T.C.
İNÖNÜ ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

# GRUPLAR VE CEBİRLER ÜZERİNDE ÇAPRAZLANMIŞ MODÜLLER

Fulya DURAK

YÜKSEK LİSANS TEZİ
MATEMATİK ANABİLİM DALI

MALATYA
Temmuz 2007

# BÖLÜM 1

# TEMEL KAVRAMLAR

## 1.1 Bazı Cebirsel Kavramlar

Bu bölümde, gruplar ve cebirler üzerinde çaprazlanmış modüllerin tanımlanması için gerekli olan bazı kavramları hatırlatalım .

**Tanım 1.1.1.** *$G$ boş olmayan bir küme ve $\star$ , $G$ de ikili işlem olsun.$(G, \star)$ cebirsel yapısı aşağıdaki aksiyomları sağlıyorsa bir* ***grup*** *denir [5].*

1. *$\star$ , $G$ de bir ikili işlem,*

2. *$\star$ işleminin , $G$ de birleşme özelliği vardır. Yani $\forall a, b, c \in G$ için,*
   *$a \star (b \star c) = (a \star b) \star c$ dir,*

3. *$\star$ işleminin, $G$ de birim elemanı vardır. Yani, $\forall a \in G$ için, $a \star e = e \star a = a$ olacak şekilde $\exists e \in G$ vardır,*

4. *$\star$ işlemine göre, $G$ deki her elemanın bir tersi vardır. Yani $\forall a \in G$ için,*
   *$a \star a^{-1} = a^{-1} \star a = e$ olacak şekilde $\exists a^{-1} \in G$ bulunabilir.*

**Örnek 1.1.1.** *$AutG$ ile gösterilen $G$ grubunun otomorfizmlerinin kümesi bir gruptur.*

1. *$f, h \in AutG$ olsun. $\forall x \in G$ için $f(x), h(x)$, $G$ nin elemanları ve $(G, *)$ bir grup olduğu için $(f \circ h)(x) = f(x) * h(x) \in G$ olur. O halde, $f \circ h \in AutG$ olup "$\circ$" bileşke işlemi $AutG$ de bir ikili işlemdir.*

2. *$\forall f, g, h \in AutG$ ve $\forall x \in G$ için,*

$$[(f \circ g) \circ h] (x) = (f \circ g) (x) * h (x) = [f (x) * g (x)] * h (x) ,$$
$$[f \circ (g \circ h)] (x) = f (x) * (g \circ h) (x) = f (x) * [g (x) * h (x)]$$

   *eşitliklerinden, $G$ de birleşme özelliği gözönüne alınarak, $AutG$ de birleşme özelliğinin sağlandığı görülür.*

3. $\forall x \in G$ için, $e(x) = e_G$ ile tanımlı ve $e \in AutG$ fonksiyonu birim elemanıdır. Gerçekten, $\forall f \in AutG$ ve $\forall x \in G$ için,

$$(f \circ e)(x) = f(x) * e(x) = f(x) \text{ ve } (e \circ f)(x) = e(x) * f(x) = f(x)$$

eşitlikleri sağlandığından $f \circ e = e \circ f = f$ dir.

4. Son olarak $AutG$ deki her elemanın tersinin varlığını gösterelim:

$f \in AutG$ olsun. $\forall x \in G$ için, $f^{-1}(x) = f(x)^{-1}$ ile $f^{-1} \in AutG$ fonksiyonunu tanımlayalım.$(G, *)$ bir grup olduğundan, bu tanım anlamlıdır ve $\forall x \in G$ için,

$$\left(f \circ f^{-1}\right)(x) = f(x) * f(x)^{-1} = e_G$$
$$\left(f^{-1} \circ f\right)(x) = f(x)^{-1} * f(x) = e_G$$

bulunur. Dolayısıyla tanımlanan $f^{-1}$ fonksiyonu $f$ nin tersidir.

**Tanım 1.1.2.** *$G$ bir grup ve $H$, $G$ nin boş olmayan bir alt kümesi olsun. $H$ nın bir* ***alt grup*** *olması için gerek ve yeter koşul*

1. $\forall a, b \in H$ için $ab \in H$ ve

2. $\forall a \in H$ için $a^{-1} \in H$ olmasıdır.

$H < G$ ile gösterilir [5].

**Tanım 1.1.3.** *$N < G$ olsun. $\forall a \in G, \forall x \in N$ için $axa^{-1} \in N$ ya da buna denk olan aşağıdaki ifadelerden biri sağlanırsa $N$ ye $G$ nin* ***normal alt grubu*** *denir ve $N \lhd G$ ile gösterilir [5].*

1. $\forall a \in G$ için $aNa^{-1} \subset N$ ,

2. $\forall a \in G$ için $aNa^{-1} = N$,

3. $\forall a \in G$ için $aN = Na$.

**Tanım 1.1.4.** *$N \lhd G$ olsun. $G$ nin $N$ ye göre sağ (veya sol ) denklik sınıfları kümesi $G/N$ ile gösterelim. $\forall aN, bN \in G/N$ için*

$$(aN)(bN) = (ab)N$$

*ile tanımlanan çarpma işlemine göre* $G/N$ *bir gruptur. Bu gruba R nin* $N$ *ye göre* ***bölüm grubu*** *denir [5].*

**Tanım 1.1.5.** $R \neq \emptyset$ *kümesi üzerinde tanımlı iki ikili işlem "+" ve "·" olsun. Aşağıdaki aksiyomları sağlayan* $(R, +, \cdot)$ *cebirsel yapısına bir* ***halka*** *denir [5, 19].*

1. $(R, +)$ *bir değişmeli gruptur,*

2. *"·" işleminin* $R$ *de birleşme özelliği vardır,*

3. *"·" işleminin "+" işlemi üzerine sağdan ve soldan dağılma özellikleri vardır, yani*

   $\forall a, b, c \in R$ *için* $a\,(b + c) = ab + ac$ *ve* $(a + b)\,c = ac + bc$ *dir.*

**Tanım 1.1.6.** $R$ *bir halka ve* $\emptyset \neq I \subset R$ *olsun.*

1. $\forall a, b \in I$ *için* $a - b \in I$ *ve*

2. $\forall a \in I$ *ve* $\forall r \in R$ *için* $ra \in I$ *(veya* $ar \in I$*) ise*

*ya R nin bir sol (veya* ***sağ****) ideali denir. Hem sol, hem de sağ bir ideale* ***iki taraflı ideal*** *veya kısaca* ***ideal*** *denir [5].*

**Örnek 1.1.2.** $\{0_R\}$ *ve* $R$*, her* $R$ *halkasının birer idealidir.Bunlara R nin* ***aşikar idealleri*** *denir.*

**Tanım 1.1.7.** *R halkasının, bir I idealine göre tanımlanan denklik sınıfları arasında*

$$(a + I) \oplus (b + I) = (a + b) + I, \;\; (a + I) \odot (b + I) = (ab) + I$$

*ile tanımlanan* $\oplus$, $\odot$ *işlemlerine göre* $R/I$ *bir halkadır. Bu halkaya R nin I idealine göre* ***bölüm halkası*** *denir [5].*

**Tanım 1.1.8.** *R birimli ve değişimli bir halka olsun. R üzerinde bir modül bir* $M$ *abel grubu ile* $M$ *de aşağıdaki özellikleri sağlayan bir*

$$R \times M \longrightarrow M$$

$$(r, m) \mapsto rm$$

*dış işlemine denir.* $r, r_1, r_2 \in R$ *ve* $m$, $m_1, m_2 \in M$ *olmak üzere*

1. $r\left(m_1+m_2\right)=rm_1+rm_2$
2. $\left(r_1+r_2\right)m=r_1m+r_2m$
3. $\left(r_1r_2\right)m=r_1\left(r_2m\right)$
4. $1.m=m$

*$R$ üzerinde bir modül $R$-**modül** olarak da adlandırılır [6, 11, 12, 17].*

**Örnek 1.1.3.** *$R$ birimli ve değişimli bir halka olmak üzere herhangi bir $A$ abel grubu, $r\in R$, $a\in A$ için*

$$R\times A\longrightarrow A$$
$$(r,a)\mapsto ra=0$$

*tanımlaması ile bir $R$- modül yapısı oluşturur [10, 12].*

**Tanım 1.1.9.** *$R$ ve $S$ iki halka olsun. Bir $M$ abel grubu hem sol $R$-modül hem de sağ $S$-modül ve her $r\in R, m\in M$ ve $s\in S$ için*

$$r(ms)=(rm)s$$

*özelliğini sağlıyor ise $M$ ye $(R-S)$-**bimodül** denir ve ${}_RM_S$ olarak gösterilir [10].*

**Önerme 1.1.1.** *$R$ değişimli halka ise her $M$ sol $R$-modülden $mr=rm$ tanımlaması ile bir sağ $R$-modül elde edilir ve $M$ bir $R$-bimodül olur [3, 10] .*

**Uyarı 1.1.1.**

1. *$R$ bir cisim ise $R-$modül bir vektör uzayı yapısı oluşturur.*
2. *Bir değişimli $R$ halkasının $N$ ideali, bir $R$-modüldür. Çünkü, $N$ ideal olduğundan bir abel grubu yapısı oluşturur ve her $r\in R$ için $rN\subset N$ dir. Dolayısıyla*

   $$R\times N\to N$$
   $$(r,n)\mapsto rn$$

   *çarpımı kapalıdır ve modül şartları sağlanır.*
3. *Her değişimli grup bir $\mathbb{Z}$- modüldür.*

4. *Sadece* 0 *dan oluşan toplamsal aşikar grup herhangi bir halka üzerinde modül yapısı oluşturur.*

5. $S$ *boştan farklı bir küme ve* $M$ *bir* $R$*-modül olsun.* $\mathcal{M}(S, M), S$ *den* $M$ *ye dönüşümlerin grubu bir* $R$*-modüldür.*

**Tanım 1.1.10.** $M$ *ve* $N$, *iki* $R$*-modül olsun.*

$$f : M \rightarrow N$$

*fonksiyonu her* $x, y \in M$ *ve* $r \in R$ *için,*

$$f(x + y) = f(x) + f(y)$$
$$f(rx) = rf(x)$$

*şartlarını sağlıyor ise* $f$ *ye bir* **R−*modül homomorfizmi*** *denir [3, 10, 17].*

**Tanım 1.1.11.** $M$ *bir* $R$*-modül olsun.* $M^{'}$, $M$ *nin alt grubu olmak üzere* $m^{'} \in M^{'}$ *ve her* $r \in R$ *için* $rm^{'} \in M^{'}$ *ise* $M^{'}$ *ye* $M$ *nin* ***alt modülü*** *denir [10, 12, 17] .*

**Örnek 1.1.4.** $f : M \rightarrow N$ *bir* $R$*-modül homomorfizmi olsun. Bu durumda*

$$cekf = \{m \in M : f(m) = 0\},$$

$M$ *nin bir alt modülüdür. Çünkü;* $cekf$, $M$*nin alt grubu ve* $m \in M$, $r \in R$ *için*

$$f(rm) = rf(m) = r0 = 0$$

*olduğundan* $rm \in cekf$ *dir. Ayrıca* $f(M)$*de* $N$ *nin alt modülüdür [10].*

**Tanım 1.1.12.** *Birimli* $(1_K \neq 0_K)$ *ve değişmeli bir* $K$ *halkasında sıfırdan farklı her* $x$ *öğesinin çarpma için bir tersi varsa, yani* $xx' = 1_K$ *olacak şekilde bir* $x' \in K$ *varsa* $K$ *ye* ***cisim*** *denir [17].*

**Tanım 1.1.13.** $(V, +)$ *bir değişmeli grup ve* $(K, +, .)$ *bir cisim olsun.*

$$K \times V \longrightarrow V$$
$$(a, \alpha) \mapsto a\alpha$$

*fonksiyonu var ve bu fonksiyon aşağıdaki aksiyomları sağlıyorsa* $V$ *ye* $K$ *üzerinde* ***vektör uzayı*** *denir [17];*

1. $\forall a, b \in K$ ve $\alpha \in V$ için $(ab)\,\alpha = a\,(b\alpha)$,

2. $\forall a, b \in K$ ve $\alpha \in V$ için $(a+b)\,\alpha = a\alpha + b\alpha$,

3. $\forall a \in K$ ve $\alpha, \beta \in V$ için $a\,(\alpha + \beta) = a\alpha + a\beta$,

4. $K$ nın birim elemanı $1$ ise $1\alpha = \alpha$.

**Tanım 1.1.14.** *Bir $M$ kümesi bir $K$ cismi üzerinde bir vektör uzayı ise ve*

$$M \times M \longrightarrow M$$
$$(m_1, m_2) \mapsto m_1 m_2$$

*çarpma işlemi de $m_1, m_2, m_3 \in M$, $k \in K$ olmak üzere*

$$m_1\,(m_2 + m_3) = m_1 m_2 + m_1 m_3,$$
$$(m_1 m_2)\,m_3 = m_1\,(m_2 m_3)\,,$$
$$(k m_1)\,m_2 = m_1\,(k m_2) = k\,(m_1 m_2)\,,$$

*özelliklerini sağlıyorsa $M$ kümesine $K$ cismi üzerinde bir **cebir**dir denir. Ayrıca $M$ değişimli k-cebiri aşağıdaki aksiyomları sağlayan*

$$M \times M \longrightarrow M$$
$$(m_1, m_2) \mapsto m_1 m_2$$

*bilineer dönüşümü ile bir **k-modüldür** [12, 17].*
*$\forall m_1, m_2 \in M$ ve $k \in K$ için*

1. $m_1 m_2 = m_2 m_1$

2. $(m_1 m_2)\,k = m_1\,(m_2 k)$.

**Örnek 1.1.5.** *Her değişimli $A$ halkası, bir $A$-cebiri olarak düşünülebilir.*

**Örnek 1.1.6.** *$R$ cismi, kendisi üzerinde birimli ve değişimli bir cebirdir [17].*

**Tanım 1.1.15.** *$A$ bir $R$-cebir, $\emptyset \neq B \subset A$ olmak üzere $b, b^{'} \in B, r \in R$ için*

1. $bb^{'} \in B$,

2. $b - b^{'} \in B$,

3. $br$ ve $rb \in B$

*şartları sağlanırsa $B$ ye, $A$ nın **altcebiri** denir. $B$, bir $R$-cebir olan $A$ nın altmodülüdür [10, 12].*

**Tanım 1.1.16.** *$U$ ve $V$, $K$ cismi üzerinde iki cebir olsun. $U$ dan $V$ ye $f : U \to V$ dönüşümü her $u, v \in U$ , $k \in K$ için*

- $f(u + v) = f(u) + f(v)$
- $f(uv) = f(u)f(v)$
- $f(1_U) = 1_V$
- $f(ku) = kf(u)$

*şartlarını sağlıyorsa $f$ dönüşümüne **cebir morfizmi** denir.*

**Tanım 1.1.17.** *$R$ değişimli halka, $A, B$ ve $G$, $R$-modül olmak üzere*

$$f : A \times B \to G$$

*fonksiyonu,*

$$f(a + a^{'}, b) = f(a, b) + f(a^{'}, b)$$
$$f(a, b + b^{'}) = f(a, b) + f(a, b^{'})$$
$$rf(a, b) = f(ra, b) = f(a, rb)$$

*şartlarını sağlıyorsa f ye **R-bilineer** dönüşüm denir [17].*

**Tanım 1.1.18.** *$G$ bir grup ve $S$ herhangi bir küme olmak üzere, her $x \in S, g, h \in G$ için*

$$G \times S \to S$$
$$(g, x) \mapsto g_x$$

*fonksiyonu*

1. $e_x = x$,

2. $(gh)_x = g_{(h_x)}$,

*şartlarını sağlıyorsa bu fonksiyona $G$ grubunun $S$ kümesi üzerine **sol etkisi** denir. Benzer olarak **sağ etki** de $_{x}g$ ile tanımlanır [14].*

**Örnek 1.1.7.** *$H$, bir $G$ grubunun altgrubu olmak üzere $H$ nın $G$ üzerine etkisi, eşlenik fonksiyonu adı verilen*

$$H \times G \to G$$
$$(h, x) \mapsto h_x = hxh^{-1}$$

*fonksiyonu ile tanımlanır. Bu fonksiyonun bir etki fonksiyonu olduğunu gösterelim.*

1. $e_x = exe^{-1} = x.$

2. $(gh)_x = (gh)x(gh)^{-1} = g(hxh^{-1})g^{-1} = g_{(h_x)}.$

**Tanım 1.1.19.** *$M$ ve $R$, $k$-cebir olmak üzere*

$$R \times M \to M$$
$$(r, m) \mapsto rm$$

*dönüşümü her $k \in k$, $m, m' \in M$, $r, r' \in R$ için*

1. $k(rm) = (kr)m = r(km),$

2. $r(m + m') = rm + rm',$

3. $(r + r')m = rm + r'm,$

4. $r(mm') = (rm)m' = m(rm'),$

5. $(rr')m = r(r'm),$

*şartlarını sağlıyorsa bu dönüşüme, cebir üzerinde **sol etki** denir. $r \in R$ nin $m \in M$ üzerine etkisi $r_m$ ile gösterilir [1]. Benzer şekilde sağ etki de tanımlanır ve $_{m}r$ ile gösterilir.*

**Tanım 1.1.20.** *Bir $\mathcal{C}$ **kategorisi** iki sınıftan oluşan bir sistemdir; bu sınıflar*

1. *Elemanlarına nesne ismi verilen ve $Ob\mathcal{C}$ ile gösterilen sınıf,*

2. *Elemanlarına morfizm denen ve $Mor\mathcal{C}$ ile gösterilen sınıftır.*

*$\mathcal{C}$' nin herbir morfizmine tanım ve değer bölgesi olarak adlandırılan iki nesne karşılık gelir. $X \in Ob\mathcal{C}$ ve $Y \in Ob\mathcal{C}$ nesnelerini sırasıyla tanım ve değer bölgesi olarak kabul eden bütün morfizmlerin kümesi $Mor(X, Y)$ ya da $\mathcal{C}(X, Y)$ ile gösterilir ve $f \in Mor(X, Y)$ ise $f : X \longrightarrow Y$ yazılır. $\mathcal{C}$' de kompozisyon işlemi tanımlıdır öyle ki $f \in Mor(X, Y)$ , $g \in Mor(Y, Z)$ ise $g \circ f$ (veya $gf$ ) kompozisyonu tanım bölgesi $X$ ve değer bölgesi $Z$ olan bir morfizmdir. Yukarıda tanımladığımız kavramlar aşağıdaki aksiyomları da sağlamalıdır:*

***KAT1(Birleşme):*** *Eğer $f \in Mor(X, Y)$, $g \in Mor(Y, Z)$ ve $h \in Mor(Z, W)$ ise*

$$h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f$$

*dir.*

***KAT2(Özdeş morfizmin varlığı):*** *Her $X \in Ob\mathcal{C}$ için öyle bir $1_X \in Mor(X, X)$ vardır ki eğer $f \in Mor(Y, X)$ ve $g \in Mor(X, Y)$ ise*

$$1_X \circ f = f \qquad ve \qquad g \circ 1_X = g$$

*dir [2].*

O halde; bir kategori şu üç özelliğe sahip olmalıdır:

1. Nesneler sınıfı,

2. Morfizmler sınıfı,

3. Morfizmlerin kompozisyonu.

**Örnek 1.1.8.** *Grupların **Grp** kategorisinde nesneler kümesi tüm gruplar, morfizmler grup morfizmleri ve kompozisyon işlemi de morfizmlerin bilinen "$\circ$" bileşke işlemidir. Yani,*

1. *Nesneler kümesi,*

$$Ob(Grp) = \{G : G grup\}$$

2. *Morfizmler kümesi,*

$$Mor(Grp) = \{f \mid f : G \longrightarrow G' \text{ grup morfizmi}\}$$

3. *Kompozisyon işlemi,*

$$Mor(X,Y) \times Mor(Y,Z) \longrightarrow Mor(X,Z)$$
$$f, g \mapsto g \circ f$$

*şeklinde tanımlıdır [2].*

**Örnek 1.1.9.** *Cebirlerin* ***Alg*** *kategorisinde nesneler kümesi tüm cebirler, morfizmler ise cebir morfizmleri ve morfizmler arasındaki işlem " ∘ " işlemidir.*

1. *Nesneler kümesi,*

$$Ob(Alg) = \{A : A \text{ cebir}\}$$

2. *Morfizmler kümesi,*

$$Mor(Alg) = \{f \mid f : A \longrightarrow A' \text{ cebir morfizmi}\}$$

3. *Kompozisyon işlemi,*

$$Mor(X,Y) \times Mor(Y,Z) \longrightarrow Mor(X,Z)$$
$$f, g \mapsto g \circ f$$

*şeklinde tanımlıdır.*

**Tanım 1.1.21.** *$\mathcal{C}$ bir kategori olsun. $\sigma : A \rightarrow B$ , $\mathcal{C}$ kategorisinde bir morfizm olsun. O zaman $\sigma$ aşağıdaki gibi adlandırılır [18]:*

1. *$\sigma$ bir monomorfizmdir gerek ve yeter şart her $A' \in Ob(C)$ için ve her $\gamma_1, \gamma_2 \in Mor_C(A', A)$ için $\sigma\gamma_1 = \sigma\gamma_2$iken $\gamma_1 = \gamma_2$ dir.*

2. *Herhangi iki paralel morfizm $f_1, f_2 : B \rightarrow C$ için $\sigma f_1 = \sigma f_2$ eşitliği, $f_1 = f_2$ olmasını gerektiriyorsa $\sigma$ bir epimorfizmdir.*

3. $\sigma$ bir izomorfizmdir gerek ve yeter şart $\sigma\tau = I$ ve $\tau\sigma = I$ olacak şekilde bir $\tau : B \to A$ morfizmi vardır. $\tau$, $\sigma$ nın tersi olarak adlandırılır.

4. Eğer $\sigma^2 = \sigma$ ise $\sigma$ ya idempotent (tek kuvvet) denir.

5. $\sigma, \mathcal{C}$ deki bir çift morfizmin coequaliserı ise $\sigma$ ya regüler epimorfizm denir, burada coequaliser kavramını hatırlatacak olursak,

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, shift left, "f"] \arrow[r, shift right, "g"'] & B \end{tikzcd}$$

morfizm çiftinin coequaliserı ,

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, shift left, "f"] \arrow[r, shift right, "g"'] & B \arrow[r, "j"] & T \end{tikzcd}$$

daki $j$ dir öyleki eğer

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, shift left, "f"] \arrow[r, shift right, "g"'] & B \arrow[r, "\alpha"] & X \end{tikzcd}$$

verildiğinde aşağıdaki diyagram değişimli olacak şekilde

$\exists \varphi : T \to X$ vardır [2] .

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, shift left, "f"] \arrow[r, shift right, "g"'] & B \arrow[r, "j"] \arrow[dr, "\alpha"'] & T \arrow[d, "\varphi"] \\ & & X \end{tikzcd}$$

# BÖLÜM 2

# GRUPLAR ÜZERİNDE ÇAPRAZLANMIŞ MODÜLLER

Çaprazlanmış modül kavramı ilk kez 1949 da J.H.C. Whitehead [20] tarafından "Combinatorial Homotopy Theory I, II" isimli çalışmalarında yer aldı. Daha sonraları bu kavram matematiğin bir çok alanında kullanıldı. Bunlardan bazıları Homotopi teori, Grupların Homolojisi ve Cohomolojisi, Cebirsel K-Teori, Bilgisayar Cebiri ve Diferensiyel Geometri dir.

**Tanım 2.0.22.** *$C$ ve $G$ birer grup,*

$$\partial\colon C \longrightarrow G$$

*grup homomorfizmi ve*

$$\begin{aligned} G \times C &\longrightarrow C \\ (g, c) &\longrightarrow g_c \end{aligned}$$

*$G$ nin $C$ üzerine etkisi ile ile birlikte, her $c, c' \in C$ ve $g \in G$ için*

$$\begin{aligned} &CM1) \quad \partial\left(g_c\right) = g\partial\left(c\right)g^{-1} \\ &CM2) \quad \partial c_{c'} = cc'c^{-1} \end{aligned}$$

*şartları sağlanıyorsa $C$ ye bir **çaprazlanmış modül** $(C, G, \partial)$ denir ve $(C, G, \partial)$ ile gösterilir. $\partial$ homomorfizmine çaprazlanmış modülün **sınır dönüşümü** denir. Ayrıca çaprazlanmış modül $(C, G, \partial)$, $C \xrightarrow{\partial} G$ ve bazen sınır dönüşümü gizlenerek (C,G) ile de gösterilebilir [4, 7, 13].*

**Örnek 2.0.10.** *$T$ bir grup ve $AutT, T$ grubunun otomorfizmlerinin bir grubu olmak üzere $(T, AutT, \partial)$ bir çaprazlanmış modüldür [14]. Gerçekten;*

$$\partial : T \to AutT$$
$$t \mapsto \partial(t) : T \to T$$
$$s \mapsto \partial(t)(s) = tst^{-1}$$

*şeklinde tanımlayalım.* $t, h \in T$ *için* $\partial(th) = \partial(t) \circ \partial(h)$ *olduğunu gösterirsek* $\partial$ *nin bir grup homomorfizması olduğunu göstermiş oluruz.*

$$\begin{aligned}(\partial(t) \circ \partial(h))(s) &= \partial(t)(\partial(h)(s)) = \partial(t)(hsh^{-1}) \\ &= t(hsh^{-1})t^{-1} = (th)s(h^{-1}t^{-1}) \\ &= (th)s(th)^{-1} = \partial(th)(s)\end{aligned}$$

$T$ *bir grup olduğundan birleşme özelliği vardır.Dolayısıyla bu yazdıklarımız anlamlıdır. Yani* $\partial$ *bir grup homomorfizmasıdır.*

$$AutT \times T \to T$$
$$(t, \theta) \mapsto \theta(t)$$

*şeklinde tanımlanan fonksiyonunun* $AutT$ *nin* $T$ *ye bir sol etki fonksiyonu olduğunu gösterelim.*

1. $t \in T$ *ve* $1 : T \to T$ *birim otomorfizm olmak üzere* $1_t = 1(t) = t$ *olup ilk şart sağlanır.*

2. $g, h \in AutT$ *ve* $t \in T$ *için* $(h(g_t)) = h(g(t)) = (h \circ g)(t) = (h \circ g)_t$ *olup ikinci şart da sağlanır.*

*Böylece fonksiyon bir etkidir.*

*Şimdi çaprazlanmış modül aksiyomlarının sağlandığını gösterelim.*

*CM1) $\theta \in AutT$ ve $t \in T$ olsun.*

$$\partial(\theta_t)(s) = \partial(\theta(t))(s) = \theta(t)s\theta(t)^{-1} \qquad \text{(I)}$$

*ve*

$$\begin{aligned}(\theta \circ \partial(t) \circ \theta^{-1})(s) &= (\theta \circ \partial(t))(\theta^{-1}(s)) = \theta(\partial(t)(\theta^{-1}(s))) \\ &= \theta(t\theta^{-1}(s)t^{-1}) = \theta(t)(\theta \circ \theta^{-1})(s)\theta(t^{-1}) \\ &= \theta(t)s\theta^{-1}(t) \qquad \text{(II)}\end{aligned}$$

*olup I ve II den $\partial(\theta_t) = \theta\partial(t)\theta^{-1}$ bulunur.*
*CM2) Her $t, s \in T$ için $\partial(t)_s = \partial(t)(s) = tst^{-1}$ olup ikinci şart da sağlanır. Sonuç olarak $(T, AutT, \partial)$ bir çaprazlanmış modüldür.*

**Örnek 2.0.11.** *$N, G$ grubunun normal alt grubu olmak üzere*

$$\begin{aligned}\partial = iç\colon N &\longrightarrow G \\ i &\mapsto i\end{aligned}$$

*içine (inclusion) homomorfizmi ve*

$$\begin{aligned}G \times N &\longrightarrow N \\ (g, n) &\mapsto g_n = gng^{-1}\end{aligned}$$

*şeklindeki $G$ nin $N$ üzerine etkisi, bir çaprazlanmış modül yapısı oluşturur. Gerçekten;*

$$\begin{aligned}CM1) \quad \partial(g_n) &= \partial\left(gng^{-1}\right) \\ &= gng^{-1} \qquad , \quad (\partial(n) = n) \\ &= g\partial(n)\, g^{-1} \\ CM2) \quad \partial(n)_{n'} &= n_{n'} \\ &= nn'n^{-1}\end{aligned}$$

*şeklinde çaprazlanmış modül aksiyomları sağlanır [6, 13, 14].*

**Örnek 2.0.12.** *$\mathbb{R}^n$, $\mathbb{R}$ cismi üzerinde bir vektör uzayı ve*

$$GL(\mathbb{R}^n) = \{f_r : f_r : \mathbb{R}^n \overset{lineer}{\longrightarrow} \mathbb{R}^n, \forall r \in \mathbb{R} \text{ ve } x \in \mathbb{R}^n,\ f_r(x) = rx\}$$

*kümesi* $\mathbb{R}^n$ *üzerinde genel lineer grup olmak üzere,*

$$\partial : \mathbb{R} \longrightarrow GL(\mathbb{R}^n)$$
$$r \mapsto f_r$$

*dönüşümü,* $\forall r_1, r_2 \in \mathbb{R}$ *için*

$$\begin{aligned}
\partial(r_1 r_2) &= f_{r_1 r_2} \\
&= f_{r_1 r_2}(x) \\
&= (r_1 r_2)x \\
&= r_1(r_2 x) = r_1(f_{r_2}(x)) \\
&= f_{r_1}(f_{r_2})(x) \ , \forall x \in \mathbb{R}^n \ \textit{için sağlandığından} \\
&= f_{r_1} \circ f_{r_2} = \partial(r_1) \circ \partial(r_2)
\end{aligned}$$

*olduğundan bir grup homomorfizmasıdır. Böylece*

$$GL(\mathbb{R}^n) \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$(f_r, r^{'}) \mapsto (f_r)_{r'} = r r^{'} r^{-1}$$

*etkisi ile birlikte çaprazlanmış modül yapısı oluşturur. Çaprazlanmış modül şartlarını sağladığını gösterelim;*

$$\begin{aligned}
CM1) \quad \partial((f_r)_{r'}) &= \partial(r r^{'} r^{-1}) \\
&= \partial(r)\partial(r^{'})\partial(r^{-1}) \\
&= f_r \partial(r^{'}) f_r^{-1} \\
CM2) \qquad (\partial r)_{r'} &= (f_r)_{r'} \\
&= r r^{'} r^{-1}
\end{aligned}$$

Aşağıdaki sonuç, çaprazlanmış modül aksiyomlarının direkt bir sonucudur.

**Önerme 2.0.2.** *$(T, G, \partial)$, bir çaprazlanmış modül olsun.*

***i)*** *cek$\partial$, $T$ nin merkezi olan $Z(T)$ nin bir alt grubudur.*

***ii)*** *$\partial T$, $G$ nin bir normal alt grubudur ve böylece cocek$\partial$ bulunur [13].*

**İspat.**

**i)** $G$ nin $T$ üzerine etkisi

$$\begin{aligned} G \times T &\to T \\ (g,t) &\mapsto g_t = gt \end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned} cek\partial &= \{k \in T : \partial(k) = 1_G\}, \\ Z(T) &= \{m \in T : \forall n \in T \text{ için } mn = nm\} \end{aligned}$$

olmak üzere $k \in cek\partial$, $n \in T$ için

$$\begin{aligned} kn &= knk^{-1}k \\ &= (\partial(k)_n)k \quad ((T,G,\partial) \text{ çaprazlanmış modül olduğundan}) \\ &= 1_n k \\ &= 1nk \\ &= nk \end{aligned}$$

olduğundan $cek\partial \subset Z(T)$ dir ve $k_1, k_2 \in cek\partial$ için,

$$\partial(k_1k_2^{-1}) = \partial(k_1)\partial(k_2^{-1}) = \partial(k_1)\partial(k_2)^{-1} = 1$$

olduğundan $k_1k_2^{-1}\partial$ olur. Böylece $cek\partial < Z(T)$ elde edilir.

**ii)** $(T,G,\partial)$ çaprazlanmış modül olduğundan

$$g\partial(t)g^{-1} = \partial(g_t)$$

olur ve etki fonksiyonundan $g_t \in T$ dir. Buradan

$$g\partial(t)g^{-1} = \partial(g_t) \in \partial(T)$$

elde edilir. Böylece $\partial(T) \trianglelefteq G$ dir. Dolayısıyla $G/\partial(T)$ bölüm grubu elde edilebilir. Bu da bize $cocek\partial$ yi verir. $\square$

**Önerme 2.0.3.** *Herhangi bir $(T, G,\partial)$ çaprazlanmış modül olmak üzere $T$ve $G$ nin normal alt grupları sırasıyla*

$$T^G = \{t \in T : g_t = t \quad \forall g \in G\}$$

*ve*

$$G(T) = \{g \in G : g_t = t \quad \forall t \in T\}$$

*dır .*

*Açık olarak $T^G$, $Z(T)$ nin alt grubudur. Dikkat edilirse $G(T)$, $(T, G, \partial)$ çaprazlanmış modülünün etkisini tanımlayan $G \times T$ den $T$ ye giden dönüşümün çekirdeğidir [13].*

**Tanım 2.0.23.** *Bir $(T, G, \partial)$ çaprazlanmış modülüne,*

1. *eğer $G$ nin $T$ üzerine etkisi faithful ise yani $G(T) = 1$ ise faithful denir,*

2. *eğer $coceк\partial = 1$ ise basit bağlantılı denir [13].*

**Örnek 2.0.13.** 1. *Herhangi bir $T$ grubuyla faithful çaprazlanmış modülü $T \times T \to T$ etkisi ile elde edilebilir. Gerçekten her $t, k \in T$ için*

$$G(T) = \{t \in T : t_k = k, \forall k \in T\} = \{1_T\}$$

*olduğunu kolayca gösterebiliriz, yani;*

$$t_k = tkt^{-1} = k \Rightarrow t = 1$$

*dir [13].*

2. *Grupların herhangi bir merkez genişlemesi (central extension)*

$$1 \longrightarrow K \longrightarrow X \stackrel{\tau}{\longrightarrow} G \longrightarrow 1$$

*ile $X \stackrel{\tau}{\longrightarrow} G$, basit bağlantılı çaprazlanmış modüldür. Yani merkez genişlemesi tam olduğundan $\tau(X) = G$ ve $G/\tau(X)$ vardır.*

$$G/\tau(X) = G/G \cong \{1_G\}$$

*dir, dolayısıyla $G/\tau(X) = cocek\tau = 1$ dir [13].*

**Tanım 2.0.24.** *$(T,G,\partial)$ ve $(T',G',\partial')$ iki çaprazlanmış modül olsun. Her $t\in T$ ve $g\in G$ için*

$$\varphi(g_t)=\psi(g)_{\varphi(t)}$$

*ve*

$$\begin{tikzcd} T \arrow[r, "\varphi"] \arrow[d, "\partial"'] \arrow[dr] & T' \arrow[d, "\partial'"] \\ G \arrow[r, "\psi"'] & G' \end{tikzcd}$$

*diyagramı değişimli ise, yani*

$$\psi\partial\,(t)=\partial^{'}(\varphi(t))$$

*olacak şekilde $\varphi\colon T\longrightarrow T'$ , $\psi\colon G\longrightarrow G'$ homomorfizmleri varsa*

$$(\varphi,\psi):\ (T,G,\partial)\longrightarrow(T',G',\partial')$$

*morfizmine çaprazlanmış modüller arasındaki morfizm denir [6, 13].*

O halde, $G=G'$ ve $\psi$ birim dönüşüm ise, $\varphi$ bir homomorfizma olduğundan $\varphi\,(g_t)=g_{\varphi(t)}$dir ve

$$\begin{tikzcd} T \arrow[r, "\varphi"] \arrow[d, "\partial"'] & T' \arrow[dl, "\partial'"] \\ G & \end{tikzcd}$$

diyagramı değişimli olduğundan, yani

$$\partial'\varphi\,(t)=\partial\,(t)$$

sağlandığından, $\varphi$ bir çaprazlanmış modül morfizmidir.

**Önerme 2.0.4.** *Çaprazlanmış modüllerin kategorisini oluşturalım ve bunu CrsM ile gösterelim. Bu kategorinin nesnelerinin kümesi;*

$$O_{CrsM}=\{(T,C,\partial):(T,C,\partial)\ \text{bir çaprazlanmış modül}\}$$

*ve morfizmlerinin kümesi;*

$$Mor(CrsM)=\{(\alpha,\phi):(T_1,C_1,\partial_1)\to(T_2,C_2,\partial_2):(\alpha,\phi)\ \text{çaprazlanmış modül morfizmi}\}$$

*dir [14].*

**Önerme 2.0.5.** *$(T, G, \partial)$ ve $(C, G, \beta)$ iki çaprazlanmış modül ve $(\varphi, Id) : (T, G, \partial) \to (C, G, \beta)$ çaprazlanmış modül morfizmi olsun. O zaman $C$ nin $T$ ye $\beta$ yoluyla etkisi ile $(T, C, \partial)$ çaprazlanmış modülü elde edilir.*

**İspat.** $\varphi$, çaprazlanmış modüllerin morfizmi olmak üzere

$$\begin{tikzcd} T \arrow[r, "\varphi"] \arrow[d, "\partial"'] & C \arrow[dl, "\beta"] \\ G & \end{tikzcd}$$

değişimli diyagramı vardır ve $C$, $T$ ye $\beta$ yoluyla etki eder. Yani t$\in T$ ve $c \in C$ için

$$\begin{aligned} C \times T &\to T \\ (c, t) &\mapsto c_t = \beta(c)_t \end{aligned}$$

şeklindedir.

$$\varphi(g_t) = g_{\varphi(t)} \qquad (\bigstar)$$

eşitliğinden çaprazlanmış modüllerin CM1 şartının sağlandığını gösterelim:

$$\begin{aligned} \varphi(c_t) &= \varphi(\beta(c)_t) \\ &= \beta(c)_{\varphi(t)} \qquad ( \ (\bigstar) \text{ dan}) \\ &= c_{\varphi(t)} \qquad (\varphi(t) \in C \text{ ve bu etki eşlenik etki olur.}) \\ &= c\varphi(t)c^{-1}. \end{aligned}$$

Ayrıca

$$\partial(t) = \beta\varphi(t)$$

eşitliği ve $(T, G, \partial)$ nin çaprazlanmış modül olması ile

$$\begin{aligned} \varphi(t)_{t'} &= \beta\varphi(t)_{t'} \\ &= \partial(t)_{t'} \\ &= tt^{'}t^{-1} \end{aligned}$$

olup çaprazlanmış modül aksiyomlarından CM2 de sağlanmış olur. □

**Tanım 2.0.25.** *$(T, G, \partial)$ çaprazlanmış modülünden kendisine bütün morfizmlerin kümesi, $(T, G, \partial)$ çaprazlanmış modülünün endomorfizmleri olarak adlandırılır ve $End(T, G, \partial)$ ile gösterilir.*

$$(\varphi, \psi) : (T, G, \partial) \longrightarrow (T', G', \partial')$$

*çaprazlanmış modül morfizmine, $\varphi$ ve $\psi$ grup izomorfizmi iken bir çaprazlanmış modül izomorfizmi denir. $(T, G, \partial)$ ve $(T', G', \partial')$ çaprazlanmış modülleri arasında $(\varphi, \psi)$ izomorfizmi varsa bu çaprazlanmış modüller izomorfiktir denir ve*

$$(T, G, \partial) \cong (T', G', \partial')$$

*şeklinde gösterilir [13].*

$$(T, G, \partial) = (T', G', \partial')$$

olduğunu varsayalım. $\varphi, T$ nin bir otomorfizmi ve $\psi$ de $G$ nin bir otomorfizmi ise $(\varphi, \psi)$ de $(T, G, \partial)$ nin bir otomorfizmidir. $(T, G, \partial)$ çaprazlanmış modüllerinin otomorfizmlerinin kümesi grup oluşturur ve bu grup $Aut\,(T, G, \partial)$ ile gösterilir. Ayrıca

$$\left(\varphi^{-1}, \psi^{-1}\right) : \left(T^{'}, G^{'}, \partial^{'}\right) \longrightarrow (T, G, \partial)$$

şeklinde tanımlı $(\varphi, \psi)^{-1}$ de bir çaprazlanmış modül morfizmidir. Bileşke işlemi ile

$$(\varphi, \psi)\,(\varphi, \psi)^{-1} = (I_T, I_G) = (\varphi, \psi)^{-1}\,(\varphi, \psi)$$

dir ve birim morfizmi basit olarak $(1, 1)$ olarak yazılabilir .

## 2.1 ALT ÇAPRAZLANMIŞ MODÜLLER

**Tanım 2.1.1.** *$(T, G, \partial)$ bir çaprazlanmış modül olsun. Eğer $(S, H, \partial')$ aşağıdaki şartları sağlıyorsa $(S, H, \partial')$ ,$(T, G, \partial)$ nin alt çaprazlanmış modülüdür denir [13].*

1. *$S, T$ nin ve $H$ da $G$ nin alt grubu,*

2. *$\partial' = \partial \mid S$ , $\partial$ nin $S$ ye kısıtlanmışı ve*

*3. $H$ nın $S$ ye etkisi, $G$ nin $T$ ye etkisi ile tanımlanır.*

*Bir alt çaprazlanmış modül için $(S, H, \partial') \leq (T, G, \partial)$ yazılır. Eğer $i : S \to T$ ve $j : H \to G$ dahil etme dönüşümleri ise*

$$(i, j) : (S, H, \partial') \to (T, G, \partial)$$

*bir çaprazlanmış modül morfizmidir.*

**Örnek 2.1.1.** *$N, G$ grubunun bir normal alt grubu ve $i$ dahil etme fonksiyonu, $Id_G$ birim fonksiyonun $N$ ye*

$$i = Id_G \mid_N : N \subset G \to G$$

*kısıtlanmışı olmak üzere $(N, G, i), (G, G, Id_G)$ çaprazlanmış modülünün alt çaprazlanmış modülünü oluşturur.*

**Önerme 2.1.1.** *$(S, H, \partial)$ ve $(S', H', \partial), (T, G, \partial)$ nin alt çaprazlanmış modülü olsun. $(S, H, \partial)$ ve $(S', H', \partial)$ nin arakesiti $(S, H) \cap (S', H')$,*

$$S \cap S' \xrightarrow{\partial} H \cap H' \quad \textit{de } (T, G, \partial) \textit{ nin alt çaprazlanmış modülüdür.}$$

**İspat.** $(S, H, \partial)$, $(S', H', \partial) \leq (T, G, \partial)$ olduğundan $S, S' < T$ ve $H, H' < G$ dir ve dolayısıyla $S \cap S' < T$, $H \cap H' < G$ dir. Buradan

$$S \cap S' \xrightarrow{\partial} H \cap H'$$

$\partial$ nin kısıtlanmışıdır. Buna göre $(S \cap S', H \cap H'), (T, G, \partial)$ nin bir alt çaprazlanmış modülüdür. □

**Önerme 2.1.2.** *$(S, H, \partial)$ ve $(S', H', \partial), (T, G, \partial)$ nin alt çaprazlanmış modülü olsun. $(S, H, \partial)$ ve $(S', H', \partial)$ nin birleşimi $(S, H) \cup (S', H')$ve $S \subset S'$, $H \subset H'$ olmak üzere*

$$S \cup S' \xrightarrow{\partial} H \cup H'$$

*de $(T, G, \partial)$ nin alt çaprazlanmış modülüdür.*

**İspat.** $(S, H, \partial)$, $(S', H', \partial) \leq (T, G, \partial)$ olduğundan $S, S' < T$ ve $H, H' < G$ dir ve $S \subset S'$ ve $H \subset H'$ olduğundan $S \cup S' < T$, $H \cup H' < G$ dir. Buradan

$$S \cup S' \xrightarrow{\partial} H \cup H'$$

$\partial$ nin kısıtlanmışıdır. Buna göre $(S \cup S', H \cup H'), (T, G, \partial)$ nin bir alt çaprazlanmış modülüdür. $\square$

**Önerme 2.1.3.** *Bir $X$ grubunun boştan farklı herhangi iki alt kümesi $A$ ve $B$ nin çarpım kümesi*

$$AB = \{ab : a \in A, b \in B\} \subseteq X$$

*dir.*

*$(T, G, \partial)$ nin $(S, H, \partial)$ alt çaprazlanmış modülü ve $(R, K, \partial)$ normal alt çaprazlanmış modülü ile $(SR, HK, \partial)$ üçlüsü $(T, G, \partial)$ nin bir alt çaprazlanmış modülüdür ve $(S, H)(R, K)$ şeklinde gösterilecektir [13].*

**İspat.** $R \trianglelefteq T$ ve $K \trianglelefteq G$ olduğu için $SR \leq T$ ve $HK \leq G$ dir. Sınır dönüşümü $\partial$, $SR$ den $HK$ ya morfizm kısıtlamasıdır. Ayrıca her $h \in H$, $k \in K$, $s \in S$, $r \in R$ için

$$\begin{aligned}(hk)_{sr} &= h_s \ h_{s^{-1}} \ (hk)_s (hk)_r \\ &= h_s \ h({}_{s^{-1}}k_s)(hk)_r\end{aligned}$$

elemanı $(R, K)$ nın $(T, G)$ de normal olma şartlarından (2) ve (3) e göre $SR$ ye aittir. Bu nedenle $G$ nin $T$ üzerine etkisi, $HK$ nın $SR$ üzerine etkisine indirgenir ve $(SR, HK), (T, G)$ nin bir alt çaprazlanmış modülüdür. $\square$

## 2.2 NORMAL ALT ÇAPRAZLANMIŞ MODÜLLER VE ÇAPRAZLANMIŞ BÖLÜM MODÜLLERİ

**Tanım 2.2.1.** *Eğer aşağıdaki şartlar sağlanırsa $(T, G, \partial)$ nin bir alt çaprazlanmış modülü olan $(S, H, \partial')$ ne bir* ***normal alt çaprazlanmış modülüdür*** *denir [13].*

1. $H$ , $G$ nin bir normal alt grubu,
2. her $g \in G$ ve $s \in S$ için $g_s \in S$,
3. her $h \in H, t \in T$ için $(h_t)_{t^{-1}} \in S$.

Bu durum $(S, H, \partial') \trianglelefteq (T, G, \partial)$ ile gösterilir

$(T,G,\partial)$ çaprazlanmış modülü eğer $(1,1,1)$ aşikar çaprazlanmış modül değil ve $(T,G,\partial)$ nin normal alt çaprazlanmış modülleri sadece $(1,1,1)$ ve $(T,G,\partial)$ ise $(T,G,\partial)$ ye basittir denir. $(1,1,1)$ aşikar çaprazlanmış modülü basitçe 1 olarak yazılır.

$(S,H,\partial')$,$(T,G,\partial)$ nin normal alt çaprazlanmış modülü olsun. $(T/S,G/H,\overline{\partial})$ üçlüsünü gözönünde bulundurursak

$$\begin{aligned}\overline{\partial} &: T/S \to G/H \\ &tS \mapsto \overline{\partial}(tS) = \partial(t)H = gH,\end{aligned}$$

$\partial$ tarafından indirgenmiştir. $G/H$ nın $T/S$ üzerine

$$\begin{aligned}G/H &\times T/S \to T/S \\ &(gH,tS) \mapsto g_{H(tS)} = (g_t)S\end{aligned}$$

ile verilen bir etkisi vardır.$(S,H,\partial')$ nün $(T,G,\partial)$ de normal olma şartları etkinin iyi tanımlı olmasını garanti eder.

$$\begin{aligned}CM1) \qquad \overline{\partial}(gH_{tS}) &= \overline{\partial}((g_t)S) \\ &= \partial(g_t)H \qquad (\overline{\partial} \text{ tanımından}) \\ &= (g\partial(t)g^{-1})H \qquad ((T,G,\partial) \text{ çaprazlanmış modül olduğundan}) \\ &= gH\partial(t)Hg^{-1}H \\ &= gH\overline{\partial}(tS)(gH)^{-1}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}CM2) \qquad \overline{\partial}(tS)_{t'S} &= \partial(t)H_{t'S} \\ &= (\partial(t)_{t'})S \qquad ((T,G,\partial) \text{ çaprazlanmış modül olduğundan}) \\ &= (tt't^{-1})S \\ &= tSt'St^{-1}S \\ &= tSt'S(tS)^{-1}\end{aligned}$$

Etki ve $\overline{\partial}$, CM1ve CM2 yi sağlar, böylece $(T/S,G/H,\overline{\partial})$ bir çaprazlanmış modüldür.

Bu çaprazlanmış modüle, **çaprazlanmış bölüm modülü** denir ve

$$(T, G, \partial)/(S, H, \partial')$$

ile gösterilir. Buna yakın bir gösterim de

$$\frac{(T, G, \partial)}{(S, H, \partial')}$$

dür.

$(\alpha, \Phi) : (T, G, \partial) \to (T', G', \partial')$ bir çaprazlanmış modül morfizmi olsun. $(\alpha, \Phi)$ nin çekirdeği $cek(\alpha, \Phi)$ , $(cek\alpha, cek\Phi, \partial)$ çaprazlanmış modülüdür. $cek(\alpha, \Phi)$ ,$(T, G, \partial)$ nin bir normal alt çaprazlanmış modülüdür. Eğer $cek(\alpha, \Phi)$ aşikar çaprazlanmış modül ise $(\alpha, \Phi)$ bir monomorfizmdir.

$(\alpha, \Phi)$ nin görüntüsü $\mathrm{Im}(\alpha, \Phi)$,$(\alpha(T), \Phi(G), \partial')$ çaprazlanmış modülüdür. $\mathrm{Im}(\alpha, \Phi)$, $(T', G', \partial')$ nün bir normal alt çaprazlanmış modülüdür.

Eğer $\mathrm{Im}(\alpha, \Phi) = (T', G', \partial')$ ise $(\alpha, \Phi)$ bir epimorfizmdir.

**Tanım 2.2.2.** *Çaprazlanmış modüllerin morfizmlerinin bir dizisi,*

$$1 \to (R, K, \partial') \xrightarrow{\langle i,j \rangle} (T, G, \partial') \xrightarrow{\langle \sigma,\tau \rangle} (U, Q, \overline{\partial}) \to 1$$

*bir kısa tam dizidir (short exact sequence) [13], eğer aşağıdaki şartlar sağlanıyorsa,*

1. $(i, j)$ *bir monomorfizm,*
2. $(\sigma, \tau)$ *bir epimorfizm ve*
3. $(T, G, \partial)$ *nin alt çaprazlanmış modülleri olan* $\mathrm{Im}(i, j)$ *ve* $cek(\sigma, \tau)$ *eşittir [13].*

Şimdi grup teorisindekine benzer olarak, çaprazlanmış modüller için izomorfizma teoremleri verilecektir.

**Teorem 2.2.1.** *(1. İzomorfizma Teoremi)*

$(\alpha, \phi) : (T, G, \partial) \to (T', G', \partial')$ *çaprazlanmış modüllerin morfizmi olsun.*
*O halde* $\mathrm{Im}(\alpha, \phi) \cong (T, G, \partial)/cek(\alpha, \phi)$ *[13].*

**İspat.**

$$
\begin{aligned}
\left\langle \overline{\alpha}, \overline{\phi} \right\rangle : (T, G, \partial) / (cek\alpha, cek\phi, \partial) &\rightarrow (\alpha(T), \phi(G), \partial^{'}) \\
(tcek\alpha, gcek\phi) &\mapsto \left(\overline{\alpha}(tcek\alpha), \overline{\phi}(gcek\phi)\right) = (\alpha(t), \phi(g))
\end{aligned}
$$

şeklinde bir fonksiyon tanımlayalım. Önce $\left\langle \overline{\alpha}, \overline{\phi} \right\rangle$ nin iyi tanımlı olduğunu yani

$$
\begin{aligned}
\left(t_1 cek\alpha, g_1 cek\phi, \overline{\partial}\right) &= (t_2 cek\alpha, g_2 cek\phi, \overline{\partial}) \\
&\text{iken} \\
(\overline{\alpha}(t_1 cek\alpha), \overline{\phi}(g_1 cek\phi)) &= \left(\overline{\alpha}(t_2 cek\alpha), \overline{\phi}(g_2 cek\phi)\right)
\end{aligned}
$$

olduğunu gösterelim.

$$t_1 cek\alpha = t_2 cek\alpha, \;\; g_1 cek\phi = g_2 cek\phi,$$

$$t_1 t_2^{-1} cek\alpha = cek\alpha, \;\; g_1 g_2^{-1} cek\phi = cek\phi,$$

ve dolayısıyla

$$t_1 t_2^{-1} \in cek\alpha, \; g_1 g_2^{-1} \in cek\phi$$

dir.

$$
\begin{aligned}
\alpha\left(t_1 t_2^{-1}\right) = 1_{T'} &\Rightarrow \alpha(t_1)\,\alpha(t_2)^{-1} = 1_{T'} \\
&\Rightarrow \alpha(t_1) = \alpha(t_2)
\end{aligned}
$$

olur.

$$
\begin{aligned}
\phi(\; g_1 g_2^{-1}) = 1_{G'} &\Rightarrow \phi(g_1)\,\phi(g_2)^{-1} = 1_{G'} \\
&\Rightarrow \phi(g_1) = \phi(g_2)
\end{aligned}
$$

olur. O halde $\left\langle \overline{\alpha}, \overline{\phi} \right\rangle$ iyi tanımlıdır. $\left\langle \overline{\alpha}, \overline{\phi} \right\rangle$ nın bir homomorfizma olduğunu gösterelim. $\forall (t_1, g_1), (t_2, g_2) \in (T, G)$ için

$$
\begin{aligned}
\left(\overline{\alpha}(t_1 cek\alpha . t_2 cek\alpha), \overline{\phi}(g_1 cek\phi . g_2 cek\phi)\right) &= \left(\overline{\alpha}(t_1 t_2 cek\alpha), \overline{\phi}(g_1 g_2 cek\phi)\right) \\
&= (\alpha(t_1 t_2), \phi(\; g_1 g_2))
\end{aligned}
$$

ve $\langle \alpha, \phi \rangle$ nin homomorfizma olduğu gözönüne alınırsa,

$$
\begin{aligned}
\left(\overline{\alpha}(t_1 cek\alpha . t_2 cek\alpha), \overline{\phi}(g_1 cek\phi . g_2 cek\phi)\right) &= (\alpha(t_1), \phi(g_1)) . (\alpha(t_2), \phi(g_2)) \\
&= \left(\overline{\alpha}(t_1 cek\alpha), \overline{\phi}(g_1 cek\phi)\right) \left(\overline{\alpha}(t_2 cek\alpha), \overline{\phi}(g_2 cek\phi)\right)
\end{aligned}
$$

elde edilir. O halde $\langle\overline{\alpha},\overline{\phi}\rangle$ bir homomorfizmadır. $\langle\overline{\alpha},\overline{\phi}\rangle$ nin 1-1 olduğunu gösterelim.

$$\begin{aligned}\left(\overline{\alpha}\left(t_1 ce k\alpha\right),\overline{\phi}\left(g_1 cek\phi\right)\right) &= \left(\overline{\alpha}\left(t_2 cek\alpha\right),\overline{\phi}\left(g_2 cek\phi\right)\right)\\ \left(\alpha\left(t_1\right),\phi\left(g_1\right)\right) &= \left(\alpha\left(t_2\right),\phi\left(g_2\right)\right)\end{aligned}$$

ise

$$\begin{aligned}&\Rightarrow\ \alpha\left(t_1\right)=\alpha\left(t_2\right),\phi\left(g_1\right)=\phi\left(g_2\right)\\ &\Rightarrow\ \alpha\left(t_1\right)\alpha\left(t_2\right)^{-1}=\alpha\left(t_1t_2^{-1}\right)=1_{T'},\ \phi\left(g_1\right)\phi\left(g_2\right)^{-1}=\phi\left(g_1g_2^{-1}\right)=1_{G'}\\ &\Rightarrow\ t_1t_2^{-1}\in cek\alpha,\ g_1g_2^{-1}\in cek\phi\\ &\Rightarrow\ t_1cek\alpha=t_2cek\alpha,\ g_1cek\phi=g_2cek\phi\end{aligned}$$

olduğundan $\langle\overline{\alpha},\overline{\phi}\rangle$ 1-1 dir. Son olarak $\langle\overline{\alpha},\overline{\phi}\rangle$ nin örten olduğunu gösterelim. $(\alpha(T),\phi(G))$ nin herhangi bir elemanı, $(t,g)\in(T,G)$ olmak üzere $(\alpha(t),\phi(g))\in(\alpha(T),\phi(G))$ dir. $(tcek\alpha, gcek\phi)\in(T,G)/cek\langle\alpha,\phi\rangle$ olduğu için $\left(\overline{\alpha}\left(tcek\alpha\right),\overline{\phi}\left(gcek\phi\right)\right)=(\alpha(t),\phi(g))$ olur. Dolayısıyla $\langle\overline{\alpha},\overline{\phi}\rangle$ bir izomorfizmadır. □

**Teorem 2.2.2.** *(2. İzomorfizma Teoremi)*

*$(R,K,\partial),(T,G,\partial)$ nin bir normal alt çaprazlanmış modülü olsun. Bu durumda $(T,G)/(R,K)$ bölümünün herbir alt çaprazlanmış modülü $(S,H)/(R,K)$ formundadır. Burada $(R,K)\leq(S,H)\leq(T,G)$ dir. Ek olarak $(S,H)/(R,K)\trianglelefteq(T,G)/(R,K)$ olması için gerek ve yeter şart $(S,H)\trianglelefteq(T,G)$ olmasıdır ve eğer bu şart sağlanıyor ise*

$$\frac{(T,G)/(R,K)}{(S,H)/(R,K)}\cong\frac{(T,G)}{(S,H)}$$

*dır [13].*

**İspat.** $(\alpha,\phi):(T,G)\longrightarrow(T,G)\,/\,(R,K)=(T/R,G/K)$ örten çaprazlanmış modül morfizmidir. $\overline{T}=T/R$, $\overline{G}=G/K$, $\overline{S}=S/R$, $\overline{H}=H/K$ olmak üzere

$$\begin{aligned}(\overline{\alpha},\overline{\phi}):(T,G)\ &\longrightarrow\ \frac{(T,G)\,/\,(R,K)}{(S,H)\,/\,(R,K)}=\left(\overline{T},\overline{G}\right)/\left(\overline{S},\overline{H}\right)\\ (t,g)\ &\mapsto\ (\alpha(t),\phi(g))\,(R,K)\end{aligned}$$

şeklinde $(\overline{\alpha},\overline{\phi})$ fonksiyonunu tanımlayalım. $\forall\left(\overline{t},\overline{g}\right)\in\left(\overline{T},\overline{G}\right)$ için $(\alpha(t),\phi(g))=\left(\overline{t},\overline{g}\right)$ olacak şekilde $\exists\,(t,g)\in(T,G)$ bulunabilir. Şu halde $\left(\overline{T},\overline{G}\right)/\left(\overline{S},\overline{H}\right)$

ın herhangi bir elemanı $\left(\overline{tS}, \overline{gH}\right) = (\alpha(t), \phi(g))\left(\overline{S}, \overline{H}\right) = \left(\overline{\alpha}(t), \overline{\phi}(g)\right)$ olduğundan $(\overline{\alpha}, \overline{\phi})$ örtendir. $(\alpha, \phi)$ nin homomorfizma olduğu ve sınıf çarpımı gözönüe alınırsa $\forall(t_1, g_1), (t_2, g_2) \in (T, G)$ için

$$\begin{aligned}(\overline{\alpha}(t_1t_2), \overline{\phi}(g_1g_2)) &= (\alpha(t_1t_2), \phi(g_1g_2))\left(\overline{S}, \overline{H}\right)\\ &= (\alpha(t_1), \phi(g_1))\left(\overline{S}, \overline{H}\right).(\alpha(t_2), \phi(g_2))\left(\overline{S}, \overline{H}\right)\\ &= \left(\overline{\alpha}(t_1), \overline{\phi}(g_1)\right).\left(\overline{\alpha}(t_2), \overline{\phi}(g_2)\right)\end{aligned}$$

dir ve $(\overline{\alpha}, \overline{\phi})$ homomorfizmadır. Şimdi $cek(\overline{\alpha}, \overline{\phi})$ yi bulalım. Bir $(t, g) \in (T, G)$ nin $cek(\overline{\alpha}, \overline{\phi})$ nin elemanı olması için gerek ve yeter koşul

$$\left(\overline{\alpha}(t), \overline{\phi}(g)\right) = (\alpha(t), \phi(g))\left(\overline{S}, \overline{H}\right) = \left(\overline{S}, \overline{H}\right)$$

olmasıdır. Buradan da $(\alpha(t), \phi(g)) \in \left(\overline{S}, \overline{H}\right) \Leftrightarrow (t, g) \in (S, H)$ bulunur. Böylece $cek(\overline{\alpha}, \overline{\phi}) = (S, H)$ elde edilir. $(\overline{\alpha}, \overline{\phi}) : (T, G) \to \left(\overline{T}, \overline{G}\right) / \left(\overline{S}, \overline{H}\right)$, çekirdeği $(S, H)$ olan örten homomorfizma olduğundan 1. izomorfizma teoreminden $(T, G) / (S, H) \cong \left(\overline{T}, \overline{G}\right) / \left(\overline{S}, \overline{H}\right)$ bulunur ve $\left(\overline{T}, \overline{G}\right) = (T, G) / (R, K)$, $\left(\overline{S}, \overline{H}\right) = (S, H) / (R, K)$ olduğundan istenen elde edilir. □

**Teorem 2.2.3.** *(3. İzomorfizma Teoremi) )*

*$(S, H) \leq (T, G)$ ve $(R, K) \trianglelefteq (T, G)$ olsun. O zaman*

$$(S, H) \cap (R, K) \trianglelefteq (S, H)\, ve\, \frac{(S, H)}{(S, H) \cap (R, K)} \cong \frac{(S, H)(R, K)}{(R, K)}$$

*dır [13].*

**İspat.** $(R, K) \trianglelefteq (T, G)$ ve $(S, H) \leq (T, G)$ olduğundan $(S, H)(R, K) \leq (T, G)$ dir.

$$(R, K) \subset (S, H)(R, K) \subset (T, G)$$

olduğundan, $(R, K) \trianglelefteq (S, H)(R, K)$ olduğu açıktır. O halde $(S, H)(R, K) / (R, K)$ tanımlıdır. $(S, H) \cap (R, K) \trianglelefteq (S, H)$ olduğunu görmek de kolaydır. O halde $(S, H) / (S, H) \cap (R, K)$ da tanımlıdır. $\forall(s, h) \in (S, H)$ için $(\alpha(s), \phi(h)) = (s, h)(R, K)$ ile

$$\langle\alpha, \phi\rangle : (S, H) \longrightarrow (S, H)(R, K) / (R, K)$$

fonksiyonunu tanımlayalım. $\langle\alpha,\phi\rangle$ nin örten olduğunu gösterelim.
$(s,h)(r,k)\in(S,H)(R,K)$ olmak üzere

$$((s,h)(r,k))(R,K)=(s,h)(R,K)=(\alpha(s),\phi(h))$$

dır. $\langle\alpha,\phi\rangle$ nin bir homomorfizma olduğunu gösterelim. $\forall(s_1,h_1),(s_2,h_2)\in(S,H)$ için

$$\begin{aligned}(\alpha(s_1s_2),\phi(h_1h_2)) &= (s_1s_2,h_1h_2)(R,K)\\ &= ((s_1,h_1)(R,K))((s_2,h_2)(R,K))\\ &= (\alpha(s_1),\phi(h_1))(\alpha(s_2),\phi(h_2))\end{aligned}$$

dir. Şimdi *cek* $\langle\alpha,\phi\rangle$ yi bulalım. $(s,h)\in(S,H)$ için

$$\begin{aligned}(s,h)\langle\alpha,\phi\rangle &\Leftrightarrow (\alpha(s),\phi(h))=(s,h)(R,K)=(R,K)\\ &\Leftrightarrow (s,h)\in(S,H)\cap(R,K)\end{aligned}$$

olduğundan *cek* $\langle\alpha,\phi\rangle=(S,H)\cap(R,K)$ olur. 1. izomorfizma teoreminden

$$(S,H)/(S,H)\cap(R,K)\cong(S,H)(R,K)/(R,K)$$

olur. $\square$

# BÖLÜM 3

# CEBİRLER ÜZERİNDE ÇAPRAZLANMIŞ MODÜLLER

Whitehead in gruplar üzerinde tanımladığı çaprazlanmış modül kavramı, diğer cebirsel yapılarda da büyük öneme sahiptir.

**Tanım 3.0.3.** *$R$ değişimli bir $k$- cebir ve $C$ bir $R$- cebir olmak üzere,*

$$\partial\colon C \longrightarrow R,$$

*$R$- cebir morfizmi olsun. Her $c, c' \in C$ ve $r \in R$ için*

$$\begin{aligned} LCM) \qquad & c.\partial(c') = cc' \\ RCM) \qquad & \partial(c).c' = cc' \end{aligned}$$

*şartları sağlanıyor ise $(C, R, \partial)$ üçlüsü **cebirlerin çaprazlanmış modülüdür** denir [16, 18].*

**Önerme 3.0.1.** *$R$ bir değişimli $k$- cebir ve $C$ bir $R$-cebir olmak üzere*

$$\partial\colon C \longrightarrow R,$$

*$R$-cebir morfizmi ise*

$$\begin{aligned} \partial(rc) &= r\partial(c) \\ \partial(cr) &= \partial(c)r \end{aligned}$$

*olur.*

**İspat.** $R$ değişimli $K$- cebiri,

$$\begin{aligned} R \times R &\longrightarrow R \\ (r, r') &\mapsto rr' \end{aligned}$$

$K$-bilineer birleşimli çarpımı ile bir $R$ $K$-bimodülüdür Ayrıca $R$ bir $K$-cebir ise, $C$ $R$- cebiri ile

$$C \times C \longrightarrow C$$
$$(c, c') \mapsto cc'$$

$R$-bilineer birleşimli çarpımını sağlayan $R$- bimodülü kastedilir. $R$ değişimli halka ve $C$ bir sol $R$-modül ise $C$ ye $R$-bimodül yapısı

$$C \times R \longrightarrow C, \ cr = rc$$

özelliği ile verilir. Bu, $C$ yi bir sağ $R$-modül yapar ve $R$ değişimli halka olduğundan $\forall r, r' \in R$ ve $c \in C$ için

$$(rc)r' = r'(rc) = (r'r)c = r(r'c) = r(cr')$$

olur. $R$ aynı zamanda bir $R$-cebir olduğundan

$$\partial \colon C \longrightarrow R$$

$R$-cebir morfizmi için

$$\partial(rc) = r\partial(c)$$

olur ve $C$, $R$-bimodül olduğundan $cr = rc$ dir. Buradan

$$\partial(cr) = \partial(rc) = r\partial(c)$$

olur. $r, \partial(c) \in R$ ve $R$ değişimli halka olduğundan

$$\partial(cr) = \partial(cr) = r\partial(c) = \partial(c)r$$

olur. $\square$

**Örnek 3.0.1.** *$R$ bir $k$-cebir ve $I$, $R$ nin ideali olsun .*

$$iç \colon I \longrightarrow R$$
$$i \mapsto i$$

*dahil etme dönüşümünü ele alalım. Bu durumda çaprazlanmış modül aksiyomları*

$$LCM) \quad i.\partial\left(i'\right) = i.i'$$
$$RCM) \quad \partial(i).i' = i.i'$$

*şeklinde kolayca sağlanır. Dolayısıyla, $(I, R, i\c{c})$ bir çaprazlanmış modül yapısı oluşturur.*

*Tersine, herhangi bir $\partial\colon C \longrightarrow R$ çaprazlanmış $R$-modül verildiğinde $\partial C = I$ nın $R$ de ideal olduğu kolayca gösterilebilir.*

*$\partial C$ nin $R$ de bir ideal olduğunu göstermek için, $\partial C$ nin $R$ ile çarpımı altında kapalı olduğunu göstermemiz yeterlidir. $(C, R, \partial)$ çaprazlanmış modül olduğundan,*

$$R \times C \longrightarrow C$$
$$(r, c) \mapsto r.c$$

*etki fonksiyonu gereğince, $r.c \in C$ ve $\partial\left(r.c\right) \in \partial C$ dir. Ayrıca, $\partial c \in \partial C$ ve $r \in R$ için,*

$$r\partial c = \partial\left(r.c\right) \in \partial C$$

*eşitliği vardır.*

*Benzer olarak*

$$\partial\left(c\right) r = \partial\left(c.r\right) \in \partial C$$

*bulunur. Dolayısıyla $\partial C$, $R$ de bir idealdir.*

**Tanım 3.0.4.** *$(C, R, \partial)$ ve $(C', R', \partial')$ iki çaprazlanmış modül olsun.*

$$\theta\left(r.c\right) = \psi\left(r\right).\theta\left(c\right),$$
$$\theta\left(c.r\right) = \theta\left(c\right).\psi\left(r\right)$$

*ve*

$$\begin{tikzcd} C \arrow[r, "\theta"] \arrow[d, "\partial"'] \arrow[dr] & C' \arrow[d, "\partial'"] \\ R \arrow[r, "\psi"'] & R' \end{tikzcd}$$

*diyagramı değişimli, yani*

$$\partial'\theta\left(c\right)=\psi\partial\left(c\right)$$

*olacak şekilde* $\theta\colon C\longrightarrow C'$ , $\psi\colon R\longrightarrow R'$ *R-cebir morfizmleri varsa*

$$\left(\theta,\psi\right):\ \left(C,R,\partial\right)\longrightarrow\left(C',R',\partial'\right)$$

*morfizmine* ***çaprazlanmış modüller arasındaki morfizm*** *denir [18].*

O halde, $R=R'$ ve $\psi$ birim dönüşüm ise, $\theta$ bir $R$-cebir morfizmi olduğunda

$$\theta\left(r.c\right)=r\theta\left(c\right)$$

dir ve

$$\begin{tikzcd} C \arrow[r, "\theta"] \arrow[d, "\partial"'] & C' \arrow[dl, "\partial'"] \\ R & \end{tikzcd}$$

diyagramı değişimli olduğundan, yani

$$\partial'\theta\left(c\right)=\partial\left(c\right)$$

sağlandığından, $\theta$ bir çaprazlanmış $R$-modül morfizmidir.

**Örnek 3.0.2.** *$M$, herhangi bir R-modül olsun.*

$$M\times M\longrightarrow M$$
$$\left(m_1,m_2\right)\mapsto m_1m_2=0$$

*çarpımı tanımlanırsa, $M$ üzerinde bir R- cebir yapısı oluşur. Bu durumda*

$$0\colon M\longrightarrow R$$
$$x\mapsto 0\left(x\right)=0$$

*şeklinde verilen sıfır morfizmi ile birlikte $(M,R,0)$ bir çaprazlanmış modül yapısı oluşturur. Çünkü*

$$LCM)\quad m.0(m')=m.0=m0=0=mm'$$
$$RCM)\quad 0m.m'=0.m'=0m'=0=mm'$$

*şeklinde çaprazlanmış modül aksiyomları sağlanır.*

**Tanım 3.0.5.** *$\partial$:$C \longrightarrow R$ , LCM kuralını sağlayan bir R-cebir morfizmi ise $(C, R, \partial)$ ye sol çaprazlanmış R-modül, $\partial$:$C \longrightarrow R$, RCM kuralını sağlayan bir R-cebir morfizmi ise $(C, R, \partial)$ ye sağ çaprazlanmış R-modül denir [18].*

**Uyarı 3.0.1.** *1.*

$$g : (C, \partial) \longrightarrow (B, \beta)$$

*çaprazlanmış R-modüllerin morfizmi olsun.*

*(a) Eğer $(B, \beta) = (R, I_R)$ ise $g = \partial$ dir. Yani;*

$$g : (C, \partial) \longrightarrow (R, I_R)$$

$$\partial = g : C \longrightarrow R$$

*olur.*

*(b) Eğer $\beta = 0$ ise yani $B$ bir R-bimodül ise $\partial = 0$ dır ve bu nedenle $C$ bir R-bimodüldür.*

*(c) $g = 0$ ise $\partial = \beta g = 0$ ve $C$ bir R-bimodüldür. Böylece 0 morfizmleri tanım kümeleri olarak sadece R-bimodülleri içerebilirler.*

*2.*

$$f, g : (C, \partial) \longrightarrow (B, \beta)$$

*$cek\beta = 0$ olacak şekilde çaprazlanmış modüllerin iki morfizmidir.O halde herhengi bir $c \in C$ için*

$$(f(c) - g(c)) \in cek\beta = 0$$

*ise*

$$f = g$$

*dir. Eğer çekirdek aşikar çekirdek değilse herhangi bir $m \in cek\beta$ için*

$$f(c) = g(c) + m$$

*dir.*

*Böylece $R$ nin herhangi bir $I$ ideali için $(I, \dot{I}ç)$ in bir çaprazlanmış $R$-modül olduğu gözönünde bulundurulursa,*

$$f : (C, \partial) \rightarrow (I, \dot{I}ç)$$

*çaprazlanmış modül morfizmi varsa $f$ tektir.*

## 3.1 ÇAPRAZLANMIŞ MODÜLLERİN BAZI CEBİRSEL ÖZELLİKLERİ

$(C, \partial)$ bir çaprazlanmış $R$-modül olsun. $cek\partial$ yerine $\pi$, $\operatorname{Im}\partial$ yerine de $I$ alalım. ($R/I$ bölüm halkası yerine $\overline{R}$ alalım.)

**Önerme 3.1.1.** *1. $I$, $R$ de bir idealdir.*

*2. $\pi$, $C$ de bir ideal ve bir $R$-modüldür. $R$ nin $I$ ideali, $\pi$ üzerine aşikar olarak (sıfır) etki eder. Buradan $\pi$, $\overline{R}$ nin bir etkisiyle $\overline{R}$-modül olur.*

*3. $C/C^2$ ve $I/I^2$ $\overline{R}$-modüldür [18].*

**İspat.** 1. Kontrol edilmesi gereken $I$ nın $R$ deki çarpmaya göre kapalı olmasıdır. $\forall x \in I$ ve herhangi bir $c \in C$ için $x = \partial c$ olsun. Her bir r$\in R$ için

$$rx = r.\partial(c) = \partial(rc) \quad , \quad rc \in C \text{ olduğundan } rx \in I \text{ dır.}$$

Benzer olarak $xr = \partial(c).r$ dir ve $xr \in I$ olur ve $I$, $R$ nin bir idealidir.

2. $\pi$ nin $C$ de ideal olduğu kolayca görülür. $k \in \pi, c \in C$ olsun.

$$\partial(ck) = \partial(c)\partial(k) = \partial(c)0 = 0$$

ve

$$\partial(kc) = \partial(k)\partial(c) = 0\partial(c) = 0$$

dır ve $ck, kc \in \pi$ elde edilir. $\pi \subset C$ olduğundan $C$ için sağlanan şartlar $\pi$ için de sağlanacağından, $\pi$ nin bir $R$-modül olduğu açıktır. $I$ nın $\pi$ üzerine sıfır etkisini kontrol edelim. Yani, $t \in I$, $k \in \pi$ için $tk = 0 = kt$ olduğunu gösterelim. $t \in I$, $k \in \pi$ olsun ve bir $c \in C$ seçelim öyleki $\partial c = t$ olsun. O zaman

$$tk = \partial(c)k = c.k = c.\partial(k) = 0$$

dır.Benzer olarak $kt = 0$ dır. Böylece $I$ nın $\pi$ üzerine sıfır etki eder.

$$\overline{R} \times \pi \to \pi$$
$$(r + \partial C, k) \mapsto (r + \partial C)k = rk$$

çarpımıyla $\pi$ bir $R/I = \overline{R}-$ modül olur. Bunu $\pi$ nin $R-$modül olduğunu kullanarak gösterebiliriz.
Gerçekten

(a)

$$\begin{aligned}(r + \partial C)(k_1 + k_2) &= r(k_1 + k_2)\\ &= rk_1 + rk_2\end{aligned}$$

(b)

$$\begin{aligned}((r_1 + \partial C) + (r_2 + \partial C))k &= ((r_1 + r_2) + \partial C)k\\ &= (r_1 + r_2)k\\ &= r_1k + r_2k\\ &= (r_1 + \partial C)k + (r_2 + \partial C)k\end{aligned}$$

(c)

$$\begin{aligned}((r_1 + \partial C)(r_2 + \partial C))k &= (r_1r_2 + \partial C)k\\ &= (r_1r_2)k\\ &= (r_1 + \partial C)r_2k\\ &= (r_1 + \partial C)((r_2 + \partial C)k)\end{aligned}$$

(d)

$$(1_R + \partial C)k = 1_Rk = k$$

3. $I$ nın $C/C^2$ ye sıfır etki ettiğini göstermek yeterlidir. $b \in C$ için $x = \partial(b) \in I$ olsun ve $c \in C$ için $c + C^2 \in C/C^2$ olsun. O zaman

$$\begin{aligned} x(c + C^2) &= xc + C^2 \\ &= \partial(b)c + C^2 \\ &= bc + C^2 \end{aligned}$$

dir. $bc \in C^2$ ve $bc + C^2$, $C/C^2$ nin sıfırıdır. Buradan $I$, $C/C^2$ ye sıfır etki eder. Dolayısıyla

$$\begin{aligned} R/I \times C/C^2 &\to C/C^2 \\ (r + \partial C, c + C^2) &\mapsto (r + \partial C)(c + C^2) = rc + C^2 \end{aligned}$$

ile

(a)

$$\begin{aligned} (r + \partial C)(c_1 + C^2 + c_2 + C^2) &= (r + \partial C)((c_1 + c_2) + C^2) \\ &= r(c_1 + c_2) + C^2 \\ &= (rc_1 + rc_2) + C^2 \\ &= (rc_1 + C^2) + (rc_2 + C^2) \\ &= ((r + \partial C)(c_1 + C^2) + (r + \partial C)(c_2 + C^2) \end{aligned}$$

(b)

$$\begin{aligned} ((r_1 + \partial C) + (r_2 + \partial C))(c + C^2) &= ((r_1 + r_2) + \partial C)(c + C^2) \\ &= (r_1 + r_2)c + C^2 \\ &= (r_1 c + r_2 c) + C^2 \\ &= (r_1 c + C^2) + (r_2 c + C^2) \\ &= (r_1 + \partial C)(c + C^2) + (r_2 + \partial C)(c + C^2) \end{aligned}$$

(c)

$$
\begin{aligned}
((r_1+\partial C)(r_2+\partial C))(c+C^2) &= ((r_1r_2)+\partial C)(c+C^2)\\
&= (r_1r_2)c+C^2\\
&= r_1(r_2c)+C^2\\
&= (r_1+\partial C)(r_2c+C^2)\\
&= (r_1+\partial C)((r_2+\partial C)(c+C^2))
\end{aligned}
$$

(d)

$$
\begin{aligned}
(1_R+\partial C)(c+C^2) &= 1_Rc+C^2\\
&= c+C^2
\end{aligned}
$$

eşitlikleri sağlanır ve $C/C^2$ bir $\overline{R}$-modüldür. Aynı fikir $I/I^2$ içinde kullanılabilir.

□

Ayrıca $\pi$, $C$ nin merkez idealidir, $c \in C$ ve $k \in \pi$ için

$$kc = \partial(k)c = 0c = 0 = c0 = c\partial(k) = ck$$

dir ve $kc = ck \in \pi$ olur.

Önceki önermenin bir sonucu olarak $R$-modüllerin aşağıdaki gibi iki tam dizisi vardır.

$$0 \to \pi \to C \to I \to 0 \qquad (*)$$

ve

$$0 \to I \to R \to \overline{R} \to 0$$

**Önerme 3.1.2.** *Yukarıdaki* $(*)$ *dizisinden*

$$\pi \to C/C^2 \to I/I^2 \to 0$$

*tam dizisi elde edilir [18].*

**İspat.** $\pi \to C/C^2 \to I/I^2 \to 0$ dizisinin tam olması için ;

1. $\overline{\partial} : C/C^2 \to I/I^2$ nin örten olduğunu,

2. $\pi$ nin $cek\overline{\partial}$ ye örten olarak dönüştüğünü, yani her $c + C^2 \in cek\overline{\partial}$ elemanının $k \in \pi$ için $k + C^2$ şeklinde olduğunu, göstermek gerekir.

1.
$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & \pi \arrow[r] & C \arrow[r, "\partial"] \arrow[d] & I \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
 & & C/C^2 \arrow[r, "\overline{\partial}"'] & I/I^2 \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

diyagramı değişimlidir ve $\partial$ örten olduğundan $\overline{\partial}$ de örtendir. $\pi \longrightarrow C/C^2$ nin görüntüsü $cek\overline{\partial}$ dedir.

2. $\pi \longrightarrow cek\overline{\partial}$ nin örten olduğunu gösterelim. $c + C^2 \in cek\overline{\partial}$ olsun.

$$\begin{aligned}\overline{\partial}(c + C^2) &= \partial(c) + I^2 \\ &= I^2\end{aligned}$$

ve $\partial(c) \in I^2$ olur. Böylece $b, b' \in C$ için

$$\partial(c) = \partial(b)\partial(b') = \partial(bb')$$

olur. Bu,

$$\partial(c) - \partial(bb') = 0 \text{ ve } \partial(c - bb') = 0, (c - bb') \in \pi$$

olmasını gerektirir.Yani $k \in \pi$ için

$$c - bb' = k$$

dir. O zaman $c + C^2 = k + C^2$ olur. Böylece $\pi$, $cek\overline{\partial}$ yi örter .

□

**Önerme 3.1.3.**

$$\psi : (C, \partial) \longrightarrow (B, \beta)$$

*bir çaprazlanmış R-modül morfizmi olsun.* $(C, B, \psi)$, $B$ *nin* $C$*ye* $\beta$ *yoluyla etkisi ile bir çaprazlanmış* $B$*-modüldür [13].*

**İspat.**

$$\begin{tikzcd} C \arrow[r, "\psi"] \arrow[d, "\partial"'] & B \arrow[dl, "\beta"] \\ R & \end{tikzcd}$$

değişimli diyagramında $\psi$ $R$-cebirlerin morfizmi ve $B$, $C$ üzerine $\beta$ yoluyla etki eder. Yani, $c \in C$ ve $b \in B$ için

$$cb = c\beta(b) \text{ ve } bc = \beta(b)c$$

vardır. Şimdi $\psi$ nin $B$-cebirlerin morfizmi olduğunu ve LCM, RCM şartlarını sağladığını gösterelim. $c \in C$ ve $b \in B$ olsun. Bu taktirde

$$\begin{aligned} \psi(cb) &= \psi(c\beta(b)) \\ &= \psi(c)\beta(b) \\ &= \psi(c)b \end{aligned}$$

dir. Ayrıca $c, c' \in C$ için

$$\begin{aligned} \psi(c)c' &= \beta\psi(c)c' \quad , \quad \beta\psi = \partial \text{ olduğundan} \\ &= \partial(c)c' = cc' \end{aligned}$$

dür. Benzer olarak

$$c\psi(c') = cc'$$

olduğu gösterilebilir. Böylece LCM ve RCM de sağlanmış olur. $\psi(C)$, $\psi$ nin görüntüsüdür ve $B$ nin bir idealidir. □

**Önerme 3.1.4.** *$(C, \partial)$ bir çaprazlanmış $B$-modül ve $(B, \beta)$ bir çaprazlanmış $R$-modül olsun. Bu durumda $R$ nin $C$ üzerine etkisi, $B$ nin $C$ üzerine etkisi ile uyumlu olmak üzere $(C, R, \beta\partial)$ bir çaprazlanmış $R$-modüldür [18].*

**İspat.** LCM ve RCM şartlarını kontrol etmek yeterlidir. $c, c' \in C$ olsun.

$$c(\beta\partial(c')) = c\beta(\partial(c')) = c\partial(c') = cc'$$

dir. Benzer şekilde $(\beta\partial(c))c' = cc'$ eşitliği de gösterilir. □

## 3.2 ALT ÇAPRAZLANMIŞ MODÜLLER, ÇAPRAZLANMIŞ İDEALLER VE ÇAPRAZLANMIŞ BÖLÜM MODÜLLERİ

Çaprazlanmış modüllerin incelenmesinde alt çaprazlanmış modüller ve çaprazlanmış idealler önemlidir.

### 3.2.1 ALT ÇAPRAZLANMIŞ MODÜLLER

**Tanım 3.2.1.** *$(C, \partial)$ bir çaprazlanmış $R$-modül olsun. $C'$, $C$ nin altcebiri ve*

$$\partial' = \partial\,|_{C'} \colon C' \to R,$$

*$\partial'$ nün $\partial$ ye kısıtlanmışı olmak üzere $(C', \partial')$ çaprazlanmış $R$-modülü, $(C, \partial)$ çaprazlanmış $R$-modülünün bir alt çaprazlanmış modülüdür [18].*

**Uyarı 3.2.1.**

1. *$(C', \partial')$, $(C, \partial)$ nin bir alt çaprazlanmış modülü olsun. $x \in C'$ ve $c \in C$ için*

   $$cx = \partial(c)x \in C'$$

   *ve benzer olarak $xc \in C'$ dür. Böylece $C'$, $C$ de bir idealdir. Buradan bir alt çaprazlanmış modül olan $C'$ nün $\partial'$ ile bir ideal olduğu anlaşılır.*

2. *$(C', \partial')$ den $(C, \partial)$ ye dahil etme dönüşümü bir çaprazlanmış modül monomorfizmidir. Bu, tanımdan ve 1. uyarıdan açıkça görülür.*

**Örnek 3.2.1.**

1. *$R$ halkasının herhangi bir $I$ ideali $(R, I_R)$ çaprazlanmış modülünün $(I, i\c{c})$ alt çaprazlanmış modülünü verir.*

2. *$(M, 0)$ çaprazlanmış modül olmak üzere $M$ nin bir alt modülü, $M$ nin bir alt çaprazlanmış modülüdür. $x, y, m' \in M', r \in R$ , $rm' \in M'$ ve $M'$, $M$ nin alt grubu olduğundan*

   $$xy \in M' ve x - y \in M'$$

   *dir. Böylece*

   $$\overline{0}\,|_0 \colon M' \subset M \longrightarrow R$$
   $$m' \mapsto 0$$

   *olmak üzere $(M', \overline{0})$ bir alt çaprazlanmış modüldür.*

### 3.2.2 ÇAPRAZLANMIŞ İDEALLER

Bir $(C, \partial)$ çaprazlanmış $R$-modülünün, çaprazlanmış ideal olarak adlandıracağımız normal alt çaprazlanmış modülünü tanımlayacağız.

Halka teorisindeki durumu hatırlayalım. Halka teorisinde idealler ve çekirdekler aynıydı. Yani her $I$ ideali, $R$ halkasının

$$\nu : R \to R/I$$

doğal halka morfizminin çekirdeğidir ve her halka morfizminin çekirdeği bir idealdir.

Bir çaprazlanmış ideali , $c \in C$ için

$$\nu(c) = c + C' \text{ ve } \overline{\partial}(c + C') = \partial(c)$$

olmak üzere $R$ üzerinde çaprazlanmış modüllerin morfizmi $(C, C/C', \nu)$ nin

$$\begin{tikzcd} C \arrow[r, "\nu"] \arrow[d, "\partial"'] & C/C' \arrow[dl, "\overline{\partial}"] \\ R & \end{tikzcd}$$

bir çekirdeği olan, $R$ üzerinde $(C, \partial)$ çaprazlanmış modülünün $(C', \partial')$ alt çaprazlanmış modülü olarak tanımlayalım.

$\overline{\partial}$ nin iyi tanımlı olması için gerek ve yeter şart $C'$ nün $cek\partial$ de yer almasıdır. Çünkü,

$$c + C' = c' + C' \Rightarrow c - c' = x \in C' \text{ ve } c = c' + x$$

dir. Ayrıca, $\overline{\partial}$

$$\begin{aligned} \overline{\partial}(c + C') = \overline{\partial}(c' + C') &\Longleftrightarrow \partial(c) = \partial(c') \\ &\Longleftrightarrow \partial(c) - \partial(c') = 0 \\ &\Longleftrightarrow \partial(c - c') = 0 \\ &\Longleftrightarrow c - c' = x \in \text{ç}ek\partial \end{aligned}$$

dir. Dolayısıyla $\partial : C \longrightarrow R$ çaprazlanmış modülünün çaprazlanmış idealleri $(C, R, \partial)$ nin $cek\partial$ de yer alan bütün $(C', R, \partial')$ alt çaprazlanmış modülleridir.

Çaprazlanmış modüllerin herhangi bir

$$\begin{tikzcd} C \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\partial"'] & B \arrow[dl, "\beta"] \\ R & \end{tikzcd}$$

morfizminin çekirdeği $C$ nin $cek\partial$ de yer alan bir alt çaprazlanmış modülüdür. Çünkü, $\beta f = \partial$ dir [18].

Böylece aşağıdaki sonuç ispatlanmış olur.

**Önerme 3.2.1.** *$(C, \partial)$ bir çaprazlanmış $R$-modül ve $(C', R, \partial')$, $(C, R, \partial)$ de bir alt çaprazlanmış modül olsun. Bu durumda $(C/C', R, \overline{\partial})$ nin bir çaprazlanmış bölüm modülü olması için gerek ve yeter şart $c \in C$ için*

$$\overline{\partial}(c + C') = \partial(c)$$

*olmak üzere, $C'$ nün $cek\partial$ de yer almasıdır.*

Bu arada çaprazlanmış bölüm modülü her zaman tanımlı değildir. Yani, aşağıdaki değişimli diyagramda $C/C$ bölümü için

$$C \nsubseteq cek\partial$$

olduğundan bir $(C/C, R, \beta)$ çaprazlanmış $R$-modül değildir.

$$\begin{tikzcd} C \arrow[r, "i"] \arrow[d, "\partial"'] & C \arrow[dl, "\partial"] \\ R & \end{tikzcd}$$

**Önerme 3.2.2.** *Çaprazlanmış $R$-modüllerin kategorisinde çaprazlanmış modüllerin her morfizmi bir monomorfizm tarafından takip edilen bir regüler epimorfizm olarak tek şekilde ifade edilir.*

**İspat.** $f : (C, \partial) \longrightarrow (B, \beta)$ bir çaprazlanmış $R$-modül morfizmi olsun.
$cekf \subseteq cek\partial$ olduğu için

$$\overline{\partial} : C/cekf \longrightarrow R$$
$$c + cekf \mapsto \overline{\partial}(c + cekf) = \partial(c)$$

olacak şekilde bir morfizm tanımlayabiliriz ki $C/cekf$ bir çaprazlanmış $R$-modül yapısı verir. Böylece çaprazlanmış $R$-modüllerin bir kanonik morfizmi

$$\rho : C \to C/cekf$$

dir. Bu morfizmin regüler epimorfizm olduğunu gösterelim.

$$T = C \ltimes cekf = \{(c, m) : c \in C \text{ ve } m \in cekf\}$$

yarıdirekt çarpım olsun. $T$ üzerinde bir çaprazlanmış $R$-modül yapısı tanımlayacağız. Çarpımı aşağıdaki gibi tanımlayalım:

$(c, m), (c', m') \in T$ için

$$\begin{aligned}(c, m)(c', m') &= (cc', cm' + mc') \\ &= (cc', 0), \quad mc' = \partial(m)c' = 0 = cm' \text{ olduğu için}\end{aligned}$$

$R$ halkası $T$ üzerine belli bir yolla etki eder, ve

$$\begin{aligned}\tau : T &\longrightarrow R \\ (c, m) &\mapsto \tau(c, m) = \partial(c)\end{aligned}$$

ile verilen morfizm RCM ve LCM şartlarını sağlar.

$$\begin{aligned}\tau(c, m)(c', m') &= \partial(c)(c', m') \\ &= (\partial(c)c', \partial(c)m') \\ &= (cc', 0) \\ &= (c, m)(c', m')\end{aligned}$$

dir. Böylece $(T, \tau)$ bir çaprazlanmış $R$-modül olur.

$$\begin{aligned}s, t : T &\longrightarrow C \\ s(c, m) &= c, \\ t(c, m) &= c + m.\end{aligned}$$

morfizmlerini tanımlayalım. Bu iki morfizm $\rho s = \rho t$ olacak şekilde çaprazlanmış $R$-modüllerin morfizmidir. Bunu gösterelim.

$$\begin{aligned} s((c,m)(c',m')) &= s(cc',0) \\ &= cc' \\ &= s(c,m)s(c',m') \end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned} t((c,m)(c',m')) &= t(cc',0) \\ &= cc' \\ &= cc' + mm' + cm' + mc' \\ &= (c+m)(c'+m') \\ &= t(c,m)t(c',m') \end{aligned}$$

Böylece $s$ ve $t$ morfizmleri $R$-cebir morfizmleridir. Kabul edelim ki

$$g : (C, \partial) \longrightarrow (D, \delta)$$

$gt = gs$ olacak şekilde çaprazlanmış $R$-modüllerin morfizmi olsun. O zaman

$$\begin{aligned} g' : C/cekf &\longrightarrow D \\ c + cekf &\mapsto g'(c + cekf) = g(c) \end{aligned}$$

ile verilen tek bir morfizm vardır. $f : C \longrightarrow B$ morfizmi $fs = ft$ kuralını sağlar. Böylece

$$\begin{aligned} \mu : C/cekf &\longrightarrow B \\ c + cekf &\mapsto \mu(c + cekf) = f(c) \end{aligned}$$

ile verilen bir tek morfizm vardır. $\mu$ nün bir monomorfizm olduğunu gösterelim. Kabul edelim ki

$$h, h' : X \to C/cekf,$$

$\mu h = \mu h'$ olacak şekilde $(X, \chi)$ den $(C/cekf, \overline{\partial})$ ye iki çaprazlanmış $R$-modül morfizmi olsun. $h \neq h'$ olduğunu kabul edelim. Bu taktirde $\exists x \in X$ vardır öyleki $c, c' \in C$

için

$$h(x) = c + cekf \neq h'(x) = c' + cekf$$

dir. Fakat

$$\mu\left(h\left(x\right)\right) = \mu\left(h'\left(x\right)\right)$$

olduğundan,

$$\mu\left(c + cekf\right) = \mu\left(c' + cekf\right)$$

dir ve buradan

$$f\left(c\right) = f\left(c'\right)$$

dür. Böylece

$$\left(c - c'\right) \in cekf$$

olur. Dolayısıyla

$$c = c' + m,\ m \in cekf$$

için,

$$c + cekf = \left(c' + m\right) + cekf = c' + cekf$$

dır. Böylece $\mu$ bir monomorfizmdir ve

$$f = \mu\rho$$

dir. □

**Teorem 3.2.1.** *$f : (C, \partial) \longrightarrow (B, \beta)$ bir çaprazlanmış $R$- modül morfizmi olsun. Bu taktirde*

$$\left(C/cekf, \overline{\partial}\right) \cong \left(\operatorname{Im} f, \beta\right)$$

*dır.*

**İspat.** $\forall c + cekf \in C/cekf$ için, $\overline{f}\left(c + cekf\right) = f\left(c\right)$ ile $\overline{f :} \left(C/cekf, \overline{\partial}\right) \to \left(\operatorname{Im} f, \beta\right)$ tanımlayalım.

$\overline{f}$ iyi tanımlıdır: Gerçekten,

$$\begin{aligned} c + cekf = c' + cekf &\Longrightarrow c - c' \in cekf \\ &\Longrightarrow f\left(c - c'\right) = f\left(c\right) - f\left(c'\right) = 0_B \\ &\Longrightarrow f\left(c\right) = f\left(c'\right) \end{aligned}$$

dir. $\overline{f}$ nin örten olduğu açıktır. $\overline{f}$ nin 1-1 olduğunu gösterelim.

$$\begin{aligned}\overline{f}\left(c+cekf\right)=\overline{f}\left(c'+cekf\right) &\Longrightarrow f\left(c\right)=f\left(c'\right)\\ &\Longrightarrow f\left(c-c'\right)=0_B \Longrightarrow c-c'\in cekf\\ &\Longrightarrow c+cekf=c'+cekf\end{aligned}$$

dir. Buradan $\overline{f}$ 1-1 dir.

Şimdi $\overline{f}$ nin bir çaprazlanmış modül morfizmi olduğunu gösterelim. her $c,c'\in C$ ve $r\in R$ için Her $r\in R$ ve $c+cekf\in C/cekf$ için

$$\begin{aligned}\overline{f}\left(r(c+cekf)\right)&=\overline{f}\left(rc+cekf\right)\\ &=f\left(rc\right)=rf\left(c\right)\ ,\ (f \text{ çaprazlanmış modül morfizmi olduğundan})\\ &=r\overline{f}\left(c+cekf\right)\end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned}\beta\overline{f}\left(c+cekf\right)&=\beta f\left(c\right)\\ &=\partial\left(c\right),\ \ (f \text{ çaprazlanmış modül morfizmi olduğundan})\\ &=\overline{\partial}\left(c+cekf\right)\end{aligned}$$

olduğundan

$$\begin{tikzcd} C/cekf \arrow[r, "\overline{f}"] \arrow[d, "\overline{\partial}"'] & Imf \arrow[dl, "\beta"] \\ R & \end{tikzcd}$$

diyagramı değişimlidir. Şimdi $\overline{f}$ nin $R$-cebir morfizmi olduğunu gösterelim. Her $c,c'\in C$ ve $r\in R$ için

1.

$$\begin{aligned}\overline{f}((c+cekf)\left(c'+cekf\right))&=\overline{f}\left(cc'+cekf\right)\\ &=f\left(cc'\right)\\ &=f\left(c\right)f\left(c'\right)\\ &=\overline{f}\left(c+cekf\right)\overline{f}\left(c'+cekf\right)\end{aligned}$$

2.

$$
\begin{aligned}
\overline{f}((c+cekf)+(c'+cekf)) &= \overline{f}\left((c+c')+cekf\right) \\
&= f\left(c+c'\right) \\
&= f\left(c\right)+f\left(c'\right) \\
&= \overline{f}\left(c+cekf\right)+\overline{f}\left(c'+cekf\right)
\end{aligned}
$$

3.

$$
\begin{aligned}
\overline{f(r}\left(c+cekf\right)) &= \overline{f}\left(rc+cekf\right) \\
&= f\left(rc\right) \\
&= rf\left(c\right) \\
&= r\overline{f}\left(c+cekf\right)
\end{aligned}
$$

4.

$$
\begin{aligned}
\overline{f}\left(1+cekf\right) &= f\left(1_C\right) \\
&= 1_f\left(C\right)
\end{aligned}
$$

şartlar sağlandığından $\overline{f}$ bir $R$-cebir morfizmidir. Dolayısıyla $\overline{f}$ bir çaprazlanmış $R$-modül morfizmidir.

Sonuç olarak $\left(C/cekf,\overline{\partial}\right)\cong(\operatorname{Im} f,\beta)$ dir. □

**Örnek 3.2.2.** *1.* $(R,i)$ *çaprazlanmış* $R$ *-modülünün çaprazlanmış idealleri,* $R$ *halkasının bütün* $I$ *idealleridir. Bunları* $(I,iç)$ *şeklinde çaprazlanmış modül gibi düşünürsek* $iç$: $I\to R$ *dahil etme dönüşümü bir çaprazlanmış* $R$*-modül morfizmi olur.*

*2. Bir* $M$*,* $R$*-modül ve* $(M,0)$ *ın bir çaprazlanmış* $R$*-modül olduğu düşünülürse* $M$*,* $R$*-modülünün alt modülleri çaprazlanmış ideallerdir.*

*3. Çaprazlanmış ideal olmayan, alt çaprazlanmış modüller de vardır.*

*Örneğin; $(\mathbb{Z}, I_{\mathbb{Z}})$ çaprazlanmış $\mathbb{Z}$-modül ve $(n\mathbb{Z}, iç)$, $n \in \mathbb{Z}$ ile bir alt çaprazlanmış $\mathbb{Z}$-modüldür. Aşağıdaki diyagram değişimlidir.*

$$\begin{tikzcd} n\mathbb{Z} \arrow[rr, "iç"] \arrow[dr] & & \mathbb{Z} \arrow[dl] \\ & \mathbb{Z} & \end{tikzcd}$$

*$n\mathbb{Z}$ nin çaprazlanmış modüllerin morfizminin çekirdeği olabilmesi için hiç bir yol yoktur.*

### 3.2.3 CEBİRLERİN ÇAPRAZLANMIŞ KARELERİ

**Tanım 3.2.2.** *Cebirlerde bir çaprazlanmış kare, $R$ nin $B, C$ ve $D$ ye cebir etkileri, ($C$ nin $D$ ve $B$ ye $\partial$ yoluyla etkisi, $B$ nin $C$ ve $D$ ye $\beta$ yoluyla etkisi ) ve*

$$h : C \times B \to D \text{ ve } h' : B \times C \to D$$

*fonksiyonu ile birlikte aşağıdaki aksiyomları sağlayan*

$$\begin{tikzcd} D \arrow[r, "\beta'"] \arrow[d, "\partial'"'] & C \arrow[d, "\partial"] \\ B \arrow[r, "\beta"] & R \end{tikzcd}$$

*değişimli diyagramıdır [8, 18].*

1. $\partial, \beta, \partial', \beta'$ *ve* $\partial\beta'$ *çaprazlanmış modüller,*

2. $\partial, \beta$ *morfizmleri* $R$ *nin etkisini korur,*

3. $rh(c,b) = h(rc,b)$, $\;h(c,b)r = h(c,br)$

   $rh'(b,c) = h'(rb,c)$, $\;h'(b,c)r = h'(b,cr)$

4. $h(c+c',b) = h(c,b) + h(c',b)$

   $h(c,b+b') = h(c,b) + h(c,b')$

   $h'(b+b',c) = h'(b,c) + h'(b',c)$

   $h'(b,c+c') = h'(b,c) + h'(b,c')$

5. $\beta' h(c,b) = c\beta(b)$, $\beta' h'(b,c) = \beta(b)c$

   $\partial' h(c,b) = \partial(c)b$, $\partial' h'(b,c) = b\partial(c)$

6. $h(\beta'(d), b) = d\beta(b)$, $h'(b, \beta'(d)) = \beta(b)d$

   $h(c, \partial'(d)) = \partial(c)d$, $h'(\partial'(c), d) = d\partial(c)$

7. $b' h(c,b) = h'(b', c)b$, $c' h'(b,c) = h(c,b)c'$

   *Bu şartlar her $c, c' \in C, b, b' \in B, d \in D$ ve $r \in R$ için geçerlidir.*

**Önerme 3.2.3.** *$(C, R, \partial)$ çaprazlanmış modülü ve onun $(C', R', \partial')$ çaprazlanmış ideali, her $r' \in R', c \in C$ için*

$$\begin{aligned} h &: C \times R' \to C' \\ &(c, r') \mapsto h(c, r') = cr' \end{aligned}$$

*ve*

$$\begin{aligned} h' &: R' \times C \to C' \\ &(r', c) \mapsto h'(r', c) = r'c \end{aligned}$$

*fonksiyonları ile bir çaprazlanmış kare verir [18].*

$$\begin{tikzcd} C' \arrow[r, "u"] \arrow[d, "\partial'"'] & C \arrow[d, "\partial"] \\ R' \arrow[r, "v"] & R \end{tikzcd}$$

**İspat.** Şrtlar kolayca kontrol edilir. Fakat (3) ve (7) nin ispatını verelim. $c \in C$, $r' \in R'$ve $s \in R$ olsun.

$$sh(c, r') = s(cr') = (sc)r' = h(sc, r')\, sh'(r', c) = s(r'c) = (sr', c) = h'(sr', c)$$

dir. t$' \in R'$ olsun.

$$t' h(c, r') = t'(cr') = (t'c)r' = h(t'c, r') = h(t', c)r'$$

dür. Ayrıca $b \in C$ için, $h(c, r')b = (cr')b = c(r'b) = ch'(r', b)$ olur. □

**Örnek 3.2.3.** *$R$ bir halka ve $I, J$ de $R$ nin iki taraflı idealleri olsunlar. $R$ nin $I, J$ ve $I \cap J$ ye çarpmayla verilen etkileri,*

$$\begin{aligned} h : I \times J &\to I \cap J \\ (c, b) &\mapsto h(c, b) = cb \end{aligned}$$

*ve*

$$\begin{aligned} h' : J \times I &\to I \cap J \\ (b, c) &\mapsto h'(b, c) = bc \end{aligned}$$

*ile bir çaprazlanmış kare elde edilir [18].*

$$\begin{tikzcd} J \cap I \arrow[r, "u"] \arrow[d] & I \arrow[d] \\ J \arrow[r, "v"] & R \end{tikzcd}$$

**Örnek 3.2.4.** *$M$ ve $N$, $R$-bimodül olsun ve $C$, $R$ tarafından üzerine sıfır etki edilen bir abel grup olsun. Bütün dönüşümlerin sıfır dönüşümü olduğu ve*

$$0 : M \times N \to C \text{ ve } 0 : N \times M \to C$$

*ile birlikte aşağıdaki diyagram bir çaprazlanmış karedir [18].*

$$\begin{tikzcd} C \arrow[r] \arrow[d] & M \arrow[d] \\ N \arrow[r] & R \end{tikzcd}$$

# KAYNAKLAR


[1] Arvasi Z., *Applications in Comutative Algebra of Moore Complex of a Simplicial Algebra*, Ph. D. Thesis, University of Wales, Bangor, 1994.

[2] Blyth T.S., *Categories*, University of St. Andrews, Scotland, 1986.

[3] Bourbaki N., *Algebra I*, Addison-Wesley Publishing Company, 1966.

[4] Brown R., Wensley C.D. *Computation and Homotopical Applications of Induced Crossed Modules*, Bangor Math. Preprint 02.04, 2006..

[5] Çallıalp F., *Çözümlü Soyut Cebir Problemleri*, Marmara Üniversitesi Atatürk Eğitim Fakültesi, Istanbul, 1998.

[6] Ege U., *Çaprazlanmış Modüller*, Yüksek Lisans Tezi, Osmangazi Üniversitesi, Eskişehir, 1998.

[7] Ellis G.J., *Crossed Modules*, IMS Bulletin, 21, 1988.

[8] Ellis G.J., *Higher Dimensional Crossed Modules of Algebras*, J. Pure Appl. Algebra, 52, 1988.

[9] Guin-Walléry D., Loday J.L., *Obstructions à L'Excision en K-théorie Algébrique*, Springer Lecture Notes in Math., 854, 1981.

[10] Hungerford T. W., *Algebra*, Springer Verlag, Berlin-Heidelberg-New york, 1984.

[11] Lang S., *Algebra*, Addison-Wesley Publishing Company, 1993.

[12] Maclane S., Birkhoff G., *Algebra*, The Macmillan Company, New York, 1967.

[13] Norrie K.J., *Crossed Module of Analogues of Group Theorems*, Ph. D. Thesis, University of London.

[14] Özcan A. F., *Topolojik Crossed Modüller*,Yüksek Lisans Tezi, İnönü Üniversitesi, Malatya, Türkiye 1998.

[15] Pontrjagin L., *Topological Groups*, Princeton University Press, 1946.

[16] Porter T., *Homology of Comutative Algebras and an Invariant of Simis and Vasconceles*, J. Algebra, 99, 1986.

[17] Sabuncuoğlu A., *Lineer Cebir*, Nobel Yayın Dağıtım, Ankara, 2004.

[18] Shammu N.M., *Algebraic And Categorical Structure of Categories of Crossed Modules of Algebras*, Ph. D. Thesis, University College of North Wales, Bangor, Wales, UK, 1992.

[19] Şenkon H., *Soyut Cebir Dersleri II*, İ.Ü. Fen Fakültesi Basımevi, İstanbul, 1993.

[20] Whitehead J.H.C., *Combinatorial Homotopy Theory II*, Bull. American Math. Soc., 55, 1949.