

**T.C.
İNÖNÜ ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**

**ISI DENKLEMİNİN ÜSTEL SONLU FARK YÖNTEMİ İLE
ÇÖZÜMÜ**

Bilge İNAN

**YÜKSEK LİSANS TEZİ
MATEMATİK ANABİLİM DALI**

MALATYA

2009

Tezin Başlığı: **Isı Denkleminin Üstel Sonlu Fark Yöntemi ile Çözümü**

Tezi Hazırlayan: **Bilge İNAN**

Sınav Tarihi: **10 Temmuz 2009**

Yukarıda adı geçen tez, Jürimizce değerlendirilerek Matematik Anabilim Dalında Yüksek Lisan Tezi olarak kabul edilmiştir.

Sınav Jüri Üyeleri

Prof. Dr. Ali ÖZDEŞ (İnönü Üniv.)

Prof. Dr. Ahmet Refik BAHADIR (İnönü Üniv.)

Doç. Dr. Alaattin ESEN (İnönü Üniv.)

Prof. Dr. Ahmet Refik BAHADIR

Tez Danışmanı

İnönü Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Onayı

Prof. Dr. İsmail ÖZDEMİR

Enstitü Müdürü

Onur Sözü

Yüksek Lisans Tezi olarak sunduğum “*Isı Denklemine Üstel Sonlu Fark Yöntemi ile Çözümü*” başlıklı bu çalışmanın bilimsel ahlak ve geleneklere aykırı düşecek bir yardıma başvurmaksızın tarafımdan yazıldığını ve yararlandığım bütün kaynakların, hem metin içinde hem de kaynakçada yöntemine uygun biçimde gösterilenlerden olduğunu belirtir, bunu onurumla doğrularım.

Bilge İNAN

ÖZET

Yüksek Lisans Tezi

ISI DENKLEMİNİN ÜSTEL SONLU FARK YÖNTEMİ İLE ÇÖZÜMÜ

Bilge İNAN

İnönü Üniversitesi

Fen Bilimleri Enstitüsü

Matematik Anabilim Dalı

83+vi sayfa

2009

Tez Danışmanı: Prof. Dr. Ahmet Refik BAHADIR

Dört bölümden oluşan bu çalışmanın ilk bölümünde diğer bölümlerde kullanılacak olan denklemler ve yöntemler ile ilgili bilgi verilmiştir.

İkinci bölümde sonraki bölümlerde kullanılacak olan temel tanım ve teoremler hatırlanmıştır.

Üçüncü bölümde ısı denkleminin elde edilişi ve ısı denklemi için açık, kapalı ve Crank-Nicolson sonlu fark yöntemleri farklı sınır şartları için incelenmiştir. Farklı sınır şartları için ısı denkleminin açık, kapalı ve Crank-Nicolson sonlu fark yaklaşımlarının matris yöntemi kullanılarak kararlılık analizleri yapılmıştır.

Bu çalışmanın esas bölümü olan dördüncü bölümde farklı sınır şartlarına sahip ısı denklemlerini çözmek için üstel sonlu fark yöntemi kullanılmıştır. Ayrıca üstel sonlu fark yönteminin kararlılık analizi ve farklı sınır şartlarına sahip üç model problem incelenmiştir. Model problemler klasik ve üstel sonlu fark yöntemleri kullanılarak çözülmüştür. Son olarak nümerik yöntemlerle bulunan sonuçlar ile analitik çözümler karşılaştırılmıştır.

ANAHTAR KELİMELER: Açık Sonlu Fark Yöntemi, Kapalı Sonlu Fark Yöntemi, Crank-Nicolson Sonlu Fark Yöntemi, Üstel Sonlu Fark Yöntemi, Kararlılık Analizi.

ABSTRACT

MSc. Thesis

SOLUTION OF HEAT EQUATION BY EXPONENTIAL FINITE DIFFERENCE METHOD

Bilge İNAN

İnönü University

Graduate School of Natural and Applied Sciences

Department of Mathematics

83+vi sayfa

2009

Supervisor: Prof. Dr. Ahmet Refik BAHADIR

This thesis consists of four chapters. In chapter 1, information about equations and methods which will be used in other chapters are given.

In chapter 2, we recall some basic concepts and theorems which necessary for the rest of the thesis.

In chapter 3, that the derivation of the heat equation is given and explicit, implicit and Crank-Nicolson finite difference methods are examined for heat equation with different boundary conditions. For the heat equation with different boundary conditions stability analysis of explicit, implicit and Crank-Nicolson finite difference approaches are carried out by using the matrix method.

In chapter 4, the main chapter of this thesis, exponential finite difference method is used to solve heat equations with different boundary conditions. Further, stability analysis of exponential finite difference approaches and three model problems with different boundary conditions are examined. The model problems are solved by using with classical finite difference and exponential finite difference approaches. Finally, numerical solutions and analytical solution have been compared.

KEYWORDS: Explicit Finite Difference Method, Implicit Finite Difference Method, Crank-Nicolson Finite Difference Method, Exponential Finite Difference Method, Stability Analysis.

TEŞEKKÜR

Çalıőmalarımın her aőamasında bilgi ve tecrübeleri ile bana yol gösteren tez danıőmanım, değerli hocam Prof. Dr. Ahmet Refik BAHADIR' a, İnönü Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalı Baőkanı, hocam Prof. Dr. Sadık KELEŐ' e ve diğer bölüm hocalarıma ve araştırma görevlisi arkadaşlarıma, tezin oluőum sürecinde desteklerini esirgemeyen hocam, Doç. Dr. Alaattin ESEN' e ve emeklerinin karőılıęını asla ödeyemeyeceğim anne ve babama teşekkür ederim.

İÇİNDEKİLER

ÖZET.....	i
ABSTRACT.....	ii
TEŞEKKÜR.....	iii
İÇİNDEKİLER.....	iv
ŞEKİLLER DİZİNİ.....	v
TABLolar DİZİNİ.....	vi
1. GİRİŞ.....	1
2. TEMEL KAVRAMLAR.....	3
3. ISI DENKLEMİ VE KLASİK SONLU FARK YÖNTEMLERİ.....	17
3.1. ISI DENKLEMİNİN ELDE EDİLİŞİ.....	17
3.2. ISI DENKLEMİ İÇİN KLASİK SONLU FARK YÖNTEMLERİ.....	20
3.2.1. Açık Sonlu Fark Yöntemi.....	20
3.2.2. Kapalı Sonlu Fark Yöntemi.....	28
3.2.3. Crank-Nicolson Sonlu Fark Yöntemi.....	35
3.3. KLASİK SONLU FARK YÖNTEMLERİ İÇİN KARARLILIK ANALİZİ.....	42
3.3.1. Kararlılık Analizi için Matris Yöntemi	42
3.3.2. Açık Sonlu Fark Yaklaşımı için Matris Yöntemi ile Kararlılık Analizi.....	46
3.3.3. Kapalı Sonlu Fark Yaklaşımı için Matris Yöntemi ile Kararlılık Analizi.....	51
3.3.4. Crank-Nicolson Sonlu Fark Yaklaşımı için Matris Yöntemi ile Kararlılık Analizi.....	56
4. ISI DENKLEMİ İÇİN ÜSTEL SONLU FARK YÖNTEMİ VE MODEL PROBLEMLER.....	60
4.1. ISI DENKLEMİ İÇİN ÜSTEL SONLU FARK YÖNTEMİ.....	60
4.2. ÜSTEL SONLU FARK YÖNTEMİ İÇİN KARARLILIK ANALİZİ.....	69
4.3. MODEL PROBLEMLER.....	71
KAYNAKLAR.....	81
ÖZGEÇMİŞ.....	83

ŞEKİLLER DİZİNİ

Şekil 3.1. Isı denkleminin bulunması için göz önüne alınan cisim.....	17
Şekil 3.2. Açık yöntem için düğüm noktalarının gösterimi.....	22
Şekil 3.3. Kapalı yöntem için düğüm noktalarının gösterimi.....	29
Şekil 3.4. Crank-Nicolson yöntemi için düğüm noktalarının gösterimi.....	37

TABLolar DİZİNİ

Tablo 4.1.1. $k = 0.00001$ ve $t = 0.1$ alınarak h nın farklı değerleri için üstel sonlu fark yöntemi ile elde edilen sonuçların karşılaştırılması.....	72
Tablo 4.1.2. $h = 0.01$ ve $t = 0.1$ alınarak farklı k değerleri için üstel sonlu fark yöntemi ile elde edilen sonuçların karşılaştırılması.....	73
Tablo 4.1.3. $k = 0.00001$ ve $h = 0.01$ için $t = 0.1$ de problemin nümerik ve analitik çözümlerinin karşılaştırılması.....	73
Tablo 4.1.4. $k = 0.0001$ ve $h = 0.05$ için $x = 0.2$ de problemin nümerik ve analitik çözümlerinin karşılaştırılması.....	74
Tablo 4.2.1. $k = 0.00001$ ve $t = 0.3$ alınarak h nın farklı değerleri için üstel sonlu fark yöntemi ile elde edilen sonuçların karşılaştırılması.....	75
Tablo 4.2.2. $h = 0.01$ ve $t = 0.2$ alınarak farklı k değerleri için üstel sonlu fark yöntemi ile elde edilen sonuçların karşılaştırılması.....	76
Tablo 4.2.3. $k = 0.00001$ ve $h = 0.01$ için $t = 0.2$ de problemin nümerik ve analitik çözümlerinin karşılaştırılması.....	76
Tablo 4.2.4. $k = 0.0001$ ve $h = 0.05$ için $x = 0.2$ de problemin nümerik ve analitik çözümlerinin karşılaştırılması.....	77
Tablo 4.3.1. $k = 0.00001$ ve $t = 0.2$ alınarak h nın farklı değerleri için üstel sonlu fark yöntemi ile elde edilen sonuçların karşılaştırılması.....	78
Tablo 4.3.2. $h = 0.01$ ve $t = 0.3$ alınarak farklı k değerleri için üstel sonlu fark yöntemi ile elde edilen sonuçların karşılaştırılması.....	79
Tablo 4.3.3. $k = 0.00001$ ve $h = 0.01$ için $t = 0.2$ de problemin nümerik ve analitik çözümlerinin karşılaştırılması.....	79
Tablo 4.3.4. $k = 0.0001$ ve $h = 0.05$ için $x = 0.2$ de problemin nümerik ve analitik çözümlerinin karşılaştırılması.....	80

1. GİRİŞ

Doğadaki olayların modellenmesi çoğunlukla diferansiyel denklemler ile yapılır. Ancak bu modellemelerde daha çok kısmi diferansiyel denklemler kullanılır. Bu açıdan bakıldığında özellikle kısmi diferansiyel denklemler bir çok bilim dalında önemli uygulama alanına sahiptir. Ancak kısmi diferansiyel denklemlerin non-linerlik, karmaşık geometrik yapılar ve karmaşık sınır şartları gibi durumlar yüzünden çoğu zaman analitik çözümleri elde edilemez. Bu durumda nümerik yöntemler kullanılır. 20. yüzyılın başlarında kısmi diferansiyel denklemlerin nümerik çözümleri üzerinde çalışılmaya başlanmıştır. Bilgisayarların çalışma hızlarındaki artış çeşitli bilim ve mühendislik dallarında nümerik yöntemlerin kullanılmasını önemli miktarda arttırmıştır. Çok karmaşık problemler mevcut hesaplama gücü ile kısa zamanda çözülebilmektedir. Her nümerik yöntemin, fiziksel problemin yapısına bağlı olarak avantaj ve dezavantajları vardır. Fakat her problem için iyi sonuçlar veren bir yöntem yoktur. Örneğin bir boyutlu bir problem için etkili bir yöntem iki ve üç boyutlu problemler için iyi sonuçlar vermeyebilir. Nümerik çözümün elverişli olup olmadığı analitik çözümü bilinen bir problem ile test edilebilir.

Kısmi diferansiyel denklemleri içeren problemlerin nümerik çözümü yaygın olarak sonlu fark yöntemleri ve sonlu eleman yöntemleri ile yapılmaktadır. Sonlu fark yöntemlerinin doğruluğu Taylor seri açılımındaki kesme hatasının mertebesi ile kolayca incelenebilir. Fakat sonlu eleman yöntemleri için aynı şey söylenemez. Sonlu fark yöntemleri kolayca formüle edilebilir, kolayca iki ve üç boyutlu problemlere uygulanabilir ve sonlu eleman yöntemlerinden daha az işlem gerektirir. Kısmi diferansiyel denklemleri içeren problemlerin sonlu fark yöntemleri ile çözümleri basit olmasına rağmen probleme en uygun sonlu fark yönteminin seçimi deneyim gerektirir. En sık kullanılan sonlu fark yöntemleri açık sonlu fark yöntemi, kapalı sonlu fark yöntemi ve Crank-Nicolson sonlu fark yöntemidir. Bu üç yöntem klasik sonlu fark yöntemleri olarak ta adlandırılır. İlk kullanılan sonlu fark yöntemleri açık ve kapalı sonlu fark yöntemleridir. Daha sonra 1947 yılında Crank ve Nicolson tarafından açık sonlu fark yöntemi ve kapalı sonlu fark yöntemi kullanılarak yeni bir kapalı sonlu fark yöntemi olan Crank-Nicolson yöntemi elde edilmiştir[1].

Bu çalışmada ısı denklemlerinin çözümü için kullanılan üstel sonlu fark yöntemi ilk olarak 1985 yılında M.C. Bhattacharya tarafından kullanılmıştır. M.C. Bhattacharya 1985 yılında yayınladığı “*An Explicit Conditionally Finite Difference Equation for Heat Conduction Problems*” isimli çalışmasında üstel sonlu fark yöntemini elde etmiş, ısı denkleminin bu yöntemle çözümünü yapmış ve elde ettiği çözümü hem analitik çözümle hem de diğer sonlu fark yöntemleri ile elde ettiği çözümlerle karşılaştırmıştır. Ayrıca M.C. Bhattacharya bu çalışmasında açık bir yöntem olan üstel sonlu fark yönteminin $r > 0.5$ olduğu durumlar içinde kullanılabilmesi için bir teknik geliştirmiştir[2]. M.C. Bhattacharya 1986 yılında yayınladığı “*A New Improved Finite Difference Equation for Heat Transfer During Transient Change*” isimli üstel sonlu fark yöntemi üzerine olan ikinci çalışmasında ise ters cosinüs üstel sonlu fark yönteminden bahsetmiştir[3]. 1987 yılında M.G. Davies ve M.C. Bhattacharya tarafından yapılan “*The Comparative Performance of Some Finite Difference Equations for Transient Heat Conduction*” isimli üstel sonlu fark yöntemi üzerine olan üçüncü çalışmada üstel sonlu fark yöntemi (veya lineer üstel sonlu fark yöntemi), ters cosinüs üstel sonlu fark yöntemi ve polinom üstel sonlu fark yöntemlerinden bahsedilmiştir[4]. 1990 yılında M.C. Bhattacharya tarafından yapılan bu konu ile ilgili “*Finite Difference Solutions of Partial Differential Equations*” isimli dördüncü çalışmada ise Burgers denklemi için üstel sonlu fark yaklaşımı verilmiş, kutupsal koordinatlarda iki boyutlu Laplace denklemi ve ısı denklemi için üstel sonlu fark yöntemi geliştirilmiştir[5]. Son yıllarda üstel sonlu fark yöntemi üzerine yapılan çalışmalardan birisi ise A. Refik Bahadır tarafından yapılan “*Exponential Finite-Difference Method Applied to Korteweg-de Vries Equation for Small Times*” isimli çalışmadır. Bu çalışmada KDV denklemlerinin üstel sonlu fark yöntemi ile çözümleri yapılmış, iki örnek alınarak üstel yöntem ile bulunan sonuçların doğruluğu incelenmiştir. Bu inceleme bulunan sonuçların analitik sonuçlarla ve diğer nümerik sonuçlarla karşılaştırılması ile yapılmıştır[6]. Üstel sonlu fark yöntemi üzerine yapılan bu çalışmalardan üstel sonlu fark yönteminin kısmi diferansiyel denklemleri içeren bir çok probleme uygulanabileceği sonucu çıkarılabilir.

Bu çalışmanın esas amacı üstel sonlu fark yöntemini kullanarak farklı sınır şartlarına sahip ısı denklemlerini çözmektir. Bu amaçla üstel sonlu fark yönteminin kararlılığı ve üç model problem ele alınarak üstel yöntem ile bulunan sonuçların doğrulukları incelenmiştir. Bu model problemler klasik ve üstel sonlu fark yöntemleri kullanılarak çözülmüştür. Son olarak nümerik yöntemlerle bulunan sonuçlar ile analitik çözümler karşılaştırılmıştır.

2. TEMEL KAVRAMLAR

Bu bölümde daha sonraki bölümlerde kullanılacak olan bazı temel kavramlar verilmiştir.

Tanım 2.1. m ve n pozitif tamsayılar ve $i = 1, 2, \dots, m$, $j = 1, 2, \dots, n$ olmak üzere a_{ij} sayılarının oluşturduğu

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \dots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

biçimindeki tabloya **matris** denir. Burada a_{ij} ler matrisin elemanlarını, m matrisin satır sayısını, n ise matrisin sütun sayısını göstermektedir. m satır n sütundan oluşan bir matrise $m \times n$ tipinde bir matris denir[7].

Yukarıdaki matris $A = [a_{ij}]_{m \times n}$ şeklinde de gösterilebilir. Elemanları reel sayılar olan $m \times n$ tipindeki matrislerin kümesi IR^m_n ile gösterilir. Bu tezde göz önüne alınacak bütün matrisler reel sayılardan oluşmaktadır.

Tanım 2.2. Satır sayısı sütun sayısına eşit olan bir matrise **karesel matris** denir. n satır n sütundan oluşan bir karesel matrise $n \times n$ tipinde veya n . mertebededir denir[8].

Tanım 2.3. $n \times n$ tipindeki bir karesel matriste $a_{11}, a_{22}, \dots, a_{nn}$ elemanlarının bulunduğu köşegene **esas köşegen** denir.

Tanım 2.4. Esas köşegen üzerindeki elemanları 1 ve diğer bütün elemanları 0 olan $n \times n$ tipindeki matrise n . mertebeden **birim matris** denir ve I_n ile gösterilir[8].

Tanım 2.5. Eğer bir $A = [a_{ij}]_{m \times n}$ matrisinde her i, j için $a_{ij} = 0 \in \mathbb{R}$ oluyorsa A matrisine **sıfır matris** denir.

Tanım 2.6. Eğer A ve B karesel matrisleri, $AB = BA = I$ özelliğini sağlıyorsa, B matrisine A **matrisinin tersi** denir ve $B = A^{-1}$ ile gösterilir. (B matrisinin tersi de, A matrisidir ve $A = B^{-1}$ ile gösterilir.)[8]

Tanım 2.7. $m \times n$ tipindeki bir A matrisinin, satırlarının sütun (veya sütunlarının satır) yapılmasıyla elde edilen $n \times m$ tipindeki matrise A **matrisinin transpozu** (devriği) denir ve A^T ile gösterilir[8].

Tanım 2.8. Transpozu kendisine eşit olan karesel matrise **simetrik matris** denir. Yani $A^T = A$ ise A karesel matrisine simetrik matris denir[8].

Tanım 2.9. A , $n \times n$ tipinde reel sayılardan oluşan bir matris olmak üzere $P(\lambda) = \det(A - \lambda I_n)$ polinomuna A matrisinin **karakteristik polinomu** denir[8].

Tanım 2.10. $P(\lambda) = \det(A - \lambda I_n)$ karakteristik polinomunun köklerine A matrisinin **karakteristik değerleri** (özdeğerleri veya eigen değerleri) denir[8].

Tanım 2.11. λ , A matrisinin bir karakteristik değeri ise $(A - \lambda I_n)\underline{v} = 0$ eşitliğini sağlayan sıfırdan farklı \underline{v} vektörüne A matrisinin λ karakteristik değerine karşılık gelen **karakteristik vektör** denir[8].

Tanım 2.12. $n \times n$ tipindeki bir A matrisinin karakteristik değerlerinin mutlak değerce en büyüğüne A matrisinin **spectral yarıçapı** denir ve $\rho(A)$ ile gösterilir. Yani λ_i , $i = 1, 2, \dots, n$ ler A matrisinin karakteristik değerlerini göstermek üzere $\rho(A) = \max_{1 \leq i \leq n} |\lambda_i|$ dir.

Tanım 2.13. f fonksiyonu a noktasını içeren bir aralıkta her mertebeden türevlenebilir olsun. Bu durumda

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (x-a)^k$$

serisine f fonksiyonunun a noktası civarındaki **Taylor Serisi** açılımı denir. Taylor serisindeki sonlu sayıda terimden oluşan

$$P_n(x) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (x-a)^k$$

polinomuna n . dereceden **Taylor polinomu** denir[9].

Benzer şekilde iki bağımsız değişkene bağlı f fonksiyonu, (a,b) noktası civarında sürekli bir fonksiyon ve bu noktada her mertebeden türevlenebilir ise

$$\begin{aligned} f(x, y) &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \left[(x-a) \frac{\partial}{\partial x} + (y-b) \frac{\partial}{\partial y} \right]^k f(a, b) \\ &= f(a, b) + \left((x-a) \frac{\partial}{\partial x} + (y-b) \frac{\partial}{\partial y} \right) f(a, b) \\ &\quad + \frac{1}{2!} \left((x-a) \frac{\partial}{\partial x} + (y-b) \frac{\partial}{\partial y} \right)^2 f(a, b) + \dots \\ &\quad + \frac{1}{n!} \left((x-a) \frac{\partial}{\partial x} + (y-b) \frac{\partial}{\partial y} \right)^n f(a, b) + \dots \\ \Rightarrow f(x, y) &= f(a, b) + (x-a) \frac{\partial f}{\partial x}(a, b) + (y-b) \frac{\partial f}{\partial y}(a, b) \\ &\quad + \frac{1}{2!} \left[(x-a)^2 \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(a, b) + 2(x-a)(y-b) \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(a, b) + (y-b)^2 \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(a, b) \right] + \dots \end{aligned}$$

seri açılımına f fonksiyonunun (a,b) noktası civarındaki **Taylor serisi** denir[7].

Tanım 2.14. f , $[a, b]$ aralığında sürekli, (a, b) aralığında $(n + 1)$. mertebeye kadar türevlenebilir ve $x_0 \in [a, b]$ olsun. Bu durumda her $x \in [a, b]$ için $x_0 < \xi(x) < x$ olacak şekilde öyle bir ξ sayısı vardır ki $f(x) = P_n(x) + R_n(x)$ yazılabilir. Burada $P_n(x)$ ve $R_n(x)$

$$P_n(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n$$

$$= \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^k$$

ve

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi(x))}{(n+1)!}(x - x_0)^{n+1}$$

dir. $P_n(x)$, n . mertebeden Taylor polinomu, $R_n(x)$ ise **kesme hatasıdır**[10].

Tanım 2.15. Aşağıdaki özellikleri sağlayan $\|\cdot\|: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonuna **vektör normu** denir.

- 1) Her $\underline{x} \in \mathbb{R}^n$ için $\|\underline{x}\| \geq 0$,
- 2) Her $\underline{x} \in \mathbb{R}^n$ için $\|\underline{x}\| = 0 \Leftrightarrow \underline{x} = 0$,
- 3) Her $\alpha \in \mathbb{R}$ ve her $\underline{x} \in \mathbb{R}^n$ için $\|\alpha \underline{x}\| = |\alpha| \|\underline{x}\|$,
- 4) Her \underline{x} ve $\underline{y} \in \mathbb{R}^n$ için $\|\underline{x} + \underline{y}\| \leq \|\underline{x}\| + \|\underline{y}\|$.

$\underline{x} \in \mathbb{R}^n$ yani $\underline{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)^T$ olmak üzere en sık kullanılan l_1 , l_2 ve l_∞ vektör normları sırasıyla

$$\|\underline{x}\|_1 = |x_1| + |x_2| + \dots + |x_n| = \sum_{i=1}^n |x_i|,$$

$$\|x\|_2 = \left(|x_1|^2 + |x_2|^2 + \dots + |x_n|^2 \right)^{\frac{1}{2}} = \left[\sum_{i=1}^n |x_i|^2 \right]^{\frac{1}{2}},$$

$$\|x\|_\infty = \max_{1 \leq i \leq n} |x_i|$$

dır[10].

Tanım 2.16. $A \in IR^n_n$ olmak üzere, $\|\cdot\|: IR^n_n \rightarrow IR$ fonksiyonu aşağıdaki özellikleri sağlıyorsa bu fonksiyona **matris normu** denir. Her $A, B \in IR^n_n$ ve $\alpha \in IR$ için

- 1) $\|A\| \geq 0$,
- 2) $\|A\| = 0 \Leftrightarrow A$ sıfır matrisidir.
- 3) $\|\alpha A\| = |\alpha| \|A\|$,
- 4) $\|A + B\| \leq \|A\| + \|B\|$,
- 5) $\|AB\| \leq \|A\| \|B\|$.

Özel olarak en sık kullanılan l_1 , l_2 ve l_∞ matris normları sırasıyla

$$\|A\|_1 = \max_{1 \leq j \leq n} \sum_{i=1}^n |a_{ij}|$$

$$\|A\|_2 = \sqrt{\rho(A^T A)}$$

$$\|A\|_\infty = \max_{1 \leq i \leq n} \sum_{j=1}^n |a_{ij}|$$

şeklinde tanımlanır[10].

Tanım 2.17. (Tutarlılık): Adım büyüklüğü ($\Delta x, \Delta t$ v.b.) küçülürken kesme hatası da küçülüyorsa sonlu fark yaklaşımı asıl denklem ile tutarlıdır denir[1].

Tanım 2.18. (Kararlılık): Eğer nümerik işlemler süresince hata zamanla artıp büyük hatalara sebep olmuyorsa çözüm yöntemine kararlıdır denir[1].

Tanım 2.19. (Yakınsaklık): Eğer Δx ve Δt sıfıra giderken nümerik çözüm tam çözüme yaklaşıyorsa nümerik çözüme yakınsaktır denir[1].

Tanım 2.20. Bir yöntemin hangi şartlar altında kararlı olduğunun araştırılmasına **kararlılık analizi** denir[11].

Teorem 2.1. (Lax' ın Denklik Teoremi): Bir sonlu fark yönteminin yakınsak olması için gerek ve yeter şart tutarlı ve kararlı olmasıdır[11].

Teorem 2. 2 : $a, b, c \in IR$ olmak üzere

$$A = \begin{bmatrix} a & b & & & \\ c & a & b & & 0 \\ & c & a & b & \\ & & & \ddots & \\ 0 & & c & a & b \\ & & & c & a \end{bmatrix}$$

$n \times n$ tipindeki üç diagonal A matrisinin karakteristik değerleri

$$\lambda_s = a + 2b \sqrt{\frac{c}{b}} \cos \frac{s\pi}{n+1}, \quad s = 1, 2, \dots, n \quad (2.1)$$

$$\lambda_s = a + 2b \sqrt{\frac{c}{b}} \left(1 - 2 \sin^2 \frac{s\pi}{2(n+1)} \right), \quad s = 1, 2, \dots, n \quad (2.2)$$

dir[11].

İspat: λ , A matrisinin karakteristik değeri ve $\underline{v} = (v_1, v_2, \dots, v_n)$ ise λ karakteristik değerine karşılık gelen karakteristik vektör olsun. $\underline{v} \neq 0$ olmak üzere karakteristik denklem $A\underline{v} = \lambda\underline{v}$ dir. Bu denklem sistemi

$$\begin{aligned}
 (a - \lambda)v_1 + bv_2 &= 0 \\
 cv_1 + (a - \lambda)v_2 + bv_3 &= 0 \\
 &\vdots \\
 cv_{j-1} + (a - \lambda)v_j + bv_{j+1} &= 0 \\
 &\vdots \\
 cv_{n-1} + (a - \lambda)v_n &= 0
 \end{aligned} \tag{2.3}$$

şeklinde yazılabilir. $v_0 = v_{n+1} = 0$ alınırsa bu denklem sistemi genel olarak

$$cv_{j-1} + (a - \lambda)v_j + bv_{j+1} = 0, \quad j = 1, 2, \dots, n \tag{2.4}$$

şeklinde yazılabilir. (2.4) denkleminin çözümü

$$v_j = Bm_1^j + Cm_2^j \tag{2.5}$$

dir. Burada B ve C keyfi sabitler, m_1 ve m_2 ise

$$c + (a - \lambda)m + bm^2 = 0 \tag{2.6}$$

denkleminin kökleridir. (Bu köklerin farklı olduğu daha sonra gösterilecektir.) (2.5)

denklemini $v_0 = v_{n+1} = 0$ için

$$0 = B + C \tag{2.7}$$

ve

$$0 = Bm_1^{n+1} + Cm_2^{n+1} \tag{2.8}$$

olur.

Buradan

$$\left(\frac{m_1}{m_2}\right)^{n+1} = 1 = e^{i2s\pi}, s = 1, 2, \dots, n, i = \sqrt{-1} \quad (2.9)$$

dir. Böylece

$$\frac{m_1}{m_2} = e^{i2s\pi/(n+1)} \quad (2.10)$$

olur. (2.6) denkleminin kökleri için

$$m_1 m_2 = \frac{c}{b} \quad (2.11)$$

yazılabilir. (2.10) ile (2.11) denklemleri arasında m_2 yok edilirse

$$m_1 = \sqrt{\frac{c}{b}} e^{is\pi/(n+1)} \quad (2.12)$$

olur. Benzer şekilde

$$m_2 = \sqrt{\frac{c}{b}} e^{-is\pi/(n+1)} \quad (2.13)$$

olur. (2.6) denkleminin kökleri toplamı

$$m_1 + m_2 = (\lambda - a)/b \quad (2.14)$$

dir.

Buradan

$$\lambda = a + b \sqrt{\frac{c}{b}} \left(e^{is\pi/(n+1)} + e^{-is\pi/(n+1)} \right) \quad (2.15)$$

elde edilir. Böylece A matrisinin n tane karakteristik değeri

$$\lambda_s = a + 2b \sqrt{\frac{c}{b}} \cos \frac{s\pi}{n+1}, \quad s = 1, 2, \dots, n \quad (2.16)$$

olarak bulunur. Kolayca gösterilebilir ki (2.6) denkleminin kökleri aynı olmaz çünkü $m_1 = m_2$ olursa (2.4) denkleminin çözümü

$$v_j = (B + Cj)m_1^j \quad (2.17)$$

olur. $v_0 = v_{n+1} = 0$ olduğundan $B = C = 0$ olur. Buradan $\underline{v} = 0$ olur ki bu ise karakteristik değer ve karakteristik vektör tanımına göre mümkün değildir[11].

Teorem 2.3. (Birinci Gerschgorin Teoremi): Bir $A \in IR^n$ matrisinin karakteristik değerlerinin mutlak değerce en büyüğü herhangi bir satır veya sütun üzerindeki elemanların mutlak değerleri toplamlarının en büyüğünü geçemez. Yani bir $A \in IR^n$ için $\rho(A) \leq \|A\|_1$ veya $\rho(A) \leq \|A\|_\infty$ dir[11].

İspat: λ_i , $A \in IR^n$ matrisinin karakteristik değeri ve $\underline{v}_i = (v_1, v_2, \dots, v_n)$ de bu karakteristik değere karşılık gelen karakteristik vektör olsun. O halde karakteristik vektör ve karakteristik değer tanımından $A\underline{v}_i = \lambda_i \underline{v}_i$ yazılabilir. Bu ifade açık bir şekilde

$$\begin{aligned}
a_{11}v_1 + a_{12}v_2 + \dots + a_{1n}v_n &= \lambda_i v_1 \\
a_{21}v_1 + a_{22}v_2 + \dots + a_{2n}v_n &= \lambda_i v_2 \\
&\vdots \\
a_{s1}v_1 + a_{s2}v_2 + \dots + a_{sn}v_n &= \lambda_i v_s \\
&\vdots \\
a_{n1}v_1 + a_{n2}v_2 + \dots + a_{nn}v_n &= \lambda_i v_n
\end{aligned} \tag{2.18}$$

şeklinde yazılabilir. v_s , v_1, v_2, \dots, v_n lerin mutlak değerce en büyüğü olsun. s . denklem v_s ile bölünürse

$$\lambda_i = a_{s1} \left(\frac{v_1}{v_s} \right) + a_{s2} \left(\frac{v_2}{v_s} \right) + \dots + a_{sn} \left(\frac{v_n}{v_s} \right) \tag{2.19}$$

elde edilir.

$$\left| \frac{v_i}{v_s} \right| \leq 1, \quad i = 1, 2, \dots, n \tag{2.20}$$

olduğundan

$$|\lambda_i| \leq |a_{s1}| + |a_{s2}| + \dots + |a_{sn}| \tag{2.21}$$

olur. Eğer λ_i satır toplamlarının en büyüğüne eşit değilse $|\lambda_i|$ satır toplamının en büyüğünden küçük olur. Bu durumda özel olarak $|\lambda_i| = \max_s |\lambda_s|$, $s = 1, 2, \dots, n$ dir[11].

Teorem 2.4. (Gerschgorin Çember Teoremi veya Brauer Teoremi):

$A \in \mathbb{R}^n_n$ matrisinin a_{ss} köşegen elemanı hariç s . satır üzerinde bulunan elemanlarının mutlak değerleri toplamı P_s olsun. Bu durumda A matrisinin her bir karakteristik değeri $|\lambda - a_{ss}| \leq P_s$ çemberinin en az birinin içinde veya sınırı üzerinde bulunur[11].

İspat: λ_i , $A \in \mathbb{R}^n_n$ matrisinin karakteristik değeri ve $\underline{v}_i = (v_1, v_2, \dots, v_n)$ de bu karakteristik değere karşılık gelen karakteristik vektör olsun. v_s de \underline{v}_i karakteristik vektörünün mutlak değerce en büyük elemanı olsun. Teorem 2.3 den

$$\lambda_i = a_{s1} \left(\frac{v_1}{v_s} \right) + a_{s2} \left(\frac{v_2}{v_s} \right) + \dots + a_{ss} + \dots + a_{sn} \left(\frac{v_n}{v_s} \right) \quad (2.22)$$

olur. Böylece

$$|\lambda_i - a_{ss}| = a_{s1} \left(\frac{v_1}{v_s} \right) + a_{s2} \left(\frac{v_2}{v_s} \right) + \dots + 0 + \dots + a_{sn} \left(\frac{v_n}{v_s} \right) \quad (2.23)$$

olur. $\left| \frac{v_i}{v_s} \right| \leq 1, i = 1, 2, \dots, n$ olduğundan

$$|\lambda - a_{ss}| \leq |a_{s1}| + |a_{s2}| + \dots + 0 + \dots + |a_{sn}| \quad (2.24)$$

$$|\lambda - a_{ss}| \leq P_s$$

elde edilir. Bu ise ispatı tamamlar[11].

Teorem 2.5. λ , A matrisinin bir karakteristik değeri ise $\frac{1}{\lambda}$ da A^{-1} matrisinin bir karakteristik değeridir.

İspat: λ , A matrisinin bir karakteristik değeri ise $\det(A - \lambda I) = 0$ dır. A tersi olan bir matris olduğundan karakteristik değerleri sıfırdan farklı olmak zorundadır. Böylece

$$\det(A - \lambda I) = 0 \quad (2.25)$$

$$\Rightarrow \det\left(A\lambda\left(\frac{1}{\lambda}I - A^{-1}\right)\right) = 0 \quad (2.26)$$

$$\Rightarrow \det(A\lambda)\det\left(\frac{1}{\lambda}I - A^{-1}\right) = 0 \quad (2.27)$$

yazılabilir. $\lambda \neq 0$ olduğundan

$$\det(A\lambda) \neq 0 \quad (2.28)$$

olur. Dolayısıyla

$$\det\left(\frac{1}{\lambda}I - A^{-1}\right) = 0 \quad (2.29)$$

olmak zorundadır. $\det\left(\frac{1}{\lambda}I - A^{-1}\right) = 0$ olması $\frac{1}{\lambda}$ nın A^{-1} matrisinin karakteristik değeri olması demektir.

Tanım 2.21.

$$\frac{\partial \tau}{\partial t}(x,t) = \alpha^2 \frac{\partial^2 \tau}{\partial x^2}(x,t), \quad 0 < x < L, \quad t > 0$$

ısı denklemini ve

$$\begin{cases} \tau(0,t) = f_0(t) \\ \tau(L,t) = f_L(t) \end{cases} \quad (2.30)$$

Dirichlet sınır şartının birlikte göz önüne alınması ile elde edilen probleme **Dirichlet sınır şartlı ısı iletim problemi** denir[12].

Tanım 2.22.

$$\frac{\partial \tau}{\partial t}(x,t) = \alpha^2 \frac{\partial^2 \tau}{\partial x^2}(x,t), \quad 0 < x < L, \quad t > 0$$

ısı denklemini ve

$$\begin{cases} -k_0 \frac{\partial \tau}{\partial x}(0,t) = q_0(t) \\ k_L \frac{\partial \tau}{\partial x}(L,t) = q_L(t) \end{cases} \quad (2.31)$$

Neumann sınır şartının birlikte göz önüne alınması ile elde edilen probleme **Neumann sınır şartlı ısı iletim problemi** denir[12].

Tanım 2.23.

$$\frac{\partial \tau}{\partial t}(x,t) = \alpha^2 \frac{\partial^2 \tau}{\partial x^2}(x,t), \quad 0 < x < L, \quad t > 0$$

ısı denklemini ve

$$\begin{cases} -k_0 \frac{\partial \tau}{\partial x}(0,t) + m_0 \tau(0,t) = h_0(t) \\ k_L \frac{\partial \tau}{\partial x}(L,t) + m_L \tau(L,t) = h_L(t) \end{cases} \quad (2.32)$$

Robbin sınır şartının birlikte göz önüne alınması ile elde edilen probleme **Robbin sınır şartlı ısı iletim problemi** denir[12].

3. ISI DENKLEMİ VE KLASİK SONLU FARK YÖNTEMLERİ

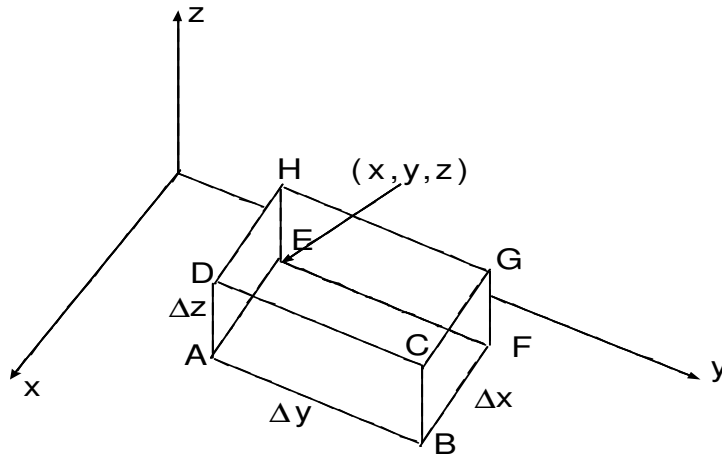
3.1. ISI DENKLEMİNİN ELDE EDİLİŞİ

Isı denklemi, bir katı cisim içinde ve belli bir homojen ortam içinde ısının yayılması incelendiğinde karşılaşılabilecek önemli bir kısmi diferansiyel denklemdir. Isı denkleminin elde edilmesine geçmeden önce aşağıdaki deneysel sonuçları hatırlamakta fayda vardır.

- Isı akışı, azalan sıcaklık yönündedir.
- Isı akışı hızı, akışın gerçekleştiği yüzeyin alanı ve bu yüzeye dik sıcaklık gradienti ile orantılıdır.
- Bir cismin sıcaklığının değişme miktarı, o cismin kazandığı veya kaybettiği ısı, cismin kütlesi ve sıcaklık değişimi ile orantılıdır.
- Isının yayıldığı ortamın yoğunluğu her yerde aynıdır.

Yukarıda (b) şikkında belirtilen orantı katsayısı k “ısı iletkenlik katsayısı” ve (c) şikkında ifade edilen orantı katsayısı c ise, cismin “ısınma ısı” olarak tarif edilmekte ve burada bunların ısının yayıldığı ortam içinde her tarafta sabit olduğu kabul edilmektedir.

Şimdi, göz önüne alınan cismin veya ortamın, Şekil 3.1. de görülen herhangi sonlu bir $\Delta V = \Delta x \Delta y \Delta z$ hacim elemanı içinde ısı denklemini bulalım.



Şekil 3.1. Isı denkleminin bulunması için göz önüne alınan cisim

Isının yayıldığı ortamın yoğunluğu ρ olmak üzere göz önüne alınan cismin elemanının kütlesi $\Delta m = \rho \Delta x \Delta y \Delta z$ olur. Yukarıdaki (b) şıkında belirtilen durum, birinci Fourier yasası olarak bilinir. Buna göre, örneğin pozitif x eksen yönünde gerçekleşen ısı iletimi, o yöndeki sıcaklık gradienti ile orantılıdır ve bu orantı,

$$q = -k \frac{\partial \tau}{\partial x} \quad (3.1)$$

şeklinde yazılır. Burada $(-)$ işareti, ısı iletiminin azalan sıcaklık yönünde olduğunu göstermektedir. (3.1) de görülen q birim alandan birim zaman içinde geçen ısı miktarı, τ ise sıcaklıktır.

Önce x eksen yönündeki yayılan ısı-enerji denklemini göz önüne alalım. Bu durumda, Δt zaman aralığı içinde $HGFE$ yüzeyinden cisme giren ısı,

$$\Delta q_x = -k \frac{\partial \tau}{\partial x} \Big|_x \Delta y \Delta z \Delta t \quad (3.2)$$

olur. Benzer şekilde, aynı Δt süresi içinde ABCD yüzeyinden ΔV cismini terk eden ısı ise,

$$\Delta q_{x+\Delta x} = -k \frac{\partial \tau}{\partial x} \Big|_{x+\Delta x} \Delta y \Delta z \Delta t \quad (3.3)$$

şeklinde ifade edilir. Öyle ise, t zamanı içinde cisim tarafından tutulan ısı miktarı,

$$\Delta q = \Delta q_x - \Delta q_{x+\Delta x} = \Delta(mc \tau) \quad (3.4)$$

olur. Cisim içinde bir t anında, herhangi bir noktada üretilen ısı miktarı $f(x, y, z, t)$ fonksiyonu ile ifade edilmiş olsun. O zaman, Δt zamanı içinde cisimde üretilen ısı miktarı,

$$\Delta q' = f(x, y, z, t) \Delta x \Delta y \Delta z \Delta t \quad (3.5)$$

olur.

Diğer taraftan,

$$\text{Giren ısı}-\text{Çıkan ısı}+\text{Üretilen ısı}=\text{Biriken ısı} \quad (3.6)$$

yazılabildiğinden, yukarıdaki değerler bu bağıntıda yerlerine yazılırsa,

$$\begin{aligned} -k \frac{\partial \tau}{\partial x} \Big|_x \Delta y \Delta z \Delta t + k \frac{\partial \tau}{\partial x} \Big|_{x+\Delta x} \Delta y \Delta z \Delta t + f(x, y, z, t) \Delta x \Delta y \Delta z \Delta t &= \Delta (mc\tau) \\ &= \rho c \Delta x \Delta y \Delta z \Delta \tau \end{aligned} \quad (3.7)$$

elde edilir. Burada bütün terimler $\Delta x \Delta y \Delta z \Delta t$ ile bölünürse,

$$\frac{k \frac{\partial \tau}{\partial x} \Big|_{x+\Delta x} - k \frac{\partial \tau}{\partial x} \Big|_x}{\Delta x} + f(x, y, z, t) = \rho c \frac{\Delta(\tau)}{\Delta t} \quad (3.8)$$

elde edilir. Şimdi bu noktada, Δt ve Δx in birlikte sifıra yaklaştığını düşünürsek, başka bir deyişle göz önüne alınan cismin sonsuz küçük bir cisim olduğunu kabul edersek, o zaman (3.8) denklemi

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(k \frac{\partial \tau}{\partial x} \right) + f(x, y, z, t) = \rho c \frac{\partial \tau}{\partial t} \quad (3.9)$$

şeklinde ifade edilir. (3.9) denkleminde bir boyutlu ısı iletim denklemi denir. Isı her doğrultuda yayıldığı ve pek çok problemde olduğu gibi cisim içinde ısı üreten bir ısı kaynağı bulunmadığında genel bir boyutlu ısı iletim denklemi

$$\frac{\partial \tau}{\partial t}(x, t) = \alpha^2 \frac{\partial^2 \tau}{\partial x^2}(x, t) \quad (3.10)$$

olarak elde edilir. Burada

$$\alpha^2 = \frac{\rho c}{k} \quad (3.11)$$

dır[13].

3.2. ISI DENKLEMİ İÇİN KLASİK SONLU FARK YÖNTEMLERİ

3.2.1. Açık Sonlu Fark Yöntemi

Isı denklemini

$$\frac{\partial \tau}{\partial t}(x,t) = \alpha^2 \frac{\partial^2 \tau}{\partial x^2}(x,t), \quad 0 < x < L, \quad t > 0 \quad (3.12)$$

$$\tau(0,t) = \tau(L,t) = 0, \quad t > 0 \quad \text{ve} \quad \tau(x,0) = f(x), \quad 0 \leq x \leq L$$

şartlarına bağlı olarak göz önüne alalım. $M > 0$ ve M bir tamsayı olmak üzere $h = \frac{L}{M}$

dir. Burada ki h değeri x yönündeki adım uzunluğudur. Benzer şekilde zaman adımı ise k ile gösterilebilir. Bu durumda $i = 0, 1, 2, \dots, M$ ve $j = 0, 1, 2, \dots$ için (x_i, t_j) düğüm noktası $x_i = ih$ ve $t_j = jk$ dir. t ye göre birinci türev için Taylor seri açılımı kullanılarak ileri fark yaklaşımı

$$\frac{\partial \tau}{\partial t}(x_i, t_j) = \frac{\tau(x_i, t_{j+1}) - \tau(x_i, t_j)}{k} - \frac{k}{2} \frac{\partial^2 \tau}{\partial t^2}(x_i, \mu_j) \quad (3.13)$$

olarak elde edilir. Burada $\mu_j \in (t_j, t_{j+1})$ dir. Benzer şekilde x e göre ikinci türev için Taylor seri açılımı kullanılarak merkezi fark yaklaşımı

$$\frac{\partial^2 \tau}{\partial x^2}(x_i, t_j) = \frac{\tau(x_{i+1}, t_j) - 2\tau(x_i, t_j) + \tau(x_{i-1}, t_j)}{h^2} - \frac{h^2}{12} \frac{\partial^4 \tau}{\partial x^4}(\xi_i, t_j) \quad (3.14)$$

olur. Burada $\xi_i \in (x_{i-1}, x_{i+1})$ dir.

Böylece (3.13) ve (3.14) denklemleri kullanılarak (3.12) denklemi

$$\begin{aligned} \frac{\tau(x_i, t_{j+1}) - \tau(x_i, t_j)}{k} - \alpha^2 \frac{\tau(x_{i+1}, t_j) - 2\tau(x_i, t_j) + \tau(x_{i-1}, t_j)}{h^2} \\ = \frac{k}{2} \frac{\partial^2 \tau}{\partial t^2}(x_i, \mu_j) - \alpha^2 \frac{h^2}{12} \frac{\partial^4 \tau}{\partial x^4}(\xi_i, t_j) \end{aligned} \quad (3.15)$$

şeklinde yazılabilir. Böylece (3.12) denklemi için sonlu fark denklemi

$$\frac{T_i^{j+1} - T_i^j}{k} - \alpha^2 \frac{T_{i+1}^j - 2T_i^j + T_{i-1}^j}{h^2} = 0 \quad (3.16)$$

olur. Burada T_i^j , $\tau(x_i, t_j)$ nin yaklaşık değeridir. Bu yöntem için kesme hatası $O(k + h^2)$ mertebededir. Ayrıca $0 \leq x \leq L$ olacak şekilde her x için $\tau(x, 0) = f(x)$ başlangıç şartından $i = 1, 2, \dots, M$ için $T_i^0 = f(x)$ yazılabilir. Benzer şekilde $\tau(0, t) = 0$ ve $\tau(L, t) = 0$ şartlarından $T_0^j = T_M^j = 0$ değerleri elde edilir. (3.16) denklemi yeniden düzenlenirse

$$T_i^{j+1} = rT_{i+1}^j + (1 - 2r)T_i^j + rT_{i-1}^j \quad (3.17)$$

olur. Burada

$$r = \alpha^2 \frac{k}{h^2}$$

dir[10].

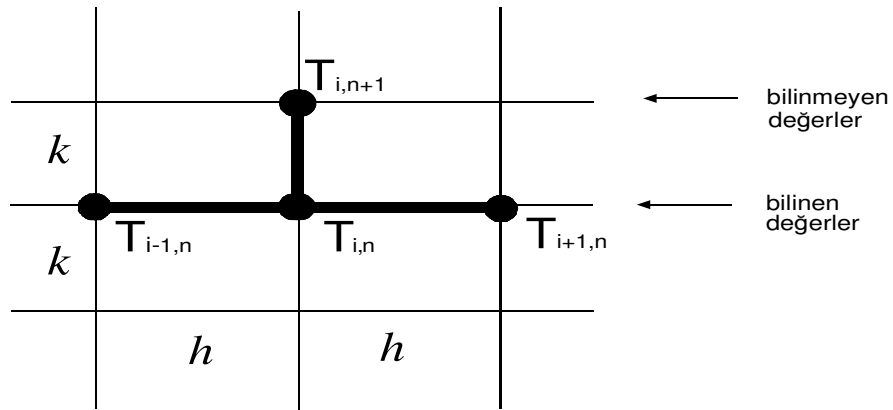
Her $i = 1, 2, \dots, M - 1$ için $T_i^0 = f(x_i)$ ve her $j = 0, 1, 2, \dots$ için $T_M^j = T_0^j = 0$ alınırsa bu yaklaşım matris formunda

$$\underbrace{\begin{bmatrix} T_1^{j+1} \\ T_2^{j+1} \\ \vdots \\ T_{M-2}^{j+1} \\ T_{M-1}^{j+1} \end{bmatrix}}_{\underline{T}^{(j+1)}} = \underbrace{\begin{bmatrix} (1-2r) & r & & & \\ r & (1-2r) & r & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & r & (1-2r) & r \\ & & & & r & (1-2r) \end{bmatrix}}_A \underbrace{\begin{bmatrix} T_1^j \\ T_2^j \\ \vdots \\ T_{M-2}^j \\ T_{M-1}^j \end{bmatrix}}_{\underline{T}^{(j)}} \quad (3.18)$$

veya $j = 0, 1, 2, \dots$ olmak üzere

$$\underline{T}^{(j+1)} = A \underline{T}^{(j)} \quad (3.19)$$

şeklinde de yazılabilir. Bu yöntemle açık sonlu fark yöntemi denir. Açık yöntemin şematik gösterimi Şekil 3.2. de verilmiştir. Şekilden de görüldüğü gibi $(n+1)$. zaman adımındaki T_i^{n+1} bilinmeyenleri n . zaman adımındaki T_{i-1}^n , T_i^n ve T_{i+1}^n değerleri kullanılarak hesaplanmaktadır[10].



Şekil 3.2. Açık yöntem için düğüm noktalarının gösterimi

Dirichlet Sınır Şartlı Isı İletim Problemi

Kabul edelim ki $i = 0$ ve $i = M$ için $x = 0$ ve $x = L$ de sınır şartları

$$\begin{aligned} T_0^n &= \tau(0, t) = f_0(t) \\ T_M^n &= \tau(L, t) = f_L(t) \end{aligned} \tag{3.20}$$

şeklinde verilmiş olsun. Böylece (3.17) denklem sisteminde T_0^n ve T_M^n sınır değerleri her zaman bilineceği için $M - 1$ tane düğüm noktasında T_i^{n+1} , $i = 1, 2, \dots, M - 1$ bilinmeyen değerleri için $M - 1$ tane açık denklem elde edilir. Hesaplamaların algoritması aşağıdaki gibidir.

- 1) $n = 0$ için hesaplama yapmaya başlanır. Başlangıç şartlarından denklemin sağ tarafındaki değerler bilindiği için (3.17) denkleminde ilk zaman adımının sonunda T_i^1 , $i = 1, 2, \dots, M - 1$ değerleri hesaplanır.
- 2) $n = 1$ için önceki zaman adımından denklemin sağ tarafındaki bilinen değerlerden ikinci adımın sonunda (3.17) denklemi kullanılarak T_i^2 , $i = 1, 2, \dots, M - 1$ değerleri hesaplanır.
- 3) Her alt zaman aralığı için belirlenmiş bir sıcaklık veya zaman değerine ulaşıncaya kadar bu işlemler tekrarlanır.

Sonuç olarak Dirichlet sınır şartlı ısı iletim problemi için açık sonlu fark denklemleri,

$$\begin{aligned} i = 1 \text{ için; } T_1^{n+1} &= (1 - 2r)T_1^n + rT_2^n + rf_0(t) \\ i = 2, 3, \dots, M - 2 \text{ için; } T_i^{n+1} &= rT_{i-1}^n + (1 - 2r)T_i^n + rT_{i+1}^n \\ i = M - 1 \text{ için; } T_{M-1}^{n+1} &= rT_{M-2}^n + (1 - 2r)T_{M-1}^n + rf_L(t) \end{aligned} \tag{3.21}$$

şeklinde olur[1].

Neumann Sınır Şartlı Isı İletim Problemi

$x = 0$ ve $x = L$ de sınır şartları sırasıyla

$$\begin{aligned} -k_0 \frac{\partial \tau}{\partial x}(0, t) &= q_0(t) \\ k_L \frac{\partial \tau}{\partial x}(L, t) &= q_L(t) \end{aligned} \tag{3.22}$$

olarak verilsin. Burada q_0 ve q_L sırasıyla $x = 0$ ve $x = L$ de uygulanmış olan ısı akışıdır. (3.22) sınır şartları için merkezi fark formülünün kullanılması ile

$$i = 0 \text{ için; } -k_0 \frac{T_1^n - T_{-1}^n}{2h} = q_0 \tag{3.23}$$

$$i = M \text{ için; } k_L \frac{T_{M+1}^n - T_{M-1}^n}{2h} = q_L$$

sınır şartları olarak elde edilir. Burada T_{-1}^n ve T_{M+1}^n , “-1” ve “M + 1” hayali noktalarındaki sıcaklıklardır. Bu sıcaklıkları yok etmek için $i = 0$ ve $i = M$ noktalarında (3.17) denklemi göz önüne alınırsa sırasıyla

$$T_0^{n+1} = rT_{-1}^n + (1 - 2r)T_0^n + rT_1^n \tag{3.24}$$

$$T_M^{n+1} = rT_{M-1}^n + (1 - 2r)T_M^n + rT_{M+1}^n$$

denklemleri elde edilir.

(3.23) denklemleri ile tanımlanmış sınır şartlarının (3.24) denklemleri ile birlikte göz önüne alınmasıyla

$$i = 0 \text{ için; } T_0^{n+1} = (1 - 2r)T_0^n + 2rT_1^n + 2r \frac{hq_0}{k_0} \quad (3.25)$$

$$i = M \text{ için; } T_M^{n+1} = 2rT_{M-1}^n + (1 - 2r)T_M^n + 2r \frac{hq_L}{k_L}$$

denklemleri elde edilir. Sonuç olarak Neumann sınır şartlı ısı iletim problemi için açık sonlu fark denklemleri,

$$i = 0 \text{ için; } T_0^{n+1} = (1 - 2r)T_0^n + 2rT_1^n + 2r\gamma_0$$

$$i = 1, 2, \dots, M - 1 \text{ için; } T_i^{n+1} = rT_{i-1}^n + (1 - 2r)T_i^n + rT_{i+1}^n \quad (3.26)$$

$$i = M \text{ için; } T_M^{n+1} = 2rT_{M-1}^n + (1 - 2r)T_M^n + 2r\gamma_L$$

elde edilir. Burada

$$\gamma_0 = \frac{hq_0}{k_0}, \quad \gamma_L = \frac{hq_L}{k_L} \quad (3.27)$$

ve

$$r = \frac{\alpha^2 k}{h^2}$$

dir[1].

Robbin Sınır Şartlı Isı İletim Problemi

$x = 0$ ve $x = L$ de sınır şartları sırasıyla

$$-k_0 \frac{\partial \tau}{\partial x}(0, t) + m_0 \tau(0, t) = h_0(t) \quad (3.28)$$

$$k_L \frac{\partial \tau}{\partial x}(L, t) + m_L \tau(L, t) = h_L(t)$$

olmak üzere burada $i = 0$ ve $i = M$ sınır noktalarında sıcaklıklar bilinmiyor. Buradaki iki sınır şartı kullanılarak iki denklem elde edilir. Merkezi fark formülünü uygulamak için çözüm bölgesinin h birim solunda ve sağında sırasıyla “-1” hayali noktası ve bu noktada T_{-1}^n sıcaklığını “ $M + 1$ ” hayali noktasında T_{M+1}^n sıcaklığını dikkate alalım. Bu hayali noktalardan faydalanarak (3.28) sınır şartları için merkezi fark yaklaşımının kullanılması ile

$$i = 0 \text{ için; } -k_0 \frac{T_1^n - T_{-1}^n}{2h} + m_0 T_0^n = h_0 \quad (3.29)$$

$$i = M \text{ için; } k_L \frac{T_{M+1}^n - T_{M-1}^n}{2h} + m_L T_M^n = h_L$$

olarak elde edilir. Burada “-1” ve “ $M + 1$ ” hayali noktalarındaki sıcaklıklar T_{-1}^n ve T_{M+1}^n dir. Bu sıcaklıkları yok etmek için $i = 0$ ve $i = M$ için (3.17) denklemini göz önüne alınırsa sırasıyla

$$T_0^{n+1} = rT_{-1}^n + (1 - 2r)T_0^n + rT_1^n \quad (3.30)$$

$$T_M^{n+1} = rT_{M-1}^n + (1 - 2r)T_M^n + rT_{M+1}^n$$

elde edilir.

(3.29) denklemleri ve (3.30) denklemleri arasında T_{-1}^n ifadesi ve T_{M+1}^n ifadesi yok edilirse

$$i = 0 \text{ için; } T_0^{n+1} = \left(1 - 2r \left(1 + \frac{hm_0}{k_0}\right)\right) T_0^n + 2rT_1^n + 2r \frac{hh_0}{k_0} \quad (3.31)$$

$$i = M \text{ için; } T_M^{n+1} = 2rT_{M-1}^n + \left(1 - 2r \left(1 + \frac{hm_L}{k_L}\right)\right) T_M^n + 2r \frac{hh_L}{k_L}$$

olur. Sonuç olarak Robbin sınır şartlı ısı iletim problemi için açık sonlu fark denklemleri,

$$i = 0 \text{ için; } T_0^{n+1} = (1 - 2r\beta_0)T_0^n + 2rT_1^n + 2r\gamma_0$$

$$i = 1, 2, \dots, M-1 \text{ için; } T_i^{n+1} = rT_{i-1}^n + (1 - 2r)T_i^n + rT_{i+1}^n \quad (3.32)$$

$$i = M \text{ için; } T_M^{n+1} = 2rT_{M-1}^n + (1 - 2r\beta_L)T_M^n + 2r\gamma_L$$

olarak elde edilir. Burada

$$\beta_0 = 1 + \frac{hm_0}{k_0}, \quad \gamma_0 = \frac{hh_0}{k_0} \quad (3.33)$$

$$\beta_L = 1 + \frac{hm_L}{k_L}, \quad \gamma_L = \frac{hh_L}{k_L}$$

$$r = \frac{\alpha^2 k}{h^2}$$

dir[1].

3.2.2. Kapalı Sonlu Fark Yöntemi

Isı denklemini

$$\frac{\partial \tau}{\partial t}(x,t) = \alpha^2 \frac{\partial^2 \tau}{\partial x^2}(x,t), \quad 0 < x < L, \quad t > 0$$

$$\tau(0,t) = \tau(L,t) = 0, \quad t > 0 \quad \text{ve} \quad \tau(x,0) = f(x), \quad 0 \leq x \leq L$$

şartlarına bağlı olarak göz önüne alalım. Taylor seri açılımı kullanılarak $\frac{\partial \tau}{\partial t}(x_i, t_{j+1})$

türevi için geri fark yaklaşımı

$$\frac{\partial \tau}{\partial t}(x_i, t_{j+1}) = \frac{\tau(x_i, t_{j+1}) - \tau(x_i, t_j)}{k} + \frac{k}{2} \frac{\partial^2 \tau}{\partial t^2}(x_i, \overline{\mu_j}) \quad (3.34)$$

olarak alınabilir. Burada $\overline{\mu_j} \in (t_j, t_{j+1})$ dir. $\frac{\partial^2 \tau}{\partial x^2}(x_i, t_{j+1})$ için ise (3.14) denkleminde

j yerine $j+1$ alınırsa (3.12) denkleminde

$$\begin{aligned} \frac{\tau(x_i, t_{j+1}) - \tau(x_i, t_j)}{k} - \alpha^2 \frac{\tau(x_{i+1}, t_{j+1}) - 2\tau(x_i, t_{j+1}) + \tau(x_{i-1}, t_{j+1}))}{h^2} \\ = -\frac{k}{2} \frac{\partial^2 \tau}{\partial t^2}(x_i, \overline{\mu_j}) - \alpha^2 \frac{h^2}{12} \frac{\partial^4 \tau}{\partial x^4}(\xi_i, t_j) \end{aligned} \quad (3.35)$$

elde edilir. Burada $\xi_i \in (x_{i-1}, x_{i+1})$ dir. Böylece (3.12) denklemini için sonlu fark denklemini

$$\frac{T_i^{j+1} - T_i^j}{k} - \alpha^2 \frac{T_{i+1}^{j+1} - 2T_i^{j+1} + T_{i-1}^{j+1}}{h^2} = 0 \quad (3.36)$$

olur.

(3.36) denklemi yeniden düzenlenirse

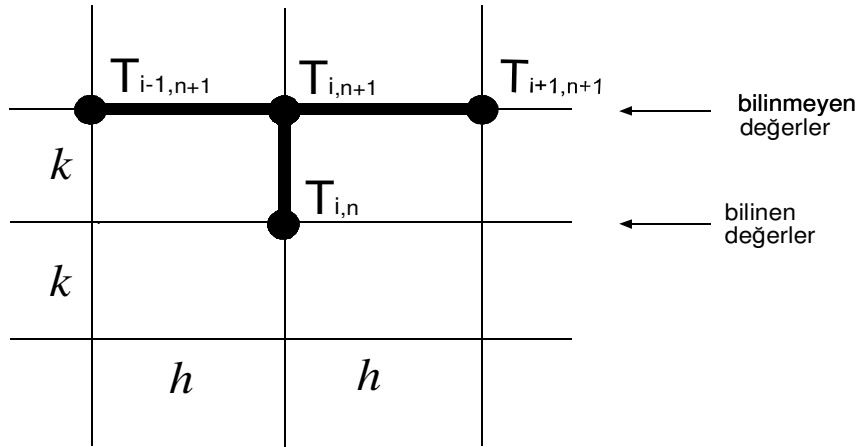
$$-rT_{i-1}^{j+1} + (1+2r)T_i^{j+1} - rT_{i+1}^{j+1} = T_i^j \quad (3.37)$$

olur. Burada $r = \alpha^2 \frac{k}{h^2}$ dir. Her $i = 1, 2, \dots, M-1$ için $T_i^0 = f(x_i)$ ve her $j = 0, 1, 2, \dots$

için $T_M^j = T_0^j = 0$ alınrsa bu yaklaşım matris formunda

$$\underbrace{\begin{bmatrix} (1+2r) & -r & & & \\ -r & (1+2r) & -r & & \\ & & \ddots & & \\ & & & -r & (1+2r) & -r \\ & & & & -r & (1+2r) \end{bmatrix}}_A \underbrace{\begin{bmatrix} T_1^{j+1} \\ T_2^{j+1} \\ \vdots \\ T_{M-2}^{j+1} \\ T_{M-1}^{j+1} \end{bmatrix}}_{\underline{T}^{(j+1)}} = \underbrace{\begin{bmatrix} T_1^j \\ T_2^j \\ \vdots \\ T_{M-2}^j \\ T_{M-1}^j \end{bmatrix}}_{\underline{T}^{(j)}} \quad (3.38)$$

veya $j = 0, 1, 2, \dots$ için $A\underline{T}^{(j+1)} = \underline{T}^{(j)}$ olarak da ifade edilebilir. Yöntemin şematik gösterimi Şekil 3.3 de verilmiştir. Buna göre $\underline{T}^{(j+1)}$ değerlerinin elde edilmesi için her zaman adımında bir lineer denklem sistemini çözmek gerekir. Bu nedenle bu yöntem kapalı sonlu fark yöntemi olarak adlandırılır. Yöntemde hatanın mertebesi $O(k+h^2)$ dir[10].



Şekil 3.3. Kapalı yöntem için düğüm noktalarının gösterimi

Dirichlet Sınır Şartlı Isı İletim Problemi

Kabul edelim ki $i = 0$ ve $i = M$ için $x = 0$ ve $x = L$ de sınır şartları sırasıyla

$$\begin{aligned} T_0^n &= \tau(0, t) = f_0(t) \\ T_M^n &= \tau(L, t) = f_L(t) \end{aligned} \quad (3.39)$$

şeklinde tanımlansın. Böylece (3.37) denklem sisteminde T_0^n ve T_M^n sınır değerleri her zaman bilineceği için $M - 1$ tane düğüm noktasında T_i^{n+1} , $i = 1, 2, \dots, M - 1$ bilinmeyen değerleri için $M - 1$ tane denklem elde edilir. Sonuç olarak Dirichlet sınır şartlı ısı iletim problemi için kapalı sonlu fark denklemleri,

$$\begin{aligned} i = 1 \text{ için; } T_1^n &= (1 + 2r)T_1^{n+1} - rT_2^{n+1} - rf_0(t) \\ i = 2, 3, \dots, M - 2 \text{ için; } T_i^n &= -rT_{i-1}^{n+1} + (1 + 2r)T_i^{n+1} - rT_{i+1}^{n+1} \\ i = M - 1 \text{ için; } T_{M-1}^n &= (1 + 2r)T_{M-1}^{n+1} - rT_{M-2}^{n+1} - rf_L(t) \end{aligned} \quad (3.40)$$

olarak elde edilir.

Neumann Sınır Şartlı Isı İletim Problemi

$x = 0$ ve $x = L$ de sınır şartları sırasıyla

$$-k_0 \frac{\partial \tau}{\partial x}(0, t) = q_0(t) \quad (3.41)$$

$$k_L \frac{\partial \tau}{\partial x}(L, t) = q_L(t)$$

burada q_0 ve q_L sırasıyla $x = 0$ ve $x = L$ sınırında uygulanmış ısı akışıdır. Bu hayali noktalardan faydalanarak (3.41) sınır şartları için merkezi fark yaklaşımının kullanılması ile

$$i = 0 \text{ için; } -k_0 \frac{T_1^{n+1} - T_{-1}^{n+1}}{2h} = q_0 \quad (3.42)$$

$$i = M \text{ için; } k_L \frac{T_{M+1}^{n+1} - T_{M-1}^{n+1}}{2h} = q_L$$

elde edilir. Burada “-1” ve “ $M + 1$ ” hayali noktalarındaki sıcaklıklar T_{-1}^{n+1} ve T_{M+1}^{n+1} dir. Bu sıcakları yok etmek için $i = 0$ ve $i = M$ noktalarında (3.37) denklemini göz önüne alınırsa sırasıyla

$$T_0^n = -rT_{-1}^{n+1} + (1 + 2r)T_0^{n+1} - rT_1^{n+1} \quad (3.43)$$

$$T_M^n = -rT_{M-1}^{n+1} + (1 + 2r)T_M^{n+1} - rT_{M+1}^{n+1}$$

elde edilir.

(3.42) ile (3.43) denklemleri arasında T_{-1}^{n+1} ve T_{M+1}^{n+1} terimleri yok edilirse

$$i = 0 \text{ için; } T_0^n = (1 + 2r)T_0^{n+1} - 2rT_1^{n+1} - 2r\frac{hq_0}{k_0} \quad (3.44)$$

$$i = M \text{ için; } T_M^n = -2rT_{M-1}^{n+1} + (1 + 2r)T_M^{n+1} - 2r\frac{hq_L}{k_L}$$

olur. Sonuç olarak Neumann sınır şartlı ısı iletim problemi için kapalı sonlu fark denklemleri,

$$i = 0 \text{ için; } T_0^n = (1 + 2r)T_0^{n+1} - 2rT_1^{n+1} - 2r\gamma_0$$

$$i = 1, 2, \dots, M - 1 \text{ için; } T_i^n = -rT_{i-1}^{n+1} + (1 + 2r)T_i^{n+1} - rT_{i+1}^{n+1} \quad (3.45)$$

$$i = M \text{ için; } T_M^n = -2rT_{M-1}^{n+1} + (1 + 2r)T_M^{n+1} - 2r\gamma_L$$

olarak elde edilir. Burada

$$\gamma_0 = \frac{hq_0}{k_0}, \quad \gamma_L = \frac{hq_L}{k_L} \quad (3.46)$$

ve

$$r = \frac{\alpha^2 k}{h^2}$$

dir[1].

Robbin Sınır Şartlı Isı İletim Problemi

$x = 0$ ve $x = L$ de sınır şartları sırasıyla

$$-k_0 \frac{\partial \tau}{\partial x}(0, t) + m_0 \tau(0, t) = h_0(t) \quad (3.47)$$

$$k_L \frac{\partial \tau}{\partial x}(L, t) + m_L \tau(L, t) = h_L(t)$$

olmak üzere burada $i = 0$ ve $i = M$ sınır noktalarında sıcaklıklar bilinmiyor. Buradaki iki sınır şartı kullanılarak denklem sisteminin çözümü için gereken iki denklem elde edilir. (3.47) sınır şartları için merkezi fark yaklaşımının kullanılması ile

$$i = 0 \text{ için; } -k_0 \frac{T_1^{n+1} - T_{-1}^{n+1}}{2h} + m_0 T_0^{n+1} = h_0 \quad (3.48)$$

$$i = M \text{ için; } k_L \frac{T_{M+1}^{n+1} - T_{M-1}^{n+1}}{2h} + m_L T_M^{n+1} = h_L$$

eşitlikleri elde edilir. Burada “-1” ve “ $M + 1$ ” hayali noktalarındaki sıcaklıklar T_{-1}^{n+1} ve T_{M+1}^{n+1} dir. Bu sıcaklıkları yok etmek amacıyla $i = 0$ ve $i = M$ için (3.37) denklemini göz önüne alınırsa sırasıyla

$$T_0^n = -rT_{-1}^{n+1} + (1 + 2r)T_0^{n+1} - rT_1^{n+1} \quad (3.49)$$

$$T_M^n = -rT_{M-1}^{n+1} + (1 + 2r)T_M^{n+1} - rT_{M+1}^{n+1}$$

elde edilir.

(3.48) ve (3.49) denklemleri arasında T_{-1}^{n+1} ifadesi ve T_{M+1}^{n+1} ifadesi ise yok edilirse

$$i = 0 \text{ için; } T_0^n = \left(1 + 2r \left(1 + \frac{hm_0}{k_0} \right) \right) T_0^{n+1} - 2rT_1^{n+1} - 2r \frac{hh_0}{k_0} \quad (3.50)$$

$$i = M \text{ için; } T_M^n = -2rT_{M-1}^{n+1} + \left(1 + 2r \left(1 + \frac{hm_L}{k_L} \right) \right) T_M^{n+1} - 2r \frac{hh_L}{k_L}$$

elde edilir. Yukarıdaki (3.50) denklemleri ile (3.47) sonlu fark denklemi her zaman adımında $M + 1$ tane denklemi sağlar. Sonuç olarak Robbin sınır şartlı ısı iletim problemi için kapalı sonlu fark denklemleri,

$$i = 0 \text{ için; } T_0^n = (1 + 2r\beta_0)T_0^{n+1} - 2rT_1^{n+1} - 2r\gamma_0$$

$$i = 1, 2, \dots, M - 1 \text{ için; } T_i^n = -rT_{i-1}^{n+1} + (1 + 2r)T_i^{n+1} - rT_{i+1}^{n+1} \quad (3.51)$$

$$i = M \text{ için; } T_M^n = -2rT_{M-1}^{n+1} + (1 + 2r\beta_L)T_M^{n+1} - 2r\gamma_L$$

olarak elde edilir. Burada

$$\beta_0 = 1 + \frac{hm_0}{k_0}, \quad \gamma_0 = \frac{hh_0}{k_0} \quad (3.52)$$

$$\beta_L = 1 + \frac{hm_L}{k_L}, \quad \gamma_L = \frac{hh_L}{k_L}$$

$$r = \frac{\alpha^2 k}{h^2}$$

dir[1].

3.2.3. Crank-Nicolson Sonlu Fark Yöntemi

Isı denklemini

$$\frac{\partial \tau}{\partial t}(x,t) = \alpha^2 \frac{\partial^2 \tau}{\partial x^2}(x,t), \quad 0 < x < L, \quad t > 0$$

$$\tau(0,t) = \tau(L,t) = 0, \quad t > 0 \quad \text{ve} \quad \tau(x,0) = f(x), \quad 0 \leq x \leq L$$

şartlarına bağlı olarak göz önüne alalım. Yeni bir sonlu fark yöntemini elde etmek için (3.15) denklemi ile (3.35) denkleminin ortalamaları alınır. Böylece

$$\begin{aligned} 2 \frac{T_i^{j+1} - T_i^j}{k} - \alpha^2 \left[\frac{T_{i+1}^j - 2T_i^j + T_{i-1}^j}{h^2} + \frac{T_{i+1}^{j+1} - 2T_i^{j+1} + T_{i-1}^{j+1}}{h^2} \right] = \\ - \frac{k}{2} \frac{\partial^2 \tau}{\partial t^2}(x_i, \bar{\mu}_j) + \frac{k}{2} \frac{\partial^2 \tau}{\partial t^2}(x_i, \mu_j) - 2\alpha^2 \frac{h^2}{12} \frac{\partial^4 \tau}{\partial x^4}(\xi_i, t_j) \end{aligned} \quad (3.53)$$

olur. Eğer (3.53) denklemi için

$$\frac{\partial^2 \tau}{\partial t^2}(x_i, \bar{\mu}_j) \approx \frac{\partial^2 \tau}{\partial t^2}(x_i, \mu_j)$$

kabul edilirse bu yöntem için kesme hatası $O(k^2 + h^2)$ mertebeden olur. Böylece (3.12) denklemi ile verilen ısı denklemini için sonlu fark yaklaşımı

$$\frac{T_i^{j+1} - T_i^j}{k} - \frac{\alpha^2}{2} \left[\frac{T_{i+1}^j - 2T_i^j + T_{i-1}^j}{h^2} + \frac{T_{i+1}^{j+1} - 2T_i^{j+1} + T_{i-1}^{j+1}}{h^2} \right] = 0 \quad (3.54)$$

olarak elde edilir.

(3.54) denklemi düzenlenirse her $i = 1, 2, \dots, M - 1$ ve $j = 0, 1, 2, \dots$ için

$$-rT_{i-1}^{j+1} + (2+2r)T_i^{j+1} - rT_{i+1}^{j+1} = rT_{i-1}^j + (2-2r)T_i^j + rT_{i+1}^j \quad (3.55)$$

olur. Burada $r = \alpha^2 \frac{k}{h^2}$ dir. Her $i = 1, 2, \dots, M - 1$ için $T_i^0 = f(x_i)$ ve her $j = 0, 1, 2, \dots$

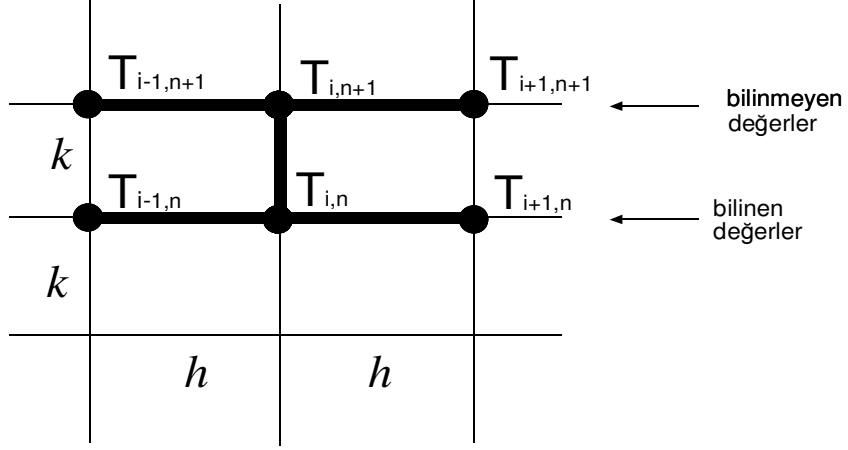
için $T_M^j = T_0^j = 0$ alınrsa bu yaklaşım matris formunda

$$\underbrace{\begin{bmatrix} (2+2r) & -r & & & & \\ -r & (2+2r) & -r & & & \\ & & \ddots & & & \\ & & & -r & (2+2r) & -r \\ & & & & -r & (2+2r) \end{bmatrix}}_A \underbrace{\begin{bmatrix} T_1^{j+1} \\ T_2^{j+1} \\ \vdots \\ T_{M-2}^{j+1} \\ T_{M-1}^{j+1} \end{bmatrix}}_{\underline{T}^{(j+1)}} = \underbrace{\begin{bmatrix} (2-2r) & r & & & & \\ r & (2-2r) & r & & & \\ & & \ddots & & & \\ & & & r & (2-2r) & r \\ & & & & r & (2-2r) \end{bmatrix}}_B \underbrace{\begin{bmatrix} T_1^j \\ T_2^j \\ \vdots \\ T_{M-2}^j \\ T_{M-1}^j \end{bmatrix}}_{\underline{T}^{(j)}} \quad (3.56)$$

veya $j = 0, 1, 2, \dots$ için

$$A\underline{T}^{(j+1)} = B\underline{T}^{(j)} \quad (3.57)$$

olur. Bu yöntemde her $j = 0, 1, 2, \dots$ için $\underline{T}^{(j)}$ den $\underline{T}^{(j+1)}$ elde edilir. Bu yöntem Crank-Nicolson yöntemi olarak bilinir. Bu yöntemin şematik gösterimi Şekil 3.4 de verilmiştir[10].



Şekil 3.4. Crank-Nicolson yöntemi için düğüm noktalarının gösterimi

Dirichlet Sınır Şartlı Isı İletim Problemi

Kabul edelim ki $i=0$ ve $i=M$ için $x=0$ ve $x=L$ de sınır şartları sırasıyla

$$\begin{aligned} T_0^n &= \tau(0, t) = f_0(t) \\ T_M^n &= \tau(L, t) = f_L(t) \end{aligned} \quad (3.58)$$

şeklinde tanımlansın. Böylece (3.55) denklem sisteminde T_0^n ve T_M^n sınır değerleri her zaman bilineceği için $M-1$ tane düğüm noktasında T_i^{n+1} , $i=1,2,\dots,M-1$ bilinmeyen değerleri için $M-1$ tane denklem elde edilir. Sonuç olarak Dirichlet sınır şartlı ısı iletim problemi için Crank-Nicolson sonlu fark denklemleri,

$$i=1 \text{ için; } (2+2r)T_1^{n+1} - rT_2^{n+1} = (2-2r)T_1^n + rT_2^n + 2rf_0(t)$$

$i=2,3,\dots,M-2$ için;

$$-rT_{i-1}^{n+1} + (2+2r)T_i^{n+1} - rT_{i+1}^{n+1} = rT_{i-1}^n + (2-2r)T_i^n + rT_{i+1}^n \quad (3.59)$$

$$i=M-1 \text{ için; } (2+2r)T_{M-1}^{n+1} - rT_{M-2}^{n+1} = (2-2r)T_{M-1}^n + rT_{M-2}^n + 2rf_L(t)$$

olarak elde edilir.

Neumann Sınır Şartlı Isı İletim Problemi

$x = 0$ ve $x = L$ de sınır şartları sırasıyla

$$-k_0 \frac{\partial \tau}{\partial x}(0, t) = q_0(t) \quad (3.60)$$

$$k_L \frac{\partial \tau}{\partial x}(L, t) = q_L(t)$$

olsun. Burada q_0 ve q_L sırasıyla $x = 0$ ve $x = L$ sınırında uygulanmış ısı akışıdır. Bu hayali noktalardan faydalanarak (3.60) sınır şartları için merkezi fark yaklaşımının kullanılması ile

$$i = 0 \text{ için; } -k_0 \frac{T_1^n - T_{-1}^n}{2h} = q_0 \quad (3.61)$$

$$i = M \text{ için; } k_L \frac{T_{M+1}^n - T_{M-1}^n}{2h} = q_L$$

olur. Burada “-1” ve “ $M + 1$ ” hayali noktalar T_{-1}^n ve T_{M+1}^n değerleri ise bu noktalardaki sıcaklıklardır. T_{-1}^n ve T_{M+1}^n sıcaklıklarını yok etmek için $i = 0$ ve $i = M$ noktalarının göz önüne alınması ile (3.55) denkleminde sırasıyla

$$-rT_{-1}^{n+1} + (2 + 2r)T_0^{n+1} - rT_1^{n+1} = rT_{-1}^n + (2 - 2r)T_0^n + rT_1^n \quad (3.62)$$

$$-rT_{M-1}^{n+1} + (2 + 2r)T_M^{n+1} - rT_{M+1}^{n+1} = rT_{M-1}^n + (2 - 2r)T_M^n + rT_{M+1}^n$$

denklemleri elde edilir. T_{-1}^n ve T_{-1}^{n+1} sıcaklıklarının, $n + 1$ ve n zaman adımları için (3.61) denklemlerinin birincisinde kullanılması ile (3.62) denklemlerinin birincisinde yok edilir.

Benzer olarak T_{M+1}^n ve T_{M+1}^{n+1} değerleri (3.61) denklemlerinin ikincisi yardımıyla (3.62) denklemlerinin ikincisinde yok edilir. Böylece $i=0$ ve $i=M$ sınır düğüm noktalarında sınır şartlarının sonlu fark yaklaşımları için elde edilen denklemler sırasıyla

$$(2+2r)T_0^{n+1} - 2rT_1^{n+1} = (2-2r)T_0^n + 2rT_1^n + 4r\frac{hq_0}{k_0} \quad (3.63)$$

$$-2rT_{M-1}^{n+1} + (2+2r)T_M^{n+1} = 2rT_{M-1}^n + (2-2r)T_M^n + 4r\frac{hq_L}{k_L}$$

olur. Sonuç olarak Neumann sınır şartlı ısı iletim problemi için Crank-Nicolson sonlu fark denklemleri,

$$i=0 \text{ için; } (2+2r)T_0^{n+1} - 2rT_1^{n+1} = (2-2r)T_0^n + 2rT_1^n + 4r\gamma_0$$

$i=1,2,\dots,M-1$ için;

$$-rT_{i-1}^{n+1} + (2+2r)T_i^{n+1} - rT_{i+1}^{n+1} = rT_{i-1}^n + (2-2r)T_i^n + rT_{i+1}^n \quad (3.64)$$

$$i=M \text{ için; } -2rT_{M-1}^{n+1} + (2+2r)T_M^{n+1} = 2rT_{M-1}^n + (2-2r)T_M^n + 4r\gamma_L$$

elde edilir. Burada

$$\gamma_0 = \frac{hq_0}{k_0}, \quad \gamma_L = \frac{hq_L}{k_L} \quad (3.65)$$

ve

$$r = \frac{\alpha^2 k}{h^2}$$

dir[1].

Robbin Sınır Şartlı Isı İletim Problemi

$x = 0$ ve $x = L$ sınırında sıcaklıklar T_0 ve T_M olarak tanımlansın. Böylece her n zaman adımında (3.55) denklemi, sonraki $n+1$ zaman adımında sıcaklıkların belirlenmesi için $M-1$ eş zamanlı cebirsel denklemi oluşturur. Böyle durumlarda iki ek denkleme ihtiyaç duyulur. $x = 0$ ve $x = L$ de sınır şartları sırasıyla

$$-k_0 \frac{\partial \tau}{\partial x}(0, t) + m_0 \tau(0, t) = h_0(t) \quad (3.66)$$

$$k_L \frac{\partial \tau}{\partial x}(L, t) + m_L \tau(L, t) = h_L(t)$$

olsun. $i = 0$ ve $i = M$ düğüm noktaları civarında verilen sınır şartlarının birinci türev için merkezi fark formülü ile sonlu fark yaklaşımları

$$-k_0 \frac{T_1^n - T_{-1}^n}{2h} + m_0 T_0^n = h_0 \quad (3.67)$$

$$k_L \frac{T_{M+1}^n - T_{M-1}^n}{2h} + m_L T_M^n = h_L$$

dir. Burada T_{-1}^n ve T_{M+1}^n , hayali noktalardaki sıcaklıklardır. (3.67) denklemleri $(n+1)$ ile n üst indisleri yer değiştirilerek $(n+1)$ zaman adımı içinde yazılabilir. T_{-1}^n ve T_{M+1}^n sıcaklıklarını yok etmek için $i = 0$ ve $i = M$ noktalarının göz önüne alınması ile (3.55) denkleminde sırasıyla

$$-rT_{-1}^{n+1} + (2+2r)T_0^{n+1} - rT_1^{n+1} = rT_{-1}^n + (2-2r)T_0^n + rT_1^n \quad (3.68)$$

$$-rT_{M-1}^{n+1} + (2+2r)T_M^{n+1} - rT_{M+1}^{n+1} = rT_{M-1}^n + (2-2r)T_M^n + rT_{M+1}^n$$

denklemleri elde edilir.

T_{-1}^n ve T_{-1}^{n+1} sıcaklıkları $n+1$ ve n zaman adımları için (3.67) denkleminin birincisinde kullanılması ile (3.68) denklemlerinin birincisinde yok edilir. Benzer olarak T_{M+1}^n ve T_{M+1}^{n+1} sıcaklıkları da (3.67) denklemlerinin ikincisi yardımıyla (3.68) denklemlerinin ikincisinde yok edilir. Böylece $i=0$ ve $i=M$ sınır düğüm noktalarında sınır şartlarının sonlu fark yaklaşımları için elde edilen denklemler sırasıyla

$$\left(2 + 2r\left(1 + \frac{hm_0}{k_0}\right)\right)T_0^{n+1} - 2rT_1^{n+1} = \left(2 - 2r\left(1 + \frac{hm_0}{k_0}\right)\right)T_0^n + 2rT_1^n + 4r\frac{hh_0}{k_0} \quad (3.69)$$

$$-2rT_{M-1}^{n+1} + \left(2 + 2r\left(1 + \frac{hm_L}{k_L}\right)\right)T_M^{n+1} = 2rT_{M-1}^n + \left(2 - 2r\left(1 + \frac{hm_L}{k_L}\right)\right)T_M^n + 4r\frac{kh_L}{k_L}$$

olur. Sonuç olarak Robbin sınır şartlı ısı iletim problemi için Crank-Nicolson sonlu fark denklemleri,

$$i=0 \text{ için; } (2 + 2r\beta_0)T_0^{n+1} - 2rT_1^{n+1} = (2 - 2r\beta_0)T_0^n + 2rT_1^n + 4r\gamma_0$$

$i=1,2,\dots,M-1$ için;

$$-rT_{i-1}^{n+1} + (2 + 2r)T_i^{n+1} - rT_{i+1}^{n+1} = rT_{i-1}^n + (2 - 2r)T_i^n + rT_{i+1}^n \quad (3.70)$$

$$i=M \text{ için; } -2rT_{M-1}^{n+1} + (2 + 2r\beta_L)T_M^{n+1} = 2rT_{M-1}^n + (2 - 2r\beta_L)T_M^n + 4r\gamma_L$$

olur. Burada

$$\beta_0 = 1 + \frac{hm_0}{k_0}, \quad \gamma_0 = \frac{hh_0}{k_0} \quad (3.71)$$

$$\beta_L = 1 + \frac{hm_L}{k_L}, \quad \gamma_L = \frac{hh_L}{k_L}$$

$$r = \frac{\alpha^2 k}{h^2}$$

dir[1].

3.3. KLASİK SONLU FARK YÖNTEMLERİ İÇİN KARARLILIK ANALİZİ

Nümerik yöntemlerde hesaplama yaparken hesaplayıcılar sonsuz doğrulukta bir hesaplama yapamazlar. Dolayısıyla hesaplayıcılar ile sonlu fark denklemlerinin çözümünde yapılan hesaplamalarda yuvarlama hatası oluşur. Kararlılık analizi hesaplamalar sürerken hatanın büyümesini inceler. Kararsız bir sistem için hata sınırsız bir şekilde artar fakat kararlı bir sistemde hata belli bir sınırı geçemez. Kararlılık analizinde kullanılan en yaygın iki yöntem matris ve Fourier (veya von Neumann) yöntemidir. Burada sadece matris yöntemi göz önüne alınacaktır. Matris yönteminde diferansiyel denklemin sonlu fark gösterimi ve sınır şartları matris formunda gösterilir ve problemin kararlılığı katsayılar matrisinin karakteristik değerlerinin incelenmesine dönüşür. Hata zamanla üstel bir şekilde artmıyorsa ve sistemin en büyük karakteristik değeri 1 den küçük yada 1 e eşit ise sisteme kararlıdır denir. Sonlu fark yöntemlerinin kararlılık analizi için matris yöntemi aşağıda verilmiştir.

3.3.1. Kararlılık Analizi için Matris Yöntemi

Bu yöntemde diferansiyel denklemini ve sınır şartlarını içeren problemin sonlu fark gösterimine karşılık gelen matrisin karakteristik değerleri incelenir. $j = n$ için genel bir sonlu fark denklemini $b, c \in \mathbb{R}$ olmak üzere

$$b_{i-1}T_{i-1}^{n+1} + b_iT_i^{n+1} + b_{i+1}T_{i+1}^{n+1} = c_{i-1}T_{i-1}^n + c_iT_i^n + c_{i+1}T_{i+1}^n \quad (3.72)$$

şeklinde olsun.

Bu yaklaşım $i=0$ ve $i=M$ sınır değerleri biliniyorsa $i=1,2,\dots,M-1$ için açık biçimde

$$\underbrace{\begin{bmatrix} b_1 & b_2 & & & & \\ b_1 & b_2 & b_3 & & & \\ & & \ddots & & & \\ & & & b_{M-3} & b_{M-2} & b_{M-1} \\ & & & & b_{M-2} & b_{M-1} \end{bmatrix}}_B \underbrace{\begin{bmatrix} T_1^{n+1} \\ T_2^{n+1} \\ \vdots \\ T_{M-2}^{n+1} \\ T_{M-1}^{n+1} \end{bmatrix}}_{\underline{T}^{(n+1)}} = \underbrace{\begin{bmatrix} c_1 & c_2 & & & & \\ c_1 & c_2 & c_3 & & & \\ & & \ddots & & & \\ & & & c_{M-3} & c_{M-2} & c_{M-1} \\ & & & & c_{M-2} & c_{M-1} \end{bmatrix}}_C \underbrace{\begin{bmatrix} T_1^n \\ T_2^n \\ \vdots \\ T_{M-2}^n \\ T_{M-1}^n \end{bmatrix}}_{\underline{T}^{(n)}} + \underbrace{\begin{bmatrix} c_0 T_0^n - b_0 T_0^{n+1} \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ c_M T_M^n - b_M T_M^{n+1} \end{bmatrix}}_{\underline{d}_n} \quad (3.73)$$

veya

$$B\underline{T}^{(n+1)} = C\underline{T}^{(n)} + \underline{d}_n \quad (3.74)$$

olarak yazılabilir. Burada B ve C , $(M-1)$. mertebeden matrisler, $\underline{T}^{(n+1)}$ elemanları $T_1^{n+1}, T_2^{n+1}, \dots, T_{M-1}^{n+1}$ olan kolon vektörü ve \underline{d}_n bilinen sınır değerlerinden ve sıfırlardan oluşan kolon vektördür. (3.74) eşitliği B tersi mevcut bir matris ise $A = B^{-1}C$ ve $\underline{f}_n = B^{-1}\underline{d}_n$ olmak üzere,

$$\underline{T}^{(n+1)} = A\underline{T}^{(n)} + \underline{f}_n \quad (3.75)$$

olarak ifade edilebilir.

\underline{T}^* , \underline{T} vektörüne bir yaklaşım ise

$$\underline{T}^{(n+1)*} = A\underline{T}^{(n)*} + \underline{f}_n \quad (3.76)$$

olarak yazılabilir. Hata

$$e_i^n = T_i^n - T_i^{n*} \quad (3.77)$$

olarak tanımlanırsa, (3.76) ifadesi (3.75) ifadesinden çıkarılarak

$$\underline{e}^{(n+1)} = A\underline{e}^{(n)} \quad (3.78)$$

elde edilir. Buradan

$$\underline{e}^{(n)} = A\underline{e}^{(n-1)} = A^2\underline{e}^{(n-2)} = \dots = A^n\underline{e}^{(0)} \quad (3.79)$$

bulunur. Burada $\underline{e}^{(0)} = [e_1^0, e_2^0, \dots, e_{M-1}^0]^T$ başlangıç hatasıdır. Başlangıç hatası $t = 0$ noktasında biliniyor olsun. Bu durumda $\underline{e}^{(n)}$ değerinin ne zaman sınırlı olduğu araştırılmalıdır. Bunun için A matrisinin reel, simetrik ve rankı $(M - 1)$ olan bir matris olduğu kabul edilmelidir. Bu durumda A matrisi $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_{M-1}$ karakteristik değerlerine karşılık gelen $(M - 1)$ tane lineer bağımsız $\underline{W}_1, \underline{W}_2, \dots, \underline{W}_{M-1}$ karakteristik vektörlerine sahiptir. Böylece $\underline{W}_s, (s = 1, 2, \dots, M - 1)$ karakteristik vektörleri IR^{M-1} uzayının bir bazını oluştururlar. O halde bu uzaydan alınan bir vektör, \underline{W}_s karakteristik vektörlerinin lineer birleşimi olarak yazılabilir.

$\underline{e}^{(0)} \in IR^{M-1}$ olduğundan $\underline{e}^{(0)}$ vektörü \underline{W}_s karakteristik vektörlerinin lineer birleşimi olarak

$$\underline{e}^{(0)} = \sum_{s=1}^{M-1} \alpha_s \underline{W}_s \quad (3.80)$$

şeklinde yazılabilir. (3.79) denkleminde $\underline{e}^{(n)} = A^n \underline{e}^{(0)}$ olduğundan

$$\underline{e}^{(n)} = A^n \sum_{s=1}^{M-1} \alpha_s \underline{W}_s \quad (3.81)$$

dir. Karakteristik değer ve karakteristik vektör tanımından $A^n \underline{W}_s = \lambda_s^n \underline{W}_s$ olduğundan (3.81) eşitliği

$$\underline{e}^{(n)} = \sum_{s=1}^{M-1} \alpha_s \lambda_s^n \underline{W}_s \quad (3.82)$$

olur. Buradan açıkça görüldüğü gibi $\underline{e}^{(n)}$ değerinin n artarken sınırlı kalması $\max_s |\lambda_s| \leq 1$ olması ile mümkündür [11].

3.3.2. Açık Sonlu Fark Yaklaşımı için Matris Yöntemi ile Kararlılık Analizi

Dirichlet Sınır Şartlı Isı İletim Problemi

Dirichlet sınır şartlı ısı iletim probleminin (3.21) denklemi ile verilen açık sonlu fark yaklaşımı matris formunda

$$\underbrace{\begin{bmatrix} T_1^{n+1} \\ T_2^{n+1} \\ \vdots \\ T_{M-2}^{n+1} \\ T_{M-1}^{n+1} \end{bmatrix}}_{\underline{T}^{(n+1)}} = \underbrace{\begin{bmatrix} (1-2r) & r & & & \\ & r & (1-2r) & r & \\ & & & \ddots & \\ & & & r & (1-2r) & r \\ & & & & r & (1-2r) \end{bmatrix}}_A \underbrace{\begin{bmatrix} T_1^n \\ T_2^n \\ \vdots \\ T_{M-2}^n \\ T_{M-1}^n \end{bmatrix}}_{\underline{T}^{(n)}} + \underbrace{\begin{bmatrix} rf_0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ rf_L \end{bmatrix}}_{\underline{b}} \quad (3.83)$$

veya

$$\underline{T}^{(n+1)} = A \underline{T}^{(n)} + \underline{b} \quad (3.84)$$

şeklinde yazılabilir. Teorem 2.2 den A matrisinin karakteristik değerleri

$$\lambda_s = (1-2r) + 2r \cos\left(\frac{s\pi}{M}\right), s = 1, 2, \dots, M-1 \quad (3.85)$$

veya

$$\lambda_s = 1 - 4r \sin^2\left(\frac{s\pi}{2M}\right), s = 1, 2, \dots, M-1 \quad (3.86)$$

dir. Matris yöntemiyle yapılan kararlılık analizine göre $\max_s |\lambda_s| \leq 1$ yani

$$|\lambda_s| = \left| 1 - 4r \sin^2\left(\frac{s\pi}{2M}\right) \right| \leq 1, s = 1, 2, \dots, M-1 \quad (3.87)$$

olmalıdır.

Buradan

$$-1 \leq 1 - 4r \sin^2\left(\frac{s\pi}{2M}\right) \leq 1 \quad (3.88)$$

veya

$$-2 \leq -4r \sin^2\left(\frac{s\pi}{2M}\right) \leq 0 \quad (3.89)$$

bulunur.

$$-4r \sin^2\left(\frac{s\pi}{2M}\right) \geq -2 \quad (3.90)$$

ifadesinden

$$r \leq \frac{1}{2 \sin^2\left(\frac{s\pi}{2M}\right)} \leq \frac{1}{2} \quad (3.91)$$

bulunur. Dolayısıyla $0 < r \leq 1/2$ için açık yöntem kararlıdır.

Neumann Sınır Şartlı Isı İletim Problemi

Neumann sınır şartlı ısı iletim probleminin (3.26) denklemleriyle verilen açık sonlu fark yaklaşımı matris formunda

$$\underbrace{\begin{bmatrix} T_0^{n+1} \\ T_1^{n+1} \\ \vdots \\ T_{M-1}^{n+1} \\ T_M^{n+1} \end{bmatrix}}_{\underline{T}^{(n+1)}} = \underbrace{\begin{bmatrix} (1-2r) & 2r & & & & \\ & r & (1-2r) & r & & \\ & & & \ddots & & \\ & & & & r & (1-2r) & r \\ & & & & & 2r & (1-2r) \end{bmatrix}}_A \underbrace{\begin{bmatrix} T_0^n \\ T_1^n \\ \vdots \\ T_{M-1}^n \\ T_M^n \end{bmatrix}}_{\underline{T}^{(n)}} + \underbrace{\begin{bmatrix} 2r\gamma_0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 2r\gamma_L \end{bmatrix}}_{\underline{b}} \quad (3.92)$$

veya

$$\underline{T}^{(n+1)} = A\underline{T}^{(n)} + \underline{b} \quad (3.93)$$

olarak yazılabilir. Teorem 2.4 den A matrisinin karakteristik değerleri

$$|\lambda - (1 - 2r)| = 2r \Rightarrow \begin{cases} \lambda_1 - 1 + 2r = 2r \Rightarrow \lambda_1 = 1, \\ \lambda_2 - 1 + 2r = -2r \Rightarrow \lambda_2 = 1 - 4r \end{cases} \quad (3.94)$$

dir. Kararlılık için $|\lambda_i| \leq 1$ ($i = 1, 2$) olmalıdır. Buradan

$$|\lambda_1| \leq 1 \text{ den } |1| \leq 1 \text{ ve } |\lambda_2| \leq 1 \text{ için } |1 - 4r| \leq 1 \text{ den } 0 < r \leq 1/2$$

bulunur. Böylece Neumann sınır şartlı ısı iletim probleminin açık sonlu fark yaklaşımının çözümü ancak $0 < r \leq 1/2$ olduğunda analitik çözüme yakınsar.

Robbin Sınır Şartlı Isı İletim Problemi

Robbin sınır şartlı ısı iletim probleminin (3.32) denklemi ile verilen açık sonlu fark yaklaşımı matris formunda

$$\underbrace{\begin{bmatrix} T_0^{n+1} \\ T_1^{n+1} \\ \vdots \\ T_{M-1}^{n+1} \\ T_M^{n+1} \end{bmatrix}}_{\underline{T}^{(n+1)}} = \underbrace{\begin{bmatrix} (1-2r\beta_0) & 2r & & & \\ & r & (1-2r) & r & \\ & & & \ddots & \\ & & & r & (1-2r) & r \\ & & & & 2r & (1-2r\beta_L) \end{bmatrix}}_A \underbrace{\begin{bmatrix} T_0^n \\ T_1^n \\ \vdots \\ T_{M-1}^n \\ T_M^n \end{bmatrix}}_{\underline{T}^{(n)}} + \underbrace{\begin{bmatrix} 2r\gamma_0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 2r\gamma_L \end{bmatrix}}_{\underline{b}} \quad (3.95)$$

veya

$$\underline{T}^{(n+1)} = A\underline{T}^{(n)} + \underline{b} \quad (3.96)$$

olarak yazılabilir.

Teorem 2.4 den A matrisinin karakteristik değerleri;

$i = 0$ için $a_{ss} = 1 - 2r\beta_0$ ve $P_s = 2r$ olduğundan,

$$|\lambda - (1 - 2r\beta_0)| = 2r \Rightarrow \begin{cases} \lambda_1 - 1 + 2r\beta_0 = 2r \Rightarrow \lambda_1 = 1 - 2r \frac{hm_0}{k_0}, \\ \lambda_2 - 1 + 2r\beta_0 = -2r \Rightarrow \lambda_2 = 1 - 2r \left(2 + \frac{hm_0}{k_0} \right) \end{cases} \quad (3.97)$$

$i = 1, 2, \dots, M - 1$ için $a_{ss} = 1 - 2r$ ve $P_s = 2r$ olduğundan,

$$|\lambda - (1 - 2r)| = 2r \Rightarrow \begin{cases} \lambda_3 - 1 + 2r = 2r \Rightarrow \lambda_3 = 1, \\ \lambda_4 - 1 + 2r = -2r \Rightarrow \lambda_4 = 1 - 4r \end{cases} \quad (3.98)$$

olur. $i = M$ için $a_{ss} = 1 - 2r\beta_L$ ve $P_s = 2r$ olduğundan,

$$|\lambda - (1 - 2r\beta_L)| = 2r \Rightarrow \begin{cases} \lambda_5 - 1 + 2r\beta_L = 2r \Rightarrow \lambda_5 = 1 - 2r \frac{hm_L}{k_L}, \\ \lambda_6 - 1 + 2r\beta_L = -2r \Rightarrow \lambda_6 = 1 - 2r \left(2 + \frac{hm_L}{k_L} \right) \end{cases} \quad (3.99)$$

dir. Burada kararlılık için $|\lambda_i| \leq 1$ ($i = 1, 2, \dots, 6$) olmalıdır. Burada λ_i değerleri tek tek incelendiğinde,

$$|\lambda_1| \leq 1 \text{ den } r \leq \frac{1}{hm_0 / k_0},$$

$$|\lambda_2| \leq 1 \text{ den } r \leq \frac{1}{2 + (hm_0 / k_0)},$$

$$|\lambda_3| \leq 1 \text{ den } |1| \leq 1,$$

$$|\lambda_4| \leq 1 \text{ den } r \leq \frac{1}{2},$$

$$|\lambda_5| \leq 1 \text{ den } r \leq \frac{1}{hm_L / k_L}$$

ve

$$|\lambda_6| \leq 1 \text{ den } r \leq \frac{1}{2 + (hm_L / k_L)}$$

bulunur. Böylece Robbin sınır şartlı ısı iletim probleminin açık sonlu fark yaklaşımından elde edilecek çözümler ancak

$$r \leq \min \left\{ \frac{1}{2 + (hm_0 / k_0)}, \frac{1}{2 + (hm_L / k_L)} \right\} \quad (3.100)$$

olduğunda problem analitik çözümüne yakınsar.

3.3.3. Kapalı Sonlu Fark Yaklaşımı için Matris Yöntemi ile Kararlılık Analizi

Dirichlet Sınır Şartlı Isı İletim Problemi

Dirichlet sınır şartlı ısı iletim probleminin (3.40) denklemi ile verilen kapalı sonlu fark yaklaşımı matris formunda

$$\underbrace{\begin{bmatrix} (1+2r) & -r & & & \\ -r & (1+2r) & -r & & \\ & & \ddots & & \\ & & & -r & (1+2r) & -r \\ & & & & -r & (1+2r) \end{bmatrix}}_A \underbrace{\begin{bmatrix} T_1^{n+1} \\ T_2^{n+1} \\ \vdots \\ T_{M-2}^{n+1} \\ T_{M-1}^{n+1} \end{bmatrix}}_{\underline{T}^{(n+1)}} = \underbrace{\begin{bmatrix} T_1^n \\ T_2^n \\ \vdots \\ T_{M-2}^n \\ T_{M-1}^n \end{bmatrix}}_{\underline{T}^{(n)}} + \underbrace{\begin{bmatrix} rf_0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ rf_L \end{bmatrix}}_{\underline{b}} \quad (3.101)$$

veya

$$A\underline{T}^{(n+1)} = \underline{T}^{(n)} + \underline{b} \quad (3.102)$$

olarak yazılabilir. Böylece

$$\underline{T}^{(n+1)} = A^{-1}\underline{T}^{(n)} + A^{-1}\underline{b} \quad (3.103)$$

elde edilir. Burada kararlılık analizi için A^{-1} matrisinin karakteristik değerlerine ihtiyaç vardır. Teorem 2.5 den λ_s , A matrisinin karakteristik değerlerini göstermek üzere A^{-1} matrisinin karakteristik değerleri $\frac{1}{\lambda_s}$ dir. A matrisinin karakteristik değerleri Teorem 2.2 den

$$\lambda_s = (1+2r) - 2r \cos\left(\frac{s\pi}{M}\right), \quad s = 1, 2, \dots, M-1 \quad (3.104)$$

veya

$$\lambda_s = 1 + 4r \sin^2\left(\frac{s\pi}{2M}\right), \quad s = 1, 2, \dots, M-1 \quad (3.105)$$

dir. Buradan A^{-1} matrisinin karakteristik değerleri

$$\frac{1}{\lambda_s} = \frac{1}{1 + 4r \sin^2\left(\frac{s\pi}{2M}\right)}, \quad s = 1, 2, \dots, M-1 \quad (3.106)$$

olur. Matris yönteminde kararlılık için gerek ve yeter şart $\max_s \left| \frac{1}{\lambda_s} \right| \leq 1$ olmasıdır. Buna göre

$$\left| \frac{1}{\lambda_s} \right| = \frac{1}{\left| 1 + 4r \sin^2\left(\frac{s\pi}{2M}\right) \right|} \leq 1, \quad s = 1, 2, \dots, M-1 \quad (3.107)$$

bulunur. Bu eşitsizlik her $r > 0$ için sağlandığından yöntem şartsız kararlıdır. Böylece Dirichlet sınır şartlı ısı iletim probleminin kapalı yöntem ile yaklaşık çözümü r kararlılık parametresinin her seçimi için analitik çözüme yakınsar. Yani yöntem şartsız kararlıdır.

Neumann Sınır Şartlı Isı İletim Problemi

Neumann sınır şartlı ısı iletim probleminin (3.45) denklemini ile verilen kapalı sonlu fark yaklaşımı matris formunda

$$\underbrace{\begin{bmatrix} (1+2r) & -2r & & & & \\ -r & (1+2r) & -r & & & \\ & & \ddots & & & \\ & & & -r & (1+2r) & -r \\ & & & & -2r & (1+2r) \end{bmatrix}}_A \underbrace{\begin{bmatrix} T_0^{n+1} \\ T_1^{n+1} \\ \vdots \\ T_{M-1}^{n+1} \\ T_M^{n+1} \end{bmatrix}}_{\underline{T}^{(n+1)}} = \underbrace{\begin{bmatrix} T_0^n \\ T_1^n \\ \vdots \\ T_{M-1}^n \\ T_M^n \end{bmatrix}}_{\underline{T}^{(n)}} + \underbrace{\begin{bmatrix} 2r\gamma_0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 2r\gamma_L \end{bmatrix}}_{\underline{b}} \quad (3.108)$$

veya

$$A\underline{T}^{(n+1)} = \underline{T}^{(n)} + \underline{b} \quad (3.109)$$

olarak yazılabilir. Buradan

$$\underline{T}^{(n+1)} = A^{-1}\underline{T}^{(n)} + A^{-1}\underline{b} \quad (3.110)$$

elde edilir. Teorem 2.4 den A matrisinin karakteristik değerleri

$$|\lambda - (1+2r)| = -2r \Rightarrow \begin{cases} \lambda_1 - 1 - 2r = 2r \Rightarrow \lambda_1 = 1 + 4r, \\ \lambda_2 - 1 - 2r = -2r \Rightarrow \lambda_2 = 1 \end{cases} \quad (3.111)$$

olarak bulunur. A matrisinin karakteristik değerleri λ_i ise A^{-1} matrisinin karakteristik

değerleri $\frac{1}{\lambda_i}$ değerleridir. O halde kararlılık için $\left| \frac{1}{\lambda_i} \right| \leq 1$ ($i = 1, 2$) olmalıdır. Buradan

kararlılık parametresi $r > 0$ olarak bulunur. Böylece Neumann sınır şartlı ısı iletim probleminin kapalı sonlu fark yaklaşımı ile bulunan yaklaşık çözümü r kararlılık parametresinin her seçimi için problemin analitik çözümüne yakınsar. Yani yöntem şartsız kararlıdır.

Robbin Sınır Şartlı Isı İletim Problemi

Robbin sınır şartlı ısı iletim probleminin (3.51) denklemi ile verilen kapalı sonlu fark yaklaşımı matris formunda

$$\underbrace{\begin{bmatrix} (1+2r\beta_0) & -2r & & & & \\ -r & (1+2r) & -r & & & \\ & & \ddots & & & \\ & & & -r & (1+2r) & -r \\ & & & & -2r & (1+2r\beta_L) \end{bmatrix}}_A \underbrace{\begin{bmatrix} T_0^{n+1} \\ T_1^{n+1} \\ \vdots \\ T_{M-1}^{n+1} \\ T_M^{n+1} \end{bmatrix}}_{\underline{T}^{(n+1)}} = \underbrace{\begin{bmatrix} T_0^n \\ T_1^n \\ \vdots \\ T_{M-1}^n \\ T_M^n \end{bmatrix}}_{\underline{T}^{(n)}} + \underbrace{\begin{bmatrix} 2r\gamma_0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 2r\gamma_L \end{bmatrix}}_{\underline{b}} \quad (3.112)$$

veya

$$A\underline{T}^{(n+1)} = \underline{T}^{(n)} + \underline{b} \quad (3.113)$$

olarak yazılabilir. Buradan,

$$\underline{T}^{(n+1)} = A^{-1}\underline{T}^{(n)} + A^{-1}\underline{b} \quad (3.114)$$

elde edilir. Teorem 2.4 den A matrisinin karakteristik değerleri

$i = 0$ için $a_{ss} = 1 + 2r\beta_0$ ve $P_s = -2r$ olduğundan,

$$|\lambda - (1 + 2r\beta_0)| = -2r \Rightarrow \begin{cases} \lambda_1 - 1 - 2r\beta_0 = 2r \Rightarrow \lambda_1 = 1 + 2r \left(2 + \frac{hm_0}{k_0} \right), \\ \lambda_2 - 1 - 2r\beta_0 = -2r \Rightarrow \lambda_2 = 1 + 2r \frac{hm_0}{k_0} \end{cases} \quad (3.115)$$

$i = 1, 2, \dots, M - 1$ için $a_{ss} = 1 + 2r$ ve $P_s = -2r$ olduğundan,

$$|\lambda - (1 + 2r)| = -2r \Rightarrow \begin{cases} \lambda_3 - 1 - 2r = 2r \Rightarrow \lambda_3 = 1 + 4r, \\ \lambda_4 - 1 - 2r = -2r \Rightarrow \lambda_4 = 1 \end{cases} \quad (3.116)$$

$i = M$ için $a_{ss} = 1 + 2r\beta_L$ ve $P_s = -2r$ olduğundan,

$$|\lambda - (1 + 2r\beta_L)| = -2r \Rightarrow \begin{cases} \lambda_5 - 1 - 2r\beta_L = 2r \Rightarrow \lambda_5 = 1 + 2r\left(2 + \frac{hm_L}{k_L}\right), \\ \lambda_6 - 1 - 2r\beta_L = -2r \Rightarrow \lambda_6 = 1 + 2r\frac{hm_L}{k_L} \end{cases} \quad (3.117)$$

olur. A matrisinin karakteristik değerleri λ_i ise A^{-1} matrisinin karakteristik değerleri

$\frac{1}{\lambda_i}$ değerleridir. O halde kararlılık için $\left|\frac{1}{\lambda_i}\right| \leq 1$, $i = 1, 2, \dots, 6$ olmalıdır. Buradan

kararlılık parametresi $r > 0$ olarak bulunur. Böylece Robbin sınır şartlı ısı iletim probleminin kapalı sonlu fark yaklaşımı ile yaklaşık çözümü r kararlılık parametresinin her seçimi için problemin analitik çözümüne yakınsar. Yani yöntem şartsız kararlıdır.

3.3.4. Crank-Nicolson Sonlu Fark Yaklaşımı için Matris Yöntemi ile Kararlılık Analizi

Dirichlet Sınır Şartlı Isı İletim Problemi

Dirichlet sınır şartlı ısı iletim probleminin (3.59) denklemi ile verilen Crank-Nicolson sonlu fark yaklaşımı matris formunda

$$\underbrace{\begin{bmatrix} (2+2r) & -r & & & \\ -r & (2+2r) & -r & & \\ & & \ddots & & \\ & & & -r & (2+2r) & -r \\ & & & & -r & (2+2r) \end{bmatrix}}_A \underbrace{\begin{bmatrix} T_1^{n+1} \\ T_2^{n+1} \\ \vdots \\ T_{M-2}^{n+1} \\ T_{M-1}^{n+1} \end{bmatrix}}_{\underline{T}^{(n+1)}} = \underbrace{\begin{bmatrix} (2-2r) & r & & & \\ r & (2-2r) & r & & \\ & & \ddots & & \\ & & & r & (2-2r) & r \\ & & & & r & (2-2r) \end{bmatrix}}_B \underbrace{\begin{bmatrix} T_1^n \\ T_2^n \\ \vdots \\ T_{M-2}^n \\ T_{M-1}^n \end{bmatrix}}_{\underline{T}^{(n)}} + \underbrace{\begin{bmatrix} 2rf_0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 2rf_L \end{bmatrix}}_{\underline{b}} \quad (3.118)$$

veya kısaca

$$A\underline{T}^{(n+1)} = B\underline{T}^{(n)} + \underline{b} \quad (3.119)$$

olarak yazılabilir. Buradan

$$\underline{T}^{(n+1)} = A^{-1}B\underline{T}^{(n)} + A^{-1}\underline{b} \quad (3.120)$$

elde edilir. Burada $B = 4I_{M-1} - A$ olduğu göz önüne alınırsa

$$\underline{T}^{(n+1)} = \left(4A^{-1} - I_{M-1}\right)\underline{T}^{(n)} + A^{-1}\underline{b} \quad (3.121)$$

olarak yazılabilir.

λ , A matrisinin bir karakteristik değeri olmak üzere $4A^{-1} - I_{M-1}$ matrisinin karakteristik değeri $\frac{4}{\lambda} - 1$ dir. Bu yöntemin kararlı olabilmesi için $\left| \frac{4}{\lambda} - 1 \right| \leq 1$ yani $\lambda \geq 2$ olmalıdır.

Diğer taraftan A matrisinin λ karakteristik değerleri $[2, 2+4r]$ aralığında olup her $r > 0$ için $\lambda \geq 2$ olduğundan yöntem şartsız kararlıdır.

Neumann Sınır Şartlı Isı İletim Problemi

Neumann sınır şartlı ısı iletim probleminin (3.64) denkleminde Crank-Nicolson sonlu fark yaklaşımı matris formunda

$$\underbrace{\begin{bmatrix} (2+2r) & -2r & & & & \\ -r & (2+2r) & -r & & & \\ & & \ddots & & & \\ & & & -r & (2+2r) & -r \\ & & & & -2r & (2+2r) \end{bmatrix}}_A \underbrace{\begin{bmatrix} T_0^{n+1} \\ T_1^{n+1} \\ \vdots \\ T_{M-1}^{n+1} \\ T_M^{n+1} \end{bmatrix}}_{\underline{T}^{(n+1)}} = \underbrace{\begin{bmatrix} (2-2r) & 2r & & & & \\ r & (2-2r) & r & & & \\ & & \ddots & & & \\ & & & r & (2-2r) & r \\ & & & & 2r & (2-2r) \end{bmatrix}}_B \underbrace{\begin{bmatrix} T_0^n \\ T_1^n \\ \vdots \\ T_{M-1}^n \\ T_M^n \end{bmatrix}}_{\underline{T}^{(n)}} + \underbrace{\begin{bmatrix} 4r\gamma_0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 4r\gamma_L \end{bmatrix}}_{\underline{b}} \quad (3.122)$$

veya

$$A\underline{T}^{(n+1)} = B\underline{T}^{(n)} + \underline{b} \quad (3.123)$$

olarak yazılabilir.

Buradan

$$\underline{T}^{(n+1)} = A^{-1}B\underline{T}^{(n)} + A^{-1}\underline{b} \quad (3.124)$$

elde edilir. Burada $B = 4I_{M-1} - A$ olduğundan

$$\underline{T}^{(n+1)} = \left(4A^{-1} - I_{M-1}\right)\underline{T}^{(n)} + A^{-1}\underline{b} \quad (3.125)$$

olur. λ , A matrisinin bir karakteristik değeri olmak üzere $4A^{-1} - I_{M-1}$ matrisinin karakteristik değeri $\frac{4}{\lambda} - 1$ dir. Bu yöntemin kararlı olabilmesi için $\left|\frac{4}{\lambda} - 1\right| \leq 1$ yani $\lambda \geq 2$ olmalıdır.

Diğer taraftan A matrisinin λ karakteristik değerleri $[2, 2+4r]$ aralığında olup her $r > 0$ için $\lambda \geq 2$ olduğundan yöntem şartsız kararlıdır.

Robbin Sınır Şartlı Isı İletim Problemi

Robbin sınır şartlı ısı iletim probleminin (3.70) denklemleri ile verilen Crank-Nicolson sonlu fark yaklaşımı matris formunda

$$\underbrace{\begin{bmatrix} (2+2r\beta_0) & -2r & & & & \\ -r & (2+2r) & -r & & & \\ & & \ddots & & & \\ & & & -r & (2+2r) & -r \\ & & & & -2r & (2+2r\beta_L) \end{bmatrix}}_A \underbrace{\begin{bmatrix} T_0^{n+1} \\ T_1^{n+1} \\ \vdots \\ T_{M-1}^{n+1} \\ T_M^{n+1} \end{bmatrix}}_{\underline{T}^{(n+1)}} = \underbrace{\begin{bmatrix} (2-2r\beta_0) & 2r & & & & \\ r & (2-2r) & r & & & \\ & & \ddots & & & \\ & & & r & (2-2r) & r \\ & & & & 2r & (2-2r\beta_L) \end{bmatrix}}_B \underbrace{\begin{bmatrix} T_0^n \\ T_1^n \\ \vdots \\ T_{M-1}^n \\ T_M^n \end{bmatrix}}_{\underline{T}^{(n)}} + \underbrace{\begin{bmatrix} 4r\gamma_0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 4r\gamma_L \end{bmatrix}}_{\underline{b}} \quad (3.126)$$

veya

$$A\underline{T}^{(n+1)} = B\underline{T}^{(n)} + \underline{b} \quad (3.127)$$

olarak yazılabilir. Burada $B = 4I_{M-1} - A$ dır. Buradan

$$\underline{T}^{(n+1)} = \left(4A^{-1} - I_{M-1}\right)\underline{T}^{(n)} + A^{-1}\underline{b} \quad (3.128)$$

elde edilir. λ , A matrisinin bir karakteristik değeri olmak üzere $4A^{-1} - I_{M-1}$ matrisinin karakteristik değeri $\frac{4}{\lambda} - 1$ dir. Bu yöntemin kararlı olabilmesi için

$$\left| \frac{4}{\lambda} - 1 \right| \leq 1 \text{ yani } \lambda \geq 2 \text{ olmalıdır.}$$

Diğer taraftan A matrisinin λ karakteristik değerlerinin hepsi $[2 + 2r(\beta_0 - 1), 2 + 2r(\beta_0 + 1)]$ yani $\left[2 + 2r \frac{hm_0}{k_0}, 2 + 4r \frac{hm_0}{k_0} \right]$ aralığında olup her $r > 0$ için $\lambda \geq 2$ olduğundan yöntem şartsız kararlıdır.

4. ISI DENKLEMİ İÇİN ÜSTEL SONLU FARK YÖNTEMİ VE MODEL PROBLEMLER

4.1. ISI DENKLEMİ İÇİN ÜSTEL SONLU FARK YÖNTEMİ

Isı denklemini

$$\frac{\partial \tau}{\partial t}(x, t) = \alpha^2 \frac{\partial^2 \tau}{\partial x^2}(x, t) \quad (4.1)$$

$$\tau(x, 0) = \phi(x), \quad 0 \leq x \leq L$$

başlangıç şartına bağlı olarak göz önüne alalım. Bu denklemin analitik çözümü

$$\tau(x, t) = \phi(x)\theta(t) \quad (4.2)$$

formunda olsun. Burada başlangıç şartı $\tau(x, 0) = \phi(x)$ olduğundan

$$\theta(0) = 1 \quad (4.3)$$

olur. (4.2) denkleminin t ye göre birinci türevi alınırsa

$$\frac{\partial \tau}{\partial t} = \phi(x) \frac{d\theta}{dt} \quad (4.4)$$

olur. (4.2) denkleminin x e göre ikinci türevi alınırsa

$$\frac{\partial^2 \tau}{\partial x^2} = \theta(t) \frac{d^2 \phi}{dx^2} \quad (4.5)$$

elde edilir.

(4.4) ve (4.5) ifadeleri (4.1) denkleminde yerlerine yazılırsa

$$\phi \frac{d\theta}{dt} = \alpha^2 \theta \frac{d^2\phi}{dx^2} \quad (4.6)$$

olur. (4.6) denkleminin her iki tarafı $\phi\theta$ ile bölünürse

$$\frac{1}{\theta} \frac{d\theta}{dt} = \alpha^2 \frac{1}{\phi} \frac{d^2\phi}{dx^2} = -R \quad (4.7)$$

denklemini elde edilir. (4.7) denklemini değişkenlerine ayrılabilir olduğundan eşitliğin olması denklemin her iki yanının sabit bir R sayısına eşit olması ile mümkündür. (Soğuma olması durumunda R pozitif alınır.) Böylece

$$\frac{1}{\theta} \frac{d\theta}{dt} = -R \quad (4.8)$$

ve

$$\frac{\alpha^2}{\phi} \frac{d^2\phi}{dx^2} = -R \quad (4.9)$$

denklemleri elde edilir. (4.8) eşitliğinin sol tarafı $\frac{\phi}{\theta}$ ile çarpılırsa

$$\frac{\phi}{\theta\phi} \frac{d\theta}{dt} = -R \quad (4.10)$$

olur. Bu ifade (4.2) ve (4.4) denklemleri kullanılarak yeniden düzenlenirse

$$\frac{1}{\tau(x,t)} \frac{\partial\tau}{\partial t} = -R \quad (4.11)$$

şeklinde yazılabilir.

Zaman adımı $t = k$ için yazılabilen bu denklemin $\tau(x, t)$ nin sıfırdan farklı değerleri için bir çözümü vardır. (4.11) ifadesinin her iki tarafının k ya göre integrali alınırsa

$$\tau(x, k) = c_2 \exp(-Rk) \quad (4.12)$$

elde edilir. (4.12) denklemindeki c_2 sabitini bulmak için başlangıç şartı kullanılırsa

$$\tau(x, k) = \tau(x, 0) \exp(-Rk) \quad (4.13)$$

elde edilir. Buradaki R sabitinin değerini bulmak için (4.9) denkleminin sol tarafı $\frac{\theta\phi}{\theta\phi}$

ile çarpılırsa

$$\alpha^2 \left\{ \frac{\theta}{\theta\phi} \frac{d^2\phi}{dx^2} \right\} = -R \quad (4.14)$$

veya

$$\alpha^2 \frac{1}{\theta\phi} \left\{ \theta \frac{d^2\phi}{dx^2} \right\} = -R \quad (4.15)$$

olur. (4.2) ve (4.5) denklemlerinden

$$\frac{\alpha^2}{\tau(x, t)} \frac{\partial^2 \tau}{\partial x^2} = -R \quad (4.16)$$

elde edilir. (4.16) denkleminde $\frac{\partial^2 \tau}{\partial x^2}$ ifadesi yerine bu ifadenin merkezi fark yaklaşımı, $\tau(x, t)$ yerinede T_i^j yazılırsa

$$\frac{\alpha^2}{T_i^j} \left(\frac{T_{i+1}^j - 2T_i^j + T_{i-1}^j}{h^2} \right) = -R \quad (4.17)$$

olur.

Bu R değeri (4.13) denkleminde yerine yazılırsa

$$T_i^{j+1} = T_i^j \exp \left\{ \frac{\alpha^2 k}{T_i^j} \left(\frac{T_{i+1}^j - 2T_i^j + T_{i-1}^j}{h^2} \right) \right\} \quad (4.18)$$

veya

$$T_i^{j+1} = T_i^j \exp \left\{ \frac{\alpha^2 k}{h^2} \left(\frac{T_{i+1}^j - 2T_i^j + T_{i-1}^j}{T_i^j} \right) \right\} \quad (4.19)$$

olur. Bu son ifadede

$$M_i^j = \frac{T_{i+1}^j - 2T_i^j + T_{i-1}^j}{T_i^j} \quad (4.20)$$

ve

$$r = \frac{\alpha^2 k}{h^2} \quad (4.21)$$

olarak alınır

$$T_i^{j+1} = T_i^j \exp \left\{ r M_i^j \right\} \quad (4.22)$$

elde edilir. Bu son ifadeye üstel sonlu fark (Bhattacharya) denklemi denir[2].

Dirichlet Sınır Şartlı Isı İletim Problemi

Kabul edelim ki $i = 0$ ve $i = M$ için $x = 0$ ve $x = L$ de sınır şartları

$$\begin{aligned} T_0^n &= \tau(0, t) = f_0(t) \\ T_M^n &= \tau(L, t) = f_L(t) \end{aligned} \quad (4.23)$$

şeklinde tanımlansın. Böylece (4.22) denkleminde T_0^n ve T_M^n sınır değerleri her zaman bilineceği için $M - 1$ tane düğüm noktasında T_i^{n+1} , $i = 1, 2, \dots, M - 1$ bilinmeyen değerleri için $M - 1$ tane açık denklem elde edilir. Sonuç olarak Dirichlet sınır şartlı ısı iletim problemi için üstel sonlu fark denklemleri,

$$\begin{aligned} i = 1 \text{ için; } T_1^{n+1} &= T_1^n \exp\left\{r \left[T_2^n - 2T_1^n + f_0(t) \right] / T_1^n \right\} \\ i = 2, 3, \dots, M - 2 \text{ için; } T_i^{n+1} &= T_i^n \exp\left\{r \left[T_{i+1}^n - 2T_i^n + T_{i-1}^n \right] / T_i^n \right\} \\ i = M - 1 \text{ için; } T_{M-1}^{n+1} &= T_{M-1}^n \exp\left\{r \left[-2T_{M-1}^n + T_{M-2}^n + f_L(t) \right] / T_{M-1}^n \right\} \end{aligned} \quad (4.24)$$

olarak elde edilir.

Neumann Sınır Şartlı Isı İletim Problemi

$x = 0$ ve $x = L$ de sınır şartları sırasıyla

$$-k_0 \frac{\partial T}{\partial x}(0, t) = q_0(t) \quad (4.25)$$

$$k_L \frac{\partial T}{\partial x}(L, t) = q_L(t)$$

olur. Burada q_0 ve q_L sırasıyla $x = 0$ ve $x = L$ sınırında uygulanmış ısı akışıdır. (4.25) sınır şartları için merkezi fark formülünün kullanılması ile

$$i = 0 \text{ için; } -k_0 \frac{T_1^n - T_{-1}^n}{2h} = q_0 \quad (4.26)$$

$$i = M \text{ için; } k_L \frac{T_{M+1}^n - T_{M-1}^n}{2h} = q_L$$

eşitlikleri elde edilir. Burada “-1” ve “ $M + 1$ ” hayali noktalarındaki sıcaklıklar sırasıyla T_{-1}^n ve T_{M+1}^n dir. Bu sıcaklıkları yok etmek için $i = 0$ ve $i = M$ noktalarında (4.22) denklemini göz önüne alınırsa sırasıyla

$$T_0^{n+1} = T_0^n \exp \left\{ r \left(T_1^n - 2T_0^n + T_{-1}^n \right) / T_0^n \right\} \quad (4.27)$$

$$T_M^{n+1} = T_M^n \exp \left\{ r \left(T_{M+1}^n - 2T_M^n + T_{M-1}^n \right) / T_M^n \right\}$$

elde edilir.

(4.26) denklemleri ile tanımlanmış sınır şartlarının (4.27) denklemleri ile birlikte göz önüne alınmasıyla

$$i = 0 \text{ için; } T_0^{n+1} = T_0^n \exp\left\{2r\left(T_1^n - T_0^n + \frac{hq_0}{k_0}\right)\right\} / T_0^n \quad (4.28)$$

$$i = M \text{ için; } T_M^{n+1} = T_M^n \exp\left\{2r\left(T_{M-1}^n - T_M^n + \frac{hq_L}{k_L}\right)\right\} / T_M^n$$

elde edilir. Sonuç olarak Neumann sınır şartlı ısı iletim problemi için üstel sonlu fark denklemleri,

$$i = 0 \text{ için; } T_0^{n+1} = T_0^n \exp\left\{2r\left(T_1^n - T_0^n + \gamma_0\right)\right\} / T_0^n$$

$$i = 1, 2, \dots, M-1 \text{ için; } T_i^{n+1} = T_i^n \exp\left\{r\left(T_{i+1}^n - 2T_i^n + T_{i-1}^n\right)\right\} / T_i^n \quad (4.29)$$

$$i = M \text{ için; } T_M^{n+1} = T_M^n \exp\left\{2r\left(T_{M-1}^n - T_M^n + \gamma_L\right)\right\} / T_M^n$$

şeklinde olur. Burada

$$\gamma_0 = \frac{hq_0}{k_0}, \quad \gamma_L = \frac{hq_L}{k_L} \quad (4.30)$$

ve

$$r = \frac{\alpha^2 k}{h^2}$$

dir.

Robbin Sınır Şartlı Isı İletim Problemi

$x = 0$ ve $x = L$ de sınır şartları sırasıyla

$$-k_0 \frac{\partial \tau}{\partial x}(0, t) + m_0 \tau(0, t) = h_0(t) \quad (4.31)$$

$$k_L \frac{\partial \tau}{\partial x}(L, t) + m_L \tau(L, t) = h_L(t)$$

olmak üzere burada $i = 0$ ve $i = M$ sınır noktalarında sıcaklıklar bilinmiyor. (4.31) sınır şartındaki birinci mertebeden türevler için merkezi fark yaklaşımının kullanılması ile

$$i = 0 \text{ için; } -k_0 \frac{T_1^n - T_{-1}^n}{2h} + m_0 T_0^n = h_0 \quad (4.32)$$

$$i = M \text{ için; } k_L \frac{T_{M+1}^n - T_{M-1}^n}{2h} + m_L T_M^n = h_L$$

elde edilir. Burada “-1” ve “ $M + 1$ ” hayali noktalarındaki sıcaklıklar T_{-1}^n ve T_{M+1}^n dir. Bu sıcaklıkları yok etmek için $i = 0$ ve $i = M$ için (4.22) denklemi göz önüne alınırsa sırasıyla

$$T_0^{n+1} = T_0^n \exp \left\{ r \left(T_1^n - 2T_0^n + T_{-1}^n \right) / T_0^n \right\} \quad (4.33)$$

$$T_M^{n+1} = T_M^n \exp \left\{ r \left(T_{M+1}^n - 2T_M^n + T_{M-1}^n \right) / T_M^n \right\}$$

elde edilir.

Şimdi (4.32) ve (4.33) denklemleri arasında T_{-1}^n ifadesi ile T_{M+1}^n ifadesi yok edilirse

$$i = 0 \text{ için; } T_0^{n+1} = T_0^n \exp \left\{ 2r \left(T_1^n - \left(1 + \frac{hm_0}{k_0} \right) T_0^n + \frac{hh_0}{k_0} \right) / T_0^n \right\} \quad (4.34)$$

$$i = M \text{ için; } T_M^{n+1} = T_M^n \exp \left\{ 2r \left(T_{M-1}^n - \left(1 + \frac{hm_L}{k_L} \right) T_M^n + \frac{hh_L}{k_L} \right) / T_M^n \right\}$$

olur. Sonuç olarak Robbin sınır şartlı ısı iletim denklemi için üstel sonlu fark denklemleri;

$$i = 0 \text{ için; } T_0^{n+1} = T_0^n \exp \left\{ 2r \left(T_1^n - \beta_0 T_0^n + \gamma_0 \right) / T_0^n \right\}$$

$$i = 1, 2, \dots, M-1 \text{ için; } T_i^{n+1} = T_i^n \exp \left\{ r \left(T_{i+1}^n - 2T_i^n + T_{i-1}^n \right) / T_i^n \right\} \quad (4.35)$$

$$i = M \text{ için; } T_M^{n+1} = T_M^n \exp \left\{ 2r \left(T_{M-1}^n - \beta_L T_M^n + \gamma_L \right) / T_M^n \right\}$$

olarak elde edilir. Burada

$$\beta_0 = 1 + \frac{hm_0}{k_0}, \quad \gamma_0 = \frac{hh_0}{k_0} \quad (4.36)$$

$$\beta_L = 1 + \frac{hm_L}{k_L}, \quad \gamma_L = \frac{hh_L}{k_L}$$

$$r = \frac{\alpha^2 k}{h^2}$$

dir.

4.2. ÜSTEL SONLU FARK YÖNTEMİ İÇİN KARARLILIK ANALİZİ

Genel olarak kısmi diferansiyel denklemlerin çözümleri için kullanılan açık sonlu fark yöntemleri belli şartlar altında kararlıdır. Bir sonlu fark yönteminin kararlılığını incelemek için temel olarak bir önceki adımdaki sonuç ile mevcut adımdaki sonucun oranına bakılır. Eğer bu oranın mutlak değeri 1 den küçük ise yöntem için kararlıdır denir[14]. Buna göre,

$$\xi = \frac{T_i^{j+1}}{T_i^j} = \frac{T_i^j \exp \left\{ r \frac{(T_{i+1}^j - 2T_i^j + T_{i-1}^j)}{T_i^j} \right\}}{T_i^j} \quad (4.37)$$

yani,

$$\xi = \frac{T_i^{j+1}}{T_i^j} = \exp \left\{ r M_i^j \right\} \quad (4.38)$$

olur. Böylece kararlılık için

$$\lim_{k \rightarrow 0} |\xi| \leq 1 \quad (4.39)$$

olmalıdır. Bunun için (4.38) denklemindeki üstel rM_i^j ifadesinin sıfıra eşit olması yada sıfırdan küçük olması gerekmektedir. Üstel ifadedeki r pozitif olduğundan kararlılığı M_i^j belirleyecektir.

Buna göre

$$M_i^j \leq 0 \quad (4.40)$$

yani

$$\frac{T_{i+1}^j - 2T_i^j + T_{i-1}^j}{T_i^j} \leq 0 \quad (4.41)$$

olmalıdır. Buradan

$$T_{i+1}^j - 2T_i^j + T_{i-1}^j \leq 0 \quad (4.42)$$

ise

$$T_{i+1}^j + T_{i-1}^j \leq 2T_i^j \quad (4.43)$$

olur. Buradan

$$T_i^j \geq \frac{1}{2}(T_{i-1}^j + T_{i+1}^j) \quad (4.44)$$

elde edilir. (4.40) ve (4.44) ile verilen kararlılık şartları r nin büyüklüğü ile doğrudan ilgili değildir. Fakat r nin değerindeki artış $2T_i^j$ değerinin $T_{i-1}^j + T_{i+1}^j$ değerinden daha küçük olmasına neden olur. Bu durumda (4.22) denklemi ile çözüm yapmak mümkün olmaz. Yapılan hesaplamalar sonucu (4.22) denklemi ile yapılan işlemler genellikle $r \leq 0.52$ değeri için kararlı olmaktadır[14].

4.3. MODEL PROBLEMLER

Herhangi bir nümerik yöntemin ne kadar iyi sonuç verdiğine bakmak için nümerik yöntem ile bulunan sonuçlar analitik çözüm veya diğer nümerik yöntemlerle bulunan sonuçlarla karşılaştırılır. Bu düşünce ile bu kısımda üstel sonlu fark yönteminin iyi sonuçlar verip vermediğini incelemek için farklı sınır şartlarına sahip problemlerin klasik sonlu fark yöntemleri ile çözümleri ve analitik çözümleri bulunmuş, bulunan bu sonuçlar üstel sonlu fark yöntemi ile bulunan sonuçlarla karşılaştırılmıştır. Farklı sınır şartları için en iyi sonucun elde edileceği yöntem değişebileceğinden bu kısımda sırayla Dirichlet, Neumann ve Robbin sınır şartlı üç ısı iletim probleminin çözümleri göz önüne alınmıştır.

Burada nümerik çözümlerin analitik çözümlere ne kadar yakın sonuçlar verdiğini görmek için $\|e_1\|$, L_2 ve L_∞ hata normları kullanılmıştır. $\tau(x, t)$ nin (x_m, t_n) noktasındaki nümerik ve analitik çözümleri sırasıyla $\tau(x_m, t_n)$ ve T_m^n olmak üzere $\|e_1\|$, L_2 ve L_∞ hata normları

$$\|e_1\| = \frac{1}{M} \sum_{m=1}^{M-1} \left| 1 - \frac{T_m^n}{\tau(x_m, t_n)} \right|,$$

$$L_2 = \left[h \sum_{m=1}^M \left| \tau(x_m, t_n) - T_m^n \right|^2 \right]^{\frac{1}{2}},$$

$$L_\infty = \max_m \left| \tau(x_m, t_n) - T_m^n \right|$$

dir.

PROBLEM 1:

$$\frac{\partial \tau}{\partial t}(x,t) = \frac{\partial^2 \tau}{\partial x^2}(x,t), \quad 0 < x < 1, \quad t > 0$$

şeklindeki ısı denkleminin sınır şartları ;

$$\begin{cases} \tau(0,t) = 0 \\ \tau(1,t) = 0 \end{cases}, \quad t > 0$$

ve başlangıç şartı ;

$$\tau(x,0) = f(x) = \begin{cases} 2x, & 0 \leq x \leq 1/2 \text{ ise,} \\ 2(1-x), & 1/2 \leq x \leq 1 \text{ ise} \end{cases}$$

olmak üzere problemin analitik çözümü

$$\tau(x,t) = \frac{8}{\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \left(\sin \frac{1}{2} n\pi \right) (\sin n\pi x) e^{-n^2 \pi^2 t}$$

dir.

Tablo 4.1.1. $k = 0.00001$ ve $t = 0.1$ alınarak h nin farklı değerleri için üstel sonlu fark yöntemi ile elde edilen sonuçların karşılaştırılması

x	$h = 0.1$	$h = 0.05$	$h = 0.025$	$h = 0.0125$	Analitik Çözüm
0.0	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000
0.1	0.094872	0.093726	0.093441	0.093370	0.093356
0.2	0.180472	0.178287	0.177743	0.177607	0.177573
0.3	0.248424	0.245405	0.244656	0.244468	0.244409
0.4	0.292064	0.288506	0.287622	0.287402	0.287319
0.5	0.307104	0.303358	0.302429	0.302197	0.302106
0.6	0.292064	0.288506	0.287622	0.287402	0.287319
0.7	0.248424	0.245405	0.244656	0.244468	0.244409
0.8	0.180472	0.178287	0.177743	0.177607	0.177573
0.9	0.094872	0.093726	0.093441	0.093370	0.093356
1.0	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000
Hata Normu					
$\ e\ _1$	0.014756	0.003653	0.000894	0.000204	
L_2	0.003516	0.000875	0.000220	0.000056	
L_∞	0.004998	0.001252	0.000323	0.000091	

Tablo 4.1.2. $h = 0.01$ ve $t = 0.1$ alınarak farklı k değerleri için üstel sonlu fark yöntemi ile elde edilen sonuçların karşılaştırılması

x	$k = 0.000001$	$k = 0.00001$	$k = 0.00004$	$k = 0.00005$	Analitik Çözüm
0.0	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000
0.1	0.093361	0.093361	0.093363	0.093372	0.093356
0.2	0.177590	0.177591	0.177594	0.177611	0.177573
0.3	0.244445	0.244446	0.244450	0.244473	0.244409
0.4	0.287374	0.287375	0.287380	0.287406	0.287319
0.5	0.302168	0.302169	0.302174	0.302202	0.302106
0.6	0.287374	0.287375	0.287380	0.287406	0.287319
0.7	0.244445	0.244446	0.244450	0.244473	0.244409
0.8	0.177590	0.177591	0.177594	0.177611	0.177573
0.9	0.093361	0.093361	0.093363	0.093372	0.093356
1.0	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000
Hata Normu					
$\ e\ _1$	0.000118	0.000121	0.000137	0.000222	
L_2	0.000036	0.000037	0.000041	0.000060	
L_∞	0.000062	0.000063	0.000068	0.000096	

Tablo 4.1.3. $k = 0.00001$ ve $h = 0.01$ için $t = 0.1$ de problemin nümerik ve analitik çözümlerinin karşılaştırılması

x	Açık Yöntem	Kapalı Yöntem	Crank-Nicolson Yöntemi	Üstel Sonlu Fark Yöntemi	Analitik Çözüm
0.0	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000
0.1	0.093356	0.093365	0.093361	0.093361	0.093356
0.2	0.177582	0.177599	0.177590	0.177591	0.177573
0.3	0.244433	0.244456	0.244445	0.244446	0.244409
0.4	0.287360	0.287388	0.287374	0.287375	0.287319
0.5	0.302153	0.302182	0.302168	0.302169	0.302106
0.6	0.287360	0.287388	0.287374	0.287375	0.287319
0.7	0.244433	0.244457	0.244445	0.244446	0.244409
0.8	0.177582	0.177599	0.177590	0.177591	0.177573
0.9	0.093356	0.093365	0.093361	0.093361	0.093356
1.0	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000
Hata Normu					
$\ e\ _1$	0.000074	0.000156	0.000118	0.000121	
L_2	0.000026	0.000046	0.000036	0.000037	
L_∞	0.000047	0.000075	0.000062	0.000063	

Tablo 4.1.4. $k = 0.0001$ ve $h = 0.05$ için $x = 0.2$ de problemin nümerik ve analitik çözümlerinin karşılaştırılması

t	Açık Yöntem	Kapalı Yöntem	Crank-Nicolson Yöntemi	Üstel Sonlu Fark Yöntemi	Analitik Çözüm
0.01	0.396466	0.396269	0.396370	0.396474	0.431664
0.05	0.290596	0.290694	0.290658	0.290677	0.290866
0.10	0.178200	0.178371	0.178301	0.178295	0.177573
0.20	0.066524	0.066653	0.066589	0.066592	0.066183
0.40	0.009269	0.009306	0.009287	0.009288	0.009194
0.50	0.003460	0.003477	0.003469	0.003469	0.003427
1.00	0.000025	0.000025	0.000025	0.000025	0.000025

Bu kısımda ele alınan Dirichlet sınır şartlı ısı iletim problemi için üstel sonlu fark yönteminin etkisini gözlemek amacıyla çeşitli hesaplamalar yapılmıştır. Tablo 4.1.1. de $k = 0.00001$ ve $t = 0.1$ alınarak h nın farklı değerleri için üstel sonlu fark yöntemiyle bulunan sonuçlar ile analitik çözümle bulunan sonuçlar karşılaştırılmıştır. Bu karşılaştırma sonucunda en iyi sonucun h nın en küçük değeri olan 0.0125 için elde edildiği gözlenmiştir. Tablo 4.1.2. de ise $h = 0.01$ ve $t = 0.1$ alınarak k nın farklı değerleri için üstel sonlu fark yöntemi ile bulunan sonuçlarla analitik çözümle bulunan sonuçlar karşılaştırılmıştır. Bu karşılaştırma sonucunda ise en iyi sonucun k nın en küçük değeri olan 0.000001 için elde edildiği gözlenmiştir. Böylece Tablo 4.1.1. ve Tablo 4.1.2. den Problem 1 için x ve t yönündeki bölüntü sayısı artarken hatanın azaldığı gözlenmiştir. Tablo 4.1.3. de k , h ve t değerleri sabit tutularak değişen x değerleri için hem analitik çözüm bulunmuş hem de sonlu fark yöntemleri ile çözüm yapılmıştır. Burada amaç x değeri değişirken sonlu fark yöntemleri ile bulunan sonuçların nasıl değiştiğini gözlemektir. Böylece Tablo 4.1.3. de $k = 0.00001$, $h = 0.01$ ve $t = 0.1$ için analitik çözüm ile bulunan sonuçlar ile sonlu fark yöntemleri ile bulunan sonuçlar karşılaştırılmış en iyi sonucun bu problem için açık sonlu fark yöntemi ile elde edildiği gözlenmiştir. Tablo 4.1.4. de k , h ve x değerleri sabit tutularak değişen t değerleri için hem analitik çözüm hem de sonlu fark yöntemleri ile çözüm yapılmıştır. Burada ise zaman artarken sonlu fark yöntemleri ile bulunan sonuçların analitik çözüme yakınsayıp yakınsamadığı gözlenmek istenmiştir. Böylece Tablo 4.1.4. de $k = 0.0001$, $h = 0.05$ ve $x = 0.2$ için t nin farklı değerlerine karşılık analitik çözüm ile bulunan sonuçlarla sonlu fark yöntemleri ile bulunan sonuçlar karşılaştırılmıştır. Bu tabloda ise t değeri artarken kullanılan sonlu fark yöntemlerinde oluşan hatanın azaldığı gözlenmiştir.

PROBLEM 2:

$$\frac{\partial \tau}{\partial t}(x,t) = \frac{\partial^2 \tau}{\partial x^2}(x,t), \quad 0 < x < 1, \quad t > 0$$

şeklindeki ısı denkleminin sınır şartları;

$$\begin{cases} \frac{\partial \tau}{\partial x}(0,t) = 0 \\ \frac{\partial \tau}{\partial x}(1,t) = 2 \end{cases}, \quad t > 0$$

ve başlangıç şartı;

$$\tau(x,0) = f(x) = x^2 + 1 + \cos(\pi x), \quad 0 \leq x \leq 1$$

olmak üzere problemin analitik çözümü

$$\tau(x,t) = 2t + x^2 + 1 + e^{-\pi^2 t} \cos(\pi x)$$

dır.

Tablo 4.2.1. $k = 0.00001$ ve $t = 0.3$ alınarak h nın farklı değerleri için üstel sonlu fark yöntemi ile elde edilen sonuçların karşılaştırılması

x	$h = 0.1$	$h = 0.05$	$h = 0.025$	$h = 0.0125$	Analitik Çözüm
0.0	1.653178	1.652282	1.652107	1.651993	1.651773
0.1	1.660582	1.659729	1.659561	1.659449	1.659239
0.2	1.683049	1.682320	1.682170	1.682072	1.681885
0.3	1.721319	1.720765	1.720650	1.720573	1.720432
0.4	1.776528	1.776200	1.776125	1.776085	1.775999
0.5	1.850122	1.850036	1.850014	1.850017	1.850000
0.6	1.943685	1.943842	1.943896	1.943944	1.944001
0.7	2.058867	2.059237	2.059352	2.059443	2.059568
0.8	2.197120	2.197637	2.197802	2.197934	2.198115
0.9	2.359572	2.360201	2.360402	2.360541	2.360761
1.0	2.546971	2.547641	2.547844	2.547988	2.548227
Hata Normu					
$\ e\ _1$	0.000384	0.000158	0.000102	0.000064	
L_2	0.000939	0.000400	0.000261	0.000162	
L_∞	0.001405	0.000586	0.000383	0.000239	

Tablo 4.2.2. $h = 0.01$ ve $t = 0.2$ alınarak farklı k değerleri için üstel sonlu fark yöntemi ile elde edilen sonuçların karşılaştırılması

x	$k = 0.000001$	$k = 0.00001$	$k = 0.00004$	$k = 0.00005$	Analitik Çözüm
0.0	1.540493	1.539205	1.538910	1.538998	1.538911
0.1	1.543575	1.542399	1.542114	1.542202	1.542112
0.2	1.553625	1.552649	1.552389	1.552477	1.552382
0.3	1.572619	1.571885	1.571666	1.571757	1.571650
0.4	1.603554	1.603115	1.602953	1.603047	1.602926
0.5	1.650209	1.650132	1.650039	1.650137	1.650000
0.6	1.716846	1.717148	1.717125	1.717228	1.717074
0.7	1.807741	1.808375	1.808412	1.808520	1.808350
0.8	1.926649	1.927605	1.927689	1.927803	1.927619
0.9	2.076522	2.077851	2.077963	2.078083	2.077888
1.0	2.259296	2.261042	2.261166	2.261288	2.261089
Hata Normu					
$\ e\ _1$	0.000451	0.000079	0.000019	0.000072	
L_2	0.001073	0.000165	0.000050	0.000150	
L_∞	0.001793	0.000294	0.000077	0.000199	

Tablo 4.2.3. $k = 0.00001$ ve $h = 0.01$ için $t = 0.2$ de problemin nümerik ve analitik çözümlerinin karşılaştırılması

x	Açık Yöntem	Kapalı Yöntem	Crank-Nicolson Yöntemi	Üstel Sonlu Fark Yöntemi	Analitik Çözüm
0.0	1.539112	1.536397	1.538934	1.539205	1.538911
0.1	1.542307	1.539573	1.542134	1.542399	1.542112
0.2	1.552562	1.549809	1.552400	1.552649	1.552382
0.3	1.571807	1.569042	1.571663	1.571885	1.571650
0.4	1.603045	1.600280	1.602933	1.603115	1.602926
0.5	1.650072	1.647311	1.650000	1.650132	1.650000
0.6	1.717097	1.714335	1.717067	1.717148	1.717074
0.7	1.808331	1.805561	1.808337	1.808375	1.808350
0.8	1.927567	1.924781	1.927600	1.927605	1.927619
0.9	2.077816	2.075011	2.077866	2.077851	2.077888
1.0	2.261008	2.258203	2.261066	2.261042	2.261089
Hata Normu					
$\ e\ _1$	0.000054	0.001424	0.000007	0.000079	
L_2	0.000114	0.002721	0.000016	0.000165	
L_∞	0.000201	0.002886	0.000023	0.000294	

Tablo 4.2.4. $k = 0.0001$ ve $h = 0.05$ için $x = 0.2$ de problemin nümerik ve analitik çözümlerinin karşılaştırılması

t	Açık Yöntem	Kapalı Yöntem	Crank-Nicolson Yöntemi	Üstel Sonlu Fark Yöntemi	Analitik Çözüm
0.01	1.793097	1.793166	1.793147	1.793105	1.792984
0.05	1.634284	1.634512	1.634469	1.634314	1.633903
0.10	1.541993	1.542263	1.542262	1.542044	1.541527
0.20	1.552731	1.552906	1.552838	1.552817	1.552382
0.40	1.855713	1.855684	1.855738	1.855846	1.855611
0.50	2.045879	2.045784	2.045878	2.046026	2.045818
1.00	3.040107	3.039736	3.040043	3.040315	3.040042

Bu kısımda ele alınan Neumann sınır şartlı ısı iletim problemi için çeşitli hesaplamalar yapılmıştır. Tablo 4.2.1. de $k = 0.00001$ ve $t = 0.3$ alınarak h nın farklı değerleri için üstel sonlu fark yöntemiyle bulunan sonuçlar ile analitik çözümle bulunan sonuçlar karşılaştırılmıştır. Bu karşılaştırma sonucunda en iyi sonucun h nın en küçük değeri olan 0.0125 için elde edildiği gözlenmiştir. Tablo 4.2.2. de ise $h = 0.01$ ve $t = 0.2$ alınarak k nın farklı değerleri için üstel sonlu fark yöntemiyle bulunan sonuçlarla analitik çözümle bulunan sonuçlar karşılaştırılmıştır. Bu karşılaştırma sonucunda ise en iyi sonucun $k = 0.00004$ değeri için elde edildiği gözlenmiştir. Tablo 4.2.3. de k , h ve t değerleri sabit tutularak değişen x değerleri için hem analitik çözüm bulunmuş hem de sonlu fark yöntemleri ile çözüm yapılmıştır. Burada amaç x değeri değişirken sonlu fark yöntemleri ile bulunan sonuçların nasıl değiştiğini gözlemektir Tablo 4.2.3. de ki karşılaştırma sonucunda $k = 0.00001$, $h = 0.01$ ve $t = 0.2$ değerleri alınarak bu problem için en iyi sonucun kapalı bir yöntem olan Crank-Nicolson yöntemi ile elde edildiği gözlenmiştir. Tablo 4.2.4. de k , h ve x değerleri sabit tutularak değişen t değerleri için hem analitik çözüm hem de sonlu fark yöntemleri ile çözüm yapılmıştır. Burada ise zaman artarken sonlu fark yöntemleri ile bulunan sonuçların analitik çözüme yakınsayıp yakınsamadığı gözlenmek istenmiştir. Böylece Tablo 4.2.4. de $k = 0.0001$, $h = 0.05$ ve $x = 0.2$ için t nin farklı değerlerine karşılık analitik çözüm ile bulunan sonuçlarla sonlu fark yöntemleri ile bulunan sonuçlar karşılaştırılmıştır. Bu tabloda da t değeri artarken ele alınan bütün sonlu fark yöntemlerinde oluşan hatanın azaldığı gözlenmiştir.

PROBLEM 3:

$$\frac{\partial \tau}{\partial t}(x,t) = \frac{\partial^2 \tau}{\partial x^2}(x,t), \quad 0 < x < 1, \quad t > 0$$

şeklindeki ısı denkleminin sınır şartları ;

$$\frac{\partial \tau}{\partial x}(0,t) = \tau(0,t), \quad \frac{\partial \tau}{\partial x}(1,t) = -\tau(1,t)$$

ve başlangıç şartı ;

$$\tau(x,0) = 1, \quad 0 \leq x \leq 1$$

olmak üzere problemin analitik çözümü

$$\tau(x,t) = 4 \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ \frac{\sec \alpha_n}{(3 + 4\alpha_n^2)} e^{-4\alpha_n^2 t} \cos\left(2\alpha_n \left(x - \frac{1}{2}\right)\right) \right\}$$

dır. Burada α_n değerleri $\alpha \tan \alpha = 1/2$ denkleminin pozitif kökleridir.

Tablo 4.3.1. $k = 0.00001$ ve $t = 0.2$ alınarak h nın farklı değerleri için üstel sonlu fark yöntemi ile elde edilen sonuçların karşılaştırılması

x	$h = 0.1$	$h = 0.05$	$h = 0.025$	$h = 0.0125$	Analitik Çözüm
0.0	0.604148	0.604049	0.604025	0.604019	0.603979
0.1	0.659397	0.659170	0.659114	0.659100	0.659060
0.2	0.703371	0.703043	0.702961	0.702941	0.702901
0.3	0.735324	0.734921	0.734821	0.734796	0.734756
0.4	0.754713	0.754266	0.754155	0.754127	0.754086
0.5	0.761213	0.760751	0.760636	0.760607	0.760566
0.6	0.754713	0.754266	0.754155	0.754127	0.754086
0.7	0.735324	0.734921	0.734821	0.734796	0.734756
0.8	0.703371	0.703043	0.702961	0.702941	0.702901
0.9	0.659397	0.659170	0.659114	0.659100	0.659060
1.0	0.604148	0.604049	0.604025	0.604019	0.603979
Hata Normu					
$\ e\ _1$	0.000642	0.000191	0.000079	0.000051	
L_2	0.000504	0.000149	0.000062	0.000040	
L_∞	0.000647	0.000142	0.000070	0.000041	

Tablo 4.3.2. $h = 0.01$ ve $t = 0.3$ alınarak farklı k değerleri için üstel sonlu fark yöntemi ile elde edilen sonuçların karşılaştırılması

x	$k = 0.000001$	$k = 0.00001$	$k = 0.00004$	$k = 0.00005$	Analitik Çözüm
0.0	0.509216	0.509216	0.509218	0.509282	0.509177
0.1	0.555654	0.555655	0.555656	0.555718	0.555615
0.2	0.592620	0.592620	0.592622	0.592682	0.592580
0.3	0.619484	0.619484	0.619486	0.619545	0.619444
0.4	0.635787	0.635788	0.635789	0.635847	0.635748
0.5	0.641253	0.641253	0.641255	0.641313	0.641213
0.6	0.635787	0.635788	0.635789	0.635847	0.635748
0.7	0.619484	0.619484	0.619486	0.619545	0.619444
0.8	0.592620	0.592620	0.592622	0.592682	0.592580
0.9	0.555654	0.555655	0.555656	0.555718	0.555615
1.0	0.509216	0.509216	0.509218	0.509282	0.509177
Hata Normu					
$\ e\ _1$	0.000059	0.000060	0.000061	0.000151	
L_2	0.000039	0.000040	0.000041	0.000102	
L_∞	0.000040	0.000040	0.000043	0.000103	

Tablo 4.3.3. $k = 0.00001$ ve $h = 0.01$ için $t = 0.2$ de problemin nümerik ve analitik çözümlerinin karşılaştırılması

x	Açık Yöntem	Kapalı Yöntem	Crank-Nicolson Yöntemi	Üstel Sonlu Fark Yöntemi	Analitik Çözüm
0.0	0.604016	0.604020	0.604018	0.604018	0.603979
0.1	0.659096	0.659100	0.659098	0.659099	0.659060
0.2	0.702936	0.702940	0.702938	0.702939	0.702901
0.3	0.734791	0.734795	0.734793	0.734793	0.734756
0.4	0.754121	0.754125	0.754123	0.754124	0.754086
0.5	0.760601	0.760605	0.760603	0.760603	0.760566
0.6	0.754121	0.754125	0.754123	0.754124	0.754086
0.7	0.734791	0.734795	0.734793	0.734793	0.734756
0.8	0.702936	0.702940	0.702938	0.702939	0.702901
0.9	0.659096	0.659100	0.659098	0.659099	0.659060
1.0	0.604016	0.604020	0.604018	0.604018	0.603979
Hata Normu					
$\ e\ _1$	0.000044	0.000049	0.000047	0.000048	
L_2	0.000035	0.000039	0.000037	0.000038	
L_∞	0.000037	0.000041	0.000039	0.000039	

Tablo 4.3.4. $k=0.0001$ ve $h=0.05$ için $x=0.2$ de problemin nümerik ve analitik çözümlerinin karşılaştırılması

t	Açık Yöntem	Kapalı Yöntem	Crank-Nicolson Yöntemi	Üstel Sonlu Fark Yöntemi	Analitik Çözüm
0.01	0.990684	0.990592	0.990646	0.990690	0.990471
0.05	0.912268	0.912312	0.912325	0.912283	0.911964
0.10	0.834389	0.834412	0.834465	0.834407	0.834195
0.20	0.703022	0.703063	0.703042	0.703047	0.702901
0.40	0.499623	0.499681	0.499652	0.499656	0.499579
0.50	0.421193	0.421255	0.421224	0.421227	0.421174
1.00	0.179339	0.179392	0.179366	0.179367	0.179369

Bu kısımda ele alınan Robbin sınır şartlı ısı iletim problemi için çeşitli hesaplamalar yapılmıştır. Tablo 4.3.1. de $k=0.00001$ ve $t=0.2$ alınarak h nin farklı değerleri için üstel sonlu fark yöntemiyle bulunan sonuçlar ile analitik çözümle bulunan sonuçlar karşılaştırılmıştır. Bu karşılaştırma sonucunda en iyi sonucun h nin en küçük değeri olan 0.0125 için elde edildiği gözlenmiştir. Tablo 4.3.2. de ise $h=0.01$ ve $t=0.3$ alınarak k nin farklı değerleri için üstel sonlu fark yöntemiyle bulunan sonuçlarla analitik çözümle bulunan sonuçlar karşılaştırılmıştır. Bu karşılaştırma sonucunda ise en iyi sonucun k nin en küçük değeri olan 0.000001 için elde edildiği gözlenmiştir. Tablo 4.3.3. de k , h ve t değerleri sabit tutularak değişen x değerleri için hem analitik çözüm bulunmuş hem de sonlu fark yöntemleri ile çözüm yapılmıştır. Burada amaç x değeri değişirken sonlu fark yöntemleri ile bulunan sonuçların nasıl değiştiğini gözlemektir. Tablo 4.3.3. de ki karşılaştırma sonucunda $k=0.00001$, $h=0.01$ ve $t=0.2$ değerleri alınarak bu problem için bütün sonlu fark yöntemlerinin birbirlerine oldukça yakın sonuçlar verdiği gözlenmiştir. Ancak en iyi sonuç açık sonlu fark yöntemi ile elde edilmiştir. Tablo 4.3.4. de k , h ve x değerleri sabit tutularak değişen t değerleri için hem analitik çözüm hem de sonlu fark yöntemleri ile nümerik çözüm yapılmıştır. Burada ise zaman artarken sonlu fark yöntemleri ile bulunan sonuçların analitik çözüme yakınsayıp yakınsamadığı gözlenmek istenmiştir. Böylece Tablo 4.3.4. de $k=0.0001$, $h=0.05$ ve $x=0.2$ için t nin farklı değerlerine karşılık analitik çözüm ile bulunan sonuçlarla sonlu fark yöntemleri ile bulunan sonuçlar karşılaştırılmıştır. Bu karşılaştırma sonucunda t değeri artarken bütün sonlu fark yöntemlerinde oluşan hatanın azaldığı gözlenmiştir.

KAYNAKLAR

- [1] M. N. Özışık, *Finite Difference Methods in Heat Transfer*, CRC Press, 1994
- [2] M.C. Bhattacharya, *An Explicit Conditionally Stable Finite Difference Equation for Heat Conduction Problems*, Int. J. Num. Meth. in Eng. 21, (1985) 239-265
- [3] M.C. Bhattacharya, *A New Improved Finite Difference Equation for Heat Transfer During Transient Change*, Appl. Math. Modelling , 10 (1986)
- [4] M.C. Bhattacharya, M.G. Davies, *The Comparative Performance of Some Finite Difference Equations for Transient Heat Conduction*, International Journal for Numerical Methods in Engineering, 24, (1987)1317-1331
- [5] M.C. Bhattacharya, *Finite Difference Solutions of Partial Differential Equations*, Communications in Applied Numerical Methods, 6, (1990) 173-184
- [6] A. Refik Bahadır, *Exponential Finite-Difference Method Applied to Korteweg-de Vries Equation for Small Times*, Applied Mathematics and Computation 160, (2005) 675-682
- [7] Watson Fulks, *Advanced Calculus: An Introduction to Analysis*, USA, 1962
- [8] Frank Ayres, *Teori ve Problemlerle Matrisler*, Sanem Çözümlü Serisi, Güven Kitabevi Yayınları, Ankara, 1980
- [9] James Stewart, *Kalkülüs: Diferansiyel ve İntegral Hesap*, TÜBA yayınları, Ankara, 2007
- [10] Richard L. Burden, J. Douglas Faires, *Numerical Analysis*, Thomson Brooks/Cole, USA, 2005

[11] G. D. Smith, *Numerical Solution of Partial Differential Equations: Finite Difference Methods*, Clarendon Press- Oxford, 1985

[12] B. Bulut, *Klasik Sonlu Fark Yöntemleri ve Uygulamaları*, MSc. Thesis, İnönü University, Turkey, 2007

[13] M. Aydın, G. Gündüz, B. Kuryel, G. Otunaç, *Diferansiyel Denklemler ve Uygulamaları*, Ege Üniversitesi, Mühendislik Fak. Yayınları, İzmir, 2007

[14] Robert F. Handschuh, *An Exponential Finite Difference Technique for Solving Partial Differential Equations*, M.S. Thesis, Toledo Univ. Ohio (NASA), 1987

ÖZGEÇMİŞ

Bilge İNAN, 01.07.1984 tarihinde Malatya'nın Hekimhan ilçesinde doğdu. İlkokulu Elazığ'da, ortaokulu ve liseyi Malatya'da tamamladı. 2002 yılında İnönü Üniversitesi Fen Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümüne kayıt yaptırdı. 2006 yılında bu bölümden mezun oldu. Aynı yıl İnönü Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Uygulamalı Matematik dalında yüksek lisans öğrenimine başladı. Burada Prof. Dr. Ahmet Refik BAHADIR danışmanlığında "Isı Denkleminin Üstel Sonlu Fark Yöntemi İle Çözümü" isimli çalışmayı yürüttü. 2007 yılında İnönü Üniversitesi Fen Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümünde araştırma görevlisi olarak göreve başladı. Halen bu göreve devam etmektedir.