T.C.
İNÖNÜ ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

4-BOYUTLU MİNKOWSKİ UZAYINDA NULL EĞRİLER VE NULL YÜZEYLERİN GEOMETRİSİ ÜZERİNE

Ali İhsan BORAN

DOKTORA TEZİ
MATEMATİK ANABİLİM DALI

MALATYA
Haziran 2008

Tezin Başlığı : 4-Boyutlu Minkowski Uzayında Null Eğriler Ve Null Yüzeylerin Geometrisi Üzerine

Tezi Hazırlayan : Ali İhsan BORAN

Sınav Tarihi : 20.06.2008

Yukarıda adı geçen tez jürimizce değerlendirilerek Matematik Anabilim Dalı'nda Doktora Tezi olarak kabul edilmiştir.

Sınav Jüri Üyeleri (İlk isim jüri başkanı, ikinci isim tez danışmanı)

Prof.Dr. Mahmut ERGÜT ....

Doç.Dr. Recep ASLANER ....

Prof.Dr. Rıfat GÜNEŞ ....

Yrd.Doç.Dr. Erol KILIÇ ....

Yrd.Doç.Dr. Sibel ÖZER ....

Prof.Dr. Sadık KELEŞ
Tez İkinci Danışmanı

Doç.Dr. Recep ASLANER
Tez Danışmanı

İnönü Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Onayı

Prof.Dr. Ali ŞAHİN
Enstitü Müdürü

ONUR SÖZÜ

Doktora Tezi olarak sunduğum *"4-Boyutlu Minkowski Uzayında Null Eğriler Ve Null Yüzeylerin Geometrisi Üzerine"* başlıklı bu çalışmanın bilimsel ahlak ve geleneklere aykırı düşecek bir yardıma başvurmaksızın tarafımdan yazıldığını ve yararlandığım bütün kaynakların, hem metin içinde hem de kaynakçada yöntemine uygun biçimde gösterilenlerden oluştuğunu belirtir, bunu onurumla doğrularım.

Ali İhsan BORAN

Babama ve tüm sevdiklerine ...

ÖZET

Doktora Tezi

4-BOYUTLU MİNKOWSKİ UZAYINDA NULL EĞRİLER VE NULL YÜZEYLERİN GEOMETRİSİ ÜZERİNE

Ali İhsan BORAN

İnönü Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Anabilim Dalı

55+v sayfa

2008

Danışman: Doç.Dr. Recep ASLANER

Tez üç bölümden meydana gelmektedir.

Çalışmanın ilk bölümünde yarı-Öklid uzay, yarı-Riemann manifoldlar, null eğriler ve null yüzeylerle ilgili temel tanım ve teoremler verildi.

Çalışmanın orijinal kısmını ikinci ve üçüncü bölümler oluşturmaktadır.

İkinci bölümde, Minkowski Spacetime'da null helis ve null rektifyen eğriler çalışıldı. İlk kısımda null helis eğrilerinin harmonik eğrilikleri ile eğrilik fonksiyonları arasındaki bağıntı ve eğilim ekseninin harmonik eğrilikler cinsinden ifadesi elde edildi. İkinci kısmında, null rektifyen eğriler eğrilik fonksiyonlarına göre karakterize edildi.

Üçüncü bölümde, Minkowski Spacetime'da light koni üzerinde yatan dejenere olmayan bir yüzeyin, bu yüzey boyunca Minkowski Spacetime'da lightlike çatı alanı kullanılarak karakteristik özellikleri incelendi. Ayrıca bu yüzeyin Gauss ve ortalama eğrilikleri arasında bir bağıntı elde edilerek, bu bağıntıdan bazı teorem ve sonuçlara ulaşıldı.

ANAHTAR KELİMELER: Minkowski Spacetime, Distinguished Parametre, Null Helis, Null Rektifyen Eğri, Light Koni.

ABSTRACT

Ph.D. Thesis

ON GEOMETRY OF NULL CURVES AND NULL SURFACES
IN MINKOWSKI SPACETIME

Ali İhsan BORAN

İnönü University
Graduate School of Natural and Applied Sciences
Department of Mathematics

55+v pages

2008

Supervisor: Assoc.Prof.Dr. Recep ASLANER

This thesis consists of three chapters.

In the first chapter, some fundamental definitions and theorems related to semi-Euclidean space, semi-Riemannian manifolds, null curves and null surfaces have been given.

The second and the third chapters are the original parts of the thesis.

In the second chapter, null helix and null rectifying curves are studied on the Minkowski Spacetime. In the first part, the relation between the curvature functions and harmonic curvature of null helix and the inclination axes of the curve with respect to harmonic curvatures is examined. In the second part, we characterize null rectifying curves in terms of their curvature functions.

In the third chapter, making use of lightlike basis on Minkowski Spacetime along the surface, the characteristic properties of non-degenerate surface lying on the light cone in Minkowski Spacetime are invesgated. Also, the relation between Gaussian curvature and mean curvature of this surface is found out and some results are obtained.

KEYWORDS: Minkowski Spacetime, Distinguished Parameter, Null Helix, Null Rectifying Curve, Light Cone.

TEŞEKKÜR

Çalışma boyunca karşılaştığım problemleri tartışmak için bana değerli zamanlarını ayırıp yardımcı olan, çalışmanın her aşamasında öneri ve desteklerini esirgemeden beni yönlendiren tez danışman hocalarım Doç.Dr.Recep ASLANER ve Prof.Dr.Sadık KELEŞ'e; ayrıca Yrd.Doç.Dr.Erol KILIÇ ve Prof.Dr.Rıfat GÜNEŞ'e, bu çalışmanın yazılımında bana yardımcı olan Doç.Dr.Bilal ALTAY'a ve tüm hayatım boyunca olduğu gibi doktora çalışmalarım süresince de yardım ve desteklerini esirgemeyen aileme sonsuz teşekkürlerimi ve şükranlarımı sunarım.

İÇİNDEKİLER

SİMGELER DİZİNİ

V	Reel vektör uzayı
g	Simetrik bilineer form
M	Yarı-Riemann manifold
q	Yarı-Riemann manifoldun indeksi
$\mathbb{R}^n_q$	n-boyutlu, q-indeksli yarı-Riemann manifold
$\mathbb{R}^n_1$	n-boyutlu Lorentz uzay
$\mathbb{R}^4_1$	Minkowski Spacetime
D	Levi-Civita konneksiyonu
Γ^k_{ij}	Christoffel semboller
C	$\mathbb{R}^4_1$ de diferensiyellenebilir null eğri
t	Distinguished parametre
$\{T, N, W_1, W_2\}$	Distinguished Frenet çatı
γ	$\mathbb{R}^4_1$'de null helis eğrisi
$\{T, N, B_1, B_2\}$	Hareketli Frenet çatı
α	$\mathbb{R}^4_1$'de null rektifyen eğri
k_i	i-yinci eğrilik fonksiyonu
H_i	i-yinci Harmonik eğrilik fonksiyonu
Q^3	Light koni
$x(u, v)$	Light koni üzerinde bir yüzey
Δ	Laplace operatörü
H	x yüzeyinin ortalama eğriliği
K	x yüzeyinin Gauss eğriliği
$y(u, v)$	x yüzeyinden türetilen yüzey
$\tilde{x}(u, v)$	x yüzeyinin konformal denk yüzeyi

GİRİŞ

Riemann manifoldlar üzerinde eğriler teorisi uzun süre önce çalışıldı ve elde edilen sonuçlar yarı-Riemann manifoldlar üzerindeki eğrilere aktarılırken bazı yeni durumlarla karşılaşıldı. Eğrinin spacelike veya timelike olması durumunda Frenet çatıları ve eğrilikleri kolayca elde edilirken, null eğri olması durumunda eğri yay parametresi cinsinden ifade edilemediğinden bazı zorluklarla karşılaşılmıştır. Bu problemi 1969 yılında Bonnor [1]'deki çalışmasında eğrinin ivme vektörünü birim hızlı yapan pseudo-yay parametresi kavramını ve buna bağlı olarak oluşturulan Cartan çatısını kullanarak Minkowski Spacetime'da null eğrilerin geometrisini ele almıştır. Daha sonra A. Bejancu 1994'de Lorentz manifoldlarda ve daha genel olarak yarı-Riemann manifoldlardaki null eğrilerin genel çalışması için *"Lightlike Curves in Lorentz Manifolds"* isimli çalışması ile bir metod geliştirmiştir. 2001'de A. Ferrandez vd. Cartan çatıyı *"Null helices in Lorentzian space forms"* isimli çalışma ile Lorentz uzay formlarına genelleştirerek, temel varlık ve teklik teoremlerini ispatladılar.

Öklid uzayda rektifyen eğriler Chen tarafından [2]'de incelendi. İlarslan vd. [3]'de 3-boyutlu Minkowski uzaydaki rektifyen eğrileri, [4]'de de 4-boyutlu Öklid uzayda rektifyen eğrileri incelemişlerdir.

Çalışmanın orijinal kısmını ikinci ve üçüncü bölümler oluşturmaktadır.

İkinci bölümün ilk kısmında A. Bejancu ve K.L. Duggal'ın [5]'de verdikleri Frenet denklemleri, t distinguished parametre ve distinguished Frenet çatı kullanılarak Minkowski Spacetime'daki null helisler çalışıldı. İkinci bölümün ikinci kısmında özel olarak pseudo-yay parametresi seçilerek elde edilen Frenet çatı (Cartan çatı) kullanılarak Minkowski Spacetime'daki null rektifyen eğriler çalışıldı.

Üçüncü bölümde Minkowski Spacetime'da Q^3 light koni üzerinde yatan dejenere olmayan yüzeyler için Lui tarafından [6]'da elde edilen sonuçlar, lightlike çatı alanı kullanarak incelendi. Ele alınan yüzeyin Gauss ve ortalama eğrilikleri arasındaki ilişkiyi veren bir eşitlik elde edilerek, bu eşitlikten bazı teorem ve sonuçlara ulaşıldı.

BÖLÜM 1

TEMEL KAVRAMLAR

Temel kavramlara ayrılan bu bölüm dört kısım olarak düzenlenmiştir. Birinci kısım yarı-Öklid uzay, ikinci kısım yarı-Riemann manifoldlar, üçüncü kısım null eğriler ve dördüncü kısım null yüzeylerle ilgili temel tanım ve teoremleri içermektedir. Bu konuda daha geniş bilgi için [5,7-10] numaralı kaynaklara bakılabilir.

1.1 Yarı-Öklid Uzaylar

Tanım 1.1.1 (Simetrik Bilineer Form). *V bir reel vektör uzayı olsun.*

$$g : V \times V \to \mathbb{R}$$

dönüşümü $\forall\ a, b \in \mathbb{R}$ ve $\forall\ u, v, w \in V$ için

i) $g(u, v) = g(v, u)$,

ii) $g(au + bv, w) = ag(u, w) + bg(v, w)$

$g(u, av + bw) = ag(u, v) + bg(u, w)$

özelliklerine sahip ise g dönüşümüne V reel vektör uzayı üzerinde simetrik bilineer form denir [5, 7, 8].

Tanım 1.1.2. *V reel vektör uzayı üzerinde bir simetrik bilineer form g olsun.*

i) $\forall\ v \in V$ ve $v \neq 0$ için $g(v, v) > 0$ ise g'ye pozitif tanımlı,

ii) $\forall\ v \in V$ ve $v \neq 0$ için $g(v, v) < 0$ ise g'ye negatif tanımlı,

iii) $g(v, v) > 0$ ve $g(w, w) < 0$ olacak şekilde $v, w \in V$ mevcut ise g'ye indefinit denir [8].

Tanım 1.1.3. *V reel vektör uzayı üzerinde bir simetrik bilineer form g olsun. $0 \neq \xi \in V$ olmak üzere $\forall v \in V$ için*

$$g(\xi, v) = 0$$

ise g'ye V üzerinde dejeneredir denir. Aksi durumda g'ye non-dejeneredir denir.

Bu tanıma göre, g'nin non-dejenere olması için gerek ve yeter şart $\forall\ v \in V$ *için*

$$g(u, v) = 0 \text{ iken } u = 0$$

olmasıdır [5].

Tanım 1.1.4. *V reel vektör uzayı üzerinde bir simetrik bilineer form g olsun. V'nin*

$$RadV = \{\xi \in V : g(\xi, v) = 0,\ \forall\ v \in V\}$$

şeklinde tanımlı alt uzayına, g'ye göre V uzayının radikal (veya null) uzayı denir. RadV'nin boyutuna g'nin nulluk derecesi denir ve null V ile gösterilir.

Eğer null $V > 0$ *ise g dejeneredir, eğer null* $V = 0$ *ise g non-dejeneredir [5].*

Tanım 1.1.5 (İndeks). *V reel vektör uzayı üzerinde bir simetrik bilineer form g olsun. Bu durumda,*

$$g\mid_W : W \times W \to \mathbb{R}$$

negatif tanımlı olacak şekilde en büyük boyutlu W alt uzayının boyutuna g'nin indeksi denir ve q ile gösterilir [7] .

Teorem 1.1.1. *V reel vektör uzayı üzerinde bir simetrik bilineer form g olsun. Bu durumda,*

i) $g(\alpha_i, \alpha_j) = 0, \quad i \neq j$

ii) $g(\alpha_i, \alpha_i) = 1, \quad 1 \leq i \leq \gamma$

iii) $g(\alpha_i, \alpha_i) = -1, \quad \gamma + 1 \leq i \leq \gamma + q$

iv) $g(\alpha_i, \alpha_i) = 0, \quad \gamma + q + 1 \leq i \leq \gamma + q + \mu = n$

olacak şekilde V'nin bir $\{\alpha_1, ..., \alpha_n\}$ *bazı vardır [5].*

Tanım 1.1.6. *Bir V reel vektör uzayı üzerinde non-dejenere simetrik bilineer g formuna, V reel vektör uzayı üzerinde bir skalar çarpım (yarı Öklid metriği) ve* (V, g) *ikilisine de skalar çarpım uzayı (yarı-Öklid uzayı) denir [5, 7].*

Tanım 1.1.7. *V yarı-Öklid uzayı üzerinde tanımlı bir g skalar çarpımı için,*

i) g pozitif tanımlı ise g'ye Öklid metriği, (V, g)*'ye de Öklid uzayı,*

ii) g'nin indeksi $q = 1$ *ise g'ye Lorentz (Minkowski) metriği,* (V, g)*'ye de Lorentz (Minkowski) uzayı,* *iii) g dejenere ise V vektör uzayına g'ye göre lightlike (dejenere) vektör uzayı denir [5].*

Tanım 1.1.8. *V yarı-Öklid uzayı üzerinde tanımlı bir g skalar çarpımı için,*

i) $g(v,v) > 0$ veya $v = 0$ ise v'ye spacelike,

ii) $v \neq 0$ iken $g(v,v) < 0$ ise v'ye timelike,

iii) $v \neq 0$ iken $g(v,v) = 0$ ise v'ye de lightlike (null veya isotropik) vektör denir. $v \in V$ vektörünün bu üç tipine v'nin causal karakteri denir [8].

V yarı-Öklid uzayı üzerinde bir g skalar çarpımı için; $\|v\| = |g(v,v)|^{\frac{1}{2}}$ sayısına v vektörünün *uzunluğu (boyu)* denir. Uzunluğu bir birim olan (yani $g(v,v) = \pm 1$) vektöre, *birim vektör* denir. $v, w \in V$ için $g(v,w) = 0$ ise bu iki vektör *ortogonaldir* denir. $\vec{0}$ vektörü tüm vektörlere ortogonaldir. Eğer g indefinit ise herhangi bir null vektör kendisine ortogonaldir. V'deki lineer bağımsız vektörlerin sayısına V'nin boyutu adı verilir. Bu vektörlerin kümesi V için bir baz oluşturur. Sonlu boyutlu her vektör uzayı için bir baz mevcuttur ve bu baz ortonormal hale getirilebilir [7, 8].

Tanım 1.1.9. *V bir reel vektör uzayı ve $W \subset V$ de bir alt uzay olsun. Bu durumda; $g\,|_W$, dejenere ise W'ye lightlike(dejenere) alt uzay denir.*

Genel olarak W'nin dik'i

$$W^{\perp} = \{v \in V \mid g(v,w) = 0, \ \forall w \in W\}$$

olmak üzere,

$$W \cap W^{\perp} \neq \{0\}$$

dır [5].

Tanım 1.1.10. *V yarı-Öklid uzayının;*

$$\begin{aligned} &g(f_i, f_j) = g(f_i^*, f_j^*) = 0, \quad g(f_i, f_j^*) = \delta_{ij}, \qquad i, j \in \{1, ..., \mu\} \\ &g(u_\alpha, f_j) = g(u_\alpha, f_i^*) = 0, \quad g(u_\alpha, u_\beta) = \epsilon\, \delta_{\alpha\beta}, \quad \alpha, \beta \in \{1, ..., t\}, \epsilon = \pm 1 \end{aligned}$$

olacak şekildeki

$$\left\{f_1, ..., f_\mu, f_1^*, ..., f_\mu^*, u_1, ..., u_t\right\}$$

bazına V'nin quasi-ortonormal bazı denir [5].

Teorem 1.1.2. *V bir yarı-Öklid uzay ve W da bu uzayın bir lightlike altuzayı olsun. Bu durumda, W boyunca V uzayının bir quasi-ortonormal bazı vardır [5].*

Tanım 1.1.11. *q indeksli ve $m = p + q$ boyutlu V yarı-Öklid uzayının $\{e_1, ..., e_q\}$ birim timelike ve $\{e_{q+1}, ..., e_{q+p}\}$ birim spacelike vektörlerinden oluşan $\{e_1, e_2, ..., e_m\}$ bir ortonormal bazı ile;*

$$q < p \Rightarrow \ i \in \{1, ..., q\} \ \text{ ve } p < q \Rightarrow \ i \in \{1, ..., p\}$$

için

$$g(f_i,\ f_j) = g(\ f_i^*,\ f_j^*) = 0, \quad g(f_i, f_j^*) = \delta_{ij}$$

yi sağlacak şekilde oluşturulan

$$f_i = \frac{1}{\sqrt{2}}\{e_{q+i} + e_i\}\,; \quad f_i^* = \frac{1}{\sqrt{2}}\{e_{q+i} - e_i\}$$

vektörleri yardımıyla lightlike vektörleri kapsayan V yarı-Öklid uzayının aşağıdaki bazları mevcuttur.

i) $q < p$ ise $2q$ tane lightlike vektör ve $(p - q)$ tane spacelike vektörden oluşan

$$\left\{f_1, ..., f_q, f_1^*, ..., f_q^*, e_{q+1}, ..., e_p\right\}$$

kümesi,

ii) $p < q$ ise $2p$ tane lightlike vektör ve $(q - p)$ tane timelike vektörden oluşan

$$\left\{f_1, ..., f_p, f_1^*, ..., f_p^*, e_{p+1}, ..., e_q\right\}$$

kümesi,

iii) $p = q$ ise $2p = 2q$ adet lightlike vektörden oluşan

$$\left\{f_1, ..., f_q, f_1^*, ..., f_q^*\right\}$$

kümesi V'nin bir bazıdır [5] .

Tanım 1.1.12 (Yarı-Öklid uzay). *$\mathbb{R}^n$, $\mathbb{R}$ üzerinde $n-$boyutlu standart vektör uzayı olsun. $\mathbb{R}^n$ üzerinde $0 \leq q \leq n$ olmak üzere, q tamsayısı için*

$$g(x, y) = -\sum_{i=1}^{q} x_i y_i + \sum_{i=q+1}^{n} x_i y_i, \quad \forall x, y \in \mathbb{R}^n$$

ile verilen metrik tensör göz önüne alınarak elde edilen uzaya q indeksli n-boyutlu yarı-Öklid uzay denir ve $\mathbb{R}_q^n$ ile gösterilir [7].

Tanım 1.1.13. $\mathbb{R}_q^n$ *uzayının* g *yarı-Riemann metriğinin* $M \subset \mathbb{R}_q^n$ *altmanifoldu üzerine indirgenen* $\tilde{g}$ *yarı-Riemann metriği;*

i) bir Riemann metrik ise M*'ye spacelike altmanifold,*

ii) bir dejenere quadratik form ise M*'ye dejenere altmanifold*

denir [7].

Tanım 1.1.14. $c \in \mathbb{R}_q^n$ *sabit bir nokta ve* $r > 0$ *sabiti için;*

$$S_q^n(c, r) = \left\{ x \in \mathbb{R}_q^{n+1} : g(x - c, x - c) = r^2 \right\}$$

kümesine yarı-Riemann küre,

$$H_q^n(c, r) = \left\{ x \in \mathbb{R}_{q+1}^{n+1} : g(x - c, x - c) = -r^2 \right\}$$

kümesine yarı-Riemann hiperbolik uzay,

$$Q_q^n(c, r) = \left\{ x \in \mathbb{R}_q^{n+1} : g(x - c, x - c) = 0 \right\}$$

kümesine de yarı-Riemann lightlike koni (veya null koni) denir [6].

$\mathbb{R}_q^n$ uzayına $(q, n - q)$ işaretli flat yarı-Riemann Manifold, $S_q^n(c, r)$ ve $H_q^n(c, r)$ alt uzaylarına da c merkezli, r yarıçaplı yarı-Riemann uzay formları denir. $c = O$ ve $q = 1$ için elde edilen $Q_1^n(O)$ yarı-Riemann lightlike konisi Q^n ile gösterilir ve lightlike koni veya kısaca light koni olarak isimlendirilir [6].

$\mathbb{R}_1^{n+2}$ de;

$$\begin{aligned} g(e_{n+1}, e_{n+1}) = g(e_{n+2}, e_{n+2}) = 0, \qquad & g(e_{n+1}, e_{n+2}) = 1, \\ g(e_{n+1}, e_i) = g(e_{n+2}, e_i) = 0, \qquad & g(e_i, e_j) = \delta_{ij},\ i, j = 1, ..., n \end{aligned}$$

eşitliklerini sağlayan $\{e_1, ..., e_n, e_{n+1}, e_{n+2}\}$ çatı alanı bir asimtotik ortonormal çatı alanıdır. Bu çatı Tanım 1.1.10'a göre $\mathbb{R}_1^{n+2}$ 'de bir quasi ortonormal bazdır.

Tanım 1.1.15. *n-boyutlu* $\mathbb{R}_q^n$ *yarı-Öklid uzayına;*

i) $q = 0$ *ise Öklid uzay denir ve* $\mathbb{R}^n$ *ile,*

ii) $q = 1$, $n \geq 2$ *ise Minkowski n-uzay denir ve* $\mathbb{R}_1^n$ *ile,*

iii) $q = 1$, $n = 4$ *ise Minkowski Spacetime denir ve* $\mathbb{R}_1^4$ *ile*

gösterilir [7].

Biz bu çalışmada Minkowski Spacetime'da null eğriler ve light koni üzerindeki dejenere olmayan yüzeyleri çalışacağız.

Tanım 1.1.12'den Minkowski Spacetime için g indefinit metriği

$$g(x, y) = -x_1y_1 + x_2y_2 + x_3y_3 + x_4y_4; \qquad \forall x, y \in \mathbb{R}^4$$

şeklindedir.

Lemma 1.1.1. *$\mathbb{R}^4_1$'de timelike vektöre ortogonal olan causal vektörler yoktur ve iki null vektörün ortogonal olması için gerek ve yeter şart bu vektörlerin lineer bağımlı olmasıdır [9].*

Tanım 1.1.16. *$i = \sqrt{-1}$ ve $x, y \in \mathbb{R}^4_1$ için $x + iy$ vektörlerinin kompleks vektör uzayına $\mathbb{R}^4_1$'in kompleksleştirilmiş vektör uzayı denir ve bu uzay $(\mathbb{R}^4_1)^c$ ile gösterilir. $\mathbb{R}^4_1$'in g skalar çarpımı ile tanımlanan $(\mathbb{R}^4_1)^c$ üzerindeki g^cskalar çarpımı; simetrik, non-dejenere, $\mathbb{C}$ bilineer dönüşümdür. $\mathbb{R}^4_1$'in ikisi null, ikisi spacelike vektörlerden oluşan $B = \{f, f^*, k, l\}$ quasi-ortonormal bazı, $(\mathbb{R}^4_1)^c$'de g^c'ye göre ikisi reel null vektör, ikisi eşlenik kompleks null vektörden oluşan*

$$\left\{f, -f^*, m = \frac{1}{\sqrt{2}}(k + il), \bar{m} = \frac{1}{\sqrt{2}}(k - il)\right\}$$

çatısını oluşturur ki bu çatıya null tetrad denir. Burada;

$$g(f, -f^*) = -1, \qquad g(m, \bar{m}) = 1$$

dir [5].

1.2 Yarı-Riemann Manifoldlar

Tanım 1.2.1. *Bir C^∞ n-manifold M üzerinde tanımlı bir g metriği verilmiş olsun. Buna göre;*

(i) $\forall p \in M$ için g_p pozitif tanımlı ise g'ye pozitif tanımlı,

(ii) $\forall p \in M$ için g_p negatif tanımlı ise g'ye negatif tanımlı,

(iii) $\forall p \in M$ için g_p indefinit ise g'ye indefinit

metrik denir [8].

Tanım 1.2.2. *Bir C^∞ n-manifold M üzerinde tanımlı bir g metriği verilmiş olsun. Buna göre;*

(i) g pozitif tanımlı ise g'ye Riemann metrik,

(ii) $\forall p \in M$ noktasındaki M_p tanjat uzayının her ortonormal bazı bir timelike vektör içeriyorsa g metriğine Lorentz metrik denir [8].

Tanım 1.2.3. *M bir C^∞ n-manifold olsun. Buna göre, M üzerinde*

(i) bir g Riemann metriği tanımlı ise M'ye Riemann manifold,

(ii) bir g Lorentz metriği tanımlı ise M'ye Lorentz manifold

denir ve (M, g) ile gösterilir [8].

Tanım 1.2.4. *Bir M manifoldu üzerinde g ve $\hat{g}$ iki metrik olsun. M üzerinde bir C^∞, $\lambda > 0$ fonksiyonu için $g = \lambda\hat{g}$ ise bu iki metriğe konformal olarak denktir denir [8].*

Tanım 1.2.5 (Metrik Tensör). *M bir C^∞ manifold olsun. $p \in M$ noktasındaki tanjant uzay T_pM olmak üzere,*

$$\begin{array}{llll} g\,|_p : & T_pM \times T_pM & \rightarrow & \mathbb{R} \\ & (X_p, Y_p) & \rightarrow & g\,|_p\,(X_p, Y_p) \quad = g(X_p, Y_p) \end{array}$$

biçiminde tanımlı sabit indeksli, simetrik, bilineer, non-dejenere $(0,2)$ tensör alanına M üzerinde bir metrik tensör denir [7].

Tanım 1.2.6 (Yarı-Riemann Manifold). *M bir C^∞ manifold olsun. M, bir g metrik tensörü ile donatılmış ise, M'ye bir yarı-Riemann manifold denir [7].*

Tanım 1.2.7. *Bir M yarı-Riemann manifoldu üzerinde g metrik tensörünün indeksine yarı-Riemann manifoldun indeksi denir ve $indM$ ile gösterilir. M manifoldunun q indeksi için $0 \leq q \leq boyM$ eşitsizliği vardır [7].*

Böylece aşağıdaki lemmayı ifade edebiliriz.

Lemma 1.2.1. *Bir M yarı-Riemann manifoldu üzerinde g metrik tensörünün q indeksi için,*

i) $q = 0$ ise $\forall p \in M$ için $g\,|_p$, T_pM üzerinde pozitif tanımlı bir iç çarpım olduğundan M bir Riemann manifolddur,

ii) $q = 1$ ve $n \geq 2$ ise M bir Lorentz manifolddur [7].

Tanım 1.2.8. $\{x_1, ..., x_n\}$, $\mathbb{R}_q^n$ *üzerinde bir koordinat sistemi olsun.* ∂_i, $\dfrac{\partial}{x_i}$ *'yi göstermek üzere,* $\mathbb{R}_q^n$ *üzerindeki* $V = \sum V_i \partial i$ *ve* $W = \sum W_i \partial i$ *vektör alanları için*

$$D_V W = \sum V(W_i)\partial_i$$

şeklinde tanımlı vektör alanına W*'nin* V*'ye göre kovaryant türevi denir [7].*

Tanım 1.2.9. M *bir* C^∞ *manifold ve* M *üzerindeki vektör alanlarının kümesi* $\Gamma(TM)$ *olsun.* M *üzerindeki bir* D *konneksiyonu*

i) $D_V W$, V*'ye göre* $C^\infty(M, \mathbb{R})$ *lineerdir,*

ii) $D_V W$, W*'ye göre* $\mathbb{R}$ *lineerdir,*

iii) $D_V(fW) = V(f)W + f\ D_V W, \quad \forall f\ C^\infty(M, \mathbb{R})$

şartlarını sağlayan,

$$D : \Gamma(TM) \times \Gamma(TM) \to \Gamma(TM)$$

bir dönüşümdür [7].

Teorem 1.2.1. *Bir* M *yarı-Riemann manifoldu üzerindeki vektör alanlarının kümesi* $\Gamma(TM)$ *olmak üzere* $\forall\ X, Y, Z \in \Gamma(TM)$ *için*

i) $[X, Y] = D_X Y - D_Y X$

ii) $Xg(Y, Z) = g(D_X Y, Z) + g(Y, D_X Z)$

olacak şekilde M*'nin bir tek* D *konneksiyonu vardır. Bu konneksiyona Levi-Civita konneksiyonu denir ve Levi-Civita konneksiyonu*

$$\begin{aligned} 2g(D_X Y, Z) = \quad & Xg(Y, Z) + Yg(Z, X) - Zg(X, Y) \\ & -g(X, [Y, Z]) + g(Y, [Z, X]) + g(Z, [X, Y]) \end{aligned}$$

Koszul formülü ile karakterize edilir [7].

Tanım 1.2.10. $\{x_1, ..., x_n\}$, *bir* M *yarı-Riemann manifoldunun bir* $U \subset M$ *komşuluğu üzerinde tanımlı koordinat sistemi olsun. Bu koordinat sistemin* Γ_{ij}^k *Christoffel sembolleri* U *üzerinde tanımlı reel değerli fonksiyonlar olup,*

$$D_{\partial_i}(\partial_j) = \sum_k \Gamma_{ij}^k\ \partial_k, \qquad (1 \le i, j \le n)$$

şeklinde tanımlıdır [7].

$U \subset M$ üzerinde tanımlı bir $\{x_1, ..., x_n\}$ koordinat sistemi için Γ_{ij}^k Christoffel sembolleri

$$\Gamma_{ij}^k = \frac{1}{2} \sum_m g^{km} \left\{ \frac{\partial g_{jm}}{\partial x_i} + \frac{\partial g_{im}}{\partial x_j} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial x_m} \right\}$$

eşitliği ile verilir [7].

1.3 Null Eğriler

Tanım 1.3.1. *M bir C^∞ Lorentz manifold olsun. M üzerindeki bir g indefinit metriğe göre $k = 1, 2, ...$ için C^k sınıfından bir $C : I \to M$ eğrisine $\forall\ t \in I$ için $C'(t)$ teğet vektörü,*

(i) spacelike ise spacelike eğri,

(ii) timelike ise timelike eğri,

(iii) null ise null (lightlike veya isotropik) eğri

denir [5, 7, 8].

(M, g), boyutu $n = (m + 2)$ ve $0 < q < n$ olmak üzere indeksi q olan (yani metriği indefinit olan), bir yarı-Riemann manifold olsun. Bir $C : I \subset \mathbb{R} \to M$ null eğrisi için C'nin tanjant demeti TC ile gösterilir ve non-dejenere durumda olduğu gibi $TC^\perp$ vektör demeti

$$TC^\perp = \bigcup_{P \in C} T_P C^\perp \ ; \quad T_P C^\perp = \{\xi_P \in T_P M \ \mid \ g(\xi_P, V_P) = 0, \ \ \forall\ V_P \in T_P C\}$$

olarak tanımlanır. Buna göre $TC^\perp$'in rankı $(m+1)$'dir. V_P bir null vektör olduğundan, TC'nin $TC^\perp$'inin rankı 1 olan bir alt vektör demeti olduğu görülür. Bu durumda $TC^\perp$'de TC'nin

$$TC^\perp = TC \perp S(TC^\perp)$$

biçiminde bir ortogonal tümleyeni vardır. Burada $S(TC^\perp)$ alt uzayı, C'nin ekran vektör demeti (screen vektor bundle) olarak bilinir ve rankı m olan bir non-dejenere alt uzaydır. Böylece,

$$TM \mid_C = S(TC^\perp) \perp S(TC^\perp)^\perp$$

olarak yazılabilir [5].

Teorem 1.3.1. *C, bir (M, g) yarı-Riemann manifoldu üzerinde bir null eğri olsun. Bu durumda C üzerinde, $\forall\ U \subset C$ koordinat komşuluğunda $T = \dfrac{dC}{dt}$ olmak üzere,*

$$g(T, N) = 1$$

ve $\forall X \in \Gamma\left(S(TC^{\perp})\mid_U\right)$ için

$$g(N, N) = g(N, X) = 0$$

şartlarını sağlayan bir tek $N \in \Gamma\left(E\mid_U\right)$ kesitine sahip bir ve yalnız bir E vektör demeti vardır ve rankı 1'dir. Buradaki E vektör demeti, C'nin $S(TC^{\perp})$'e göre null transversal vektör demeti olarak adlandırılır ve $ntr(C)$ ile gösterilir. N vektör alanı da C'nin T'ye göre null transversal vektör alanıdır. Ayrıca C'nin transversal vektör demeti $tr(C)$,

$$tr(C) = ntr(C) \perp S(TC^{\perp})$$

olarak tanımlanır. Dolayısıyla,

$$TM_{|C} = TC \oplus tr(C) = (TC \oplus ntr(C)) \perp S(TC^{\perp}) \tag{1.1}$$

dir [5].

(1.1) eşitliğinden aşağıdaki lemma verilir.

Lemma 1.3.1. *C, q indeksli ve n boyutlu bir (M, g) yarı-Riemann manifoldunun bir null eğrisi olsun. O zaman C'nin herbir ekran vektör demeti bir yarı-Riemann vektör demetidir ve indeksi $q-1$'dir. Böylece, eğer M bir Lorentz manifold ise her bir ekran vektör demeti bir Riemann vektör demeti olur [5].*

C, $n = (m+2)$ boyutlu (M, g) Lorentz manifoldu üzerinde bir null eğri olsun. D, M'nin Levi-Civita konneksiyonunu ve $T = \dfrac{dC}{dt}$'yi göstersin. h ve $\{k_1, k_2, ..., k_{2m}\}$ $U \subset C$ koordinat komşuluğu üzerinde smooth fonksiyonlar ve $\{W_1, W_2, ..., W_m\}$, $\Gamma\left(S(TC^{\perp})\mid_U\right)$'nin bir ortonormal bazı olmak üzere;

$$
\begin{aligned}
D_T T &= hT + k_1 W_1 \\
D_T N &= -hN + k_2 W_1 + k_3 W_2 \\
D_T W_1 &= -k_2 T - k_1 N + k_4 W_2 + k_5 W_3 \\
D_T W_2 &= -k_3 T - k_4 W_1 + k_6 W_3 + k_7 W_4 \\
D_T W_3 &= -k_5 W_1 - k_6 W_2 + k_8 W_4 + k_9 W_5 \qquad (1.2)\\
\ldots\ldots\ldots & \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
D_T W_{m-2} &= -k_{2m-5} W_{m-4} - k_{2m-4} W_{m-3} + k_{2m-2} W_{m-1} + k_{2m-1} W_m \\
D_T W_{m-1} &= -k_{2m-3} W_{m-3} - k_{2m-2} W_{m-2} + k_{2m} W_m \\
D_T W_m &= -k_{2m-1} W_{m-2} - k_{2m} W_{m-1}
\end{aligned}
$$

denklemleri mevcuttur. Burada;

$$F = \left\{ \frac{dC}{dt} = T, N, W_1, \ . \ . \ . \ , W_m \right\}$$

kümesine C boyunca M üzerinde C'nin $S(TC^{\perp})$ ekran vektör demetine göre *genel Frenet çatısı*, (1.2) denklemlerine de F'ye göre *genel Frenet denklemleri* ve k_i fonksiyonlarına da C'nin eğrilik fonksiyonları denir [10].

Tanım 1.3.2. *Eğrilik fonksiyonları* $k_1, k_2, ..., k_{n-1}$ *olan bir* $C : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}_1^n$ *null eğrisi için,*

$$H_i = \begin{cases} \dfrac{k_1}{k_2}\ ; & i = 1 \\ \\ \dfrac{1}{k_{i+1}} \{H'_{i-1}(t) + k_i H_{i-2}(t)\}; & 2 \leq i \leq n-2 \end{cases}$$

şeklinde tanımlı $H_i : I \to \mathbb{R}$ *fonksiyonuna* C *eğrisinin* i*. harmonik eğriliği denir [11].*

Bu tanıma göre, $C : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}_1^4$ null eğrisinin harmonik eğrilik fonksiyonları

$$H_1 = \frac{k_1}{k_2}, \quad H_2 = \frac{1}{k_3} H'_1$$

dir.

Tanım 1.3.3. *$C : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n_1$ bir null eğri ve X de $\mathbb{R}^n_1$'de sıfırdan farklı bir vektör alanı olsun. $T = \dfrac{dC}{dt}$ olmak üzere,*

$$g(T, X) = \lambda \neq 0, \quad \forall t \in I$$

bir sabit ise; C eğrisine bir null helis, $sp\{X\}$ doğrusuna da C eğrisinin eğilim ekseni denir [11].

Biz çalışmamızın bundan sonraki kısmında null helis eğrilerini γ ile göstereceğiz.

1.4 Null Yüzeyler

Tanım 1.4.1 (Yarı-Riemann Yüzey). $2-$*boyutlu M yarı-Riemann manifolduna bir yarı-Riemann yüzey denir [7].*

Tanım 1.4.2 (Lorentz Yüzey). *Bir M yüzeyi üzerinde tanımlı g metriği Lorentz metriği ise (M, g) ikilisine Lorentz yüzeyi denir [8].*

Tanım 1.4.3 (Lightlike Yüzey). *Minkowski Spacetime'da bir yüzeyin bütün tanjant düzlemleri lightlike, yani yalnızca bir null doğrultu içeren düzlem ise bu yüzeye lightlike yüzey denir [12].*

Tanım 1.4.4. *Bir M yüzeyi üzerinde bir g Riemann metriği verilsin. u, v'nin tanım kümesi üzerinde g metriği $g \sim du^2 + dv^2$ şeklinde tanımlı ise, M üzerinde g tarafından belirtilen u, v koordinatlarına u, v isothermal (veya $g-$ isothermal) koordinatlar denir [8].*

M yarı-Riemann yüzeyi üzerindeki u, v koordinat sistemi için metrik tensörün bileşenleri

$$E = g_{11} = g(\partial_u, \partial_u), \quad F = g_{12} = g_{21} = g(\partial_u, \partial_v), \quad G = g_{22} = g(\partial_v, \partial_v)$$

olmak üzere yüzeyin yay elementi

$$ds^2 = Edu^2 + 2Fdudv + Gdv^2$$

dir. Ayrıca; $Q = Q(\partial_u, \partial_v) = EG - F^2$ olmak üzere E, F, G'nin diferensiyelinden Christoffel sembolleri;

$$Q\Gamma_{11}^1 = \begin{vmatrix} E_u/2 & F \\ F_u - E_u/2 & G \end{vmatrix}, \quad Q\Gamma_{11}^2 = \begin{vmatrix} F & E_u/2 \\ G & F_u - E_u/2 \end{vmatrix}$$

$$Q\Gamma_{12}^1 = \begin{vmatrix} E_v/2 & F \\ G_u/2 & G \end{vmatrix}, \quad Q\Gamma_{12}^2 = \begin{vmatrix} F & E_u/2 \\ G & F_u - E_u/2 \end{vmatrix} \tag{1.3}$$

$$Q\Gamma_{22}^1 = \begin{vmatrix} F_v - G_u/2 & F \\ G_v/2 & G \end{vmatrix}, \quad Q\Gamma_{22}^2 = \begin{vmatrix} F & E_u/2 \\ G & F_u - E_u/2 \end{vmatrix}$$

şeklindedir [7].

Bir M yüzeyi üzerindeki metrik

$$ds^2 = \lambda(du^2 + dv^2)$$

ile gösterilen konformal koordinatlar ise, $\Delta_0 = \dfrac{\partial^2}{\partial u^2} + \dfrac{\partial^2}{\partial v^2}$ olmak üzere Laplace operatörü

$$\Delta = \frac{1}{\lambda}\Delta_0 \tag{1.4}$$

ile verilir.

Önerme 1.4.1. *M bir Riemann yüzey ve $x : M \to \mathbb{R}_1^4$ bir konformal, spacelike immersion olsun. z, M üzerinde bir kompleks koordinat olmak üzere lokal ifadesi*

$$ds^2 = e^p \left|dz\right|^2$$

olan indirgenmiş metriğin K Gauss eğriliği; Δ Laplace operatörü göstermek üzere,

$$K = -\frac{1}{2}\Delta p \tag{1.5}$$

ile verilir [13].

BÖLÜM 2

MİNKOWSKİ SPACETİME'DA NULL EĞRİLER

Bu bölüm iki kısmından oluşmaktadır. Birinci kısımda Minkowski Spacetime'da null helis eğrileri çalışıldı. Eğrinin distinguished (özel seçilmiş) bir t parametresi ile verilmesi durumunda distinguished Frenet çatısı oluşturularak eğrinin harmonik eğrilikleri ve eğrilik fonksiyonları arasındaki bağıntı elde edildi. Ayrıca bir null helis eğrisinin eğilim ekseni, eğrinin harmonik eğrilikleri cinsinden ifade edildi. İkinci kısımda Minkowski Spacetime'da null rektifyen eğriler çalışıldı. Bir s pseudo-yay uzunluk parametresi ile verilen null rektifyen eğrisi boyunca bir hareketli Frenet çatısından elde edilen eğrilik fonksiyonları kullanılarak null rektifyen eğriler karakterize edildi.

2.1 Minkowski Spacetime'da Null Helisler

Minkowski Spacetime'da C bir null eğri ve D Levi-Civita konneksiyonu olsun. h ve $\{k_1, k_2, k_3, k_4\}$ bir $U \subset C$ koordinat komşuluğu üzerinde tanımlı smooth fonksiyonlar ve $\{W_1, W_2\}$ de $\Gamma\left(S(TC^{\perp})\mid_U\right)$'nin belirlenmiş bir bazı olmak üzere (1.2)'den $n = 4$ için,

$$\begin{aligned} D_T T &= hT + k_1 W_1 \\ D_T N &= -hN + k_2 W_1 + k_3 W_2 \\ D_T W_1 &= -k_2 T - k_1 N + k_4 W_2 \\ D_T W_2 &= -k_3 T - k_4 W_1 \end{aligned} \tag{2.1}$$

denklemleri mevcuttur. Burada, T ile N null ve W_1 ile W_2 spacelike vektörler olmak üzere $\{T, N, W_1, W_2\}$, C eğrisi boyunca bir bazdır. $F = \{T, N, W_1, W_2\}$'ye $\mathbb{R}^4_1$ 'de C eğrisi boyunca $S\left(TC^{\perp}\right)$ ekran vektör demetine göre Frenet çatı, $\{k_1, k_2, k_3, k_4\}$ fonksiyonlarına F'ye göre C'nin eğrilik fonksiyonları ve (2.1) denklemlerine de F'ye göre *Frenet denklemleri* denir [5].

Böylece aşağıdaki uyarı verilebilir.

Uyarı 2.1.1. *Minkowski Spacetime'da bir C null eğrisi için daima bir $S\left(TC^{\perp}\right)$ ekran vektör demeti ve $U \subset C$ koordinat komşuluğunda $S\left(TC^{\perp}\right)$'den elde edilen F Frenet çatısı vardır. Gerçekten, C boyunca $TC^{\perp}$ vector demeti üzerinde bir g Riemann metrik vardır. Böylece $S\left(TC^{\perp}\right)$, g'ye göre $TC^{\perp}$'de TC'ye tamamlayıcı ortogonal vektör demeti olarak alınır [5].*

(2.1) Frenet denklemlerinde $h = g(D_T T, N) = 0$ olacak şekilde seçilen t parametresine *distinguished parametre* denir. Bu durumda (2.1) Frenet denklemleri,

$$\begin{aligned} D_T T &= k_1 W_1 \\ D_T N &= k_2 W_1 + k_3 W_2 \\ D_T W_1 &= -k_2 T - k_1 N + k_4 W_2 \\ D_T W_2 &= -k_3 T - k_4 W_1 \end{aligned} \tag{2.2}$$

halini alır [5].

Böylece aşağıdaki sonuçlar verilir.

Sonuç 2.1.1. *Eğer $\mathbb{R}_1^4$'de bir C null eğrisi t distinguished parametresi ile verilirse, $D_T T$ bir spacelike vektör alanıdır ve W_1, $D_T T$'ye paralel bir birim spacelike vektör alanı olarak seçilebilir [5].*

Sonuç 2.1.2. *Eğer $\mathbb{R}_1^4$'de t distinguished parametresi ile verilen bir C null eğrisinin birinci eğrilik fonksiyonu $k_1 = 0$ ise $D_T T = 0$ olacağından C, $\mathbb{R}_1^4$'de bir null geodeziktir [5].*

Sonuç 2.1.3. *$C \subset \mathbb{R}_1^4$, t distinguished parametresi ile verilen bir null eğri olsun. C null eğrisinin $\mathbb{R}_1^4$'de bir null geodezik olması için gerek ve yeter şart birinci eğrilik fonksiyonunun özdeş olarak sıfır olmasıdır.*

$\mathbb{R}_1^4$'de t distinguished parametresi ile verilen bir C null eğrisinin son eğrilik fonksiyonu k_4 sıfır ise $\{T, N, W_1, W_2\}$ Frenet çatısına distinguished Frenet çatısı denir [5].

t distinguished parametresi ile verilen bir null eğri için kullanılan $\{T, N, W_1, W_2\}$ çatısı distinguished Frenet çatı olması durumunda (2.2) Frenet denklemleri

$$
\begin{aligned}
D_T T &= k_1 W_1 \\
D_T N &= k_2 W_1 + k_3 W_2 \\
D_T W_1 &= -k_2 T - k_1 N \\
D_T W_2 &= -k_3 T
\end{aligned}
\tag{2.3}
$$

şeklinde elde edilir [5].

Bu kısımda γ non-geodezik (yani $k_1 \neq 0$) null helis eğrilere çalışılacaktır.

Teorem 2.1.1. *$\gamma \subset \mathbb{R}^4_1$ eğrisi, t distinguished parametre, $\{T, N, W_1, W_2\}$ distinguished Frenet çatı ve k_1, k_2, k_3 eğrilik fonksiyonları ile bir null helis olsun. $sp\{X\}$, γ eğrisinin bir eğilim ekseni olacak şekilde $\mathbb{R}^4_1$'de bir birim sabit vektör alanı mevcuttur ve*

$$g(N, X) = -H_1^{-1} g(T, X), \quad g(W_1, X) = 0 \ , \quad g(W_2, X) = \frac{H_2}{H_1^2} g(T, X)$$

dir. Burada H_1 ve H_2, γ'nin sırasıyla birinci ve ikinci harmonik eğrilikleridir ve

$$H_2{}' = \left(\frac{2H_2^2}{H_1} - H_1^2 \right) k_3$$

dir.

İspat. γ, t distinguished parametresi ile verilen bir null helis ve $\{T, N, W_1, W_2\}$, $\mathbb{R}^4_1$'de distinguished Frenet çatısı olsun. Bu durumda,

$$g(T, X) = \lambda \neq 0 \tag{2.4}$$

sabit olacak şekilde bir X birim sabit vektör alanı vardır. (2.4)'ün T yönündeki türevi alınırsa, $g(D_T T, X) = 0$ elde edilir. (2.3)'den,

$$g(D_T T, X) = k_1 g(W_1, X)$$

olup, $g(D_T T, X) = 0$ ve $k_1 \neq 0$ olduğundan,

$$g(W_1, X) = 0 \tag{2.5}$$

elde edilir. (2.5)'in T yönündeki türevi alınıp (2.3) kullanılırsa,

$$g(D_T W_1, X) = 0 \Longrightarrow -k_2 g(T, X) - k_1 g(N, X) = 0$$

elde edilir. Buradan da

$$g(N,X) = -\frac{k_2}{k_1}g(T,X) = -H_1^{-1}g(T,X) \tag{2.6}$$

sonucuna ulaşılır. (2.6)'nın T yönündeki türevinde (2.3) dikkate alınırsa,

$$g(D_T N, X) = \frac{H_1{}'}{H_1^2}g(T,X) = k_3 g(W_2, X)$$

eşitliğine sahip olunur. Bu eşitlikten,

$$g(W_2, X) = \frac{H_1{}'}{H_1^2 k_3}g(T,X) = \frac{H_2}{H_1^2}g(T,X) \tag{2.7}$$

elde edilir.

Son olarak, (2.7) 'nin T yönündeki türevinde (2.3) dikkate alınırsa,

$$g(D_T W_2, X) = \left(\frac{H_2'}{H_1^2} - \frac{2H_1' H_2}{H_1^3}\right)g(T,X) = -k_3 g(T,X)$$

eşitliğine ulaşılır ki bu eşitlikten,

$$H_2{}' = \left(\frac{2H_2^2}{H_1} - H_1^2\right)k_3$$

sonucu elde edilir ki bu da ispatı tamamlar. □

Örnek 2.1.1. *$\gamma : I \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}_1^4$ eğrisi*

$$\gamma(t) = (t, 0, \cos t, \sin t)$$

ile tanımlansın. γ eğrisinin teğet vektörü,

$$T = \frac{d\gamma}{dt} = (1, 0, -\sin t, \cos t)$$

olup, $g(T,T) = 0$ olduğundan γ eğrisi bir null eğridir. $\mathbb{R}_1^4$'de bir $X = (1,0,0,0)$ sabit vektörü için, $g(T,X) = -1$ sabit olduğundan γ eğrisi bir null helistir.

Şimdi γ eğrisi boyunca,

$$\begin{array}{ll} T = (1, 0, -\sin t, \cos t) & N = \frac{1}{2}(-1, 0, -\sin t, \cos t) \\ W_1 = (0, 0, -\cos t, -\sin t) & W_2 = (0, 1, 0, 0) \end{array}$$

ile verilen $\{T, N, W_1, W_2\}$ Frenet çatısı için (2.1) denklemleri göz önüne alındığında, $D_T T = (0, 0, -\cos t, -\sin t)$ olup, $h = g(D_T T, N) = 0$ olduğundan, t bir distinguished parametredir.

$D_T W_1 = (0, 0, \sin t, -\cos t)$ olup, $k_4 = g(D_T W_1, W_2) = 0$ olduğundan $\{T, N, W_1, W_2\}$ Frenet çatısı distinguished Frenet çatıdır. O halde (2.3)'den,

$$\begin{aligned} D_T T = W_1 \Rightarrow \quad & k_1 = 1 \\ D_T N = \tfrac{1}{2} W_1 \Rightarrow \quad & k_2 = \tfrac{1}{2} \text{ ve } k_3 = 0 \end{aligned}$$

elde edilir. Ayrıca;

$$g(T, X) = -1, \; g(W_1, X) = 0, \quad g(N, X) = \frac{1}{2}, \; g(W_2, X) = 0$$

olup, Teorem 2.1.1'den γ eğrisinin birinci ve ikinci harmonik eğriliklerinin

$$H_1 = 2 \quad ve \quad H_2 = 0$$

olduğu görülür.

Teorem 2.1.2. *Minkowski Spacetime'da t distinguished parametre, $\{T, N, W_1, W_2\}$ distinguished Frenet çatısı ile bir γ null eğrisi bir null helis eğrisidir gerek ve yeter şart γ null eğrisinin $Sp\{T, N, W_2\}$ uzayında yatan ve W_1'e ortogonal olan bir sabit vektör alanı vardır.*

İspat. Minkowski Spacetime'da bir γ null eğrisi, eğilim ekseni $X \in \mathbb{R}_1^4$ olan bir helis eğrisi olduğunu kabul edelim. Bu durumda, Teorem 2.1.1'den, X vektör alanı W_1'e ortogonal ve $sp\{T, N, W_2\}$ uzayında yatan bir vektör alanıdır.

Tersine, Minkowski Spacetime'da bir γ null eğrisi için $sp\{T, N, W_2\}$ uzayında yatan ve W_1'e ortogonal olan sıfırdan farklı sabit X vektör alanının mevcut olduğunu kabul edelim. Bu durumda, $k_1 \neq 0$ için,

$$\begin{aligned} g(W_1, X) = 0 \Rightarrow \quad & k_1 g(W_1, X) = 0 \\ & g(k_1 W_1, X) = 0 \\ & g(D_T T, X) = 0 \\ & g(T, X) = sabit \end{aligned}$$

elde edilir ki bu da γ null eğrisinin bir helis eğrisi olduğu anlamına gelir. □

Şimdi γ null helis eğrisinin eğilim eksenini harmonik eğrilikler cinsinden ifade eden teoremi verelim.

Teorem 2.1.3. *t distinguished parametre, $\{T, N, W_1, W_2\}$ distinguished Frenet çatısı olmak üzere bir X eğilim ekseni ile verilen $\gamma \subset \mathbb{R}_1^4$ eğrisinin bir null helis olması için gerek ve yeter şart $g(T, X) = \lambda \neq 0$ bir sabit olmak üzere*

$$X = -\frac{1}{H_1}\lambda T + \lambda N + \frac{H_2}{H_1^2}\lambda W_2 \tag{2.8}$$

dir.

İspat. t distinguished parametre ve $\{T, N, W_1, W_2\}$, $\mathbb{R}_1^4$'de distinguished Frenet çatı olmak üzere, $\gamma \subset \mathbb{R}_1^4$ eğrisi eğilim ekseni X olan bir null helis olsun. Bu durumda $\forall t \in I \subset \mathbb{R}$ için,

$$g(T, X) = \lambda \neq 0$$

sabittir. X vektör alanı, λ bir sabit ve $\mu, \lambda_i : I \longrightarrow \mathbb{R}$ diferensiyellenebilir fonksiyonlar olmak üzere,

$$X = \mu(t)T + \lambda N + \lambda_1(t)W_1 + \lambda_2(t)W_2 \tag{2.9}$$

olarak yazılabilir. $g(T, X) = \lambda \neq 0$, eşitliğinin t'ye göre türevi ve (2.3)'den,

$$\begin{aligned} g(T, X) = \lambda \text{ bir sabit} \Rightarrow \quad & g(D_T T, X) = 0 \\ & g(k_1 W_1, X) = 0 \\ & k_1 g(W_1, X) = 0 \end{aligned}$$

elde edilir. γ non-geodezik bir eğri olduğundan dolayı $k_1 \neq 0$'dır. Böylece, son eşitlikten $g(W_1, X) = \lambda_1 = 0$ elde edilir. Bu durumda, X vektörü (2.9)'dan

$$X = \mu(t)T + \lambda N + \lambda_2(t)W_2 \tag{2.10}$$

halini alır. (2.10) eşitliğinin t'ye göre türevinde (2.3) Frenet denklemleri dikkate alınırsa,

$$D_T X = (\mu' - \lambda_2 k_3)T + (\mu k_1 + \lambda k_2)W_1 + (\lambda k_3 + \lambda_2')W_2 \tag{2.11}$$

elde edilir. X sabit bir vektör olduğundan $D_T X = 0$ olup, (2.11)'den,

$$\mu' - \lambda_2 k_3 = 0, \qquad \mu k_1 + \lambda k_2 = 0, \qquad \lambda k_3 + \lambda_2' = 0$$

sonuçlarına ulaşılır ki buradan $\mu = -\dfrac{1}{H_1}\lambda$ ve $\lambda_2 = \dfrac{H_2}{H_1^2}\lambda$ değerleri elde edilir. Bu değerler (2.10)'da yerine yazılırsa,

$$X = -\frac{1}{H_1}\lambda T + \lambda N + \frac{H_2}{H_1^2}\lambda W_2$$

elde edilir ki bu da ispatı tamamlar.

Tersine, t distinguished parametre, $\{T, N, W_1, W_2\}$ distinguished Frenet çatı olmak üzere $\gamma \subset \mathbb{R}_1^4$ eğrisi bir null eğri ve X, (2.8) eşitliği ile verilen bir vektör alanı olsun. Bu durumda,

$$g(T, X) = \lambda \neq 0$$

sabit olduğundan γ null eğrisi, eğilim ekseni X olan bir null helistir. $\square$

Böylece aşağıdaki sonuç elde edilir.

Sonuç 2.1.4. *t distinguished parametre, $\{T, N, W_1, W_2\}$ distinguished Frenet çatı olmak üzere $\gamma \subset \mathbb{R}_1^4$ eğrisi bir X eğilim ekseni ile null helis olsun. Eğer X vektörü,*

(i) spacelike veya timelike vektör ise,

$$H_2^2 = H_1^3(\frac{\epsilon}{\lambda^2} H_1 + 2)$$

(ii) null vektör ise,

$$H_2 = \pm H_1 \sqrt{2H_1}$$

dir.

İspat. $\gamma \subset \mathbb{R}_1^4$ eğrisi; t distinguished parametre ve $\{T, N, W_1, W_2\}$, $\mathbb{R}_1^4$'de distinguished Frenet çatı olmak üzere bir X eğilim ekseni ile null helis olsun. X vektörü için (2.8)'den

$$g(X, X) = (\frac{-2H_1^3 + H_2^2}{H_1^4})\lambda^2 \tag{2.12}$$

elde edilir.

X vektörü spacelike (veya timelike) vektör ise $g(X, X) = \epsilon$, $\epsilon = \pm 1$'dir. Buna göre, (2.12)'den

$$H_2^2 = H_1^3(\frac{\epsilon}{\lambda^2} H_1 + 2)$$

elde edilir.

X vektörü null vektör ise $g(X, X) = 0$'dır. Buna göre, (2.12)'den

$$H_2 = \pm H_1 \sqrt{2H_1}$$

elde edilir. $\square$

2.2 Minkowski Spacetime'da Null Rektifyen Eğriler

$\mathbb{R}^3_1$ Minkowski uzayı ve $\mathbb{R}^4$ Öklid uzayındaki rektifyen eğrilerin bazı karakterizasyonları sırasıyla [3] ve [4]'de verilmiştir. Bu kısımda, Minkowski Spacetime'daki null rektifyen eğrileri α ile gösterip, bu eğrileri eğrilik fonksiyonlarını kullanarak karakterize edeceğiz.

Tanım 2.2.1. *$\alpha : I \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^3$ eğrisi için $\{T(s), N(s), B(s)\}$, $\mathbb{R}^3$ Öklid uzayında $\alpha(s)$ eğrisi boyunca verilen hareketli Frenet çatısı olsun. $\alpha(s)$ noktasındaki,*

i) $Sp\{T, N\}$ düzlemine oskülatör düzlem,

ii) $Sp\{N, B\}$ düzlemine normal düzlem,

iii) $Sp\{T, B\}$ düzlemine rektifyen düzlem

denir [14].

$\mathbb{R}^3$ Öklid uzayında yer vektörü rektifyen düzlemde yatan eğriler rektifyen eğriler olarak isimlendirilip [2]'de Chen tarafından incelenmiştir. Chen'e göre, $s \in I \subset \mathbb{R}$ yay parametresi ve $\lambda(s)$ ve $\mu(s)$ keyfi diferensiyellenebilir fonksiyonlar olmak üzere bir $\alpha : I \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^3$ rektifyen eğrisinin seçilmiş bir orjine göre $\alpha(s)$ yer vektörü

$$\alpha(s) = \lambda(s)T(s) + \mu(s)B(s)$$

eşitliği ile verilir.

$\mathbb{R}^4$ Öklid uzayındaki rektifyen eğriler K.İlarslan tarafından [4]'de incelendi. K. İlarslan'a göre, $s \in I \subset \mathbb{R}$ yay parametresi ve $\lambda(s)$, $\mu(s)$ ve $\upsilon(s)$ keyfi diferensiyellenebilir fonksiyonlar olmak üzere bir $\alpha : I \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^4$ rektifyen eğrisinin seçilmiş bir orjine göre $\alpha(s)$ yer vektörü, N'nin ortogonal tümleyeni $N^{\perp} = sp\{T, B_1, B_2\}$'de yatar ve dolayısıyla

$$\alpha(s) = \lambda(s)T(s) + \mu(s)B_1(s) + \upsilon(s)B_2(s)$$

eşitliği ile verilir. Burada, $\{T(s), N(s), B_1(s), B_2(s)\}$, $\mathbb{R}^4$ Öklid uzayında $\alpha(s)$ eğrisi boyunca hareketli bir Frenet çatıdır.

$\mathbb{R}^4$ Öklid uzaydaki rektifyen eğrilerin durumlarına benzer olarak, Minkowski Spacetime'daki rektifyen eğrileri ele alalım. Buna göre, ilk olarak $\mathbb{R}^4_1$'deki rektifyen eğrileri tanımlayalım.

$\alpha : I \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^4_1$ eğrisi için $\{T(s), N(s), B_1(s), B_2(s)\}$, Minkowski Spacetime'da $\alpha(s)$ eğrisi boyunca hareketli bir Frenet çatısı olsun. g Minkowski Spacetime'daki indefinit metriği göstermek üzere, asli normal vektör alanı N'nin ortogonal tümleyeni

$$N^{\perp} = \left\{ X \in \mathbb{R}^4_1 \mid \ g(X, N) = 0 \right\}$$

ile verilir. $s \in I \subset \mathbb{R}$ yay parametresi ve $\lambda(s)$, $\mu(s)$ ve $\upsilon(s)$ keyfi diferensiyellenebilir fonksiyonlar olmak üzere bir $\alpha : I \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^4_1$ rektifyen eğrisinin seçilmiş bir orjine göre $\alpha(s)$ yer vektörü, N'nin ortogonal tümleyeni $N^{\perp} = sp\{T, B_1, B_2\}$ uzayında yatan ve

$$\alpha(s) = \lambda(s)T(s) + \mu(s)B_1(s) + \upsilon(s)B_2(s) \tag{2.13}$$

eşitliği ile verilen vektördür. Ayrıca; $\alpha^N(s)$, $\alpha(s)$ yer vektörünün normal bileşenini göstermek üzere, $\alpha(s)$ bir rektifyen eğri ise, (2.13)'den

$$\alpha^N(s) = \mu(s)B_1(s) + \upsilon(s)B_2(s) \tag{2.14}$$

dir.

Şimdi $\mathbb{R}^4_1$'de null rektifyen eğri tanımını verebiliriz.

Tanım 2.2.2. *$\alpha : I \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^4_1$ bir null eğri ve $\{T(s), N(s), B_1(s), B_2(s)\}$, Minkowski Spacetime'da $\alpha(s)$ null eğrisi boyunca hareketli Frenet çatısı olsun. α null eğrisinin $\alpha(s)$ yer vektörü, N'nin ortogonal tümleyeni $N^{\perp} = sp\{T, B_1, B_2\}$'de yatıyorsa α null eğrisine null rektifyen eğri denir.*

Spacelike ve timelike eğrilerde tanımlanan yay uzunluk parametresi; null eğriler için tanımlanamayıp, buna karşılık null eğriler için pseudo-yay uzunluk kavramı Bonnor tarafından [1]'de aşağıdaki gibi verilmiştir.

Tanım 2.2.3. *$\alpha(s)$, $\mathbb{R}^4_1$'de bir null eğri olsun. $s = \int_0^t (g(\alpha''(t), \alpha''(t)))^{\frac{1}{4}} dt$ olmak üzere,*

$$g(\alpha''(s), \alpha''(s)) = 1$$

ise $\alpha(s)$ null eğrisine s pseudo-yay fonksiyonu ile parametrize edilmiştir denir [1].

Pseudo-yay parametresi ile verilen null eğrilere birim hızlı null eğri tabirini kullanacağız.

Minkowski Spacetime'da s pseudo-yay uzunluk fonksiyonu ile parametrize edilmiş α null eğrisi için Frenet formülleri Walrave tarafından [15]'de verilmiştir. Buna göre; Minkowski Spacetime'da α eğrisi boyunca verilen ve sırasıyla tanjant, asli normal, birinci binormal ve ikinci binormal vektör alanları ile oluşturulan $\{T, N, B_1, B_2\}$ hareketli Frenet çatısı için α null eğrisinin $\alpha(s)$ noktasındaki Frenet formülleri

$$\begin{bmatrix} T' \\ N' \\ B_1' \\ B_2' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & k_1 & 0 & 0 \\ k_2 & 0 & -k_1 & 0 \\ 0 & -k_2 & 0 & k_3 \\ -k_3 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T \\ N \\ B_1 \\ B_2 \end{bmatrix} \tag{2.15}$$

ile verilir. Burada $k_1 = k_1(s)$, $k_2 = k_2(s)$ ve $k_3 = k_3(s)$; $\alpha(s)$ noktasındaki eğrilik fonksiyonlarını göstermektedir. Ayrıca; T, N, B_1, B_2

$$\left.\begin{array}{r} g(T,T) = g(B_1,B_1) = 0, \\ g(N,N) = g(B_2,B_2) = g(T,B_1) = 1 \\ g(T,N) = g(T,B_2) = g(N,B_1) = g(N,B_2) = g(B_1,B_2) = 0 \end{array}\right\} \tag{2.16}$$

denklemlerini sağlar [16].

Minkowski Spacetime'da $\alpha(s)$ null eğrisinin k_1 birinci eğrilik fonksiyonu sadece iki değer alabilir. Bunlar, $k_1 = 0$ veya $k_1 = 1$'dir. α bir null doğru ise $k_1 = 0$ ve α'nın diğer tüm durumları için $k_1 = 1$'dir [1].

$\alpha : I \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}_1^4$ eğrisi; k_1, $k_2(s)$ ve $k_3(s)$ eğrilikleri ile birim hızlı bir null rektifyen eğri olsun. Bu durumda, $\alpha(s)$ yer vektörü için (2.13) denklemini sağlayan $\lambda(s)$, $\mu(s)$ ve $\upsilon(s)$ diferensiyellenebilir fonksiyonları mevcuttur. α eğrisinin (2.15) ve (2.16) eşitliklerini sağlayan $\{T, N, B_1, B_2\}$ Frenet çatısı vardır. (2.13) denkleminin s'ye göre türevini alıp, (2.15) Frenet formülleri kullanılırsa

$$T = (\lambda' - k_3\upsilon)T + (\lambda k_1 - \mu k_2)N + \mu' B_1 + (\mu k_3 + \upsilon')B_2$$

eşitliği elde edilir. Buradan,

$$
\begin{aligned}
\lambda' - k_3\upsilon &= 1 \\
\lambda k_1 - \mu k_2 &= 0 \\
\mu' &= 0 \\
\mu k_3 + \upsilon' &= 0
\end{aligned}
\tag{2.17}
$$

bulunur. (2.17)'deki diferensiyel denklemlerin çözümünden,

$$
\begin{aligned}
\mu(s) &= c \ (sabit) \\
\lambda(s) &= \frac{ck_2}{k_1} \\
\upsilon(s) &= \frac{ck_2'k_1 - ck_2k_1' - k_1^2}{k_1^2k_3}
\end{aligned}
\tag{2.18}
$$

eşitlikleri elde edilir. Çalışma boyunca c sabitini sıfırdan farklı bir sabit olarak ele alacağız (yani $c \in \mathbb{R}_0$). α bir null eğri olduğunda, k_1 yalnızca iki değer alabilir. Bunlar; $k_1 = 0$ ve $k_1 = 1$ dir. $k_1 = 0$ ise α bir null doğrudur.

$k_1 = 1$ olması durumunu inceleyelim.

(2.18)'den;

$$
\begin{aligned}
\mu(s) &= c \ (sabit) \\
\lambda(s) &= ck_2 \\
\upsilon(s) &= \frac{ck_2' - 1}{k_3}
\end{aligned}
\tag{2.19}
$$

elde edilir. Böylece; $\lambda(s)$, $\mu(s)$ ve $\upsilon(s)$ diferensiyellenebilir fonksiyonlarının α eğrisinin $k_2(s)$ ve $k_3(s)$ eğrilikleri cinsinden ifadesi elde edilmiş olur.

(2.17)'deki son denklemde (2.19) eşitlikleri kullanılarak,

$$
ck_3 + \left(\frac{ck_2' - 1}{k_3}\right)' = 0 \qquad c \in \mathbb{R}_0, \tag{2.20}
$$

denklemi elde edilir.

Şimdi de kabul edelim ki, $\mathbb{R}_1^4$'de sıfırdan farklı $k_2(s)$ ve $k_3(s)$ eğrilikleri ile birim hızlı keyfi bir α null eğrisi (2.20) denklemini sağlasın.

$$
X(s) = \alpha(s) - \ (ck_2)T(s) - cB_1(s) - (\frac{ck_2' - 1}{k_3})B_2(s)
$$

ile verilen $X \in \mathbb{R}_1^4$ vektörü göz önüne alınırsa, (2.15) ve (2.20) kullanılarak kolayca $X'(s) = 0$ elde edilir ki bunun anlamı X sabit bir vektördür. Bu da α eğrisinin bir null rektifyen eğriye denk olduğu anlamına gelir. Böylelikle aşağıdaki teorem ispatlanmış olur.

Teorem 2.2.1. *$\alpha : I \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^4_1$ eğrisi; $k_1(s) = 1$, $k_2(s) \neq 0$ ve $k_3(s) \neq 0$ eğrilikleri ile birim hızlı bir null eğri olsun. Bu durumda, α eğrisinin bir null rektifyen eğriye denk olması için gerek ve yeter şart $c \in \mathbb{R}_0$ olmak üzere, α eğrisinin $k_2(s)$ ve $k_3(s)$ eğrilikleri arasında*

$$ck_3 + \left(\frac{ck_2' - 1}{k_3}\right)' = 0 \qquad c \in \mathbb{R}_0,$$

bağıntısının olmasıdır.

Özel olarak $\mathbb{R}^4_1$'de α null rektifyen eğrisinin $k_2(s)$ ve $k_3(s)$ eğrilik fonksiyonları sıfırdan farklı birer sabit olarak alınırsa, (2.20)'den kolayca $k_3 = 0$ bulunur ki bu bir çelişkidir. Böylece aşağıdaki teorem verilebilir.

Teorem 2.2.2. *$\mathbb{R}^4_1$'de yatan, sıfırdan farklı $k_1(s) = 1$, $k_2(s)$ ve $k_3(s)$ sabit eğrilikli null rektifyen eğri yoktur.*

Dahası, $k_2(s)$ ve $k_3(s)$ eğrilik fonksiyonlarının yalnızca biri sıfırdan farklı bir sabit ise aşağıdaki durumları göz önüne alabiliriz.

i) İlk olarak, $k_2(s) \neq 0$ bir sabit ve $k_3(s)$ sabit olmayan bir fonksiyon olduğunu kabul edelim. (2.20) denklemi kullanılarak,

$$k_3' + ck_3^3 = 0 \quad c \in \mathbb{R}_0,$$

diferensiyel denklemi elde edilir. Bu diferensiyel denklemin çözümünden,

$$k_3(s) = \frac{1}{\sqrt{|2cs + 2c_1|}} \qquad c \in \mathbb{R}_0, \quad c_1 \in \mathbb{R},$$

elde edilir.

ii) Son olarak, $k_3(s) \neq 0$ bir sabit ve $k_2(s)$ sabit olmayan bir fonksiyon olduğunu kabul edelim. (2.20) denklemi kullanılarak,

$$k_2'' + k_3^2 = 0$$

diferensiyel denklemi elde edilir. Bu diferensiyel denklemin çözümünden,

$$k_2(s) = -\frac{k_3^2\ s^2}{2} + c_1 s + c_2, \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}$$

elde edilir.

Böylece aşağıdaki teorem verilebilir.

Teorem 2.2.3. *$\alpha : I \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}_1^4$ eğrisi ilk eğriliği $k_1(s) = 1$ olan birim hızlı bir null eğri olsun. Bu durumda α bir null rektifyen eğriye denktir eğer*

i) $k_2(s) = sabit \neq 0$ ise

$$k_3(s) = \frac{1}{\sqrt{|2cs + 2c_1|}} \ , \quad c \in \mathbb{R}_0, \quad c_1 \in \mathbb{R}$$

ii) $k_3(s) = sabit \neq 0$ ise

$$k_2(s) = -\frac{k_3^2 \ s^2}{2} + c_1 s + c_2 \ , \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}$$

iii) $k_2(s)$ ve $k_3(s)$ sıfırdan farklı sabit olmayan birer fonksiyon ise

$$ck_3 + \left(\frac{ck_2' - 1}{k_3} \right)' = 0, \qquad c \in \mathbb{R}_0$$

dir.

Bonnor [1]'de, $\mathbb{R}_1^4$'deki null helisleri $k_2(s)$ ve $k_3(s)$ eğrilikleri ikisi birden sıfır olmayan, sabitler olan eğriler olarak tanımlamıştır. Bonnor'un bu tanımlaması ile yukarıdaki teoremden aşağıdaki sonuç elde edilir.

Sonuç 2.2.1. *$\mathbb{R}_1^4$ 'deki herhangi bir null rektifyen eğri null helis olamaz.*

Teorem 2.2.4. *$\alpha : I \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}_1^4$ eğrisi, $k_1(s) = 1$, $k_2(s) \neq 0$ ve $k_3(s) \neq 0$ eğrilikleri ile birim hızlı bir null rektifyen eğri olsun. Bu durumda aşağıdaki ifadeler denktir:*

i) $\rho(s) = \|\alpha(s)\|$ uzaklık fonksiyonu için

$$\rho^2(s) = 2cs + 2c_1, \quad c \in \mathbb{R}_0, \ c_1 \in \mathbb{R}$$

dir.

ii) α eğrisinin yer vektörünün tanjant bileşeni sabittir ve

$$g(\alpha(s), T(s)) = c, \quad c \in \mathbb{R}_0$$

dir.

iii) α eğrisinin yer vektörünün $\alpha^N(s)$ normal bileşeni ve $\rho(s)$ uzaklık fonksiyonu sabit değildir.

iv) α eğrisinin yer vektörünün birinci binormal ve ikinci binormal bileşenleri sırasıyla

$$\begin{aligned} g(\alpha(s), B_1(s)) &= ck_2, \quad c \in \mathbb{R}_0 \\ g(\alpha(s), B_2(s)) &= \frac{ck_2' - 1}{k_3}, \quad c \in \mathbb{R}_0 \end{aligned} \tag{2.21}$$

dir.

Tersine, eğer $\alpha(s)$ sıfırdan farklı $k_1 = 1$, $k_2(s)$ ve $k_3(s)$ eğrilikleri ile birim hızlı bir null eğri ve (i), (ii) veya (iv) ifadelerinden biri mevcutsa, o zaman α eğrisi bir null rektifyen eğridir.

İspat. Kabul edelim ki; $\alpha(s)$ eğrisi, $k_1 = 1$, $k_2(s) \neq 0$ ve $k_3(s) \neq 0$ eğrilikleri ile $\mathbb{R}_1^4$ 'de birim hızlı bir null rektifyen eğri olsun. α eğrisinin yer vektörü (2.19)'daki eşitlikleri ile verilen $\lambda(s)$, $\mu(s)$ ve $\upsilon(s)$ fonksiyonları (2.13) denklemini sağlar.

(2.17)'deki son denklemi υ ile çarpıp, (2.19) eşitlikleri kullanılırsa,

$$c^2 k_2' - c + \upsilon' \upsilon = 0$$

denklemi elde edilir. Bu denklemin integralinden de

$$\upsilon^2 = 2cs - 2c^2 k_2 + 2c_1, \qquad c \in \mathbb{R}_0,\ c_1 \in \mathbb{R} \tag{2.22}$$

eşitliği elde edilir. (2.13), (2.19), (2.16) ve (2.22) kullanılarak,

$$\begin{aligned} g(\alpha(s), \alpha(s)) &= g(\lambda T + \mu B_1 + \upsilon B_2, \lambda T + \mu B_1 + \upsilon B_2) \\ &= 2\lambda\mu + \upsilon^2 \\ &= 2ck_2 c + (2cs - 2c^2 k_2 + 2c_1) \\ &= 2cs + 2c_1 \end{aligned}$$

elde edilir, buradan $\rho^2(s) = g(\alpha(s), \alpha(s)) = 2cs + 2c_1$, $c \in \mathbb{R}_0$, $c_1 \in \mathbb{R}$ sonucuna ulaşılır ki bu da (i) ifadesini verir.

(2.13), (2.19) ve (2.16) kullanılarak, kolayca

$$g(\alpha(s), T(s)) = \mu = c,\ c \in \mathbb{R}_0,$$

elde edilir ki, bu da (ii) ifadesini verir.

(2.14), (2.19), (2.16) ve (2.22) kullanılarak

$$
\begin{aligned}
g(\alpha^N(s), \alpha^N(s)) &= g(\mu B_1 + \upsilon B_2, \mu B_1 + \upsilon B_2) \\
&= \upsilon^2 \\
&= 2cs - 2c^2 k_2 + 2c_1
\end{aligned}
$$

eşitliği elde edilir. Böylece,

$$
\left\|\alpha^N(s)\right\|^2 = g(\alpha^N(s), \alpha^N(s)) = 2cs - 2c^2 k_2 + 2c_1
$$

sonucuna ulaşılır ki bu da $\alpha^N(s)$ 'nin bir sabit fonksiyon olmadığını gösterir. Yine (i) ifadesinden $\rho(s)$ sabit olmayan bir fonksiyondur. Dolayısıyla (iii) ifadesine ulaşılmış olur.

Son olarak da, (2.13), (2.19) ve (2.16) kullanılarak kolayca (2.21) elde edilir ki, böylece (iv) ifadesine ulaşılır.

Tersine, kabul edelim ki $\alpha(s)$ $k_1 = 1$, $k_2(s) \neq 0$ ve $k_3(s) \neq 0$ eğrilikleri ile birim hızlı bir null eğri olsun ve (i), (ii) veya (iv) ifadelerinden biri sağlansın.

(i) sağlansın. Bu durumda,

$$
g(\alpha(s), \alpha(s)) = 2cs + 2c_1,\ c \in \mathbb{R}_0, c_1 \in \mathbb{R}
$$

eşitliği mevcuttur. Bu eşitliğin iki defa s'ye göre türevi alınır ve (2.16) kullanılırsa, kolayca $g(\alpha(s), N(s)) = 0$ eşitliği elde edilir ki bu da α eğrisinin bir rektifyen eğri olduğunu gösterir.

(ii) sağlansın. Bu durumda,

$$
g(\alpha(s), T(s)) = c, \quad c \in \mathbb{R}_0
$$

eşitliği mevcuttur. Bu eşitliğin s'ye göre türevi alınır ve (2.16) kullanılırsa, kolayca $g(\alpha(s), N(s)) = 0$ eşitliği elde edilir ki bu da α eğrisinin bir rektifyen eğri olması anlamına gelir.

Son olarak (iv) sağlansın. Böylece (2.21)'e sahip olunur. Böylece, (2.21)'deki ilk eşitliğin s'ye göre türevini alır ve (2.21)'deki ikinci eşitlik ile (2.16) kullanılırsa $g(\alpha(s), N(s)) = 0$ bulunur. Dolayısıyla α bir rektifyen eğridir. $\square$

Aşağıdaki teorem ile bir null rektifyen eğrinin parametrik denklemi elde edilir.

Teorem 2.2.5. *$\alpha : I \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}_1^4$ eğrisi, $\mathbb{R}_1^4$'de $k_1(s) = 1$, $k_2(s) \neq 0$ ve $k_3(s) \neq 0$ eğrilikleri ile birim hızlı bir null eğri olsun. Bu durumda α bir spacelike (timelike) yer vektörü ile bir null rektifyen eğridir gerek ve yeter şart $y(t)$ yarı-Riemann küre S_1^3'de (yarı-Riemann hiperbolik uzay H_0^3'da) yatan bir birim hızlı timelike (spacelike) eğri olmak üzere α eğrisi*

$$\alpha(t) = \sqrt{2}\ e^t\ y(t) \tag{2.23}$$

eşitliği ile verilir.

İspat. Kabul edelim ki; α eğrisi yer vektörü spacelike olan $k_1(s) = 1$, $k_2(s) \neq 0$ ve $k_3(s) \neq 0$ eğrilikleri ile $\mathbb{R}_1^4$'de birim hızlı bir null rektifyen eğri olsun. Bu durumda $g(\alpha, \alpha) > 0$ ve bir önceki teoeremin (i) ifadesinden

$$\rho^2(s) = g(\alpha(s), \alpha(s)) = 2cs + 2c_1, \quad c \in \mathbb{R}_0, c_1 \in \mathbb{R}$$

eşitliği mevcuttur. Burada $c \in \mathbb{R}_0^+$ dır.

Ayrıca, yarı-Riemann küre S_1^3'de yatan

$$y(s) = \frac{\alpha(s)}{\rho(s)} = \frac{\alpha(s)}{\|\alpha(s)\|}$$

ile verilen bir $y(s)$ eğrisini tanımlayalım. Böylece,

$$\alpha(s) = y(s)\sqrt{2cs + 2c_1} \tag{2.24}$$

elde edilir. (2.24)'ün s'ye göre türevi alınırsa,

$$T(s) = \frac{c}{\sqrt{2cs + 2c_1}} y(s) + \sqrt{2cs + 2c_1}\ y'(s) \tag{2.25}$$

ifadesi elde edilir. $g(y, y) = 1$ olduğundan $g(y', y) = 0$'dır. Bu durumda, null eğri tanımı ve (2.25)'den

$$0 = g(T, T) = g(y', y')(2cs + 2c_1) + \frac{c^2}{2(cs + c_1)}$$

sonucuna ulaşılır. Bu sonuçtan

$$g(y', y') = -\frac{c^2}{4(cs + c_1)^2} \tag{2.26}$$

elde edilir ki bu da y eğrisinin bir timelike eğri olduğu anlamına gelir. (2.26) eşitliğinden

$$\|y'(s)\| = \frac{c}{2(cs + c_1)} \tag{2.27}$$

elde edilir. y eğrisinin yay parametresi

$$t = \int_0^s \|y'(u)\| \, du$$

ile verilsin. Bu yay parametre denkleminde, (2.27) ifadesi kullanılırsa,

$$t = \frac{1}{2} \ln(cs + c_1)$$

elde edilir ki buradan

$$cs + c_1 = e^{2t} \tag{2.28}$$

sonucuna ulaşılır. (2.28), (2.24)'de kullanılırsa kolayca (2.23) elde edilir ki bu da ispatı tamamlar.

Tersine kabul edelim ki; α, $y(t)$ pseudo-Riemann küre S_1^3 'de yatan birim hızlı bir timelike eğri olmak üzere (2.23) ile tanımlı bir null eğri olsun. s, α null eğrisinin pseudo-yay parametresi ve $c \in \mathbb{R}_0, c_1 \in \mathbb{R}$ için $cs+c_1 > 0$ olmak üzere $t = \frac{1}{2}\ln(cs+c_1)$ ile $\alpha(t)$ eğrisi yeniden parametrize edilebilir. Böylece $\alpha(s) = y(s)\sqrt{2cs + 2c_1}$ 'ye sahip olunur. Sonuç olarak,

$$\rho^2(s) = g(\alpha(s), \alpha(s)) = 2(cs + c_1).$$

eşitliği elde edilir ki bir önceki teoremden, α $\mathbb{R}_1^4$ 'de yatan bir null rektifyen eğridir.

Yer vektörü timelike vektör olan $\mathbb{R}_1^4$'de birim hızlı bir $\alpha(s)$ null rektifyen eğrisi için de benzer ispat yapılır. □

Örnek 2.2.1. $\mathbb{R}_1^4$*'de*

$$\alpha(t) = \sqrt{2}e^t(\sinh t, \cosh t, 0, 0) \subset \mathbb{R}_1^4$$

ile verilen $\alpha(t)$ eğrisini alalım. $g(\alpha', \alpha') = 0$ olduğundan α, $\mathbb{R}_1^4$'de yatan bir null eğridir. Ayrıca bu eğri $\rho(t) = \sqrt{2}e^t$ olmak üzere $\alpha(t) = \rho(t)y(t)$ biçimindedir. Böylece $y(t) = (\sinh t, \cosh t, 0, 0)$'dir. $g(y, y) = 1$ ve $g(y', y') = -1$ olduğundan $y(t)$ pseudo-Riemann küre S_1^3'de yatan birim hızlı bir timelike eğridir. Böylece son teoremden; α, $\mathbb{R}_1^4$'de yatan bir null rektifyen eğridir.

Örnek 2.2.2. $\mathbb{R}^4_1$*'de*

$$\alpha(s) = \sqrt{2}e^t(\cosh t, \sinh t, 0, 0) \subset \mathbb{R}^4_1$$

ile verilen $\alpha(t)$ *eğrisini alalım.* $g(\alpha', \alpha') = 0$ *olduğundan* α*,* $\mathbb{R}^4_1$*'de yatan bir null eğridir. Ayrıca bu eğri* $\rho(t) = \sqrt{2}e^t$ *olmak üzere* $\alpha(t) = \rho(t)y(t)$ *biçimindedir. Böylece* $y(t) = (\cosh t, \sinh t, 0, 0)$ *dir.* $g(y, y) = -1$ *ve* $g(y', y') = 1$ *olduğundan* $y(t)$ *pseudo-Riemann hiperbolik uzay* H^3_0*'da yatan birim hızlı bir spacelike eğridir. Böylece son teoremden;* α*,* $\mathbb{R}^4_1$*'de yatan bir null rektifyen eğridir.*

BÖLÜM 3

MİNKOWSKİ SPACETİME'DA Q^3 LIGHT KONİ ÜZERİNDEKİ YÜZEYLER

Minkowski Spacetime'da Q^3 light koni üzerinde yatan dejenere olmayan bir yüzeyin yapı denklemleri; yüzey boyunca $\mathbb{R}^4_1$'in ikisi null, ikisi spacelike vektör alanından oluşan bir çatı alanı kullanılarak, Lui tarafından [6]'da elde edilmiştir. Bu bölümde, aynı yüzeyin yapı denklemleri ve integrallenebilme şartları yüzey boyunca $\mathbb{R}^4_1$'in yeni tanımlanan lightlike çatı alanı kullanarak incelendi. Daha sonra, bu yüzeyin Gauss ve ortalama eğrilikleri arasındaki ilişkiyi veren bir eşitlik elde edilerek, bu eşitlikten bazı teorem ve sonuçlara ulaşıldı. Yüzeyin sıfır ortalama eğrilikli bir yüzey olması durumunda bu yüzeye denk olan yüzeyler araştırıldı. Son olarak light koni üzerindeki bir yüzeyin konformal denk yüzeyi ve türetilen yüzeyi ele alınarak, bu yüzeylerin durumu verilen yüzeyin sıfır ortalama eğriliğe sahip olması hali için incelendi.

3.1 Q^3 Light Koni Üzerindeki Yüzeyler

Minkowski Spacetime'da irtibatlı, yönlendirilmiş 2-boyutlu bir manifold M ve $x : M \longrightarrow \mathbb{R}^4_1$, (u,v) isothermal parametreleri ile bir yüzey olsun. Bu durumda, $dx = x_u du + x_v dv$ olmak üzere,

$$\tilde{g} = \langle dx, dx \rangle = 2e^w(du^2 + dv^2) \tag{3.1}$$

fonksiyonu $x(u,v)$ yüzeyi üzerinde bir metrik tanımlar.

$$\tilde{g} = \langle x_u, x_u \rangle du^2 + 2 \langle x_u, x_v \rangle dudv + \langle x_v, x_v \rangle dv^2$$

olduğundan

$$\langle x_u, x_u \rangle = \langle x_v, x_v \rangle = 2e^w, \qquad \langle x_u, x_v \rangle = 0 \tag{3.2}$$

dır.

Burada $z = u + iv$ dönüşümü ile

$$dz = du + idv$$
$$d\bar{z} = du - idv$$

eşitliklerinden

$$dz \otimes d\bar{z} = d\bar{z} \otimes dz = du^2 + dv^2$$

olur ve (3.1)'deki $\tilde{g}$ metriği

$$\tilde{g} = \langle dx, dx \rangle = e^w (dz \otimes d\bar{z} + d\bar{z} \otimes dz) \tag{3.3}$$

ifadesine dönüşür. Ayrıca, $dx = x_z dz + x_{\bar{z}} d\bar{z}$ olduğundan

$$\langle dx, dx \rangle = \langle x_z, x_z \rangle dz^2 + \langle x_z, x_{\bar{z}} \rangle dz \otimes d\bar{z} + \langle x_{\bar{z}}, x_z \rangle d\bar{z} \otimes dz + \langle x_{\bar{z}}, x_{\bar{z}} \rangle d\bar{z}^2$$

olarak yazılır ve (3.3)'den

$$\langle x_z, x_z \rangle = \langle x_{\bar{z}}, x_{\bar{z}} \rangle = 0, \qquad \langle x_z, x_{\bar{z}} \rangle = \langle x_{\bar{z}}, x_z \rangle = e^w \tag{3.4}$$

sonucuna ulaşılır.

$$\partial_z = \frac{\partial}{\partial_z} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial_u} - i\frac{\partial}{\partial_v}\right), \qquad \partial_{\bar{z}} = \frac{\partial}{\partial_{\bar{z}}} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial_u} + i\frac{\partial}{\partial_v}\right) \tag{3.5}$$

Cauchy-Riemann operatörleri kullanılarak;

$$\begin{aligned} x_z &= \tfrac{1}{2}(x_u - ix_v) \\ x_{\bar{z}} &= \tfrac{1}{2}(x_u + ix_v) \end{aligned} \tag{3.6}$$

eşitlikleri elde edilir.

Şimdi, (u, v) isothermal parametreleri ile Q^3 light koni üzerinde $x : M \to Q^3$ yüzeyini alalım. $x(u, v)$ yüzeyi üzerine indirgenen metrik (3.3)'den

$$g = \langle dx, dx \rangle = e^w (dz \otimes d\bar{z} + d\bar{z} \otimes dz)$$

ile verilir.

$x(u, v) \in Q^3$ olduğundan $\langle x, x \rangle = 0$ dır. Bu son eşitlikte z ve $\bar{z}$ ye göre kısmi türevler alınırsa

$$\langle x, x_z \rangle = 0, \quad \langle x, x_{\bar{z}} \rangle = 0 \tag{3.7}$$

eşitlikleri elde edilir.

(3.4) ve (3.7) eşitliklerinden aşağıdaki sonuç verilir.

Sonuç 3.1.1. *$x : M \longrightarrow Q^3 \subset \mathbb{R}^4_1$, (u,v) isothermal parametreleri ile light koni üzerinde bir yüzey olsun. $z = u + iv$ olmak üzere $x(u,v)$ yüzeyi üzerinde,*

$$g = \langle dx, dx \rangle = 2e^w (du^2 + dv^2) = e^w (dz \otimes d\bar{z} + d\bar{z} \otimes dz) \tag{3.8}$$

metriği alınırsa

$$\langle x, x \rangle = \langle x, x_z \rangle = \langle x, x_{\bar{z}} \rangle = \langle x_z, x_z \rangle = \langle x_{\bar{z}}, x_{\bar{z}} \rangle = 0, \qquad \langle x_z, x_{\bar{z}} \rangle = e^w \tag{3.9}$$

eşitlikleri elde edilir [6].

Ayrıca, (3.9) eşitliğinde z ve $\bar{z}$ ye göre kısmi türevler alınırsa;

$$\begin{aligned} &\langle x_z, x_{zz} \rangle = \langle x_z, x_{z\bar{z}} \rangle = \langle x_{\bar{z}}, x_{\bar{z}\bar{z}} \rangle = \langle x_{\bar{z}}, x_{z\bar{z}} \rangle = \langle x, x_{zz} \rangle = \langle x, x_{\bar{z}\bar{z}} \rangle = 0, \\ &\langle x_{\bar{z}}, x_{zz} \rangle = e^w w_z, \qquad \langle x_z, x_{\bar{z}\bar{z}} \rangle = e^w w_{\bar{z}}, \qquad \langle x, x_{z\bar{z}} \rangle = -e^w \end{aligned} \tag{3.10}$$

eşitlikleri elde edilir [6].

(1.4), (3.5) ve (3.8)'den g metriğinin Laplace operatörü,

$$\Delta = \frac{1}{2e^w} \left(\frac{\partial^2}{\partial u^2} + \frac{\partial^2}{\partial v^2} \right) = \frac{1}{2e^w} 4 \partial_z \partial_{\bar{z}} = 2e^{-w} \partial_z \partial_{\bar{z}} \tag{3.11}$$

dir. Bu durumda;

$$\Delta x = 2e^{-w} x_{z\bar{z}} \tag{3.12}$$

dir ve ayrıca (1.5) ve (3.11)'den $x(u,v)$ yüzeyinin K Gauss eğriliği,

$$K = -\frac{1}{2} \triangle w = -\frac{1}{2} \left(2e^{-w} w_{z\bar{z}} \right) = -e^{-w} w_{z\bar{z}} \tag{3.13}$$

olarak elde edilir.

Lemma 3.1.1. *Q^3 light koni üzerinde (u,v) isothermal parametreleri ile verilen $x(u,v)$ yüzeyi için Christoffel sembolleri*

$$\begin{aligned} \Gamma^1_{11} = \Gamma^2_{12} = -\Gamma^1_{22} = \tfrac{1}{2} (w_z + w_{\bar{z}}) \\ \Gamma^1_{12} = \Gamma^2_{22} = -\Gamma^2_{11} = \tfrac{1}{2} i (w_z - w_{\bar{z}}) \end{aligned} \tag{3.14}$$

ile verilir.

İspat. Q^3 light koni üzerinde (u,v) isothermal parametreleri ile verilen $x(u,v)$ yüzeyi için (3.8) metriği alınırsa

$$E = G = g_{11} = 2e^w, \quad F = g_{12} = g_{21} = 0, \quad Q = EG - F^2 = 4e^{2w}$$

olup, bu değerler (1.3) denklemlerinde dikkate alınırsa, Γ_{11}^1

$$\Gamma_{11}^1 = \frac{1}{Q}\begin{vmatrix} E_u/2 & F \\ F_u - E_u/2 & G \end{vmatrix} = \frac{1}{4e^{2w}}\begin{vmatrix} w_u e^w & 0 \\ -w_u e^w & 2e^w \end{vmatrix} = \frac{1}{2}w_u$$

ifadesine eşit olur. Benzer tartışmalarla;

$$\Gamma_{11}^1 = \Gamma_{12}^2 = -\Gamma_{22}^1 = \frac{1}{2}w_u \quad \Gamma_{12}^1 = \Gamma_{22}^2 = -\Gamma_{11}^2 = \frac{1}{2}w_v \tag{3.15}$$

eşitlikleri elde edilir. w_u ve w_v değerleri (3.6) eşitliklerinde dikkate alınırsa,

$$w_u = (w_z + w_{\bar{z}}) \qquad w_v = i(w_z - w_{\bar{z}}) \tag{3.16}$$

sonuçlarına ulaşılır. (3.15) ve (3.16) eşitliklerinden (3.14) elde edilir ki bu da ispatı tamamlar. □

Böylece aşağıdaki teorem verilebilir.

Teorem 3.1.1. *Q^3 light koni üzerinde bir $x(u,v)$ yüzeyinin K Gauss eğriliğinin Christoffel sembolleri cinsinden ifadesi*

$$K = -e^{-w}w_{z\bar{z}} = -e^{-w}\left(\left(\Gamma_{11}^1\right)_{\bar{z}} + \left(i\Gamma_{11}^2\right)_{\bar{z}}\right) \tag{3.17}$$

eşitliği ile verilir.

İspat. (3.6) eşitliği ve (3.15) eşitliklerinden

$$w_z = \frac{1}{2}(w_u - iw_v) = \frac{1}{2}w_u - i\frac{1}{2}w_v = \Gamma_{11}^1 + i\Gamma_{11}^2$$

ifadesi elde edilir. Bu son eşitliğin $\bar{z}$'ğe göre kısmi türevi alınırsa

$$w_{z\bar{z}} = \left(\Gamma_{11}^1 + i\Gamma_{11}^2\right)_{\bar{z}} = \left(\Gamma_{11}^1\right)_{\bar{z}} + \left(i\Gamma_{11}^2\right)_{\bar{z}}$$

eşitliği elde edilir. Bu eşitlik (3.13)'de dikkate alınırsa (3.17) kolayca elde edilir. □

Q^3 light koni üzerinde

$$y = y(u,v) = -\frac{1}{2} \triangle x - \frac{1}{8}\langle \triangle x, \triangle x\rangle x \tag{3.18}$$

ile tanımlı bir y yüzeyini alalım.

(3.12) ile (3.10)'daki $\langle x, x_{z\bar{z}}\rangle = -e^{w}$ ve $\langle x_z, x_{z\bar{z}}\rangle = \langle x_{\bar{z}}, x_{z\bar{z}}\rangle = 0$ eşitliklerinden hareketle,

$$\begin{aligned}
\langle \triangle x, x\rangle &= \langle 2e^{-w}x_{z\bar{z}}, x\rangle = 2e^{-w}\langle x_{z\bar{z}}, x\rangle = 2e^{-w}(-e^{w}) = -2 \\
\langle \triangle x, x_z\rangle &= \langle 2e^{-w}x_{z\bar{z}}, x_z\rangle = 2e^{-w}\langle x_{z\bar{z}}, x_z\rangle = 2e^{-w}(0) = 0 \\
\langle \triangle x, x_{\bar{z}}\rangle &= \langle 2e^{-w}x_{z\bar{z}}, x_{\bar{z}}\rangle = 2e^{-w}\langle x_{z\bar{z}}, x_{\bar{z}}\rangle = 2e^{-w}(0) = 0
\end{aligned} \tag{3.19}$$

sonuçlarına ulaşılır. (3.19) ile (3.9)'daki $\langle x, x\rangle = \langle x, x_z\rangle = \langle x, x_{\bar{z}}\rangle = 0$ eşitliklerden

$$\begin{aligned}
\langle y, y\rangle &= \left\langle -\tfrac{1}{2}\triangle x - \tfrac{1}{8}\langle \triangle x, \triangle x\rangle x, -\tfrac{1}{2}\triangle x - \tfrac{1}{8}\langle \triangle x, \triangle x\rangle x\right\rangle \\
&= \tfrac{1}{4}\langle \triangle x, \triangle x\rangle + 2.\tfrac{1}{16}\langle \triangle x, \triangle x\rangle\langle \triangle x, x\rangle + \tfrac{1}{64}\langle \triangle x, \triangle x\rangle\langle x, x\rangle \\
&= \tfrac{1}{4}\langle \triangle x, \triangle x\rangle + 2.\tfrac{1}{16}\langle \triangle x, \triangle x\rangle .(-2) \\
&= 0 \\
\langle x, y\rangle &= \left\langle x, -\tfrac{1}{2}\triangle x - \tfrac{1}{8}\langle \triangle x, \triangle x\rangle x\right\rangle \\
&= -\tfrac{1}{2}\langle x, \triangle x\rangle - \tfrac{1}{8}\langle \triangle x, \triangle x\rangle\langle x, x\rangle \\
&= 1 \\
\langle x_z, y\rangle &= \left\langle x_z, -\tfrac{1}{2}\triangle x - \tfrac{1}{8}\langle \triangle x, \triangle x\rangle x\right\rangle \\
&= -\tfrac{1}{2}\langle x_z, \triangle x\rangle - \tfrac{1}{8}\langle \triangle x, \triangle x\rangle\langle x_z, x\rangle \\
&= 0 \\
\langle x_{\bar{z}}, y\rangle &= \left\langle x_{\bar{z}}, -\tfrac{1}{2}\triangle x - \tfrac{1}{8}\langle \triangle x, \triangle x\rangle x\right\rangle \\
&= -\tfrac{1}{2}\langle x_{\bar{z}}, \triangle x\rangle - \tfrac{1}{8}\langle \triangle x, \triangle x\rangle\langle x_{\bar{z}}, x\rangle \\
&= 0
\end{aligned}$$

ifadeleri elde edilir.

Böylece aşağıdaki sonucu ifade edebiliriz.

Sonuç 3.1.2. *Bir $x : M \longrightarrow Q^3 \subset \mathbb{R}^4_1$ yüzeyi ve (3.18) ile tanımlanan y yüzeyi için*

$$\langle x, y\rangle = 1, \quad \langle y, y\rangle = \langle x_z, y\rangle = \langle x_{\bar{z}}, y\rangle = 0 \tag{3.20}$$

eşitlikleri geçerlidir [6].

Bu sonuçtan aşağıdaki lemmayı verebiliriz.

Lemma 3.1.2. *Bir $x : M \longrightarrow Q^3 \subset \mathbb{R}^4_1$ yüzeyi ve (3.18) ile tanımlanan y yüzeyi için*

$$\begin{aligned}
&\langle x, y_z\rangle = \langle x, y_{\bar{z}}\rangle = \langle y_z, y\rangle = \langle y_{\bar{z}}, y\rangle = 0 \\
&\langle x_z, y_z\rangle = -\varphi, \quad \langle x_{\bar{z}}, y_{\bar{z}}\rangle = -\bar{\varphi}, \quad \langle x_{\bar{z}}, y_z\rangle = \langle y_{\bar{z}}, x_z\rangle = -\lambda
\end{aligned} \tag{3.21}$$

eşitlikleri vardır.

İspat. (3.20)'deki eşitliklerin z ve $\bar{z}$'ğe göre kısmi türevleri alınırsa,

$$\begin{aligned}
\langle x, y\rangle = 1 \Longrightarrow \quad & \langle x_z, y\rangle + \langle x, y_z\rangle = 0 \Longrightarrow \langle x, y_z\rangle = -\langle x_z, y\rangle = 0 \\
& \langle x_{\bar{z}}, y\rangle + \langle x, y_{\bar{z}}\rangle = 0 \Longrightarrow \langle x, y_{\bar{z}}\rangle = -\langle x_{\bar{z}}, y\rangle = 0 \\
\langle y, y\rangle = 0 \Longrightarrow \quad & 2\langle y_z, y\rangle = 0 \Longrightarrow \langle y_z, y\rangle = 0 \\
& 2\langle y_{\bar{z}}, y\rangle = 0 \Longrightarrow \langle y_{\bar{z}}, y\rangle = 0 \\
\langle x_z, y\rangle = 0 \Longrightarrow \quad & \langle x_{zz}, y\rangle + \langle x_z, y_z\rangle = 0 \Longrightarrow \langle x_z, y_z\rangle = -\langle x_{zz}, y\rangle = -\varphi \\
& \langle x_{z\bar{z}}, y\rangle + \langle x_z, y_{\bar{z}}\rangle = 0 \Longrightarrow \langle x_z, y_{\bar{z}}\rangle = -\langle x_{z\bar{z}}, y\rangle = -\lambda \\
\langle x_{\bar{z}}, y\rangle = 0 \Longrightarrow \quad & \langle x_{\bar{z}z}, y\rangle + \langle x_{\bar{z}}, y_z\rangle = 0 \Longrightarrow \langle x_{\bar{z}}, y_z\rangle = -\langle x_{\bar{z}z}, y\rangle = -\lambda \\
& \langle x_{\bar{z}\bar{z}}, y\rangle + \langle x_{\bar{z}}, y_{\bar{z}}\rangle = 0 \Longrightarrow \langle x_{\bar{z}}, y_{\bar{z}}\rangle = -\langle x_{\bar{z}\bar{z}}, y\rangle = -\bar{\varphi}
\end{aligned}$$

sonuçları elde edilir ki bu da ispatı tamamlar. □

Ayrıca, $x(u,v)$ yüzeyi için $u^1 = u$ ve $u^2 = v$ olmak üzere

$$\langle x_{u^i u^j}, y\rangle = 2h_{ij}e^w \tag{3.22}$$

dir, burada h_{ij} ler $x(u,v)$ yüzeyinin ikinci temel formunun bileşenleridir [17].

(3.2)'deki ilk eşitlikten, $\|x_u\| = \|x_v\| = (2e^w)^{1/2}$ olup, $(2e^w)^{-1/2}\, x_u$ ve $(2e^w)^{-1/2}\, x_v$ ortonormal (birim dik) vektörlerdir.

Ayrıca (3.9) ile (3.20)'deki eşitlikler dikkate alınarak, aşağıdaki sonuç elde edilir.

Sonuç 3.1.3. *Q^3 light koni üzerindeki $x(u,v)$ yüzeyi boyunca*

$$\left\{x, y, (2e^w)^{-1/2}\, x_u, (2e^w)^{-1/2}\, x_v\right\} \tag{3.23}$$

kümesi $\mathbb{R}^4_1$ üzerinde bir asimtotik ortonormal çatı alanıdır [6].

Lemma 3.1.3. *Q^3 light koni üzerindeki $x(u,v)$ yüzeyi boyunca*

$$\left\{x, -y, \sqrt{2}\,(2e^w)^{-1/2}\, x_z, \sqrt{2}\,(2e^w)^{-1/2}\,(1-i)\, x_{\bar{z}}\right\} \tag{3.24}$$

kümesi $\mathbb{R}^4_1$ üzerinde bir lightlike çatı (null tetrat) alanıdır.

İspat. (3.23) quasi-ortonormal bazı ve (3.6) eşitlikleri dikkate alınarak

$$\begin{aligned}
\tfrac{1}{\sqrt{2}}((2e^{w})^{-1/2}\,x_u + i\,(2e^{w})^{-1/2}\,x_v) &= \tfrac{1}{\sqrt{2}}\,(2e^{w})^{-1/2}\,(x_u + ix_v) \\
&= \tfrac{1}{\sqrt{2}}\,(2e^{w})^{-1/2}\,(x_u + ix_v) \\
&= \tfrac{1}{\sqrt{2}}\,(2e^{w})^{-1/2}\,2x_{\bar{z}} \\
&= \sqrt{2}\,(2e^{w})^{-1/2}\,x_{\bar{z}}
\end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned}
\tfrac{1}{\sqrt{2}}((2e^{w})^{-1/2}\,x_u - i\,(2e^{w})^{-1/2}\,x_v) &= \tfrac{1}{\sqrt{2}}\,(2e^{w})^{-1/2}\,(x_u - ix_v) \\
&= \tfrac{1}{\sqrt{2}}\,(2e^{w})^{-1/2}\,(x_u - ix_v) \\
&= \tfrac{1}{\sqrt{2}}\,(2e^{w})^{-1/2}\,2x_{z} \\
&= \sqrt{2}\,(2e^{w})^{-1/2}\,x_{z}
\end{aligned}$$

elde edilir. Üstelik; herbiri null olan baz vektörleri için,

$$\langle x, -y\rangle = -1, \qquad \left\langle \sqrt{2}\,(2e^{w})^{-1/2}\,x_z, \sqrt{2}\,(2e^{w})^{-1/2}\,(1-i)\,x_{\bar{z}} \right\rangle = 1$$

dir. Böylece (3.24), $\mathbb{R}^4_1$ üzerinde bir lightlike ortonormal çatı (null tetrat) alanıdır. □

$\mathbb{R}^4_1$ üzerinde bir lightlike ortonormal çatılar ile ilgili yeni bir tanımlama yapalım.

Tanım 3.1.1. *$\mathbb{R}^4_1$'in $B = \{f, f^*, k, l\}$ quasi-ortonormal bazı yardımıyla*

$$\langle f, f^*\rangle = \langle m, \bar{m}\rangle = 1$$

olacak şekilde ikisi reel null vektör, ikisi de kompleks null vektörden oluşan

$$T = \left\{ f, f^*, m = \frac{(1+i)}{2}(k + il), \bar{m} = \frac{(1-i)}{2}(k - il) \right\}$$

çatısına $\mathbb{R}^4_1$'de bir lightlike baz denir.

Önerme 3.1.1. *Q^3 light koni üzerindeki $x(u, v)$ yüzeyi boyunca*

$$\left\{ x, y, (2e^{w})^{-1/2}\,(1+i)\,x_z, (2e^{w})^{-1/2}\,(1-i)\,x_{\bar{z}} \right\} \tag{3.25}$$

kümesi $\mathbb{R}^4_1$ üzerinde bir lightlike çatı alanıdır.

İspat. $\langle x, x\rangle = \langle y, y\rangle = \langle x_z, x_z\rangle = \langle x_{\bar{z}}, x_{\bar{z}}\rangle = 0$ olduğundan herbiri null ve

$$\langle x, y\rangle = \left\langle (2e^{w})^{-1/2}\,(1+i)\,x_z, (2e^{w})^{-1/2}\,(1-i)\,x_{\bar{z}} \right\rangle = 1$$

olduğundan; (3.25), $\mathbb{R}^4_1$ üzerinde bir lightlike çatı alanıdır. □

$x_z, x_{\bar{z}}$ ve y'nin z ve $\bar{z}$'ğe göre kısmi türevleri $\mathbb{R}_1^4$'de yatacağından, $x(u,v)$ yüzeyi boyunca $\mathbb{R}_1^4$ üzerindeki (3.25)'deki lightlike ortonormal çatı alanı cinsinden yazılabilir. Bu durumda

$$x_{zz} = a_1 x + b_1 y + c_1 \left(2e^w\right)^{-1/2} (1+i)\, x_z + d_1 \left(2e^w\right)^{-1/2} (1-i)\, x_{\bar{z}}$$

olacak şekilde M üzerinde a_1, b_1, c_1, d_1 diferensiyellenebilir fonksiyonları vardır. (3.9), (3.10) ve (3.20) eşitlikleri dikkate alınarak x_{zz}'nin x, y, x_z ve $x_{\bar{z}}$ ile iç çarpımından

$$\begin{aligned}
\langle x_{zz}, x\rangle &= b_1 = 0,\\
\langle x_{zz}, y\rangle &= a_1 = \varphi,\\
\langle x_{zz}, x_z\rangle &= d_1 \left(2e^w\right)^{-1/2} e^w (1-i) = 0 \Longrightarrow d_1 = 0,\\
\langle x_{zz}, x_{\bar{z}}\rangle &= c_1 \left(2e^w\right)^{-1/2} e^w (1+i) = e^w w_z \Longrightarrow c_1 = \frac{w_z}{\left(2e^w\right)^{-1/2} (1+i)}
\end{aligned}$$

değerleri elde edilir. Bu değerler x_{zz} eşitliğinde yerine yazılırsa

$$x_{zz} = \varphi x + w_z x_z$$

elde edilir. Benzer şekilde

$$x_{z\bar{z}} = a_2 x + b_2 y + c_2 \left(2e^w\right)^{-1/2} (1+i)\, x_z + d_2 \left(2e^w\right)^{-1/2} (1-i)\, x_{\bar{z}}$$

olacak şekilde M üzerinde a_2, b_2, c_2, d_2 diferensiyellenebilir fonksiyonları vardır. (3.9), (3.10) ve (3.20) eşitlikleri dikkate alınarak $x_{z\bar{z}}$'nin x, y, x_z ve $x_{\bar{z}}$ ile iç çarpımından

$$\begin{aligned}
\langle x_{z\bar{z}}, x\rangle &= b_2 = -e^w,\\
\langle x_{z\bar{z}}, y\rangle &= a_2 = \lambda,\\
\langle x_{z\bar{z}}, x_z\rangle &= d_2 \left(2e^w\right)^{-1/2} e^w (1-i) = 0 \Longrightarrow d_2 = 0\\
\langle x_{z\bar{z}}, x_{\bar{z}}\rangle &= c_2 \left(2e^w\right)^{-1/2} e^w (1+i) = 0 \Longrightarrow c_2 = 0
\end{aligned}$$

değerleri elde edilir. Bu değerler $x_{z\bar{z}}$ eşitliğinde yerine yazılırsa

$$x_{z\bar{z}} = \lambda x - e^w y$$

sonucuna ulaşılır.

$$x_{\bar{z}\bar{z}} = a_3 x + b_3 y + c_3 \left(2e^w\right)^{-1/2} (1+i)\, x_z + d_3 \left(2e^w\right)^{-1/2} (1-i)\, x_{\bar{z}}$$

olacak şekilde M üzerinde a_3, b_3, c_3, d_3 diferensiyellenebilir fonksiyonları vardır. (3.9), (3.10) ve (3.20) eşitlikleri dikkate alınarak x_{zz}'nin x, y, x_z ve $x_{\bar{z}}$ ile iç çarpımından

$$
\begin{aligned}
&\langle x_{\bar{z}\bar{z}}, x\rangle = b_3 = 0, \\
&\langle x_{\bar{z}\bar{z}}, y\rangle = a_3 = \overline{\langle x_{zz}, y\rangle} = \bar{\varphi}, \\
&\langle x_{\bar{z}\bar{z}}, x_z\rangle = d_3 \left(2e^w\right)^{-1/2} e^w (1-i) = e^w w_{\bar{z}} \Longrightarrow d_3 = \frac{w_{\bar{z}}}{\left(2e^w\right)^{-1/2}(1-i)}, \\
&\langle x_{\bar{z}\bar{z}}, x_{\bar{z}}\rangle = c_3 \left(2e^w\right)^{-1/2} e^w (1+i) = 0 \Longrightarrow c_3 = 0
\end{aligned}
$$

değerleri elde edilir. Bu değerler $x_{\bar{z}\bar{z}}$ eşitliğinde yerine yazılırsa

$$x_{\bar{z}\bar{z}} = \overline{\varphi} x + w_{\bar{z}} x_{\bar{z}}$$

sonucuna ulaşılır.

$$y_z = a_4 x + b_4 y + c_4 \left(2e^w\right)^{-1/2}(1+i)\, x_z + d_4 \left(2e^w\right)^{-1/2}(1-i)\, x_{\bar{z}}$$

olacak şekilde M üzerinde a_4, b_4, c_4, d_4 diferensiyellenebilir fonksiyonları vardır. (3.9), (3.10), (3.20) ve (3.21) eşitlikleri dikkate alınarak y_z'nin x, y, x_z ve $x_{\bar{z}}$ ile iç çarpımından

$$
\begin{aligned}
&\langle y_z, x\rangle = b_4 = 0, \\
&\langle y_z, y\rangle = a_4 = 0, \\
&\langle y_z, x_z\rangle = d_4 \left(2e^w\right)^{-1/2} e^w (1-i) = -\varphi \Longrightarrow d_4 = \frac{-\varphi}{\left(2e^w\right)^{-1/2} e^w (1-i)}, \\
&\langle y_z, x_{\bar{z}}\rangle = c_4 \left(2e^w\right)^{-1/2} e^w (1+i) = -\lambda \Longrightarrow c_4 = \frac{-\lambda}{\left(2e^w\right)^{-1/2} e^w (1+i)}
\end{aligned}
$$

değerleri elde edilir. Bu değerler y_z eşitliğinde yerine yazılırsa

$$y_z = -\lambda e^{-w} x_z - \varphi e^{-w} x_{\bar{z}}$$

sonucuna ulaşılır.

$$y_{\bar{z}} = a_5 x + b_5 y + c_5 \left(2e^w\right)^{-1/2}(1+i)\, x_z + d_5 \left(2e^w\right)^{-1/2}(1-i)\, x_{\bar{z}}$$

olacak şekilde M üzerinde a_5, b_5, c_5, d_5 diferensiyellenebilir fonksiyonları vardır. (3.9), (3.10), (3.20) ve (3.21) eşitlikleri dikkate alınarak $y_{\bar{z}}$'nin x, y, x_z ve $x_{\bar{z}}$ ile iç çarpımdan

$$
\begin{aligned}
&\langle y_{\bar{z}}, x\rangle = b_5 = 0, \\
&\langle y_{\bar{z}}, y\rangle = a_5 = 0, \\
&\langle y_{\bar{z}}, x_z\rangle = d_5 \left(2e^w\right)^{-1/2} e^w (1-i) = -\lambda \Longrightarrow d_5 = \frac{-\lambda}{\left(2e^w\right)^{-1/2} e^w (1-i)}, \\
&\langle y_{\bar{z}}, x_{\bar{z}}\rangle = c_5 \left(2e^w\right)^{-1/2} e^w (1+i) = -\bar{\varphi} \Longrightarrow c_5 = \frac{-\bar{\varphi}}{\left(2e^w\right)^{-1/2} e^w (1+i)}
\end{aligned}
$$

değerleri elde edilir. Bu değerler $y_{\bar{z}}$ eşitliğinde yerine yazılırsa

$$y_{\bar{z}} = -\bar{\varphi}e^{-w}x_z - \lambda e^{-w}x_{\bar{z}}$$

sonucuna ulaşılır.

Böylece aşağıdaki teorem verilebilir.

Teorem 3.1.2. *$x : M \longrightarrow Q^3 \subset \mathbb{R}^4_1$ light koni üzerinde bir yüzey olsun ve $x(u,v)$ yüzeyi boyunca*

$$\left\{x, y, (2e^w)^{-1/2}(1+i)\,x_z, (2e^w)^{-1/2}(1-i)\,x_{\bar{z}}\right\} \subset \mathbb{R}^4_1$$

lightlike çatısı için $\langle x_{z\bar{z}}, y\rangle = \lambda$ ve $\langle x_{zz}, y\rangle = \varphi$ olmak üzere, $x(u,v)$ yüzeyinin yapı denklemleri

$$\begin{aligned}
&x_z = x_z, \quad x_{\bar{z}} = x_{\bar{z}}\\
&x_{zz} = \varphi x + w_z x_z\\
&x_{\bar{z}\bar{z}} = \bar{\varphi}x + w_{\bar{z}}x_{\bar{z}}\\
&x_{z\bar{z}} = \lambda x - e^w y\\
&y_z = -\lambda e^{-w}x_z - \varphi e^{-w}x_{\bar{z}}\\
&y_{\bar{z}} = -\bar{\varphi}e^{-w}x_z - \lambda e^{-w}x_{\bar{z}}
\end{aligned} \tag{3.26}$$

şeklindedir.

(3.12) ile (3.19)'daki $\langle \triangle x, x\rangle = -2$ eşitliği göz önüne alınırsa;

$$\begin{aligned}
\lambda = \langle x_{z\bar{z}}, y\rangle &= \left\langle \tfrac{\triangle x}{2e^{-w}}, y\right\rangle = \tfrac{1}{2}e^w\langle \triangle x, y\rangle\\
&= \tfrac{1}{2}e^w\left\langle \triangle x, -\tfrac{1}{2}\triangle x - \tfrac{1}{8}\langle \triangle x, \triangle x\rangle x\right\rangle\\
&= \tfrac{1}{2}e^w\left\{-\tfrac{1}{2}\langle \triangle x, \triangle x\rangle - \tfrac{1}{8}\langle \triangle x, \triangle x\rangle\langle \triangle x, x\rangle\right\}\\
&= \tfrac{1}{2}e^w\left\{-\tfrac{1}{2}\langle \triangle x, \triangle x\rangle - \tfrac{1}{8}\langle \triangle x, \triangle x\rangle(-2)\right\}\\
&= \tfrac{1}{2}e^w\left\{-\tfrac{1}{4}\langle \triangle x, \triangle x\rangle\right\}\\
&= -\tfrac{1}{8}e^w\langle \triangle x, \triangle x\rangle
\end{aligned}$$

elde edilir. Ayrıca $x_{\bar{z}z} = x_{z\bar{z}} \Longrightarrow \bar{\lambda} = \overline{\langle x_{z\bar{z}}, y\rangle} = \langle y, x_{z\bar{z}}\rangle = \langle y, x_{\bar{z}z}\rangle = \lambda$ olup, $\lambda = \bar{\lambda} = -\frac{1}{8}e^w\langle \triangle x, \triangle x\rangle$ ile verilir.

Şimdi, $x_{zz\bar{z}} = x_{z\bar{z}z}$ eşitliğini ele alalım. (3.26)'daki yapı denklemleri göz önüne alınarak

$$
\begin{aligned}
x_{zz\bar{z}} &= (\varphi x + w_z x_z)_{\bar{z}} \\
&= \varphi_{\bar{z}} x + \varphi x_{\bar{z}} + w_{z\bar{z}} x_z + w_z x_{z\bar{z}} \\
&= \varphi_{\bar{z}} x + \varphi x_{\bar{z}} + w_{z\bar{z}} x_z + w_z (\lambda x - e^w y) \\
&= (w_z \lambda + \varphi_{\bar{z}}) x + w_{z\bar{z}} x_z + \varphi x_{\bar{z}} - w_z e^w y
\end{aligned}
$$

ve

$$
\begin{aligned}
x_{z\bar{z}z} &= (\lambda x - e^w y)_z \\
&= \lambda_z x + \lambda x_z - w_z e^w y - e^w y_z \\
&= \lambda_z x + \lambda x_z - w_z e^w y - e^w \left(-\lambda e^{-w} x_z - \varphi e^{-w} x_{\bar{z}}\right) \\
&= \lambda_z x + \lambda x_z - w_z e^w y + e^w \lambda e^{-w} x_z + e^w \varphi e^{-w} x_{\bar{z}} \\
&= \lambda_z x + \lambda x_z - w_z e^w y + \lambda x_z + \varphi x_{\bar{z}} \\
&= \lambda_z x + 2\lambda x_z + \varphi x_{\bar{z}} - w_z e^w y
\end{aligned}
$$

eşitlikleri elde edilir. Buradan,

$$
\begin{aligned}
\lambda_z = &\quad w_z \lambda + \varphi_{\bar{z}} \\
2\lambda = &\quad w_{z\bar{z}}
\end{aligned}
$$

sonuçlarına ulaşılır. Benzer şekilde $y_{z\bar{z}} = y_{\bar{z}z}$ eşitliği ve (3.26) yapı denklemlerinden

$$
\begin{aligned}
y_{z\bar{z}} &= \left(-\lambda e^{-w} x_z - \varphi e^{-w} x_{\bar{z}}\right)_{\bar{z}} \\
&= -\lambda_{\bar{z}} e^{-w} x_z + \lambda w_{\bar{z}} e^{-w} x_z - \lambda e^{-w} x_{z\bar{z}} \\
&\quad -\varphi_{\bar{z}} e^{-w} x_{\bar{z}} + \varphi w_{\bar{z}} e^{-w} x_{\bar{z}} - \varphi e^{-w} x_{\bar{z}\bar{z}} \\
&= -\lambda_{\bar{z}} e^{-w} x_z + \lambda w_{\bar{z}} e^{-w} x_z - \lambda e^{-w} (\lambda x - e^w y) \\
&-\varphi_{\bar{z}} e^{-w} x_{\bar{z}} + \varphi w_{\bar{z}} e^{-w} x_{\bar{z}} - \varphi e^{-w} (\bar{\varphi} x + w_{\bar{z}} x_{\bar{z}}) \\
&= \left(-\lambda^2 - \varphi\bar{\varphi}\right) e^{-w} x + \left(-\lambda_{\bar{z}} + \lambda w_{\bar{z}}\right) e^{-w} x_z - \varphi_{\bar{z}} e^{-w} x_{\bar{z}} + \lambda y
\end{aligned}
$$

ve

$$
\begin{aligned}
y_{\bar{z}z} &= \left(-\bar{\varphi} e^{-w} x_z - \lambda e^{-w} x_{\bar{z}}\right)_z \\
&= -\bar{\varphi}_z e^{-w} x_z + \bar{\varphi} w_z e^{-w} x_z - \bar{\varphi} e^{-w} x_{zz} \\
&\quad -\lambda_z e^{-w} x_{\bar{z}} + \lambda w_z e^{-w} x_{\bar{z}} - \lambda e^{-w} x_{\bar{z}z} \\
&= -\bar{\varphi}_z e^{-w} x_z + \bar{\varphi} w_z e^{-w} x_z - \bar{\varphi} e^{-w} (\varphi x + w_z x_z) \\
&\quad -\lambda_z e^{-w} x_{\bar{z}} + \lambda w_z e^{-w} x_{\bar{z}} - \lambda e^{-w} (\lambda x - e^w y) \\
&= \left(-\lambda^2 - \bar{\varphi}\varphi\right) e^{-w} x - \bar{\varphi}_z e^{-w} x_z + \left(-\lambda_z + \lambda w_z\right) e^{-w} x_{\bar{z}} + \lambda y
\end{aligned}
$$

eşitlikleri elde edilir. Buradan da,

$$
\begin{aligned}
\bar{\varphi}_z = &\quad \lambda_{\bar{z}} - \lambda w_{\bar{z}} \\
\varphi_{\bar{z}} = &\quad \lambda_z - \lambda w_z
\end{aligned}
$$

sonuçlarına ulaşılır.

Böylece aşağıdaki lemma verilebilir.

Lemma 3.1.4. *$x : M \longrightarrow Q^3 \subset \mathbb{R}^4_1$ light koni üzerinde bir yüzey olsun ve $x(u,v)$ yüzeyi boyunca*

$$\left\{x, y, (2e^w)^{-1/2}(1+i)\,x_z, (2e^w)^{-1/2}(1-i)\,x_{\bar{z}}\right\} \subset \mathbb{R}^4_1$$

çatısı için $\langle x_{z\bar{z}}, y\rangle = \lambda$ ve $\langle x_{zz}, y\rangle = \varphi$ olmak üzere, $x(u,v)$ yüzeyinin yapı denklemlerinin integrallenme şartlarından

$$\begin{aligned} 2\lambda &= w_{z\bar{z}} \\ \bar{\varphi}_z &= \lambda_{\bar{z}} - \lambda w_{\bar{z}} \\ \varphi_{\bar{z}} &= \lambda_z - \lambda w_z \end{aligned} \tag{3.27}$$

sonuçları elde edilir.

Lemma 3.1.5. *$x : M \longrightarrow Q^3 \subset \mathbb{R}^4_1$ light koni üzerinde bir bir yüzey olsun. $x(u,v)$ yüzeyinin yapı denklemlerinde kullanılan katsayıların K Gauss eğriliği cinsinden ifadeleri*

$$\begin{aligned} \lambda &= -\tfrac{1}{2}e^w K \\ \varphi_{\bar{z}} &= -\tfrac{1}{2}e^w K_z \\ \bar{\varphi}_z &= -\tfrac{1}{2}e^w K_{\bar{z}} \end{aligned} \tag{3.28}$$

dir.

İspat. (3.27)'nin ilk eşitliği, (3.13)'deki K eşitliğinde dikkate alınırsa

$$K = -e^{-w}w_{z\bar{z}} = -e^{-w}2\lambda \Longrightarrow \lambda = -\frac{1}{2}e^w K$$

elde edilir. Böylece (3.28)'deki ilk eşitlik elde edilir.

Şimdi elde edilen bu sonuç ile (3.13)'deki K değeri dikkate alınarak, λ'nın z ve $\bar{z}$'ğe göre kısmi türevi alınırsa

$$\begin{aligned} \lambda_z &= -\tfrac{1}{2}w_z e^w K - \tfrac{1}{2}e^w K_z \\ &= -\tfrac{1}{2}w_z e^w\left(-e^{-w}w_{z\bar{z}}\right) - \tfrac{1}{2}e^w K_z \\ &= \tfrac{1}{2}w_z w_{z\bar{z}} - \tfrac{1}{2}e^w K_z \\ &= \tfrac{1}{2}w_z\,(2\lambda) - \tfrac{1}{2}e^w K_z \\ &= \lambda w_z - \tfrac{1}{2}e^w K_z \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
\lambda_{\bar z} &= -\tfrac{1}{2} w_{\bar z} e^{w} K - \tfrac{1}{2} e^{w} K_{\bar z} \\
&= -\tfrac{1}{2} w_{\bar z} e^{w} \left(-e^{-w} w_{z\bar z}\right) - \tfrac{1}{2} e^{w} K_{\bar z} \\
&= \tfrac{1}{2} w_{\bar z} w_{z\bar z} - \tfrac{1}{2} e^{w} K_{z} \\
&= \tfrac{1}{2} w_{\bar z} \left(2\lambda\right) - \tfrac{1}{2} e^{w} K_{\bar z} \\
&= \lambda w_{\bar z} - \tfrac{1}{2} e^{w} K_{\bar z}
\end{aligned}
$$

eşitlikleri elde edilir. Bu eşitlikler (3.27)'nin ikinci ve üçüncü dekleminde dikkate alınırsa

$$
\begin{aligned}
\varphi_{\bar z} &= \lambda_{z} - \lambda w_{z} \\
&= \lambda w_{z} - \tfrac{1}{2} e^{w} K_{z} - \lambda w_{z} \\
&= -\tfrac{1}{2} e^{w} K_{z} \\
\bar\varphi_{z} &= \lambda_{\bar z} - \lambda w_{\bar z} \\
&= \lambda w_{\bar z} - \tfrac{1}{2} e^{w} K_{\bar z} - \lambda w_{\bar z} \\
&= -\tfrac{1}{2} e^{w} K_{\bar z}
\end{aligned}
$$

eşitliklerine ulaşılır ki, bu da (3.28)'deki son iki eşitliği verir. □

Tanım 3.1.2. *$x : M \longrightarrow Q^3$ bir yüzey olsun. Q^3'deki $x(u,v)$ yüzeyinin H ortalama eğriliği*

$$H = \frac{1}{2} \langle \triangle x, y \rangle \tag{3.29}$$

ile tanımlanır. Eğer $H = 0$ ise, $x(u,v)$ yüzeyine Q^3 üzerindeki sıfır ortalama eğrilikli yüzey denir [6].

Teorem 3.1.3. *$x : M \longrightarrow Q^3 \subset \mathbb{R}^4_1$ light koni üzerinde bir yüzey olsun. $x(u,v)$ yüzeyinin H ortalama eğriliği ile K Gauss eğriliği arasında*

$$K + 2H = 0 \tag{3.30}$$

bağıntısı geçerlidir.

İspat. (3.26)'daki yapı denklemlerinden $x_{z\bar z}$ eşitliği ile (3.28)'deki ilk eşitlik, (3.12) eşitliğinde dikkate alınırsa

$$
\begin{aligned}
\triangle x &= 2e^{-w}x_{z\bar{z}} \\
&= 2e^{-w}\left(\lambda x - e^{w}y\right) \\
&= 2e^{-w}\lambda x - 2y \\
&= 2e^{-w}\left(-\tfrac{1}{2}e^{w}K\right)x - 2y \\
&= -Kx - 2y
\end{aligned}
$$

sonucu elde edilir. Bu sonuç ile (3.20)'deki ilk iki eşitlik (3.29)'da göz önüne alınırsa

$$
\begin{aligned}
H &= \tfrac{1}{2}\left\langle \triangle x, y\right\rangle \\
&= \tfrac{1}{2}\left\langle -Kx - 2y, y\right\rangle \\
&= \tfrac{1}{2}\left\{-K\left\langle x, y\right\rangle - 2\left\langle y, y\right\rangle\right\} \\
&= -\tfrac{1}{2}K
\end{aligned}
$$

ifadesi elde edilir ki bu da ispatı tamamlar. □

x yüzeyinin ortalama eğriliği ile Gauss eğriliği arasındaki bu bağıntıdan aşağıdaki sonuca ve ortalama eğriliğin Christoffel semboller cinsinden ifadesini veren aşağıdaki lemmaya ulaşılır.

Sonuç 3.1.4. *$x : M \longrightarrow Q^3 \subset \mathbb{R}^4_1$ light koni üzerindeki yüzey için aşağıdaki ifadeler denktir.*

i) $x : M \longrightarrow Q^3$ bir flat yüzeydir.

ii) $x : M \longrightarrow Q^3$ yüzeyi sıfır ortalama eğrilikli bir yüzeydir.

Lemma 3.1.6. *Q^3 light koni üzerinde (u, v) isothermal parametreleri ile verilen $x(u, v)$ yüzeyinin H ortalama eğriliğinin, Christoffel semboller cinsinden ifadesi*

$$H = \frac{1}{2}\, e^{-w}\left(\left(\Gamma^1_{11}\right)_{\bar{z}} + \left(i\Gamma^2_{11}\right)_{\bar{z}}\right) \tag{3.31}$$

şeklindedir.

İspat. (3.30) eşitliği, (3.17) eşitliğinde dikkate alınırsa kolay bir hesaplama ile (3.31) elde edilir. □

Şimdi, x yüzeyinin sıfır ortalama eğrilikli bir yüzey olması durumunda denk olduğu yüzey tipini veren aşağıdaki teoremi verelim.

Teorem 3.1.4. *$x : M \longrightarrow Q^3$ yüzeyi, sıfır ortalama eğrilikli yüzey olsun. Bu durumda bu yüzey, aşağıdaki yüzeylerden birine denktir.*

i) $x : M \longrightarrow Q^3$ yüzeyi total umbilik bir yüzeydir.

ii) $x(u,v) = a(\sin u, \cos u, \sinh v, \cosh v)\,,\ 0 \neq a \in \mathbb{R}$

İspat. $x(u,v)$ yüzeyi sıfır ortalama eğrilikli bir yüzey olsun. Bu durumda, (3.30)'dan K Gauss eğriliği de sıfırdır. Böylece (3.28)'den, $\lambda = \varphi_{\bar{z}} = \bar{\varphi}_z = 0$ ve $\varphi_{\bar{z}} = 0$ $\Longrightarrow \varphi = sabit.$

Kabul edelim ki; $\varphi = sabit \neq 0$. K Gauss eğriliği sıfır olduğundan yüzey flattır. Bu durumda $w \equiv 0$ olacak şekilde parametreler seçilebilir. Parametre değişimini $\varphi = \bar{\varphi}$ olacak şekilde yapılabilir. $w = \lambda = 0$ olduğu dikkate alınarak (3.26) yapı denklemleri

$$\begin{cases} x_{zz} = \varphi x & x_{\bar{z}\bar{z}} = \varphi x & x_{z\bar{z}} = -y \\ y_z = -\varphi x_{\bar{z}} & y_{\bar{z}} = -\varphi x_z & \end{cases} \tag{3.32}$$

halini alır. (3.6)'dan

$$\begin{aligned} x_z = \tfrac{1}{2}(x_u - ix_v) \Longrightarrow \quad & x_{zz} = \tfrac{1}{2}\left\{\tfrac{1}{2}(x_u - ix_v)_u - i\tfrac{1}{2}(x_u - ix_v)_v\right\} \\ & x_{zz} = \tfrac{1}{4}(x_{uu} - x_{vv} - 2ix_{uv}) \\ x_{\bar{z}} = \tfrac{1}{2}(x_u + ix_v) \Longrightarrow \quad & x_{\bar{z}\bar{z}} = \tfrac{1}{2}\left\{\tfrac{1}{2}(x_u + ix_v)_u + i\tfrac{1}{2}(x_u + ix_v)_v\right\} \\ & x_{\bar{z}\bar{z}} = \tfrac{1}{4}(x_{uu} - x_{vv} + 2ix_{uv}) \\ x_z = \tfrac{1}{2}(x_u - ix_v) \Longrightarrow \quad & x_{z\bar{z}} = \tfrac{1}{2}\left\{\tfrac{1}{2}(x_u - ix_v)_u + i\tfrac{1}{2}(x_u - ix_v)_v\right\} \\ & x_{z\bar{z}} = \tfrac{1}{4}(x_{uu} + x_{vv}) \end{aligned} \tag{3.33}$$

sonuçları elde edilir. Ayrıca, (3.32)'deki y_z ve $y_{\bar{z}}$ eşitliklerinde, (3.6) dikkate alınırsa

$$\left.\begin{aligned} y_z = \tfrac{1}{2}(y_u - iy_v) \quad &= -\varphi x_{\bar{z}} \\ &= -\varphi\tfrac{1}{2}(x_u + ix_v) \end{aligned}\right\} \Longrightarrow y_u - iy_v = -\varphi(x_u + ix_v)$$

$$\left.\begin{aligned} y_{\bar{z}} = \tfrac{1}{2}(y_u + iy_v) \quad &= -\varphi x_z \\ &= -\varphi\tfrac{1}{2}(x_u - ix_v) \end{aligned}\right\} \Longrightarrow y_u + iy_v = -\varphi(x_u - ix_v)$$

sonuçları elde edilir ki buradan; $y_u = -\varphi x_u$ ve $y_v = \varphi x_v$ sonucuna ulaşırız. Bu sonuç ile (3.33)'deki sonuçlar, (3.32)'de dikkate alınırsa

$$\begin{cases} x_{uu} - x_{vv} + 2ix_{uv} = 4\varphi x, \\ x_{uu} - x_{vv} - 2ix_{uv} = 4\varphi x, \\ x_{uu} + x_{vv} = -4y, \\ y_u = -\varphi x_u, \qquad y_v = \varphi x_v. \end{cases} \tag{3.34}$$

eşitlikleri elde edilir. (3.34)'deki ilk iki eşitlikten $x_{uv} = 0$ elde edilir ki, bu da $x(u, v)$ yüzeyinin $x(u, v) = f(u) \mp g(v)$ biçiminde olduğu anlamına gelir. Bu durumda

$$\begin{aligned} x(u, v) = f(u) \mp g(v) \Longrightarrow \quad & x_u = f'(u), \qquad x_v = \mp g'(v) \\ & x_{uu} = f''(u), \quad x_{vv} = \mp g''(v) \end{aligned}$$

dir ve (3.34)'deki üçüncü eşitlik dikkate alınırsa

$$-4y = x_{uu} + x_{vv} = f''(u) \mp g''(v)$$

elde edilir. Bu sonucun türevinde (3.34)'deki son eşitlik göz önüne alınırsa

$$\begin{aligned} -4y_u &= f'''(u) && \Longrightarrow 4\varphi x_u = f'''(u) && \Longrightarrow 4\varphi f'(u) = f'''(u) \\ -4y_v &= \mp g'''(v) && \Longrightarrow -4\varphi x_v = \mp g'''(v) && \Longrightarrow -4\varphi g'(v) = g'''(v) \end{aligned}$$

diferensiyel denklemleri elde edilir. Bu diferensiyel denklemlerinin çözümünden $a_1, a_2, a_3, a_4 \in \mathbb{R}^4_1$ olmak üzere;

$\varphi > 0$ için;

$$\begin{cases} f(u) = a_1 \sinh(2\sqrt{\varphi})u + a_2 \cosh(2\sqrt{\varphi})u, \\ g(v) = a_3 \sin(2\sqrt{\varphi})v + a_4 \cos(2\sqrt{\varphi})v \end{cases}$$

ve

$\varphi < 0$ için;

$$\begin{cases} f(u) = a_1 \sin(2\sqrt{-\varphi})u + a_2 \cos(2\sqrt{-\varphi})u, \\ g(v) = a_3 \sinh(2\sqrt{-\varphi})v + a_4 \cosh(2\sqrt{-\varphi})v \end{cases}$$

elde edilir.

Şimdi ise kabul edelim ki, $\varphi = 0$ olsun. $\varphi = \langle x_{zz}, y \rangle$ ifadesinde (3.33)'deki ilk eşitlik ile (3.22) eşitliği dikkate alınırsa,

$$
\begin{aligned}
\varphi &= \langle x_{zz}, y\rangle \\
&= \left\langle \tfrac{1}{4}\left(x_{uu} - x_{vv} - 2ix_{uv}\right), y\right\rangle \\
&= \tfrac{1}{4}\left\{\langle x_{uu}, y\rangle - \langle x_{vv}, y\rangle - 2i\,\langle x_{uv}, y\rangle\right\} \\
&= \tfrac{1}{4}\left\{2e^{w}h_{11} - 2e^{w}h_{22} - 4ie^{w}h_{12}\right\} \\
&= \tfrac{1}{2}e^{w}\left\{h_{11} - h_{22} - 2ih_{12}\right\}
\end{aligned}
$$

elde edilir. Buradan, $\varphi = 0$ olması $h_{11} = h_{22}$ ve $h_{12} = 0$ olmasını gerektirir ki, bu da yüzeyin total olarak umbilik yüzey olduğunu gösterir. □

Çalışmamızın bundan sonraki kısmında x yüzeyine konformal olarak denk yüzey ile x yüzeyinden türetilen yüzeyi ele alıp, x yüzeyinin sıfır ortalama eğriliğine sahip olması durumunda bu yüzeylerin durumlarını inceleyeceğiz.

Uyarı 3.1.1. *$\sigma : M \longrightarrow \mathbb{R}$ bir diferensiyellenebilir fonksiyon olmak üzere Q^3'deki bir $x(u,v)$ yüzeyine bağlı olarak tanımlanan $\tilde{x}(u,v) = e^{\sigma}x(u,v)$ yüzeyi de Q^3'de bir yüzeydir. Gerçekten*

$$
\langle \tilde{x}, \tilde{x}\rangle = \langle e^{\sigma}x, e^{\sigma}x\rangle = e^{2\sigma}\langle x, x\rangle = 0
$$

dir. Aynı zamanda,

$$
\langle d\tilde{x}, d\tilde{x}\rangle = e^{2\sigma}\langle dx, dx\rangle
$$

olduğundan $\tilde{x}(u,v)$ ve $x(u,v)$ yüzeyleri konformal olarak denk yüzeylerdir. Ayrıca (3.3)'den,

$$
\begin{aligned}
\langle d\tilde{x}, d\tilde{x}\rangle &= e^{2\sigma}\langle dx, dx\rangle \\
&= e^{2\sigma}e^{w}(dz \otimes d\bar{z} + d\bar{z} \otimes dz) \\
&= e^{2\sigma + w}(dz \otimes d\bar{z} + d\bar{z} \otimes dz) \\
&= e^{\tilde{w}}(dz \otimes d\bar{z} + d\bar{z} \otimes dz)
\end{aligned}
$$

sonucuna ulaşılır. Buradan, $\tilde{w} = 2\sigma + w$ olur. Böylece $\tilde{x}(u,v)$ yüzeyinin $\tilde{K}$ Gauss eğriliği

$$
\begin{aligned}
\tilde{K} &= -e^{-\tilde{w}}\tilde{w}_{z\bar{z}} \\
&= -e^{-2\sigma - w}\left(2\sigma + w\right)_{z\bar{z}} \\
&= -e^{-2\sigma}e^{-w}\left(2\sigma_{z\bar{z}} + w_{z\bar{z}}\right)
\end{aligned}
$$

ile verilir ve (3.13)'den

$$\tilde{K} \quad = e^{-2\sigma}\left(K - 2\sigma_{z\bar{z}}e^{-w}\right) \tag{3.35}$$

olarak elde edilir [6].

$\tilde{H}$, $\tilde{x}(u,v)$ yüzeyinin ortalama eğriliğini göstersin. $\tilde{x}(u,v)$ yüzeyi de Q^3 light koni üzerinde bir yüzey olduğundan, $\tilde{x}$ yüzeyinin $\tilde{H}$ ortalama eğriliği ile $\tilde{K}$ Gauss eğriliği arasında (3.30)'dan

$$\tilde{K} + 2\tilde{H} = 0 \tag{3.36}$$

bağıntısı yazılabilir.

Böylece x yüzeyi ile $\tilde{x}$ yüzeylerinin ortalama eğrilikleri arasındaki bağıntıyı veren aşağıdaki lemmayı verebiliriz.

Lemma 3.1.7. *$x(u,v)$, Q^3'de bir yüzey olsun. $\sigma : M \longrightarrow \mathbb{R}$ bir diferensiyellenebilir fonksiyon olmak üzere $\tilde{x}(u,v) = e^{\sigma}x(u,v)$ ile tanımlı Q^3'deki diğer bir yüzeyin $\tilde{H}$ ortalama eğriliği ile x yüzeyinin H ortalama eğriliği arasında*

$$\tilde{H} = e^{-2\sigma}\left(H + \sigma_{z\bar{z}}e^{-w}\right) \tag{3.37}$$

bağıntısı vardır.

İspat. (3.35) eşitliğinde, (3.30) ve (3.36) eşitlikleri dikkate alınırsa (3.37) kolayca elde edilir. □

$\sigma : M \longrightarrow \mathbb{R}$ diferensiyellenebilir fonksiyonu,

$$\sigma(u,v) = au + buv + cv + d \qquad a,b,c,d \in \mathbb{R} \tag{3.38}$$

ile tanımlanırsa aşağıdaki teorem ve sonuçlar elde edilir.

Teorem 3.1.5. *$x : M \longrightarrow Q^3$ yüzeyinin sıfır ortalama eğrilikli bir yüzey olması için gerek ve yeter şart $\tilde{x} : M \longrightarrow Q^3$ yüzeyinin de sıfır ortalama eğrilikli bir yüzey olmasıdır.*

İspat. (3.38) ile tanımlı diferensiyellenebilir σ fonksiyonu için, (3.6)'dan

$$\sigma_z = \tfrac{1}{2}\left(\sigma_u - i\sigma_v\right) \Rightarrow \quad \sigma_{z\bar{z}} = \tfrac{1}{2}\left\{\tfrac{1}{2}\left(\sigma_u - i\sigma_v\right)_u + \tfrac{1}{2}\left(\sigma_u - i\sigma_v\right)_v\right\}$$
$$\sigma_{z\bar{z}} = \tfrac{1}{4}\left(\sigma_{uu} + \sigma_{vv}\right)$$

elde edilir ve

$$\sigma_{uu} = \sigma_{vv} = 0 \Rightarrow \sigma_{z\bar{z}} = 0$$

dır.

$x : M \longrightarrow Q^3$ yüzeyi sıfır ortalama eğrilikli bir yüzey olsun. Bu durumda $H = 0$ ve $\sigma_{z\bar{z}} = 0$ değerleri (3.37) eşitliğinde dikkate alınırsa,

$$\tilde{H} = e^{-2\sigma} \left(H + \sigma_{z\bar{z}} e^{-w} \right) = 0$$

elde edilir ki bu da $\tilde{x} = e^{\sigma} x$ yüzeyinin sıfır ortalama eğrilikli bir yüzey olması anlamına gelir.

Tersine kabul edelim ki $\tilde{x}(u, v)$ yüzeyi sıfır ortalama eğriliğine sahip olsun. Bu durumda $\tilde{H} = 0$ ve $\sigma_{z\bar{z}} = 0$ değerleri (3.37) eşitliğinde dikkate alınırsa

$$\tilde{H} = e^{-2\sigma} \left(H + \sigma_{z\bar{z}} e^{-w} \right) = 0 \Longrightarrow H = 0$$

olmasını gerektirir. Bu da $x : M \longrightarrow Q^3$ yüzeyinin sıfır ortalama eğriliğe sahip olması demektir. $\square$

Teorem 3.1.6. *$x : M \longrightarrow Q^3$ yüzeyi flattır gerek ve yeter şart $\tilde{x} : M \longrightarrow Q^3$ yüzeyi flattır.*

İspat. $x : M \longrightarrow Q^3$ yüzeyi flat olsun, yani $K = 0$'dır. (3.30)'dan $H = 0$ elde edilir. Böylece bir önceki teoremden $\tilde{H} = 0$'dır. (3.36)'dan $\tilde{K} = 0$'a ulaşılır ki bu da $\tilde{x}$ yüzeyin flat olması anlamına gelir.

Tersine kabul edelim ki; $\tilde{x}$ yüzeyi flat olsun, yani $\tilde{K} = 0$'dır. (3.36)'dan $\tilde{H} = 0$ elde edilir. Böylece bir önceki teoremden, $H = 0$'dır. (3.30)'dan $K = 0$'a ulaşılır ki bu da x yüzeyin flat olması anlamına gelir. $\square$

Tanım 3.1.3. *$x : M \longrightarrow Q^3$ yüzeyi için*

$$y(u, v) = -\frac{1}{2} \triangle x - \frac{1}{8} \langle \triangle x, \triangle x \rangle x$$

ile tanımlı $y(u, v)$ yüzeyine Q^3'de $x(u, v)$ yüzeyinden türetilen yüzey denir [6].

Q^3 light koni üzerinde tanımlı $x(u, v)$ yüzeyi haricinde; $x(u, v)$ yüzeyine bağlı olarak tanımlanan $\tilde{x}(u, v) = e^{\sigma} x(u, v)$ ve $y(u, v)$ yüzeyleri arasındaki ilişkiyi inceleyelim.

Kabul edelim ki; y yüzeyi, μ diferensiyellenebilir fonksiyonu için $y(u,v) = e^{\mu}x(u,v)$ gibi yazılsın. Bu durumda

$$\langle x, y\rangle = \langle x, e^{\mu}x\rangle = e^{\mu}\langle x, x\rangle = 0$$

elde edilir ki bu da (3.20)'deki ikinci eşitlik ile çelişir. Böylece Q^3 light koni üzerinde $x(u,v)$ yüzeyine bağlı olarak tanımlanan $\tilde{x}(u,v) = e^{\sigma}x(u,v)$ ve $y(u,v)$ yüzeyleri birbirlerinden farklı yüzeylerdir.

$x : M \longrightarrow Q^3$ yüzeyinden türetilen $y(u,v)$ yüzeyi de Q^3'de bir yüzey olduğundan y yüzeyinin H_y ortalama eğriliği ile K_y Gauss eğriliği arasında (3.30)'dan

$$K_y + 2H_y = 0 \tag{3.39}$$

bağıntısı geçerlidir.

Teorem 3.1.7. *$x : M \longrightarrow Q^3$ bir yüzey ve bu yüzeyden türetilen yüzey de $y(u,v)$ olsun. Bu durumda, $x(u,v)$ yüzeyinin sıfır ortalama eğrilikli bir yüzey (veya flat bir yüzey) olması için gerek ve yeter şart $y(u,v)$ yüzeyinin de sıfır ortalama eğrilikli bir yüzey (veya flat bir yüzey) olmasıdır.[6].*

Son iki teoremden aşağıdaki sonuç elde edilir.

Sonuç 3.1.5. *$x : M \longrightarrow Q^3 \subset \mathbb{R}^4_1$ light koni üzerinde sıfır ortalama eğrilikli bir yüzey olsun. $x(u,v)$ yüzeyine bağlı olarak tanımlanan sıfır ortalama eğrilikli bir $\hat{x}$ yüzeyi aşağıdaki formlardan birine sahiptir.*

i) $\hat{x} = e^{\sigma}x(u,v)$,

ii) $\hat{x} = -\frac{1}{2}\triangle x - \frac{1}{8}\langle \triangle x, \triangle x\rangle x$.

KAYNAKLAR

[1] W.B. Bonnor, *Null curves in a Minkowski space-time*, **Tensor,** 20 (1969) 229-242.

[2] B.Y. Chen, *When does the position vector of a space curve always lie in its rectifying plane?*, **Amer. Math. Monthly,** 110 (2003) 147-152.

[3] K. İlarslan, E. Nesovic and M. Petrovic-Torgasev, *Some characterizations of rectifying curves in the Minkowski 3-space*, **Novi Sad J.Math,** Vol.33 no.2 (2003) 23-32.

[4] K. İlarslan and E. Nesovic, *Some characterizations of rectifying curves in the Euclidean space E^4*, **Turk J.Math,** 31 (2007) 1-10.

[5] K.L. Duggal and A. Bejancu, *Lightlike Submanifolds of Semi-Riemannian Manifolds and Applications*, Kluwer Academic Publisher. Dordrecht/ Boston/ London, 1996, 1-76.

[6] H.L. Lui, *Surfaces in the lightlike cone*, **J.Math.Anal. Appl.**, 325 (2007) 1171-1181.

[7] B. O'Neill, *Semi-Riemann Geometry with Applications to Relativity*, Academic Press, New York, 1983, 54-157.

[8] T.Weinstein, *An Introduction Lorentz Surface*, Walter de Gruyter and Co., New York, 1996, 4-18.

[9] G.L. Naber, *The Geometry of Minkowski Spacetime*, California State University, Springer-Verlag, New York, 1992, 7-64.

[10] K.L. Duggal and D.H. Jin, *Null Curves and Hypersurfaces of Semi-Riemannian Manifolds*, World Scientific Publishing, 2007, 1-49.

[11] A. Altın, *Harmonic Curvatures of Null Curves and the Null Helix in R_1^{m+2}*, **International Mathematical Forum,** 2 no.23 (2007) 1111-1118.

[12] V. Gorkavyy, *On minimal lightlike surfaces in Minkowski space-time*, **Differential Geometry and Its Applications,** 26(2) (2008) 133-139.

[13] L. J. Alias and B. Palmer, *Curvature properties of zero mean curvature surfaces in four-dimensional Lorentzian space forms*, **Math. Proc. Camb. Phil. Soc,** (1998)124, 315-327.

[14] H.H. Hacisalihoglu, *Diferensiyel Geometri*, Gazi Üniversitesi Basın-Yayın Yüksekokulu Basımevi, Ankara, 1983, 139-253.

[15] J. Walrave, *"Curves and surfaces in Minkowski space"*, PhD Thesis, K.U. Leuven Fac. of Science, Leuven, 1995.

[16] Ç. Camcı, K. İlarslan and E. Sucurovic, *On Pseudohyperbolical Curves in Minkowski Spacetime*, **Turk J.Math,** 27 (2003) 315-328.

[17] A.İ. Boran, *"Lorentz Yüzeyleri Üzerine"*, Master Thesis, İnönü Üniv. Fen Bil. Enst., Malatya, 2004.

[18] H. Balgetir, M. Bektaş and M. Ergüt, *On a Characterization of Null Helix*, **Bull.Inst.of Math. Academia Sinica**, 29(1) (2001) 71-78.

[19] B. Şahin, E. Kılıç and R. Güneş *Null Helices in R_1^3*, **Differential Geometry-Dynamical Systems,** Vol.3 No.2 (2001) 31-36.

[20] M. Spivak, *A Comprehensive Introduction to Differential Geometry*, V.I Second Edition Publish or Perish Inc, 1979.

[21] W.B. Bonnor, *Null hypersurface in Minkowski spacetime*, **Tensor,** 24 (1972) 229-245.

[22] A.F. Yalınız and H.H. Hacısalihoğlu, *Null Generalized Helices in L_3 and L_4, 3 and 4-dimensional Lorentzian Space*, **Math. And Comp. Appl,** Vol.10 No.1 (2005) 105-111.

[23] A. Ferrandez, A. Gimenez and P. Lucas, *Null Helices in Lorentzian Space Forms*, **Int J Mod Phys A,** 6(30) (2001) 4845-4863.

[24] H.L. Lui, *Curvaces in the Lightlike Cone*, **Contributions to Algebra and Geometry,** Volume 45 No.1 (2004) 291-303.

[25] J.K. Beem and P.E. Ehrlich, *Global Lorentzian Geometri*, Marcel Dekker, New York, 1981.

[26] Y. Matsushima, *Differentiable Manifolds*, Marcel Dekker, New York, 1972.

[27] H.H. Hacisalihoglu, *Yüksek Diferensiyel Geometriye Giris*, Fırat Üniversitesi Fen Fak.Yayınları, Elazığ, Mat.no.2, 1980.

[28] H.H. Hacisalihoglu and A. Sabuncuoğlu, *Diferensiyel Geometri*, Milli Eğitim Basımevi, Ankara, 1983.

[29] A. Salimov and A. Mağden, *Diferensiyel Geometriye Giriş*, Bakanlar Mat., Erzurum, 1999.

[30] G.S. Birman and K. Nomizu, *Trigonometry in Lorentzian Geometry*, **Ann. Math. Month.**, 91(9) (1984) 534-549.

[31] I.M. Yaglom, *A simple non-Euclidean geometry and its Physical basis*, Springer-Verlag, New York, 1979.

ÖZGEÇMİŞ

1977'de Malatya'da doğdu. İlk ve ortaöğretimini Malatya Merkez'de tamamladı. Liseyi Malatya Ziraat Meslek Lisesi'nde Ziraat Teknisyeni ünvanı ile 1996 yılında okul ikincisi olarak tamamladı. Lisansı 1997-2000 yılları arasında İnönü Üniversitesi Eğitim Fakültesi Matematik Bölümü'nde, Matematik Öğretmeni ünvanı ile bölüm birincisi olarak tamamladı. Lisans Eğitimini yaparken 1998-2000 yılları arasında 23 ay boyunca Tarım ve Köy İşleri Bakanlığı'na bağlı Bingöl İli Solhan Tarım İlçe Müdürlüğü Taşra Teşkilatında Ziraat Teknisyeni olarak çalıştı. 2000 yılında Matematik Öğretmeni olarak Malatya Milli Eğitim Müdürlüğü emrine atandı. 2001 yılının Eylül ayında İnönü Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Ana Bilim Dalı'nda Yüksek Lisansa başladı. 2004 yılının Şubat ayında Yüksek Lisansını tamamladı. 2004 yılında aynı enstitüde doktora programına başladı. Halen Malatya Bilim ve Sanat Merkezi'nde Matematik Danışmanı olarak görev yapmaktadır. Evli ve iki çocuk babasıdır.