

TC
İNÖNÜ ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

**BELİRSİZ KONTROL SİSTEMLERİNDE TASARIM VE
PERFORMANS ANALİZİ**

ABDULLAH YENİGÜN

**YÜKSEK LİSANS TEZİ
ELEKTRİK – ELEKTRONİK MÜHENDİSLİĞİ ANABİLİM DALI**

**MALATYA
Haziran 2008**

Tezin Başlığı: Belirsiz Kontrol Sistemlerinde Tasarım ve Performans Analizi

Tezi Hazırlayan: Abdullah YENİGÜN

Sınav Tarihi: 23 Haziran 2008

Yukarıda adı geçen tez jürimizce değerlendirilerek Elektrik Elektronik Mühendisliği Anabilim Dalında Yüksek Lisans Tezi olarak kabul edilmiştir.

Sınav Jürisi Üyeleri (ilk isim jüri başkanı, üçüncü isim tez danışmanı)

Prof.Dr. Hafız ALİSOY

İnönü Üniversitesi

Prof.Dr.Arif MEMMEDOV

İnönü Üniversitesi

Doç.Dr. Nusret TAN

İnönü Üniversitesi

İnönü Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Onay

Prof.Dr.Ali ŞAHİN
Enstitü Müdürü

Onur Sözü

Yüksek Lisans Tezi olarak sunduğum “Belirsiz Kontrol Sistemlerinin Kararlılığı ve Analizi” başlıklı bu çalışmanın bilimsel ahlak ve geleneklere aykırı düşecek bir yardıma başvurmaksızın tarafımdan yazıldığını ve yararlandığım bütün kaynakların, hem metin içinde hem de kaynakçada yöntemine uygun biçimde gösterilenlerden oluştuğunu belirtir, bunu onurumla doğrularım.

Abdullah YENİGÜN

ÖZET

Yüksek Lisans Tezi

BELİRSİZ KONTROL SİSTEMLERİNDE TASARIM VE PERFORMANS ANALİZİ

Abdullah YENİGÜN

İnönü Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Elektrik – Elektronik Mühendisliği Anabilim Dalı

123+X sayfa

2008

Danışman: Doç. Dr. Nusret TAN

Klasik kontrol teorisinde sistemin modelinin ve parametrelerinin iyi bilindiği kabul edilir. Fakat gerçek zamanlı uygulamalar için durum bundan farklıdır. Çünkü sistemlerdeki model ve parametre belirsizliği kaçınılmaz bir gerçektir. Sistemlerin basit matematiksel modellerini elde etmek için bazı basitleştirmelerin yapılması gerekir. Bunun sonucu olarak model belirsizliği olacaktır. Bir kontrol sisteminin matematiksel modelini oluşturan parametreler sistemin fiziksel elemanlarının fonksiyonlarıdır. Bu yüzden parametrelerin kesin bilinen değerlerinin olduğunu söylemek mümkün değildir. Çünkü çevresel koşullar ve fiziksel elemanların tolerans değerleri kesinlikle parametre belirsizliğine neden olurlar. Klasik kontrol teorisindeki tasarım teknikleri gerçek zamandaki uygulamalarda sistemdeki belirsizlikten dolayı iyi sonuçlar vermezler.

Bu tezin temel amacı belirsiz kontrol sistemlerinin analizi ve tasarımı için metotları incelemek ve geliştirmektir. Ayrıca bu çalışma bir sistemi kararlı yapan PI ve PID kontrolörlerinin hesaplanması ile ilgilidir.

Kontrol sistemlerdeki parametre belirsizliği incelendi. Özellikle parametre belirsizliği içeren kontrol sistemlerinin analizi ile ilgili olan Kharitonov ve kenar teoremleri özetlendi. AISTK yazılım programı tanıtıldı ve bazı uygulamalar yapıldı. Kararlılık sınır eğrisi metodu incelendi, bazı uygulama örnekleri sunuldu ve sonuçlar diğer metotlar ile karşılaştırıldı. Tezde verilen sonuçları elde etmek için gerekli programlar MATLAB ortamında hazırlandı. Bu araştırmada elde edilen sonuçlar pratik uygulamalar ve gelecekte bu yöndeki çalışmalar için kullanılabilir.

ANAHTAR KELİMELER: Kharitonov Teoremi, Kenar Teoremi, Kararlılık, Değer Kümesi, Parametre Belirsizliği, Nyquist Diyagramı, Bode Diyagramı, Nichols Diyagramı, PID Kontrolör.

ABSTRACT

M.S. Thesis

DESIGN AND PERFORMANCE ANALYSIS FOR UNCERTAIN CONTROL SYSTEMS

Abdullah YENİGÜN

İnönü University
Graduate School of Natural and Applied Sciences
Department of Electrical and Electronics Engineering

123+X pages

2008

Supervisor: Assoc. Prof. Dr. Nusret Tan

It is accepted in classical control theory that the model and the parameters of the system are well known. However, the situation is different for real time applications. Because model and parameter uncertainties in the system are an unavoidable fact. It is necessary to make some simplifications in order to obtain simple mathematical model of the systems. As a result this, there will be a model uncertainty. The parameters which constitute the mathematical model of a control system are functions of physical elements of the system. Therefore, it is not possible to mention that the parameters have exact known values. Because environmental conditions and tolerance values of physical elements definitely cause parameter uncertainties. Design techniques in classical control theory do not give good results for real time applications due to the uncertainties in the systems.

The main aim of this thesis to investigate and develop methods for the analysis and design of uncertain control systems. Also, this work deals with the computation of stabilizing PI and PID controllers.

Parametric uncertainties in control system are investigated. Especially, the Kharitonov and the Edge theorems, which are related to analysis of control systems with parametric uncertainties are summarized. AISTK (Analysis of Interval Systems Toolbox) package program is introduced and some applications have been done. The stability boundary locus method is investigated. Some application examples have been presented and the results are compared with the other methods. The required programs have been prepared in the MATLAB environment to obtain the results given in the thesis. The results obtained in this research work can be used for practical applications and for future within this direction.

KEYWORDS : Kharitonov Theorem, Edge Theorem, Stability, Value Set, Parametric Uncertainty, Nyquist Diagram, Bode Diagram, Nichols Diagram, PID Controller.

TEŞEKKÜR

Bu tez alıŐmasının her aşamasında yardım, tavsiye ve desteğini esirgemeden beni yönlendiren; bilgi birikimlerini bana aktaran ve değerli zamanımı ayıran danışman hocam Sayın Doç. Dr. Nusret TAN'a;

Yüksek lisans eğitimim boyunca bilgi ve tecrübelerini bizlerle paylaşan Elektrik-Elektronik Mühendisliği Bölüm Başkanlığı'nda görev yapan öğretim üyelerine;

Tüm hayatım boyunca ilgi ve desteklerini benden esirgemeyen değerli AİLEM'e ve tüm sevdiklerime;

Sonsuz saygı ve teşekkürlerimi sunarım.

İÇİNDEKİLER

	<u>Sayfa</u>
ÖZET	I
ABSTRACT	III
TEŞEKKÜR	V
İÇİNDEKİLER.....	VI
ŞEKİLLER LİSTESİ.....	VIII
TABLolar LİSTESİ.....	X
SİMGELER DİZİNİ.....	XI
1. OTOMATİK KONTROL SİSTEMLERİNİN TARİHÇESİ.....	1
1.1. Giriş.....	2
1.2. Tarihçe.....	3
1.3. Sistemi ve Kontrol Nedir ?.....	4
1.4. Bir Kontrol Sisteminin Temel Öğeleri.....	4
1.4.1. Açık Çevrim Kontrol Sistemleri.....	5
1.4.2. Kapalı Çevrim Kontrol Sistemleri.....	5
1.5. Transfer Fonksiyonları ve Blok Diyagramları.....	6
1.5.1. Blok Diyagramları	7
1.5.2. Transfer Fonksiyonları	8
1.5.3. Açık Çevrim Transfer Fonksiyonu	12
1.5.4. Kapalı Çevrim Transfer Fonksiyonu	12
1.5.5. Karakteristik Denklem	13
1.6. MATLAB.....	13
1.7. Sonuç.....	14
2. KONTROL SİSTEMLERİNİN KARARLILIĞI	16
2.1. Giriş.....	17
2.2. Kontrolör Yapıları.....	18
2.3. Tasarım Temel İlkeleri.....	19
2.4. Kararlılık.....	20
2.4.1. Kararlılık Sorunu ve Kavramı.....	20
2.4.2. Kararlılık Koşulları.....	21
2.5. Nyquist Stabilite Kriteri.....	22
2.5.1. Kompleks Değişkenli Fonksiyonların Kök Yer Eğrisi Çizimi.....	23
2.5.2. Nyquist Stabilite Kriteri	25
2.6. Karakteristik Denklemin Köklerinin Yer Eğrisi.....	28
2.6.1. Köklerin Yer Eğrisi.....	28
2.6.2. Köklerin Yer Eğrisi Çiziminde Kullanılan Kurallar.....	29
2.7. Bode Diyagramı.....	37
2.7.1. Kutup ve Sıfır Düzeninden Frekans Domeni Davranışının Saptanması.....	38
2.7.2. Bode Diyagramı.....	39
2.8. Sonuç.....	46
3. BELİRSİZ KONTROL SİSTEMLERİNİN ANALİZİ VE KARARLILIĞI.....	47
3.1. Giriş.....	48
3.2. Belirsizlik Yapıları	49
3.3. Belirsizlik İçeren Kontrol Sistemlerinin Analizinde Kullanılan Bazı Önemli Sonuçlar.....	51
3.3.1. Değer Kümesi Kavramı.....	51
3.3.2. Sıfırın Dışlanma Prensipleri.....	52

3.3.3.	Segment Lemma.....	53
3.3.4.	Kharitovs Teoremi.....	54
3.3.5.	Kenar Teoremi.....	57
3.4.	İnterval Plant Kavramı.....	58
3.4.1.	Onaltı Kharitonov Transfer Fonksiyonu.....	58
3.4.2.	Otuziki Sistem.....	59
3.5.	Sonuç.....	61
4.	BELİRSİZ KONTROL SİSTEMLERİ İÇİN TASARIM.....	62
4.1.	Giriş.....	63
4.2.	Kontrol Sistemlerinde Kullanılan Örneksel Test İşaretleri.....	64
4.3.	Performans Analizi.....	67
4.3.1.	İkinci Mertebeden Örnek Bir Sistemin Geçici Hal Yanıtı.....	68
4.4.	PID ve Lag/Lead Kontrolörler.....	73
4.5.	AISTK.....	85
4.6.	Belirsiz Sistemler İçin Kontrolör Tasarımı	91
4.7.	Sonuç.....	94
5.	KARARLILIK SINIR EĞRİSİ METODU VE UYGULAMALAR.....	96
5.1.	Giriş.....	97
5.2.	PI kontrolör Kullanarak Kararlılık.....	98
5.3.	PID Kontrolör Kullanarak Kararlılık.....	101
5.4.	Uygulamalar.....	102
5.5.	Sonuç.....	111
6.	SONUÇ.....	112
	KAYNAKLAR.....	117
	EKLER.....	120
	ÖZGEÇMİŞ.....	150

SEKİL LİSTESİ

	<u>Sayfa</u>
Şekil 1.1	Bir kontrol sisteminin temel öğeleri..... 4
Şekil 1.2	Bir Açık Çevrim Kontrol Sistemi blok diyagramı..... 5
Şekil 1.3	Kapalı Çevrim Kontrol Sistemi blok diyagramı..... 6
Şekil 1.4	Bir bileşenin blok gösterimi..... 7
Şekil 1.5	Otomobil kullanan insanın basitleştirilmiş blok diyagramı 8
Şekil 1.6	Kontrol sistemi bileşenlerinin blok diyagramı..... 8
Şekil 1.7	Doğrusal bileşenin kazanç ve faz farkı..... 9
Şekil 1.8	Kapalı çevrim transfer fonksiyonu..... 12
Şekil 1.9	Açık çevrim transfer fonksiyonu..... 12
Şekil 2.1	Kontrol edilen sistemi..... 18
Şekil 2.2	Kontrol sistem kompanzasyonda çeşitli kontrolör yapıları..... 19
Şekil 2.3	$F(s)=1/(s+1)$ kompleks değişkenli fonksiyonunun s 'in a,b,c,d karesi üzerinde değer alması halinde ω düzleminde gösterilişi..... 24
Şekil 2.4	Sağ yarım s düzlemini örten ve $1+G(s)H(s)$ karakteristik fonksiyonunu integralini almak için kullanılan C kapalı çevresi..... 25
Şekil 2.5	$1+G(s)H(s)$ 'in snin C üzerinde değişmesi halinde yer eğrisi..... 26
Şekil 2.6	s düzleminde sağ yarım düzlemi kaplayan C kapalı çevre üzerinde $j\omega$ eksenindeki ω_k, ω_m gibi tekil noktalar ile $s=0$ tekil noktası..... 27
Şekil 2.7	Bir kontrol sistemi blok diyagramı..... 28
Şekil 2.8	Açık çevrim transfer fonksiyonunu kutuplarının kök yer eğrisinin reel ekseninde ayrıldıkları noktayı bulmak için gösterimi..... 35
Şekil 2.9	Açık çevrim transfer fonksiyonunun (2.24) bağıntısı ile verilen kontrol sisteminin sıfır ve kutuplarının s düzleminde gösterimi..... 37
Şekil 2.10	$G(s) = K \frac{p(s)}{q(s)}$ Açık çevrim transfer fonksiyonunun kutup ve sıfırları ve frekans davranışının elde edilmesi..... 38
Şekil 2.11	Üç kutup ve bir sıfırı olan açık çevrim transfer fonksiyonu..... 39
Şekil 2.12	$20 \log_{10} j\omega $ teriminin $\log_{10} j\omega $ 'ya göre değişikliklere göre çizimi ve faz açıları..... 41
Şekil 2.13	$20 \log_{10} j\omega ^l$ teriminin genlik ve bir fazının bir oktav aralıklarla ayrılmış frekanslar için çizilmiş bode diyagramı..... 42
Şekil 2.14	$(j\omega T + 1)$ teriminin $\ell = 1$ için alçak ve yüksek frekans asimptotları 44
Şekil 2.15	$(j\omega T + 1)$ terimi fazının ω 'ya göre değişimleri..... 45
Şekil 3.1	Standart geribeslemeli kontrol sistemi..... 49
Şekil 3.2	Q belirsizlik küpü..... 50
Şekil 3.3	(3.9) eşitliğindeki polinomun değer kümeleri..... 52
Şekil 3.4	Segment Lemmanın geometrik gösterimi..... 54
Şekil 3.5	Kharitonov dikdörtgeni ve $p_1(s)$ Mikhilov eğrisi..... 56
Şekil 3.6	Kharitonov dikdörtgeninin hareketi..... 57
Şekil 4.1	Kontrol sistemleri tasarımında kullanılan test işaretleri..... 66
Şekil 4.2	Bir kontrol sistemini örneksel birim basamak yanıtı..... 68
Şekil 4.3	İkinci mertebeden örnek bir kontrol sistemi..... 69
Şekil 4.4	İkinci mertebeden örnek sistemde çeşitli ζ sönüm oranları için birim basamak yanıtları..... 70

Şekil 4.5	İkinci mertebeden örnek sistemde karakteristik denklem kökleri ile α , ζ , ω arasındaki ilişki.....	72
Şekil 4.6	PID kontrol işlemsel yükselteçli devre şeması.....	76
Şekil 4.7	Bir kontrol sistemi için PD, PI, PID kontrolörlerin birim basamak cevabı eğrilerinin karşılaştırılması.....	76
Şekil 4.8	PID katsayılarının birim basamak cevabı eğrisinden belirlenmesi.....	77
Şekil 4.9	Sistemin Nyquist eğrisi.....	78
Şekil 4.10	Kapalı çevrim kontrol sistemin blok diyagramı.....	79
Şekil 4.11	Bir kontrol sistemi.....	80
Şekil 4.12	Lead kontrolörün basit devre şeması.....	81
Şekil 4.13	Lead kompanze edilmiş ve kompanze edilmemiş sistemlerin birim basamak cevaplarının karşılaştırılması.....	82
Şekil 4.14	Bir lead kontrolörün Bode diyagramı.....	83
Şekil 4.15	Lag kontrolörün pasif devre şeması.....	83
Şekil 4.16	Lag kompanze edilmiş ve kompanze edilmemiş sistemlerin birim basamak cevaplarının karşılaştırılması.....	84
Şekil 4.17	Bir lag kontrolörün Bode diyagramı.....	85
Şekil 4.18	AISTK'nin blok diyagramı.....	86
Şekil 4.19	Analiz tablosu.....	86
Şekil 4.20	Kharitonov plant penceresi.....	87
Şekil 4.21	Kazanç ve faz payı penceresi.....	87
Şekil 4.22	Örnek 4.1'deki aralık transfer fonksiyonunun Nyquist Zarfı.....	88
Şekil 4.23	Örnek 4.1'deki 16 Kharitonov transfer fonksiyonunun Nyquist Diyagramı.....	89
Şekil 4.24	Örnek 4.1'deki aralık transfer fonksiyonunun Bode 89	
Şekil 4.25	Örnek 4.1'deki aralık transfer fonksiyonunun Bode diyagramının dış 90	
Şekil 4.26	Örnek 4.1'deki aralık transfer fonksiyonunun Karakteristik denklemin değer 90	
Şekil 4.27	Örnek 4.2'de verilen transfer fonksiyonunun Bode diyagramı.....	92
Şekil 4.28	Örnek 4.3'te verilen transfer fonksiyonunun Bode diyagramı.....	93
Şekil 4.29	Örnek 4.3'te verilen transfer fonksiyonunun birim basamak cevabı.....	94
Şekil 5.1	Bir tek giriş-tek çıkışlı kontrol sistemi.....	98
Şekil 5.2	Örnek 5.1'de verilen kontrol sisteminin kararlılık sınır eğrisi.....	103
Şekil 5.3	Örnek 5.1'de verilen kontrol sisteminin kararlı yapan bütün PI 104	
Şekil 5.4	Örnek 5.2'deki kontrol sisteminin farklı τ değerleri için kararlılık 105	
Şekil 5.5	Örnek 5.3'te verilen kontrol sisteminin $\phi \geq 45^\circ$ ve $A \geq 2.5$ için kararlılık 106	
Şekil 5.6	Örnek 5.3'te verilen kontrol sisteminin Nyquist diyagramı.....	107
Şekil 5.7	Örnek 5.3'te verilen kontrol sisteminin farklı k_p ve k_i değerler için step 107	
Şekil 5.8	Örnek 5.4'te verilen transfer fonksiyonunun farklı k_d değerleri için sistemi 108	
Şekil 5.9	Örnek 5.4'te verilen transfer fonksiyonunun farklı k_i değerleri için sistemi 109	

Şekil 5.10	Örnek 5.5'te verilen kontrol sistemini kararlı yapan bütün PI kontrolörler.....	110
Şekil 5.11	şekil 5.10'daki PI kontrolör kararlılık bölgesinde seçilen üç kontrolörün birim basamak tepkisi.....	111

TABLULAR LİSTESİ

	<u>Sayfa</u>
Tablo 2.1 Routh Tablosu	33
Tablo 4.1 PID Parametrelerinin kapalı çevrim cevabı üzerindeki etkisi.....	75
Tablo 4.2 Ziegler-Nichols birim basamak cevabı metoduna göre PID katsayıları.....	77
Tablo 4.3 Ziegler-Nichols birim basamak frekans cevabı metoduna göre PID katsayıları.....	79

SİMGELER DİZİNİ

$r(t)$	Zaman tanım bölgesi giriş sinyali
$y(t)$	Zaman tanım bölgesi çıkış sinyali
$g(t)$	zaman tanım bölgesi sistem gösterimi
$r(s)$	Laplace tanım bölgesi giriş sinyali
$y(s)$	Laplace tanım bölgesi çıkış sinyali
$G(s)$	Laplace tanım bölgesi sistem transfer fonksiyonu
$C(s)$	Kontrolörün Laplace tanım bölgesi gösterimi
$\Delta(s)$	Karakteristik denklem
g_m	Kazanç payı
ϕ_m	Faz payı
ω	Frekans
ω_n	Doğal frekans
ω_{cp}	Faz kesim frekansı
ω_{cg}	Kazanç kesim frekansı
$G_c(s)$	Kazanç – Faz payı test edicisi transfer fonksiyonu
ζ	Sönüm oranı

BÖLÜM I

OTOMATİK KONTROL SİSTEMLERİNİN TARİHÇESİ

- 1.1 Giriş
- 1.2 Tarihçe
- 1.3 Sistem ve Kontrol Nedir
- 1.4 Bir Kontrol Sisteminin Temel Öğeleri
 - 1.4.1 Açık Çevrimli Kontrol Sistemleri
 - 1.4.2 Kapalı Çevrimli Kontrol Sistemleri
- 1.5 Transfer Fonksiyonları ve Blok Diyagramları
 - 1.5.1 Blok Diyagramlar
 - 1.5.2 Transfer Fonksiyonları
 - 1.5.2.1 Açık Çevrim Transfer Fonksiyonu
 - 1.5.2.2 Kapalı Çevrim Transfer Fonksiyonu
 - 1.5.2.1 Karakteristik Denklem
- 1.6 MATLAB
- 1.7 Sonuç

1.1 GİRİŞ

Kontrol çok genel bir kavramdır. Genellikle insan - makine arasındaki bazı etkileşimleri ifade eder. Örneğin, bir yerden bir yere güvenli bir şekilde gidebilmek için aracı kontrol edebilmek gerekir. Bu tür bir sistem manuel bir kontrol gerektirir. Bundan dolayı otomatik kontrol sadece makineleri kapsar [1].

İnsan vücudunda daha karmaşık ve hassas kontrol işlemleri gerçekleşmektedir. Örneğin; acı duyulduğu zaman geri çekilme refleksi, ağır, hafif, sağlam veya narin cisimleri tutma, kavrama işlemi, göz-kas koordinasyonu (yazı yazma), göze giren ışık şiddeti göz bebeğinin açılıp kapanması, insan vücudundaki fizyolojik kontrol işlemlerinden bazılarıdır [2].

Bilim ve teknoloji ilerledikçe insan kas gücünün üretimdeki payı azaltmaktadır. Üretimi, makine ile veya insan gücüyle diye ayırsak, sürekli makine tarafı artma eğilimindedir. Makinelerin kullanımı da yine insan denetimi yerine başka makineler veya teçhizatlar yardımı ile yapılmaya çalışılmaktadır. Bilgisayarlı takım tezgâhlarında (CNC) nerdeyse çalışan sistem üzerinde insan denetimi yok denecek düzeydedir. Üretilmek istenen ürünün şekli bilgisayar ile çizilerek, elde edilen şekil bilgisayar programına dönüştürülerek üretim yapılmaktadır [3].

Otomatik kontrol sistemleri, çalışan sistemlerin insan gücüne gerek kalmadan denetlenmesini, kontrol edilmesini konu olarak alır. Dünyada emek yoğun üretim pahalı bir üretim yöntemi haline gelmiştir. Otomasyon sistemi ile üretim, daha ekonomik olmaktadır. Üretimin her aşamasına hızlı bir şekilde girmeye devam ediyor. Böylece daha ucuz ve standardı önceden belirtilen ölçülerde üretim yapılabilir. İyi yetişmiş bir kalifiye elemanın manuel tezgâhlarda 4 saatte ürettiği bir ürünü, otomatik sistemler 7 dakika gibi çok kısa bir sürede üretiyor. Arada 34 kat gibi büyük bir zaman farkı var. Bu fark maliyet açısından kapatılamaz büyüklüktedir. Ayrıca, sağlık ve çevre koşulları göz önünde tutulduğunda bazı iş alanlarında insan çalıştırmanın mümkün olmadığı görülmektedir (Zehirli yerler, tehlikeli yerler, çok sıcak yerler gibi) [3]. Belirtilen bu nedenlerden dolayı otomatik kontrolün yani kontrol sistemlerinin önemi ortaya çıkmaktadır.

Büyük önem arz eden kontrol sistemleri üzerine çok eski çağlardan itibaren çeşitli çalışmalar yapılmıştır ve kontrol mühendisliği ortaya çıkmıştır. Kontrol mühendisliği: motor, jeneratör ve güç sistemleri elektriksel sistemler, ısı sistemler, araba ve

motosiklet gibi mekanik sistemler, uçak ve füze gibi aerodinamik sistemler, elektrik motoru ve robot kolu gibi elektromekanik sistemler, kağıt makinesi ve çelik levha üretim bandı gibi endüstriyel sistemler, güneş paneli gibi foto-elektrik sistemler, akışkan sistemler, elektromanyetik sistemler, internet gibi bilgi iletim sistemleri, ulaşım sistemleri, sosyal ve ekonomik sistemler, biyolojik, tarım ve ekolojik sistemleri ile ilgilenmektedir [4]. Yani kısaca kontrol, insan hayatının tüm alanları ile ilgilidir. Tüm bu sistemlerin ortak noktası davranışlarının matematiksel ifadelerinin birbirlerine benzemesidir.

1.2 TARİHÇE

Yaşadığımız ortamlarda konforlu bir yaşam sürdürebilmemiz için binaların sıcaklık ve nemini ayarlamamız gerekir. Ulaşımında bir noktadan diğer bir noktaya emniyetli bir şekilde gidebilmemiz için otomobil ve uçakları kontrol etmek zorundayız. Endüstrideki üretim süreçlerinde, ürünlerin doğru imal edilmeleri ve maliyetleri yönünden, çeşitli amaçlar güdülür. Bir insan, karar verme dahil olmak üzere, çok farklı görevleri yerine getirme yetisine sahiptir. Bu görevlerden bir kısmı, bir nesneyi tutmak ve bir noktadan başka bir noktaya yürümek gibi, çok olağan ve sıradan işlemlerden oluşur. Örneğin, 100 metre koşan bir atlet bu mesafeyi mümkün olabilecek en kısa zamanda koşmayı amaçlar. Diğer taraftan, bir maraton koşucusu mesafeyi en kısa zamanda koşmanın yanısıra, enerji tüketimini kontrol etmek, kendisi için en uygun yarış stratejisini izlemek zorunluluğundadır. Bu hedefler ulaşmak için genellikle kontrol stratejisini gözeterek kontrol sistemlerini kullanmak gerekir [5].

En eski kontrol örnekleri su saatini düzenlemek için su akış hızının kontrol edilmesi ve şarap fıçısının seviyesinin sabit tutulmasıdır. Su seviyesi kontrolünü günümüzde hala kullanıyoruz. Su seviyesi azalınca şamandıra da aşağıya iner ve su seviyesi yükselmeye başlar. Su seviyesi yükselince su akışı yavaşlar ve gerektiğinde durur [6].

Bir diğer ilk kontrol örneği de Cornelis Drebbel tarafından 1620 lerde keşfedilen kuluçka ünitesinin sıcaklığının kontrolüdür. Bu sistemde sıcaklık algılayıcısı içi alkol ve civa ile dolu ve etrafında su ceket olan bir cam taşıyıcıdır. Ateş kutuyu ve suyu ısıttığında, alkol genişler ve kol yukarıya hareket ederek damperin bacanın üstüne doğru yaklaşmasını sağlar. Eğer kutu soğuduysa alkol büzülür, damper kol tarafından aşağıya çekilir ve ateş alevlenir. İstenilen sıcaklık değeri kol'un uzunluğu ile ayarlanır.

Yunan uygarlığı zamanında İskenderiye'de hidrolik düzenlere sahip hareketli kuklalar vardı. Bunlar, insana benzetmek amacıyla yapılmayıp hidrolik bilimi eğitiminde deney aracıydı ve tapınaklarda saklanırdı. Arada sırada da tapınağa gelenleri etkilemek veya eğlendirmek için kullanılırdı. Ortaçağda Selçuklu Türklerinin Sükman boyundan Cizreli Ebul-İz, yalnız suyun potansiyel ve kinetik enerjilerinden faydalanarak makine ve robotlar yaptı. İlkel otomatlar 17. ve 18. yüzyıllarda Avrupa'da bulundu. Bunlar birer mekanik harikasıydılar. Zamanımızdan 350 yıl evvelinden mucitler ilginç makineler icat edip üretime geçtiler. Kilise ve katedrallerin tepesinde bulunan devasa saatlerde gerçek boyutlarında insan, melek, şeytan gibi figürler vardı. Bunlar ellerindeki çana bir tokmakla vurarak saati belirtirlerdi. Williams ve Penniman bu gibi gelişmeler hakkında detaylı bilgi verdiler [6] . Bazıları şöyledir:

1) **Ötücü kuş:** Kurulu düzenek tarafından miller ve kaldıraçlar yardımıyla kuşun kanatları, kafası ve gagası kontrol ediliyordu. Ayrıca vana ve pistonlar sayesinde kuş sesi çıkarıyordu. Çalışırken kafasını ve kanatlarını hareket ettirip öterken de gagasını oynatıyordu. Bundan çok sayıda üretildi ve ev dekorasyonunda kullanıldı. Kuşun hareketlerini sağlayan, miller (ki bunlar bir çeşit salt okunur bellek -ROM- gibidir) ve mekanik sürücüdür. Elektronik karşılığı ROM birimi ve küçük bir elektrik motorunu kontrol eden transistorlu sürücülerdir.

2) **Otomatik Flütçü:** Müzisyen kıyafeti giyen otomatik flütçü, dudaklarına yapışık flüte hava üflerken parmaklarıyla da flütün deliklerini açıp kapatırdı. Millerle sağlanan bir takım hareketler müzik kutusu tamburuna benzer, dilimlenmiş karmaşık bir tamburla yönlendiriliyordu. Bu flütçü 1738 yılında Jacques de Vaucanson tarafından Paris'de yapılmıştı. O zamanlarda metal işleme yapan makineler olmadığından tamamı el işiydi. Vaucanson yaptığı bu otomatı bir binada sergiledi ve insanlar bunu görebilmek için çok uzaklardan bile geldiler. Hatta krallar ve imparatorlar bile özellikle memnuniyetlerini belirttiler. Bu yüzden pek çok kabiliyetli mucit otomatlar üzerine çalışmaya başladı.

3) **Maillardet'in Otomatı:** Belki de kurulu düzenekli otomatlar içinde en karmaşık olanı 1805 yılında Londra'da Henri Meillardet tarafından yapılan yazı yazabilen ve resim yapabilen inanılmaz otomattır. Geniş belleği ve titiz hareketleri vardı. Örneğin bir gemi resmini aslına uygun, bütün detaylarıyla beş dakikada çizebiliyordu. Repertuarında pek çok örnek vardı ve bunlardan biri de Fransız stilinde yazılmış beş dizelik şiirdi. Bu otomat halen Franklin Enstitüsünde sergilenmektedir.

İlk sistematik kararlılık çalışması 1868 J.C. Maxwell'in 'On Governors' adlı makalesiyle yayınlandı. Bu makalede Maxwell, governor'un diferansiyel denklemlerini çıkartıp denge noktası etrafında doğrusallaştırıp, sistem kararlılığının karakteristik denklemin kutuplarının negatif olmasıyla mümkün olacağını belirtmiştir. 1877'de E.J. Routh karakteristik denkleme göre kararlılık kriterini geliştirerek ödül almıştır. Bunun hemen ardından Rus matematikçi A.M. Lyapunov, 1893, hareketin, hareketli sistemlerin kararlılığı üzerine çalışmalara başlamıştır. Daha çok lineer olmayan diferansiyel denklemlerle hareketi incelemiştir. Lyapunov'un çalışmaları Durum değişkenleri yaklaşımının temelini teşkil etmektedir fakat bu yaklaşım ancak 1958 de kontrol literatürüne girmiştir [7].

1932'de Nyquist, frekans döngü cevabından kararlılığın grafiksel olarak nasıl belirlenebileceğini yayınladı. İlk PID (Proportional-İntegral-Derivative) kontrol Callender ve arkadaşları tarafından 1936'da geliştirildi. Uçak kontrolü üzerine çalışan W.R. Evans, uğraştığı bir çok problemin kararsız veya marjinal kararlı sistemler olması sebebiyle frekans metotları ile başarılı olamadı ve karakteristik denklemde parametre değişimine göre sistem davranışını inceleyen Kök Yer Eğrilerini geliştirdi, 1948. 1950'lerde adi diferansiyel denklemler kontrol sistemlerinin modellenmesinde kullanılmaya başlandı. 1960 daki H.W Bode'nin konuşmasından esinlenilerek, 1964 Bellman ve Kalaba geri besleme kuvvetlendiricisini geliştirmişlerdir.

1.3 SİSTEM VE KONTROL NEDİR ?

Sistem: Özel bir görevi yapmak üzere, aralarında belirli ilişkiler ve etkileşimler bulunan nesnelere ve donanımların bir bütün oluşturacak biçimde bütünleşik kombinezyonudur [5].

Kontrol: Kontrol edilen nesnenin hangi durumda ne yapacağı, ne tepki gösterebileceğine karar verme işine kontrol etme diyoruz. Mühendislik açısından bakıldığında kontrol sistemi araçlar ve programdan oluşur.

1.4 BİR KONTROL SİSTEMİNİN TEMEL ÖĞELERİ

İşaret: Sistem elemanlarının ve sistemlerin birbirleriyle etkileşmelerini sağlayan her türlü ölçülebilir büyüklüktür.



Şekil 1.1 Bir kontrol sisteminin temel öğeleri

Kontrol sistemlerinde amaçlar u girişleri ile ya da başka bir ifadeyle sürücü işaretlerle belirlenir, sonuçlar ise y çıkışlarını ya da kontrol edilen değişkenleri etkiler.

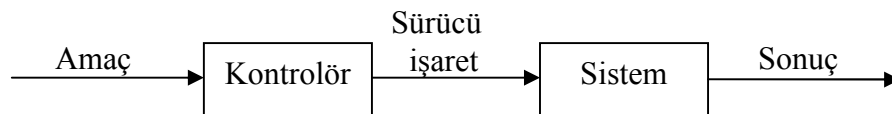
Genel olarak bir kontrol sisteminin amacını, kontrol sisteminin elemanları aracılığı ile sistemi belirli bir duruma yönlendirme hedeflenir. Elektriksel sistemlerde: bir elektrik devresinin akım ve gerilim kontrolü, Aerodinamik sistemlerde, uçağın kabin basıncı, motor hızı ve üç boyutta konum, hızı, ivme kontrolü, robot kolunun kontrolü kontrol sistem uygulamalarına örnek olarak verilebilir.

Kontrol sistemleri kontrol (denetim) etkisi açısından iki ana sınıfa ayrılır:

1. Açık çevrimli kontrol sistemleri (Geribeslemesiz sistemler)
2. Kapalı çevrimli kontrol sistemleri (Geribeslemeli sistemler)

1.4.1 Açık Çevrimli Kontrol Sistemleri

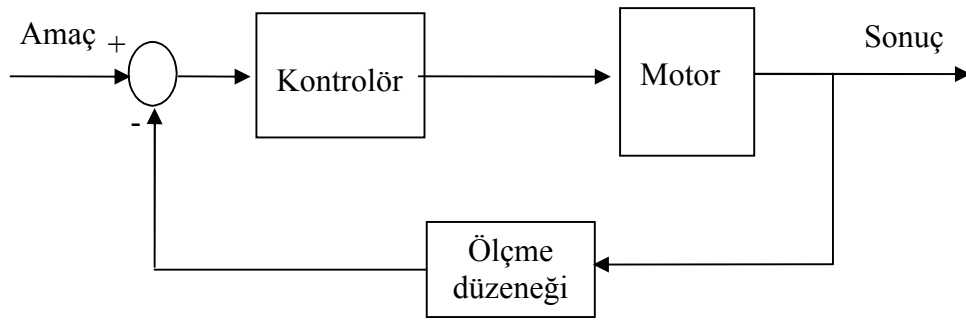
Giriş ve çıkış bağıntıları önceden belli olan ve çıkışın ölçülmediği kontrol sistemleridir. İç veya dış bozucu etkilerin (disturbance) üstesinden gelme yeteneğine sahip değildirler. Bu tip kontrolde geri besleme yapılmadığından sistemlerde sensörlere ihtiyaç yoktur. Bu tür sistemler sadece çok iyi derecede planlanmış durumlarda ve çevrenin sistemi etkilemediği durumlarda kullanılır. Bu tür sistemler ya zamanlama ya da sıralama esasına göre çalışırlar. Bu tür açık çevrim kontrol sistemlerine, basit ve ekonomik olmaları nedeniyle, çok sayıda karmaşık olmayan uygulamada rastlamak mümkündür. Örneğin; DC motorlarda hız kontrolü motora verilen voltaja göre hızını ayarlanabilmektedir. Evlerde kullandığımız ısıtıcı aletleri kademe ayarına göre ısıtıcının derecesi belli değerde kalması sağlanır. Açık çevrimli bir kontrol sisteminin blok diyagramı şekil 1.2’ de görülmektedir:



Şekil 1.2 Bir açık çevrim kontrol sistemi blok diyagramı

1.4.2 Kapalı Çevrimli Kontrol Sistemleri

Açık çevrim kontrol sistemlerinin hatasız ve adaptif kontrolü için gerekli olan şey, sistem çıkışında girişine bir bağlantının oluşturulması, ya da geribeslemesidir. Bir sistemi istenen duruma eriştirmek ve o halde kalmasını sağlamak amacıyla o anki durumla istenilen durumun sürekli karşılaştırılmasıdır. Aynı zamanda feed back kontrol olarak da adlandırılır. Bir kontrol sistemi öncelikle o anki durumla istenilen durum arasındaki farkı bulmalıdır. Bu fark hata olarak adlandırılır ve kontrol sisteminin amacı bu hatayı minimize etmektir. Bazı sistemlerde hata değerlendirmesi sadece iki ifadeyle sağlanır: sıfır ve sıfır değil. Hata bilgisinin bir diğer ifade yolu da mesafe (magnitude)'dir. Örneğin bir termostat sayesinde odanın iç sıcaklığını istenilen sıcaklık etrafında salınır. Geribesleme negatif ve pozitif geribesleme olmak üzere iki çeşittir. Negatif geri beslemede giriş değerlerine göre hareketi ayarlamaktır. Örnek olarak vücudumuzdaki kas sistemi verilebilir. Pozitif geri beslemede giriş değerlerine göre hareketi fazlaştırmaktır. Çıkış girişe aynı yönde etki eder. Bu sebeple çıkışta herhangi bir artış meydana gelecek olursa bu giriş ile toplanarak hata sinyalinde bir artış ve dolayısıyla da denetim sinyalinde bir artış meydana getirir. Bu ise sistemde çıkışı daha da artıracak yönde bir etki yaratır. Şekil 1.3' de kapalı çevrim bir sistemin blok diyagramı görülmektedir.

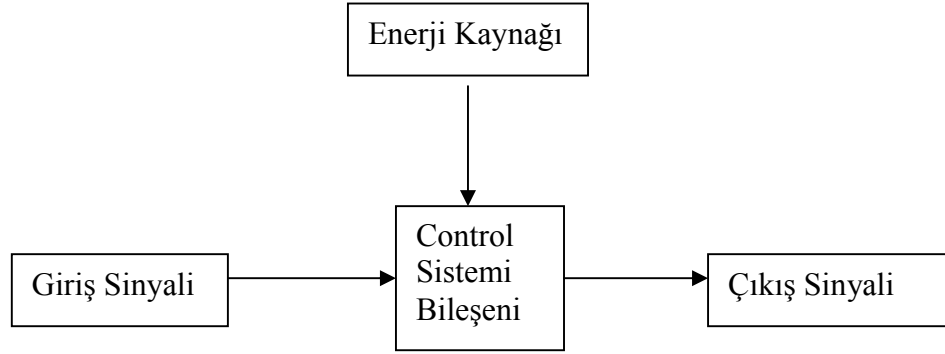


Şekil 1.3 Bir kapalı çevrim kontrol sistemi blok diyagramı

1.5 Blok Diyagramlar ve Transfer Fonksiyonları

Tek bir kontrol sisteminde bir çok çeşitte bileşen ya da tamamen farklı bileşenleri olan iki sistem bulmak çok da olağan dışı olmamasına rağmen herhangi bir kontrol sistemi her bir bileşenin karakteristiklerini tanımlayan matematiksel ifadeler kümesi olarak tanımlanabilir. Çok çeşitli kontrol problemi makine aygıtları, servomekanizmalar, uzay araçları, trafik, hatta ekonomi- aynı matematiksel metotlarla

analiz edilebilir. Her bileşenin önemli özelliği sistemdeki etkisidir. Blok diyagram her bileşenin sadece bu önemli özelliğini tutan bir kontrol sistemi gösterim metodudur. Sinyal hatları şekil 1.4 de görüldüğü gibi bileşenin giriş ve çıkış sinyallerini gösterir.



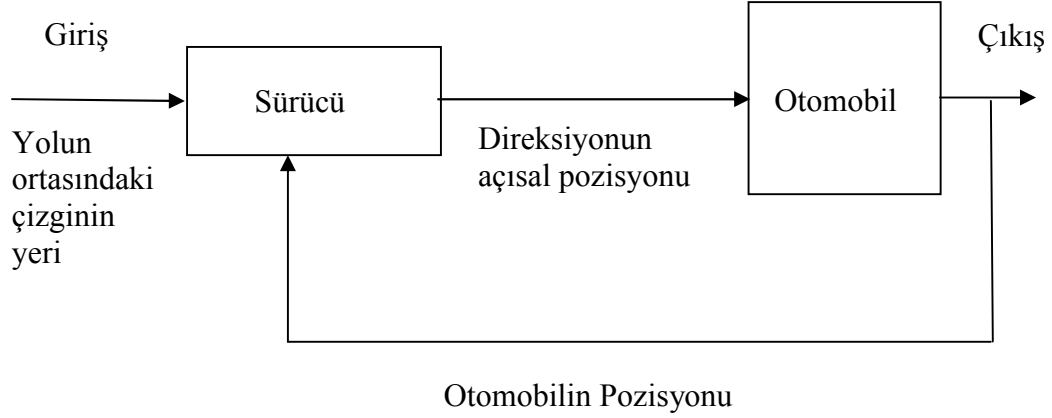
Şekil 1.4 Bir bileşenin blok gösterimi

Enerji kaynağı çoğu blok diyagramlarda gösterilmez. Buna rağmen, çoğu bileşen giriş sinyalinin yükseltilmesini mümkün yapmak için harici enerji kaynağına sahiptir.

1.5.1 Blok Diyagramları

Blok diyagram sinyal yolunu gösteren hatlarla bağlı bir kontrol sistemindeki her bileşenin blok gösteriminden oluşur. Şekil 1.5 otomobil kullanan bir insanın çok basit blok diyagramını göstermektedir. Sürücünün görme duyusu iki giriş sinyali sağlar: otomobilin yeri ve yolun merkezinin yeri. Sürücü iki pozisyonu karşılaştırır ve otomobilin doğru yerini koruyacak direksiyon durumunu belirler. Kararı uygulamak için, sürücünün elleri ve kolları direksiyonu yeni yere hareket ettirir. Otomobil direksiyondaki değişikliğe karşılık gelen yöndeki değişikliklerle cevap verir. Kısa bir zaman geçtikten sonra, yeni yön otomobili yeni konuma hareket ettirir. Böylece, direksiyonun konumundaki değişikliklerle otomobilin konumundaki değişiklik arasında zaman gecikmesi vardır. Bu zaman gecikmesini otomobilin blok gösteriminin matematiksel eşitliği içerir [8].

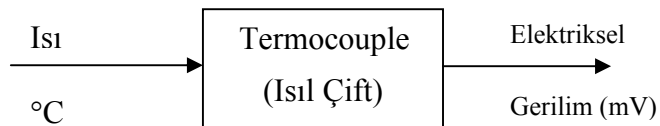
Blok diyagramdaki döngü kontrolün esas kavramını belirtir. Otomobilin gerçek konumu istenilen pozisyonu korumak için gerekli düzeltmeyi belirlemede kullanılır. Bu kavram *geri besleme* olarak adlandırılır ve geri beslemeli kontrol sistemleri de *kapalı-döngü kontrol sistemleri* olarak adlandırılır. Geri beslemesi olmayan kontrol sistemleri *açık-döngü kontrol sistemleridir*. Çünkü onların blok diyagramlarında döngü yoktur ve gerçek durum, düzeltme hareketini belirlemek için kullanılmaz.



Şekil 1.5 Otomobil kullanan insanın basitleştirilmiş blok diyagramı

1.5.2 Transfer Fonksiyonları

Bileşenin en önemli karakteristiği giriş sinyali ile çıkış sinyali arasındaki ilişkidir. Bu ilişki bileşenin transfer fonksiyonu ile açıklanır. Transfer fonksiyonu çıkış sinyalinin giriş sinyaline bölümü olarak tanımlanır. Çoğunlukla çıkış sinyalinin Laplace dönüşümünün giriş sinyalinin Laplace dönüşümüne bölümüdür. Şekil 1.6'da, giriş derecesini T ile gösterirsek, çıkış gerilimini V ve transfer fonksiyonunu da H ile gösterirsek, o zaman $H = V/T$ ve $V = HT$ olur. Böylece, eğer giriş sinyalini ve transfer fonksiyonunu biliyorsak o zaman çıkış sinyalini giriş transfer fonksiyonu ile çarparak hesaplayabiliriz.



Şekil 1.6 Kontrol Sistemi Bileşenlerinin Blok Gösterimi

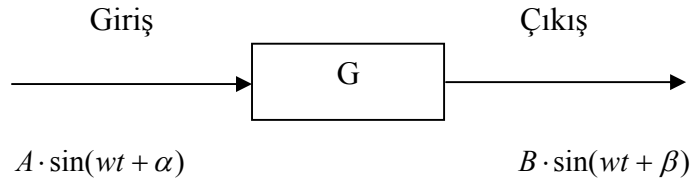
Transfer fonksiyonu iki parçadan oluşur. Bir parça girişle çıkış arasındaki *büyüklik* ilişkisidir. Diğer parça da girişle çıkış arasındaki *zamanlamadır*. Örneğin, büyüklik öyle olabilir ki çıkış girişin iki katı büyüklüğündedir ve zamanlama ilişkisi de girişteki değişikliğe karşılık gelen çıkıştaki değişiklik iki saniye gecikmelidir.

Eğer bileşen doğrusal ise ve giriş sinyali sinüzoidal sinyalse, büyüklik ilişkisi *kazançla* ve zamanlama da *faz farkıyla* ölçülür. Şekil 1.7 sinüzoidal girişli doğrusal bileşeni göstermektedir. Bileşenin kazancı çıkış sinyalinin genliğinin giriş sinyalinin genliğine oranına eşittir.

$$\text{Kazanç} = \frac{\text{Çıkış Sinyalinin Genliği}}{\text{Giriş Sinyalinin Genliği}} \quad (1.1)$$

Bileşenin faz farkı çıkış sinyalinin faz açısından giriş sinyalinin faz açısının çıkarılması ile elde edilir.

$$\text{Faz farkı} = \text{çıkış faz açısı} - \text{giriş faz açısı} \quad (1.2)$$



Şekil 1.7 Doğrusal bileşenin kazanç ve faz farkı

Giriş, çıkış ve transfer fonksiyonunu göstermekte en uygun yöntem kompleks sayılardır (polar formda). Şekil 1.7' de, giriş $A \angle \alpha$ ve çıkış $B \angle \beta$ kompleks sayısı ile gösterilir. Transfer fonksiyonu, G , çıkış $B \angle \beta$ yi giriş $A \angle \alpha$ ya bölerek aşağıdaki gibi elde edilir:

$$G = B \angle \beta / A \angle \alpha = B / A * \angle(\beta - \alpha) \quad (1.3)$$

Böylece transfer fonksiyonu, G , büyüklüğü bileşenin kazancı, B/A olan ve açısı da çıkışın fazı eksi girişin fazı olan kompleks bir sayı ile gösterilir.

Bir bileşenin kazancı çoğunlukla çıkışın genliğindeki değişimin girişin genliğindeki karşılık gelen değişime oranı olarak açıklanır.

$$\text{Kazanç} = \frac{\text{Çıkış Genliğindeki Değişim}}{\text{Giriş Genliğindeki Değişim}} \quad (1.4)$$

Böylece girişin her bir 1 V değişimine çıkışta 10 V üreten bir yükselteç volt başına 10 V luk kazanca sahiptir (V/V). Girişteki her 1V luk değişime karşılık dakikada 1000 dönüş (rpm) hızında değişim üreten bir DC motorun kazancı 1000 rpm/V tur. Her 1 °C sıcaklık değişimine karşılık 0.06 mV luk çıkış değişimi üreten bir thermocouplerın 0.06 mV/°C kazancı vardır. Bir bileşenin verilen bir frekanstaki kazanç ve faz farkı o bileşenin o frekanstaki *frekans cevabı* olarak adlandırılır [8].

Örnek1.1:

Bir doğrusal sistem bileşenine 5.3V tepe genlikli ve 30 ° faz açılı 0.5 Hz sinüsoidal sinyal girişi vardır. Bileşenin 14 mili amper tepe genlikli ve 25 ° faz açılı çıkışı vardır. Bu şartlar için kazancı, faz farkını ve transfer fonksiyonunu belirleyin.

$$\begin{aligned} \text{Kazanç} &= 14 \text{ mA}/5.3 \text{ V} \\ &= 2.64 \text{ mA/V} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Faz farkı} &= 25 - 30 \\ &= -5^\circ \end{aligned}$$

$$\text{Transfer fonk} = 2.64 \angle -5(\text{mA/V})$$

Doğrusal sistemlerin modellenmenin geleneksel yöntemi, değişkenler arasında giriş çıkış ilişkisini ifade etmek, ya da transfer fonksiyonlarını kullanmaktır. Transfer fonksiyonlarını tanımlamanın bir yolu da impuls yanıtı kavramından yararlanmaktır.

Doğrusal, zamanla değişmeyen bir sistemde girişin transfer fonksiyonun $u(t)$ ve çıkışın $y(t)$ olduğunu varsayalım. Bu durumda sistem, girişe bir impuls fonksiyonu $u(t)$ uygulandığında çıkışında elde edilen impuls yanıtı $g(t)$ ile belirlenebilir. Doğrusal sistemin darbe yanıtı bir kez bilinirse, sistemin herhangi bir $u(t)$ girişine yanıtı $y(t)$, transfer fonksiyonundan yararlanılarak belirlenebilir.

Doğrusal zamanla değişmeyen bir sistemde bir sistemin transfer fonksiyonu, başlangıç koşulların sıfır olması halinde, sisteme uygulanan impuls yanıtının Laplace

dönüşümü olarak tanımlanır. Tek giriş ve tek çıkışlı bir sistemde $u(t)$ giriş, $y(t)$ çıkış ve $g(t)$ impuls yanıtı olmak üzere, $G(s)$ sistemin transfer fonksiyonunu ifade etsin. Bu durumda $G(s)$ aşağıdaki gibi tanımlanır.

$$G(s) = \ell [g(t)] \quad (1.5)$$

$G(s)$ transfer fonksiyonu, $u(t)$ giriş ve $y(t)$ çıkış işaretinin Laplace dönüşümü $U(s)$ ve $Y(s)$ ve tüm başlangıç koşulları sıfır olmak üzere,

$$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} \quad (1.6)$$

ilişkisini sağlar. Her ne kadar doğrusal bir sistemin transfer fonksiyonu impuls yanıtı cinsinden tanımlansa bile uygulamada doğrusal, zamanla değişmeyen sürekli bir sistemin giriş çıkış ilişkisi genellikle bir diferansiyel denklemle elde edilebilir ve transfer fonksiyonun doğrudan diferansiyel denklemle türetilmesi daha kolaydır. Doğrusal, zamanla değişmeyen bir sistemde giriş-çıkış ilişkisinin aşağıdaki sabit katsayılı n'inci mertebeden diferansiyel denkleminin verildiğini varsayalım:

$$\begin{aligned} \frac{d^n y(t)}{dt^n} + a_{n-1} \frac{d^{n-1} y(t)}{dt^{n-1}} + \dots + a_1 \frac{d y(t)}{dt} + a_0 y(t) \\ = b_m \frac{d^m u(t)}{dt^m} + b_{m-1} \frac{d^{m-1} u(t)}{dt^{m-1}} + \dots + b_1 \frac{du(t)}{dt} + b_0 u(t) \end{aligned} \quad (1.7)$$

Burada a_0, a_1, \dots, a_{n-1} ve b_0, b_1, \dots, b_m katsayıları sabit katsayılardır.

Diferansiyel denklemi 1.6 ile verilen doğrusal bir sistemin transfer fonksiyonunu elde etmek için, başlangıç koşulları sıfır kabul edilerek, denklemin her iki tarafına Laplace dönüşümü uygulanır. Bu durumda

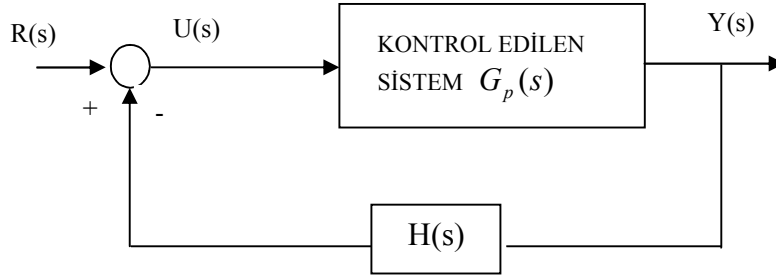
$$(s^n + a_{n-1}s + \dots + a_1s + a_0)Y(s) = (b_m s^m + b_{m-1}s^{m-1} + \dots + b_1s + b_0)U(s) \quad (1.8)$$

yazılabilir. $u(t)$ ve $y(t)$ arasındaki transfer fonksiyonu

$$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{b_m s^m + b_{m-1} s^{m-1} \dots + b_1 s + b_0}{s^n + a_{n-1} s + \dots + a_1 s + a_0} \quad (1.9)$$

olarak elde edilir.

1.5.2.1 Açık Çevrim Transfer Fonksiyonu



Şekil 1.8 Kapalı Çevrim Transfer Fonksiyonu

Şekil 1.8' de görülen kapalı çevrim transfer fonksiyonu geribesleme olan $H(s)$ 'in $G(s)$ seri bağlanması ile elde edilen transfer fonksiyonu olarak tanımlanabilir. Şekil olarak gösterilecekse aşağıdaki sistemi elde ederiz.



Şekil 1.9 Açık Çevrim Transfer Fonksiyonu

Buna göre açık çevrim transfer fonksiyonu

$$\frac{Y(s)}{R(s)} = G_p(s)H(s) \quad (1.10)$$

olarak elde edilir.

1.5.2.2 Kapalı Çevrim Transfer Fonksiyonu

Bir kapalı çevrim sistemin kapalı çevrim transfer fonksiyonu çıkışın Laplace dönüşümünün girişin Laplace dönüşümüne oranı şeklinde tanımlanır. Bu transfer fonksiyonu sistem davranışı ile ileri ve geri besleme arasındaki bağıntıyı verir. Şekil 1.8’de gösterilen sistemin kapalı çevrim transfer fonksiyonu aşağıdaki gibidir.

$$\frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{G_p(s)}{1 + G_p(s)H(s)} \quad (1.11)$$

1.5.2.3 Karakteristik Denklem

Doğrusal bir sistemin karakteristik denklemi, transfer fonksiyonun pay polinomu sıfıra eşitlenerek elde edilen denklemdir. Buna göre 1.11 denkleminde ifade edilen sistemin karakteristik denklemi

$$s^n + a_{n-1}s + \dots + a_1s + a_0 = 0 \quad (1.12)$$

şeklinindedir. İleriki bölümlerde gösterileceği gibi doğrusal tek girişli tek çıkışlı bir sistemin kararlılığı karakteristik denklemin kökleriyle belirlenebilir. Eğer karakteristik denklemin tüm kökleri negatif reel kısma sahipse başka bir deyişle sol yarı s düzleminde yer alıyorsa sistem kararlıdır. Fakat köklerden bir tanesi pozitif reel kısma sahip ise yani sağ yarı s düzleminde ise sistem kararsızdır.

1.6 MATLAB

MATLAB; ilk defa 1985 de C.B. Moler tarafından geliştirilmiş ve özellikle de matris esaslı matematik ortamda kullanılabilen etkileşimli bir paket programlama dili olarak tanımlanmıştır. Başlangıçta MATLAB özellikle mühendislik alanında, iyi grafiksel özelliklere sahip daha çok sayısal hesaplamalarda kullanılmak amacıyla geliştirilmiş bir paket programlama dili olarak ortaya çıkmıştır. O zaman için özellikle FORTRAN dilinde uzun zaman alan programlama işlemlerine bir alternatif olarak ortaya çıkmıştır.

MATLAB Tüm mühendislik dallarında rahatlıkla kullanılabilen bir programlama dilidir. Denklem takımları çözümü, lineer ve lineer olmayan diferansiyel denklemlerin çözümü, integral hesabı, istatistiksel hesaplamalar, grafik çizimi, bilgisayar destekli

kontrol sistemi tasarımı MATLAB'ın kullanım alanları olarak sıralanabilir. Özellikle Control Toolbox ve Signal Toolbox gibi paketler kontrol sistemlerinin tasarımında çok etkili araçlardır. FORTRAN ve C gibi yüksek seviyeli programlama dilleri ile yapılan hesaplamaların pek çoğu MATLAB ile de gerçekleştirilebilmektedir. Ayrıca FORTRAN ve diğer programlama dillerinde yapılan programları MATLAB'da daha az komut kullanarak gerçekleştirmek mümkündür. Bu da MATLAB'ı diğer programlama dillerine karşı üstün kılmaktadır.

MATLAB çalıştırıldığında şekil komut penceresinde (command window) “>>” sembolü görülür. Bu programın komut yazılarak çalıştırılmaya hazır olduğunu gösterir [9].

Bugün için farklı alanlarda kullanılabilen çok geniş ürün yelpazesine sahip MATLAB, teknik hesaplamalarda kullanılan yüksek başarılı bir dil olarak tanımlanmaktadır. MATLAB'ın belli başlı kullanım alanları;

- Matematik ve hesaplama işlemleri, algoritma geliştirme
- Modelleme, benzetim ve prototipleme
- Verilerin analizi incelenmesi ve görüntülenmesi
- Bilimsel ve mühendislik alanında grafik işlemleri
- Grafiksel kullanıcı arayüz yapısını da içine alan uygulama geliştirme

Burada bizim değineceğimiz bilimsel ve mühendislik alanında grafik işlemlerinden birisi olan otomatik kontrol sistemlerinin kararlılık ve frekans-faz değişimlerini bulabilmek için çizilen diyagramlardır. Kontrol sistem toolbox doğrusal zamanla değişmeyen sistemleri araştırmak ve analiz etmek amacıyla yönelik çok kapsamlı araçlar sunmaktadır. Durum uzayı denklemleri ile de tanımlanabilen bu tür sistemlerin laplace dönüşümleri alınarak transfer fonksiyonları elde edilebilir. Lineer zamanla değişmeyen kontrol sistemlerini transfer fonksiyonu (tf), sıfır/kutup/kazanç (zpk), durum uzayı (ss) veya frekans cevabı verileri (frd) biçiminde tanımlamak mümkündür. Bu modellerle karşılık gelen komutlar aşağıdaki gibidir [10].

```
sys=tf(num,den) % transfer fonksiyonu
```

```
sys=zpk(z,p,k) % sıfır/kutup/kazanç
```

```
sys=ss(a,b,c,d) % durum uzayı
```

sys=frd (cevap,frekanslar) % frekans cevabı eğrileri

Bu komutların çıktısı olarak elde edilen sys sırasıyla tf, zpk, ss ya da frd nesnesi alan modellerin özel yapısıdır.

1.10 SONUÇ

Tezin bu bölümünde kontrole giriş mahiyetinde bazı temel bilgiler verilmeye çalışılmıştır. Özellikle, transfer fonksiyonları, karakteristik denklem ve kararlılık analizleri, gibi tezin hazırlanmasında öncelikli olan kısımlara değinilmeye çalışılmıştır. MATLAB programının gelişimi ve kullanım alanları hakkında değinilmeye çalışılmıştır. Ayrıca program komutlarının kullanılışı ve anlamı üzerinde bilgi verilmiştir. Bu bilgiler tezin ileriki bölümlerinde MATLAB kullanılarak uygulamalı örnekler ve grafikler elde edileceğinden burada programın temel bilgilerin öğrenilmesi problemlerin çözülmesi açısından büyük yarar sağlayacaktır. Arzu edilirse anlatılan konularla ilgili gerekli detaylar [1-10] kaynaklarından elde edilebilir.

BÖLÜM II

KONTROL SİSTEMLERİNİN KARARLILIĞI

- 2.1 Giriş
- 2.2 Kontrolör Yapıları
- 2.3 Tasarım Temel İlkeleri
- 2.4 Kararlılık
 - 2.4.1 Kararlılık Sorunu ve Kavramı
 - 2.4.2 Kararlılık Koşulları
- 2.5 Nyquist Stabilite Kriteri
 - 2.5.1 Kompleks Değişkenli Fonksiyonların Kök Yer Eğrisi Çizimi
 - 2.5.2 Nyquist Stabilite Kriteri
- 2.6 Karakteristik Denklemin Köklerinin Yer Eğrisi
 - 2.6.1 Köklerin Yer Eğrisi
 - 2.6.2 Köklerin Yer Eğrisi Çiziminde Kullanılan Kurallar
- 2.7 Bode Diyagramı
 - 2.7.1 Kutup ve Sıfır Düzeninden Frekans Domeni Davranışının Saptanması
 - 2.7.2 Bode Diyagramı
- 2.8 Sonuç

2.1 GİRİŞ

Tasarım kriterleri genellikle sistemin ne yapması gerektiğini belirtmek ve nasıl yaptığını değerlendirmek için kullanılır. Bu kriterler her bir uygulamaya özgü farklıdır ve genellikle *görelî kararlılık*, *kararlı hal doğruluğu (hata)*, *geçici yanıt* ve *frekans yanıtı* özellikleri ile ilgili kısımlardan oluşur. Bazı uygulamalarda parametre değişimlerine karşı duyarlılık (örneğin dayanıklılık ya da bozucuları etkisiz kılma) gibi ilave kriterlerden de yararlanır [5].

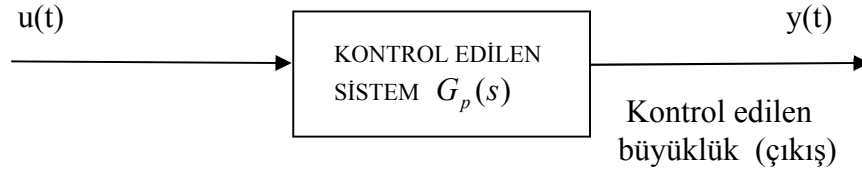
Doğrusal kontrol sistemlerinin tasarımı zaman ya da frekans tanım bölgesinde gerçekleştirilebilir. Örneğin kararlı hal doğruluğu genellikle birim basamak, rampa ya da parabolik giriş için tanımlanır. Belirli tasarım kriterleri zaman tanım bölgesinde çok daha kolay değerlendirilebilir. *En büyük aşım*, *yükselme zamanı* ve *yerleşme zamanı* gibi birim basamak için tanımlanan kriterler genellikle zaman tanım bölgesi tasarımında kullanılırlar. Görelî kararlılığın *kazanç payı*, *faz payı* ve M_r gibi büyüklüklerle ölçülebilir. Bu tür frekans tanım bölgesi kriterleri Bode diyagramı, kutupsal yer eğrisi, genlik-faz eğrisi ve Nichols diyagramı ile birlikte kullanılmalıdır.

Güçlü ve kullanıcıya yönelik bilgisayar yazılımları geliştirilip yaygınlaştırılmış olması, bundan önce tarihsel gelişmeyle gelenekselleşen kontrol sistem tasarımını, uygulamada hızlı bir şekilde etkilemeye başlamıştır. Yeni bilgisayar yazılım araçlarıyla tasarımcı birkaç dakika içinde çok sayıda ve değişik zaman tanım bölgesi kriterleri değerlendirme olanağı bulur. Bu özellik, frekans tanım bölgesinde elle grafiksel tasarımına yönelik olarak geliştirilen, geleneksel tasarım yöntemlerinin değerini azaltmıştır. Ayrıca, deneyimli kişilerin dışında, istenen zaman tanım bölgesi koşullarına karşılık gelen anlamlı frekans tanım bölgesi kriterlerini belirlemede de zorlanılır. Ancak, genelde aşımı kontrol etmek için, en azından faz payı ve M_r 'yi belirlemek gerekir. Özetlenirse, anlamlı frekans tanım bölgesi koşullarının deneme sınama ile belirlenmesi, kendisi de deneme sınama gerektiren tasarım işleminin bir ön evresini oluşturur. Bununla birlikte frekans tanım bölgesi yöntemleri hala daha sistemlerde gürültü etkisini azaltmak ve duyarlılık değerlendirmeleri yapabilmek için gereklidir ve her şeyden önce tasarıma geniş bir görüş açısı sağlar [5].

2.2 KONTROLÖR YAPILARI

Kontrol edilen bir sistemin dinamiği genelde şekil de verilen blok diyagramı ile ifade edilebilir. Tasarımın amacı $y(t)$ ile gösterilen kontrol değişkeninin istenilen şekilde davranmasıdır. Sorun temelde tasarım amaçlarının tümü gerçekleşecek şekilde $u(t)$ kontrol işaretini belirli bir zaman aralığında belirtmektedir.

Geleneksel tasarım yönteminde, tasarımcı kontrolörünü kontrol edilen prosese göre nereye yerleştirmesi gerektiğini genellikle önceden belirler ve sisteme *sabit yapıda bir tasarım* uygular. Bu durumda sorun kontrolör elemanlarını belirlemeye dönüşür. Amaç sistem davranış özelliklerini karşılamaya ve değiştirmeye yönelik olduğunda genellikle sabit yapıya *kompanzasyon* adı verilir.



Şekil 2.1 Kontrol Edilen Sistem (Proses)

Seri (Kaskat) Kompanzasyon

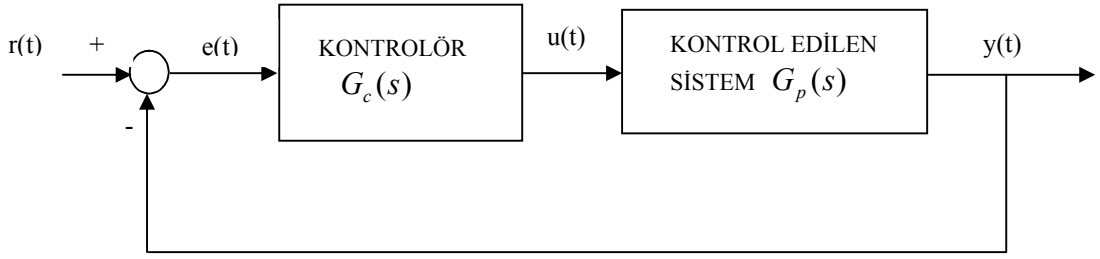
Şekil 2.2 (a)'da kontrolörün kontrol edilen sisteme seri yerleştirildiği en yaygın kontrolör yapısı olan, *seri* yada *kaskat kompanzasyon* görülmektedir.

Geribeslemeli Kompanzasyon

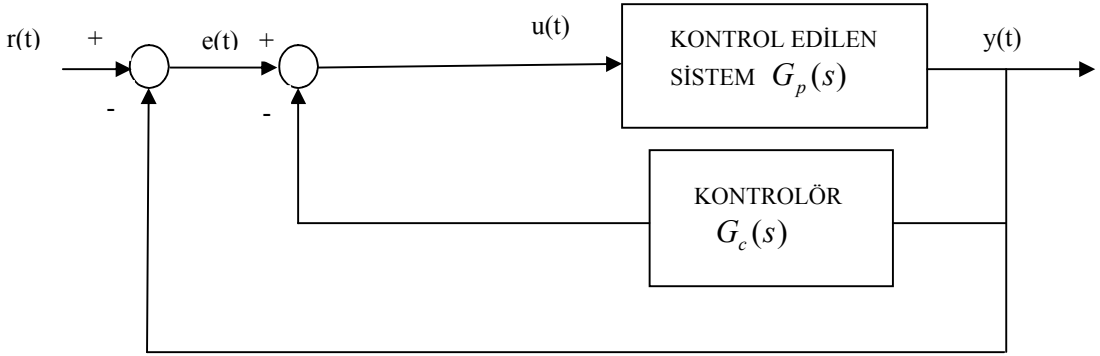
Şekil 2.2 (b)' de görüldüğü gibi kontrolörün bir alt çevrime yerleştirildiği yapıya geribeslemeli kompanzasyon adı verilir.

Durum Geribeslemeli Kompanzasyon

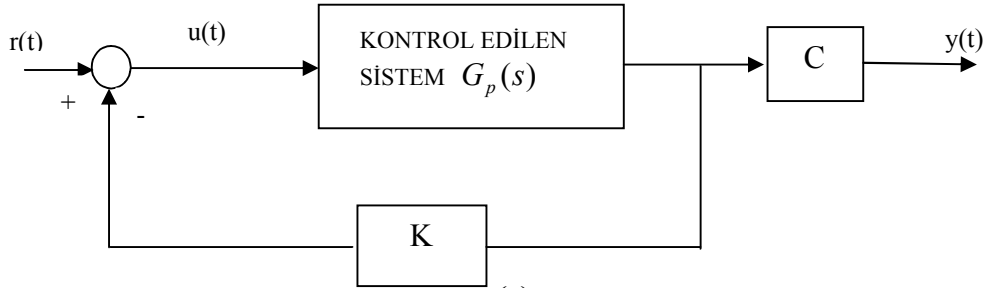
Şekil 2.2 (c)'de görüldüğü gibi sistem durum değişkenlerinin sabit kazanç katsayılarıyla geribeslendiği yapıya durum geribeslemesi denir. Ancak yüksek mertebeden sistemlerde durumların tümünü geri beslemek için çok sayıda dönüştürücüye ihtiyaç duyulur. Bu nedenle durum geribeslemeli yapının uygulanması çok masraflı ve zor olabilir. Düşük mertebeli sistemlerde bile tüm değişkenlere erişilmeyebilir ve çıkış değişkenlerinden bunları oluşturmak için bir gözleyici ya da kestiriciye ihtiyaç duyulabilir [5].



(a)



(b)



(c)

Şekil 2.2 Kontrol sistem kompanzasyonda çeşitli kontrolör yapıları

2.3 TASARIMIN TEMEL İLKELERİ

Belirli bir kontrolör yapısını seçtikten sonra, tasarımcı tüm tasarım koşullarına gerçekleşen bir kontrolör türünü, eleman değerleriyle birlikte belirlenmelidir. Kontrol sistemlerin tasarımında kullanılabilir kontrol türleri sadece hayal gücüyle sınırlıdır. Ancak mühendislik uygulamaları gereği tüm tasarım koşullarını sağlayan en basit yapılı

kontrolörün seçimi tercih edilir. Genellikle kontrolörün karmaşıklığı artıkça fiyatı artar, güvenilirliği azalır ve tasarımı güçleşir. Belirli bir uygulamaya yönelik kontrolörün seçimi genellikle tasarımcının geçmiş deneyimine, önsezilerine ve tasarım hünerine bağlıdır. Sonuç olarak siz bir acemi olarak akıllı ve güvenilir bir kontrolör seçimini çok karmaşık bulabilirsiniz [5].

Bir kontrolörde karar kıldıktan sonra ikinci adım parametre değerlerini belirlemektir. Bu parametre değerleri kontrolörü oluşturan bir ya da daha fazla transfer fonksiyonuna ilişkin katsayılardır. Bu bilgiler dayanarak kontrolör parametreleri tüm tasarım kriterleri gerçekleşecek şekilde seçilir. Bu işlem oldukça açık olmakla birlikte, genellikle kontrolör parametrelerinin birbirlerini ve özellikle tasarım kriterli bir şekilde etkilemesi nedeniyle, çok sayıda tasarım adımının atılmasını gerektirebilir. Örneğin belirli bir parametre değeri seçilerek aşım sağlatılabilir, ancak yükselme zamanı koşulunu ayarlamak için başka bir parametre değiştirildiğinde aşım kriteri sağlanmayabilir. Şüphesiz ki tasarım kriterleri ve kontrolör parametrelerin sayısı artıkça tasarım işlemi karmaşıklaşır.

Tasarım, zaman ya da frekans, hangi tanım bölgesinde sürdürülürse sürdürülsün, bazı yöntem ya da tasarım kuralları izlenmelidir. Zaman tanım bölgesi tasarımının özellikle s-düzlemine ve kök eğrilerine dayandığı göz önünde bulundurmak gerekir. Frekans tasarım bölgesinde ise, çevrim transfer fonksiyonu genlik ve fazı etkilenerek, kriterler sağlatılmaya çalışılır.

2.4 KARARLILIK

Kararlılık sorunu kontrol sistemlerinin tasarımında ve incelenmesinde en büyük sorunlardan olarak karşımıza çıkar. Kararsız bir sistem genelde kullanılamaz kabul edilir. Lineer, lineer olmayan, zamanla değişen ve zamanla değişmeyen tüm sistemler göz önünde bulundurulduğunda kararlılık tanımı çok farklı şekillerde verilir. Lineer ve zamanla değişmeyen sistemlerde kararlılık incelenmesi karakteristik denklem yardımıyla yapılır [10].

2.4.1 Kararlılık Sorunu ve Kavramı

Burada kararlılığın iki tanımı verilecektir.

1. Sınırlı-Giriş Sınırlı-Çıkış Kararlılığı

Bir sistemin girişine uygulanan sınırlı girişler için çıkışı da artan t zamanı ile sınırlı kalıyorsa sistem sınırlı giriş sınırlı çıkış anlamında kararlıdır denir.

2. Asimptotik Anlamda Kararlılık

Bir sisteme hiçbir giriş uygulanmadığı halde, herhangi sınırlı ilk koşul işareti altında sistemin durumları ve çıkışları $t \rightarrow \infty$ için $x(t) \rightarrow 0$ ve $y(t) \rightarrow 0$ oluyorsa, sistem asimptotik anlamda kararlıdır denir [10].

Kararlı bir sistem uyarılmadıkça harekete geçmez ve bir işaret ile uyarıldığında ise hareket geçer ve uyarma kalkınca eski durumuna geri döner.

2.4.2 Kararlılık Koşulları:

Tek giriş ve tek çıkışlı lineer zamanla değişmeyen kontrol sisteminin transfer fonksiyonunun

$$T(s) = \frac{p(s)}{q(s)} = \frac{p(s)}{a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + a_{n-2} s^{n-2} + \dots + a_1 s + a_0} \quad (2.1)$$

biçiminde verildiğini varsayalım. Sistemin kararlı olup olmadığını anlamak için aşağıdaki iki koşulun sağlanıp sağlanmadığına bakmak gerekir:

1. $T(s)$ in payının derecesinin paydanın derecesinden küçük olması
2. Karakteristik denklem $q(s)=0$ ın bütün köklerinin sol yarım s düzleminde bulunup bulunmadığının izlenmesi. Orijinde bir katlı ve $j\omega$ ekseninde yine bir katlı eşlenik kökler bulunabilir.

Kararlılığın sağlanıp sağlanmadığını anlamak için en çok kullanılan kriterler Routh stabilite (Routh-Hurwitz) kriteri ve Nyquist stabilite kriteridir diyebiliriz.

a)Routh-Hurwitz Kriteri: Daha sonra köklerin yer eğrisi çiziminde yer eğrisinin sanal eksenini kestiği noktayı bulmak amacıyla anlattığımız bu kriter; doğrusal, zamanla değişmeyen, sabit katsayılı karakteristik denklemlerin mutlak kararlılığı hakkında bilgi sağlayan cebirsel bir yöntemdir. Kriter, karakteristik denklemin köklerinden herhangi birinin sağ yarı s-düzleminde yer alıp almadığını belirler.

b)Nyquist Kriteri: Bu kriter, açık çevrimli sistemin Nyquist eğrisi davranışına bakarak, kapalı çevrimli sistemin sağ yarı s-düzlemi kutup ve sıfırları arasındaki fark

konusunda bilgi sağlayan yarı grafiksel bir yöntemdir. 2.1 deki ifadede karakteristik denklem

$$q(s)=\Delta(s)=a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + a_{n-2} s^{n-2} + \dots + a_1 s + a_0 \quad (2.2)$$

$a_n > 0$ olma koşulu ile (2.2) karakteristik denkleminde

1. Eğer s nin herhangi bir kuvvetinin katsayısı sıfır veya negatif ise, karakteristik denklemin sağ yarı düzleminde ya da $j\omega$ imajiner ekseninde kökü vardır ve sistem kararsızdır. $a_0=0$ ise (2.2) ifadesi s parantezine alınır ve biraz önceki koşulun sağlanıp sağlanmadığına bakılır.

2. Bütün katsayıların pozitif ve sıfırdan farklı olması halinde sistemin sağ yarım düzleminde kökü bulunabilir ve sistem kararsız olabilir. Bunlar gerek koşullardır, yeter koşullar ise Routh kriterinden bulunabilir.

Bir sistem kararlı değilse bu sistemi kararlı hale getirmeye çalışmak gerekir. Bu ise sisteme yeni kutup veya sıfırların eklenmesiyle mümkün olabilir.

2.5 NYQUIST STABİLİTE KRİTERİ

Nyquist stabilite kriteri, açık çevrim transfer fonksiyonu $G(s)H(s)$ ' in ω domenindeki yer eğrisinden, kapalı çevrimi oluşturan lineer, zamanla değişmeyen bir giriş ve bir çıkışlı kontrol sisteminin kararlı olup olmadığını belirleyen grafiksel bir yöntemdir. Nyquist kriteri, transfer fonksiyonları e^{sT} gibi gecikme elemanlarının bulunması halinde de geçerlidir.

Nyquist kriterini açıklamadan önce bu kriterin uygulanmasında kullanılan polar koordinatlarda $G(s)H(s)$ açık çevrim transfer fonksiyonu yer eğrisinin, $s=\sigma+j\omega$ ' nin belli bir C eğrisi üzerinde değer alması halinde, nasıl çizileceğine değinmek yararlı olacaktır. Ancak aşğıdaki açıklamalardan da anlaşılacağı gibi, transfer fonksiyonları yüksek dereceden olan sistemlerin Nyquist diyagramının çizimi oldukça çaba isteyen bir çalışmadır.

2.5.1 Kompleks Değişkenli Fonksiyonların yer eğrisi çizimi

Reel ya da gerçel değişkenli bir fonksiyonun, örneğin $y=f(x)$, (x,y) koordinat sisteminde çizimi sade bir işlemdir. x değişkenine $-\infty$ dan $+\infty$ 'a kadar değerler vererek y 'ler hesaplanır ve koordinat sisteminde noktaların yeri saptanarak $y=f(x)$ fonksiyonunun grafiği çizilmiş olur. Buna karşılık s kompleks bir değişken olmak üzere $f(s)$ gibi kompleks değişkenli fonksiyonun grafiği ya da yer eğrisinin çizimi o kadar basit değildir: $s=\sigma+j\omega$ dir ve bunun σ gerçel kısmı, $j\omega$ ise sanal kısımdır. O halde, kompleks değişkenin herhangi bir değerinden söz edilemez. Kompleks değişken s , iki değerle belirlenir: σ ve ω . σ ve ω ' ya belli değerler verilerek (σ,ω) düzleminde s 'nin ucunun geometrik yeri C eğrisi üzerinde gezdiğine göre $f(s)$ ' in, Reel $\{f(\omega j)\}$ ve Im $\{f(\omega j)\}$ düzlemindeki yer eğrisi Γ çizilir. Γ eğrisinin çiziminde, her bir s için $f(s)$ de $s=\sigma+j\omega$ yazılır ve sonra Reel $f(\sigma+j\omega)$ ile Im $f(\sigma+j\omega)$ belirlenir. Bu çizim yöntemini bir örnekle açıklayalım.

Örnek2.1:

$f(s) = \frac{1}{s+1}$ fonksiyonun yer eğrisini s ' in ucunun Şekil 2.3' de gösterilen karenin

kenarları üzerinde değer alması halinde çiziniz.

Çözüm: Şekil 2.3 de gösterilmiş olan belli noktaları göz önüne alalım. S düzleminde a,b,c,d,e,f,g,h , noktalarının ω düzleminde hangi noktalara dönüştüğünü bulalım. Şekil 2.3' de gözönüne alınan a,b,c,\dots noktalarının koordinatları ve bu koordinatlara ilişkin olan ω düzlemi A,B,C,\dots noktalarının koordinatları;

s düzlemi

w düzlemi

$$(a) s=2+j2 \quad f(s) = \frac{1}{2+j2+1} = \frac{1}{3+j2} = \frac{3}{13} - \frac{2}{13}j \rightarrow A(\text{noktası})$$

$$(b) s=-2+j2 \quad f(s) = \frac{1}{-2+j2+1} = \frac{1}{-1+j2} = \frac{-1}{5} - \frac{2}{5}j \rightarrow B(\text{noktası})$$

$$(c) s=-2-j2 \quad f(s) = \frac{1}{-2-j2+1} = \frac{1}{-1-j2} = \frac{-1}{5} + \frac{2}{5}j \rightarrow C(\text{noktası})$$

$$(d) s=2-j2 \quad f(s) = \frac{1}{2-j2+1} = \frac{1}{3-j2} = \frac{3}{13} + \frac{2}{13}j \rightarrow D(\text{noktası})$$

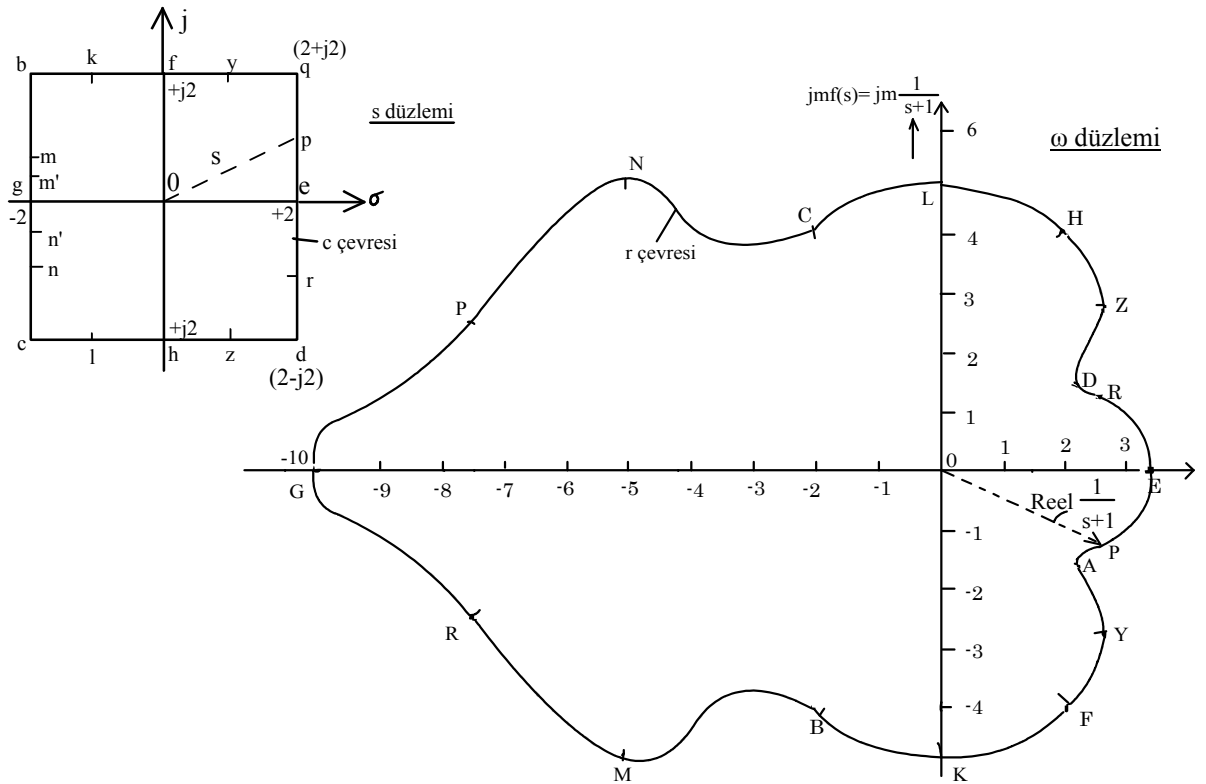
(e) $s=2+j0$ $f(s) = \frac{1}{2+j0+1} = \frac{1}{3} \rightarrow E$ (noktası)

(f) $s=0+j2$ $f(s) = \frac{1}{0+j2+1} = \frac{1}{1+j2} = \frac{1}{5} - \frac{2}{5}j \rightarrow F$ (noktası)

(g) $s=-2+j0$ $f(s) = \frac{1}{-2+j0+1} = -\frac{1}{1} = -1 \rightarrow G$ (noktası)

(h) $s=0-j2$ $f(s) = \frac{1}{0-j2+1} = \frac{1}{1-j2} = \frac{1}{5} + \frac{2}{5}j \rightarrow H$ (noktası)

dır. ω düzlemine ilişkin noktalar Şekil 2.3 de gösterilmiştir.

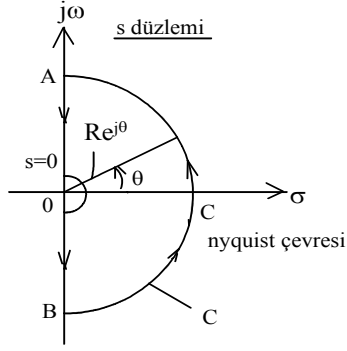


Ölçek on kez büyütülmüştür.

Şekil 2.3. $f(s)=1/(s+1)$ kompleks değişkenli fonksiyonunun s 'in a,b,c,d karesi üzerinde değer alması halinde yer eğrisinin ω düzleminde gösterilişi

Böylece $f(s)=1/(s+1)$ fonksiyonunun s ucunun Şekil 2.3. de gösterilen AFBGCHDEA kapalı şekli olmuş olur. Kompleks değişkenler teorisinde abcde den oluşan çevreye s düzleminde (C) çevresi ve ABCDE kapalı çevresine de bunun ω düzleminde gösterilişi denir. Başka bir deyimle s düzlemindeki C çevresi $\omega=f(s)$ fonksiyonu ile ω düzleminde Γ çevresine dönüştürülüyor denir [10].

2.5.2 Nyquist Stabilite Kriteri



Şekil 2.4 Sağ yarı s düzlemini örten ve $1+G(s)H(s)$ karakteristik fonksiyonunun integralini almak için kullanılan C kapalı çevresi

Stabilite için gerek ve yeter koşul; karakteristik denklemin $\Delta(s)=1+G(s)H(s)$ in köklerinin hepsinin de s düzleminin sol yanında olması gerekir. Başka bir deyişle, kararlılık için gerek ve yeter koşul karakteristik denklemin s düzleminin sağ yarısında hiçbir kökü bulunmaması olarak da tanımlanabilir. İşte bu yüzden s düzleminde tüm sağ yarı s düzlemini örtecek kapalı bir c çevresi seçilir. Şekil 2.4 de sağ yarı düzlemi örten kapalı çevre gösterilmiştir. Bu kapalı çevre BCA yarım çemberi tüm imajiner (sanal) eksenini içerir. Şimdilik 0

başlangıç noktası bu yarım dairenin dışında bırakılacaktır. Bu amaç için başlangıç noktası etrafında sonsuz küçük bir daire çizilir. Şekilde görüldüğü gibi r sonsuza gittiğinde daire s düzleminin tüm sağ yarısını kaplar. Şimdi yukarıda yapılan açıklamalardan yararlanarak s, Şekil 2.4 deki kapalı çevre üzerinde değiştiğinde, $\omega = f(s)$ ya da $q(s)=1+G(s)H(s)$ karakteristik fonksiyonunun düzleminde çizimini yapalım. ω düzlemine otomatik kontrolde $G(s)H(s)$ düzlemi de denir. C kapalı çevresi üzerinde s'nin değer alması matematik yönde ya da saat ibreleri dönüş yönünün tersi yönünde olduğuna dikkat edelim. İşte bu halde $F(s)=1+G(s)H(s)$ in ω düzleminde 0 başlangıç noktasını yine saat ibreleri dönüş yönünün tersine çevreleme sayısı N, $1+G(s)H(s)$ in C kapalı çevresi üzerinde bulunan sıfır ve kutupların farkına eşittir.

$$N=Z-P \quad (2.3)$$

N, $1+G(s)H(s)$ in, 0 başlangıç noktasını saat ibrelerinin tersi yönünde çevreleme sayısını, Z, bunun C içindeki sıfırların sayısını P ise kutupların sayısını gösterir. Kararlı bir sistemde $1+G(s)H(s)$ in sağ yarı düzlemde C içinde hiçbir sıfır olmamalıdır. $Z=0$. O halde, (2.3) den

$$N=Z-P \quad \text{ya da} \quad N=-P \quad (2.4)$$

bulunur. ω düzleminde $\omega = f(s)= 1+G(s)H(s)$ eğrisi 0 başlangıç noktasını, saat ibreleri yönünde P kez çevrelerse sistem karlıdır. Bu sonuç $1+G(s)H(s)$ yerine $G(s)H(s)$ gözönüne alınarak da verilebilir. Şimdi $1+G(s)H(s)$ ten $-1+j0$ gerçek sabiti çıkaracak olursak;

$$\{1+G(s)H(s)\}-1=G(s)H(s) \quad (2.5)$$

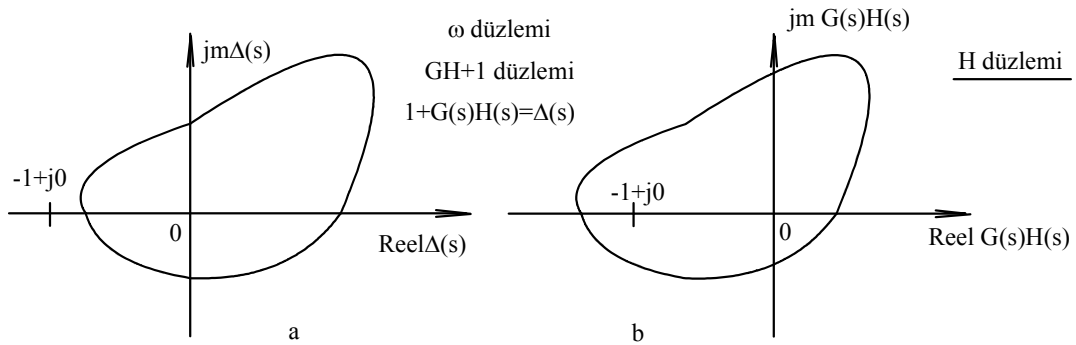
bulunur. Bunun anlamı $1+G(s)H(s)$ yer eğrisini sola doğru bir birim kaydırırsak $G(s)H(s)$ yer eğrisi elde edilir. Şekil 2.5 de $1+G(s)H(s)$ ve $G(s)H(s)$ yer eğrileri gösterilmiştir ve buradan görülmektedir ki birincisi 0 başlangıç noktasını ve ikincisi ise, $-1+j0$ noktasını çevrelemektedir. Şimdi kararlılık için şu kriter verilebilir: s 'nin ucu C kapalı çevresi üzerinde saat ibrelerinin tersi yönünde gezerken, eğer $G(s)H(s)$ eğrisi $-1+j0$ noktasını, $G(s)H(s)$ düzleminde saat ibrelerinin ters yönünde N kez çevrelerse

$$Z-P=N \quad (2.6)$$

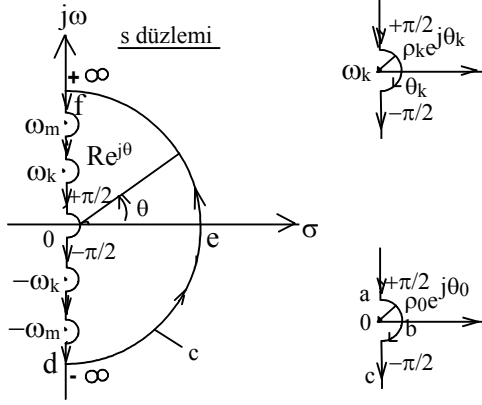
dir ve kararlı sistem için $Z=0$ olduğundan

$$N=-P \quad (2.7)$$

elde edilir. Artık burada N, $G(s)H(s)$ in $-1+j0$ noktasını saat ibrelerinin yönünde çevreleme sayısını gösterir. Yukarıda açıklandığı gibi Z, GH'nin C içindeki sıfır sayısını, P ise kutup sayısını gösterir. İşte bu kritere **Nyquist kriteri** denir ve sağ yarım düzlemi örten daireye de **Nyquist yolu** denir. Nyquist kriterinde GH'nin kutupları kapalı çevrimin de kutuplarıdır. N grafik olarak bulunur; P ise GH den bulunur; $N=Z-P$ den Z bulunur.



Şekil 2.5 a) $1+G(s)H(s)$ in s nin C üzerinde (yarım daire) değişmesi halinde yer eğrisi
b) $G(s)H(s)$ in yer eğrisi; bu eğri (a) daki yer eğrisinin bir birim kadar sola ötelenmesidir.



Şekil 2.6 s düzleminde sağ yarım düzlemi kaplayan C kapalı çevre üzerinde $j\omega$ eksenindeki ω_k, ω_m gibi tekil noktalar ile $s=0$ tekil noktası çerçevenin dışına bırakılmıştır.

Sanal ya da $j\omega$ eksenindeki tekil noktalar ve $s=0$ 'daki tekil nokta kolayca göz önüne alınabilir. Bu amaç için Şekil 2.6. ü göz önüne alalım. Tekil noktalar etrafında bu nokta merkez olmak üzere yarım daireler çizilir. Bu dairelerin yarıçapı ρ_k sonsuz küçük alınır. Bu yarım dairenin denklemi ;

$$s = \rho = j\omega_k + \rho_k e^{j\theta_k} \quad (2.8)$$

dır. Bu ifade, merkezi $j\omega_k$ da bulunan daire denklemdir ve $\theta_k, +\frac{\pi}{2}$ den $-\frac{\pi}{2}$ ye kadar değişir. Öte yandan merkezi '0' da yerleşmiş bulunan dairenin denklemi ise

$$s = \rho = \rho_0 e^{j\theta_0} \quad (2.9)$$

dir. Burada ρ_0 sonsuz küçüktür, θ_0 da $+\frac{\pi}{2}$ den $-\frac{\pi}{2}$ ye değişir. Öte yandan C çevresi üzerindeki d, e ve f noktalarındaki s nin ifadeleri

$$\begin{aligned} d \rightarrow s &= R e^{-j\frac{\pi}{2}} & R &\rightarrow \infty \\ e \rightarrow s &= R e^{j0} & R &\rightarrow \infty \\ f \rightarrow s &= R e^{+j\frac{\pi}{2}} & R &\rightarrow \infty \end{aligned} \quad (2.10)$$

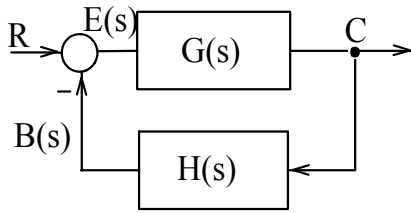
olarak yazılır. $j\omega$ ekseninde $\omega>0$ için $s = \omega e^{j\frac{\pi}{2}}$ ve $\omega<0$ için ise $s = \omega e^{-j\frac{\pi}{2}}$ yazılır.

2.6 KARAKTERİSTİK DEKLEMİN KÖKLERİNİN YER EĞRİSİ

Lineer zamanla değişmeyen otomatik kontrol sistemlerinin incelenmesinde ve tasarımında kapalı çevrim sisteminin kutuplarının bilinmesi büyük önem taşır. kapalı çevrimin karakteristik denkleminin kökleri ya da sistemin kutupları, açık çevrim kontrol sisteminin kutup ve sıfırlarına bağlıdır. Öte yandan açık çevrim transfer fonksiyonu, kontrol sisteminin parametrelerine, örneğin, kazanç sabiti, zaman sabiti ve diğer sabitlerine bağlıdır. Açık çevrim kontrol sisteminin kutup ve sıfırları bilindiğine göre ya da bunlar istenilen yerlere yerleştirildiğinde, kontrol sisteminin kutup ve sıfırlarının nasıl değiştiğini incelemek bu bölümün amacını oluşturacaktır.

Açık çevrim transfer fonksiyonunun kutup ve sıfırları bilindiğine göre, kazanç ve sistem zaman sabitlerinin parametre olarak değiştirilmesi halinde, karakteristik denklemin köklerinin s düzleminde değişimini veren eğriye köklerin yer eğrisi denir [10].

2.6.1 Köklerin Yer Eğrisi



Şekil 2.7. Basit bir kontrol sistemi blok diyagramı

Basit giriş ve basit çıkışlı lineer kontrol sisteminin blok diyagramı şekil 2.7.de gösterilmiştir. Kapalı çevrim transfer fonksiyon

$$\frac{C(s)}{R(s)} = T(s) = \frac{G(s)}{1 + G(s)H(s)} \quad (2.11)$$

dir Kapalı çevrim kontrol sisteminin karakteristik denklemi

$$1 + G(s)H(s) = 0 \quad (2.12)$$

dir . $G(s)H(s)$ açık çevrim transfer fonksiyonunun içinde, sistemin kazancı, kutupları, ve sıfırları bulunmaktadır. Amaç (2.12) ifadesinin köklerini bulmak ve sistem parametreleri değiştiğinde, bu köklerin değişimini gösteren yer eğrisini s düzleminde çözmektir.

Tanım: Bir kapalı çevrim kontrol sisteminin karakteristik denkleminin köklerinin değişimini, açık çevrim $G(s)H(s)$ transfer fonksiyonunun kutup ve sıfırlarını kullanarak, sistem kazanç parametresi değişimine göre s düzleminde çizmeye köklerin yer eğrisi yöntemi denir.

Bu tanım uyarınca (2.12) denklemini göz önüne alalım. $G(s)H(s)$ açık çevrim transfer fonksiyonu olduğuna göre (2.12) denklemi

$$G(s)H(s) = 1 \quad \text{yada} \quad -1 = e^{j(2k+1)\pi} \quad k=0,1,2,3,\dots \quad (2.13)$$

koşulu ile sağlanır. Burada,

$$G(s)H(s) = U + jV \quad (2.14)$$

gibi kompleks değişkenli fonksiyon olduğuna göre, (2.14) eşitliği reel değişkenli fonksiyonları içeren iki koşul verir.

$$|G(s)H(s)| = (U^2 + V^2)^{1/2} = 1 \quad (2.15)$$

$$\angle G(s)H(s) = \pm\pi(2k + 1) \quad k = 0,1,2,3,\dots \quad (2.16)$$

Eğer $G(s)H(s)$ rasyonel fonksiyon ve K kazancı cinsinden yazılırsa, $G(s)H(s) = K \frac{p(s)}{q(s)}$ olur. Genlik ve açı koşulları, bu halde

$$\left| K \frac{p(s)}{q(s)} \right| = 1 \quad \angle K \frac{p(s)}{q(s)} = (2k + 1)\pi \quad (2.17)$$

olarak verilir. (2.15) ve (2.16) koşullarını ayrı ayrı sağlayan s değerleri karakteristik denklemin kökleridir. Karakteristik denklemin kökleri, açık çevrim transfer fonksiyonunun K kazanç sabiti, kutup ve sıfırlarına bağlıdır. Bu parametreler değiştikçe köklerde değişir. Köklerin s düzleminde oluşturduğu noktaların birleştirilmesi ile köklerin yer eğrisi elde edilmiş olur.

2.6.2 Köklerin Yer Eğrisinin Çiziminde Kullanılan Kurallar

Bundan sonraki incelemelerimizde K kazancının sadece pozitif değerleri gözönüne alınacaktır.

Kural 1. Köklerin yer eğrisinin kollarının sayısı, açık çevrim transfer fonksiyonu kutuplarına eşittir. $p(s)$ m. inci dereceden ve $q(s)$ de n. ninci dereceden iki polinom olsun. Açık çevrim transfer fonksiyonu, bütün bu incelemelerde

$$G(s)H(s)=K \frac{p(s)}{q(s)} \quad (2.18)$$

ve karakteristik denklem

$$1+G(s)H(s)=1+K \frac{p(s)}{q(s)} = \frac{q(s) + Kp(s)}{q(s)} = 0 \quad (2.19)$$

olur. $n > m$ olma koşulu altında (2.19) denkleminin n tane kökü vardır. Açık çevrim transfer fonksiyonunun kutup sayısı ise $q(s)$ in sıfır sayısı kadardır. Açık çevrim transfer fonksiyonu GH in kutupları $1+GH$ in kutuplarına eşittir. O halde, karakteristik denklemin n adet kökü ve bu neden ile de n adet ayrı kolu vardır.

Örnek 2.2:

$$G(s)H(s) = \frac{K(s+10)}{s(s+20)(s+30)} = K \frac{p(s)}{q(s)} \quad \begin{array}{l} m = 1 \\ n = 3 \\ n > m \end{array} \quad (2.20)$$

$G(s)H(s)$ in kutup sayısı $s=0$ $s=-20$ $s=-30$ olmak üzere üçtür. O halde köklerin yer eğrisinin 3 kolu vardır.

Kural 2. Köklerin yer eğrisine ilişkin kollar ($K=0$) değeri için açık çevrim kutuplarından başlar ve ($K=\infty$) değeri için açık çevrim transfer fonksiyonu sıfırlarında son bulur. (2.19) bağıntısını göz önüne alacak olursak, karakteristik denkleminin kökleri

$$q(s) + Kp(s) = 0 \quad (2.21)$$

'in kökleridir. $K=0$ için $Kp(s)$ sıfır olur ki, bu halde karakteristik denklemin kökleri, $q(s)$ 'in kökleri (sıfırları), başka bir deyimle açık çevrim fonksiyonunun kutupları olur. O halde, $K=0$ için köklerin yer eğrisi açık çevrim fonksiyonunun kutuplarından başlar. Öte yandan (2.21) de $K=\infty$ olduğunda bu bağıntıyı $Kp(s)$ olarak alabiliriz. O halde karakteristik denklemin kökleri $Kp(s)$ in kökleridir. Başka bir deyimle karakteristik denklemin kökleri, $K=\infty$ için açık çevrim transfer fonksiyonunun sıfırlarına eşit olur.

Örnek 2.3:

Yukarıdaki örneği tekrar göz önüne alalım:

$$G(s)H(s) = \frac{K(s+10)}{s(s+20)(s+30)} \quad (2.22)$$

$$\text{Açık çevrim kutupları: } s_{p1}=0 \quad s_{p2}=-20 \quad s_{p3}=-30$$

$$\text{Açık çevrim sıfırları: } s_{z1}=-10 \quad s_{z2}=\infty \quad s_{z3}=\infty$$

dır. Rasyonel bir fonksiyonda sonsuzdaki sıfırlar da göz önüne alınır; toplam kutup sayısı toplam sıfır sayısına eşit olmalıdır. Buradan köklerin yer eğrisinin kolları $K=0$ için $s=0$, $s=-20$ ve $s=-30$ dan başlar ve $K=\infty$ için $s=-10$, $s=\infty$, $s=\infty$ daki sıfırlarda son bulur.

Kural 3. Reel ya da gerçel eksen üzerindeki bir noktanın köklerinin yer eğrisine ilişkin bir kol üzerinde bulunabilmesi için gerek ve yeter koşul, bu noktanın sağında bulunan açık çevrim transfer fonksiyonuna ilişkin kutup ve sıfırların toplamının tek olmasıdır.

Kural 4. Köklerin yer eğrisi reel eksene göre göre simetriktir. Çünkü, karakteristik denklem bir fiziksel sisteme ilişkin olduğundan katsayıları reel ve kökler de birbirine göre kompleks eşleniktir.

Kural 5. Karakteristik denklemin kollarından $s=\infty$ için sıfıra gidenleri, reel eksenle

$$\theta_a = \frac{(2k+1)}{n-m} \pi \quad k=0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots \quad (2.23)$$

açısı yapan ve reel eksen

$$\sigma_a = \frac{\sum_{i=1}^n p_i - \sum_{i=1}^m z_i}{n-m} \quad (2.24)$$

p_i açık çevrim transfer fonksiyonu kutupları

z_i açık çevrim transfer fonksiyonu sıfırları

noktasında kesen doğruya asimptot olurlar. Köklerin yer eğrisinin sonsuzda son bulan kollarının sayısı $n-m$ olduğundan asimptot sayısı da $n-m$ kadardır. Asimptot üzerinde yapılmış olan açıklamaları daha iyi anlayabilmek için basit bir örnek verelim: Açık çevrim transfer fonksiyonu

$$G(s)H(s)=K \frac{s+1}{s(s+3)(s^2+4s+16)} \quad (2.25)$$

olan bir kontrol sisteminin köklerin yer eğrisinin geometrik yerine ilişkin asimptotları bulalım. (2.24) bağıntısından

$$\sigma_a = \frac{(0-3-2+j2\sqrt{3}-2-j2\sqrt{3}-(-1))}{4-1} = -\frac{6}{3} = -2$$

$$n=4 \quad m=1 \quad z_1=-1 \quad \sigma_a=-2$$

$$p_1=0; \quad p_2=-3; \quad p_{3,4}=-2 \pm j2\sqrt{3}$$

dır. Asimptotun gerçel eksenle yaptığı açı ise

$$\theta_a = \frac{2k+1}{n-m} \pi \quad \begin{array}{ll} k=0 & \theta_a = 60 \\ k=-1 & \theta_a = -60 \\ k=+1 & \theta_a = 180 \end{array}$$

dır. $n-m=4-1=3$ (üç) asimptot vardır.

Kural 6. Köklerin yer eğrisini $j\omega$ imajiner (sanal) eksenini kestiği nokta Routh kriteri ile bulunur.

Not: Routh kriteri karakteristik denklemin köklerinin sağ yarımdüzlemde olup olmadığını inceleyen ve $j\omega$ ekseninde kökünün bulunup bulunmadığını saptayan bir kararlılık kriteridir. Bu kriterin kullanımını biraz açıklayalım. $q(s)=\Delta=a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + a_{n-2} s^{n-2} + \dots + a_2 s^2 + a_1 s + a_0 = 0$ ifadesi karakteristik denklem olsun.

Routh kriterinin uygulanmasında Routh tablosu düzenlenir. Bu tablonun düzenlenmesinde s nin en yüksek kuvvetinin katsayısından başlanır. Birinci satıra $a_n, a_{n-2}, a_{n-4}, \dots$ yazılır. İkinci satıra s ' in en yüksek kuvvetinden bir küçük olan kuvvetli terimin katsayısından başlanarak $a_{n-1}, a_{n-3}, a_{n-5}, \dots$ yazılır.

s^n	a_n	a_{n-2}	a_{n-4}	\dots	} Karakteristik denklemin katsayıları
s^{n-1}	a_{n-1}	a_{n-3}	a_{n-5}	\dots	
s^{n-2}	b_{n-1}	b_{n-3}	b_{n-5}	\dots	} İlk iki satır yardımıyla hesaplanır
s^{n-3}	c_{n-1}	c_{n-3}	c_{n-5}	\dots	
\vdots	\vdots	\vdots	\vdots		
s^0	v_{n-1}	v_{n-3}	v_{n-5}		

Tablo 2.1 Routh Tablosu

Bu kural uygulanıp yukarıdaki tablo elde edilir. Bu tabloda s^n ve s^{n-1} terimleri karşısındaki satırlar (2.2) karakteristik denkleminin katsayılarından oluşur. Diğer katsayılar ise şu şekilde belirlenir:

$$b_{n-1} = -\frac{1}{a_{n-1}} \begin{vmatrix} a_n & a_{n-2} \\ a_{n-1} & a_{n-3} \end{vmatrix} \quad b_{n-3} = -\frac{1}{a_{n-1}} \begin{vmatrix} a_n & a_{n-4} \\ a_{n-1} & a_{n-5} \end{vmatrix} \quad c_{n-1} = -\frac{1}{b_{n-1}} \begin{vmatrix} a_{n-1} & a_{n-3} \\ b_{n-1} & b_{n-3} \end{vmatrix}$$

$$c_{n-3} = -\frac{1}{b_{n-1}} \begin{vmatrix} a_{n-1} & a_{n-5} \\ b_{n-1} & b_{n-5} \end{vmatrix} \quad c_{n-5} = -\frac{1}{b_{n-1}} \begin{vmatrix} a_{n-1} & a_{n-7} \\ b_{n-1} & b_{n-7} \end{vmatrix}$$

Bu kural uygulanarak Routh tablosunun bir satırının bütün elemanları sıfır oluncaya kadar, elemanlar belirlenir. Bir satırın tüm elemanları sıfır olunca işlem durdurulur. Buna göre birinci sütundaki terimlerin işaretinin değişme sayısı kadar, karakteristik denklemin sağ yarım s düzleminde kökü vardır. Şimdi köklerin yer eğrisinin çiziminde sanal eksen kestiği noktayı bulmak için Routh kriterini bir örnekle açıklayalım.

$$\Delta(s) = s^6 + 3s^5 + 3s^4 + 6s^3 + 3s^2 + 3s + 1 = 0 \quad \text{biçiminde verildiğini kabul edelim.}$$

s^6	1	3	3	1
s^5	3	6	3	0
s^4	1	2	1	0
s^3	0	0	0	0

← bütün terimler sıfır.

Tablodan görülmektedir ki s^3 karşısındaki bütün terimler sıfırdır. O halde, s^3 ün bir üst satırından bir yardımcı denklem kurulur:

$$q_1(s) = s^4 + 2s^2 + 1 = (s^2 + 1)^2 \quad (2.26)$$

dır. Bunun s ye göre türevi alınarak

$$\frac{dq_1(s)}{ds} = 4s^3 + 4s \quad (2.27)$$

olur. (2.27) nin katsayıları {4,4} dir. Bu, yukarıdaki Routh tablosunda sıfırların yerine yazılır ve Routh tablosunun tamamlanmasına çalışılır:

$$\begin{array}{c|cccc} s^6 & 1 & 3 & 3 & 1 \\ s^5 & 3 & 6 & 3 & 0 \\ \hline s^4 & 1 & 2 & 1 & 0 \\ s^3 & 4 & 4 & 0 & 0 \\ s^2 & 1 & 1 & & \\ s^1 & 0 & 0 & \leftarrow \text{Bu kez sıfırdan oluşan bir satır daha görülür.} & \end{array}$$

s^1 terimine ilişkin satırlar sıfırdan oluştuğu için bir üst satırdan oluşan yardımcı denklem kurulur.

$$q_2(s)=s^2+1; \quad \text{türev alarak } \frac{dq_2(s)}{ds} = 2s \quad (2.28)$$

(2.28) in katsayısı 2 dir. Yukarıdaki tabloda s^1 in karşısına yazılır:

$$\begin{array}{c|cccc} s^6 & 1 & 3 & 3 & 1 \\ s^5 & 3 & 6 & 3 & 0 \\ \hline s^4 & 1 & 2 & 1 & 0 \\ s^3 & 4 & 4 & 0 & 0 \\ s^2 & 1 & 1 & & \\ s^1 & 2 & 0 & & \\ s^0 & 1 & & & \end{array}$$

bulunur. Buradan 1. sütündeki terimlerin işaret değiştirmediği görülür. Karakteristik denklemin katlı kökleri bulunduğundan sistem kararlı değildir. Birinci kez ele alınan yardımcı denklem; $q_1(s)=s^4+2s^2+1=(s^2+1)^2$ nin kökleri $s=\pm j$ de iki katlıdır. Başka bir deyimle $s=\pm j$ iki katlı olmak üzere dört kökü vardır. Öte yandan $q(s)$ karakteristik denklemi $(s^2+1)^2$ ile bölünebilir:

$$\frac{s^6 + 3s^5 + 3s^4 + 6s^3 + 3s^2 + 3s + 1}{s^4 + 2s^2 + 1} = s^2 + 3s + 1 \quad \text{dir.}$$

O halde karakteristik denklem

$$q(s)=(s^4+2s^2+1)(s^2+3s+1)=(s^2+1)^2(s^2+3s+1)=0$$

olur. Bu denklemin kökleri

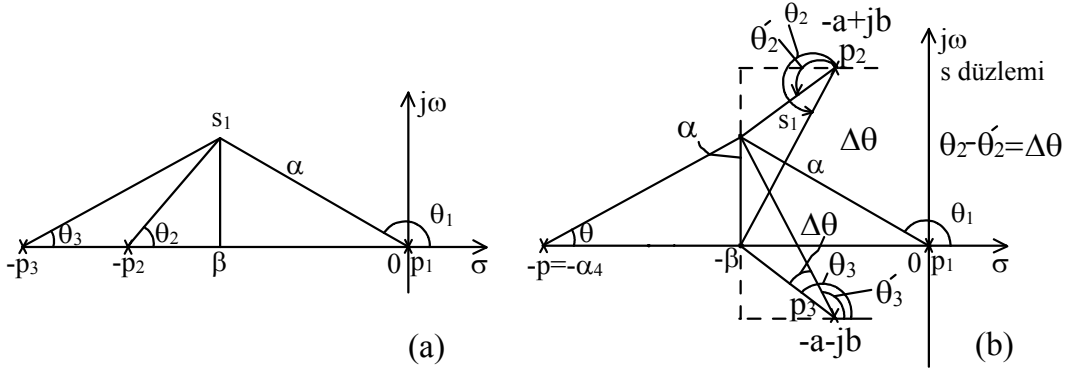
$$q(s) = (s - j)^2 (s + j)^2 \left[s - \left(-1,5 - \sqrt{\frac{5}{4}} \right) \right] \left[s - \left(-1,5 + \sqrt{\frac{5}{4}} \right) \right]$$

den

$$s_{1,2} = -j \quad s_{3,4} = +j \quad s_5 = -1,5 - \sqrt{\frac{5}{4}} \quad s_6 = -1,5 + \sqrt{\frac{5}{4}} \text{ dır.}$$

Buradan görülüyor ki bu karakteristik denklemin köklerin yer eğrisinde sanal eksenini kestiği noktalar $\{-1, +1\}$ dir.

Kural 7. Köklerin yer eğrisinin $K=0$ için açık çevrim transfer fonksiyonunun kutuplarından başlayıp, $K=\infty$ değerinde sonlu ya da sonsuzda bulunan açık çevrim transfer fonksiyonu sıfırlarında son bulduğu açıklanmıştı. Köklerin reel eksenden ayrıldıkları noktada K nın belli bir değeri için iki kök (en azından) birbirine eşit olur. O halde bu noktada katlı kök vardır. Köklerin reel eksenden ayrıldıkları nokta için temel iki kural vardır. Bunlardan birincisi açı koşulundan bulunur. Şekil 2.8 a ve b, reel ve kompleks köklerin reel eksenden ayrıldıkları noktayı bulmak için çizilmiştir.



Şekil 2.8. a) Bütün açık çevrim transfer fonksiyonu kutuplarının gerçel olması halinde kök yer eğrisinin reel eksenden ayrıldıkları noktayı bulmak için elde edilen şekil

b) İki kutbun kompleks olması halinde elde olunan şekil

Şekil 2.8a da

$$\frac{\alpha}{\beta} + \frac{\alpha}{\beta - p_2} + \frac{\alpha}{\beta - p_3} = 0 \quad \text{yada} \quad \sum_{i=1}^k \frac{1}{\beta - p_i} = 0 \quad (2.29)$$

olur. Buradan β bulunur. Böylece köklerin reel eksenden ayrıldıkları nokta belirlenmiş olur. Şekil 2.8b için ise

$$\frac{1}{\alpha_4 - \beta} + \frac{2(\beta - a)}{(\beta - a)^2 + b^2} + \frac{1}{\beta} = 0 \quad \beta > 0 \quad (2.30)$$

İkinci kuralımız ise şudur: Karakteristik denklem

$$1 + K \frac{p(s)}{q(s)} = 0 \quad (2.31)$$

$$q(s) + Kp(s) = 0 \quad \text{yada} \quad K = -\frac{q(s)}{p(s)} \quad (2.32)$$

biçiminde olduğuna göre, K nın s ye göre türevi sıfır yazılır. Çünkü bu noktada katlı kök vardır. K nın s ye göre türevinin sıfır olmasından;

$$\frac{dK}{ds} = 0 \quad \text{ve} \quad \frac{q(s)p'(s) - q'(s)p(s)}{p^2(s)} = 0 \quad (2.33)$$

denkleminde bulunacak s değerleri köklerin yer eğrisinin reel eksenden ayrıldıkları noktaları içerir. Burada birkaç s değeri bulunabilir. Ancak bunlardan uygun olanı, örneğin $K > 0$ koşulunu sağlayan ve kök eğrisi üzerinde olanı seçilir.

Kural 8. Köklerin yer eğrisinin bir kompleks kutuptan çıkış ya da bir kompleks kutba geliş açısı köklerin yer eğrisinin sağladığı açı koşulundan bulunur . Bu kuralı açıklamak için şekil 2.9 u gözönüne alalım. Bu şekil açık çevrim transfer fonksiyonu

$$G(s)H(s) = K \frac{s + 3}{s(s + 4)(s^2 + 2s + 2)} \quad (2.34)$$

olan bir kontrol sisteminin sıfır ve kutuplarını göstermektedir. (2.34) ün sıfır ve kutupları

$$s_z = -3 \quad s_{p1} = 0 \quad s_{p2} = -4 \quad s_{p3} = -1 + j1 \quad s_{p4} = -1 - j1 \quad (2.35)$$

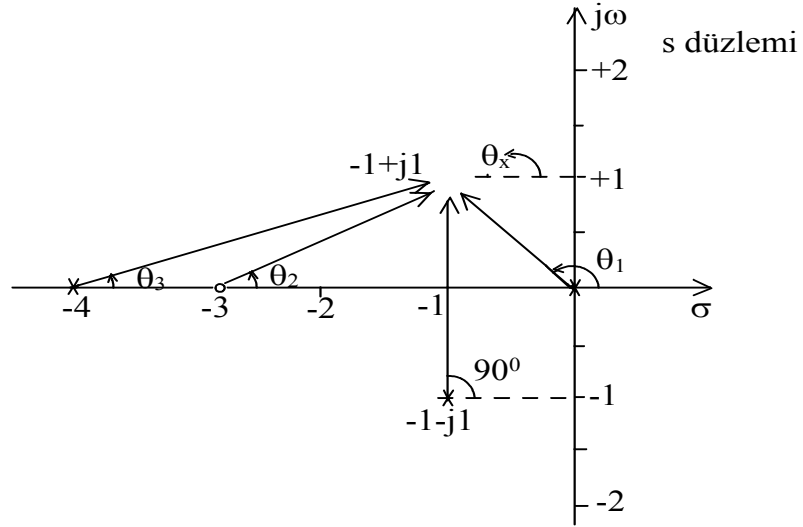
dir. Şekil 2.9 da açık çevrim transfer fonksiyonunun sıfır ve kutuplarını gösteren açılar ölçülür veya hesaplanırsa,

$\theta_1 = 135^\circ$, $\theta_2 = 26,56^\circ$, $\theta_3 = 18,43^\circ$ ve $-1-j$ kutbundan $-1+j$ kutbuna giden doğrunun yatayla yaptığı açı ise 90° dir. Açı koşulundan, yer eğrisinin $-1+j1$ kutbundan çıkarken yatayla yaptığı açı için

$$\theta_2 - (\theta_1 + \theta_3 + \theta_{-1-j1} + \theta_x) = 180^\circ \quad (2.36)$$

$$26.56^\circ - (135 + 18,43^\circ + 90 + \theta_x) = 180^\circ \quad (2.37)$$

$\theta_x = -396,8^\circ$ yada 360° sini çıkararak $\theta_x = -36,8^\circ$ olarak bulunur. Bir kompleks sıfıra geliş açısı da benzer kuraldan yararlanılarak bulunur.



Şekil 2.9. Açık çevrim transfer fonksiyonu (2.34) bağıntısı ile verilen kontrol sisteminin sıfır ve kutuplarının s düzleminde gösterilişi. θ_x köklerin geometrik yerinin (yer eğrisinin) $-1+j0$ kutbundan çıkarken yatayla yaptığı açıdır.

2.7. BODE DİYAGRAMI

Lineer, zamanla değişmeyen bir kontrol sisteminin frekans domeni davranışı şöyle tanımlanır. Sistemin girişine genliği sabit fakat frekansı değişken bir sinüzoidal giriş işareti uygulandığında sistemin çıkışında elde edilen çıkış işaretini belirlemek, sistemin frekans domeni davranışını belirlemek demektir. Özel bir giriş işareti olmasına rağmen frekansı değişen sinüzoidal işaretler uygulamada çok kullanılırlar. Bu sistemlerin kararlılığını daha önce Nyquist kriteri ile açıklamıştık. Şimdi ise bu sistemlerin genlik-faz diyagramı olan Bode diyagramının nasıl çizildiğini göreceğiz. Bode diyagramının avantajları şunlardır:

1. Bode diyagramının genlik ve faz eğrileri doğru parçaları ile yaklaşık çizilebilir.

2. Kazanç ve faz geçiş noktaları, kazanç ve faz payları Bode diyagramlarında Nyquist yer eğrisine göre daha kolay belirlenir.

3. Tasarımda sisteme eklenen kontrolörler ve parametrelerin etkisi Bode diyagramlarında Nyquist yer eğrisine göre daha kolay belirlenir.

2.7.1 Kutup ve Sıfır Düzeninden Frekans Domeni Davranışının Saptanması

Lineer, zamanla değişmeyen bir kontrol sisteminin açık çevrim fonksiyonuna ilişkin kutup ve sıfır düzeni Şekil 2.10 da gösterildiği gibi olsun. $s=j\omega$ olarak ve ω yı değiştirerek sistemin frekans bölgesi davranışı bulunabilir. Açık çevrim transfer fonksiyonu

$$G(s) = K \frac{p(s)}{q(s)} = K \frac{(s+z_1)(s+z_2)\cdots(s+z_m)}{(s+p_1)(s+p_2)\cdots(s+p_n)} \quad \text{olarak tanımlansın. Bu sistemin}$$

frekans bölgesi davranışına ilişkin genlik

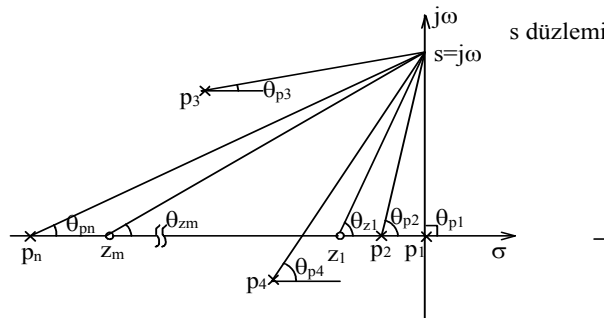
$$|G(j\omega)| = K \frac{|(j\omega+z_1)| \cdot |(j\omega+z_2)| \cdots |(j\omega+z_m)|}{|(j\omega+p_1)| \cdot |(j\omega+p_2)| \cdots |(j\omega+p_n)|} \quad (2.38)$$

$$\text{ve açı } \angle G(j\omega) = \angle(j\omega+z_1) + \angle(j\omega+z_2) + \dots + \angle(j\omega+z_m) - \angle(j\omega+p_1) - \angle(j\omega+p_2) - \dots - \angle(j\omega+p_n) \quad (2.39)$$

den bulunur. Özel olarak Şekil 2.11 deki kutup ve sıfır dağılışından, Genlik

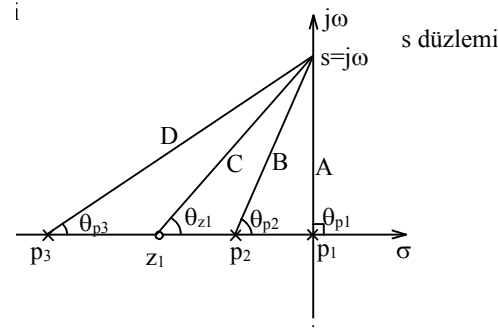
$$|G(j\omega)| = K \frac{C}{A \cdot B \cdot D} \quad (2.40)$$

$$\text{ve açı } \angle G(j\omega) = \theta_{z_1} - 90^\circ - \theta_{p_2} - \theta_{p_3} \quad (2.41)$$



Şekil 2.10. $G(s) = K \frac{p(s)}{q(s)}$ açık çevrim transfer fonksiyonunun kutup ve sıfırları ve frekans

davranışının elde edilmesi



Şekil 2.11. Üç kutup ve bir sıfırı olan açık çevrim transfer fonksiyonu

2.7.2. Bode Diyagramı

$G(j\omega)$ fonksiyonunun bode diyagramı iki çizimden oluşur. Biri $G(j\omega)$ grafiğinin desibel (dB) cinsinden, diğeri $G(j\omega)$ fazının derece cinsinden $\log_{10}\omega$ ya da ω ya bağlı çizimidir. Bode diyagramı $G(j\omega)$ nın köşe ya da asimptotik çizimi olarak da adlandırılır. Lineer, zamanla değişmeyen kontrol sistemlerinin açık çevrim transfer fonksiyonu, s düzleminde

$$G(s)H(s) = K \frac{p(s)}{q(s)} = K \frac{s^m + b_{m-1}s^{m-1} + \dots + b_1s + b_0}{s^n + a_{n-1}s^{n-1} + \dots + a_1s + a_0} \quad (2.42)$$

biçiminde verilsin. Bu bağıntı çarpanlara ayrılırsa;

$$G(s)H(s) = K \frac{(T_{z1}s + 1)(T_{z2}s + 1) \dots (s^2 + 2\zeta_z\omega_{nz}s + \omega_{nz}^2)_z}{s^1 (T_{p1}s + 1)(T_{p2}s + 1) \dots (s^2 + 2\zeta_n\omega_n s + \omega_n^2)_p} \quad (2.43)$$

olarak yazılabilir. s yerine $j\omega$ konacağından

$$G(j\omega)H(j\omega) = K \frac{(T_{z1}j\omega + 1)(T_{z2}j\omega + 1) \dots [(j\omega)^2 + 2\zeta_z\omega_{nz}j\omega + \omega_{nz}^2]_z}{(j\omega)^1 (T_{p1}j\omega + 1)(T_{p2}j\omega + 1) \dots [(j\omega)^2 + 2\zeta_n\omega_n j\omega + \omega_n^2]_p} \quad (2.44)$$

aynı bağıntı üstel olarak

$$G(j\omega)H(j\omega) = |G(j\omega)H(j\omega)| e^{j\angle G(j\omega)H(j\omega)} \quad (2.45)$$

olur. Şimdi $G(j\omega)H(j\omega)$ fonksiyonunun (2.45) ile verilen ifadesinin on tabanına göre logaritmasını alalım. Genlik ve açı kullanarak;

$$\log_{10} \left\{ |G(j\omega)H(j\omega)| e^{j\angle G(j\omega)H(j\omega)} \right\} \quad (2.46)$$

$$= \log_{10} |G(j\omega)| + \log_{10} |H(j\omega)| + j\angle(G(j\omega)H(j\omega)) \quad (2.47)$$

yazılır. Şimdi bu kuralı (2.44) bağıntısına uygulayalım ve genlik, açı bağıntılarını her bir terim için ayrı ayrı yazalım:

$$\begin{aligned} \log_{10}|G(j\omega)H(j\omega)| &= \log_{10}|K| + \log_{10}|j\omega T_{z1} + 1| + \log_{10}|j\omega T_{z2} + 1| \\ &\dots + \log_{10}[(j\omega)^2 + 2\zeta\omega_{nz}j\omega + \omega_{nz}^2]_z - \log_{10}(j\omega)^1 - \log_{10}|T_{p1}j\omega + 1| \\ &- \log_{10}|T_{p2}j\omega + 1| \dots - \log_{10}[(j\omega)^2 + 2\zeta\omega_nj\omega + \omega_n^2]_p \end{aligned} \quad (2.48)$$

$$\begin{aligned} \angle(G(j\omega)H(j\omega)) &= \angle K + \angle(j\omega T_{z1} + 1) + \angle(j\omega T_{z2} + 1) + \dots + \angle[(j\omega)^2 + 2\zeta\omega_{nz}j\omega + \omega_{nz}^2]_z \\ &- \angle(j\omega)^p - \angle(T_{p1}j\omega + 1) - \angle(T_{p2}j\omega + 1) - \dots - \angle[(j\omega)^2 + 2\zeta\omega_nj\omega + \omega_n^2]_p \end{aligned} \quad (2.49)$$

Desibel aşağıda verildiği gibi tanımlanır: eğer herhangi bir fonksiyonun genliği G ise desibel olarak

$$20 \log_{10}|G| = \text{desibel} = \text{dB} \quad (2.50)$$

tanımlanır. Literatürde desibel $20 \log_{10}|G|$ kısaca (dB) olarak gösterilir. (2.48) denkleminin her iki yanını 20 ile çarparak, genliği (dB) cinsinden belirlemiş oluruz. Amacımız (2.48) ifadesini 20 ile çarpıp dB ifadesini bulmak ve sonrada bu ifadenin (ω) açısal frekansının logaritmasına göre değişimini çizmektir. (2.48), dB cinsinden yazıldığında aşağıda verilen başlıca üç türden terim bulunur.

$$\begin{aligned} &20 \log_{10}|j\omega|^l; \quad 20 \log_{10}|j\omega T_p + 1|; \\ &20 \log_{10}[(j\omega)^2 + 2\zeta\omega_nj\omega + \omega_n^2]_l \end{aligned}$$

Bu terimlerin ω ya göre değişimlerinin nasıl çizileceğini açıklayalım:

$$a) \quad 20 \log_{10}|j\omega|^l \text{ teriminin genlik ve açısı} \quad l > 0$$

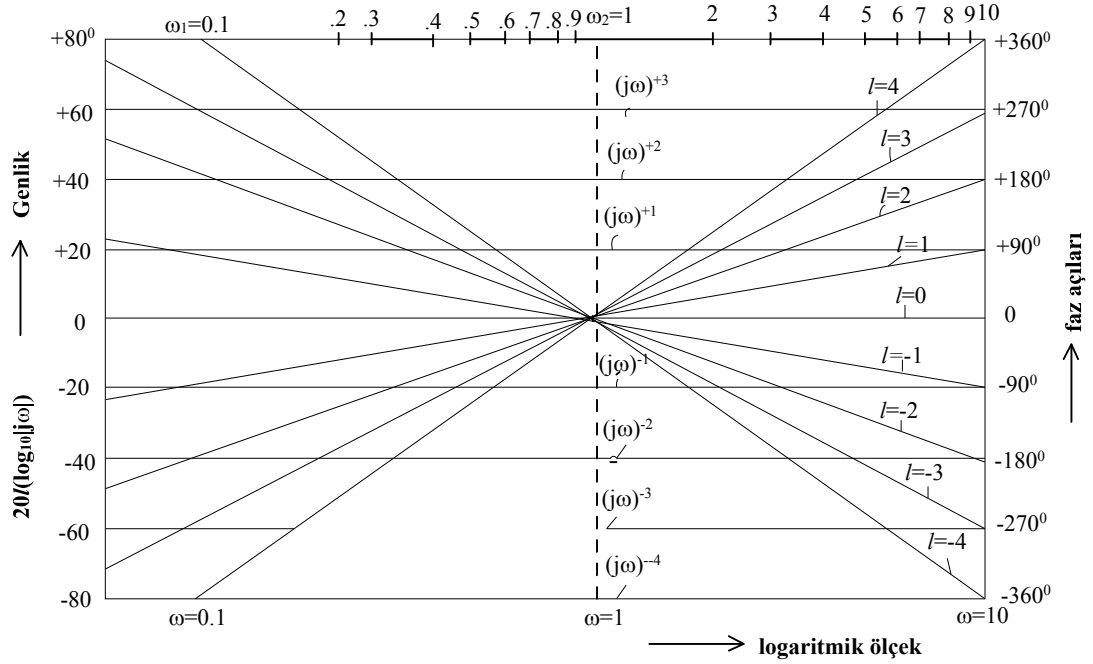
$l < 0$ ise terim (2.44) de payda $l > 0$ ise ise terim (2.44) de paydadır.

Üstel terimlerin logaritmasını alma kuralından, genliğin desibel cinsinden değerine y diyerek

$$y = 20.l \log_{10}|j\omega| \quad \text{ve} \quad x = \log_{10}|j\omega| \quad (2.51)$$

yazılır.

$l \neq 0$ varsayımı ile, (2.51) ifadesi $\log_{10}|j\omega|$ ya göre çizilirse, $\omega=1$ için $\log_{10}|j\omega|$ sıfır olduğundan $\omega=1$ noktasından geçen doğru ailesi elde edilir. Eğer $l < 0$ ise doğrunun eğimi pozitif, $l > 0$ ise doğrunun eğimi negatif olacaktır. Ayrıca $\omega=0$ değerini bode diyagramında alamaz; çünkü $\log|j\omega|$, $\omega=0$ için sonsuzdur. Şekil 2.12 de (2.51) ifadesinin değişimleri çizilmiştir.

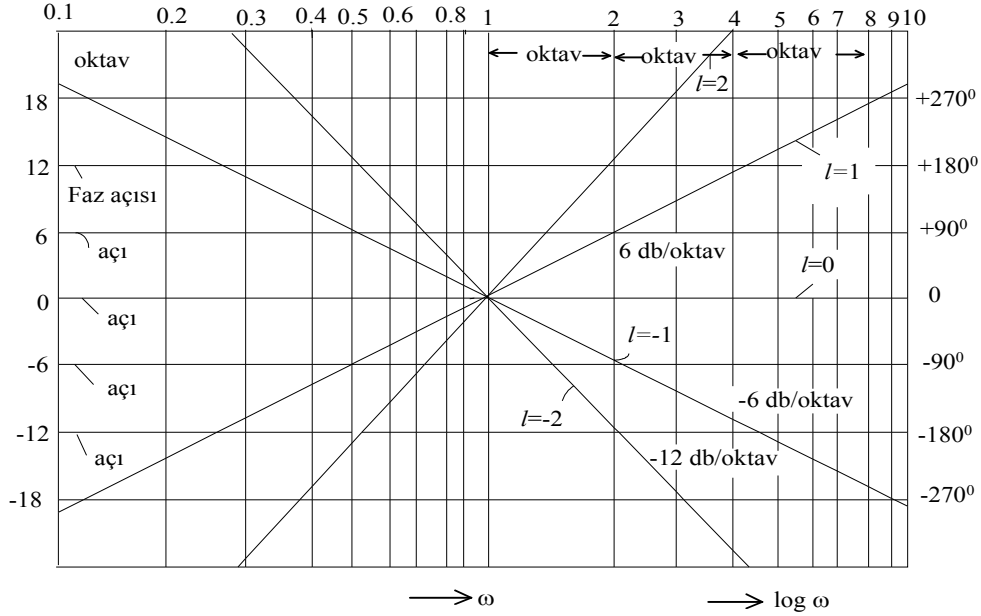


Şekil 2.12 . $20\log_{10}|j\omega|^l$ teriminin $\log_{10}|j\omega|$ ya göre değişimlere göre çizimi ve değişimler için faz açıları. Absis eksenini $\log_{10}\omega$ ya göre ölçeklendirilmiştir.

$(j\omega)^l$ terimine ilişkin faz açıları da kolayca elde olunabilir. $l=0$ için bu terim gerçel bir sayı olduğundan fazı sıfırdır. $l=+1$ için ω ya bağlı olmaksızın $n\pi/2$ ve $l=-1$ için $-\pi/2$; $l=+2$ için $+\pi$ ve $l=-2$ için $-\pi$ dir. Böylece anılan terimin fazı ω ya bağlı olmadığından faz açılarının değişimleri için yatay doğrular elde olunur. Şekil 2.12 de değişik l değerleri için faz açılarının ω ya göre değişimleri gösterilmiştir. Şekil 2.12 de absis eksenini $\log_{10}\omega$ ya göre ölçeklenmiştir. Bu ölçeklemede, oranları birbirine eşit olan açısal frekanslar arasındaki bölmeler birbirine eşittir. Bu durum logaritmanın bir özelliği olarak ortaya çıkar: Örneğin oranları 10 olan açısal frekanslar için

$$\frac{\omega_2}{\omega_1} = \frac{\omega_3}{\omega_2} = \dots = \frac{\omega_{10}}{\omega_9} = \frac{1}{0,1} = \frac{10}{1} = \frac{100}{10} = 10 \quad (2.52)$$

$\omega_2 - \omega_1, \omega_3 - \omega_2, \dots, \omega_{10} - \omega_9$, bölmeleri birbirine eşittir. Böylece birbirinin 10 katı ile ayrılmış açısal frekans ya da frekanslara *onluk* (dekad) larla ayrılmış frekanslar denir. Bunların aralarındaki uzaklıklar da birbirine eşittir. Bu tanımdan sonra Şekil 2.12 de $l=+1$ için $(j\omega)$ teriminin bode diyagramı eğimi 20 dB/dekad ya da 20dB/onluk, $l=+2$ için 40 dB/dekad, $l= -2$ için ise -40 dB/dekad olan doğrulardır.



Şekil 2.13. $20\log_{10}|j\omega|^l$ teriminin genlik ve bir fazının bir oktav aralıklarla ayrılmış frekanslar için çizilmiş bode diyagramı

Şimdide birbirinin iki katı olan frekans ya da açısal frekansları gözönüne alalım:

$$\frac{\omega_2}{\omega_1} = \frac{\omega_3}{\omega_2} = \dots = \frac{\omega_{10}}{\omega_9} = 2 \quad (2.53)$$

Aralarındaki oran 2 olan frekanslara bir oktav ile ayrılmış frekanslar denir. 2 nin logaritması yaklaşık 0,3 olduğundan $20 \log_{10} 2 \cong 6$ dB olur. Böylece aralarındaki frekans oranı 2 olan frekanslar arasındaki bölmeler birbirine eşit olur ve $(j\omega)^l$ terimi frekansları bir oktav aralıklarla çizilirse $l=1$ için eğimi 6 dB/oktav, $l=2$ için eğimi 12 dB/oktav, ve $l=3$ için eğimi 18 dB/oktav olan $\omega=1$ de absis eksenini kesen doğru aileleri elde olunur. Şekil 2.14 de $(j\omega)^l$ terimi ve $(j\omega)^l$ fazının $\log_{10}\omega$ ölçeğine göre çizilmiş bode diyagramı görülmektedir.

b) ($j\omega T + 1$) teriminin genlik ve açısı

Bu terim için genlik ve açı

$$\text{dB} = 20 \log_{10} |j\omega T + 1| = 20 \log_{10} \left| \omega^2 T^2 + 1 \right|^{\frac{1}{2}} \quad (2.54)$$

$$\angle(j\omega T + 1) = \tan^{-1} \left(\frac{\omega T}{1} \right) \quad (2.55)$$

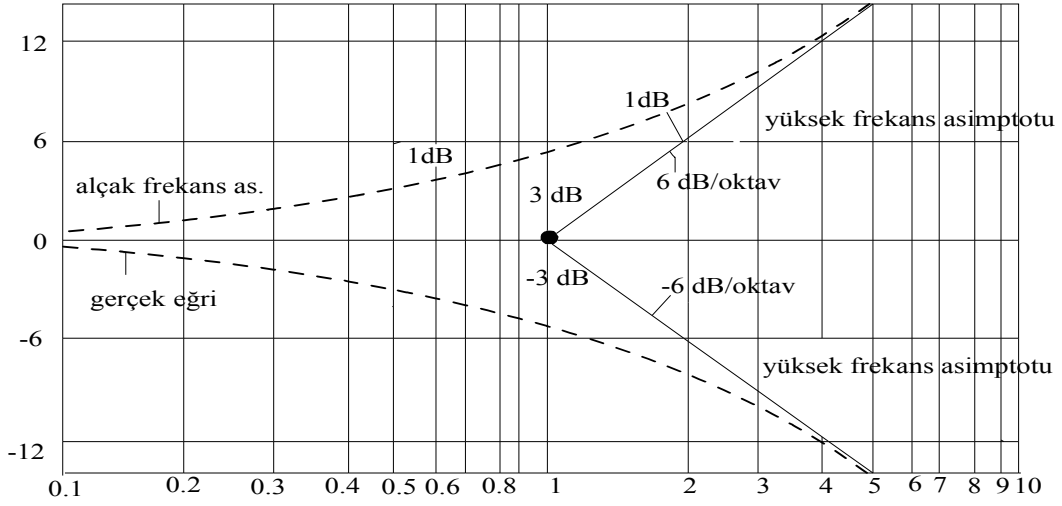
tir. ω açısal frekansına değerler verilerek ($j\omega T + 1$) teriminin genlik ve fazı çizilebilir. Fakat bu fonksiyonları nokta-nokta çizmek yerine bazı yaklaşık yöntemler yardımı ile daha kolayca çizilebilir. Yaklaşıklık yapma yönünden (2.54) de ω , $1/T$ ye göre çok küçük ise bu bağıntı

$$20 \log_{10} (1 + \omega^2 T^2)^{1/2} \cong 20 \log_{10} 1 = 0 \quad \omega \ll \frac{1}{T} \quad (2.56)$$

olarak yazılır. İşte bu yaklaşıklık fonksiyonun çok küçük frekanslardaki davranışını ya da asimptotunu belirler. Şimdi de fonksiyonun büyük ω ya da açısal frekanslardaki davranışını bulalım. $\omega \gg 1/T$ için anılan fonksiyon

$$20 \log_{10} (1 + \omega^2 T^2)^{1/2} \cong 20 \log_{10} \omega T \quad \omega \gg \frac{1}{T} \quad (2.57)$$

biçiminde yazılır. (2.56) sıfırdan geçen yatay doğruyu, (2.57) ise eğimi 6 dB/oktav ya da 20 dB/dekad olan bir doğruyu gösterir. Buradan (2.54) iki asimptotu olduğu, düşük frekanslar için bu asimptotun yatay bir doğru, büyük frekanslar için ise eğimi 20 dB/dekad olan bir doğru olduğu saptanmış olur. $\omega = 1/T$ değeri ise hem alçak hem yüksek frekansların kesim noktası üzerinde bulunur. Bu iki asimptotun kesim noktasına ayrılma noktası yada köşe noktası denir ve bu açısal frekansa da köşe açısal frekansı denir. Eğer ($j\omega T + 1$) terimi transfer fonksiyonunun payında ise genlik ve açılar pozitif ve payda da ise negatif alınmalıdır. Genliğin negatif alınması logaritma özelliğindedir. Örnek olarak $T=1$ için ($j\omega T + 1$) teriminin alçak ve yüksek frekanslar için asimptotları Şekil 2.14 de gösterilmiştir. Aynı şekilde, ω ya değerler vererek elde olunan gerçek eğri noktalı olarak gösterilmiştir.



Şekil 2.14. a) $(j\omega T+1)$ teriminin $l=1$ için alçak ve yüksek frekans asimptotları b) Gerçek eğri

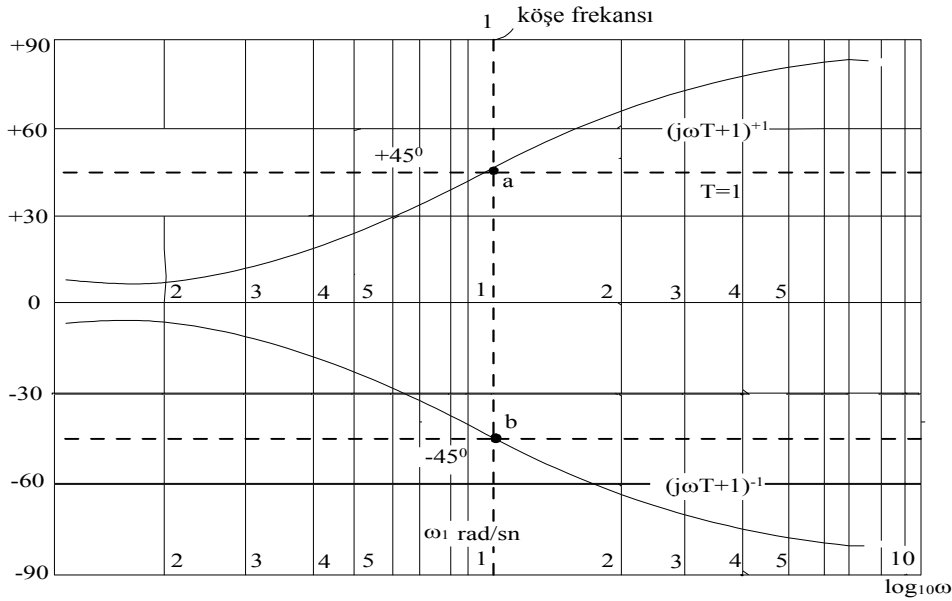
Özet olarak $(j\omega T+1)$ teriminin bode diyagramının genlik kısmını çizerken izlenecek işlem aşağıda verilmiştir.

1. $\omega=1/T$ için köşe frekansı belirlenip alçak ve yüksek frekans asimptotları çizilir. Alçak frekans asimptotu (0) dan geçen yatay bir doğru, yüksek frekans asimptotu ise ± 6 db/oktav eğimli doğru parçasıdır.

2. $\omega=1/2T$, $\omega=1/T$, $\omega=2/T$ için gerçek eğri üzerinde üç nokta işaretlenir: $\omega=1/T$ için köşe noktasından ± 3 dB fark ve diğer açısal frekanslarda ise bu fark sadece ± 1 dB dir.

3. Gerçek eğri üzerinde bu üç nokta ve alçak, yüksek frekans asimptotları yardımıyla gerçek eğri çizilir.

$\angle(j\omega T + 1)$ faz açısının ω ya göre değişimini çizmek için, yaklaşık bir yöntem yoktur. Ancak (2.55) denklemini uyarınca $\omega=1/T$ için faz açısı 45° , $\omega=0$ için faz açısı 0° ve $\omega=\infty$ için limite 90° dir. Şekil 2.15 te $\angle(j\omega T + 1) = \tan^{-1} \omega T$ fonksiyonunun değişimi $T=1$ olarak gösterilmiştir. Pozitif faz açıları terimin payda ve negatif faz açıları ise terimin paydada olması hali içindir.



Şekil 2.15. $(j\omega T+1)$ terimi fazının ω ya göre değişimleri. Eğri $T=1$ için çizilmiştir. $\omega=1/T$ için faz açısı $\pm 45^\circ$ dir. (a) eğrisi terimin transfer fonksiyonunun payında (b) eğrisi ise paydada olması hali için çizilmiştir. c) $\left| (j\omega)^2 + 2\zeta\omega_n j\omega + \omega_n^2 \right|^{\pm 1}$ teriminin genlik ve fazı

Bu terim transfer fonksiyonunun pay ya da paydasında olabilir. Eğer terim transfer fonksiyonunun payında ise üstel işaret $+1$, paydasında ise -1 alınır. Terim ω_n temel açısal frekansına göre normalize edilebilir; ω_n^2 parantezine alarak

$$\omega_n^2 \left| (j\omega/\omega_n)^2 + 2\zeta j\omega/\omega_n + 1 \right|^{\pm 1} \text{ ve } \omega/\omega_n = u \text{ olduğundan} \quad (2.58)$$

$$= \omega_n^2 \left[1 - u^2 + 2\zeta ju \right]^{\pm 1} \quad (2.59)$$

elde olunur. ω_n^2 yi sabit bir çarpan olduğundan gözönüne almadan, genliğin dB olarak ifadesi, sadece (-1) üstel işaretini ya da terimin paydada olduğunu düşünerek, genlik ve faz için

$$\text{Genlik} = +20 \log_{10} \left[(1-u^2)^2 + 4\zeta^2 u^2 \right]^{-1/2} = -10 \log_{10} \left[(1-u^2)^2 + 4\zeta^2 u^2 \right] \quad (2.60)$$

$$\text{Açı} = \angle (1 - u^2 + 2\zeta ju)^{-1} = -\tan^{-1} \frac{2\zeta u}{1-u^2} \quad (2.61)$$

elde olunur. Terimin transfer fonksiyonunun paydasında olması $\zeta < 1$ için kompleks eşlenik kutupların bulunmasını belirtir. ζ nin değeri küçüldükçe sistemin transfer fonksiyonu genliğinin büyüdüğü yani sistemin girişine sınırlı ve ve sabit bir işaret

verilse bile çıkış işaretinin büyüdüğü, sonuç olarak sistemin kararsızlığa doğru gittiği anlaşılır.

2.8 SONUÇ

Tezin bu bölümünde kontrol sistemlerinin kararlılığının incelenmesinde kullanılan kazanç payı, faz payı, yükselme zamanı ve yerleşme zamanı vb. gibi terimlerin açıklaması yapıldı. Kararlılığın incelenmesi karakteristik denklem yardımıyla yapılır. Karakteristik denklem mutlak kararlılığı hakkında bilgi sağlayan routh kriteri ve nyquist kriteri ile ilgili açıklamalarda bulunuldu. Bir kontrol sisteminin frekans domeni davranışının (genlik ve faz diyagramı) incelenmesi amacıyla fikir veren bode diyagramı çizimi hakkında bilgi verildi.

BÖLÜM III

BELİRSİZ KONTROLSİSTEMLERİNİN ANALİZİ VE KARARLILIĞI

- 3.1 Giriş
- 3.2 Belirsizlik Yapıları
- 3.3 Belirsizlik İçeren Kontrol Sistemlerinin Analizinde Kullanılan Bazı Önemli Sonuçlar
 - 3.3.1 Değer Kümesi Kavramı
 - 3.3.2 Sıfırın Dışlanma Prensibi
 - 3.3.3 Segment Lemma
 - 3.3.4 Khartinovs Teoremi
 - 3.3.5 Kenar Teoremi
- 3.4 İnterval Plant Kavramı
 - 3.4.1 Onaltı Kharitonov Transfer Fonksiyonu
 - 3.4.2 Otuziki Sistem
- 3.5 Sonuç

3.1 GİRİŞ

Bir fiziksel sistemin matematiksel denkleminin elde edilmesine modelleme denir. Fakat, bir gerçek sistemin kesin matematiksel modelini elde etmek genellikle zordur. Dolayısıyla sistemleri tanımlayan denklemler elde edilirken basit olması açısından bazı kabullenmeler yapılır. Bir sistemin gerçek modeli ile basitleştirilmiş modeli arasındaki farka belirsizlik denir. Başarılı bir kontrol sistemi belirsizliklere rağmen istenilen sonuçları veren bir sistemdir. Kontrol sisteminin bu yeteneğine dayanıklılık denir. Dolayısıyla, dayanıklı kontrol belirsizlik içeren sistem transfer fonksiyonlarıyla ilgilenir. Kontrol sistemindeki belirsizlik iki ana başlık altında sınıflandırılır

- 1) Parametre belirsizliğini ifade eden yapısal belirsizlik
- 2) Model belirsizliğini ifade eden yapısal olmayan belirsizlik

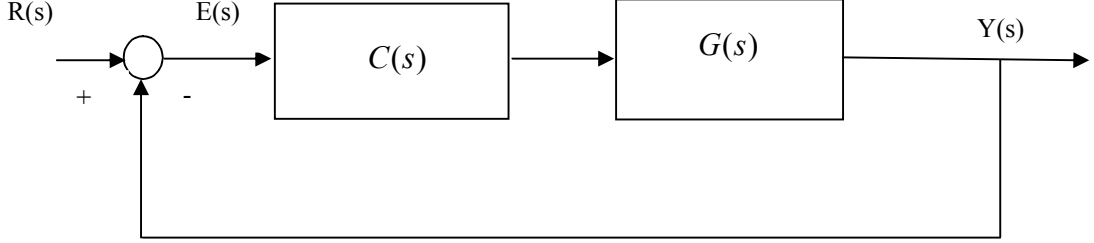
Dayanıklı kontrolörün amacı lineer kontrol teorisi alanında çok iyi bilinen metotların bu belirsizlik yapıları içeren kontrol sistemlerine uyarlanması ve yeni metotların geliştirilmesidir.

Belirsizlik içeren kontrol sistemlerinin analizi ve tasarımı ile ilgili yapılan çalışmalar daha çok 1980'lerden sonra olduğu görülmektedir. Bunu nedeni de parametre belirsizliği içeren polinomların kararlılığı ile ilgili Khartinov teoremidir [11]. Khartinov teoremi 1978 yılında Rus literatüründe yayınlanmıştır. Daha sonraları Batı literatüründe yayınlanmıştır ve bu teoreme olan ilgi artmıştır. Khartinov teoremi temelde interval (aralık) belirsizlik yapısı içeren polinomların kararlılığı ile ilgili olup böyle bir polinom kümesinin Hurwitz kararlı olabilmesi için kümedeki dört polinomun kararlı olmasının yeterli olacağını ifade eder. Bu önemli sonuçtan yararlanarak bu alanda bir çok çalışma yapılmıştır. Önemli çalışmalar genelleştirilmiş Khartinov teoremi [12] ve kenar teoremi [13,19]'dir.

Tezin bu bölümünde belirsizlik yapılarından bahsedilecektir. Parametre belirsizliği içeren kontrol sistemlerinin analizi için kullanabilecek metotlar tanıtılacaktır. Ayrıca, parametre belirsizliği içeren transfer fonksiyonları ile ilgili sonuçlar verilecektir.

3.2 BELİRSİZLİK YAPILARI

Aşağıdaki sistemde



Şekil 3.1 Standart Geribeslemeli Kontrol Sistemi

$$G(s) = \frac{N(s)}{D(s)} \quad (3.1)$$

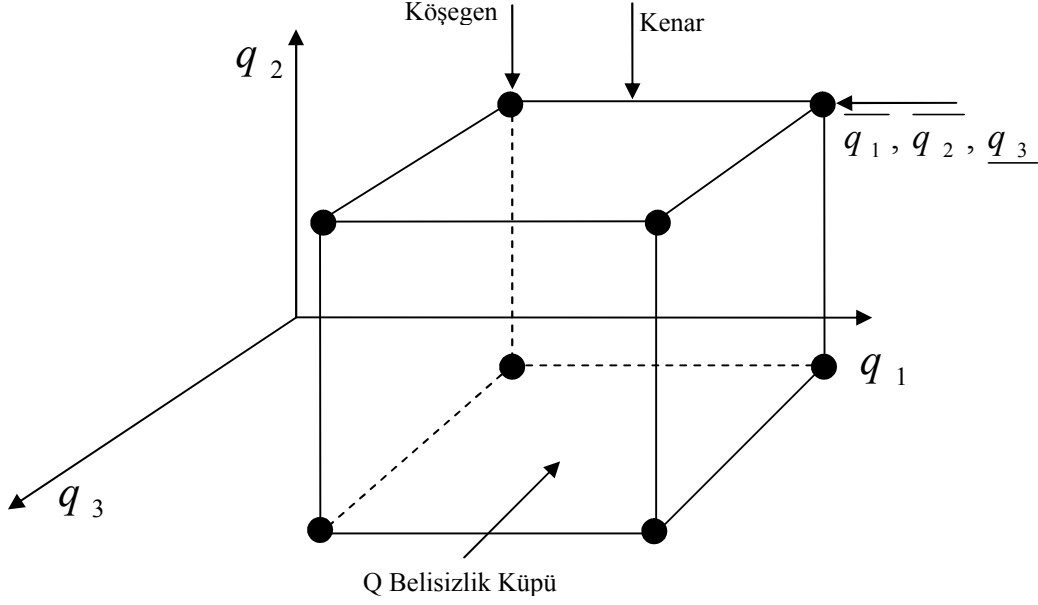
parametreleri sabit bir transfer fonksiyonu ve

$$C(s) = \frac{N_c(s)}{D_c(s)} \quad (3.2)$$

de bir kontrolörü ifade etsin. Böyle bir sistemin karalı olabilmesi için sistemin karakteristik polinomunun yani $N(s)N_c(s) + D(s)D_c(s) = 0$ 'ın bütün köklerinin s -düzleminin sol yarı düzleminde olması gerekir. Sistemde $G(s)$ 'in parametre belirsizliği içerdiğini varsayalım ve parametre belirsizliği vektörü $q = [q_1, q_2, \dots, q_m]$ ile ifade edilsin. Bu durumda belirsizlik küpü şu şekilde ifade edilir [13].

$$Q = (q \in R^m : q_i \in [\underline{q}_i, \overline{q}_i], i = 1, 2, \dots, m) \quad (3.3)$$

burada \underline{q}_i ve \overline{q}_i , q_i parametresinin alt üst limitlerini göstermektedir. Örneğin belirsizlik küpü şekil 3.2'de gösterilmiştir. Dolayısıyla eğer sistemdeki $G(s)$ belirsizlik içeriyorsa şu şekilde gösterilebilir.



Şekil 3.2 Q Belirsizlik Küpü

$$G(s, q) = \frac{N(s, q)}{D(s, q)} \quad (3.4)$$

Bu durumda sistemin karakteristik polinomu

$$P(s, q) = N(s, q)N_c(s) + D(s, q)D_c(s) \quad (3.5)$$

şeklindedir. Daha genel olarak

$$P(s, q) = a_0(q) + a_1(q)s + a_2(q)s^2 + \dots + a_n(q)s^n \quad (3.6)$$

yazılabilir. Bu polinomda $a_i(q)$ $i = 0, 1, 2, \dots, n$ katsayıların yapısı sistemdeki belirsizlik yapılarını belirler. $a_i(q)$ yapısına bağlı olarak dört çeşit belirsizlik yapısı vardır:

1) *Interval (Aralık) Belirsizlik Yapısı* : $P(s, q)$ polinomundaki $a_i(q)$ sadece bir parametreye bağlı ise bu durumda belirsizlik yapısı intervaldır. Örneğin

$$P(s, q) = q_0 + q_1s + q_2s^2 \quad q_0 \in [1, 2], q_1 \in [3, 4], q_2 \in [6, 7] \quad (3.7)$$

polinomu aralık belirsizlik yapısını içermektedir.

2) *Affline Linear Belirsizlik Yapısı* : Bu durumda $a_i(q)$ katsayısı sadece belirsiz parametrelerin lineer fonksiyonudur. Örneğin

$$P(s, q) = (q_1 + q_2) + (q_1 + q_2 + q_3)s + (q_2 + q_3)s^2$$

3) *Multilineer Belirsizlik Yapısı* : Bu durumda $a_i(q)$ belirsiz parametrelerin multilineer fonksiyonudur. Örneğin,

$$P(s, q) = (q_1 + q_2) + (q_1 + q_2 + q_3)s + (q_1 q_2 q_3)s^2$$

4) *Polinom Belirsizlik Yapısı* : Bu durumda $a_i(q)$ belirsiz parametrelerin nonlinear fonksiyonu ise polinom belirsizlik yapısı vardır denir. Örneğin,

$$P(s, q) = q_1 + (q_1 + q_2^2)s + (2q_1 q_3 - 6q_1 q_2 + q_3^2)s^2$$

Burada dört belirsizlik yapısı tanıtıldı. Bu belirsizlik yapılarını sırasıyla P_{int} , P_{affine} , $P_{multilin}$ ve P_{poly} kelimeleriyle ifade edelim. Bu durumda

$$P_{int} \subset P_{affine} \subset P_{multilin} \subset P_{poly} \quad (3.8)$$

yazılabilir [13]. Dolayısıyla en basit belirsizlik yapısı interval belirsizlik yapısıdır ve en zor belirsizlik yapısı ise polinom belirsizlik yapısıdır. Aralık belirsizlik yapısını incelemek için Khartinov teoremi [11] kullanılır. Affline lineer belirsizlik yapısı için kenar teoremi [14] kullanılır. Multi lineer belirsizlik yapısı için ise Mapping teoremi [15] kullanılır. Polinom belirsizlik yapısı için geliştirilmiş genel bir metot mevcut değildir.

3.3 BELİRSİZLİK İÇEREN KONTROL SİSTEMLERİNİN ANALİZİNDE KULLANILAN BAZI ÖNEMLİ SONUÇLAR

Bu bölümde parametre belirsizliği içeren kontrol sistemlerinin analizinde kullanılan bazı sonuçlar verilecektir. Bu sonuçların anlaşılması dayanıklı kontrol alanında geliştirilmiş olan teorinin kavranılmasını sağlayacaktır.

3.3.1 Değer Kümesi Kavramı

Belirsiz kontrol istemlerinin frekans cevaplarının incelenmesinde ve kararlılık analizinde önemli rol oynayan bir kavramdır. Katsayıları sabit olan bir polinomun herhangi bir frekansta kompleks düzlemindeki görüntüsü bir noktadır. Fakat belirsiz katsayıya sahip bir polinomun değer kümesinin kolay elde edilmesi ve sıfırın dışlanma prensibiyle beraber kullanılabilmesi önemli bir kararlılık analizi yöntemi oluşturur.

Örnek 3.1

Şu belirsiz polinomu ele alalım,

$$P(s, q) = s^3 + [6,8]s^2 + 6s + 5 \quad (3.9)$$

Bu belirsiz polinom ailesinin her frekansta değer kümesini elde etmek için $P(s, q)$ 'nin reel ve sanal bölümlerinin bulunmasına ihtiyaç vardır. $s = jw$ alınırsa,

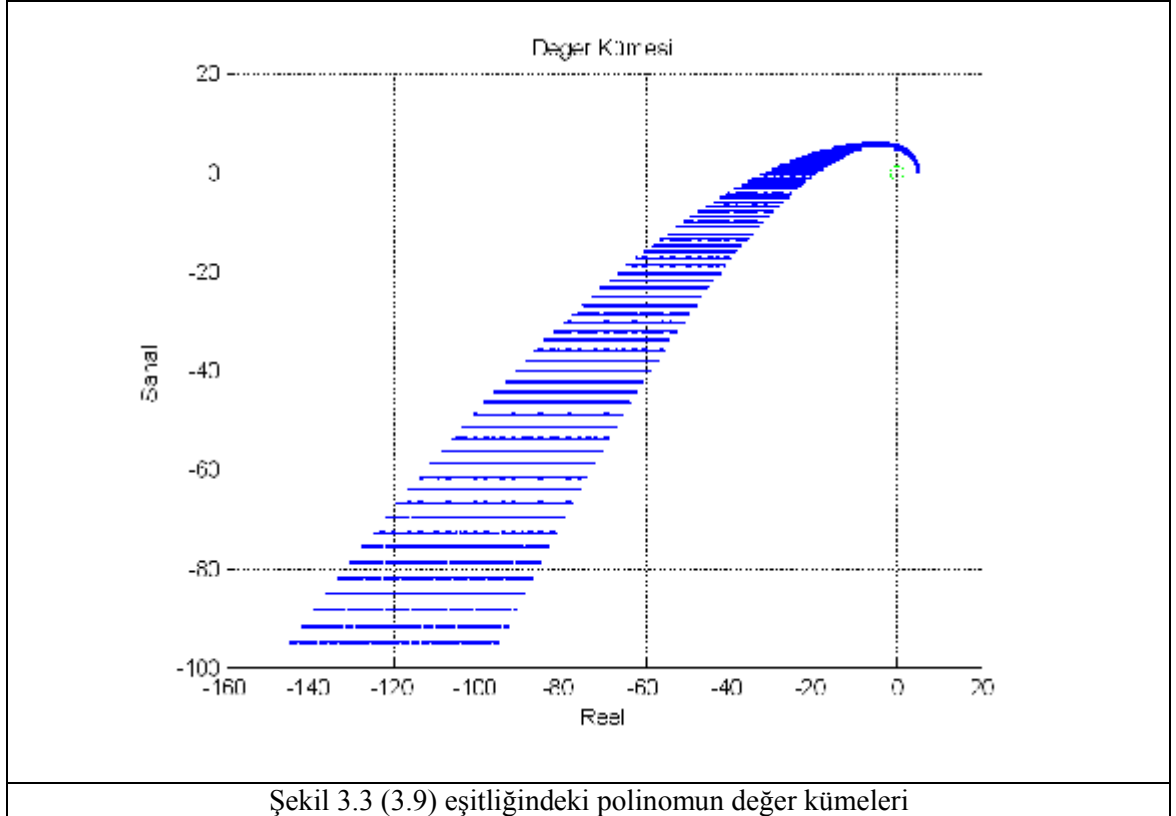
$$P(jw, q) = -jw^3 - [6,8]w^2 + 6jw + 5 = -[6,8]w^2 + 5 + jw(-w^2 + 6) \quad (3.10)$$

$P(s, q)$ 'nin reel ve sanal kısımlarını,

$$-8w^2 + 5 \leq \text{Re}[P] \leq -6w^2 + 5 \quad (3.11)$$

$$\text{Im}[P] = -jw^3 + 6jw \quad (3.12)$$

şeklinde ifade edebiliriz. Bu denklemlerden $P(s, q)$ 'nin değer kümeleri elde edilir. $P(s, q)$ 'nin $0 \leq w \leq 5$ aralığında eşit uzaklıkta sıralanmış 100 frekans için değer kümeleri şekil 3.3 'de gösterilmiştir.



3.3.2 Sıfırın Dışlanma Prensibi

Sınır geçiş teoremine [14] göre bir polinom kümesinin kararlı olabilmesi için değer kümesinin bütün frekans değerlerinde sıfırı içine almaması gerekir. Dolayısıyla $P(s, q)$ polinomunun kararlı olabilmesi için bütün w değerlerinde

$$0 \notin P(jw, q) \quad (3.13)$$

olmalıdır. Daha önce bahsedildiği gibi değer kümesinin sıfırın dışlama prensibiyle beraber kullanılması dayanıklı kararlılığın incelenmesi açısından önemli bir sonuçtur. Çünkü değer kümesinin sıfırın içine alıp almadığı değer kümesinin sınırlarını kullanarak test edebiliriz.

3.3.3 Segment Lemma

Uç polinomları olarak adlandırılan iki sabit polinom $\delta_1(s)$ ve $\delta_2(s)$ olan bir segment şu şekilde yazılabilir;

$$\delta(s, \lambda) = (1 - \lambda)\delta_1(s) + \lambda\delta_2(s), \quad \lambda \in [0, 1] \quad (3.14)$$

Genellikle, uç polinomları yani $\delta_1(s)$ ve $\delta_2(s)$ kararlı olan bir segment kararlı diyemeyiz. Örneğin,

$$\delta_1(s) = 3s^4 + 3s^3 + 5s^2 + 2s + 1 \quad (3.15)$$

ve

$$\delta_2(s) = s^4 + s^3 + 5s^2 + 2s + 5 \quad (3.16)$$

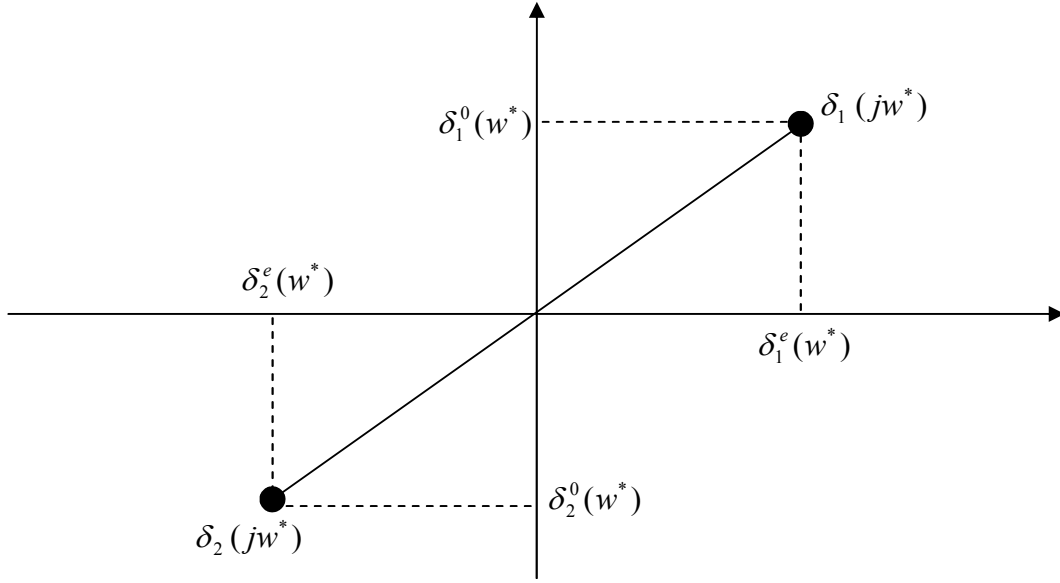
olsun. Görüleceği gibi $\delta_1(s)$ ve $\delta_2(s)$ polinomları Hurwitz kararlıdır. Fakat bu polinomların oluşturduğu

$$\delta(s, \lambda) = (1 - \lambda)\delta_1(s) + \lambda\delta_2(s)$$

segment $\lambda = 0.5$ için kararlı değildir. Uç noktaları kararlı $\delta_1(s)$ ve $\delta_2(s)$ polinomları olan $(1 - \lambda)\delta_1(s) + \lambda\delta_2(s)$ segmentlerin kararlı olabilmesi için aşağıdaki üç denklemi aynı anda sağlayan reel $w > 0$ değerinin olmaması gerekir.

$$\begin{aligned}
1) \quad & \delta_1^e(w)\delta_2^o(w) - \delta_2^e(w)\delta_1^o(w) = 0 \\
2) \quad & \delta_1^e(w)\delta_2^e(w) \leq 0 \\
3) \quad & \delta_1^o(w)\delta_2^o(w) \leq 0
\end{aligned} \tag{3.17}$$

Burada $(\delta_1^e(w), \delta_1^o(w))$ ve $(\delta_2^e(w), \delta_2^o(w))$, $\delta_1(s)$ ve $\delta_2(s)$ polinomlarının çift ve tek kısımları ifade etmektedir. Yukarıdaki denklemler aşağıdaki şekilden çıkarılabilir.



Şekil 3.4 Segment Lemmanın Geometrik Gösterimi

3.3.4 Khartinov Teoremi

1978 yılında Rus araştırmacı V. L. Kharitonov; “ Sürekli zamanlı interval polinomlara ait dört Kharitonov polinomu kararlı ise bu interval polinomlar kararlıdır” teorisini ortaya çıkardı. Sınırsız sayıdaki polinomun kararlılığını kontrol etmek yerine, klasik Hurwitz kriteri ile dört polinomun kararlılığını kontrol etmek yeterlidir [12, 16]. n. dereceden bir sürekli zamanlı interval polinom kümesi şu formda yazılabilir:

$$p(s, q) = \sum_{i=0}^n [q_i, \overline{q_i}] s^i \tag{3.18}$$

$$p(s, q) = q_0 + q_1 s + q_2 s^2 + q_3 s^3 + q_4 s^4 + q_5 s^5 + \dots + q_n s^n \tag{3.19}$$

$\underline{q_i}$ ve $\overline{q_i}$ i. belirsizlik q_i 'nin alt ve üst limitlerini göstermektedir. Bu interval kümesinin kararlı olabilmesi için Kharitonov teoremine göre aşağıda belirtilen dört

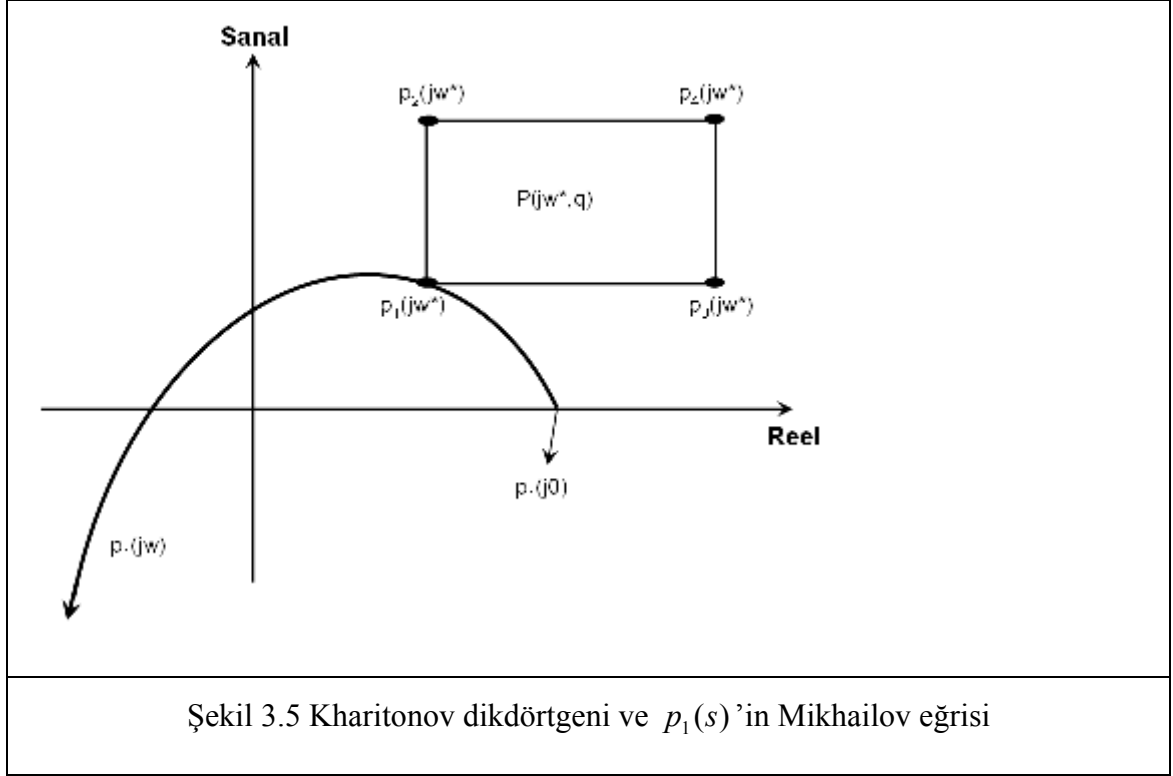
Kharitonov polinomunun kararlı olması gerekmektedir. Dört Kharitonov polinomu şu şekilde yazılabilir:

$$\begin{aligned}
 p_1(s) &= \underline{q}_0 + \underline{q}_1 s + \overline{q}_2 s^2 + \overline{q}_3 s^3 + \underline{q}_4 s^4 + \underline{q}_5 s^5 + \dots \\
 p_2(s) &= \overline{q}_0 + \overline{q}_1 s + \underline{q}_2 s^2 + \underline{q}_3 s^3 + \overline{q}_4 s^4 + \overline{q}_5 s^5 + \dots \\
 p_3(s) &= \underline{q}_0 + \underline{q}_1 s + \underline{q}_2 s^2 + \overline{q}_3 s^3 + \overline{q}_4 s^4 + \underline{q}_5 s^5 + \dots \\
 p_4(s) &= \overline{q}_0 + \overline{q}_1 s + \overline{q}_2 s^2 + \underline{q}_3 s^3 + \underline{q}_4 s^4 + \overline{q}_5 s^5 + \dots
 \end{aligned} \tag{3.20}$$

Bu polinomlar şu yapı kullanarak elde edilebilir.

$$\begin{aligned}
 p_1 &= - - + + - - \dots \\
 p_2 &= - + + - - + \dots \\
 p_3 &= + - - + + - \dots \\
 p_4 &= + + - - + + \dots
 \end{aligned} \tag{3.21}$$

Bu sonuç aslında Mikhailov kriterini kullanarak basit bir şekilde ispatlanabilir. Mikhailov kriterine göre n . dereceden bir $p(s)$ polinomunun kararlı olabilmesi için $p(j\omega)$ 'nin pozitif reel eksenden başlayarak saat yönünün tersinde n eksenini kesmesi gerekir. Yani sıfırın dışlanması kuralına (zero exclusion principle) [17] göre $p(j\omega)$ 'nin orijinden geçmemesi gerekir. Dolayısıyla, bir interval polinomunun herhangi bir sabit frekanstaki değer kümesinin şekil 3.5'te görüldüğü üzere kenarları reel ve sanal eksene paralel olan bir dikdörtgen olduğu kolayca gösterilebilir. Bu dikdörtgenin köşelerini Kharitonov polinomları oluşturur ve bu dikdörtgene Kharitonov dikdörtgeni denir. Bu dikdörtgenin kenarları reel ve sanal eksenlere paralel olduğu için orijinin dikdörtgensel değer kümesinin içinde veya dışında kalması köşe noktalarını kullanarak kolayca test edilebilir. Şekil 3.5'te de görüldüğü üzere köşe noktaları Kharitonov polinomlarına karşılık gelmektedir [18].



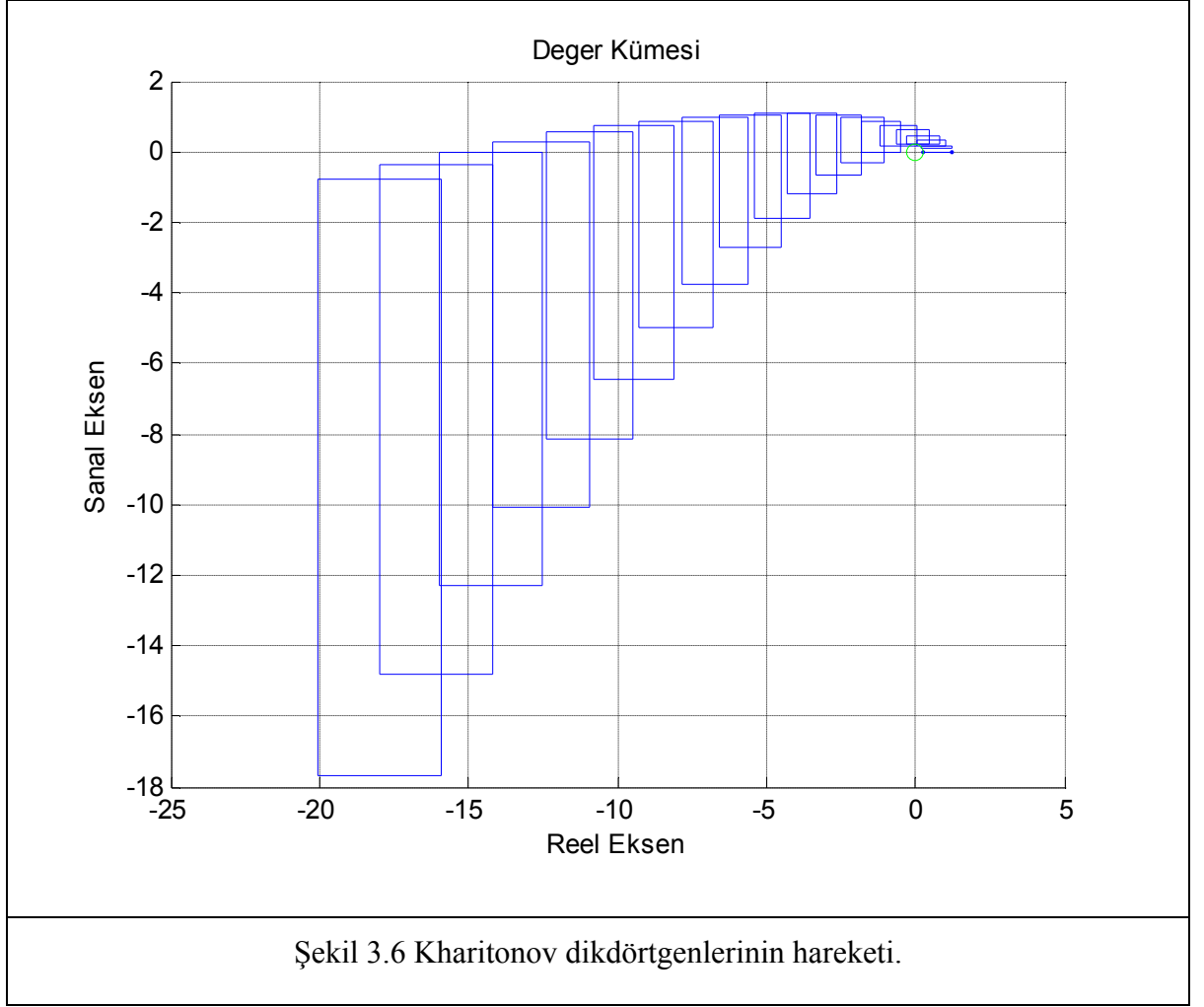
Örnek 3.2

$$P(s, q) = [0.3, 1.3]s^3 + [3, 3.5]s^2 + [1, 1.5]s + [0.5, 1.5] \quad (3.22)$$

interval polinomu üzerinde çalışacak olursak, dört Kharitonov polinomu:

$$\begin{aligned} p_1(s) &= 1.3s^3 + 3.5s^2 + 1s + 0.5 \\ p_2(s) &= 0.3s^3 + 3.5s^2 + 1.5s + 0.5 \\ p_3(s) &= 1.3s^3 + 3s^2 + 1s + 1.5 \\ p_4(s) &= 0.3s^3 + 3s^2 + 1.5s + 1.5. \end{aligned} \quad (3.23)$$

şeklinde elde edilir. Eğer yukarıdaki dört Kharitonov polinomu kararlı ise (3.23) denkleminde verilen polinom kümesinin Hurwitz kararlı olduğu sonucuna ulaşılır.



Şekil 3.6 'da görüldüğü üzere Kharitonov dikdörtgenleri '0' (sıfır) noktasını kapsamamaktadır. Dolayısıyla, sistemin kararlı olduğunu söylemek mümkündür.

3.3.5 Kenar Teoremi

Kharitonov teoreminin interval polinomlarının kararlılığına hassas bir çözüm getirmesine rağmen iki temel sınırlama ile karşılaşmaktadır. Bunlar:

1. Polinomların katsayılarının bağımsız olarak değiştiği varsayılmaktadır. Yani, hiçbir q_i birden fazla katsayıya katılmaz. Genel bir durumda, belirsiz bir polinom için katsayıların affine linear, multilineer veya polinom fonksiyonlarından oluşabileceği (3.6) eşitliğinde gösterilmiştir.
2. Diğer önemli sınırlama ise Kharitonov teoreminin sadece, kararlılık alanının açık sol yarı düzlemde kesiştiği yerde uygulanabilmesidir.

Kenar teoremi [19] için; “m” tane belirsiz parametre içeren bir belirsiz polinomda, parametre düzleminde 2^m tane köşe, $2^{m-1} \cdot (2^m - 1)$ tane kenar ve bu kenarların içerisinde $m \cdot 2^{m-1}$ tane kenar *etkin kenardır*. “m” tane belirsiz parametre içeren bir polinom kümesinin kararlı olabilmesi için $m \cdot 2^{m-1}$ tane etkin (exposed) kenarın kararlı olması gerekmektedir. Ayrıca böyle bir polinomun kök uzayı, etkin kenarların kök uzayının içindedir.

3.4 INTERVAL (ARALIK) PLANT KAVRAMI

Bu bölümde onaltı kharitonov transfer fonksiyonu kümesi ve otuziki sistem anlatılacaktır. Bu konular dayanıklı kontrol alanında elde edilmiş bir çok sonucun temelini oluşturur. Konuyla ilgili detaylı çalışmalar [14,17] referanslarda bulunabilir.

3.4.1 Onaltı Kharitonov Transfer Fonksiyonu

Bir aralık transfer fonksiyonu,

$$G(s, q, r) = \frac{N(s, r)}{D(s, q)} = \frac{r_m s^m + r_{m-1} s^{m-1} + \dots + r_0}{q_n s^n + q_{n-1} s^{n-1} + \dots + q_0} \quad (3.24)$$

şeklinde verilsin. Burada,

$$Q = \{ q : q_i \in [\underline{q}_i, \overline{q}_i], i = 0, 1, 2, \dots, n \}$$

ve

$$R = \{ r : r_i \in [\underline{r}_i, \overline{r}_i], i = 0, 1, 2, \dots, m \}$$

belirsizlik kümelerini ifade etmektedir. Pay ve payda polinomları $N(s, r)$ ve $D(s, q)$ birer aralık polinomudur. Kharitonov teoreminden faydalanılarak, pay için dört Kharitonov polinomları ,

$$\begin{aligned} N_1(s) &= \underline{r}_0 + \underline{r}_1 s + \overline{r}_2 s^2 + \overline{r}_3 s^3 + \underline{r}_4 s^4 + \underline{r}_5 s^5 + \dots \\ N_2(s) &= \underline{r}_0 + \overline{r}_1 s + \overline{r}_2 s^2 + \underline{r}_3 s^3 + \underline{r}_4 s^4 + \overline{r}_5 s^5 + \dots \\ N_3(s) &= \overline{r}_0 + \underline{r}_1 s + \underline{r}_2 s^2 + \overline{r}_3 s^3 + \overline{r}_4 s^4 + \underline{r}_5 s^5 + \dots \\ N_4(s) &= \overline{r}_0 + \overline{r}_1 s + \underline{r}_2 s^2 + \underline{r}_3 s^3 + \overline{r}_4 s^4 + \overline{r}_5 s^5 + \dots \end{aligned} \quad (3.25)$$

ve payda için dört Kharitonov polinomları,

$$\begin{aligned}
D_1(s) &= \underline{q}_0 + \underline{q}_1 s + \overline{q}_2 s^2 + \overline{q}_3 s^3 + \underline{q}_4 s^4 + \underline{q}_5 s^5 + \dots \\
D_2(s) &= \underline{q}_0 + \overline{q}_1 s + \overline{q}_2 s^2 + \underline{q}_3 s^3 + \underline{q}_4 s^4 + \overline{q}_5 s^5 + \dots \\
D_3(s) &= \overline{q}_0 + \underline{q}_1 s + \underline{q}_2 s^2 + \overline{q}_3 s^3 + \overline{q}_4 s^4 + \underline{q}_5 s^5 + \dots \\
D_4(s) &= \overline{q}_0 + \overline{q}_1 s + \underline{q}_2 s^2 + \underline{q}_3 s^3 + \overline{q}_4 s^4 + \overline{q}_5 s^5 + \dots
\end{aligned} \tag{3.26}$$

gibidir. $i, j = 1, 2, 3, 4$, için $N_i(s)$ ve $D_j(s)$ 'in tüm kombinasyonları düşünüldüğünde Onaltı Kharitonov transfer fonksiyonu ailesi elde edilir.

$$G_k(s) = \left\{ G_{ij}(s) = \frac{N_i(s)}{D_j(s)} \right\} \tag{3.27}$$

$i, j = 1, 2, 3, 4.$

Örnek 3.3

$$G(s) = \frac{r_1 s + r_0}{s^3 + q_2 s^2 + q_1 s + q_0}$$

$r_0 \in [1, 2]$, $r_1 \in [3, 4]$, $q_0 \in [5, 6]$, $q_1 \in [8, 10]$ ve $q_2 \in [12, 15]$ belirsiz parametrelere sahip olan bu sistemin kararlılığına bakacak olursak;

$$G(s) = \frac{[3, 4]s + [1, 2]}{s^3 + [12, 15]s^2 + [8, 10]s + [5, 6]}$$

yazılabilir. (3.25) ve (3.26) denklemlerini kullanarak N_i ve D_j değerleri bulunur.

$$\begin{aligned}
N_1(s) &= 3s + 1 & D_1(s) &= s^3 + 15s^2 + 8s + 5 \\
N_2(s) &= 4s + 1 & D_2(s) &= s^3 + 15s^2 + 10s + 5 \\
N_3(s) &= 3s + 2 & D_3(s) &= s^3 + 12s^2 + 8s + 6 \\
N_4(s) &= 4s + 2 & D_4(s) &= s^3 + 12s^2 + 10s + 6
\end{aligned} \tag{3.28}$$

Elde edilen bu polinomları (3.27) denkleminde yerlerine koyarak onaltı Kharitonov transfer fonksiyonu bulunur. Elde edilen bu onaltı sistemin hepsinin kararlılığı kontrol edilir ve sonuçta sistemin kararlı olup olmadığına karar verilir.

3.4.2 Otuziki Sistem

Daha önceki bölümlerde belirtildiği üzere Kharitonov teoremi, bağımsız ve belirsiz yapıya sahip polinomların kararlılık problemleriyle ilgilidir. Bu teoremi sabit kontrolörlü bir kontrol sistemine ve interval (aralıklı) interval transfer fonksiyonuna uygulama girişimlerinde çeşitli zorluklar ile karşılaşılabilir. Bu zorluk öncelikle

karakteristik polinomun katsayılarından bağımsız özelliğın bozulmasına dayanır. Böyle durumlarda kenar teoremi kullanılabilir. Bununla beraber, kenar teoreminden elde edilen sonuç için, belirsiz parametrelerin sayısına bağılı olarak değişen bütün etkin kenarların kontrol edilmesi gerekir. Genel olarak Kharitonov teoremi, 3.29 eşitliğinde verilen polinom şekillerinin dayanıklı kararlılıklarıyla ilgilenir.

$$K(s) = F_1(s)P_1(s, q_1) + F_2(s)P_2(s, q_2) + \dots + F_m(s)P_m(s, q_m) \quad (3.29)$$

Burada $F_1(s), F_2(s), \dots, F_m(s)$ sabit polinomlardır ve $P_1(s, q_1), P_2(s, q_2), \dots, P_m(s, q_m)$

ise interval polinomlardır. (3.24) eşitliğinde verilen interval transfer fonksiyon ailesi, $N_1(s), N_2(s), N_3(s)$ ve $N_4(s)$ pay kısımları ve $D_1(s), D_2(s), D_3(s)$ ve $D_4(s)$ payda kısımlarından oluşan Kharitonov polinomlarıyla gösterilebilir. Daha sonra pay için dört Kharitonov segmenti

$$(1 - \lambda)N_i(s) + \lambda N_j(s) \quad (3.30)$$

ve payda için dört Kharitonov segmenti

$$(1 - \lambda)D_i(s) + \lambda D_j(s) \quad (3.31)$$

yazılabilir. Burada, $\lambda \in [0, 1]$ ve $(i, j) \in \{(1, 2), (1, 3), (2, 4), (3, 4)\}$ 'dir. Pay ve payda için Kharitonov segmentlerini ve Kharitonov polinomlarını kullanarak, aşağıda belirtilen 32 sistem elde edilir.

$$G_E(s) = \frac{N_i(s)}{(1 - \lambda)D_j(s) + \lambda D_k(s)} \cup \frac{(1 - \lambda)N_j(s) + \lambda N_k(s)}{D_i(s)} \quad (3.32)$$

Burada $\lambda \in [0, 1]$, $i = 1, 2, 3, 4$ ve $(j, k) \in \{(1, 2), (1, 3), (2, 4), (3, 4)\}$. Sabit kontrolörlü ve interval transfer fonksiyonlu bir kontrol sistemin Bode, Nyquist ve Nichols zarfları (envelopes) bu otuziki sistemden yararlanılarak elde edilebilir. Yüksek dereceli bir kontrolörlü ve interval transfer fonksiyonlu bir kontrol sistemin kararlılığı için, $C(s)G_E(s)$ 'in kararlılığı gereklidir [12].

3.5 Sonuç

Tezin bu bölümünde belirsiz parametre içeren polinomların dayanıklı kararlılığı problemi üzerinde durulmuştur. Kharitonov teoremi kullanılarak aralıklı (interval) polinomların kararlılığının, dört Kharitonov polinomunun kararlılığı kontrol edilerek bulunabilir. Bununla beraber, katsayı belirsizlikleri bağımsız olmadığı zaman bu teorem uygulanabilir değildir. Değer kümesi kavramı sıfırın dışlama prensibi ve segment lemma, belirsiz polinomların dayanıklı kararlılığının çözümünde parametrik dayanıklı kontrol alanında kullanılan üç önemli araçtır. Onaltı Kharitonov plant ailesi ve otuz-iki sistem, parametrik belirsizlikleri içeren kontrol sistemlerinin analiz ve tasarımında elde edilen sonuçların temelini oluşturmaktadır.

BÖLÜM IV

BELİRSİZ KONTROLSİSTEMLERİ İÇİN TASARIM

- 4.1 Giriş
- 4.2 Kontrol Sistemlerinde Kullanılan Örneksel Test İşaretleri
- 4.3 Performans Analizi
 - 4.3.1 İkinci Mertebeden Örnek Bir Sistemin Geçici Hal Yanıtı
- 4.4 PID ve Lag/Lead Kontrolörler
- 4.5 AISTK
- 4.6 Belirsiz Sistemler İçin Kontrolör Tasarımı
- 4.7 Sonuç

4.1 GİRİŞ

Kontrol sistemlerinde zaman genellikle bağımsız bir değişken görevini üstlenir ve bu nedenle durum ve çıkış büyüklüklerinin zamana göre değişimini ya da zaman yanıtları genel bir ilgi alanı oluşturur. Tasarım problemlerinde sistemlere referans giriş işaretleri uygulanır ve bu işaretlere verilen yanıtlar incelenerek sistemlerin davranışı değerlendirmeye çalışılır. Bir kontrol sisteminde eğer çıkış işaretleri giriş işaretini belirli koşullar altında takip etmesi isteniyorsa giriş ve çıkış işaretleri zaman fonksiyonu olarak karşılaştırılır. Bu nedenle kontrol sistemlerinde sistem davranışının son değerlendirilmesi genellikle hep zaman yanıtı üzerinde yapılır [5].

Bir kontrol sisteminin zaman yanıtı genellikle iki kısımdan oluşur: *geçici hal yanıtı* ve *sürekli hal yanıtı*. Eğer $y(t)$ bir sürekli sistem yanıtını ifade ediyorsa, $y_t(t)$ geçici yanıtı ve $y_{ss}(t)$ sürekli yanıtı ifade etmek üzere, genelde

$$y(t) = y_t(t) + y_{ss}(t) \quad (4.1)$$

yazılabilir.

Kontrol sistemlerinde geçici hal yanıtı, zaman yanıtının, zaman ilerledikçe, sıfıra doğru olarak giden kısmı olarak tanımlanır. Buna göre $y_t(t)$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} y_t(t) = 0 \quad (4.2)$$

özelliğindedir. Sürekli hal yanıtı ise, geçici hal yanıtı söndükten sonra, zaman yanıtının geriye kalan kısmıdır. Buna göre sürekli hal yanıtı zaman ilerledikçe, sinüs yada rampa fonksiyonu gibi belirli bir şekilde değişmeye devam edebilir.

Tüm gerçek kararlı kontrol sistemlerinde, sürekli hale erişmeden önce, belirli ölçülerde geçici hal davranışlarıyla karşılaşılır. Fiziksel sistem olarak eylemsizlik, kütle ve endüktanstan kaçınılamadığına göre, örneksel bir kontrol sistemi, girişteki ani değişimlere anında yanıt veremez ve genellikle geçişler gözlenir. Bu nedenle geçici hal yanıtının kontrolü sistemin dinamik davranışı yönünden önemli ve anlamalıdır, sürekli hale erişmeden önce istenilen yanıt ile sistem çıkış yanıtı arasındaki sapma hassasiyeti kontrol edilmelidir.

Bir sistemin sürekli hal yanıtı da çok önemlidir, çünkü zaman ilerledikçe sistem yanıtının nerede sona erdiği belirtilir. Konum kontrol sistemlerinde, sürekli hal yanıtı,

istenen referans konumuyla karşılaştırıldığında, neticede sistem doğruluğu ile ilgili bir değer verir. Genelde çıkışın sürekli hal yanıtı istenen referansta uyuşmadığında sistemde kararlı hal hataları bulunduğu anlamına gelir.

Kontrol sistemlerinin zaman tanım bölgesinde incelenmesi temelde sistemlerin geçici ve sürekli hal yanıtlarını düzeltme anlamına gelir. Tasarım probleminde değerlendirme genellikle geçici hal ve sürekli hal davranışlarına göre yapılır ve sistem kontrolörleri tüm koşullar sağlanacak şekilde tasarlanır.

4.2 KONTROL SİSTEMLERİNDE KULLANILAN ÖRNEKSEL TEST İŞARETLERİ

Elektrik devreleri haberleşme sistemlerinden farklı olarak, kontrol sistemlerinin girişi uygulamada genellikle önceden tam olarak belirlenemez. Pek çok kontrol sistemlerinin girişi zamana göre olası değişir. Örneğin uçak savar füzelerine ilişkin radar takip sistemlerinde, izlemekte olan hedefe ait konum ve hız, öngörülemez şekilde değişir ve bu nedenle genellikle önceden belirlenemez. Bu tasarımcıyı zorlar, çünkü olası tüm giriş işaretleri için geçerli bir kontrol sistemi tasarlamak çok zordur. Analiz ve sentezde az sayıda örnek test girişiyle yetinilir ve sistem davranışı buna göre değerlendirilir. Bu temel test işaretlerinin uygun seçimiyle sadece problemin matematiksel işlenişi sistematikleştirmekle kalmaz, bu girişle yanıt, sistemin daha karmaşık girişlere karşı davranışı öngörülebilir. Tasarım probleminde, davranış kriterleri bu test işaretleri cinsinde ifade edilir ve kriterleri sağlayacak şekilde tasarlanır. Bu yaklaşım doğrusal sistemler için özellikle yararlıdır, karmaşık işaretlere yanıt bu basit test işaretlerinden süperpozisyonla oluşturulabilir [5].

Doğrusal zamanla değişmeyen bir sistemin frekans tanım bölgesinde yanıtı analiz edildiğinde değişik frekanslı sinüsoidal girişlerden yararlanılır. Eğer giriş frekansı sıfırdan başlamak üzere sistem karakteristiğinin anlamlı bir değerine kadar sürekli artırılırsa, giriş ve çıkış arasındaki genlik oranı ve faz farkı, frekansın fonksiyonu olarak iki eğri halinde çizilebilir. Sistemin zaman tanım bölgesi davranışı frekans tanım bölgesi karakteristiklerinden öngörülebilir. Tasarım analizinde aşağıda belirtilen test işaretlerinde faydalanılır.

Basamak Fonksiyonu Girişi: Basamak fonksiyonu girişi referans girişinde ani değişimleri ifade eder. Örneğin, eğer giriş mekanik bir milin açısal konumuna karşı düşüyorsa, basamak giriş milin ani dönüşünü ifade eder. R genliğinde basamak fonksiyonunun matematiksel ifadesi, R sabit olmak üzere,

$$r(t) = \begin{cases} R & t \geq 0 \\ 0 & t < 0 \end{cases} \quad (4.3)$$

ya da, $u_s(t)$ birim basamak fonksiyonu ifade etmek üzere,

$$r(t) = Ru_s(t) \quad (4.4)$$

şeklinde dir. Şekil 4.1 (a)'da basamak fonksiyonu zamana göre değişimi görülmektedir. Başlangıçta sıçrama nedeniyle basamak fonksiyonu sistemdeki ani değişimlere karşı belirlemede çok yararlı olur. Ayrıca basamak fonksiyonun tayfında frekans bandı çok geniş olduğundan, sıçrama şeklindeki süreksizlik geniş bir frekans bölgesinde sisteme çok sayıda sinüsoidal işaretin uygulandığı anlamına da gelir.

Rampa Fonksiyon Girişi : Rampa fonksiyonu zaman göre sabit değişen bir işarettir. Matematiksel olarak rampa fonksiyonu, R gerçel bir sabit olmak üzere,

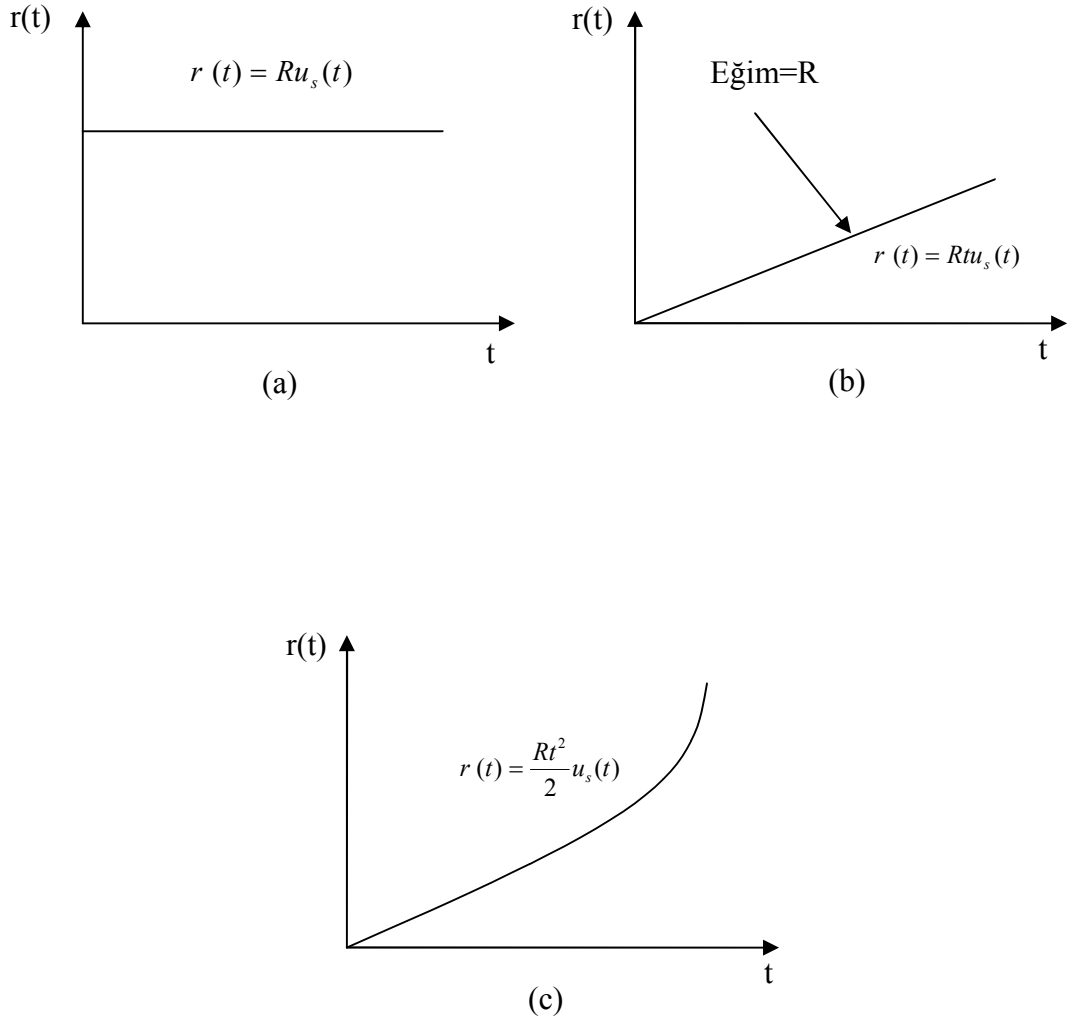
$$r(t) = Rtu_s(t) \quad (4.5)$$

şeklinde ifade edilir. Rampa fonksiyonu şekil 4.2 (b)'de görülmektedir. Eğer giriş değişkenli bir milin açısal değişimini ifade ediyor ise rampa girişi milin sabit hızla döndüğü anlamına gelir. Rampa girişi sistemin zamanla doğrusal değişen bir işaretin yanıtını belirlemeye yarar.

Parabolik Fonksiyon Girişi : Parabolik fonksiyon rampa fonksiyonundan bir merteb daha hızlı olan işareti ifade eder. R gerçel bir sabit olmak üzere, matematiksel olarak

$$r(t) = \frac{Rt^2}{2}u_s(t) \quad (4.6)$$

şeklinde ifade edilir. Burada 1/2 katsayısı matematiksel basitlik nedeniyle ilave edilmiştir. Çünkü $r(t)$ laplace dönüşümü r/s^3 şeklindedir. Parabolik fonksiyonunu grafiksel çizimi şekil 4.1 (c)'de verilmiştir.



Şekil 4.1 Kontrol Sistemler Tasarımında Kullanılan Test İşaretleri:(a) Basamak Fonksiyonu, (b) Rampa Fonksiyonu, (c) Parabolik Fonksiyonu

Bu işaretlerin temel özelliği matematiksel olarak basit ifade edebilmeleridir. Basamak fonksiyondan parabolik fonksiyona işaretler zamanla gittikçe daha hızlı değişir. Kuramsal olarak, t^3 şeklinde değişimi daha yüksek mertebeden olan ve *jerk fonksiyonu* adı verilen bir işaret de tanımlanabilir. Ancak uygulamada parabolik fonksiyondan daha hızlı değişen test fonksiyonlarının kullanılmasına çok ender ihtiyaç duyulur. Bunun nedeni yüksek mertebeden girişlerin doğru izlenebilmesi için sistem çevriminde yüksek mertebeden integratörlerin bulunması gereğidir, bu ise sistemde ciddi kararlılık sorunlarına yol açar.

4.3 PERFORMANS ANALİZİ

Geçici hal daha önce belirtildiği gibi, sistem yanıtının zaman ilerledikçe sifıra giden kısmı olarak tanımlanır. Bir kontrol sisteminde geçici hal yanıtının genliği ve süresi katlanabilir bir sınırın altında tutulmalıdır.

Doğrusal kontrol sistemlerinde geçici hal yanıtının değerlendirilmesi genellikle $u_s(t)$ birim basamak yanıtından yararlanılarak yapılır. Kontrol sistemin birim basamak girişe cevabı birim basamak yanıtı olarak adlandırılır. Şekil 4.2’de doğrusal kontrol sisteminin örneksel bir basamak yanıtı görülmektedir. Birim basamak yanıtı ile ilişkili olarak kontrol sistemlerinin zaman tanım bölgesi özellikleri aşağıdaki davranış kriterleriyle değerlendirilir.

1. *En büyük aşım* : $y(t)$ birim basamak yanıtı olmak üzere $y(t)$ ’nin en büyük değeri y_{mak} ve sürekli hal değeri y_{ss} ile belirlenmiş olsun ($y_{mak} \geq y_{ss}$) $y(t)$ ’nin en büyük aşımı

$$\text{en büyük aşım} = y_{mak} - y_{ss} \quad (4.7)$$

olarak tanımlanır. En büyük aşım genellikle basamak yanıtı sondeğeri yüzdesi ile ifade edilir:

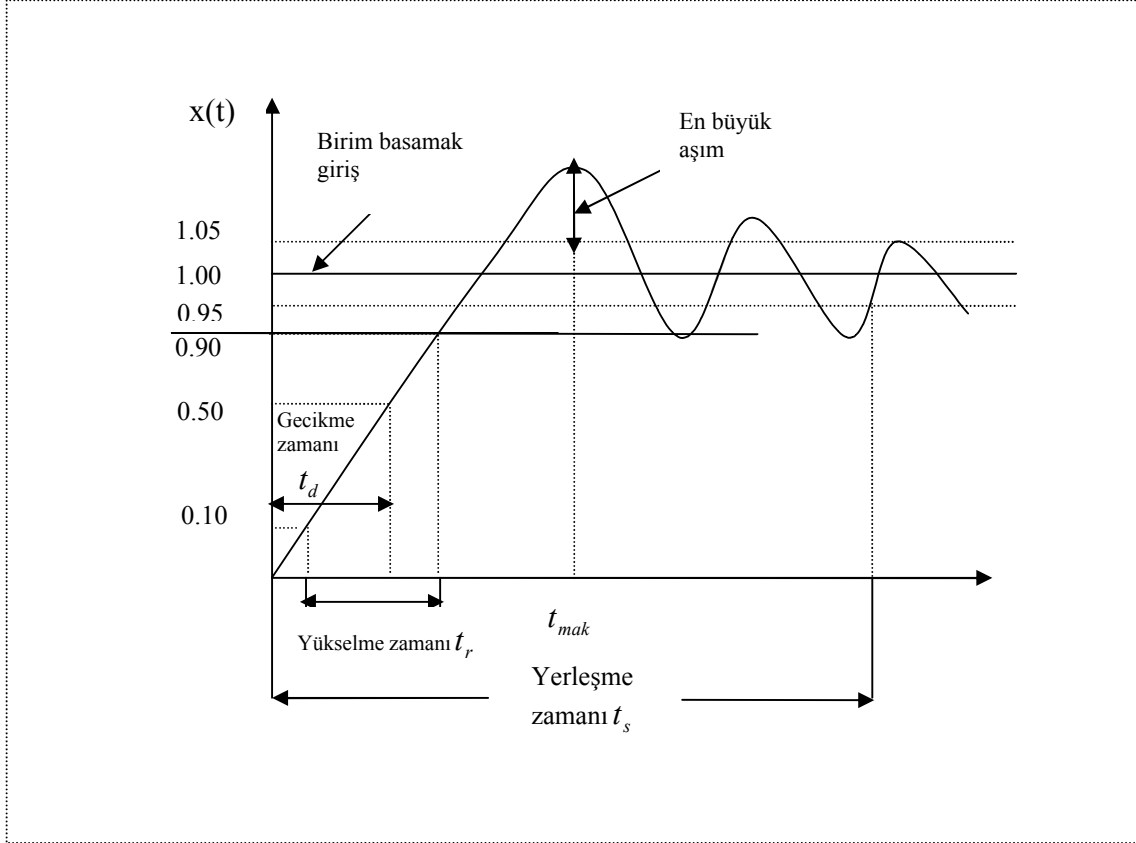
$$\text{yüzde en büyük aşım} = \frac{\text{en büyük aşım}}{y_{ss}} \times 100 \quad (4.8)$$

En büyük aşım genellikle bir kontrol sisteminin görelî kararlılığını değerlendirme ölçüsü olarak kullanılır. Genellikle sistemde aşımın büyük olması istenmez. Tasarımda en büyük aşım bir zaman tanım bölgesi ölçüsü olarak verilir. Şekil 4.2 ‘deki birim basamak yanıtında en büyük aşımın birinci aşımında gerçekleştiği görülür. Bazı sistemlerde en büyük aşım sonraki tepe değerlerde oluşabilir ve özellikle sistemin sağ yarı s- düzleminde tek sayıda sıfırı mevcut ise negatif alt aşım bile görülür.

2. *Gecikme zamanı* : Gecikme zamanı t_d basamak yanıtının son değerinin %50 değerine erişme zamanı olarak tanımlanır. Bu zaman şekil 4.2 ‘de gösterilmiştir.

3. *Yükselme zamanı* : Yükselme zamanı t_r şekil 4.2’de görüldüğü gibi, basamak yanıtının son değerinin % 10 değerinden %90 değerine ulaşma zamanı olarak tanımlanır. Yükselme zamanı ayrıca, son değerinin %50 değerinde basamak yanıtı teğetinin tersi olarak ifade edildiği, başka bir tanımı da vardır.

4. *Yerleşme zamanı* : Yerleşme zamanı t_s , basamak yanıtı son değerinin belirli bir yüzdesine kadar azalması ve bu değer altında kalması için geçmesi gereken zaman olarak tanımlanır. %5 çok sık kullanılan bir değeridir.



Şekil 4.2 Bir kontrol sisteminin örneksel birim basamak yanıtı

Yukarıda verilen dört büyüklük, birim basamak yanıtına bağlı olarak, kontrol sisteminin doğrudan geçici hal davranışına ilişkin ölçüleri tanımlar. Basamak yanıtı şekil 4.2’de olduğu gibi tanımlandığında bu zaman tanım bölgesi kriterleri görece kolay ölçülür. Bu değerlerin, üçüncü mertebenin altındaki basit sistemler dışında, analitik elde edilmesi çok zordur [5].

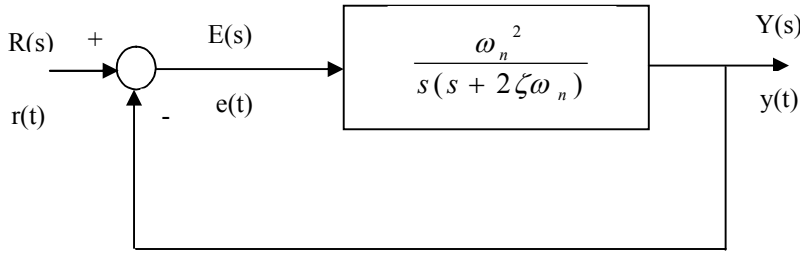
4.3.1 İkinci Mertebeden Örnek Bir Sistemin Geçici Hal Yanıtı

İkinci mertebeden kontrol sistemlerin analizi, özellikle ikinci mertebeden yaklaşık ifade edilen yüksek mertebeden sistemlerin anlaşılmasına yardımcı olur, analiz ve tasarıma temel oluşturur. Şekil 4.3’de görüldüğü gibi birim geribeslemeli ikinci

mertebeden kontrol sisteminin blok diyagramını göz önünde bulunduralım. Sistemin açık çevrim transfer fonksiyonu, ζ ve ω_n sabit olmak üzere,

$$G(s) = \frac{Y(s)}{E(s)} = \frac{\omega_n^2}{s(s + 2\zeta\omega_n)} \quad (4.9)$$

şeklindedir. Kapalı çevrim transfer fonksiyonu



Şekil 4.3 İkinci mertebeden örnek bir kontrol sistemi

$$G(s) = \frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2} \quad (4.10)$$

olarak elde edilir. Yukarıda, (4.9) ve (4.10) transfer fonksiyonları ile ifade edilen şekil 4.3'deki sistemi, ikinci mertebeden örnek sistem olarak tanımlanır. İkinci mertebeden örnek sistemin karakteristik denklemi (4.10)'daki transfer fonksiyonun paydası sıfıra eşitlenerek elde edilir.

$$\Delta(s) = s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2 = 0 \quad (4.11)$$

$R(s)=1/s$ birim basamak giriş fonksiyonu için, sistem çıkışının Laplace dönüşümü

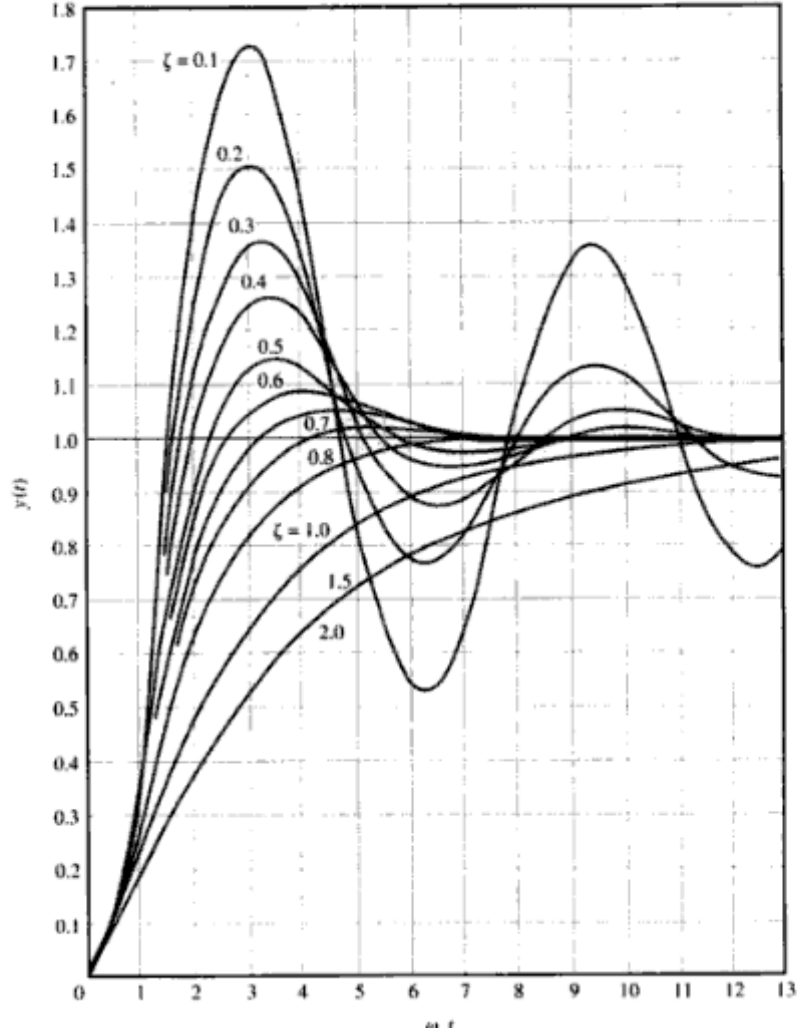
$$Y(s) = \frac{\omega_n^2}{s(s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2)} \quad (4.12)$$

olarak elde edilir. Ters dönüşüm uygulanırsa, çıkış yanıtı için

$$y(t) = 1 - \frac{e^{-\zeta\omega_n t}}{\sqrt{1-\zeta^2}} \sin(\omega_n \sqrt{1-\zeta^2} t + \cos^{-1} \zeta), \quad t \geq 0 \quad (4.13)$$

bulunur. Şekil 4.4'te (4.11) ilişkisiyle verilen birim basamak yanıtının $\omega_n t$ normalize zaman göre çizimleri çeşitli ζ değerleri için verilmiştir. ζ 'nın değeri azaldıkça yanıt

gittikçe daha aşımli salınımlı hale gelir. $\zeta \geq 1$ için, basamak yanıtında bir aşım görülmez; buna göre $y(t)$ yanıtı son değerini hiçbir zaman aşmaz. Ayrıca yanıtlardan ω_n 'in yükselme, gecikme ve yerleşme zamanını doğrudan etkilemediği ve aşım üzerinden tamamen etkisiz olduğu görülür.



Şekil4.4 İkinci mertebeden örnek sistemde, çeşitli ζ sönüm oranları için, birim basamak yanıtları

Sönüm Oranı ve Sönüm Faktörü : İkinci mertebeden örnek sistemde, ζ ve ω_n sistem parametrelerinin $y(t)$ basamak yanıtına etkisi, (4.11) karakteristik denklem kökleri cinsinden ifade edilebilir. İki kök

$$\begin{aligned} s_1, s_2 &= -\zeta\omega_n \pm j\omega_n\sqrt{1-\zeta^2} \\ &= -\alpha \pm j\omega_n \end{aligned} \quad (4.14)$$

şeklinde yazılabilir. Burada

$$\alpha = \zeta \omega_n \quad (4.15)$$

$$\omega = \omega_n \sqrt{1 - \zeta^2} \quad (4.16)$$

olarak tanımlanmıştır. α ve ζ 'nin fiziksel anlamını incelemeye çalışalım. (4.15) ve (4.16) ilişkilerden görüldüğü gibi α ifadesi $y(t)$ yanıtının üssel teriminde t zamanı ile çarpılmış halde yer alan sabittir. Buna göre α birim basamak yanıtı $y(t)$ 'nin artış ya da azalış oranını belirtir. Diğer deyişle α sistemin “sönüm”ünü ifade eder ve bu nedenle sönüm çarpanı ya da sönüm sabiti olarak adlandırılır. α 'nın tersi $1/\alpha$, sistemin zaman sabiti ile orantılıdır. Karakteristik denkleminin iki kökü gerçek ve eşit ise sisteme kritik sönümlü denir. (4.14) ilişkisinden görüldüğü gibi kritik sönüm $\zeta = 1$ için gerçekleşir. Bu durumda sönüm oranı basitçe $\alpha = \omega_n$ 'dir. Bu nedenle ζ sönüm oranı olarak değerlendirilebilir.

$$\zeta = \text{sönüm oranı} = \frac{\alpha}{\omega_n} = \frac{\text{gerçek sönüm oranı}}{\text{kritik sönümde sönüm çarpanı}} \quad (4.17)$$

Doğal Frekans : Sistemin ω_n parametresi doğal frekans olarak tanımlanır. (4.14) ilişkisinden görüldüğü gibi, sönümün $\zeta = 0$ olması halinde, karakteristik denklemin kökleri sanal hale gelir ve birim basamak yanıtı (4.13)'den görüldüğü gibi saf sinüsoidal bir işarete dönüşür. Buna göre ω_n sönümsüz sinüsoidal yanıt frekansına karşı düşer. (4.14) ilişkisinden görüldüğü gibi, $0 < \zeta < 1$ için, köklerin sanal kısmı ω genliğindedir. $\zeta \neq 0$ için, $y(t)$ yanıtı periyodik bir fonksiyon olmadığında, (4.14) ilişkisiyle tanımlanan ω bir frekans değildir. Karşılaştırma amacıyla ω bazen koşullu frekans ya da sönüm frekansı olarak da adlandırılır. Şekil 4.5'te, karakteristik denklem köklerinin konumu ile, α , ζ , ω_n ve ω arasındaki ilişki görülmektedir. Verilen karmaşık eşlenik kökler için aşağıdaki ifadeler geçerlidir.

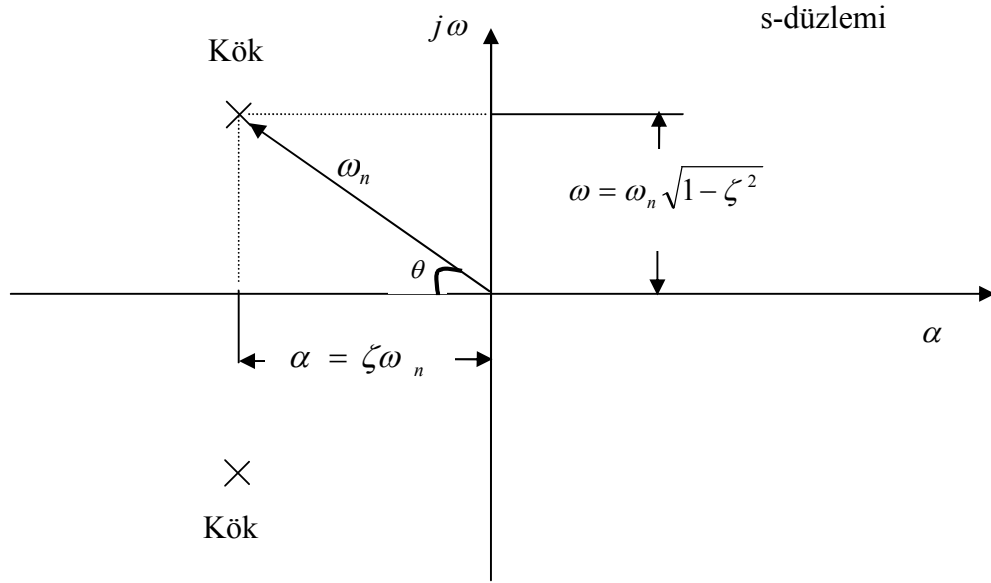
ω_n , köklerin s- düzlemi koordinat merkezine uzaklıktır.

α , köklerin gerçel kısmıdır.

ω , köklerin sanal kısmıdır.

ζ , kökler sol yarı s- düzleminde bulunduğu anda, kökleri koordinat merkezine bağlayan doğru ile negatif gerçel eksen arasındaki açısının kosinüsüne eşittir.

$$\zeta = \cos \theta \quad (4.18)$$



Şekil 4.5 İkinci mertebeden örnek sistemde, karakteristik denklem kökleri ile α , ζ , ω_n ve ω arasındaki ilişkisi

Sol yarı s- düzlemi pozitif sönüme karşı düşer (diğer bir deyişle sönüm faktörü ya da oranı pozitifdir). Pozitif sönüm, $\exp(\zeta\omega_n t)$ ifadesindeki negatif üs nedeniyle, birim basamak yanıtının sabit bir değere yerleşmesine neden olur. Sistem karalıdır. Sağ yarı s-düzlemi negatif sönüme karşı düşer. Negatif sönümün genliğı zamanla sınırsız artan bir yanıtı neden olur ve sistem kararsızdır. Sanal eksen sıfıra karşı düşer ($\alpha = 0$ ya da $\zeta = 0$). Sıfır sönüm kalıcı salınıma neden olur ve sistem kararlılık sınırında ya da kararsızlık sınırındadır. ω_n , sabit tutularak, ζ değerine bağılı olarak,

$$0 < \zeta < 1: s_1, s_2 = -\zeta\omega_n \pm j\omega_n\sqrt{1-\zeta^2} \quad (-\zeta\omega_n < 0), \text{ az sönümlü}$$

$$\zeta = 1: s_1, s_2 = -\omega_n, \text{ kritik sönümlü}$$

$$\zeta > 1: s_1, s_2 = -\zeta\omega_n \pm j\omega_n\sqrt{\zeta^2-1} \text{ aşırı sönümlü}$$

$$\zeta = 0: s_1, s_2 = \pm j\omega_n \text{ sönümsüz}$$

$$\zeta < 0: s_1, s_2 = -\zeta\omega_n \pm j\omega_n\sqrt{1-\zeta^2} \quad (-\zeta\omega_n > 0), \text{ negatif sönümlü}$$

Uygulamada sadece $\zeta > 0$ değerlerine karşı düşen kararlı sistemler ilgi alanını oluşturur. Şekil 4.4 'te (4.13) ifadesiyle verilen birim basamak yanıtları, çeşitli ζ sönüm oranları için, $\omega_n t$ normalize zamana göre çizilmiştir. Görüldüğü gibi ζ değeri azaldıkça yanıtının salınımları artar. $\zeta \geq 1$ yanıt aşısızdır; buna göre $y(t)$ grçici yanıtı son değerini hiç bit noktada aşmaz.

4.4 PID VE LAG/LEAD KONTROLÖRLER

Kontrol sistemi tasarımında performans kriterlerini karşılamak için sistem dinamiklerinde uygun küçük değişiklikler yapmak basit bir yol olabilir. Fakat bir çok pratik durumda sistem sabit olabilir ve sistem yapısında küçük değişiklikler yapmak mümkün olmayabilir. Bu durumda bu tür sabit sistemlerde parametreleri ayarlama yoluna gitmemiz gerekir. Böylece tasarım problemleri sisteme bir kompanseör yerleştirilerek sistem performansının düzeltilmesi haline gelir. Başka bir deyişle bir kontrol sisteminin kompanzasyonu sistemin arzu edilmeyen ve düzeltilemeyen karakteristiklerini kompanze etmeye (gidermeye) meyilli karakteristiklere sahip bir filtre tasarımı haline gelir. Yaygın olarak kullanılan kompanseör diğer bir deyişle kontrolör tipleri PID, lead, lag ve lag-lead kontrolörlerdir.

4.4.1 PID Kontrolör

PID kontrolörler birkaç önemli fonksiyona sahiptirler: geribesleme sağlarlar, integral etkisiyle kalıcı durum hatalarını elimine ederler.

PID kontrolörler, özellikle proses dinamikleri makul olduğunda ve performans kriterleri çok sıkı olmayan makul değerler içerdiğinde bir çok kontrol problemi için etkili çözümler sağlamaktadır. Dağıtımli kontrol sistemlerinin önemli bir parçasıdır ve bir çok özel amaçlı kontrol sistemine dahil edilirler [20].

PID kontrolörler lojik, ardışık makineler, selektörler, enerji üretimi, iletimi ve dağıtımı için kullanılan karmaşık otomasyon sistemlerinin inşasında kullanılan basit fonksiyon bloklarıyla çok sık kombine edilirler [20]. Tüm kontrol mühendislerinin önemli araçlarından biridir. Pratik olarak tüm PID kontrolörler mikroişlemcilere dayanmaktadır. Bu otomatik kazanç tablosu çizelgeleme ve sürekli adaptasyon gibi ek özellikler sağlar.

Eğer bir kontrol sisteminde hem geçici cevapta hem de kalıcı durum doğruluğunda iyileşme isteniyorsa PID kontrol basitliği ve çok etkili çözüm üretmesi sebebiyle bir çok kontrol probleminde tercih edilir. 1910 yılında PID kontrolörün icadından ve 1942’de Ziegler-Nichols’un PID katsayılarını ayarlama metotlarının ortaya çıkmasından bu yana PID kontrolörün popülaritesi ciddi bir şekilde arttı.

Dijital teknolojiadaki avantajlarıyla otomatik kontrol bilimi kontrol tasarım seçimlerinde geniş bir spektrumu tercih etmesine karşılık yani gerekli koşulları sağlayabilecek her türlü kontrolör tipi göz önüne alınmasına rağmen edüstriyel kontrolörlerin % 90’ından fazlası PID algoritmalarına dayanmaktadır [20-22].

Bir PI kontrolör sistemin kalıcı durum hatasını sıfıra indirir fakat bu yararı tipik olarak daha kötü geçici cevaba sebep olur. Bu problemi ortadan kaldırmak için bir D yani türev terimi PI kontrolöre eklenir. Bu kontrolör PID (proportional Integral Derivative) yani oransal-integral-türevsel kontrolör olarak adlandırılır. Bir PID kontrolör orijindeki bir kutbu ve sonsuzdaki diğer kutbu ile bir lag-lead yani faz gerilemeli-faz ilerlemeli kontrolörün özel bir durumu olarak düşünülebilir [4-6]. Standart bir PID kontrolör ayrıca “üç terimli” kontrolör olarak da bilinir. Transfer fonksiyonu genel olarak “paralel form” da veya “ideal form” da yazılır [24-25]. Bunlar aşağıda sırasıyla verilmiştir.

$$C(s) = K_p + \frac{K_i}{s} + K_d s \quad (\text{paralel form}) \quad (4.17)$$

$$C(s) = K_p \left(1 + \frac{1}{T_i s} + T_d s\right) \quad (\text{ideal form}) \quad (4.18)$$

Burada K_p oransal kazanç sabiti, K_i integral kazanç sabiti, K_d türevsel kazanç sabiti, T_i integral zaman sabiti, T_d ise türevsel zaman sabitidir. PID kontrolörü oluşturan üç terimin etkileri aşağıda sıralanmıştır.

- a) P oransal terim: kazanç geçiş faktörüyle hata sinyali için net oransal kontrol davranışı sağlar.
- b) I integral terimi: bir integratörle sağladığı alçak frekans kompanzasyonu ile kalıcı durum hatalarını azaltır.
- c) D türevsel terim: bir türev alıcı ile sağladığı yüksek frekans kompanzasyonu sayesinde geçici cevapta iyileşme sağlar. Genellikle sistemin dinamik performansını

iyileştirir fakat aynı zamanda yüksek frekanslarda kazancı artırır. Bu şu anlama gelir: yüksek frekans gürültü etkileri türev terimi tarafından oluşturulur. Bu problemi elimine etmek için genellikle türev terimiyle beraber bir gürültü filtresi kullanılır.

Bu üç terimin her birinin kapalı çevrim performansı üzerindeki etkileri aşağıdaki tabloda [21] verilmiştir.

Kapalı çevrim cevabı	Yükselme zamanı	Yüzde aşma	Durma zamanı	Kalıcı durum hatası	Kararlılık
K_p artarsa	Azalır	Artar	Bir miktar artar	Azalır	Bir miktar kötüleşir
K_i artarsa	Bir miktar azalır	Artar	Artar	Büyük miktarda azalır	Bir miktar kötüleşir
K_d artarsa	Bir miktar azalır	Azalır	Azalır	Çok az değişir	İyileşir

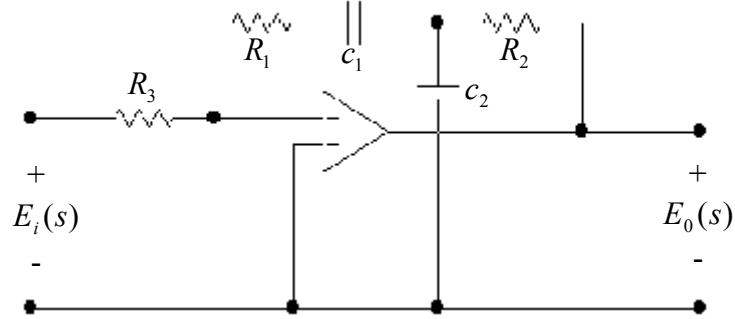
Çizelge 4.1 PID parametrelerinin kapalı çevrim cevabı üzerindeki etkileri

Optimum performans yani en uygun performans K_p , K_i (veya T_i) ve K_d (veya T_d) nin karşılıklı olarak ayarlanmasına bağlıdır. Bir PID kontrolörler $T_i \geq 4T_d$ olmak üzere eğer her iki sıfır da reel ise “seri form” olarak da gerçekleştirilebilirler. Bu durum PD ve PI kontrolörlerin kaskad olarak yerleştirilmesiyle gösterilebilir. Bu yapının transfer fonksiyonu denklem (4.19)’de verilmiştir. Burada yer alan α katsayısı denklem (4.20)’le belirlenir.

$$C(s) = K_p (\alpha + T_d s) \left(1 + \frac{1}{\alpha T_i s}\right) \quad (4.19)$$

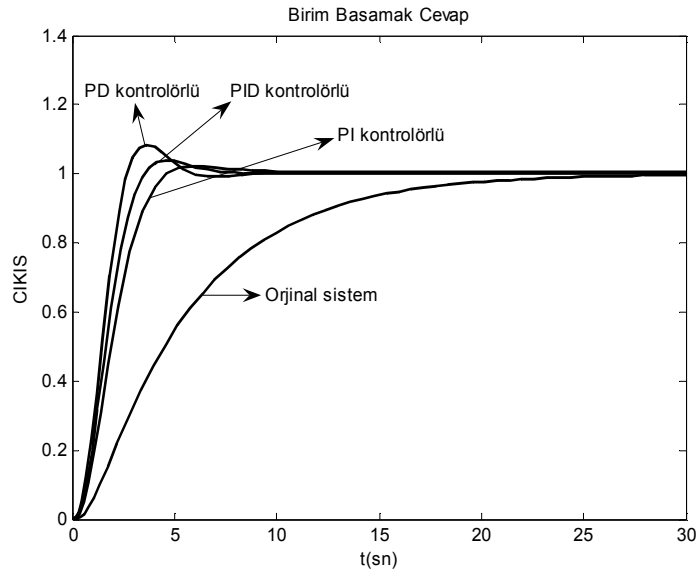
$$\alpha = \frac{1 \pm \sqrt{1 - \frac{4T_d}{T_i}}}{2} > 0 \quad (4.20)$$

Şekil 4.19’de bir PID kontrolörün işlemsel yükselteç kullanılarak gerçekleştirilmiş basit devre formu verilmiştir.



Şekil 4.6 PID kontrolörün işlemsel yükselteçli devre şeması

Şekil 4.6’da bir kontrol sistemi için PI, PD, PID kontrolörlerin kullanılması halinde her bir sistem için oluşan birim basamak cevabı eğrileri verilmiştir. Böylece her üç kontrolörün sistem üzerindeki etkileri karşılaştırılabilir.

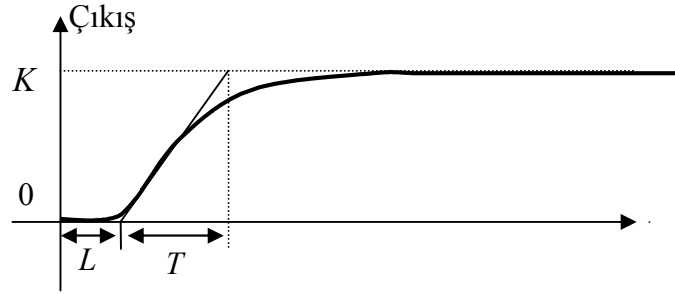


Şekil 4.7 Bir kontrol sistemi için PD, PI, PID kontrolörlerin birim basamak cevabı eğrilerinin karşılaştırılması

PID Katsayılarını Elde Etmede Kullanılan Yöntemler :

PID katsayılarını elde etmek için çeşitli yöntemler mevcuttur. Bunlardan en iyi bilinenleri Ziegler-Nichols ve Aström-Hägglund metotlarıdır.

Ziegler-Nichols Birim Basamak Cevabı Metodu (Açık Çevrim Metodu) :



Şekil 4.8 PID katsayılarının birim basamak cevabı eğrisinden belirlenmesi

Bu metoda göre sistemin denklem (4.21)'de verilen transfer fonksiyonuna sahip olduğu kabul edilir.

$$G(s) = \frac{K}{Ts + 1} e^{-sL} \quad (4.21)$$

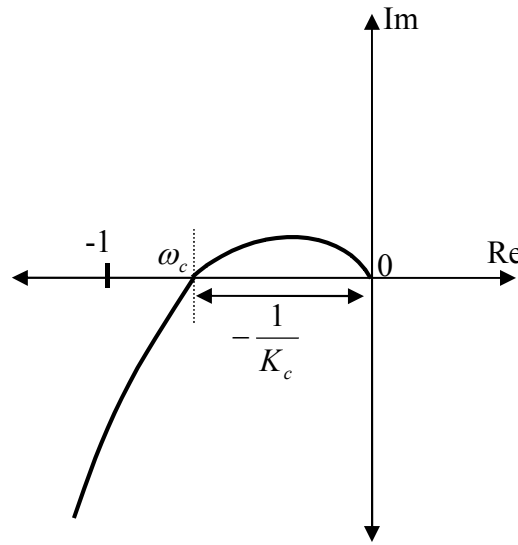
Yani sistemin zaman gecikmeli olduğu varsayılmaktadır. Bu metot açık çevrim sistemin birim basamak giriş cevabının incelenmesine dayanmaktadır. Metodun uygulanabilmesi için kontrolörle sistem arasındaki herhangi bir nokta açılır ve kontrol organı elle ayar durumuna getirilir. Daha sonra sisteme birim basamak giriş uygulanır. Elde edilen cevap şekil 4.8'de verilmiştir. Bu şekilden elde edilen PID katsayıları tablo 4.2'de verilmiştir.

Kontrolör Tipi	K_p	T_i	T_d
P	$\frac{T}{L}$	-	-
PI	$0.9 \frac{T}{L}$	$3.34L$	-
PID	$1.2 \frac{T}{L}$	$2L$	$0.5L$

Tablo 4.2 Ziegler-Nichols birim basamak cevabı metoduna göre PID katsayıları

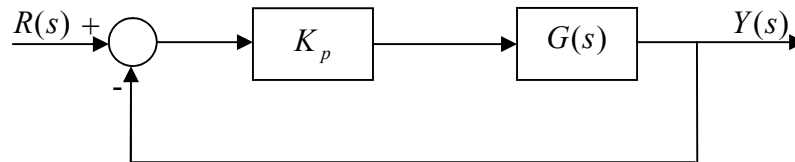
Ziegler-Nichols Frekans Cevabı Metodu (Kapalı Çevrim Metodu) :

Ziegler-Nichols'un frekans cevabı metodu $G(s)$ transfer fonksiyonunun Nyquist eğrisinde bilinen noktasına bağlı olarak oransal kazanç K_p , integral zaman sabiti T_i ve türev zaman sabiti T_d 'nin belirlenmesini sağlar. $G(s)$ transfer fonksiyonunun frekans cevabı Nyquist eğrisini şekil 4.9'da gösterildiği gibi negatif reel eksende keser.



Şekil 4.9 Sistemin Nyquist eğrisi

Ziegler-Nichols'un bu metodunda Nyquist diyagramında kritik nokta diğer bir deyişle negatif reel eksen kestiği nokta belirlenir. Bu değeri elde etmek için şu işlemler yapılır: şekil 4.10'da görülen kapalı çevrim sistemde kontrolörün kazancı K_p osilasyon elde edildiği kadar kritik K_c değerine kadar artırılır. $K_p = K_c$ kritik noktasında ω_c kritik frekans, K_c kritik kazanç ve T_c kritik periyodu belirlenir.



Şekil 4.10 Kapalı çevrim sistem blok diyagramı

Belirlenen bu değerlere göre elde edilen P, PI ve PID katsayıları tablo 4.3'de verilmiştir.

Kontrolör tipi	K_p	T_i	T_d
P	$0.5K_c$	-	-
PI	$0.45K_c$	$0.825T_c$	-
PID	$0.6K_c$	$0.5T_c$	$0.125T_c$

Tablo 4.3 Ziegler-Nichols frekans cevabı metoduna göre PID parametreleri

Kazanç Payı (KP) : Kontrol sistemlerinde görelî kararlılığı ölçmede en sık kullanılan kriterdir. Frekans tanım bölgesinde kazanç payı kavramı tanımlanırken $L(j\omega)$ Nyquist yer eğrisini negatif gerçek eksenini kestiği noktanın $(-1, j0)$ noktasına yakınlığından yararlanır.

Faz Payı : Kazanç payı kapalı çevrim sistemde görelî kararlılığın göstergesinin sadece bir boyutudur. İsminden anlaşıldığı gibi kazanç payı sistem kararlılığının çevrim kazancıyla olan ilişkisini ifade eder. İlkesel olarak kazanç payı büyük bir sistemin kazanç payı küçük olan bir sisteme göre daha kararlı olacağı varsayılabilir. Ancak çevrim kazancı dışındaki değişkenlerin etkisinde olan sistemlerde kazanç payı görelî kararlılığın tek başına ifade etmekte yetersiz kalır. Kararlı sistemlerde faz kaymasının etkisini değerlendirmek amacıyla geliştirilen faz payı etkisini ayrıca incelemeye gerek duyulur.

Aström-Hägglund Metodu:

Bu yöntem de Ziegler-Nichols metodu gibi Nyquist eğrisinden yararlanmaktadır. Yöntemin kullanılabilmesi için kontrolörsüz sistemin kazanç payı ve kazanç geçiş frekansı gibi ifadelerin bilinmesi gerekmektedir. Bu yöntem genellikle faz payı ϕ_m 'in 45° olduğu PID problemlerinde kullanılmaktadır. Metot kontrolörsüz sistemin Nyquist eğrisinin negatif reel eksenini kestiği noktadaki frekans değerinin istenilen noktaya çekilmesini sağlayacak parametrelerin bulunmasını sağlamaktadır.

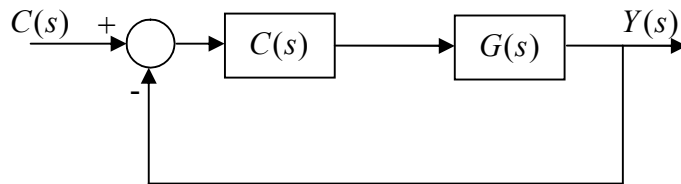
4.4.2 Lag/Lead Kontrolörler

Son yıllarda endüstriyel kontrolörlerde önemli gelişmeler sağlandı. Bu gelişmelerin tümü kontrolörlere mikroişlemci uygulanmasının bir sonucu olarak ortaya çıkmıştır

diyebiliriz. Fakat teknolojideki bütün bu gelişmelere rağmen kontrolörlerin temel çalışma fonksiyonları aynı kaldı. Klasik kontrolörler olan lead, lag ve PID kontrolörleri bunlara örnek olarak verebiliriz. Lag (faz gerilemeli) ve lead (faz ilerlemeli) gibi klasik kontrolörler hala kontrol sistemi tasarımında etkin bir şekilde kullanılmaktadırlar. Özellikle kontrolörler elektronik donanım bileşenleriyle oluşturulduğu zaman pratikte çok sık kullanılırlar [23]. Bunun için birçok neden sayılabilir. Örneğin tasarım kriterlerini karşılamak için sisteme gerekli olan kompanzasyonu sağlarlar, mühendisler tarafından iyi bilinen kontrolörlerdir ve ayarlanması gereken sadece iki ya da üç parametreye sahiptirler. Böylece bunları ayarlamak oldukça kolaydır.

Lead kontrolörler genel olarak integral etkisi içeren kontrol sistemlerinde kullanılırlar ve sistemde PID kontrolörlerle sağlanandan daha iyi bir alçak geçiren filtre özelliği gösterirler [22-26]. Daha iyi performans sağladıklarından fonksiyon analizlerinin belirlenmesinde oldukça doğru sonuçlar verirler. Örneğin K_c kritik kazanç ve ω_c kritik frekans gibi niceliklerin PID kontrolörlerle sağlanandan daha iyi tahminlerini elde etmemizi sağlarlar [22]. PID kontrolörler ve lag-lead kontrolörler genel olarak sistem kompanzasyonunda benzer özelliklere sahip olmalarına rağmen tasarım işlemleri ve parametrelerinin ayarlanması birbirinden oldukça farklıdır. PI ve PID kontrolörler genellikle integratör içermeyen sistemlerde kullanılırlar. Bunların aksine lag ve lead kontrolörler genellikle integratör içeren kontrol sistemlerinde tercih edilirler. Lag ve lead kontrolörler ise kendi aralarında genel yapı itibariyle benzer olmalarına rağmen kutup ve sıfırların yerleşimi yönünden farklıdırlar [27]. Bu kontrolörlerin tasarımı için kullanılan temel yöntemler kök-yer eğrisi yaklaşımı ve frekans cevabı yaklaşımıdır.

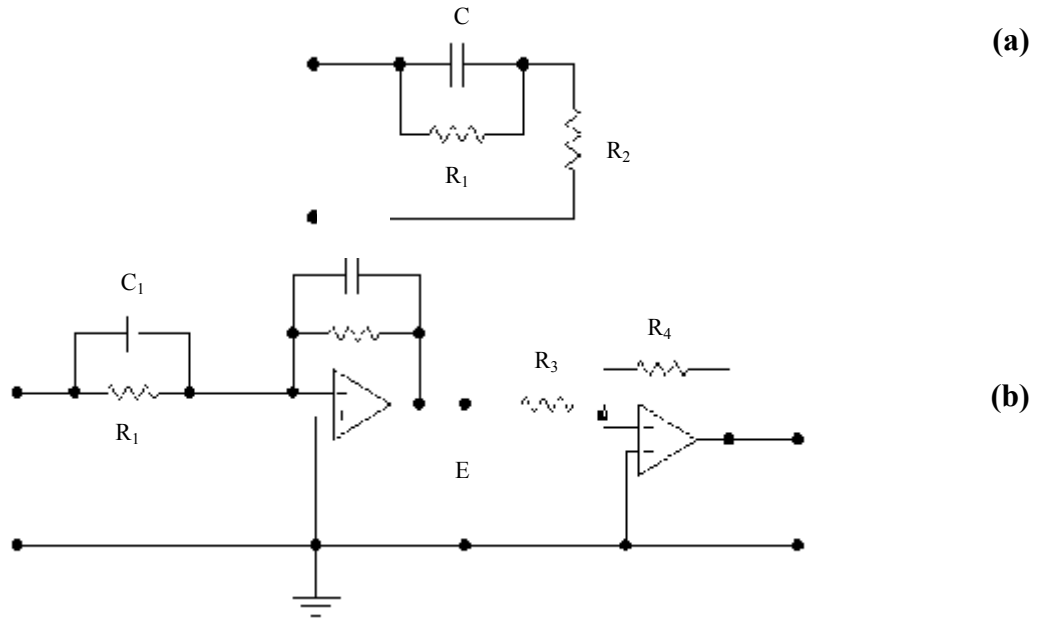
Lead Kontrolörler



Şekil 4.11 Bir kontrol sistemi

Bir devrenin girişine sinüzoidal bir sinyal uygulandığında kalıcı durum çıkışı (sinüzoidaldir) faz ilerlemesine sahip ise o zaman devre lead yani faz ilerlemeli devre

olarak adlandırılır. Bir lead devrenin karakteristiğine sahip olan kompensatör başka bir deyişle kontrolör ise lead kontrolör olarak adlandırılır. Analog yani sürekli zaman lead kontrolörleri gerçekleştirmek için işlemsel yükselteçlerin kullanıldığı elektronik devreler, elektriksel RC devreleri vb. gibi pek çok yol mevcuttur. Şekil 4.12’de bir lead kontrolörün pasif elemanların kullanıldığı basit devre formu ve işlemsel yükselteçlerin kullanıldığı elektronik devre formu verilmiştir (kaynak [25,27]’den değiştirilerek alınmıştır).



Şekil 4.12 Lead kontrolörün (a) Basit devre şeması, (b) İşlemsel yükselteçli elektronik devre şeması

Şekil 4.11’de gösterilen sistem için $C(s)$ kontrolörün transfer fonksiyonu olmak üzere şekil 4.12(b)’de gösterilen sistemin transfer fonksiyonu aşağıdaki gibidir.

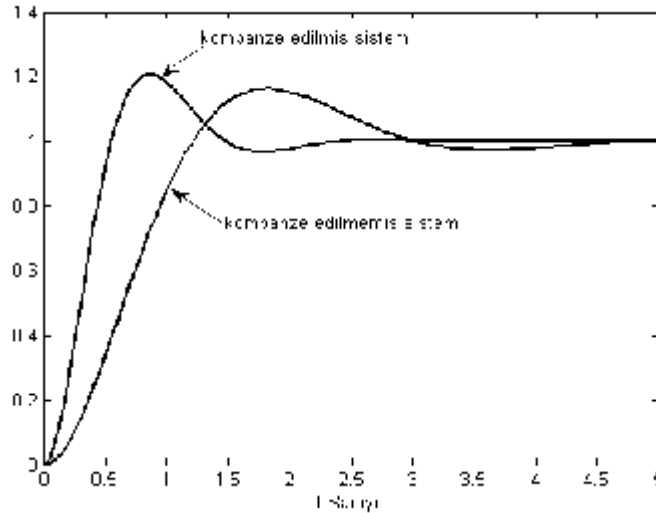
$$\frac{E_o(s)}{E_i(s)} = C(s) = \frac{R_2 R_4}{R_1 R_3} \frac{R_1 C_1 s + 1}{R_2 C_2 s + 1} = K \alpha \frac{T s + 1}{\alpha T s + 1} = K \frac{s + \frac{1}{T}}{s + \frac{1}{\alpha T}} \quad 0 < \alpha < 1 \quad (4.22)$$

Burada $K \alpha = \frac{R_2 R_4}{R_1 R_3}$, $T = R_1 C_1$, $\alpha T = R_2 C_2$ dir. Eğer $R_1 C_1 > R_2 C_2$ ise ya da $\alpha < 1$ ise

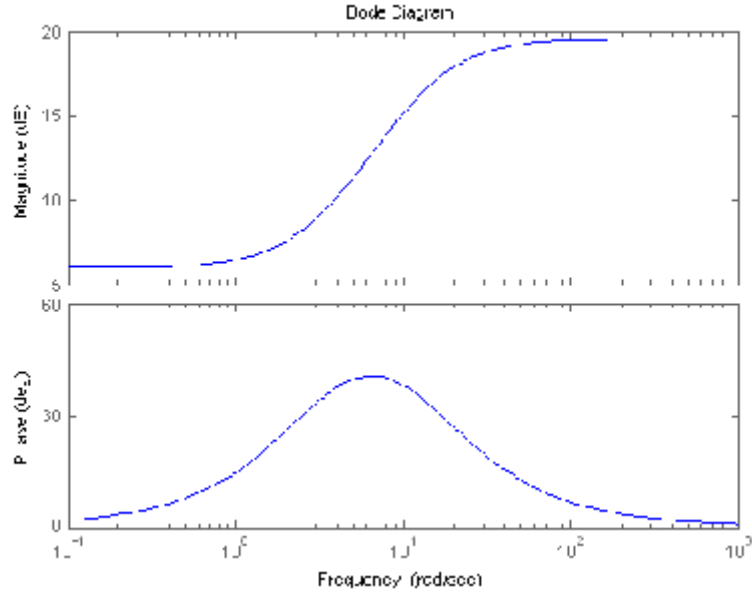
devre lead’dır. α lead kontrolörün zayıflama faktörü olarak adlandırılır. α ’nın minimum değeri lead kontrolörün fiziksel yapısıyla sınırlıdır ve α ’nın minimum değeri genellikle yaklaşık 0.05 olarak alınır. Bu demek oluyor ki bir lead kontrolörle

sağlanabilecek maksimum faz ilerlemesi yaklaşık 65° 'dir. Eğer bundan daha fazla bir faz ilerlemesi isteniyorsa o zaman çok kademeli bir kontrolör kullanmak gerekir. Lead kontrolörün öncelikli fonksiyonu sabit sistemin elemanlarıyla ilgili aşırı faz gerilemesini telafi etmektir. Lead kontrolör sistemin ileri yol transfer fonksiyonuna kutup sıfırın solunda olmak üzere bir kutup ve bir sıfır ekler. Böylece kapalı çevrim sistemin birim basamak cevabını daha sönümlü hale getirir yani daha düşük yüzde aşma (ki bu daha büyük faz payı anlamına gelir) ve daha düşük tepe zamanı oluşturur. Ayrıca yükselme ve durma zamanını azaltır. Yüksek frekanslarda sistem için açık çevrim fazını artırır ve bunun sonucu olarak kapalı çevrim sistemin kazanç payı ve faz payı artar. Kazanç payı ve faz payında oluşan bu artış sistemin bağıl kararlılığını düzeltir. Lead kontrolör artan kazanç geçiş frekansı sayesinde sistemin band genişliğini artırır bu ise sistem yanıtının hızlanmasına sebep olur. Fakat lead kontrolörle sistem kalıcı durum hataları yönünden etkilenmez [22, 26, 28-34].

Şekil 4.13'te lead kompanse edilmiş ve kompanse edilmemiş sistemlerin birim basamak cevabı eğrileri verilmiştir. Şekil 4.14'te ise bir lead kontrolörün Bode diyagramı verilmiştir. Bu diyagram incelendiğinde neden faz ilerlemeli denildiği açık bir şekilde görülebilir. Diyagramdanda anlaşıldığı gibi lead kontrolör bir yüksek geçiren filtredir.



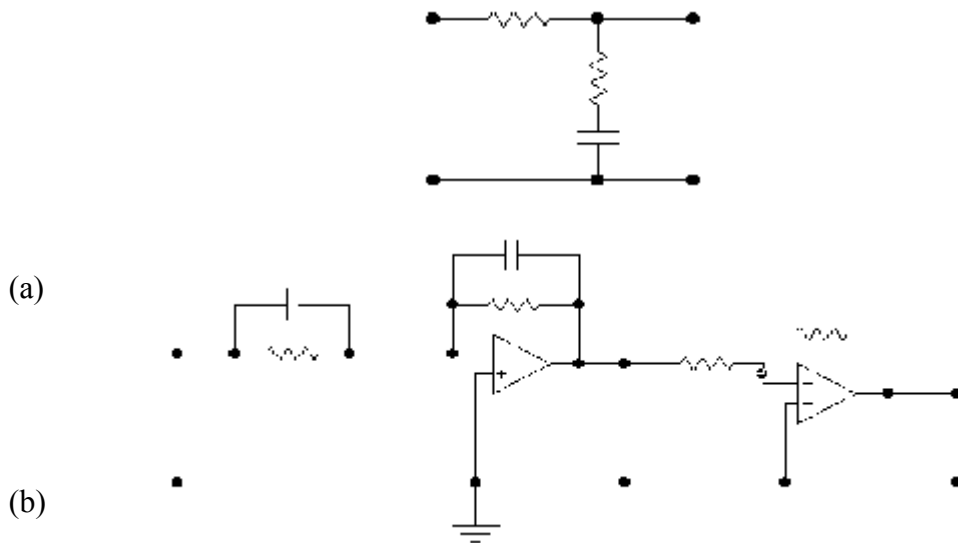
Şekil 4.13 lead kompanse edilmiş ve kompanse edilmemiş sistemlerin birim basamak cevaplarının karşılaştırılması



Şekil 4.14 Bir lead kontrolörün Bode diyagramı

Lag Kontrolörler

Bir devrenin girişine sinüzoidal bir sinyal uygulandığında devrenin kalıcı durum çıkışı faz gerilmesine sahipse o zaman devre lag yani faz gerilemeli devre olarak adlandırılır. Böyle bir devrenin karakteristiğine sahip olan kontrolör ise lag kontrolör olarak adlandırılmaktadır. Şekil 4.6'da bir lag kontrolörün pasif elemanlarla gerçekleştirilmiş basit devre formu ve işlemsel yükselteçlerin kullanıldığı elektronik devre formu verilmiştir (kaynak [25,27]'den değiştirilerek alınmıştır).

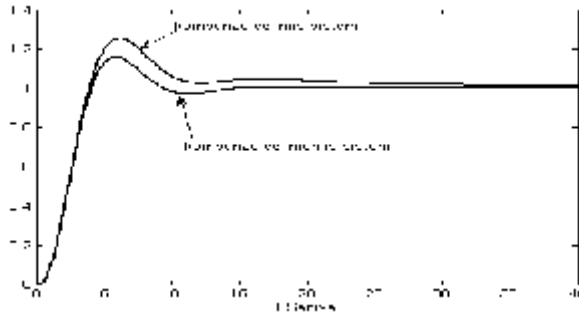


Şekil 4.15 Bir lag kontrolörün (a) Pasif elemanlı devre şeması, (b) İşlemsel yükselteçli elektronik devre şeması

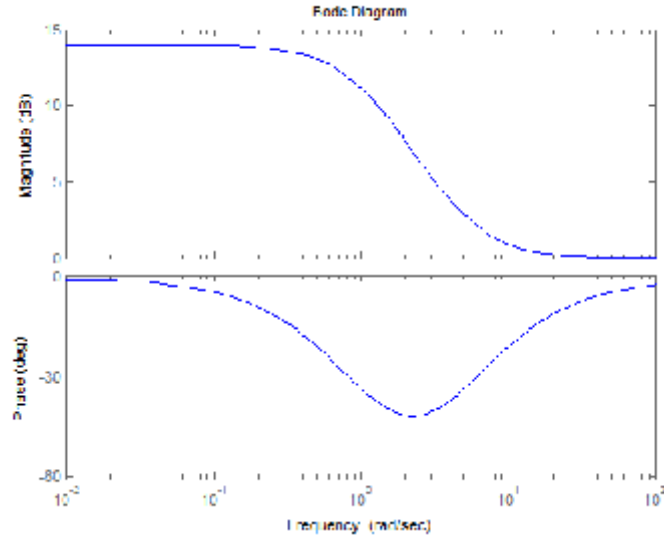
Burada şekil 4.15(b) için verilen devre şeması lead kontrolör için verilen devre şemasıyla aynıdır. Eğer bu devrede lead kontrolörün aksine $R_1C_1 < R_2C_2$ o zaman kontrolör lag haline gelmektedir. Şekil 4.15(b)'de gösterilen lag kontrolörün transfer fonksiyonu denklem (4.23)'te verilmiştir.

$$\frac{E_o(s)}{E_i(s)} = C(s) = K_1\beta \frac{Ts + 1}{\beta Ts + 1} = K_1 \frac{s + \frac{1}{T}}{s + \frac{1}{\beta T}} \quad \beta > 1 \quad (4.23)$$

Lag kontrolörlerin en önemli fonksiyonları yüksek frekanslarda yeterli faz gerilemesi sağlamalarıdır. Lag kontrolörlerde tıpkı lead kontrolörlerde olduğu gibi integratörlü kontrol sistemlerinde tercih edilirler. Faz–gerilemeli kontrolörü etkin kullanmanın yolu kutup ve sıfırı birbirine yakın yerleştirmektir. Faz–ilerlemeli kontrolde kontrolörün amacı kazanç geçiş frekansı civarında açık çevrimli sistemin fazını artırmak, maksimum fazın yeni kazanç geçiş noktasında oluşmasını sağlamaktır. Faz–gerilemeli kontrolde kazanç geçişi daha düşük frekanslara kaydırılır, ancak yeni kazanç geçiş frekansında Bode diyagramının görece bir değişikliğe uğramaması amaçlanır. Lag kontrolörler sistemin bağıl kararlılığını artırır. Yüksek frekanslarda zayıflama etkisinden dolayı kazanç geçiş frekansı azalır ve bunun sonucu olarak da sistemin band genişliği azalır band genişliğinin azalması nedeniyle yüzde aşmayı düşürmelerine rağmen yükselme ve durma zamanını artırır. Bu da sistemin daha yavaş geçici cevap vermesi anlamına gelir. Fakat lag kontrolör sistemin kalıcı durum doğruluğunu düzeltir. Bunların yanı sıra sistem parametre değişimlerine karşı daha duyarlıdır. Şekil 4.16'de lag kompanze edilmiş ve kompanze edilmemiş bir sistemin birim basamak cevabı eğrileri gösterilmiştir. Şekil 4.17'de ise bir lag kontrolörün Bode diyagramı verilmiştir.



4.16 Lag kompanze edilmiş ve kompanze edilmemiş sistemin birim basamak cevaplarının karşılaştırılması



Şekil 4.17 Bir lag kontrolörün Bode diyagramı

Lag-Lead Kontrolörler

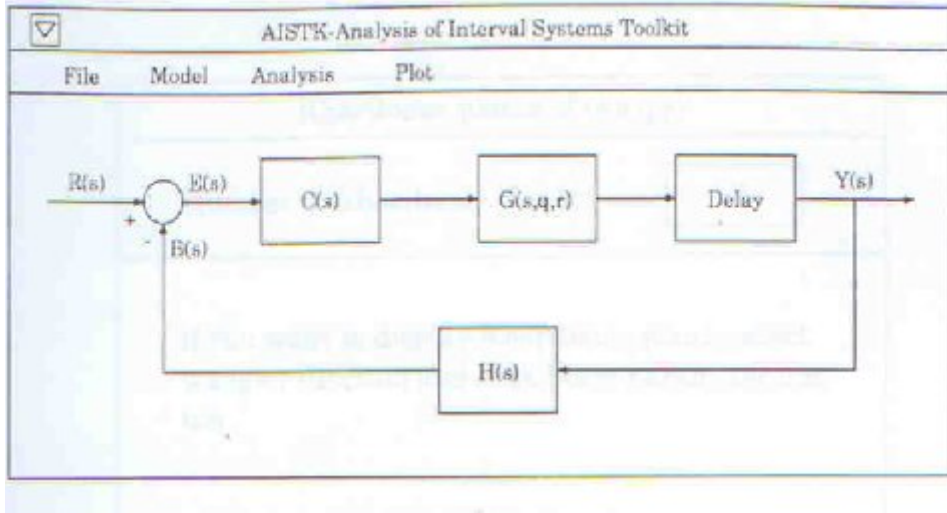
Lead kontrolörler temel olarak geçici cevabı hızlandırır ve sistemin kararlılığını artırır ancak sistemin kalıcı-durum doğruluğunda belirgin bir düzelme sağlamazlar. Ayrıca yüksek frekans gürültülerine sebep olabilirler. Lag kontrolörler ise sistemin kalıcı-durum doğruluğunu düzeltir fakat geçici cevap hızını yavaşlatır. Görüldüğü gibi her iki kontrolör de bazı avantajlara ve dezavantajlara sahiptir.

Eğer geçici cevap ve kalıcı durum cevabının her ikisinde de düzelme arzu ediliyorsa o zaman bir lag-lead kontrolör kullanmak gerekir. Lag-lead kontrolör, lag ve lead kontrolörlerin avantajlarını birleştirir [5, 22, 24, 25, 33-35]. İster lead ister lag kontrolör kullanılsın kompanse edilmemiş sistemin açık çevrim transfer fonksiyonu arasında bir sadeleşme olmaksızın sistemin derecesi bir artar. Lag-lead kontrolör iki kutup ve iki sıfıra sahip olduğu için kompanse edilen sistemde kutup (kutuplar) ve sıfır (sıfırlar) sadeleşmediği sürece böyle bir kompanseasyon sistemin derecesini iki artırır. Bu da sistemin daha kompleks bir hale gelmesi anlamına gelir

4.5 AISTK YAZILIM PROGRAMI

MATLAB ortamında geliştirilmiş kolay kullanımlı bir programdır. Belirsizlik içeren kontrol sistemlerinin analizi ile ilgilidir. AISTK çalıştırıldığı zaman şekil 4.18 ekranda görülür. Burada $G(s,q,r)$ bir interval transfer fonksiyonu $C(s)$ ve $H(s)$ ise sabit terimli kontrolörleri ifade ederler. $G(s,q,r)$, $H(s)$ veya $C(s)$ çift tıklandığında gerekli

parametrelerin girişini sağlayabileceğimiz pencereler açılır. Açılan pencerede File, Model, Analysis ve Plot diye dört ana menü vardır. Örneğin Analysis menüsünün alt menüleri şekil 4.19’da gösterilmiştir [36].



Şekil 4.18 AISTK’nin Blok diyagramı

Analysis	
Kharitonov Plants	
Robust Gain and Phase Margins	
Crossover and Bandwidth frequencies	
Nyquist Plot	▷
Bode Plot	▷
Nichols Plot	▷
Value Set	▷
Stability	▷
Maximum Perturbation Bound	

■	Bode plots of Kharitonov plants
	random Bode plots
	boundary of Bode envelope

Şekil 4.19 Analiz Tablosu

Programın özellikleri kısaca şöyle açıklayabiliriz.

-Dataları girmek için kolay kullanımlı bir arayüz yazılım geliştirilmiştir.

-Bir interval transfer fonksiyonunun Kharitonov transfer fonksiyonları bulunabilir. Örneğin analysis menüsündeki “kharitonov plant” düğmesine basıldığında şekil 4.20’deki pencere açılır. Burada sistemin kharitonov transfer fonksiyonları görüntülenebilir.

-Kazanç ve faz payları hesaplanabilir. Şekil 4.21’de bir sistemin dayanıklı kazanç ve faz payını göstermektedir.

-Nyquist ve Bode ve Nichols diyagramları çizilebilir.

-Belirsiz sistemlerin dayanıklılık ve kararlılık analizi yapılabilir.

Kharitonov plants of $G(s,q,r)$

Number of Kharitonov plants: 16

if you want to display Kharitonov plants select transfer function and click Show parameter button

G1(s) Show Parameters

Done

Şekil 4.20 Kharitonov Plant penceresi

Robust(minimum) Gain and Phase Margins

rgm(robust gain margin) : 1.15

achieved at : G4(s)

rpm(robust phase margin) : 86.77

achieved at : G1(s)

Done

Şekil 4.21 Kazanç ve faz payı penceresi

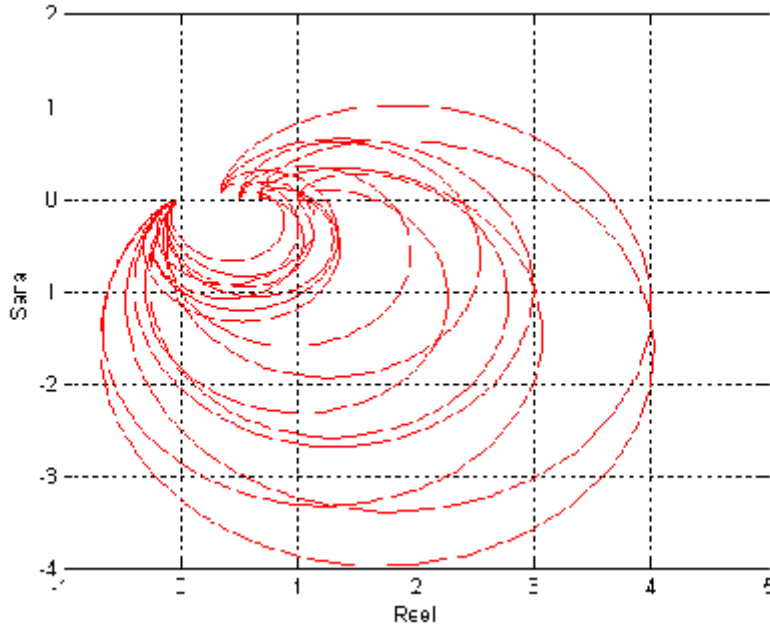
Örnek 4.1

Birim negatif geribeslemeli bir kontrol sisteminde;

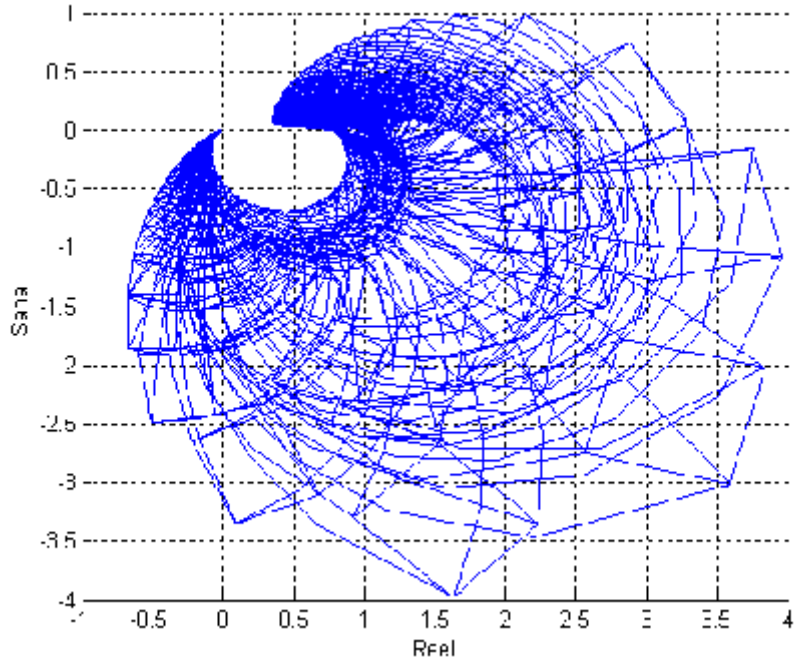
$$G(s) = \frac{[3,4]s + [1,2]}{s^3 + [3,5]s^2 + [2,4]s + [2,3]} \quad (4.24)$$

bir aralık transfer fonksiyonu olsun. AISTK programını kullanarak sistemin frekans cevabını inceleyebiliriz.

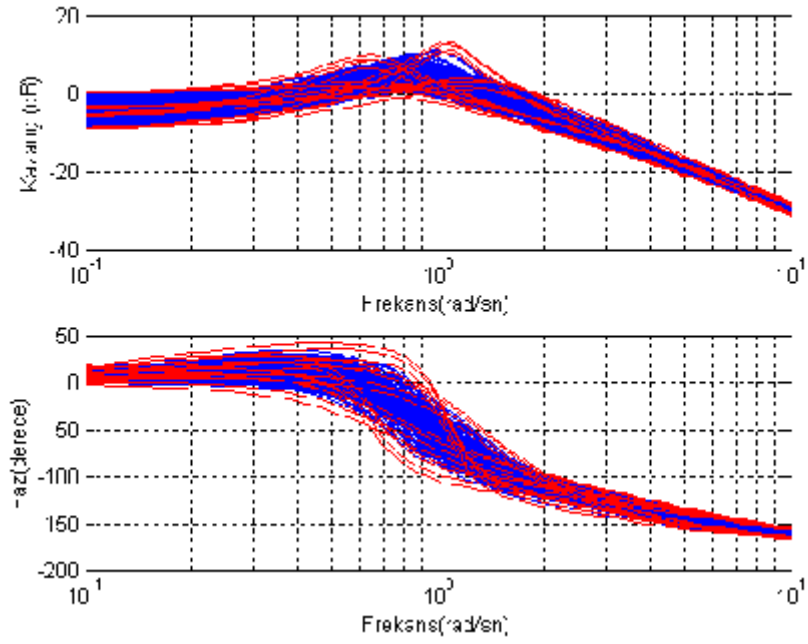
Şekil 4.22’de 16 Kharitonov transfer fonksiyonunun Nyquist diyagramları görülmektedir. Sistemin Nyquist zarfı şekil 4.23’de gösterilmiştir. 200 tane transfer fonksiyonu Bode diyagramları şekil 4.24’de elde edilmiştir. Bode zarfının sınırları ise şekil 4.25’te çizilmiştir. Sistemin karakteristik denklemin değer kümesi şekil 4.26 elde edilmiştir.



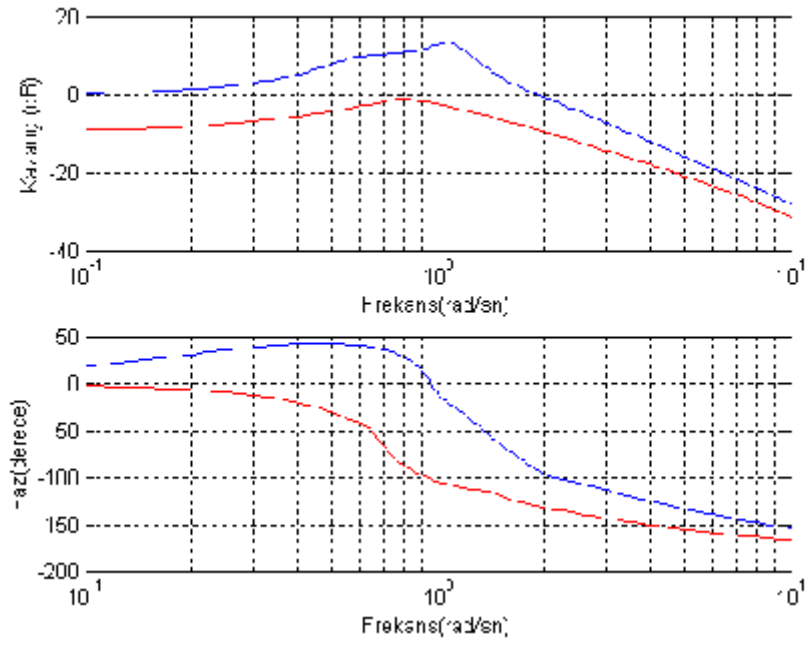
Şekil 4.22 Örnek 4.1’deki 16 Kharitonov transfer fonksiyonunun Nyquist Diyagramı



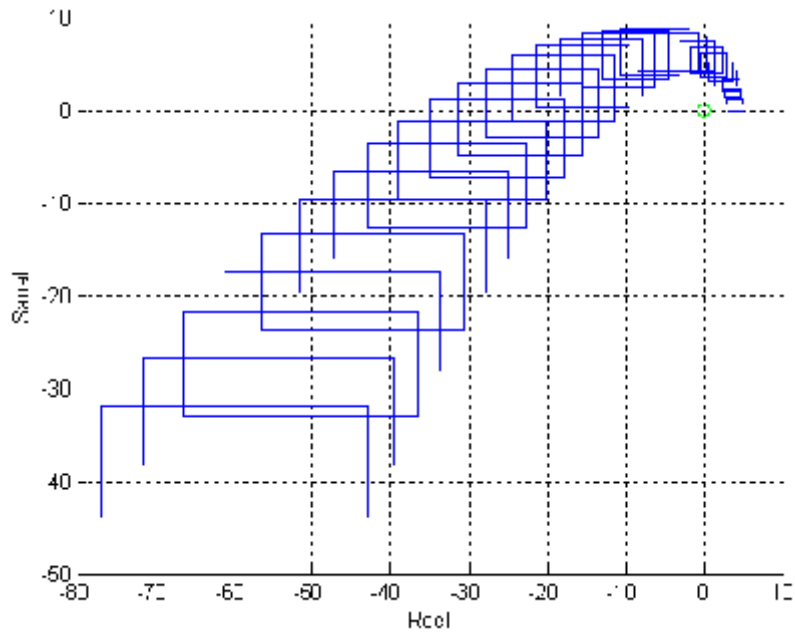
Şekil 4.23 Örnek 4.1'deki aralık transfer fonksiyonunun Nyquist Zarfı



Şekil 4.24 Örnek 4.1'deki aralık transfer fonksiyonunun Bode diyagramı



Şekil 4.25 Örnek 4.1'deki aralık transfer fonksiyonunun Bode diyagramının dış sınırları



Şekil 4.26 Örnek 4.1'deki aralık transfer fonksiyonunun karakteristik denklemin değer kümesi

4.6 BELİRSİZ SİSTEMLER İÇİN KONTROLÖR TASARIMI

Klasik kontrolde kontrolör tasarımı sistemin parametrelerini sabit ve biliniyor olduğu düşünülerek yapılır. Fakat gerçek dünyada genellikle sistemler belirsiz parametreler içerir. Dolayısıyla bir sistemde dayanıklı kararlılık ve performans elde edebilmek için sistemdeki belirsizliği de hesaba katmak gerekir. Daha önceki bölümlerde ve bu bölümde belirsiz kontrol sistemlerinin frekans cevabı özellikleri ile ilgili bilgiler verildi. Bu bölümde AISTK programını kullanarak iki örnekle kontrolör tasarımı incelendi.

Örnek 4.2

Bir kontrol sistemin transfer fonksiyonu;

$$G(s) = \frac{[4,4.5]}{[0.03,0.05]s^3 + [0.45,0.55]s^2 + s} \quad (4.25)$$

şeklinde verilsin. Amacımız

$$C(s) = \frac{Ts + 1}{\alpha Ts + 1}, \quad 0 < \alpha < 1 \quad (4.26)$$

transfer fonksiyonu ile verilen bir ileri faz kontrolör tasarlamaktır. Tasarımda istenen sistemin 45° 'lik faz payına sahip olmasıdır. Kontrolörsüz sistemin ($G(s)$) Bode diyagramı şekil 4.27'te görülmektedir. Şekil 4.27 incelendiğinde sistemin faz payının 28° olduğu görülmektedir. Kazanç payı ise yaklaşık olarak 8 dB'dir. Gerekli olan faz payını sağlamak için

$$45^\circ = 28^\circ + \theta_m - 15 \quad (4.27)$$

denkleminde $\theta_m = 32^\circ$ bulunur. Burada 15° 'lik fazın eklenmesinin nedeni ileri faz kontrolör kazanç kesim frekansını daha büyük bir değere taşıyacağı için güvenlik amaçlı eklenmiştir.

$$\alpha = \frac{1 - \sin \theta_m}{1 + \sin \theta_m} \quad (4.28)$$

denkleminde $\alpha = 0,3$ bulunur ve

$$\max |G(j\omega_m)| = -10 \log_{10} \left(\frac{1}{\alpha} \right) = -5,22 \text{ dB} \quad (4.29)$$

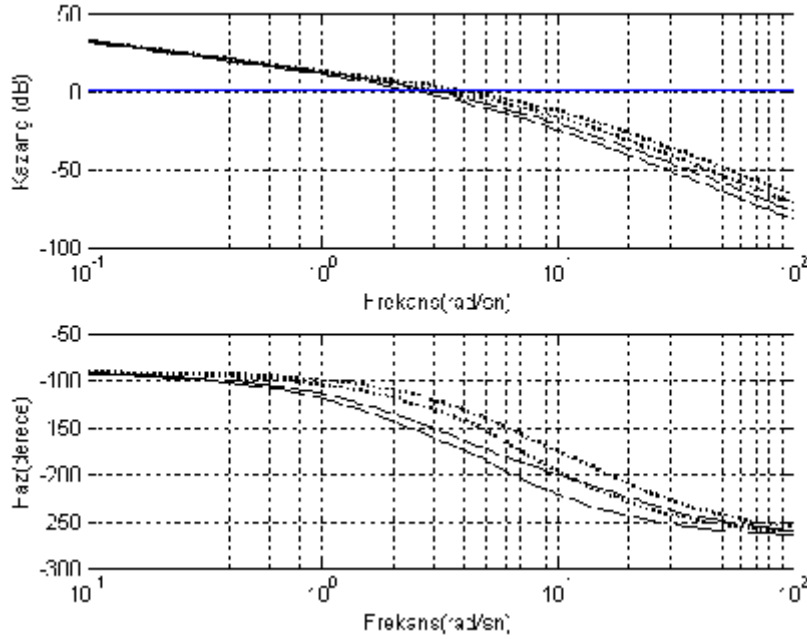
eşitliğinden $\omega_m = 4,38$ rad/sn bulunur. Dolayısıyla

$$\omega_m = \frac{1}{T\sqrt{\alpha}} \quad (4.30)$$

denklemden $T = 0,41$ hesaplanır. Tasarlanan ileri faz kontrolör;

$$C(s) = \frac{Ts + 1}{\alpha Ts + 1} = \frac{0,41s + 1}{0,12s + 1} \quad (4.31)$$

olarak elde edilir. Şekil 4.27’de kontrolörlü sistemin $(C(s)G(s))$ Bode diyagramı görülmektedir. Sistemin faz payının yaklaşık olarak $40^\circ - 45^\circ$ arasında olduğu görülmektedir. Kazanç payı 10 dB civarındadır.



Şekil 4.27 Örnek 4.2’de verilen transfer fonksiyonunun Bode Diyagramı

($\text{---} G(s)$, $\text{- - - -} C(s)G(s)$)

Örnek 4.3

Bir kontrol sistemde;

$$G(s) = \frac{K}{(T_1s + 1)^2} e^{-\tau s} \text{ olsun.}$$

Burada $K \in [0.6, 1.4]$, $T_1 \in [0.8, 1.2]$ ve $\tau \in [0.35, 0.55]$ amacımız transfer fonksiyonu

$$C(s) = K_p \left(1 + \frac{1}{T_i s} + T_d s \right)$$

olan PID kontrolörü tasarlamaktır. PID kontrolör tasarımı için birçok metot vardır. En çok bilinenlerden biri Ziegler-Nichols [37] yaklaşımıdır. Bu metot PID kontrolör parametrelerini

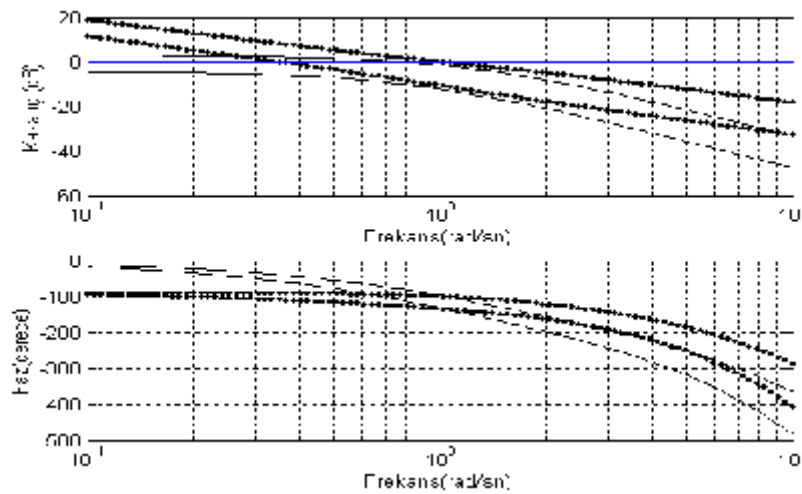
$$K = 0.6K_c, \quad T_i = 0.5T_c, \quad T_d = 0.125T_c$$

olarak verir. Burada $T_c = \frac{2\pi}{\omega_c}$ 'dir. K_c kritik kazanç ω_c kritik frekanstır. Şekil 4.28'de

sistemin Bode diyagramı görülmektedir. Burada $K_c = 1.95$ ve $\omega_c = 1.65 \text{ rad/sn}$ olarak hesaplandı. Dolayısıyla;

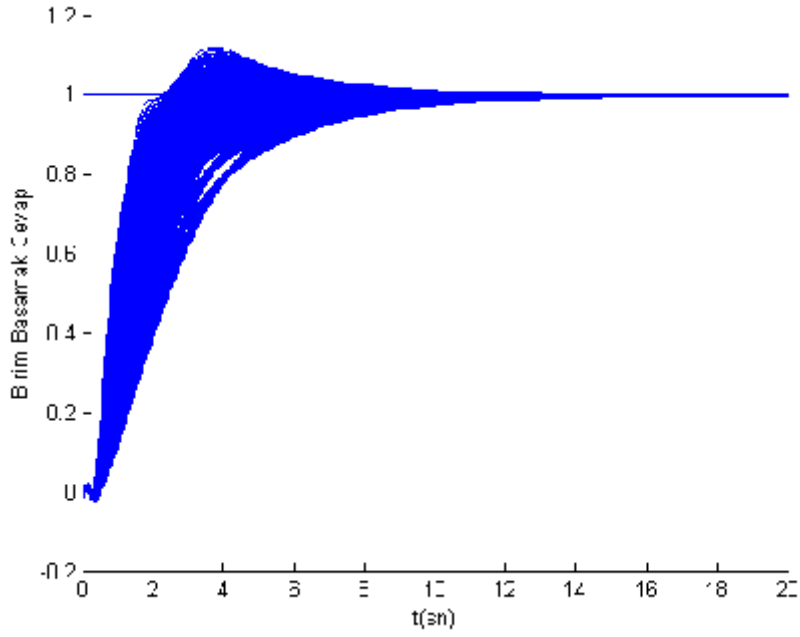
$$C(s) = \frac{1.06s^2 + 2.23s + 1.17}{1.904s}$$

olarak elde edildi. Kontrolörlü sistemin Bode diyagramı ($C(s)G(s)$) da şekil 4.28 görülmektedir. Burada sistemin faz payının 47° ve kazanç payını 7 dB'den büyük olduğu görülmektedir. K , T_1 , τ parametreleri için 10'ar değer alıp $10 \times 10 \times 10 = 1000$ tane transfer fonksiyonunun birim basamak tepkileri şekil 4.29'da elde edilmiştir. Burada sistemin performansının dayanıklı olduğu görülmektedir. Şekilde yüzde aşma yaklaşık olarak %12'dir. Kalıcı hale geçme zamanı ise 15 saniye civarındadır.



Şekil 4.28 $G(s) = \frac{K}{(T_1 s + 1)^2} e^{-\tau s}$ Fonksiyonun Bode Diyagramı

(— $G(s)$, $C(s)G(s)$)



Şekil 4.29 $G(s) = \frac{K}{(T_1s + 1)^2} e^{-\tau}$ Fonksiyonunun birim basamak cevabı

4.7 SONUÇ

Tezin bu bölümünde belirsiz sistemler için kontrolör tasarımında kullanılan kavramlar üzerinde bazı tanımlamalara değinildi. Tasarımda sistem davranış kriterlerini belirlemede ve kriterleri sağlayacak şekilde tasarımda faydalanılan test işaretleri olan; birim basamak, rampa, parabolik fonksiyonları anlatıldı. Kontrol sistemlerinin performans analizinde kullanılan kavramlar (yüzde aşma, gecikme, yükselme, yerleşme zamanı) açıklandı. İkinci mertebeden sistemlerin performansını ölçmede baz alınan kriterlerden (sönüm oranı, sönüm faktörü, doğal frekans) bahsedildi. Sistemlerinin tasarımında en önemli kontrolör yapılarından biri endüstride oldukça geniş yer tutan PID kontrolör ailesidir. Bu amaçla bu bölümde özellikle tüm PID kontrolör tipleri açıklanarak sistem üzerinde ne gibi etkiler ortaya çıkardıkları anlatılmaya çalışılmıştır. Lag/Lead kontrolörler özetlenmiştir. AISTK programının özellikleri açıklanarak, bu program ile interval transfer fonksiyonunun frekans cevabının nasıl elde edilebileceği örneklerle incelendi. Ayrıca program kullanılarak belirsiz kontrol sistemleri için tasarım yapıldı.

BÖLÜM V

KARARLILIK SINIR EĞRİSİ METODU VE UYGLAMALAR

- 5.1 Giriş
- 5.2 PI Kontrolör Kullanarak Kararlılık
- 5.3 PID Kontrolör Kullanarak Kararlılık
- 5.4 Uygulamalar
- 5.5 Sonuç

5.1 GİRİŞ

PID kontrolörler, dayanıklı performans ve basit yapıları sebebiyle endüstride sıklıkla kullanılmaktadırlar. Gerçekten, %90 dan fazla kontrolör yapısı PID yapısında veya daha çok pratik uygulamalarda türevsel kısmının sık kullanılmaması sebebiyle PI şeklindedir [38]. Bu kontrolörlerin parametrelerini belirlemek için kullanılan bir çok metot [20, 26, 39-48] son 60 yılda gelişme göstermiştir. En popüler metotlardan bazıları: Ziegler - Nichols ayarlama metotları, Cohen-Coon kuralları, Åström-Hägglund metodu, gelişmiş Ziegler-Nichols metodu, dahili model kontrol (IMC) tasarım yaklaşımı, kazanç ve faz payına dayanan tasarımlar ve integral performans kriterlerine dayanan diğer metotlardır. Son zamanlarda ise karalı tüm P, PI ve PID kontrolörlerin hesabıyla ilgili birçok önemli sonuç elde edilmiştir [40-48].

PI kontrolör yapısı basit ve bir çok kontrol sistemi için çok iyi sonuçlar sağlayan bir kontrolör yapısı olduğu için bir kontrol sistemini kararlı yapabilecek iki parametresinin bütün değerlerinin hesaplanması önemli olacaktır. Bölüm, bu problem ile ilgilidir ve kararlılık sınır eğrisinin (k_p, k_i) düzleminde çizimine dayalı bir metot tanıtmaktadır [42-43]. Kararlılık sınır eğrisi kontrolör parametrelerine ve frekansa bağlıdır. Örneğin, $l(k_p, k_i, \omega)$ gösterimi (k_p, k_i) düzleminde kararlılık sınır eğrisini ifade etmektedir. Kararlılık sınır eğrisi ω 'ya bağlı olduğu için ω 0'dan ∞ 'a kadar değişebilir. Fakat hangi frekans aralığında kararlı kontrolör parametrelerinin bulunabileceği ve çizim için gerekli frekans aralığının tahmin edilebileceği gösterilmiştir. Dolayısıyla özetlenen metotla bir kontrol sistemini kararlı yapabilecek tüm PI kontrolör parametrelerinin çok hızlı hesaplanabilir. Ayrıca verilen metot, kullanıcı için gerekli kazanç payı ve faz payı değerlerini de sağlayan tüm kararlı PI katsayı aralığını hesaplayabilmektedir. Bu değerler bir kontrol sisteminin performansı ile ilgili değerlerdir. Matlab ortamında hazırlanan programlarla sıkça kullanılan bazı standart formdaki transfer fonksiyonlarını kararlı yapacak bütün PI kontrolörler kolayca hesaplanabilmektedir. Hesaplanan kararlı bölgede seçilen kontrolörlerin sistemin performansına etkileri de incelenebilmektedir.

5.2 PI KONTROLÖR KULLANARAK KARARLILIK

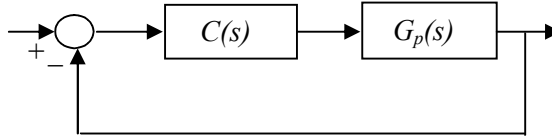
Şekil 1 de verilen tek giriş-tek çıkışlı sistemde

$$G_p(s) = G(s)e^{-\tau s} = \frac{N(s)}{D(s)}e^{-\tau s} \quad (5.1)$$

kontrol edilmek istenen sistemin transfer fonksiyonunu ve $C(s)$ de

$$C(s) = k_p + \frac{k_i}{s} = \frac{k_p s + k_i}{s} \quad (5.2)$$

formundaki bir PI kontrolörü göstermektedir. Amacımız şekil 5.1 de verilen sistemi kararlı yapan denklem (5.2) deki PI kontrolörün tüm parametrelerini hesaplamaktır.



Şekil 5.1: Bir tek giriş-tek çıkışlı kontrol sistemi

Sistemin kapalı çevirim karakteristik denklemi

$$\Delta(s) = sD(s) + (k_p s + k_i)N(s)e^{-\tau s} \quad (5.3)$$

şeklinde yazılabilir. Denklem (5.1) de $s = j\omega$ alınarak, $G(s)$ 'in pay ve paydasının tek ve çift kısımlarını yazarsak,

$$G(j\omega) = \frac{N_e(-\omega^2) + j\omega N_o(-\omega^2)}{D_e(-\omega^2) + j\omega D_o(-\omega^2)} \quad (5.4)$$

Basit gösterim açısından $(-\omega^2)$ ler bundan sonraki denklemlerde yazılmayacaktır.

Böylece Denklem (5.3) teki karakteristik denklem

$$\begin{aligned} \Delta(j\omega) &= [(k_i N_e - k_p \omega^2 N_o) \cos(\omega\tau) + \omega(k_i N_o + k_p N_e) \sin(\omega\tau) - \omega^2 D_o] \\ &+ j[\omega(k_i N_o + k_p N_e) \cos(\omega\tau) \\ &- (k_i N_e - \omega^2 k_p N_o) \sin(\omega\tau) + \omega D_e] \\ &= R_\Delta + jI_\Delta = 0 \end{aligned} \quad (5.5)$$

yazılabilir. Sonra, $\Delta(j\omega)$ 'nın reel ve sanal kısımları sıfıra eşitlenirse

$$k_p(-\omega^2 N_o \cos(\omega\tau) + \omega N_e \sin(\omega\tau)) + k_i(N_e \cos(\omega\tau) + \omega N_o \sin(\omega\tau)) = \omega^2 D_o \quad (5.6)$$

ve

$$k_p(\omega N_e \cos(\omega\tau) + \omega^2 N_o \sin(\omega\tau)) + k_i(\omega N_o \cos(\omega\tau) - N_e \sin(\omega\tau)) = -\omega D_e \quad (5.7)$$

elde edilir.

$$\begin{aligned} Q(\omega) &= -\omega^2 N_o \cos(\omega\tau) + \omega N_e \sin(\omega\tau) \\ R(\omega) &= N_e \cos(\omega\tau) + \omega N_o \sin(\omega\tau) \\ X(\omega) &= \omega^2 D_o \end{aligned} \quad (5.8)$$

ve

$$\begin{aligned} S(\omega) &= \omega N_e \cos(\omega\tau) + \omega^2 N_o \sin(\omega\tau) \\ U(\omega) &= \omega N_o \cos(\omega\tau) - N_e \sin(\omega\tau) \\ Y(\omega) &= -\omega D_e \end{aligned} \quad (5.9)$$

tanımlanırsa Denklem (5.6) ve (5.7) şu şekilde yazılabilir

$$\begin{aligned} k_p Q(\omega) + k_i R(\omega) &= X(\omega) \\ k_p S(\omega) + k_i U(\omega) &= Y(\omega) \end{aligned} \quad (5.10)$$

Bu denklemlerden

$$k_p = \frac{X(\omega)U(\omega) - Y(\omega)R(\omega)}{Q(\omega)U(\omega) - R(\omega)S(\omega)} \quad (5.11)$$

ve

$$k_i = \frac{Y(\omega)Q(\omega) - X(\omega)S(\omega)}{Q(\omega)U(\omega) - R(\omega)S(\omega)} \quad (5.12)$$

Denklem (5.8) ve (5.9), Denklem (5.11) ve (5.12) de yerine yazılırsa,

$$k_p = \frac{(\omega^2 N_o D_o + N_e D_e) \cos(\omega\tau) + \omega(N_o D_e - N_e D_o) \sin(\omega\tau)}{-(N_e^2 + \omega^2 N_o^2)} \quad (5.13)$$

ve

$$k_i = \frac{\omega^2(N_o D_e - N_e D_o) \cos(\omega\tau) - \omega(N_e D_e + \omega^2 N_o D_o) \sin(\omega\tau)}{-(N_e^2 + \omega^2 N_o^2)} \quad (5.14)$$

olduğu görülür. Denklem (5.13) ve (5.14) kullanılarak, kararlılık sınır eğrisi, $l(k_p, k_i, \omega)$, (k_p, k_i) düzleminde çizilebilir. Kararlılık sınır eğrisi elde edildikten sonra sistemi kararlı yapacak PI kontrolörlerin bölgesi bulunabilir. Çünkü kararlılık sınır

eğrisi ile $k_i = 0$ doğrusu parametre düzlemini yani (k_p, k_i) düzlemini kararlı ve kararsız bölgelere böler. Bu bölgelerde seçilecek kontrolörün parametre değerleri kullanılarak hangi bölgenin sistemi kararlı yapacak parametreler içerdiği bulunabilir. Burada $k_i = 0$ doğrusu kararlılık bölgesinin bir sınırır. Çünkü $\Delta(s)$ 'in bir reel kökü $s = 0$ da sanal eksenini keser. Dolayısıyla Denklem (5.5) te $\omega = 0$ için I_Δ zaten sıfır olmaktadır ve $\omega = 0$ için R_Δ 'yı sıfıra eşitlersek $k_i = 0$ elde edilir.

Görüleceği gibi kararlılık sınır eğrisi frekansa yani ω ya bağlıdır ve ω da 0 dan ∞ a değişmektedir. Fakat kararlılık sınır eğrisini ω_c gibi kritik bir frekans değerine kadar çizmemiz yeterli olacaktır. Çünkü Denklem (5.1) deki $G_p(s)$ 'in $s = j\omega_c$ de fazı -180° ye eşit olduğu için,

$$-\tan^{-1}\left(\frac{\omega N_o}{N_e}\right) - \tan^{-1}\left(\frac{\omega D_o}{D_e}\right) - \omega\tau = -\pi \quad (5.15)$$

veya

$$\tan(\omega\tau) = \frac{\omega(N_o D_e - N_e D_o)}{N_e D_e + \omega^2 N_o D_o} = f(\omega) \quad (5.16)$$

yazılabilir. Dolayısıyla, ω_c Denklem (5.16)'nin $(0, \pi)$ aralığında çözümünden elde edilir. $\tan(\omega\tau)$ ve $f(\omega)$ yı ω 'ya karşılık çizdiğimizde ω_c , $\tan(\omega\tau)$ ve $f(\omega)$ 'nın kesiştiği en küçük ω değeridir.

Bilindiği gibi kazanç payı ve faz payı klasik kontrol teorisinde kontrolör tasarımı için kullanılan iki önemli performans ölçüsüdür. Yukarıdaki yaklaşım istenilen faz ve kazanç paylarını sağlayan PI kontrolörlerin bulunması için de kullanılabilir. Şekil 5.1 de verilen kontrol sistemine kazanç-faz payı test edicisi, $G_{gp}(s) = Ae^{-j\phi}$, eklenirse

$$k_p = \frac{(\omega^2 N_o D_o + N_e D_e) \cos(h) + \omega(N_o D_e - N_e D_o) \sin(h)}{-A(N_e^2 + \omega^2 N_o^2)} \quad (5.17)$$

ve

$$k_i = \frac{\omega^2(N_o D_e - N_e D_o) \cos(h) - \omega(N_e D_e + \omega^2 N_o D_o) \sin(h)}{-A(N_e^2 + \omega^2 N_o^2)} \quad (5.18)$$

denklemleri elde edilir. Burada $h = \omega\tau + \phi$ dir. Kararlılık sınır eğrisini verilen A kazanç değeri için elde etmek istediğimizde, Denklem (5.17) ve (5.18) de $\phi = 0$ yazılmalıdır. Diğer taraftan istenilen faz payı ϕ için ise $A = 1$ yazılmalıdır.

5.2 PID KONTROLÖR KULLANARAK KARARLILIK

Bu bölüm PID kontrolör tasarımıyla ilgilidir. Önceki bölümde verilen metod kontrolörün parametrelerin hesaplanmasında kullanılabilir. Şekil 5.1'deki $C(s)$

$$C(s) = k_p + \frac{k_i}{s} + k_d s \quad (5.19)$$

formunda bir PID kontrolör olsun. Önceki bölümde verilen yöntemi uygulayarak bir sabit k_d değeri için kararlılık sınır eğrisi (k_p, k_i) düzleminde elde edilebilir veya sabit k_i değeri için kararlılık sınır eğrisi (k_p, k_d) düzleminde elde edilir. Fakat sabit bir k_p değeri için kararlılık sınır eğrisinin (k_i, k_d) düzleminde elde edilmesi mümkün değildir. Çünkü $Q(\omega)U(\omega) - R(\omega)S(\omega)$ 'nin değeri bu durumda sıfıra eşit olacaktır. Kararlılık sınır eğrisinin (k_p, k_i) düzleminde, k_d 'ye bağlı olarak hesapladığımızda k_p denklem (5.13)'e eşit çıkar. k_i ise

$$k_i = \frac{\omega^2(N_o D_e - N_e D_o) \cos(\omega\tau) - \omega(N_e D_e + \omega^2 N_o D_o) \sin(\omega\tau) - k_d \omega^2 (N_e^2 + \omega^2 N_o^2)}{-(N_e^2 + \omega^2 N_o^2)} \quad (5.20)$$

olarak elde edilir. Kararlılık sınır eğrisinin (k_p, k_d) düzleminde k_i 'ye bağlı olarak hesaplandığında k_p yine denklem (5.13)'e eşit çıkar. k_d ise şu şekilde elde edilir.

$$k_d = \frac{\omega^2(N_o D_e - N_e D_o) \cos(\omega\tau) - \omega(N_e D_e + \omega^2 N_o D_o) \sin(\omega\tau) + k_i (N_e^2 + \omega^2 N_o^2)}{\omega^2 (N_e^2 + \omega^2 N_o^2)} \quad (5.21)$$

Bu denklemler kullanılarak bir kontrolör sistemini kararlı yapabilecek bütün PID kontrolörler hesaplanabilir.

5.3 UYGULAMALAR

Bu bölümde geliştirilmiş olan programın bazı uygulamaları gösterilecektir. Örneğin program

$$G(s) = \frac{K}{Ts + 1} e^{-\tau s}$$

$$G(s) = \frac{K}{(T_1s + 1)(T_2s + 1)} e^{-\tau s}$$

$$G(s) = \frac{1}{s} e^{-s}$$

$$G(s) = \frac{K}{(Ts + 1)^2} e^{-\tau s}$$

$$G(s) = \frac{K}{s^2 + 1}$$

$$G(s) = \frac{K\omega_0^2}{(s + 1)(s^2 + 2\zeta\omega_0s + \omega_0^2)}$$

$$G(s) = \frac{K}{(s + 1)^n}$$

$$G(s) = \frac{K}{s(T_1s + 1)(T_2s + 1)}$$

formdaki transfer fonksiyonları kararlı yapacak bütün PI kontrolörlerin hesaplanmasını kolaylaştırmaktadır.

Örnek 5.1:

Şekil 5.1 deki kontrol sisteminde

$$G_p(s) = \frac{s^3 + 4s^2 - s + 1}{s^5 + 2s^4 + 32s^3 + 14s^2 - 4s + 50} \quad (5.22)$$

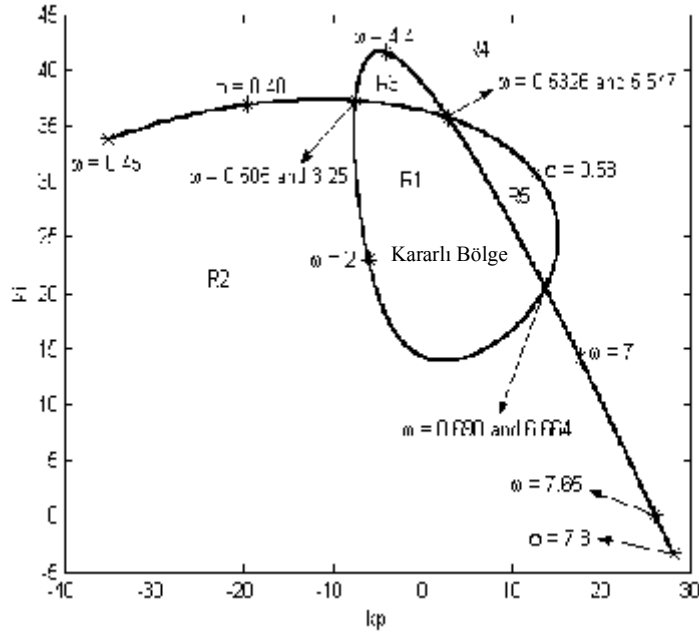
Denklem (5.13) ve (5.14) ten

$$k_p = \frac{-\omega^8 + 23\omega^6 + 94\omega^4 - 210\omega^2 + 50}{-\omega^6 - 18\omega^4 + 7\omega^2 - 1} \quad (5.23)$$

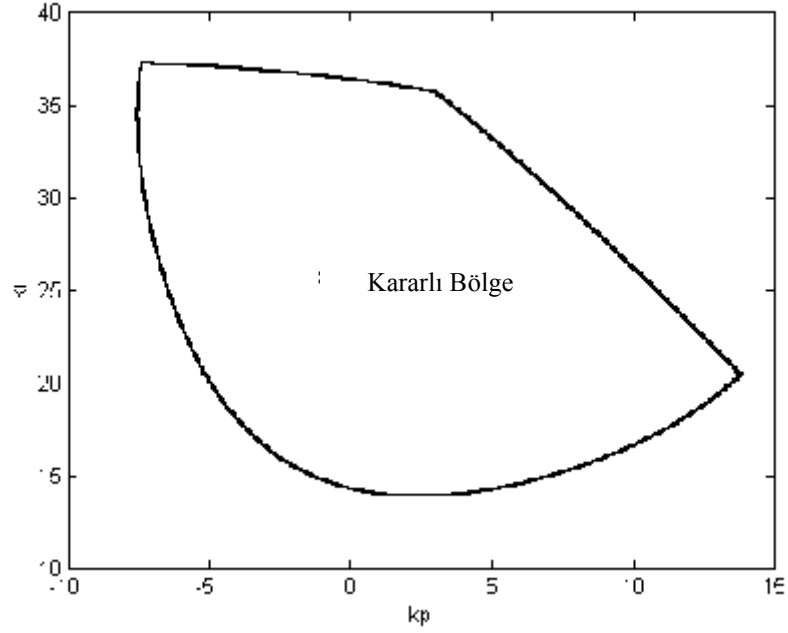
ve

$$k_i = \frac{2\omega^8 - 117\omega^6 - 20\omega^4 - 46\omega^2}{-\omega^6 - 18\omega^4 + 7\omega^2 - 1} \quad (5.24)$$

elde edilir. Bu denklemler kullanılarak kararlılık sınır eğrisi elde edilir. Örneğin, kararlılık sınır eğrisi yani $l(k_p, k_i, \omega)$ $\omega \in [0.45, 7.8]$ için Şekil 5.2 de görülmektedir. Şekilde de görüldüğü gibi kararlılık sınır eğrisi (k_p, k_i) düzlemini R1, R2, R3, R4 ve R5 ile gösterilen bölgelere ayırmaktadır. Bu bölgelerde test noktaları seçilerek hangi bölgenin kararlı olduğu bulunabilir. Örneğin, R5 bölgesinde seçilen $k_p = 13$ ve $k_i = 25$ değerleri için sistemin karakteristik denkleminin sağ yarı düzlemde iki kökü vardır. Dolayısıyla R5 bölgesi kararlı bölge değildir. Sistemi kararlı yapacak tek bölgenin R1 bölgesi olduğu test edilebilir. Örneğin, R1 bölgesinde seçilen $k_p = 5$ ve $k_i = 20$ için sistemin karakteristik polinomu $\Delta(s) = s^6 + 2s^5 + 37s^4 + 54s^3 + 71s^2 + 35s + 20$ kararlı bir polinomdur. Sistemi kararlı yapan bütün k_p ve k_i değerlerini içeren R1 bölgesi Şekil 5.3 te görülmektedir.



Şekil 5.2:Örnek 5.1'deki kontrol sisteminin Kararlılık sınır eğrisi



Şekil 5.3: Örnek 5.1'deki kontrol sistemini kararlı yapan bütün PI kontrolörler

Örnek 5.2:

Şekil 5.1 deki kontrol sisteminde

$$G_p(s) = \frac{27}{(s - 0.1)(s + 2.8)^3} e^{-\tau s} \quad (5.25)$$

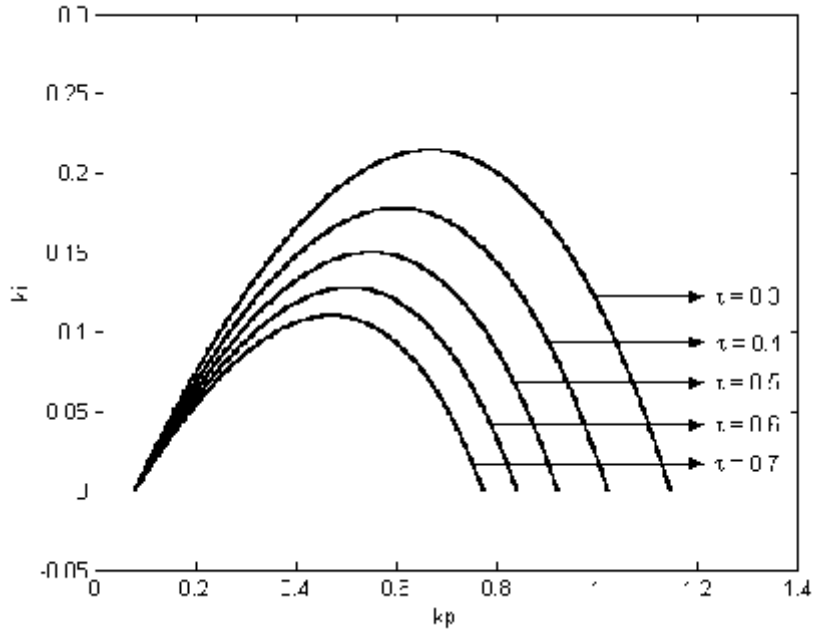
olsun. Denklem (5.13) ve (5.14) ten

$$k_p = (-0.037\omega^4 + 0.84\omega^2 + 0.0813) \cos(\tau\omega) + (-0.3074\omega^3 + 0.726\omega) \sin(\tau\omega) \quad (5.26)$$

ve

$$k_i = (-0.3074\omega^4 + 0.727\omega^2) \cos(\tau\omega) + (0.037\omega^5 - 0.84\omega^3 - 0.0813\omega) \sin(\tau\omega) \quad (5.27)$$

elde edilir. $\tau = 0.3$, $\tau = 0.4$, $\tau = 0.5$, $\tau = 0.6$ ve $\tau = 0.7$ için kararlı bölgeler Şekil 5.4'da görülmektedir. Burada zaman gecikmesinin kararlı bölge üzerinde önemli derecede etkili olduğu gözlenebilir.



Şekil 5.4: Örnek 5.2'deki kontrol sisteminin farklı τ değerleri için kararlılık bölgeleri

Örnek 5.3:

Şekil 5.1 de

$$G_p(s) = \frac{1}{(s+1)^2} e^{-s} \quad (5.28)$$

olsun. Amaç sistemin kazanç payını 2.5 tan büyük ve faz payını da 45° den büyük yapacak bütün PI kontrolörlerini bulmaktır. Denklem (5.13) ve (5.14) ten

$$k_p = 2\omega \sin(\omega) - (-\omega^2 + 1) \cos(\omega) \quad (5.29)$$

ve

$$k_i = \omega(-\omega^2 + 1) \sin(\omega) + 2\omega^2 \cos(\omega) \quad (5.30)$$

ve Şekil 5.5'te kararlı bölge verilmiştir. Sistemin faz payını 45° den büyük yapacak PI kontrolörlerini bulmak için denklem (5.17) ve (5.18) de $A = 1$ ve $\phi = 45^\circ$ alınırsa

$$k_p = 2\omega \sin(h) - (-\omega^2 + 1) \cos(h) \quad (5.31)$$

ve

$$k_i = \omega(-\omega^2 + 1) \sin(h) + 2\omega^2 \cos(h) \quad (5.32)$$

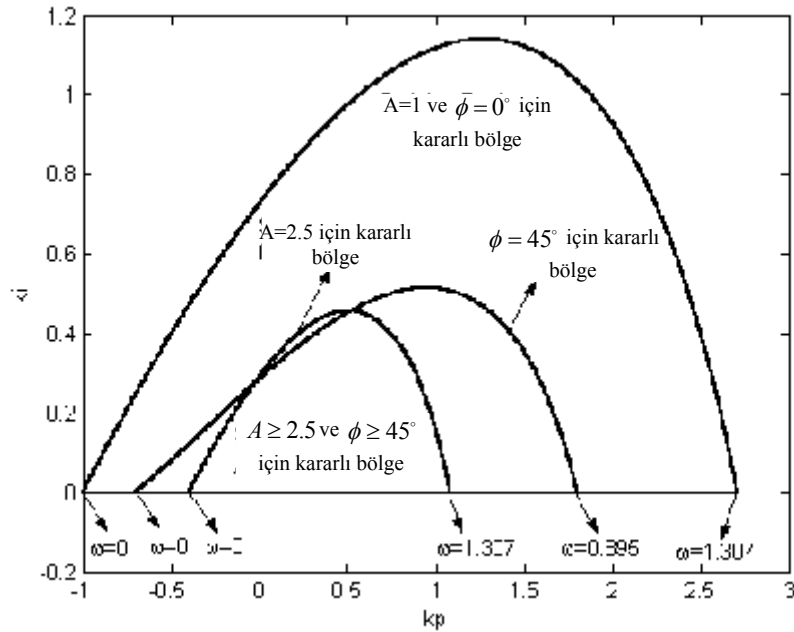
elde edilir. Burada $h = \omega + \pi/4$ dir. Kararlılık sınır eğrisi $\phi = 45^\circ$ ve $\omega \in (0, 0.895)$ için Şekil 5.5'te görülmektedir. Benzer şekilde $\phi = 0$ ve $A = 2.5$ alınırsa

$$k_p = 0.8\omega \sin(\omega) - 0.4(-\omega^2 + 1) \cos(\omega) \quad (5.33)$$

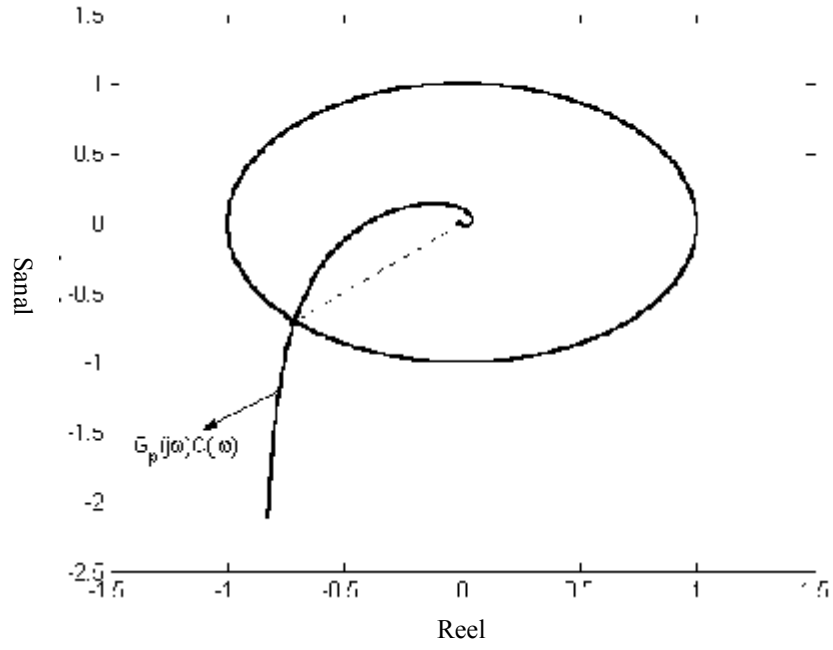
ve

$$k_i = 0.8\omega^2 \cos(\omega) + 0.4\omega(-\omega^2 + 1) \sin(\omega) \quad (5.34)$$

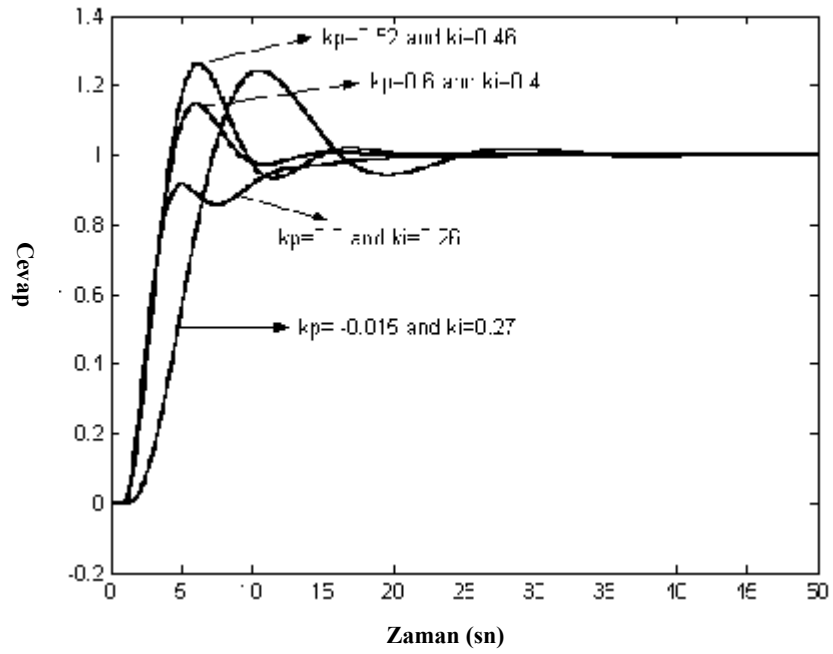
denklemleri elde edilir. Kararlılık sınır eğrisi $A = 2.5$ ve $\omega \in (0, 1.307)$ için Şekil 5.5'te verilmiştir. Sistemin faz payını 45° den büyük ve kazanç payını da 2.5 tan büyük yapan bütün k_p ve k_i değerleri bu iki bölgenin kesişiminden oluşur. Örneğin iki bölgenin kesişim noktalarından birine karşılık gelen $k_p = 0.52$ ve $k_i = 0.46$ değerleri için $G_p(j\omega) C(j\omega)$ 'nın Nyquist diyagramı Şekil 5.6'da çizilmiştir. Şekil 5.6'da faz payının 45° ve kazanç payının 2.5 derece olduğu görülmektedir. $A \geq 2.5$ ve $\phi \geq 45^\circ$ bölgesinde seçilen değişik k_p ve k_i değerleri için sistemin step tepkisi Şekil 5.7'de verilmiştir.



Şekil 5.5: Örnek 5.3'te verilen kontrol sisteminin $\phi \geq 45^\circ$ ve $A \geq 2.5$ için kararlılık bölgesi



Şekil 5.6: Örnek 5.3'te verilen kontrol sisteminin Nyquist diyagramı



Şekil 5.7: Örnek 5.3'te verilen kontrol sisteminin farklı k_p ve k_i değerler için step tepkiler

Örnek 5.4:

Şekil 5.1'deki transfer fonksiyonu

$$G(s) = \frac{1}{(s+1)^2(s+2)^2} \quad (5.35)$$

olsun. Amaç sistemi kararlı yapabilecek PID kontrolör parametrelerinin değerlerinin bulunabilmesidir. (k_p, k_i) düzleminde kararlılık sınır eğrisini elde edebilmek için

$$k_p = -\omega^4 + 3\omega^2 - 4 \quad (5.36)$$

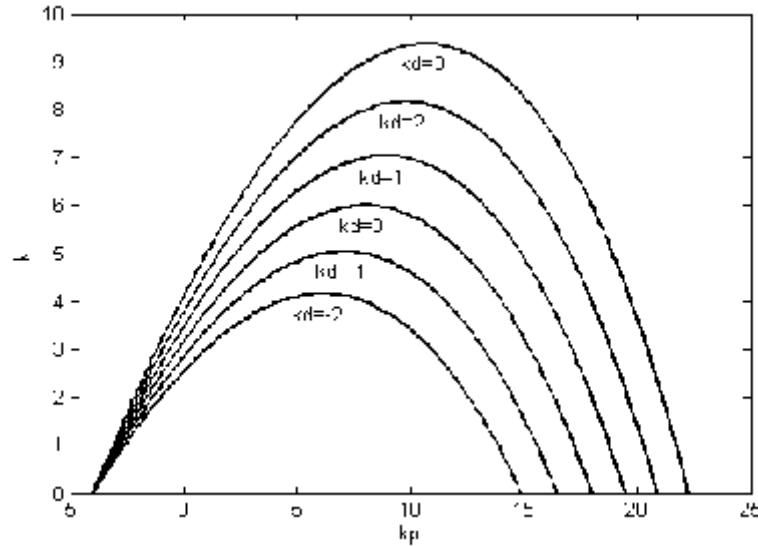
ve

$$k_i = -6\omega^4 + 12\omega^2 + kd\omega^2 \quad (5.37)$$

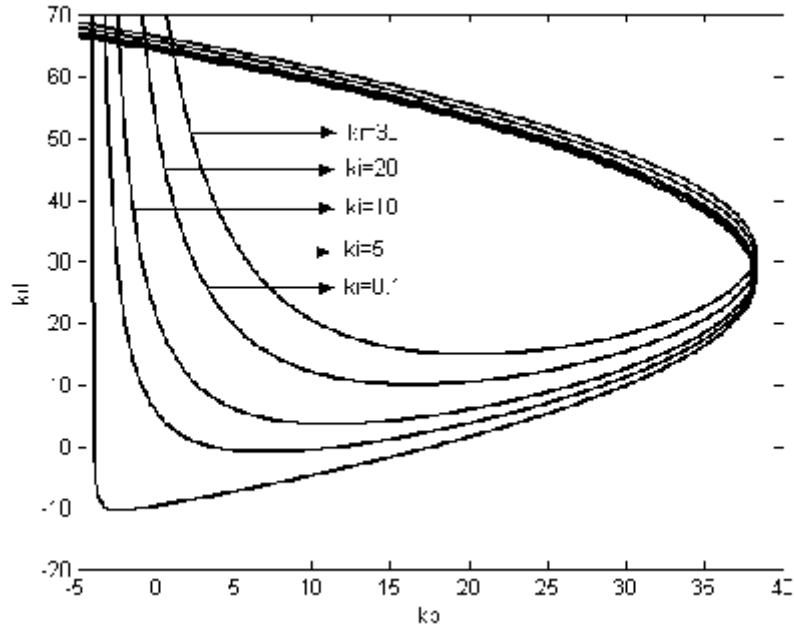
elde edildi. $k_d = -2, -1, 0, 1, 2,$ ve 3 değeri için kararlı bölgeler şekil (5.8)'de gösterilmiştir. (k_p, k_d) düzleminde kararlılık bölgesini bulmak için k_p denklem (5.36)'e eşit çıkmıştır. k_d ise

$$k_d = \frac{6\omega^4 - 12\omega^2 + ki}{\omega^2} \quad (5.38)$$

olarak elde edilmiştir. $k_i = 0.1, 5, 10, 20$ ve 30 değerleri için kararlı bölgeleri şekil (5.9)'te gösterilmiştir.



Şekil 5.8 Örnek 5.4'te verilen transfer fonksiyonunun farklı k_d değerleri için sistemi kararlı yapan bütün k_p ve k_i değerleri



Şekil 5.9 Örnek 5.4'te verilen transfer fonksiyonunun farklı k_i değerleri için sistemi kararlı yapan bütün k_p ve k_d değerleri

Örnek 5.5:

Şekil 5.1 de

$$G_p(s) = \frac{1}{(s+1)^2} e^{-s} \quad (5.39)$$

olsun. Öncelikle sistemi kararlı yapan bütün PI kontrolörler bulunacaktır. Ziegler-Nichols açık çevrim ve kapalı çevrim metotları kullanarak PI kontrolörler tasarlanacaktır ve gerekli karşılaştırmalar yapılacaktır. Bölüm 5.2'deki yöntem kullanıldığında

$$k_p = \omega \sin(\omega) - \cos(\omega) \quad (5.40)$$

$$k_i = \omega \sin(\omega) + \omega^2 \cos(\omega) \quad (5.41)$$

elde edilir. Sistemi kararlı yapan bütün PI kontrolörler şekil 5.10'da görülmektedir. Ziegler-Nichols açık çevrim metoduna göre elde edilen PI kontrolör

$$C(s) = 0.9 + \frac{0.27}{s} \quad (5.42)$$

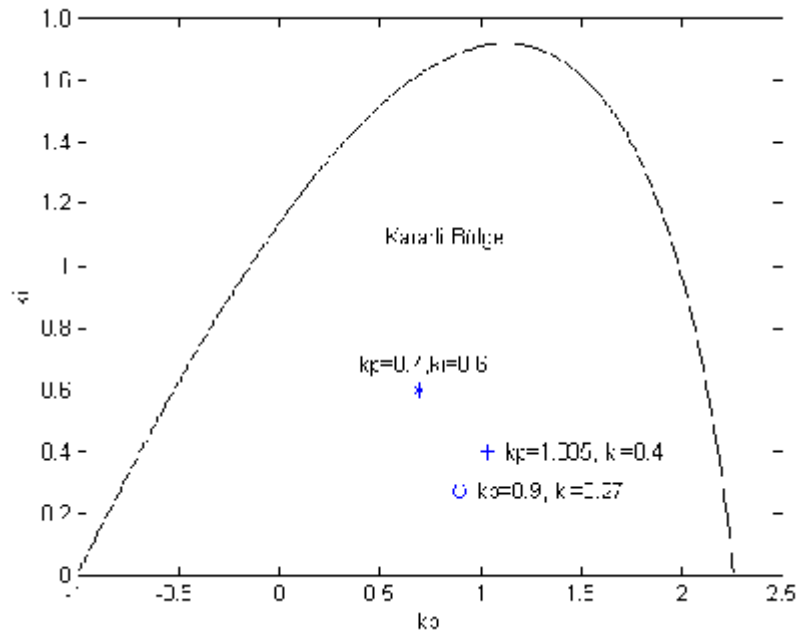
ve kapalı çevrim metodunu kullanarak elde edilen PI kontrolör

$$C(s) = 1.035 + \frac{0.4}{s} \quad (5.43)$$

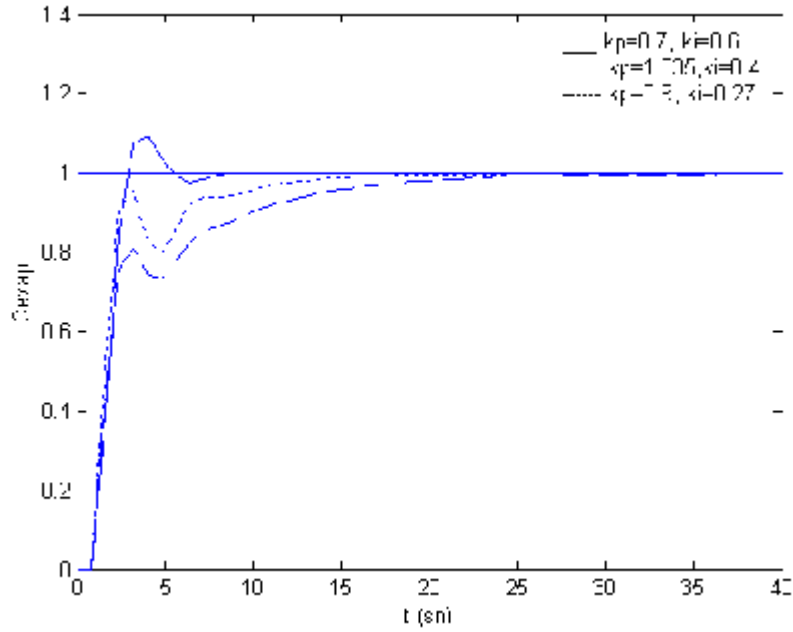
dir. Bu kontrolörler şekilde “+” ve “o” ile gösterilmiştir. Kararlı bölgede seçtiğimiz bir PI kontrolör ise

$$C(s) = 0.7 + \frac{0.6}{s} \quad (5.44)$$

dir ve şekilde “*” ile gösterilmiştir. Bu üç kontrolör için sistemin birim basamak tepkisi şekil 5.11’de gösterilmiştir. Şekil 5.11 incelendiğinde tasarladığımız kontrolörün Ziegler-Nichols metodu ile elde edilen kontrolöre göre daha iyi sonuç verdiği açıkça belli olmaktadır. Ayrıca kararlı bölgede tasarladığımız kontrolör daha iyi konumlanmış durumdadır. Dolayısıyla dayanıklı bir kontrolördür.



Şekil 5.10 Örnek 5.5’te verilen kontrol sistemini kararlı yapan bütün PI kontrolörler



Şekil 5.11 şekil 5.10'daki PI kontrolör kararlılık bölgesinde seçilen üç kontrolörün birim basamak tepkisi

5.5 SONUÇ

Tezin bu bölümünde PI ve PID kontrolörlerin verilen bir kontrol sistemini kararlı yapabilecek bütün parametrelerinin hesaplanması anlatıldı. Kararlılık sınır eğrisinin çizimine dayalı bir metot üzerinde duruldu. Bu metotla bir kontrol sistemini kararlı yapabilecek tüm PI ve PID kontrolör parametrelerinin ω 'ya bağlı olarak nasıl hesaplanabileceği uygulamalar kısmında örnekler verilerek ifade edilmiştir. Ayrıca Matlab ortamında hazır paket yazılımlar kullanarak standart formdaki transfer fonksiyonlarını kararlı yapabilecek PI ve PID kontrolörler, uygulamalar bölümünde beş örnekle anlatıldı. Ayrıca, parametre değişimlerinin kararlılık bölgesi üzerine etkisi incelendi. Ziegler-Nichols metodu ile elde edilen kontrolörler ile birim basamak cevabı karşılaştırmaları yapıldı.

BÖLÜM VI

6 SONUÇ

Bu tezin ilk bölümünde klasik kontrol ile ilgili terimlere kısaca değinilerek tanımlamalar yapıldı. Klasik kontrol sistemlerinin kararlılığı ile ilgili kullanılan kriterler üzerinde açıklamalarda bulunuldu. Klasik kontrol teorisinde sistem modelinin ve parametrelerinin bilindiği kabul edilir. Ancak gerçek zamandaki uygulamalarda durum bundan farklıdır. Çünkü sistemlerde model belirsizliği kaçınılmaz bir gerçekliktir. Klasik kontrol teorisinde tasarım yapılırken genellikle sistemlerdeki belirsizlikler göz ardı edilir. Dolayısıyla tasarlanan kontrolde belirsizlikler hesaba katılmadığından dayanıklılıktan uzaktır. Bir kontrol sisteminin sadece karalı olması yeterli değildir. Aynı zamanda dayanıklı ve istenilen performansı sağlaması gereklidir. Dolayısıyla klasik kontrol teorisindeki tasarım tekniklerinden ayrı olarak gerçek zamandaki belirsizlik problemleri tasarımı için kullanılan metotlar üzerinde durularak bu metotlar bu çalışmada anlatıldı.

Bilindiği üzere kontrol sistemlerinin denetimi için kontrolörler kullanılır. Belirsiz sistemler için uygulamalar yapılarak sistemi kararlı yapacak PI ve PID kontrolörlerin tüm parametre değerleri hesaplamaları incelendi. Bu hesaplamalarda parametre belirsizliği alanında sıkça kullanılan Kharitonov ve Kenar teoremi tekniklerinden faydalanıldı ve bu metotlar hakkında geniş anlamda bilgi verildi.

AISTK yazılım programı tanıtıldı ve parametre belirsizliği içeren sistemlerle ilgili MATLAB ortamında bazı uygulamalar yapıldı. Son olarak karalılık sınır eğrisi metodu incelenerek uygulamalarla pekiştirilerek ve bu konuda bazı sonuçlar elde edildi. Bu çalışmada elde edilen sonuçlar pratik uygulamalar için kullanılabilir. Gelecekte bu çalışmada elde edilen veriler kullanılarak farklı etkin metotlar geliştirilebilir.

Yapılan bu çalışma ile ilgili olarak “PI KONTROLÖR TASARIMI VE PERFORMANS ANALİZİ” başlığı altında EK’te belirtilen bir yayın hazırlanarak; 23-25 Mayıs 2007 tarihleri arasında Samsunda düzenlenen “IV. OTOMOSYON

SEMPOZYUMU” na iştirak edildi ve bahse konulu yayının sempozyumda sunumunu yapıldı.

Geleceğe yönelik olarak farklı belirsizlik yapılarına sahip kontrol sistemlerinin dayanıklı kararlılık analizleri incelenebilir. AISTK programı gibi araştırma yapmaya katkı sağlayacak programlar geliştirilebilir.

KAYNAKLAR

- [1] <http://www.bilimonline.8k.com/kontrol/kontrol.htm>.
- [2] M. N. Özdaş, A. Kuzucu ve A. T. Dinibütün, *Otomatik Kontrol Temelleri*, Birsen Yayınevi, 1988.
- [3] <http://uzak.mersin.edu.tr/UZAK/TP/EndElo/EIn-235/ss-5.pdf>.
- [4] http://www.kontrol.itu.edu.tr/duyuru/sunum/Kontrol_Muhendisligi_Programi_Tanitim_Genel.ppt#1.
- [5] B. C. Kuo, *Otomatik Kontrol Sistemleri*, Çeviren ve Uyarlayan Prof. Dr. Atilla Bir, Literatür Yayıncılık, 2005.
- [6] M.P Groover, M.M Weiss, R.N Nagel ve N.G Odrey, *Industrial Robotics Technology, Programming and Applications*, McGraw Hill, 1986.
- [7] İ. Yüksel, *Otomatik Kontrol Sistem Dinamiği ve Denetim Sistemleri*, Uludağ Üniversitesi, Bursa, Üçüncü Baskı, 1997.
- [8] http://www.gençbilim.com_elektroteknik/.
- [9] İ. Yüksel, *MATLAB ile Mühendislik Sistemlerinin Analizi ve Çözüm*, Uludağ Üniversitesi, Bursa, 1996.
- [10] http://www.gençbilim.com_genelkultur/.
- [11] V. L. Kharitonov, “Asymptotic Stability of an Equilibrium Position of A Family of Systems of Linear Differential Equations”, *Differential Equations*, Vol. 14, pp. 1483-1485, 1979.
- [12] H. Chapellat and S. P. Bhattacharyya, “A Generalization of Kharitonov’s Theorem: Robust Stability of Interval Plants”, *IEEE Trans. On Automat. Contr.*, Vol. 34, pp. 306-311, 1989.
- [13] N. Tan ve D. P. Atherton, “Stability and Performance Analysis in an Uncertain World”, *Computing and Control Engineering Journal*, Vol. 11, pp. 91-101, 2000.
- [14] B. R. Barmish, *New Tools for Robustness of Linear Systems*, MacMillan, NY, 1994.
- [15] L. A. Zadeh and C. A. Desoer, *Linear System Theory-A State Space Approach*, McGraw Hill, New York, 1963.
- [16] B. D. O. Anderson, E. I. Jury and M. Mansour, “On Robust Hurwitz Polynomials”, *IEEE Trans. On Automat. Control*, Vol. 32, pp. 909-913, 1986.
- [17] S. P. Bhattacharyya, H. Chapellat and L. H. Keel, *Robust Control: The Parametric Approach*, Prentice Hall, 1995.

- [18] N. Tan ve Y. Karataş, Dijital Kontrol Sistemlerinde Dayanıklı Kararlılık Analizi, 4 üncü Otomasyon Sempozyumu, Samsun, 2007.
- [19] A. C. Bartlett, C. V. Hollot and H. Lin, “Root Location of an Entire Polytope of Polynomials: It Suffices to Check the Edges”, *Mathematics of Controls, Signals and Systems*, Vol. 1, 61-71, 1988.
- [20] K. J. Aström, T. Hagglund, *PID Controllers, Theory, Design and Tuning*, Research Triangle Park, N.C. Instrument Society of America, 1995.
- [21] K. H. Ang, G. Chong, Y. Li, “PID Control System Analysis, Design and Technology”, *IEEE Transaction Control System Technology*, Vol. 13, No.4, July, 2005.
- [22] A. F. Boz, “Computational Approaches To And Comparisons Of Design Methods For Linear Controllers ”, PhD Thesis, University Of Sussex At Brighton, UK, January, 1999.
- [23] G. C. Goodwin, S. F. Graebe, M. E. Salgado, *Control System Design*, Prentice Hall, 2001.
- [24] N. K. Sinha, *Controls system*, John Willey and Sons, Second Edition, 1990.
- [25] K. Ogata, *Modern Control Engineering*, Prentice Hall, Fourth Edition, 2001.
- [26] N. Tan, “Computation of Stablizing Lag/Lead Controller Parmetres”, *Computers and Electrical Engineering*, pp.835-849, 2003.
- [27] R. H. Bishop, *Modern Control System Analysis and Design Using MATLAB and SIMULINK*, Addison Wesley Publishing Company, 1997.
- [28] D. P. Atherton, A.F.Boz, “Auto tuning of Phase Lead Controllers”, School of Engineering, University of Sussex, Brighton, UK.
- [29] Q-G. Wang, Z. Ye and C. C. Hang, “Tuning of Phase Lead Compensators for Exact Gain and Phase Margins”, *Automatica*, 2005.
- [30] C.V. Hollot and F. Yang, “Robust Stablization of İnterval Plants Using Lead or Lag Compensators”, 28th Conference on Desicion and Control, Florida, December, 1989.
- [31] G. Beale, “Phase Lag Compensator Design Using Bode Plots”, Electrical and Computer Engineering Department, George Mason University, Fairfax, Virginia.
- [32] M. C. M Teixeira and E. Assunçao, “On Lag Controllers: Design and Implementation”, *IEEE Transaction on Education*, Vol. 45, No.3, August 2002.
- [33] A. P. Loh, X. Cai and W. W. Tan, “Auto Tuning of Phase Lead/ Lag Compensators”, *Automatica* , Vol. 40, pp 423-429, 2004.
- [34] K. S. Yeung, K. W. Wong and K-L Chen, “A Non-Trial-and-Error Method for Lag Lead Compensator Design”, *IEEE Transactions on Education*, Vol. 41, No. 1, February, pp.76-80, 1998.

- [35] J. Yang, C. F. Che, C. S. Chen and Y. Xu, “An Approach to Automatic Tuning of Phase- Lead and Phase-Lag Compensators”, *30th Conference on Decision and Control*, Brighton, England, 1991.
- [36] N. Tan, “Robust Analysis And Design of Control System With Parametric Uncertainty”, PhD Thesis, University of Sussex At Brighton, UK, November, 1999.
- [37] J G Ziegler. and N. B Nichols, “Optimum Settings For Automatic Controllers”, *Trans ASME*, Vol. 64, pp. 759-768, 1942.
- [38] K. J. Astrom and T. Hagglund, “The Future of PID Control,” *Control Engineering Practice*, Vol. 9, pp. 1163-1175, 2001.
- [39] M. Zhuang and D. P Atherton, “Automatic Tuning of Optimum PID Controllers,” *IEE Proc. Part D*, Vol. 140, pp. 216-224. 1993
- [40] M. T Ho, A. Data and S. P Bhattacharyya, “A Linear Programming Characterization of All Stabilizing PID Controllers,” *Proc. of Amer. Contr. Conf.*, 1997.
- [41] M. T. Söylemez, N. Munro and H. Baki, “Fast Calculation of Stabilizing PID Controllers,” *Automatica*, Vol. 39, 121-126, 2003.
- [42] N. Tan, “Computation Of Stabilizing PI And PID Controllers For Processes With Time Delay”, *ISA Transactions*, Vol.44, pp. 213-223, 2005.
- [43] N. Tan, I Kaya, C. Yeroglu and D. P Atherton, “Computation of Stabilizing PI and PID Controllers Using the Stability Boundary Locus”, *Energy Conversion and Management.*, Vol. 47, pp. 3045-3058, 2006.
- [44] S. E. Hamamcı and N. Tan, “Design of PI Controllers for Achieving Time and Frequency Domain Specifications Simultaneously”, *ISA Trans.*, Vol. 45, pp. 529-543, 2006.
- [45] N. Tan and D. P. Atherton, “Design of Stabilizing PI and PID Controllers”, *International Journal of Systems Science*, Vol. 37, pp.543-554, 2006.
- [46] J. Ackermann and D. Kaesbauer, “Design of Robust PID Controllers,” *European Control Conference*, pp. 522-527, 2001.
- [47] Z. Shafiei and A. T. Shenton, “Frequency Domain Design of PID Controllers for Stable and Unstable Systems with Time Delay,” *Automatica*, Vol. 33, pp. 2223-2232, 1997.
- [48] Y. J. Huang and Y. J. Wang, “Robust PID Tuning Strategy for Uncertain Plants Based on the Kharitonov Theorem,” *ISA Transactions*, Vol. 39, pp. 419-431, 2000.

PI KONTROLÖR TASARIMI VE PERFORMANS ANALİZİ

Abdullah YENİGÜN¹ ve Nusret TAN²

¹Yüksek Lisans Öğrencisi

²İnönü Üniversitesi, Mühendislik Fakültesi, Elektrik-Elektronik Mühendisliği Bölümü,
44280, Malatya. e-posta: ntan@inonu.edu.tr

ABSTRACT

This paper deals with the computation of all stabilizing PI controllers. A method called the stability boundary locus approach is described. A program is prepared in the Matlab environment for computation of all stabilizing PI controllers of some commonly used standard transfer functions. Performans analysis of the control systems using the stability region is studied.

Anahtar sözcükler: Kararlılık, PI kontrol, Kararlılık bölgesi, Kazanç payı, Faz payı, Step cevabı

1. GİRİŞ

PID kontrolörler, dayanıklı performans ve basit yapıları sebebiyle endüstride sıklıkla kullanılmaktadırlar. Gerçekten, %90 dan fazla kontrolör yapısı PID yapısında veya daha çok pratik uygulamalarda türevsel kısmının sık kullanılmaması sebebiyle PI şeklindedir [1]. Bu kontrolörlerin parametrelerini belirlemek için kullanılan bir çok metot [2-3] son 60 yılda gelişme göstermiştir. En popüler metotlardan bazıları: Ziegler - Nichols ayarlama metotları, Cohen-Coon kuralları, Åström-Hägglund metodu, gelişmiş Ziegler-Nichols metodu, dahili model kontrol (IMC) tasarım yaklaşımı, kazanç ve faz payına dayanan tasarımlar ve integral performans kriterlerine dayanan diğer metotlardır. Son zamanlarda ise karalı tüm P, PI ve PID kontrolörlerin hesabıyla ilgili birçok önemli sonuç elde edilmiştir [4-13].

PI kontrolör yapısı basit ve bir çok kontrol sistemi için çok iyi sonuçlar sağlayan bir kontrolör yapısı olduğu için bir kontrol sistemini kararlı yapabilecek iki parametresinin bütün değerlerinin hesaplanması önemli olacaktır. Makale, bu problem ile ilgilidir ve kararlılık sınır eğrisinin (k_p, k_i) düzleminde çizimine dayalı bir metot tanıtmaktadır [7-8]. Kararlılık sınır

eğrisi kontrolör parametrelerine ve frekansa bağlıdır. Örneğin, $l(k_p, k_i, \omega)$ gösterimi (k_p, k_i) düzleminde kararlılık sınır eğrisini ifade etmektedir. Kararlılık sınır eğrisi ω 'ya bağlı olduğu için ω 0'dan ∞ 'a kadar değişebilir. Fakat hangi frekans aralığında kararlı kontrolör parametrelerinin bulunabileceği ve çizim için gerekli frekans aralığının tahmin edilebileceği çalışmada gösterilmiştir. Dolayısıyla özetlenen metotla bir kontrol sistemini kararlı yapabilecek tüm PI kontrolör parametrelerinin çok hızlı hesaplanabilir. Ayrıca verilen metot, kullanıcı için gerekli kazanç payı ve faz payı değerlerini de sağlayan tüm kararlı PI katsayı aralığını hesaplayabilmektedir. Bu değerler bir kontrol sisteminin performansı ile ilgili değerlerdir. Matlab ortamında hazırlanan programlarla sıkça kullanılan bazı standart formdaki transfer fonksiyonlarını kararlı yapacak bütün PI kontrolörler kolayca hesaplanabilmektedir. Hesaplanan kararlı bölgede seçilen kontrolörlerin sistemin performansına etkileri de incelenebilmektedir.

2. PI KONTROLÖR KULLANILARAK

KARARLILIK

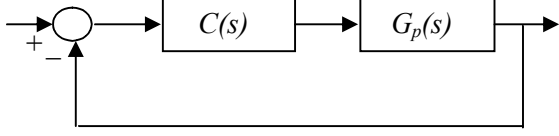
Şekil 1 de verilen tek giriş-tek çıkışlı sistemde

$$G_p(s) = G(s)e^{-\tau s} = \frac{N(s)}{D(s)}e^{-\tau s} \quad (1)$$

kontrol edilmek istenen sistemin transfer fonksiyonunu ve $C(s)$ de

$$C(s) = k_p + \frac{k_i}{s} = \frac{k_p s + k_i}{s} \quad (2)$$

formundaki bir PI kontrolörü göstermektedir. Amacımız şekil 1 de verilen sistemi kararlı yapan denklem (2) deki PI kontrolörün tüm parametrelerini hesaplamaktır.



Şekil 1: Bir tek giriş-tek çıkışlı kontrol sistemi

Sistemin kapalı çevirim karakteristik denklemi

$$\Delta(s) = sD(s) + (k_p s + k_i)N(s)e^{-s\tau} \quad (3)$$

Şeklinde yazılabilir. Denklem (1) de $s = j\omega$ alınarak, $G(s)$ 'in pay ve paydasının tek ve çift kısımlarını yazarsak,

$$G(j\omega) = \frac{N_e(-\omega^2) + j\omega N_o(-\omega^2)}{D_e(-\omega^2) + j\omega D_o(-\omega^2)} \quad (4)$$

Basit gösterim açısından $(-\omega^2)$ ler bundan sonraki denklemlerde yazılmayacaktır. Böylece Denklem (3) teki karakteristik denklem

$$\begin{aligned} \Delta(j\omega) &= [(k_i N_e - k_p \omega^2 N_o) \cos(\omega\tau) \\ &+ \omega(k_i N_o + k_p N_e) \sin(\omega\tau) - \omega^2 D_o] \\ &+ j[\omega(k_i N_o + k_p N_e) \cos(\omega\tau) \\ &- (k_i N_e - \omega^2 k_p N_o) \sin(\omega\tau) + \omega D_e] \\ &= R_\Delta + jI_\Delta = 0 \end{aligned} \quad (5)$$

yazılabilir. Sonra, $\Delta(j\omega)$ 'nin reel ve sanal kısımları sıfıra eşitlenirse

$$k_p(-\omega^2 N_o \cos(\omega\tau) + \omega N_e \sin(\omega\tau)) \quad (6)$$

$$+ k_i(N_e \cos(\omega\tau) + \omega N_o \sin(\omega\tau)) = \omega^2 D_o$$

ve

$$k_p(\omega N_e \cos(\omega\tau) + \omega^2 N_o \sin(\omega\tau)) \quad (7)$$

$$+ k_i(\omega N_o \cos(\omega\tau) - N_e \sin(\omega\tau)) = -\omega D_e$$

elde edilir.

$$Q(\omega) = -\omega^2 N_o \cos(\omega\tau) + \omega N_e \sin(\omega\tau)$$

$$R(\omega) = N_e \cos(\omega\tau) + \omega N_o \sin(\omega\tau) \quad (8)$$

$$X(\omega) = \omega^2 D_o$$

ve

$$S(\omega) = \omega N_e \cos(\omega\tau) + \omega^2 N_o \sin(\omega\tau)$$

$$U(\omega) = \omega N_o \cos(\omega\tau) - N_e \sin(\omega\tau) \quad (9)$$

$$Y(\omega) = -\omega D_e$$

tanımlanırsa Denklem (6) ve (7) şu şekilde yazılabilir

$$k_p Q(\omega) + k_i R(\omega) = X(\omega) \quad (10)$$

$$k_p S(\omega) + k_i U(\omega) = Y(\omega)$$

Bu denklemlerden

$$k_p = \frac{X(\omega)U(\omega) - Y(\omega)R(\omega)}{Q(\omega)U(\omega) - R(\omega)S(\omega)} \quad (11)$$

ve

$$k_i = \frac{Y(\omega)Q(\omega) - X(\omega)S(\omega)}{Q(\omega)U(\omega) - R(\omega)S(\omega)} \quad (12)$$

Denklem (8) ve (9), Denklem (11) ve (12) de yerine yazılırsa,

$$k_p = \frac{(\omega^2 N_o D_o + N_e D_e) \cos(\omega\tau) + \omega(N_o D_e - N_e D_o) \sin(\omega\tau)}{-(N_e^2 + \omega^2 N_o^2)} \quad (13)$$

ve

$$k_i = \frac{\omega^2(N_o D_e - N_e D_o) \cos(\omega\tau) - \omega(N_e D_e + \omega^2 N_o D_o) \sin(\omega\tau)}{-(N_e^2 + \omega^2 N_o^2)} \quad (14)$$

olduğu görülür. Denklem (13) ve (14) kullanılarak, kararlılık sınır eğrisi, $I(k_p, k_i, \omega)$, (k_p, k_i) düzleminde çizilebilir. Kararlılık sınır eğrisi elde edildikten sonra sistemi kararlı yapacak PI kontrolörlerin bölgesi bulunabilir. Çünkü kararlılık sınır eğrisi ile $k_i = 0$ doğrusu parametre düzlemini yani (k_p, k_i) düzlemini karalı ve kararsız bölgelere böler. Bu bölgelerde seçilecek kontrolörün parametre değerleri kullanılarak hangi bölgenin sistemi kararlı yapacak parametreler içerdiği bulunabilir. Burada $k_i = 0$ doğrusu kararlılık bölgesinin bir sınırır çünkü $\Delta(s)$ 'in bir reel kökü $s = 0$ da sanal eksenini keser. Dolayısıyla Denklem (5) te $\omega = 0$ için I_Δ zaten sıfır olmaktadır ve $\omega = 0$ için R_Δ 'yı sıfıra eşitlersek $k_i = 0$ elde edilir.

Görüleceği gibi kararlılık sınır eğrisi frekansa yani ω ya bağlıdır ve ω da 0 dan ∞ a değişmektedir. Fakat kararlılık sınır eğrisini ω_c gibi kritik bir frekans değerine kadar çizmemiz yeterli olacaktır. Çünkü Denklem (1) deki $G_p(s)$ 'in $s = j\omega_c$ de fazı -180° ye eşit olduğu için,

$$\tan^{-1}\left(\frac{\omega N_o}{N_e}\right) - \tan^{-1}\left(\frac{\omega D_o}{D_e}\right) - \omega\tau = -\pi \quad (15)$$

veya

$$\tan(\omega\tau) = \frac{\omega(N_o D_e - N_e D_o)}{N_e D_e + \omega^2 N_o D_o} = f(\omega) \quad (16)$$

yazılabilir. Dolayısıyla, ω_c Denklem (16)'nin $(0, \pi)$ aralığında çözümünden elde edilir. $\tan(\omega\tau)$ ve $f(\omega)$ yı ω 'ya karşılık çizdiğimizde ω_c , $\tan(\omega\tau)$ ve $f(\omega)$ 'nin kesiştiği en küçük ω değeridir.

Bilindiği gibi kazanç payı ve faz payı klasik kontrol teorisinde kontrolör tasarımı için kullanılan iki önemli performans ölçüsüdür. Yukarıdaki yaklaşım istenilen faz ve kazanç paylarını sağlayan PI kontrolörlerin bulunması için de kullanılabilir. Şekil 1 de verilen kontrol sistemine kazanç-faz payı test edicisi,

$$G_{gp}(s) = Ae^{-j\phi}, \text{ eklenirse}$$

$$k_p = \frac{(\omega^2 N_o D_o + N_e D_e) \cos(h) + \omega(N_o D_e - N_e D_o) \sin(h)}{-A(N_e^2 + \omega^2 N_o^2)} \quad (17)$$

and

$$k_i = \frac{\omega^2(N_o D_e - N_e D_o) \cos(h) - \omega(N_e D_e + \omega^2 N_o D_o) \sin(h)}{-A(N_e^2 + \omega^2 N_o^2)} \quad (18)$$

denklemleri elde edilir. Burada $h = \omega\tau + \phi$ dir.

Kararlılık sınır eğrisini verilen A kazanç değeri için elde etmek istediğimizde, Denklem (17) ve (18) de $\phi = 0$ yazılmalıdır. Diğer taraftan istenilen faz payı ϕ için ise $A = 1$ yazılmalıdır.

3. STANDART FORMDAKİ BAZI TRANSFER FONKSİYONLARIN KARARLILIĞI

Bu bölümde geliştirilmiş olan programın bazı uygulamaları gösterilecektir. Şimdilik program

$$G(s) = \frac{K}{Ts + 1} e^{-\tau s}$$

$$G(s) = \frac{K}{(T_1 s + 1)(T_2 s + 1)} e^{-\tau s}$$

$$G(s) = \frac{1}{s} e^{-\tau s}$$

$$G(s) = \frac{K}{(Ts + 1)^2} e^{-\tau s}$$

$$G(s) = \frac{K}{s^2 + 1}$$

$$G(s) = \frac{K\omega_0^2}{(s + 1)(s^2 + 2\zeta\omega_0 s + \omega_0^2)}$$

$$G(s) = \frac{K}{(s + 1)^n}$$

$$G(s) = \frac{K}{s(T_1 s + 1)(T_2 s + 1)}$$

formdaki transfer fonksiyonları kararlı yapacak bütün PI kontrolörlerin hesaplanmasını kolaylaştırmaktadır. İleride program daha da geliştirilerek kolay kullanımlı hale dönüştürülecektir.

Örnek 1: Şekil 1 deki kontrol sisteminde

$$G_p(s) = \frac{s^3 + 4s^2 - s + 1}{s^5 + 2s^4 + 32s^3 + 14s^2 - 4s + 50} \quad (19)$$

Denklem (13) ve (14) ten

$$k_p = \frac{-\omega^8 + 23\omega^6 + 94\omega^4 - 210\omega^2 + 50}{-\omega^6 - 18\omega^4 + 7\omega^2 - 1} \quad (20)$$

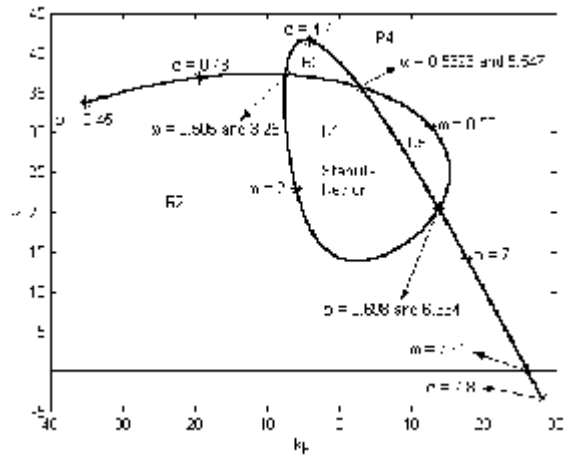
ve

$$k_i = \frac{2\omega^8 - 117\omega^6 - 20\omega^4 - 46\omega^2}{-\omega^6 - 18\omega^4 + 7\omega^2 - 1} \quad (21)$$

elde edilir. Bu denklemler kullanılarak kararlılık sınır eğrisi elde edilir. Örneğin, kararlılık sınır eğrisi yani $l(k_p, k_i, \omega)$ $\omega \in [0.45, 7.8]$ için Şekil 2 de görülmektedir. Şekilde de görüldüğü gibi kararlılık sınır eğrisi (k_p, k_i) düzlemini R1, R2, R3, R4 ve R5 ile gösterilen bölgelere ayırmaktadır. Bu bölgelerde test noktaları seçilerek hangi bölgenin kararlı olduğu bulunabilir. Örneğin, R5 bölgesinde seçilen $k_p = 13$

ve $k_i = 25$ değerleri için sistemin karakteristik denkleminin sağ yarı düzlemde iki kökü vardır. Dolayısıyla R5 bölgesi kararlı bölge değildir. Sistemi kararlı yapacak tek bölgenin R1 bölgesi olduğu test edilebilir. Örneğin, R1 bölgesinde seçilen $k_p = 5$ ve $k_i = 20$ için sistemin karakteristik polinomu

$\Delta(s) = s^6 + 2s^5 + 37s^4 + 54s^3 + 71s^2 + 35s + 20$ kararlı bir polinomdur. Sistemi kararlı yapan bütün k_p ve k_i değerlerini içeren R1 bölgesi Şekil 3 te görülmektedir.



Şekil 2: Kararlılık sınır eğrisi

Örnek 2: Şekil 1 de

$$G_p(s) = \frac{27}{(s - 0.1)(s + 2.8)^3} e^{-\tau s} \quad (22)$$

olsun. Denklem (13) ve (14) ten

$$k_p = (-0.037\omega^4 + 0.84\omega^2 + 0.0813)\cos(\tau\omega) \quad (23)$$

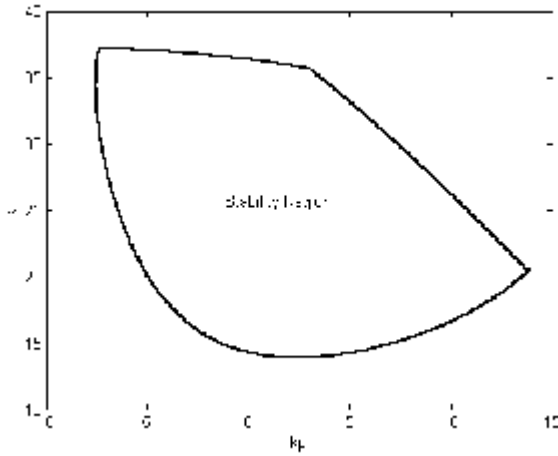
$$+ (-0.3074\omega^3 + 0.726\omega)\sin(\tau\omega)$$

ve

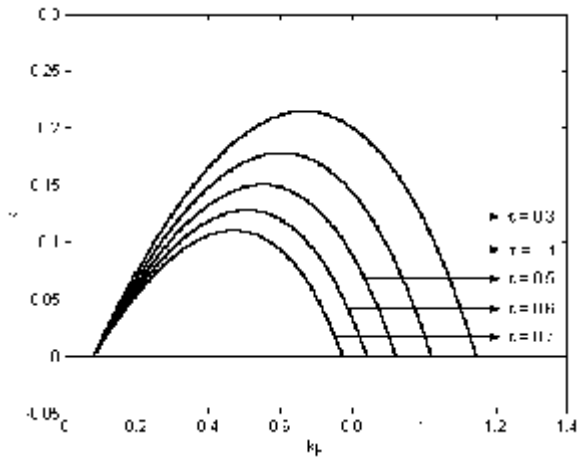
$$k_i = (-0.3074\omega^4 + 0.727\omega^2)\cos(\tau\omega) \quad (24)$$

$$+ (0.037\omega^5 - 0.84\omega^3 - 0.0813\omega)\sin(\tau\omega)$$

elde edilir. $\tau = 0.3$, $\tau = 0.4$, $\tau = 0.5$, $\tau = 0.6$ ve $\tau = 0.7$ için kararlı bölgeler Şekil 4 te görülmektedir. Burada zaman gecikmesinin kararlı bölge üzerinde önemli derecede etkili olduğu gözlenebilir.



Şekil 3: Sistemi kararlı yapan bütün PI kontrolörler



Şekil 4: Farklı τ değerleri için kararlılık bölgeleri

Örnek 3: Şekil 1 de

$$G_p(s) = \frac{1}{(s+1)^2} e^{-s} \quad (25)$$

olsun. Amaç sistemin kazanç payını 2.5 tan büyük ve faz payını da 45° den büyük yapacak bütün PI kontrolörlerini bulmaktır. Denklem (12) ve (13) ten

$$k_p = 2\omega \sin(\omega) - (-\omega^2 + 1)\cos(\omega) \quad (26)$$

ve

$$k_i = \omega(-\omega^2 + 1)\sin(\omega) + 2\omega^2 \cos(\omega) \quad (27)$$

ve Şekil 5 te kararlı bölge verilmiştir. Sistemin faz payını 45° den büyük yapacak PI kontrolörlerini bulmak için Denklem (17) ve (18) de $A = 1$ ve $\phi = 45^\circ$ alınırsa

$$k_p = 2\omega \sin(h) - (-\omega^2 + 1)\cos(h) \quad (28)$$

ve

$$k_i = \omega(-\omega^2 + 1)\sin(h) + 2\omega^2 \cos(h) \quad (29)$$

elde edilir. Burada $h = \omega + \pi/4$ dir. Kararlılık sınır eğrisi $\phi = 45^\circ$ ve $\omega \in (0, 0.895)$ için Şekil 5 te görülmektedir. Benzer şekilde $\phi = 0$ ve $A = 2.5$ alınırsa

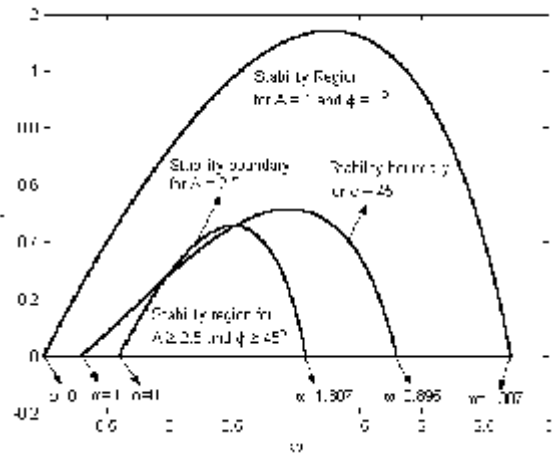
$$k_p = 0.8\omega \sin(\omega) - 0.4(-\omega^2 + 1)\cos(\omega) \quad (30)$$

ve

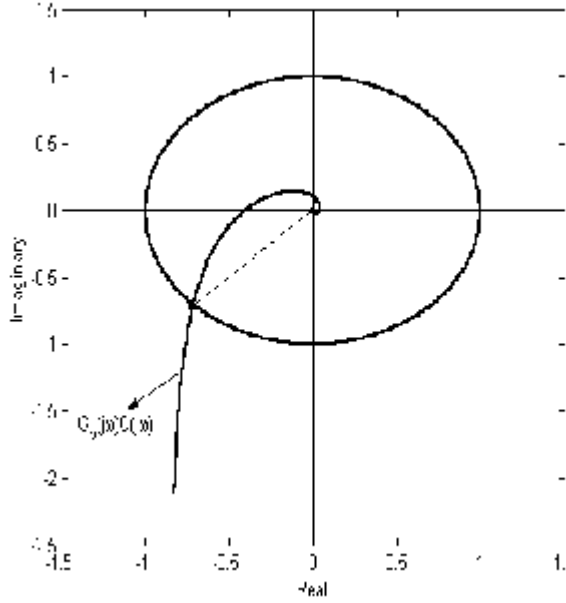
$$k_i = 0.8\omega^2 \cos(\omega) + 0.4\omega(-\omega^2 + 1)\sin(\omega) \quad (31)$$

denklemleri elde edilir. Kararlılık sınır eğrisi $A = 2.5$ ve $\omega \in (0, 1.307)$ için Şekil 5 te verilmiştir. Sistemin

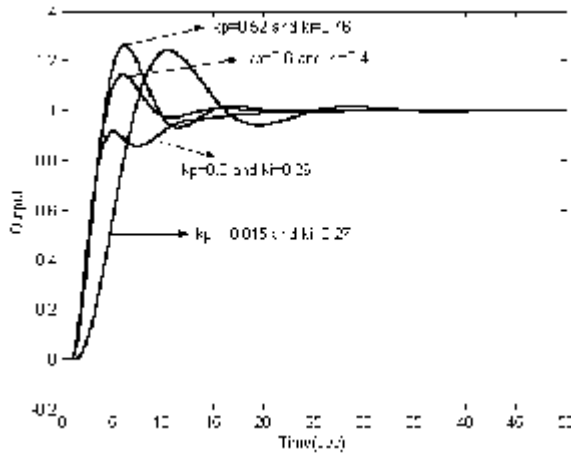
faz payını 45° den büyük ve kazanç payını da 2.5 tan büyük yapan bütün k_p ve k_i değerleri bu iki bölgenin kesişiminden oluşur. Örneğin iki bölgenin kesişim noktalarından birine karşılık gelen $k_p = 0.52$ ve $k_i = 0.46$ değerleri için $G_p(j\omega)C(j\omega)$ 'nin Nyquist diyagramı Şekil 6 de çizilmiştir. Şekil 6 da faz payının 45° ve kazanç payının 2.5 derece olduğu görülmektedir. $A \geq 2.5$ ve $\phi \geq 45^\circ$ bölgesinde seçilen değişik k_p ve k_i değerleri için sistemin step tepkisi Şekil 7 de verilmiştir.



Şekil 5: $\phi \geq 45^\circ$ ve $A \geq 2.5$ için kararlılık bölgesi



Şekil 6: Nyquist diyagramı



Şekil 7: Farklı k_p ve k_i değerler için step tepkiler

5. SONUÇLAR

Bu bildiride bir kontrol sistemini kararlı yapacak bütün PI kontrolörlerin hesaplanması incelendi. Bazı sıkça kullanılan standart formdaki transfer fonksiyonlarını içeren kontrol sistemlerini kararlı yapan PI kontrolörlerin hesaplanmasını kolaylaştıracak Matlab ortamında hazırlanmış programlar geliştirildi. Bu programlar kullanılarak bir kontrol sisteminin performansı ile ilgili olan istenilen faz ve kazanç payını sağlayan bölgeler bulunabilir. Ayrıca kararlı bölgede seçilen kontrolör parametrelerinin performansa etkileri incelenebilir.

İleriye yönelik olarak bu program kolay kullanımlı ve daha geniş kapsamlı hale getirilecektir.

KAYNAKLAR

- [1] Astrom, K. J., Hagglund, T., "The Future of PID Control," *Control Engineering Practice*, Vol. 9, 2001, 1163-1175.
- [2] Zhuang, M., Atherton, D. P., "Automatic Tuning of Optimum PID Controllers," *IEE Proc. Part D*, vol. 140, 1993, 216-224.
- [3] Astrom, K. J., Hagglund, T., *PID Controllers: Theory, Design, and Tuning*, Instrument Society of America, 1995.
- [4] Ho, M. T., A. Data, A., Bhattacharyya, S. P., "A Linear Programming Characterization of All Atilizing PID Controllers," *Proc. of Amer. Contr. Conf.*, 1997.
- [5] Söylemez, M. T., Munro, N., Baki, H., "Fast Calculation of Stabilizing PID Controllers," *Automatica*, vol. 39, 2003, 121-126.
- [6] Tan, N., "Computation of Stabilization Lag/Lead Controller Parameters", *Computers and Electrical Engineering*, Vol. 29, 2003, 835-849.
- [7] Tan, N., "Computation of Stabilizing PI and PID Controllers for Processes with Time Delay", *ISA Trans.*, Vol. 44, 2005, 213-223.
- [8] Tan, N., Kaya, I., Yeroglu, C., Atherton, D. P., "Computation of Stabilizing PI and PID Controllers Using the Stability Boundary Locus", *Energy Conversion and Management*, Vol. 47, 2006, 3045-3058.
- [9] Hamamcı, S. E., Tan, N., "Design of PI Controllers for Achieving Time and Frequency Domain Specifications Simultaneously", *ISA Trans.*, Vol. 45, 2006, 529-543.
- [10] Tan, N., Atherton, D. P., "Design of Stabilizing PI and PID Controllers", *International Journal of Systems Science*, Vol. 37, 2006, 543-554.
- [11] Ackermann, J., Kaesbauer, D., "Design of Robust PID Controllers," *European Control Conference*, pp. 522-527, 2001.
- [12] Shafiei, Z., Shenton, A. T., "Frequency Domain Design of PID Controllers for Stable and Unstable Systems with Time Delay," *Automatica*, vol. 33, 1997, 2223-2232.
- [13] Huang, Y. J., Wang, Y. J., "Robust PID Tuning Strategy for Uncertain Plants Based on the Kharitonov Theorem," *ISA Transactions*, vol. 39, 2000, 419-431.

Abdullah YENİGÜN: 1982 Mardin doğumludur. İnönü üniversitesi, Mühendislik fakültesi, Elektrik Elektronik Mühendisliği Bölümünden 2004 yılında mezun oldu ve 2004 yılında yüksek lisans eğitimine başladı. Şu anda yüksek lisans tez aşamasında çalışmalarını sürdürmektedir. Kontrol sistemleri ve uygulanmaları ile ilgilenmektedir.

Nusret TAN: 1971 yılında Malatya Doğanşehir doğumludur. 1994 yılında Hacettepe Üniversitesi, Elektrik-Elektronik Mühendisliği Bölümü'nden mezun oldu. 1995 yılında İnönü Üniversitesi, Mühendislik Fakültesi, Elektrik-Elektronik Mühendisliği Bölümü'nde araştırma görevlisi olarak göreve başladı. Aynı yıl doktora eğitimi için İngiltere de Sussex Üniversitesine gitti. Doktora eğitimini 2000 yılında tamamlayarak tekrar İnönü Üniversitesine döndü. 2004 yılında doçentlik ünvanını aldı. Genel olarak kontrol sistemlerinin analizi ve tasarımıyla ilgilenmektedir.

KAYNAKLAR

- [1] <http://www.bilimonline.8k.com/kontrol/kontrol.htm>.
- [2] M. N. Özdaş, A. Kuzucu ve A. T. Dinibütün, *Otomatik Kontrol Temelleri*, Birsen Yayınevi, 1988.
- [3] <http://uzak.mersin.edu.tr/UZAK/TP/EndElo/EIn-235/ss-5.pdf>.
- [4] http://www.kontrol.itu.edu.tr/duyuru/sunum/Kontrol_Muhendisligi_Programi_Tanitim_Genel.ppt#1.
- [5] B. C. Kuo, *Otomatik Kontrol Sistemleri*, Çeviren ve Uyarlayan Prof. Dr. Atilla Bir, Literatür Yayıncılık, 2005.
- [6] M.P Groover, M.M Weiss, R.N Nagel ve N.G Odrey, *Industrial Robotics Technology, Programming and Applications*, McGraw Hill, 1986.
- [7] İ. Yüksel, *Otomatik Kontrol Sistem Dinamiği ve Denetim Sistemleri*, Uludağ Üniversitesi, Bursa, Üçüncü Baskı, 1997.
- [8] http://www.gençbilim.com_elektroteknik/.
- [9] İ. Yüksel, *MATLAB ile Mühendislik Sistemlerinin Analizi ve Çözüm*, Uludağ Üniversitesi, Bursa, 1996.
- [10] http://www.gençbilim.com_genelkultur/.
- [11] V. L. Kharitonov, “Asymptotic Stability of an Equilibrium Position of A Family of Systems of Linear Differential Equations”, *Differential Equations*, Vol. 14, pp. 1483-1485, 1979.
- [12] H. Chapellat and S. P. Bhattacharyya, “A Generalization of Kharitonov’s Theorem: Robust Stability of Interval Plants”, *IEEE Trans. On Automat. Contr.*, Vol. 34, pp. 306-311, 1989.
- [13] N. Tan ve D. P. Atherton, “Stability and Performance Analysis in an Uncertain World”, *Computing and Control Engineering Journal*, Vol. 11, pp. 91-101, 2000.
- [14] B. R. Barmish, *New Tools for Robustness of Linear Systems*, MacMillan, NY, 1994.
- [15] L. A. Zadeh and C. A. Desoer, *Linear System Theory-A State Space Approach*, McGraw Hill, New York, 1963.
- [16] B. D. O. Anderson, E. I. Jury and M. Mansour, “On Robust Hurwitz Polynomials”, *IEEE Trans. On Automat. Control*, Vol. 32, pp. 909-913, 1986.
- [17] S. P. Bhattacharyya, H. Chapellat and L. H. Keel, *Robust Control: The Parametric Approach*, Prentice Hall, 1995.

- [18] N. Tan ve Y. Karataş, Dijital Kontrol Sistemlerinde Dayanıklı Kararlılık Analizi, 4 üncü Otomasyon Sempozyumu, Samsun, 2007.
- [19] A. C. Bartlett, C. V. Hollot and H. Lin, “Root Location of an Entire Polytope of Polynomials: It Suffices to Check the Edges”, *Mathematics of Controls, Signals and Systems*, Vol. 1, 61-71, 1988.
- [20] K. J. Aström, T. Hagglund, *PID Controllers, Theory, Design and Tuning*, Research Triangle Park, N.C. Instrument Society of America, 1995.
- [21] K. H. Ang, G. Chong, Y. Li, “PID Control System Analysis, Design and Technology”, *IEEE Transaction Control System Technology*, Vol. 13, No.4, July, 2005.
- [22] A. F. Boz, “Computational Approaches To And Comparisons Of Design Methods For Linear Controllers ”, PhD Thesis, University Of Sussex At Brighton, UK, January, 1999.
- [23] G. C. Goodwin, S. F. Graebe, M. E. Salgado, *Control System Design*, Prentice Hall, 2001.
- [24] N. K. Sinha, *Controls system*, John Willey and Sons, Second Edition, 1990.
- [25] K. Ogata, *Modern Control Engineering*, Prentice Hall, Fourth Edition, 2001.
- [26] N. Tan, “Computation of Stablizing Lag/Lead Controller Parmetres”, *Computers and Electrical Engineering*, pp.835-849, 2003.
- [27] R. H. Bishop, *Modern Control System Analysis and Design Using MATLAB and SIMULINK*, Addison Wesley Publishing Company, 1997.
- [28] D. P. Atherton, A.F.Boz, “Auto tuning of Phase Lead Controllers”, School of Engineering, University of Sussex, Brighton, UK.
- [29] Q-G. Wang, Z. Ye and C. C. Hang, “Tuning of Phase Lead Compenstators for Exact Gain and Phase Margins”, *Automatica*, 2005.
- [30] C.V. Hollot and F. Yang, “Robust Stablization of İnterval Plants Using Lead or Lag Compensators”, 28th Conference on Desicion and Control, Florida, December, 1989.
- [31] G. Beale, “Phase Lag Compensator Design Using Bode Plots”, Electrical and Computer Engineering Department, George Mason University, Fairfax, Virginia.
- [32] M. C. M Teixeira and E. Assunçao, “On Lag Controllers: Design and Implementation”, *IEEE Transaction on Education*, Vol. 45, No.3, August 2002.
- [33] A. P. Loh, X. Cai and W. W. Tan, “Auto Tuning of Phase Lead/ Lag Compensators”, *Automatica* , Vol. 40, pp 423-429, 2004.
- [34] K. S. Yeung, K. W. Wong and K-L Chen, “A Non-Trial-and-Error Method for Lag Lead Compensator Design”, *IEEE Transactions on Education*, Vol. 41, No. 1, February, pp.76-80, 1998.

- [35] J. Yang, C. F. Che, C. S. Chen and Y. Xu, “An Approach to Automatic Tuning of Phase- Lead and Phase-Lag Compensators”, *30th Conference on Decision and Control*, Brighton, England, 1991.
- [36] N. Tan, “Robust Analysis And Design of Control System With Parametric Uncertainty”, PhD Thesis, University of Sussex At Brighton, UK, November, 1999.
- [37] J G Ziegler. and N. B Nichols, “Optimum Settings For Automatic Controllers” *Trans ASME*, Vol. 64, pp. 759-768, 1942.
- [38] K. J. Astrom and T. Hagglund, “The Future of PID Control,” *Control Engineering Practice*, Vol. 9, pp. 1163-1175, 2001.
- [39] M. Zhuang and D. P Atherton, “Automatic Tuning of Optimum PID Controllers,” *IEE Proc. Part D*, Vol. 140, pp. 216-224. 1993
- [40] M. T Ho, A. Data and S. P Bhattacharyya, “A Linear Programming Characterization of All Stabilizing PID Controllers,” *Proc. of Amer. Contr. Conf.*, 1997.
- [41] M. T. Söylemez, N. Munro and H. Baki, “Fast Calculation of Stabilizing PID Controllers,” *Automatica*, Vol. 39, 121-126, 2003.
- [42] N. Tan, “Computation Of Stabilizing PI And PID Controllers For Processes With Time Delay”, *ISA Transactions*, Vol.44, pp. 213-223, 2005.
- [43] N. Tan, I Kaya, C. Yeroglu and D. P Atherton, “Computation of Stabilizing PI and PID Controllers Using the Stability Boundary Locus”, *Energy Conversion and Management.*, Vol. 47, pp. 3045-3058, 2006.
- [44] S. E. Hamamcı and N. Tan, “Design of PI Controllers for Achieving Time and Frequency Domain Specifications Simultaneously”, *ISA Trans.*, Vol. 45, pp. 529-543, 2006.
- [45] N. Tan and D. P. Atherton, “Design of Stabilizing PI and PID Controllers”, *International Journal of Systems Science*, Vol. 37, pp.543-554, 2006.
- [46] J. Ackermann and D. Kaesbauer, “Design of Robust PID Controllers,” *European Control Conference*, pp. 522-527, 2001.
- [47] Z. Shafiei and A. T. Shenton, “Frequency Domain Design of PID Controllers for Stable and Unstable Systems with Time Delay,” *Automatica*, Vol. 33, pp. 2223-2232, 1997.
- [48] Y. J. Huang and Y. J. Wang, “Robust PID Tuning Strategy for Uncertain Plants Based on the Kharitonov Theorem,” *ISA Transactions*, Vol. 39, pp. 419-431, 2000.