1 - u_i)$ hesapla. (z_i ler standart üstel dağılımlı sayılardır.)
- 3) $\tilde{R} = (R_1, R_2, \dots, R_m)$ sansürleme şeması verildiğinde $y_1 = \frac{z_1}{m}$ olarak

$i = 1, 2, \dots, m$ için

$$y_i = y_{i-1} + \frac{z_i}{\left(n - \sum_{j=1}^{i-1} R_j - i + 1 \right)} \quad (4.11)$$

hesapla. Böylece (y_1, y_2, \dots, y_m) standart üstel dağılımdan *ilerleyen II. tip sansürlü örneklemedir*.

4) $w_i = 1 - e^{-y_i}$ hesapla. Böylece w_i ler $U(0,1)$ düzgün dağılımdan *ilerleyen II. tip sansürlü örnekleme*yi oluşturur.

$$5) x_i = F^{-1}(w_i) = -\frac{\lambda}{\log\left[1 - (1 - w_i)^{\frac{1}{\alpha}}\right]} \quad (4.12)$$

hesapla. Böylece x_1, x_2, \dots, x_m GIED(α, λ) dan *ilerleyen II. tip sansürlü örnekleme*yi oluşturur.

4.3.3. Maksimum Olabilirlik Tahmini Ve Güvenilirlik Karakteristikleri

4.3.3.1. Log Olabilirlik Fonksiyonu

$$l(\alpha, \lambda) = \log A + m \log \alpha + m \log \lambda - 2 \sum_{i=1}^m \log x_i - \sum_{i=1}^m \frac{\lambda}{x_i} + \sum_{i=1}^m \left[\{(R_i + 1)\alpha - 1\} \log \left(1 - e^{-\frac{\lambda}{x_i}} \right) \right] \quad (4.13)$$

dir.

α ve λ ya göre birinci türevler sıfıra eşitlenerek sırasıyla,

$$\frac{\partial^2 l(\alpha, \lambda)}{\partial \alpha} = \frac{m}{\alpha} + \sum_{i=1}^m \left[(R_i + 1) \log \left(1 - e^{-\frac{\lambda}{x_i}} \right) \right] = 0 \quad (4.14)$$

$$\frac{\partial l(\alpha, \lambda)}{\partial \lambda} = \frac{m}{\lambda} - \sum_{i=1}^m \frac{1}{x_i} + \sum_{i=1}^m \left[\frac{\{(R_i + 1)\alpha - 1\} e^{-\frac{\lambda}{x_i}}}{x_i \left(1 - e^{-\frac{\lambda}{x_i}} \right)} \right] = 0 \quad (4.15)$$

tahmin denklemleri elde edilir. Buradan,

$$\hat{\alpha} = \frac{-m}{\sum_{i=1}^m (R_i + 1) \log \left(1 - e^{-\frac{\lambda}{x_i}} \right)} \quad (4.16)$$

bulunur ve (4.15) eşitliğinde yerine yazılırsa,

$$\frac{m}{\lambda} - \sum_{i=1}^m \frac{1}{x_i} - \sum_{i=1}^m \left[\frac{\left\{ (R_i + 1)m + \sum_{i=1}^m (R_i + 1) \log \left(1 - e^{-\frac{\lambda}{x_i}} \right) \right\} e^{-\frac{\lambda}{x_i}}}{x_i \left(1 - e^{-\frac{\lambda}{x_i}} \right) \sum_{i=1}^m (R_i + 1) \log \left(1 - e^{-\frac{\lambda}{x_i}} \right)} \right] = 0 \quad (4.17)$$

elde edilir.

Yukarıdaki denklem λ nın lineer olmayan bir fonksiyonudur ve bu denklem nümerik yollarla çözümlenmelidir.

Maksimum olabilirlik tahmin edicilerinin invaryans özelliğinden dolayı medyan, güvenilirlik fonksiyonu ve tehlike fonksiyonunun tahminleri sırasıyla,

$$\hat{m} = - \frac{\hat{\lambda}}{\log \left[1 - (0.5)^{\frac{1}{\hat{\alpha}}} \right]} \quad (4.18)$$

$$\hat{R}(t) = \left(1 - e^{-\frac{\hat{\lambda}}{t}} \right)^{\hat{\alpha}}, \quad t \geq 0 \quad (4.19)$$

$$\hat{h}(t) = \frac{\hat{\alpha} \hat{\lambda} e^{-\frac{\hat{\lambda}}{t}}}{t^2 \left(1 - e^{-\frac{\hat{\lambda}}{t}} \right)}, \quad t \geq 0 \quad (4.20)$$

olarak bulunur.

4.3.3.2. Fisher Bilgi Matrisi

İlerleyen II. tip sansürlü örneklem durumunda log olabilirlik fonksiyonunun ikinci kısmi türevleri ve Fisher Bilgi matrisini oluşturan bileşenler sırasıyla,

$$\frac{\partial^2 l(\alpha, \lambda)}{\partial \alpha^2} = -\frac{m}{\alpha^2} \quad (4.21)$$

$$\frac{\partial^2 l(\alpha, \lambda)}{\partial \lambda^2} = -\frac{m}{\lambda^2} - \sum_{i=1}^m \frac{\{(R_i + 1)\alpha - 1\}e^{-\frac{\lambda}{x_i}}}{x_i^2 \left(1 - e^{-\frac{\lambda}{x_i}}\right)^2} \quad (4.22)$$

$$\frac{\partial^2 l(\alpha, \lambda)}{\partial \lambda \partial \alpha} = \frac{\partial^2 l(\alpha, \lambda)}{\partial \alpha \partial \lambda} = \sum_{i=1}^m \left[\frac{(R_i + 1)e^{-\frac{\lambda}{x_i}}}{x_i \left(1 - e^{-\frac{\lambda}{x_i}}\right)} \right] \quad (4.23)$$

$$E\left(\frac{\partial^2 l(\alpha, \lambda)}{\partial \alpha^2}\right) = -\frac{m}{\alpha^2} \quad (4.24)$$

$$E\left(\frac{\partial^2 l(\alpha, \lambda)}{\partial \lambda^2}\right) = E\left[-\frac{m}{\lambda^2} - \sum_{i=1}^m \frac{\{(R_i + 1)\alpha - 1\}e^{-\frac{\lambda}{x_i}}}{x_i^2 \left(1 - e^{-\frac{\lambda}{x_i}}\right)}\right] \quad (4.25)$$

$$E\left(\frac{\partial^2 l(\alpha, \lambda)}{\partial \lambda \partial \alpha}\right) = E\left(\frac{\partial^2 l(\alpha, \lambda)}{\partial \alpha \partial \lambda}\right) = E\left[\sum_{i=1}^m \frac{(R_i + 1)e^{-\frac{\lambda}{x_i}}}{x_i \left(1 - e^{-\frac{\lambda}{x_i}}\right)}\right] \quad (4.26)$$

şeklinde elde edilir.

(α, λ) nın maksimum olabilirlik tahmin edicileri $(\hat{\alpha}, \hat{\lambda})$ nın Fisher Bilgi matrisi,

$$I(\alpha, \lambda) = -\frac{1}{m} \begin{bmatrix} E\left(\frac{\partial^2 l(\alpha, \lambda)}{\partial \alpha^2}\right) & E\left(\frac{\partial^2 l(\alpha, \lambda)}{\partial \alpha \partial \lambda}\right) \\ E\left(\frac{\partial^2 l(\alpha, \lambda)}{\partial \lambda \partial \alpha}\right) & E\left(\frac{\partial^2 l(\alpha, \lambda)}{\partial \lambda^2}\right) \end{bmatrix} \quad (4.27)$$

olarak ifade edilir. Yukarıdaki matriste beklenen değerlerin bulunması zor olduğundan gözlenmiş Fisher Bilgi matrisi kullanılır. Bu matris, $I_0(\alpha, \lambda)$ ile gösterilir ve $I_0(\alpha, \lambda)$ da $\alpha = \hat{\alpha}$ ve $\lambda = \hat{\lambda}$ alınarak oluşturulur.

Gözlemlenmiş Fisher Bilgi matrisi,

$$I_0(\alpha, \lambda) = \begin{bmatrix} -\frac{\partial^2 l(\alpha, \lambda)}{\partial \alpha^2} & -\frac{\partial^2 l(\alpha, \lambda)}{\partial \alpha \partial \lambda} \\ -\frac{\partial^2 l(\alpha, \lambda)}{\partial \lambda \partial \alpha} & -\frac{\partial^2 l(\alpha, \lambda)}{\partial \lambda^2} \end{bmatrix}_{\alpha=\hat{\alpha}, \lambda=\hat{\lambda}} \quad (4.28)$$

şeklindedir.

Böylece $I_0^{-1}(\alpha, \lambda)$ varyans-kovaryans matrisidir. İki yönlü normal yaklaşımla α ve λ için güven aralıkları $\hat{\alpha} \pm z_{\xi/2} \sqrt{V_0(\hat{\alpha})}$ ve $\hat{\lambda} \pm z_{\xi/2} \sqrt{V_0(\hat{\lambda})}$ dir.

Burada $z_{\xi/2}$ standart normal dağılımın $\xi/2$ yüzdeliğinin üstündedir.

4.4. En Uygun Modeli Belirlemede Kullanılan Bazı Kriterler

Bu kriterler veri modellemesinde kullanılabilecek birkaç aday modelin olması durumunda hangisinin seçileceğine karar verirken kullanılır. Tezin son bölümünde bu kriterler çeşitli veri kümelerinde kullanılmıştır.

4.4.1. Akaike Bilgi Kriteri (AIC)

Akaike bilgi kriteri, Akaike (1974) tarafından önerilmiştir. Tahmin edilmiş istatistiksel modelin uydurumunun iyiliğinin bir ölçüsüdür. Verilen bir veri kümesi için birkaç aday model AIC değerlerine göre sıralanır. En düşük AIC değerine sahip olan model en uygun modeldir. AIC aşağıdaki formülle hesaplanır.

$$AIC = 2k - 2\log(L) \quad (4.29)$$

Burada k modeldeki parametre sayısı, L de olabilirlik fonksiyonunun maksimize edilmiş değeridir.

4.4.2. Bayesian Bilgi Kriteri (BIC)

Bayesian bilgi kriteri, Schwarz (1978) tarafından önerilmiştir. AIC ile aynı görevi görür. En düşük BIC değerli olan model en uygun modeldir. Çok parametreliliğin modelin olabilirlik değeri diğerlerine göre daha büyüktür. AIC ile karşılaştırıldığında BIC modele fazladan parametre eklenmesi durumunu daha şiddetli cezalandırır. BIC aşağıdaki formülle hesaplanır.

$$BIC = k \log(n) - 2\log(L) \quad (4.30)$$

Burada k modeldeki parametre sayısı, n gözlemlerin sayısı ve L de olabilirlik fonksiyonunun maksimize edilmiş değeridir.

5. GENELLEŞTİRİLMİŞ TERS ÜSTEL DAĞILIMIN TAHMİN YÖNTEMLERİ KULLANILARAK DİĞER ÖMÜR DAĞILIMLARI İLE KARŞILAŞTIRILMASI

5.1. Giriş

En uygun modeli belirlemede Abouammah ve Alshingiti (2009) tarafından Lieblein ve Zelen (1956) verisi kullanılarak olabilirlik oran test istatistiği ve Kolmogorov-Smirnov test istatistiği ile hesaplamalar yapılmıştır. Krishna ve Kumar (2012) tarafından GIED in güven aralıkları önerilmiştir. Ayrıca Gupta ve Kundu (2007) tarafından Genelleştirilmiş üstel dağılımın farklı metodlarla tahminleri önerilmiştir.

Bu bölümde Lieblein ve Zelen (1956) ve Bjerkedal (1960) , verileri kullanılarak GIED, diğer ömür dağılımları ile karşılaştırılacak, güven aralıkları bulunacaktır. Ayrıca Gupta ve Kundu (2007)' de Genelleştirilmiş üstel dağılımın farklı yöntemlerle önerilen tahmin yöntemleri GIED için geliştirilecektir.

5.2. Sayısal Örnekler

Bu uygulamalarda olabilirlik oran test istatistiği ve Kolmogorov-Smirnov test istatistiği kullanılarak GIED ve IED in kullanışlığı karşılaştırılacaktır.

5.2.1. Ball Bearings Veri Kümesi

Kullanılacak ilk veri kümesi uygulamalarda yaygın olarak kullanılan Lieblein ve Zelen (1956)'dan alınan Ball bearings verisidir. Bu veri sanayide kullanılan bilyaların ömürlerinden oluşmaktadır.

5. GENELLEŞTİRİLMİŞ TERS ÜSTEL DAĞILIMIN TAHMİN YÖNTEMLERİ
KULLANILARAK DİĞER ÖMÜR DAĞILIMLARI İLE KARŞILAŞTIRILMASI
Göknur AYKANAT

Çizelge 5.1. Ball bearings verisi

x
17.88
28.92
33.0
41.52
42.12
45.60
48.40
51.84
51.96
54.12
55.56
67.80
68.64
68.64
68.88
84.12
93.12
98.64
105.84
105.12
127.92
128.04
173.4

Abouammah ve Alshingiti (2009), GIED ve IED için olabilirlik oran testini kullanarak aşağıdaki hipotezleri kurmuŐlardır. R 2.14 paket programında $(\hat{\lambda}, \hat{\alpha})$ nın tahmin değerleri, standart hata değerlerinin karekökleri $(\sqrt{Var(\hat{\alpha})}, \sqrt{Var(\hat{\lambda})})$ ve log

5. GENELLEŞTİRİLMİŞ TERS ÜSTEL DAĞILIMIN TAHMİN YÖNTEMLERİ
KULLANILARAK DİĞER ÖMÜR DAĞILIMLARI İLE KARŞILAŞTIRILMASI
Göknur AYKANAT

olabilirlik fonksiyonunun parametreler için tahmin değeri hesaplanmış ve aşağıdaki Çizelge 5.2.' de verilmiştir.

$$\begin{aligned} H_0 : \alpha &= 1(IED) \\ H_1 : \alpha &\neq 1(GIED) \end{aligned} \quad (5.1)$$

Çizelge 5.2. GIED ve IED in Ball bearings veri seti için parametre tahminleri, olabilirlik oran test istatistikleri, p değeri, ξ^2 değeri ve standart hata değerlerinin karekökleri

	$\hat{\lambda}$	$\hat{\alpha}$	$l(\hat{\alpha}, \hat{\lambda})$	ξ^2	$p - value$	$\sqrt{Var(\hat{\alpha})}$	$\sqrt{Var(\hat{\lambda})}$
H_0	55.0551	-	-121.726	16.3539	0.000053	-	11.48091
H_1	129.996	5.30762	-113.549	-	-	2.1344	26.6552

Olabilirlik oranı test istatistiğine göre p değeri çok düşüktür ve H_0 hipotezi red edilir. Bu sebeple veri GIED e IED den daha uygundur. Ayrıca uydurulmuş ve deneysel dağılımlar arasındaki yaklaşık Kolmogorov-Smirnov istatistik değeri,

$$K - S_{GIED}^* = 0.0703 \quad (5.2)$$

$$K - S_{IED}^* = 0.3060 \quad (5.3)$$

dir. $K - S_{GIED}^* < K - S_{IED}^*$ olduğundan GIED in IED den bu veri seti için daha kullanışlı olduğu görülür.

Lieblein ve Zelen (1956), verisine göre Krishna ve Kumar (2012)' de GIED in güven aralıkları aşağıdaki şekilde hesaplanmıştır.

Mathematica 5.0 paket programında gözlenmiş Fisher Bilgi matrisi,

$$I(\alpha, \lambda) = \begin{bmatrix} 0.81644 & -0.0559 \\ -0.0559 & 0.00523 \end{bmatrix} \quad (5.4)$$

5. GENELLEŞTİRİLMİŞ TERS ÜSTEL DAĞILIMIN TAHMİN YÖNTEMLERİ
KULLANILARAK DİĞER ÖMÜR DAĞILIMLARI İLE KARŞILAŞTIRILMASI
Göknur AYKANAT

dir. Varyans kovaryans matrisi

$$I^{-1}(\alpha, \lambda) = \begin{bmatrix} 4.556 & 48.654 \\ 48.654 & 710.5 \end{bmatrix} \quad (5.5)$$

olarak bulunur.

α için %90 güven aralığı

$$[\hat{\alpha} - \xi_{0.05} \sqrt{Var(\hat{\alpha})}, \hat{\alpha} + \xi_{0.05} \sqrt{Var(\hat{\alpha})}] \quad (5.6)$$

$$\hat{\alpha} = 5.3076, \xi_{0.05} = 1.645, \sqrt{Var(\hat{\alpha})} = 2.1344$$

değerleri (5.6) eşitliğinde yerine yazılınca

$$[1.796, 8.819] \quad (5.7)$$

güven aralığı elde edilir.

Benzer şekilde λ için %90 güven aralığı

$$[\hat{\lambda} - \xi_{0.05} \sqrt{Var(\hat{\lambda})}, \hat{\lambda} + \xi_{0.05} \sqrt{Var(\hat{\lambda})}] \quad (5.8)$$

$$\hat{\lambda} = 129.9959, \xi_{0.05} = 1.645, \sqrt{Var(\hat{\lambda})} = 26.6552$$

değerleri (5.8) eşitliğinde yerine yazılınca

$$[86.152, 173.84] \quad (5.9)$$

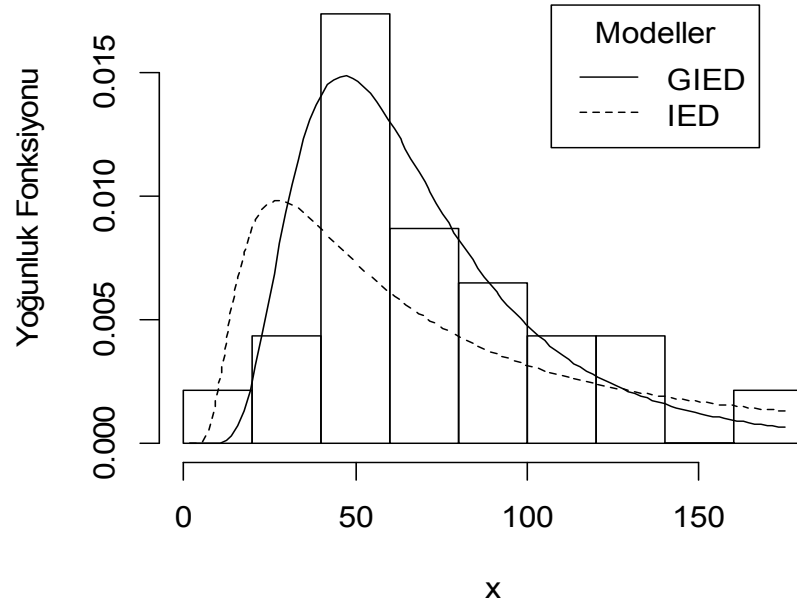
güven aralığı elde edilir.

5. GENELLEŞTİRİLMİŞ TERS ÜSTEL DAĞILIMIN TAHMİN YÖNTEMLERİ KULLANILARAK DİĞER ÖMÜR DAĞILIMLARI İLE KARŞILAŞTIRILMASI

Göknur AYKANAT

Böylece olabirlik oran test istatistiği kullanılarak elde edilen $\hat{\alpha}$ ve $\hat{\lambda}$ tahmin değerlerinin güven aralığının içinde kaldığı görölür.

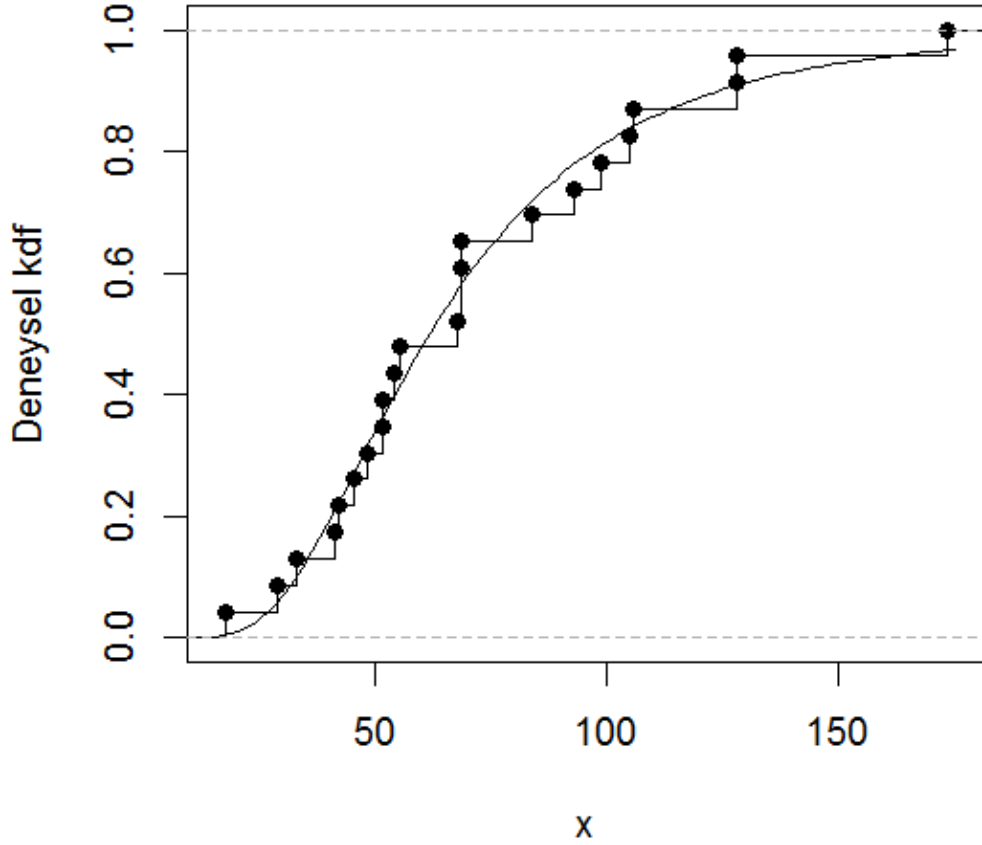
Ball bearings verisi için $\hat{\alpha} = 5.3076$ Şekil parametresi ve $\hat{\lambda} = 129.9959$ ölçek parametresi alınarak GIED ile $\hat{\lambda} = 55.0551$ ölçek parametresi alınarak IED in histogramı ve üzerindeki olasılık yoğunluk fonksiyonları tahminleri R 2.14 paket programında çizilmiş ve Şekil 5.1.' de verilmiştir.



Şekil 5.1. Ball bearings verisi için histogramı ve üzerindeki olasılık yoğunluk fonksiyonları tahminleri

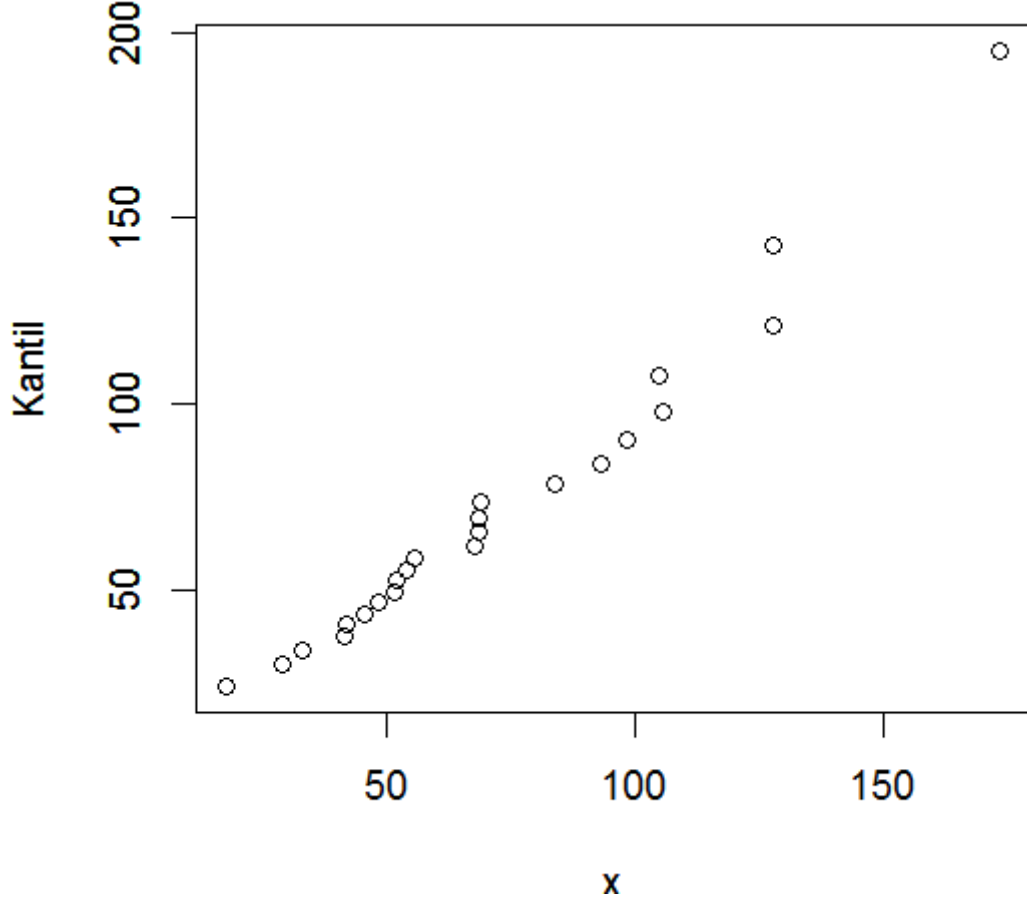
5. GENELLEŞTİRİLMİŞ TERS ÜSTEL DAĞILIMIN TAHMİN YÖNTEMLERİ
KULLANILARAK DİĞER ÖMÜR DAĞILIMLARI İLE KARŞILAŞTIRILMASI
Göknur AYKANAT

Ball bearings verisi için $\hat{\alpha} = 5.3076$ şekil parametresi ve $\hat{\lambda} = 129.9959$ ölçek parametresi alınarak GIED in deneysel kümülatif dağılım fonksiyonu, Şekil 5.2.' de verilmiştir.



Şekil 5.2. Ball bearings verisi için deneysel kümülatif dağılım fonksiyonu

Ball bearings verisi için $\hat{\alpha} = 5.3076$ şekil parametresi ve $\hat{\lambda} = 129.9959$ ölçek parametresi alınarak GIED in kantil fonksiyonu, Şekil 5.3.' de verilmiştir.



Şekil 5.3. Ball bearings verisi için kantil fonksiyonu.

5.2.2. Guinea Pigs Veri Kümesi

Kullanılacak ikinci veri kümesi Bjerkedal (1960) tarafından önerilen Guinea pigs verisidir (Çizelge 5.3). Bu veri farklı dozlarda tüberküloz mikrobu enjekte edilmiş kobayların ömürlerinden oluşur. Bu veri kümesi başta GIED olmak üzere diğer ömür dağılımlarıyla da modellenip sonuçlar karşılaştırılacak.

5. GENELLEŞTİRİLMİŞ TERS ÜSTEL DAĞILIMIN TAHMİN YÖNTEMLERİ
KULLANILARAK DİĞER ÖMÜR DAĞILIMLARI İLE KARŞILAŞTIRILMASI
Göknur AYKANAT

Çizelge 5.3. Guinea Pigs verisi

x			
12	56	73	129
15	57	75	131
22	58	76	143
24	58	76	146
24	59	81	146
32	60	83	175
32	60	84	175
33	60	85	211
34	60	87	233
38	61	91	258
38	62	95	258
43	63	96	263
44	65	98	297
48	65	99	341
52	67	105	341
53	68	109	376
54	70	110	
54	70	121	
55	72	127	

GIED ve IED için olabilirlik oran testini kullanarak aşağıdaki hipotezleri kurulmuştur. R 2.14 paket programında $(\hat{\lambda}, \hat{\alpha})$ nın tahmin değerleri, standart hata değerlerinin karekökleri $(\sqrt{Var(\hat{\alpha})}, \sqrt{Var(\hat{\lambda})})$ ve log olabilirlik fonksiyonunun parametreler için tahmin değeri hesaplanmış ve aşağıdaki tabloda verilmiştir

$$H_0 : \alpha = 1(IED)$$

$$H_1 : \alpha \neq 1(GIED) \quad (5.10)$$

5. GENELLEŞTİRİLMİŞ TERS ÜSTEL DAĞILIMIN TAHMİN YÖNTEMLERİ
KULLANILARAK DİĞER ÖMÜR DAĞILIMLARI İLE KARŞILAŞTIRILMASI
Göknur AYKANAT

Çizelge 5.4. GIED ve IED in Guinea pigs veri seti için parametre tahminleri, olabilirlik oran test istatistikleri, p değeri, ξ^2 değeri ve standart hata değerlerinin karekökleri

	$\hat{\lambda}$	$\hat{\alpha}$	$l(\hat{\alpha}, \hat{\lambda})$	ξ^2	$p - value$	$\sqrt{Var(\hat{\alpha})}$	$\sqrt{Var(\hat{\lambda})}$
H_0	60.45159	-	-408.4549	22.8302	0.0000	-	7.076032
H_1	103.807681	2.569444	-397.0398	-	-	0.4870945	13.1817427

Olabilirlik oranı test istatistiğine göre p değeri çok düşüktür ve H_0 hipotezi red edilir. Bu sebeple veri GIED e IED den daha uygundur. Ayrıca uydurulmuş ve deneysel dağılımlar arasındaki yaklaşık Kolmogorov-Smirnov istatistik değeri,

$$K - S_{GIED}^* = 0.1073153 \quad (5.11)$$

$$K - S_{IED}^* = 0.1883485 \quad (5.12)$$

dir. $K - S_{GIED}^* < K - S_{IED}^*$ olduğundan GIED in IED den bu veri seti için daha kullanışlı olduğu görülür.

Guinea pigs veri seti için R 2.14 paket programında gözlenmiş Fisher Bilgi matrisi

$$I(\alpha, \lambda) = \begin{bmatrix} 11.054973 & -0.321331195 \\ -0.321331195 & 0.01509519 \end{bmatrix} \quad (5.13)$$

dir. Varyans kovaryans matrisi

$$I^{-1}(\alpha, \lambda) = \begin{bmatrix} 0.2372611 & 5.0505873 \\ 5.0505873 & 173.75834 \end{bmatrix} \quad (5.14)$$

olarak elde edilir.

α için %90 güven aralığı

$$\left[\hat{\alpha} - \xi_{0.05} \sqrt{\text{Var}(\hat{\alpha})}, \hat{\alpha} + \xi_{0.05} \sqrt{\text{Var}(\hat{\alpha})} \right] \quad (5.15)$$

$$\hat{\alpha} = 2.569444, \xi_{0.05} = 1.645, \sqrt{\text{Var}(\hat{\alpha})} = 0.4870945$$

değerleri (5.15) eşitliğinde yerine yazılınca

$$[1.7681, 3.3707] \quad (5.16)$$

elde edilir.

Benzer şekilde λ için %90 güven aralığı

$$\left[\hat{\lambda} - \xi_{0.05} \sqrt{\text{Var}(\hat{\lambda})}, \hat{\lambda} + \xi_{0.05} \sqrt{\text{Var}(\hat{\lambda})} \right] \quad (5.17)$$

$$\hat{\lambda} = 103.807681, \xi_{0.05} = 1.645, \sqrt{\text{Var}(\hat{\lambda})} = 13.1817427$$

değerleri aralıkta yerine yazılınca

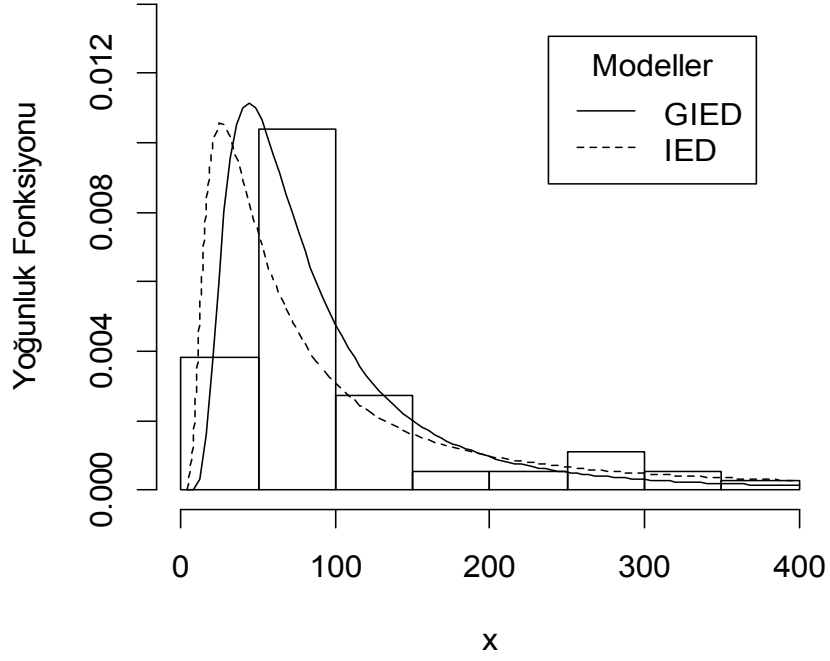
$$[82.1237, 125.4916] \quad (5.18)$$

olarak bulunur.

Böylece olabilirlik oran test istatistiği kullanılarak elde edilen $\hat{\alpha}$ ve $\hat{\lambda}$ tahmin değerlerinin güven aralığının içinde kaldığı görülür.

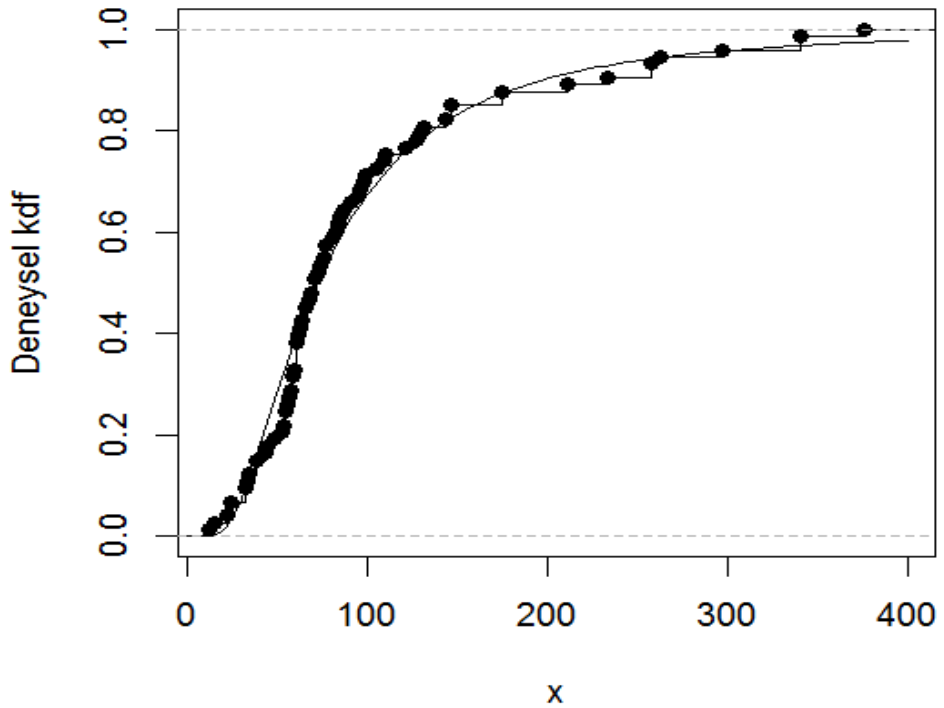
Guinea pigs verisi için $\hat{\alpha} = 2.569444$ şekil parametresi ve $\hat{\lambda} = 103.807681$ ölçek parametresi alınarak GIED ile $\hat{\lambda} = 60.45159$ ölçek parametresi alınarak IED in histogramı ve üzerindeki olasılık yoğunluk fonksiyonları tahminleri R 2.14 paket programında çizilmiş ve Şekil 5.4.' de verilmiştir.

5. GENELLEŞTİRİLMİŞ TERS ÜSTEL DAĞILIMIN TAHMİN YÖNTEMLERİ
KULLANILARAK DİĞER ÖMÜR DAĞILIMLARI İLE KARŞILAŞTIRILMASI
Göknur AYKANAT



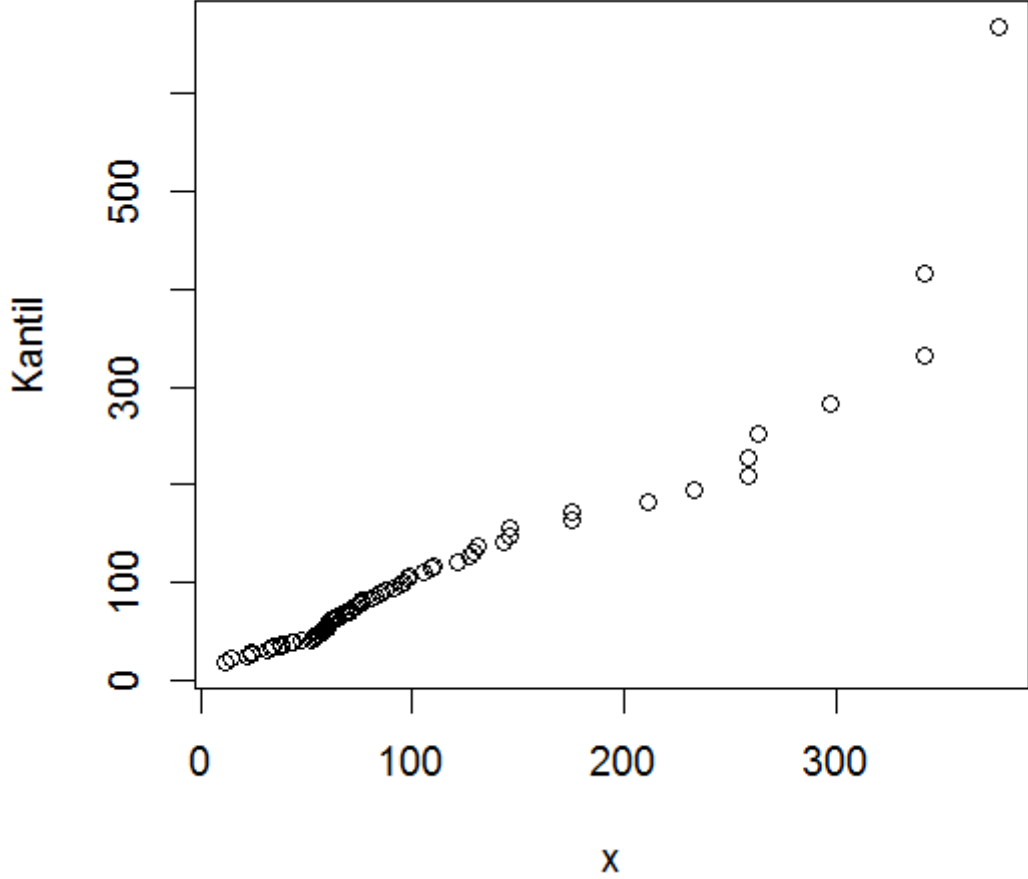
Şekil 5.4. Guinea pigs verisi için histogramı ve üzerindeki olasılık yoğunluk fonksiyonları tahminleri

Guinea pigs verisi için GIED in deneysel kümülatif dağılım fonksiyonu, Şekil 5.5.' de verilmiştir.



Şekil 5.5. Guinea pigs verisi için deneysel kümülatif dağılım fonksiyonu

Guinea pigs verisi için GIED in kantil fonksiyonu, Şekil 5.6.' da verilmiştir.



Şekil 5.6. Guinea pigs verisi için kantil fonksiyonu

5.3. Tahmin Ediciler ve Karşılaştırmaları

Ball bearings verisi için Mathematica 5.0 paket programında α ve λ nın en küçük kareler kestiricileri

$$\hat{\alpha}_{EKK} = 5.20007 \quad \hat{\lambda}_{EKK} = 127.571 \quad (5.19)$$

olarak hesaplanır.

Ball bearings verisi için Mathematica 5.0 paket programında α ve λ nın ağırlıklı en küçük kareler kestiricileri

5. GENELLEŞTİRİLMİŞ TERS ÜSTEL DAĞILIMIN TAHMİN YÖNTEMLERİ
KULLANILARAK DİĞER ÖMÜR DAĞILIMLARI İLE KARŞILAŞTIRILMASI
Göknur AYKANAT

$$\hat{\alpha}_{AEKK} = 5.62678 \quad \hat{\lambda}_{AEKK} = 131.564 \quad (5.20)$$

dir.

Ball bearings verisi için Mathematica 5.0 paket programında düzgün dağılımdan 5000 tane sayı üretilerek yaklaşık integral hesabıyla yapılan simülasyon çalışması ile momentler yöntemi kestiricileri

$$\hat{\alpha}_{MOM} = 14.8791 \quad \hat{\lambda}_{MOM} = 235.468 \quad (5.21)$$

dir.

Böylece (5.19), (5.20) ve (5.21) eşitliklerinden açıkça görülmektedir ki en kötü tahmin yöntemi (5.7) ve (5.9) ile verilen güven aralıklarının oldukça uzağında yer alan momentler yöntemidir.

Guinea pigs verisi için Mathematica 5.0 paket programında α ve λ nın en küçük kareler kestiricileri

$$\hat{\alpha}_{EKK} = 3.52642 \quad \hat{\lambda}_{EKK} = 125.955 \quad (5.22)$$

olarak bulunur.

Guinea pigs verisi için Mathematica 5.0 paket programında α ve λ nın ağırlıklı en küçük kareler kestiricileri

$$\hat{\alpha}_{AEKK} = 3.19791 \quad \hat{\lambda}_{AEKK} = 120.13 \quad (5.23)$$

şeklinde bulunur.

Guinea pigs verisi için de Mathematica 5.0 paket programında düzgün dağılımdan 5000 tane sayı üretilerek yaklaşık integral hesabıyla yapılan simülasyon çalışması ile momentler yöntemi kestiricileri

$$\hat{\alpha}_{MOM} = 4.38484 \quad \hat{\lambda}_{MOM} = 169.771 \quad (5.24)$$

dir.

Buradan (5.22), (5.23) ve (5.24) eşitliklerinden en kötü tahmin yöntemi (5.16) ve (5.18) ile verilen güven aralıklarının uzağında yer alan momentler yöntemidir.

5.4. GIED in Güvenilirlik Fonksiyonu Tahminleri

Genelleştirilmiş ters üstel dağılımın güvenilirlik fonksiyonu

$$R(t) = \left[1 - e^{\left(-\frac{\lambda}{t}\right)} \right]^{\alpha}, \quad t \geq 0, \alpha, \lambda > 0 \quad (5.25)$$

dir.

$R(t)$ nin Ball bearings verisi için maksimum olabilirlik tahmini

$$\hat{R}_1(t) = \left[1 - e^{\left(-\frac{129.996}{t}\right)} \right]^{5.30762} \quad (5.26)$$

dir.

$R(t)$ nin Ball bearings verisi için en küçük kareler tahmini

$$\hat{R}_2(t) = \left[1 - e^{\left(-\frac{127.571}{t}\right)} \right]^{5.20007} \quad (5.27)$$

şeklindedir.

$R(t)$ nin Ball bearings verisi için ağırlıklı en küçük kareler tahmini

$$\hat{R}_3(t) = \left[1 - e^{\left(-\frac{131.564}{t}\right)} \right]^{5.62678} \quad (5.28)$$

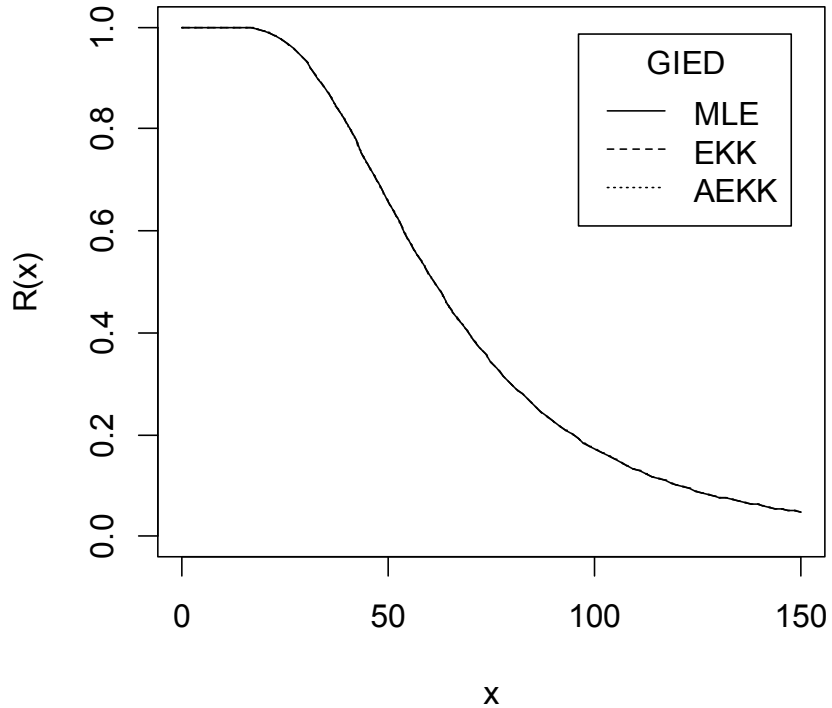
5. GENELLEŞTİRİLMİŞ TERS ÜSTEL DAĞILIMIN TAHMİN YÖNTEMLERİ
KULLANILARAK DİĞER ÖMÜR DAĞILIMLARI İLE KARŞILAŞTIRILMASI
Göknur AYKANAT

olarak bulunur.

$R(t)$ nin Ball bearings verisi için momentler yöntemi tahmini

$$\hat{R}_4(t) = \left[1 - e^{\left(\frac{-235.468}{t} \right)} \right]^{14.8791} \quad (5.29)$$

$\hat{\alpha}_{MLE} = 5.30762$ ve $\hat{\lambda}_{MLE} = 129.996$ için MLE $\hat{\alpha}_{EKK} = 5.20007$ ve $\hat{\lambda}_{EKK} = 127.571$ için EKK, $\hat{\alpha}_{AEKK} = 5.62678$ ve $\hat{\lambda}_{AEKK} = 131.564$ için AEKK güvenilirlik fonksiyonları Şekil 5.7.' de verilmiştir.



Şekil 5.7. GIED in güvenilirlik fonksiyonu grafikleri

Şekil 5.7.' den görüldüğü gibi GIED in MLE, EKK ve AEKK tahmin edicileri için güvenilirlik fonksiyonu azalandır ve hemen hemen çakışık bir eğri gösterir.

$R(t)$ nin Guinea pigs verisi için maksimum olabilirlik tahmini

$$\hat{R}_1(t) = \left[1 - e^{\left(-\frac{103.8076}{t} \right)} \right]^{2.5694} \quad (5.30)$$

dir.

$R(t)$ nin Guinea pigs verisi için en küçük kareler tahmini

$$\hat{R}_2(t) = \left[1 - e^{\left(-\frac{125.995}{t} \right)} \right]^{3.5264} \quad (5.31)$$

şeklindedir.

$R(t)$ nin Guinea pigs verisi için ağırlıklı en küçük kareler tahmini

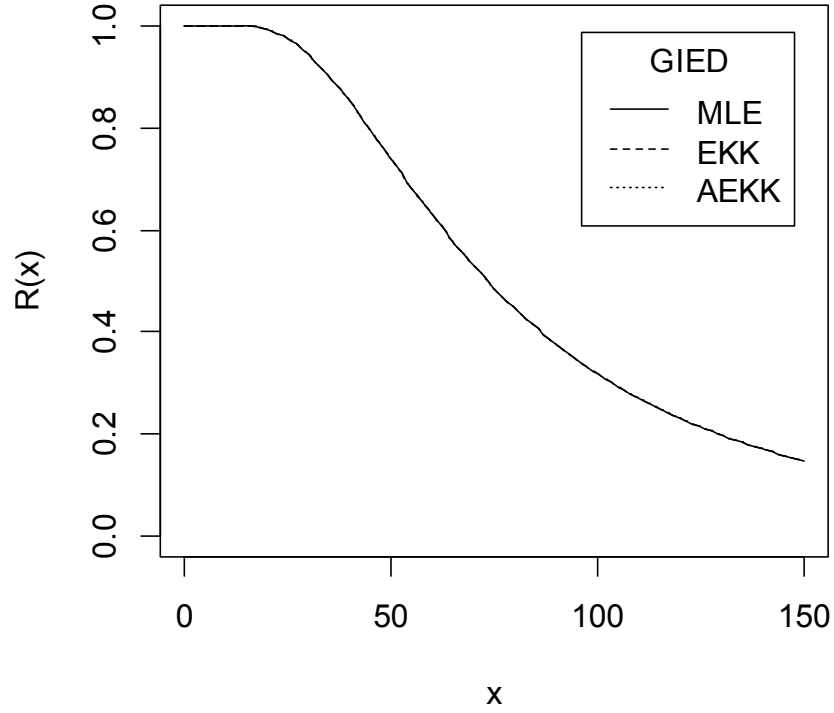
$$\hat{R}_3(t) = \left[1 - e^{\left(-\frac{120.13}{t} \right)} \right]^{3.1979} \quad (5.32)$$

olarak bulunur.

$R(t)$ nin Guinea pigs verisi için momentler yöntemi tahmini

$$\hat{R}_4(t) = \left[1 - e^{\left(-\frac{169.771}{t} \right)} \right]^{4.3848} \quad (5.33)$$

$\hat{\alpha}_{MLE} = 2.5694$ ve $\hat{\lambda}_{MLE} = 103.8076$ için MLE $\hat{\alpha}_{EKK} = 3.5264$ ve $\hat{\lambda}_{EKK} = 125.955$ için EKK, $\hat{\alpha}_{AEKK} = 3.1979$ ve $\hat{\lambda}_{AEKK} = 120.13$ için AEKK güvenilirlik fonksiyonları Şekil 5.8.' de verilmiştir.



Şekil 5.8. GIED in Guinea pigs verisi için güvenilirlik fonksiyonları

Şekil 5.8.' den güvenilirlik fonksiyonları azalan ve hemen hemen çakışiktır.

5.5. GIED in Tehlike Fonksiyonu Tahminleri

Genelleştirilmiş ters üstel dağılımın tehlike fonksiyonu

$$h(t) = \frac{f(t)}{R(t)} \quad (5.34)$$

eşitliğinden

$$h(t) = \left(\frac{\alpha\lambda}{t^2} \right) \frac{e^{\left(\frac{\lambda}{t}\right)}}{\left[1 - e^{\left(\frac{\lambda}{t}\right)} \right]}, \quad t \geq 0, \alpha, \lambda > 0 \quad (5.35)$$

dir.

$h(t)$ nin Ball bearings verisi için maksimum olabilirlik tahmini

$$\hat{h}_1(t) = \left(\frac{689.969}{t^2} \right) \frac{e^{\left(\frac{-129.996}{t} \right)}}{\left[1 - e^{\left(\frac{-129.996}{t} \right)} \right]} \quad (5.36)$$

dir.

$h(t)$ nin Ball bearings verisi için en küçük kareler tahmini

$$\hat{h}_2(t) = \left(\frac{663.378}{t^2} \right) \frac{e^{\left(\frac{-127.571}{t} \right)}}{\left[1 - e^{\left(\frac{-127.571}{t} \right)} \right]} \quad (5.37)$$

şeklindedir.

$h(t)$ nin Ball bearings verisi için ağırlıklı en küçük kareler tahmini

$$\hat{h}_3(t) = \left(\frac{740.281}{t^2} \right) \frac{e^{\left(\frac{-131.564}{t} \right)}}{\left[1 - e^{\left(\frac{-131.564}{t} \right)} \right]} \quad (5.38)$$

dir.

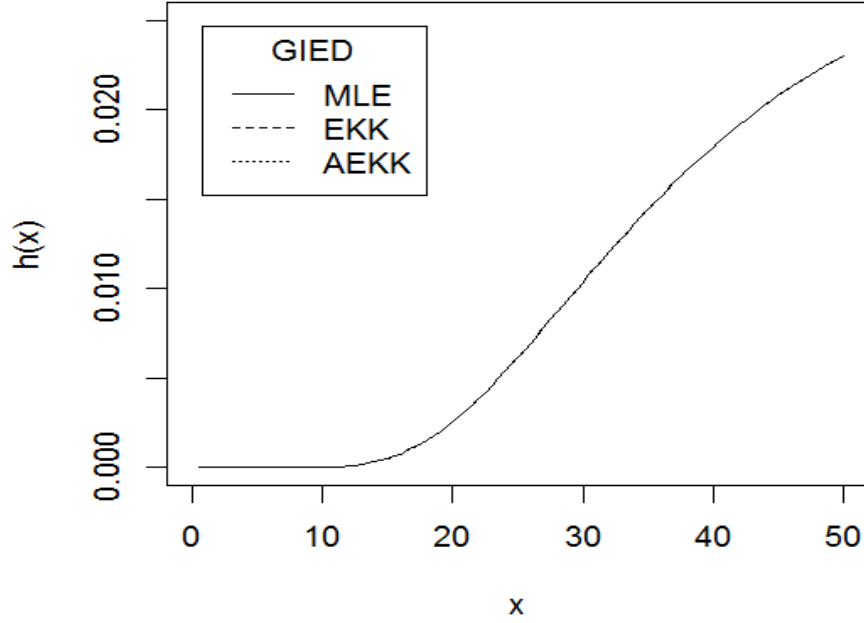
$h(t)$ nin Ball bearings verisi için momentler yöntemi tahmini

$$\hat{h}_4(t) = \left(\frac{3503.55}{t^2} \right) \frac{e^{\left(\frac{-235.468}{t} \right)}}{\left[1 - e^{\left(\frac{-235.468}{t} \right)} \right]} \quad (5.39)$$

elde edilir.

5. GENELLEŞTİRİLMİŞ TERS ÜSTEL DAĞILIMIN TAHMİN YÖNTEMLERİ
KULLANILARAK DİĞER ÖMÜR DAĞILIMLARI İLE KARŞILAŞTIRILMASI
Göknur AYKANAT

$\hat{\alpha}_{MLE} = 5.30762$ ve $\hat{\lambda}_{MLE} = 129.996$ için MLE $\hat{\alpha}_{EKK} = 5.20007$ ve $\hat{\lambda}_{EKK} = 127.571$ için EKK, $\hat{\alpha}_{AEKK} = 5.62678$ ve $\hat{\lambda}_{AEKK} = 131.564$ için AEKK tehlike fonksiyonları Şekil 5.9.' de verilmiştir.



Şekil 5.9. GIED in Ball bearings verisi için tehlike fonksiyonları

Şekil 5.9.' dan GIED in MLE, EKK ve AEKK tahmin edicileri için tehlike fonksiyonu artandır ve aynı güvenilirlik fonksiyonunda olduğu gibi hemen hemen çakışık bir eğri gösterir.

$h(t)$ nin Guinea pigs verisi için maksimum olabilirlik tahmini

$$\hat{h}_1(t) = \left(\frac{266.7232}{t^2} \right) \frac{e^{\left(\frac{-103.8076}{t} \right)}}{\left[1 - e^{\left(\frac{-103.8076}{t} \right)} \right]} \quad (5.40)$$

dir.

$h(t)$ nin Guinea pigs verisi için en küçük kareler tahmini

$$\hat{h}_2(t) = \left(\frac{444.1677}{t^2} \right) \frac{e^{\left(\frac{-125.955}{t} \right)}}{\left[1 - e^{\left(\frac{-125.955}{t} \right)} \right]} \quad (5.41)$$

şeklindedir.

$h(t)$ nin Guinea pigs verisi için ağırlıklı en küçük kareler tahmini

$$\hat{h}_3(t) = \left(\frac{384.1637}{t^2} \right) \frac{e^{\left(\frac{-120.13}{t} \right)}}{\left[1 - e^{\left(\frac{-120.13}{t} \right)} \right]} \quad (5.42)$$

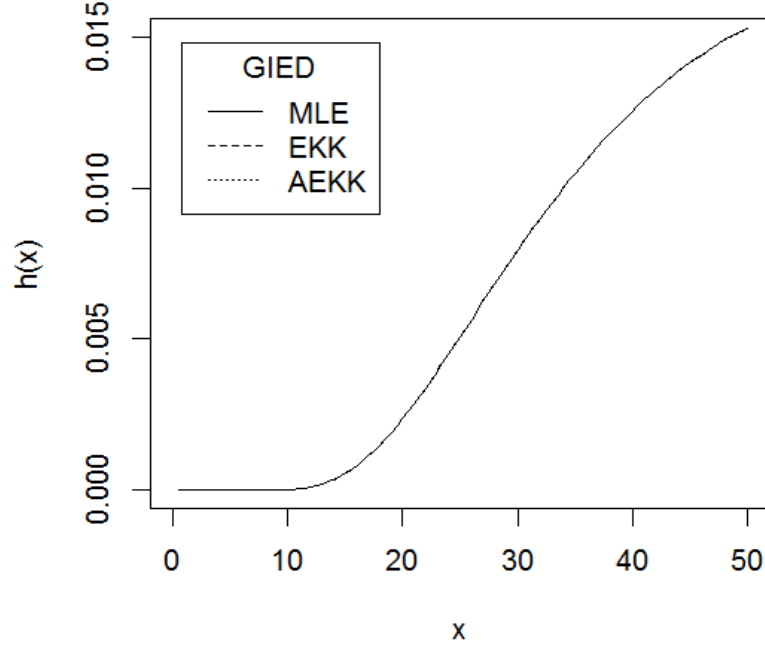
dir.

$h(t)$ nin Guinea pigs verisi için momentler yöntemi tahmini

$$\hat{h}_4(t) = \left(\frac{744.4111}{t^2} \right) \frac{e^{\left(\frac{-169.771}{t} \right)}}{\left[1 - e^{\left(\frac{-169.771}{t} \right)} \right]} \quad (5.43)$$

elde edilir.

$\hat{\alpha}_{MLE} = 2.5694$ ve $\hat{\lambda}_{MLE} = 103.8676$ için MLE $\hat{\alpha}_{EKK} = 3.5264$ ve $\hat{\lambda}_{EKK} = 125.955$ için EKK, $\hat{\alpha}_{AEKK} = 3.1979$ ve $\hat{\lambda}_{AEKK} = 120.13$ için AEKK tehlike fonksiyonları Şekil 5.10.' da verilmiştir.



Şekil 5.10. GIED in Guinea pigs verisi için tehlike fonksiyonları

Şekil 5.10.' dan GIED in MLE, EKK ve AEKK tahmin edicileri için tehlike fonksiyonu artandır ve hemen hemen çakışıktır.

5.6. Diğer Ömür Dağılımlarının Guinea Pigs Verisi İçin Karşılaştırılmaları

Guinea pigs verisi için GIED in yanında IED, üstel, gamma ve Weibull modelleri de kullanılmış ve parametre tahminleri, AIC, BIC, K-S Test, ve $\text{Log}(L)$ değerleri Çizelge 5.5.' de verilmiştir.

5. GENELLEŞTİRİLMİŞ TERS ÜSTEL DAĞILIMIN TAHMİN YÖNTEMLERİ
KULLANILARAK DİĞER ÖMÜR DAĞILIMLARI İLE KARŞILAŞTIRILMASI
Göknur AYKANAT

Çizelge 5.5. Guinea pigs verisi için AIC, BIC, K-S Test ve $Log(L)$ değerleri

S. No	Dağılım	Parametrelerin MLE Tahminleri	$Log(L)$	AIC	BIC	K-S
1	$GIED(\alpha, \lambda)$	$(\hat{\alpha}, \hat{\lambda}) = (2.5694, 103.8076)$	-397.0398	798.0796	802.6605	0.1073
2	$IED(\lambda)$	$\hat{\lambda} = 60.4515$	-408.4549	818.9098	821.2002	0.1883
3	$Exp(\lambda)$	$\hat{\lambda} = 99.8901$	-409.0974	820.1948	826.7757	0.2003
4	$Gamma(\alpha, \lambda)$	$(\hat{\alpha}, \hat{\lambda}) = (2.1083, 47.3786)$	-399.4929	802.9858	807.5667	0.8671
5	$Weibull(\alpha, \lambda)$	$(\hat{\alpha}, \hat{\lambda}) = (1.4028, 110.7486)$	-402.4992	808.9958	813.5793	0.1378

Üstel, Weibull ve Gamma dağılımlarının Guinea pigs verisi için histogramı ve üzerindeki olasılık yoğunluk fonksiyonları tahminleri Şekil 5.11.' de verilmiştir. Şekil 5.11.'e göre gamma modeli daha iyi bir tahmin vermektedir. Ayrıca AIC ve BIC kriterlerine ve Kolmogorov-Smirnov testine de bakıldığında aşağıdaki sonuçlar elde edilir:

AIC VE BIC Testleri değerlerine göre uygunluk sırası,

GIED GAMMA WEIBULL IED EXP

şeklindedir.

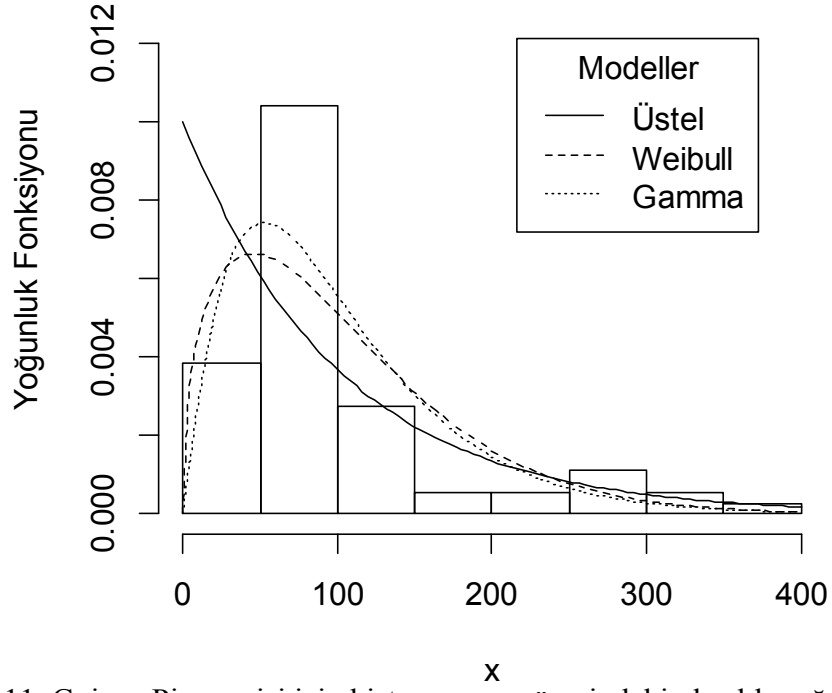
K-S Test değerlerine göre uygunluk sırası,

GIED WEIBULL IED EXP GAMMA

dir.

Test kriterlerine göre en uygun ömür dağılımının GIED olduğu görülmektedir.

5. GENELLEŞTİRİLMİŞ TERS ÜSTEL DAĞILIMIN TAHMİN YÖNTEMLERİ
KULLANILARAK DİĞER ÖMÜR DAĞILIMLARI İLE KARŞILAŞTIRILMASI
Göknur AYKANAT



Şekil 5.11. Guinea Pigs verisi için histogramı ve üzerindeki olasılık yoğunluk fonksiyonları tahminleri

5. GENELLEŞTİRİLMİŞ TERS ÜSTEL DAĞILIMIN TAHMİN YÖNTEMLERİ
KULLANILARAK DİĞER ÖMÜR DAĞILIMLARI İLE KARŞILAŞTIRILMASI
Göknur AYKANAT

6. SONUÇLAR VE ÖNERİLER

Bu çalışmada ömür modeli olarak geliştirilmiş ters üstel dağılımın özellikleri incelenmiştir.

İlk aşamada güvenilirlik teorisindeki temel kavramlar ayrıntılı olarak incelenmiştir.

İkinci aşamada geliştirilmiş ters üstel dağılım tanıtılarak özellikleri verilmiştir. Daha önceki çalışmalara ek olarak Bain ve Engelhardt (1991) ve Shaked ve Shanthikumar (2007) tarafından önerilen stokastik sıralamanın bazı özellikleri geliştirilmiş ters üstel dağılımın kümülatif dağılım fonksiyonuna uygulanmıştır. Momentleri Mathematica 5.0 paket programında hesaplanmış ve yorumları yapılmıştır. Ayrıca geliştirilmiş ters üstel dağılımın parametrelerine bağlı olarak maksimum olabilirlik tahmin edicilerinin simülasyon çalışması yapılmıştır. Bunlara ek olarak farklı tahmin yöntemleri bu dağılımla verilmiştir.

Üçüncü aşamada geliştirilmiş ters üstel dağılımın güvenilirlik ve tehlike fonksiyonları incelenmiş ve yorumlanmıştır. Bu dağılımı kullanarak *İlerleyen II. tip sansürlü örneklem* üretme yöntemleri verilmiştir.

Son olarak Leiblein ve Zelen (1956) dan alınan Ball bearing ve Bjerkadal (1960) tarafından önerilen Guinea pigs verileri kullanılarak geliştirilmiş ters üstel dağılım diğer dağılımlarla karşılaştırılmış ömür dağılımı olarak uygunluğu yorumlanmıştır. Her iki veri seti için de bu dağılımın dağılımsal özellikleri ayrıntılı olarak incelenmiştir ve geliştirilmiş ters üstel dağılımın ömür modeli olarak uygunluğu belirlenmiştir. Moment hesaplarında kullanışsız olduğu görülmüştür. Farklı yöntemlerle parametre tahminleri yapılmış momentler yöntemi ile elde edilen sonuçlar güven aralıklarının uzağında saptanmıştır.

Gelecek çalışmalarda geliştirilmiş ters üstel dağılımın *İlerleyen II. tip sansürlü örneklem* kullanılarak uygun bir modelleme yapılabilirliği önerilmiştir.

KAYNAKLAR

- ABOUAMMOH, A. M., AND ALSHINGITI, A. M., 2009. Reliability estimation of generalized inverted exponential distribution. *Journal of Statistical Computation and Simulation*, 79:11, 1301-1315.
- AKAIKE, H., 1974. "A new look at the statistical model identification". *IEEE Transactions on Automatic Control* 19 (6): 716–723. doi:10.1109/TAC.1974.1100705
- AKDİ, Y., 2005. *Matematiksel İstatistiğe Giriş*, ÖzBaran Ofset Matbaacılık, Ankara, s.527.
- ANDREWS, J.D., AND MOSS, T.R., 2002. *Reliability and Risk Assessment*. Second Edition. Professional Engineering Publishing Limited: London and Bury St Edmunds, UK. s.540.
- BAIN, L. J., ENGELHARDT, M., 1991. *Statistical Analysis of Reliability and Life-Testing Models*. 2nd Ed., Marcel Dekker Inc., New York.
- BALAKRISHNAN, N. AND AGGARWALA, R. (2000), *Progressive Censoring: Theory, Methods and Applications*, BirkhÄuser, Boston.
- BENTLEY, J. P., 1993. *An introduction to Reliability and Quality Engineering*. Logman Scientific and Technical. John Wiley & Sons, Inc. New York.
- BJERKEDAL, T., 1960. "Acquisition of resistance in guinea pigs infected with different doses of virulent tubercle bacilli," *Amer. J. Hygiene* 72, 130–148.
- CHEN Z. A., 2000. New two-parameter lifetime distribution with bathtub shape or increasing failure rate function. *Statistics & Probability Letters* 49:155–161.
- COHEN, A. C., 1993. Progressively censored samples in life testing, *Technometrics* 5, 327-339.
- FREUND, J. E., 1962. *Matematiksel İstatistik* (I. MILLER and M. MILLER editör). Altıncı Baskı, Çevik Matbaacılık, İstanbul, s.631.
- GRADSHTEYN, I. S., RYZHIK, I. M., 2000. *Table of Integrals, Series, and Products* (A. JEFFREY and D. ZWILLINGER editör). Seven edition, Academic pres, United States of America, s.1161.

- GUPTA, R. D., and KUNDU, D., 1999. Generalized exponential distributions. *Australian and New Zealand Journal of Statistics*, 41(2):173-188.
- GUPTA, R. D., KUNDU, D., 2007. Generalized exponential distribution: Existing results and some recent developments. *Journal of Statistical Planning and Inference*, 137, 3537-3547.
- GUPTA, R. D., KUNDU, D., 2001. Generalized exponential distributions: different methods of estimations. *Journal of Statistical. Computation. Simulation*. 64:4, 315-337.
- HAHN, G.J., and SHAPIRO, S. S., 1967. *Statistical Models in Engineering*. John Wiley & Sons, Inc. New York, Chichester, Brisbane, Toronto.
- KILLER A. Z., and KAMATH A. R., 1982. Reliability analysis of CNC Machine Tools, *Reliab. Eng.* 3, 449-473.
- KRISHNA, H., KUMAR, K., 2012. Reliability estimation in generalized inverted exponential distribution with progressively type II censored sample. *Journal of Statistical Computation and Simulation*, (in press) (DOI:10.1080/00949655.2011.647027).
- LIEBLEIN, J., and ZELEN, M., 1956. "Statistical investigation of the fatigue life of deep-groove ball bearings", *Journal of Research of the National Bureau of Standards*, 57, 273-316.
- LIN, C. T., DURAN, B. S., LEWIS, T. O., 1989. Inverted gamma as a life distribution. *Microelectron. Reliab, Elsevier Science* 29:4, 619-626.
- MEEKER, W. Q., and ESCOBAR, L. A., 1998. *Statistical Methods for Reliability Data*. John Wiley & Sons Inc. New York.
- MOSS, T.R., 2005. *The Reliability Data Handbook*. Professional Engineering Publishing Limited: London and Bury St Edmunds, UK. s.287.
- NADARAJAH, S., HAGHIGHI, F., 2011. An extension of the exponential distribution. *Statistics*, 45, 543-558.
- PRODNIKOV, A. P., BRYCHKOV, Y.A., MARICHEV, O. I. 1986. *Integrals and Series*, Vol.1, Taylor and Francis.
- SCHWARZ, G. E., 1978. "Estimating the dimension of a model". *Annals of Statistics* 6 (2): 461-464. doi:10.1214/aos/1176344136. MR 468014.

SHAKED, M. and SHANTIKUMAR, J. G., 2007. Stochastic Orders, Springer, New York.

ZHENMÍN, C., 2000. A new two-parameter lifetime distribution with bathtub shape or increasing failure rate function. Elsevier Science 49:2, 155-161.

ÖZGEÇMİŞ

1981 yılında Kadirli’de doğdu. İlk, orta ve lise öğrenimini Kozan’ da tamamladı. 2003 yılında Selçuk Üniversitesi Fen Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümünden mezun oldu. Aynı yıl Hatay’ da Matematik Öğretmeni olarak göreve başladı. 2008 yılında Harran Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalı’ nda Yüksek Lisansını tamamladı. 2010 yılında Çukurova Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü İstatistik Anabilim Dalı’ nda Yüksek Lisans öğrenimine başladı. Osmaniye ilinde görev yaptı ve halen Kozan Yusuf Baysal Anadolu Lisesinde Matematik Öğretmeni olarak görevine devam etmektedir.

EKLER

Tezde Kullanılan Mathematica Kodları

En küçük kareler kestiriminin hesaplanması için Mathematica 5.0 Kodları

Ball Bearings Veri Seti

x={17.88,28.92,33.0,41.52,42.12,45.60,48.40,51.84,51.96,54.12,55.56,67.80,68.64,68.64,68.88, 84.12,93.12,98.64,105.84,105.12,127.92,128.04,173.4}

f2[y_]:=1-((1-Exp[-lam/y])^alf-i/23)*((1-Exp[-lam/y])^alf)*Log[1-Exp[-lam/y]]
f3[y_]:=1-((1-Exp[-lam/y])^alf-i/23)*(Exp[-lam/y])*((1-Exp[-lam/y])^(alf-1))/y
FindRoot[{Sum[f3[x][[i]],{i,1,23}]==0,Sum[f2[x][[i]],{i,1,23}]==0},{alf,2},{lam,100}]

{17.88,28.92,33.,41.52,42.12,45.6,48.4,51.84,51.96,54.12,55.56,67.8,68.64,68.64,68.88,84.12,93.12,98.64,105.84,105.12,127.92,128.04,173.4}
{alf→5.20007,lam→127.571}

Guinea Pigs Veri Seti

x={12,15,22,24,24,32,32,33,34,38,38,43,44,48,52,53,54,54,55,56,57,58,58,59,60,60,60,60,61,62,63,65,65,67,68,70,70,72,73,75,76,76,81,83,84,85,87,91,95,96,98,99,105,109,110,121,127,129,131,143,146,146,175,175,211,233,258,258,263,297,341,341,376}

f2[y_]:=1-((1-Exp[-lam/y])^alf-i/73)*((1-Exp[-lam/y])^alf)*Log[1-Exp[-lam/y]]
f3[y_]:=1-((1-Exp[-lam/y])^alf-i/73)*(Exp[-lam/y])*((1-Exp[-lam/y])^(alf-1))/y
FindRoot[{Sum[f3[x][[i]],{i,1,73}]==0,Sum[f2[x][[i]],{i,1,73}]==0},{alf,1.5},{lam,90}]

{12,15,22,24,24,32,32,33,34,38,38,43,44,48,52,53,54,54,55,56,57,58,58,59,60,60,60,60,61,62,63,65,65,67,68,70,70,72,73,75,76,76,81,83,84,85,87,91,95,96,98,99,105,109,110,121,127,129,131,143,146,146,175,175,211,233,258,258,263,297,341,341,376}

{alf→3.52642,lam→125.955}

Ağırlıklı en küçük kareler kestiriminin hesaplanması için Mathematica 5.0

Kodları

Ball Bearings Veri Seti

x={17.88,28.92,33.0,41.52,42.12,45.60,48.40,51.84,51.96,54.12,55.56,67.80,68.64,68.64,68.88,84.12,93.12,98.64,105.84,105.12,127.92,128.04,173.4}

f2[y_]:=(((24^2)*25)/(i*(24-i)))*(1-((1-Exp[-lam/y])^alf)-i/23)*((1-Exp[-lam/y])^alf)*Log[1-Exp[-lam/y]]

f3[y_]:=(((24^2)*25)/(i*(24-i)))*(1-((1-Exp[-lam/y])^alf)-i/23)*(Exp[-lam/y])*((1-Exp[-lam/y])^(alf-1))/y

FindRoot[{Sum[f3[x][[i]],{i,1,23}]==0,Sum[f2[x][[i]],{i,1,23}]==0},{alf,2},{lam,100}]

{17.88,28.92,33.,41.52,42.12,45.6,48.4,51.84,51.96,54.12,55.56,67.8,68.64,68.64,68.88,84.12,93.12,98.64,105.84,105.12,127.92,128.04,173.4}

{alf→5.62678,lam→131.564}

Guinea Pigs Veri Seti

x={12,15,22,24,24,32,32,33,34,38,38,43,44,48,52,53,54,54,55,56,57,58,58,59,60,60,60,60,61,62,63,65,65,67,68,70,70,72,73,75,76,76,81,83,84,85,87,91,95,96,98,99,105,109,110,121,127,129,131,143,146,146,175,175,211,233,258,258,263,297,341,341,376}


```

f2[y_]:=(((74^2)*75)/(i*(74-i)))*(1-((1-Exp[-lam/y])^alf)-i/73 )*((1-Exp[-
lam/y])^alf)*Log[1-Exp[-lam/y]]
f3[y_]:=(((74^2)*75)/(i*(74-i)))*(1-((1-Exp[-lam/y])^alf)-i/73)*(Exp[-lam/y])*((1-
Exp[-lam/y])^(alf-1))/y
FindRoot[{Sum[f3[x][[i]],{i,1,73}]==0,Sum[f2[x][[i]],{i,1,73}]==0},{alf,1.5},{lam,9
0}}]

{12,15,22,24,24,32,32,33,34,38,38,43,44,48,52,53,54,54,55,56,57,58,58,59,60,60,60,60
,61,62,63,65,65,67,68,70,70,72,73,75,76,76,81,83,84,85,87,91,95,96,98,99,105,109,110
,121,127,129,131,143,146,146,175,175,211,233,258,258,263,297,341,341,376}

{alf→3.19791,lam→120.13}

```