

**T. C.
İNÖNÜ ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**

MINKOWSKI 3-UZAYINDA EĞRİLER VE YÜZEYLERİN GEOMETRİSİ

Ahmet KAZAN

YÜKSEK LİSANS TEZİ

MATEMATİK ANABİLİM DALI

**MALATYA
2011**

Tezin Başlığı : Minkowski 3-Uzayında Eğriler ve Yüzeyleerin Geometrisi

Tezi Hazırlayan : Ahmet KAZAN

Sınav Tarihi : 08.08.2011

Yukarıda adı geçen tez, jürimizce değerlendirilerek Matematik Anabilim Dalında Yüksek Lisans Tezi olarak kabul edilmiştir.

Sınav Jüri Üyeleri

Prof. Dr. Rıfat GÜNEŐ (İnönü Üniv.) _____

Prof. Dr. Bayram ŐAHİN (İnönü Üniv.) _____

Doç. Dr. H. Bayram KARADAĞ (İnönü Üniv.) _____

Doç. Dr. H. Bayram KARADAĞ
Tez Danışmanı

İnönü Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Onayı

Prof. Dr. Asım KÜNKÜL
Enstitü Müdürü

ONUR SÖZÜ

Yüksek Lisans Tezi olarak sunduğum "Minkowski 3-Uzayında Eğriler ve Yüzeylerin Geometrisi" başlıklı bu çalışmanın bilimsel ahlak ve geleneklere aykırı düşecek bir yardıma başvurmaksızın tarafımdan yazıldığını ve yararlandığım bütün kaynakların, hem metin içinde hem de kaynakçada yöntemine uygun biçimde gösterilenlerden oluştuğunu belirtir, bunu onurumla doğrularım.

Ahmet KAZAN

ÖZET

Yüksek Lisans Tezi

Minkowski 3-Uzayında Eğriler ve Yüzeylerin Geometrisi

Ahmet KAZAN

İnönü Üniversitesi

Fen Bilimleri Enstitüsü

Matematik Anabilim Dalı

111+vi sayfa

2011

Danışman: Doç. Dr. H. Bayram KARADAĞ

Dört bölümden oluşan bu tezin giriş bölümünde konuyla ilgili bazı genel değerlendirmeler yapılmış ve bu konuya temel olan bazı çalışmalara yer verilmiştir.

İkinci bölümde, daha sonraki bölümlerde kullanılacak olan bazı temel kavramlar verilmiştir.

Üçüncü bölümde, ilk olarak E_1^3 Minkowski 3-uzayında eğrilerin genel yapıları incelenmiş, eğrilerin farklı causal karakterleri için Frenet denklemleri elde edilmiş ve bu denklemler yardımıyla eğrilerin eğrilik ve burulmaları incelenmiştir. Sonra E_1^3 de sabit eğrilikli düzlemsel eğriler ele alınmıştır. Ayrıca yine bu uzayda helisler ve Bertrand eğrilerle ilgili bazı karakterizasyonlar verilmiştir. Bu bölümde son olarak da spacelike, timelike ve null normal eğrilere yer verilmiştir.

Dördüncü bölümde önce spacelike ve timelike yüzey kavramları tanıtılmış ve ardından bu yüzeyler için ortalama eğrilik ve Gauss eğriliği lokal olarak ifade edilmiştir. Ayrıca E_1^3 in umbilik yüzeyleri karakterize edilmiştir. Daha sonra, Minkowski 3-uzayında dönel yüzeyler genel olarak tanıtılmış ve bu yüzeyler için bazı sınıflandırmalar verilmiştir. Son olarak da regle yüzeylerin genel yapısı ve timelike regle yüzeyler için bazı karakterizasyonlar verilmiştir.

ANAHTAR KELİMELER: Minkowski Uzayı, Causal Karakteri, Normal Eğri, Dönel Yüzey, Ortalama Eğrilik, Gauss Eğriliği, Regle Yüzey

ABSTRACT

MSc Thesis

The Geometry of Curves and Surfaces in Minkowski 3-Space

Ahmet KAZAN

İnönü University

Graduate School of Natural and Applied Sciences

Department of Mathematics

111+vi pages

2011

Supervisor: Assoc. Prof. Dr. H. Bayram KARADAĞ

In the introduction chapter of this thesis consisting of four chapters, some general evaluations have been done about the subject and some studies which are main into this subject have been presented.

In the second chapter, some fundamental notions which will be used in the later chapters have been given.

In the third chapter, firstly the general structures of the curves have been investigated in E_1^3 Minkowski 3-space, the Frenet equations have been obtained for different causal characters of curves and the curvature and torsion of the curves have been investigated with the aid of these equations. After, the planar curves with constant curvature have been handled in E_1^3 . Furthermore, some characterizations about helices and Bertrand curves have been given in this space. In this chapter, lastly, spacelike, timelike and null normal curves have been presented in E_1^3 .

In the fourth chapter, firstly the notions of spacelike and timelike surfaces have been introduced and after the mean curvature and Gaussian curvature have been locally denoted for these surfaces. Moreover, the umbilical surfaces of E_1^3 have been characterized. After, the rotation surfaces have been generally introduced in E_1^3 and some characterizations about these surfaces have been given. And lastly, the general structures of ruled surfaces and some characterizations for timelike ruled surfaces have been given.

KEY WORDS: Minkowski space, Causal Character, Normal Curve, Rotation Surface, Mean Curvature, Gaussian Curvature, Ruled Surface

TEŞEKKÜR

Bu çalıőmamın her aőamasında öneri ve desteğini esirgemedен değerli zamanını bana ayırarak yardımcı olan tez danıőmanım ve çok değerli hocam Sayın Doç. Dr. H. Bayram KARADAğ'a, çalıőmamın her aőamasında desteğini gördüğüm çok değerli hocam Sayın Prof. Dr. Sadık KELEŐ'e, ihtiyaç duyduğum zamanlarda desteklerini aldığım bölümümdeki araştırma görevlisi arkadaşlarıma ve her zaman bana destek olan aileme teşekkürlerimi sunarım.

Ahmet KAZAN

İÇİNDEKİLER

ÖZET	i
ABSTRACT	ii
TEŞEKKÜR	iii
İÇİNDEKİLER	iv
ŞEKİLLER DİZİNİ	vi
1 GİRİŞ	1
2 TEMEL KAVRAMLAR	4
2.1 Temel Tanım ve Teoremler	4
2.2 E_1^3 in İzometrilere	17
3 MINKOWSKI 3-UZAYINDA EĞRİLER	21
3.1 Parametrik Eğriler	21
3.2 Eğrilik ve Burulma	27
3.2.1 Eğrinin timelike olması hali:	28
3.2.2 Eğrinin spacelike olması hali:	28
3.2.3 Eğrinin lightlike olması hali:	30
3.3 Sabit Eğrilikli Düzlemsel Eğriler	31
3.3.1 Eğrinin timelike olması durumu:	33
3.3.2 Eğrinin spacelike olması durumu:	34
3.3.3 Eğrinin lightlike olması durumu:	35
3.4 E_1^3 de Helisler ve Bertrand Eğriler	36

3.5	E_1^3 Minkowski 3-Uzayında Spacelike Normal Eğriler	41
3.6	E_1^3 Minkowski 3-Uzayında Timelike ve Null Normal Eğriler	46
4	MINKOWSKI 3-UZAYINDA YÜZEYLER	51
4.1	E_1^3 de Spacelike ve Timelike Yüzeyler	51
4.2	Nondejenere Yüzeylerin Eğrilikleri	55
4.2.1	Spacelike durum	55
4.2.2	Timelike durumu	57
4.3	Eğriliklerin Lokal Hesaplamaları	58
4.4	Umbilik Yüzeyler	60
4.5	Sabit Ortalama Eğrilikli Spacelike Yüzeyler	63
4.5.1	Maksimum prensibi	63
4.6	Minkowski 3-Uzayında Dönel Yüzeyler	65
4.6.1	Minkowski 3-uzayında dönel yüzeylerin bir sınıflandırması	68
4.6.2	E_1^3 Minkowski 3-uzayında spacelike ve timelike eksenli spacelike minimal dönel yüzeyler	80
4.6.3	Sabit Eğrilikli Düzlemsel Profil Eğrileri Tarafından Oluşturulan Dönel Yüzeyler	84
4.7	E_1^3 Minkowski 3-Uzayında Regle Yüzeyler	93
4.7.1	Timelike regle yüzeyler	95
	KAYNAKLAR	108
	ÖZGEÇMİŞ	111

ŞEKİLLER DİZİNİ

Şekil 2.1	Spacelike, Timelike ve Lightlike Bölgeler	8
Şekil 4.1	De Sitter Uzayı, Hiperbolik Düzlem ve Lightlike Koni	53
Şekil 4.2	Bir teğet noktada $S_1 \leq S_2$ olacak şekilde iki yüzey	64
Şekil 4.3	Karşılaştırma Prensibi	65
Şekil 4.4	Maksimum Prensibi	65
Şekil 4.5	$\Psi(u, v) = (u + 2, 3 \cosh v, 3 \sinh v)$ Lorentz Hiperbolik Silindiri	78
Şekil 4.6	$\Psi(u, v) = (3, (u + 2) \cosh v, (u + 2) \sinh v)$ Dönel Yüzeyi	79
Şekil 4.7	$\Psi(u, v) = (3 \cos v, 3 \sin v, u + 2)$ Dairesel Silindiri	79
Şekil 4.8	$\Psi(u, v) = (3 \cos^2 u \cos v, 3 \cos^2 u \sin v, \cos u)$ Dönel Yüzeyi	80

1. GİRİŞ

İsmi Alman matematikçi Hermann Minkowski'den alan Minkowski uzay veya Minkowski uzay-zaman; en uygun şekilde formüle edilmiş olan Einstein'ın özel izafiyet teorisinin matematiksel yapısıdır. Hermann Minkowski, uzayın üç boyutuyla zamanın boyutunu birleştiren dört boyutlu bir uzay zamanı olabildiğini 1907'li yıllarda özel izafiyet teorisinin de yardımıyla fark etmiştir.

Teorik fizikte Minkowski uzay, Öklid uzayından farklıdır. Öklid uzayında sadece spacelike boyutlar varken, Minkowski uzay bir timelike boyuta sahiptir. Bu nedenle bir Öklid uzayının simetri grubu bir Öklidyen grup iken, Minkowski uzay için bu grup Poincare grubudur.

Son yıllarda geometriciler özellikle 3-boyutlu E_1^3 Minkowski uzayında eğri ve yüzeylerle ilgili birçok çalışma yapmıştır.

I bir açık aralık ve $0 \in I$ olmak üzere $\alpha : I \rightarrow E_1^3$ diferensiyellenebilir dönüşümüne eğri denir. E_1^3 de bir eğrinin causal karakteri için belirleyici olan, bu eğrinin her bir noktasındaki hız vektörünün causal karakteridir. Her bir noktasındaki hız vektörüne göre karakterize edilen eğrilerle ilgili pek çok çalışma yapılmıştır [2, 5, 11].

Örneğin, E^3 te bir $\alpha : I \subset \mathbb{R} \rightarrow E^3$ eğrisi için ortonormal baz vektörü sistemi $\{T, N, B\}$ olmak üzere, α eğrisinin yer vektörü sürekli $\{N, B\}$ normal düzleminde yatıyorsa α ya normal eğri denir. [15] ve [16] da E_1^3 Minkowski 3-uzayında spacelike, timelike ve null normal eğriler incelenmiştir.

Tanjant düzlemine bağlı olarak causal karakteri belirlenen yüzeyler de yine Minkowski 3-uzayında önemli bir çalışma alanıdır. Özellikle Öklid uzayında önemli yeri olan dönel yüzeyler ve regle yüzeylerle ilgili olarak E_1^3 de de birçok çalışmaya rastlanmaktadır [1, 3, 6, 19–23, 26–28].

Δ^II ikinci temel forma göre Laplace operatörü, A bir 3×3 matris ve $r : M^2 \rightarrow E_1^3$, indirgenmiş metrikle donatılmış 3-boyutlu Lorentz-Minkowski uzayında bir dönel yüzeyin bir izometrik immersiyonu olmak üzere, Kaimakamis ve Papantoniou, 3-boyutlu

Lorentz-Minkowski uzayında

$$\Delta^H r = Ar$$

şartını sağlayan parabolik noktalar dışındaki dönel yüzeyleri sınıflandırdılar [9].

Bekkar ve Zoubir [17], 3-boyutlu Lorentz-Minkowski uzayında sıfırdan farklı K_G Gauss eğrilikli dönel yüzeyleri

$$\Delta x^i = \lambda^i x^i$$

şartı altında sınıflandırdılar. Bu yüzeylerin ya minimal veya Lorentz-Hiperbolik silindirler ya da pseudoküreler veya reel veya sanal yarıçaplı pseudohiperbolik uzay olduklarını ispatladılar.

Ferrandez ve Lucas [1], E_1^3 de $s = 0, 1$ indeksli M_s^2 nondejenere yüzeylerin Lorentz versiyonunu

$$\Delta H = \lambda H$$

şartı altında sınıflandırdılar. Onlar, M_s^2 nin her yerde sıfır ortalama eğriliğine sahip ya B-scroll yüzeylerin bir açık parçası ya da $S^1(r) \times \mathbb{R}$, $H^1(r) \times \mathbb{R}$, $S_1^1(r) \times \mathbb{R}$, $H^2(r)$, $S_1^1(r)$ yüzeylerinin bir açık parçası olduğunu ispatladılar.

Yüksek lisans tezi olarak hazırlanan bu çalışma, giriş ile birlikte dört bölümden oluşmaktadır. İkinci bölümde bazı temel kavramlar verilmiştir. Üçüncü bölümde, ilk olarak E_1^3 Minkowski 3-uzayında eğrilerin genel yapıları incelenerek, eğrilerin farklı causal karakterleri için Frenet denklemleri elde edilmiş ve bu denklemler yardımıyla eğrilerin eğrilik ve burulmaları incelenmiştir. Ayrıca E_1^3 de sabit eğrilikli düzlemsel eğriler ele alınmış ve bu uzayda helisler ve Bertrand eğrilerle ilgili bazı karakterizasyonlar verilmiştir. Bu bölümde son olarak spacelike, timelike ve null normal eğrilere yer verilmiştir. Dördüncü bölümde önce spacelike ve timelike yüzey kavramları tanıtılarak bu yüzeyler için ortalama ve Gauss eğrilikleri lokal olarak ifade edilmiştir. Ayrıca E_1^3 in umbilik yüzeyleri karakterize edilmiştir. 4. Bölümde yer alan 4.6.1 ve 4.6.3 kısımları çalışmamızın orijinal kısımlarını teşkil etmektedir. 4.6.1. kısımda, Γ_{ij}^k Christoffel sembolleri yardımıyla tanımladığımız ve Christoffel-like operatörü dediğimiz bir operatör yardımıyla dönel yüzeylerin bir sınıflandırması yapılmıştır. 4.6.3. kısımda da

sabit eğrilikli düzlemsel eğriler tarafından oluşturulan dönel yüzeyler elde edilerek bu yüzeylerle ilgili bazı karakterizasyonlar verilmiştir. Son olarak da regle yüzeylerin genel yapısı ve timelike regle yüzeyler için bazı karakterizasyonlar verilmiştir.

2. TEMEL KAVRAMLAR

Bu bölümde, ileriki bölümlerin daha iyi anlaşılabilmesi için önce Öklid uzayında bazı temel kavramlar tanıtılacak, daha sonra da E_1^3 Lorentz-Minkowski uzayında bazı temel tanım ve teoremler verilecektir.

2.1 Temel Tanım ve Teoremler

Tanım 2.1.1. M bir C^∞ manifold olsun. M üzerinde, vektör alanlarının uzayı $\chi(M)$ ve reel değerli C^∞ fonksiyonların halkası $C^\infty(M, \mathbb{R})$ olmak üzere,

$$\langle, \rangle : \chi(M) \times \chi(M) \rightarrow C^\infty(M, \mathbb{R})$$

şeklinde bir iç çarpım tanımlı ise M ye bir **Riemann manifoldu** denir. Burada \langle, \rangle işlemine M üzerinde iç çarpım, metrik tensör, Riemann metriği veya diferensiyellenebilir metrik denir.

M üzerinde

$$\langle, \rangle : \chi(M) \times \chi(M) \rightarrow C^\infty(M, \mathbb{R})$$

fonksiyonu,

- 1) 2-linear,
- 2) simetrik,
- 3) $\forall X \in \chi(M)$ için $\langle X, Y \rangle = 0 \implies Y = 0 \in \chi(M)$

özelliklerini sağlıyorsa bu durumda da M ye **semi-Riemann manifoldu** denir [12].

Tanım 2.1.2. M bir C^∞ manifold olsun. M üzerinde vektör alanlarının uzayı $\chi(M)$ olmak üzere,

$$\begin{aligned} \nabla : \chi(M) \times \chi(M) &\rightarrow \chi(M) \\ (X, Y) &\rightarrow \nabla(X, Y) = \nabla_X Y \end{aligned}$$

fonksiyonu için,

- 1) $\nabla_{fX+gY}Z = f\nabla_X Z + g\nabla_Y Z, \forall X, Y, Z \in \chi(M), \forall f, g \in C^\infty(M, \mathbb{R})$

$$2) \nabla_X(fY) = f\nabla_X Y + (Xf)Y, \forall X, Y \in \chi(M), \forall f \in C^\infty(M, \mathbb{R})$$

özellikleri sağlanıyorsa ∇ ya M manifoldu üzerinde bir **afin konneksiyon** ve ∇_X e de X e göre **kovaryant türev operatörü** denir [12].

Tanım 2.1.3. M bir semi-Riemann manifold ve ∇ , M üzerinde bir afin konneksiyon olsun. Eğer

1) ∇ , C^∞ sınıfından,

2) M nin bir A bölgesi üzerinde C^∞ olan $\forall X, Y \in \chi(A)$ için

$$\nabla_X Y - \nabla_Y X = [X, Y] \text{ (Sıfır torsiyon özelliği)}$$

3) M nin bir A bölgesi üzerinde C^∞ olan $\forall X, Y \in \chi(A)$ ve $\forall P \in M$ için

$$X_P \langle Y, Z \rangle = \langle \nabla_X Y, Z \rangle|_P + \langle Y, \nabla_X Z \rangle|_P \text{ (Konneksiyonun metrikle bağdaşabilme özelliği)}$$

özellikleri sağlanıyorsa ∇ konneksiyonuna M üzerinde bir **Riemann konneksiyonu** ve ∇_X e de X e göre **Riemann anlamında kovaryant türev operatörü** denir [12].

Tanım 2.1.4. E^n n-boyutlu Öklid uzayında **(n-1)-boyutlu yüzey** diye E^n deki boş olmayan bir M kümesine denir, öyle ki bu küme

$$M = \{X \in U \subset E^n | f : U \rightarrow \mathbb{R}, f(X) = c = sbt, U \text{ bir açık küme, } f \text{ dif.bilir fonksiyon}\}$$

şekindedir. E^2 de bir yüzeye eğri, E^3 te 2-yüzeye sadece yüzey denir. $n > 3$ ise genellikle hiperyüzey olarak adlandırılır [12].

Tanım 2.1.5. E^n de bir M hiperyüzeyi ve M nin birim normal vektör alanı N olarak verilsin. E^n de Riemann konneksiyonu ∇ olmak üzere, $\forall X \in \chi(M)$ için

$$S(X) = \nabla_X N$$

şeklinde tanımlı S dönüşümüne M üzerinde **şekil operatörü** veya M nin **Weingarten dönüşümü** denir.

M nin bir P noktasındaki şekil operatörü $S(P)$ olmak üzere,

$$K : M \rightarrow \mathbb{R}$$

$$P \rightarrow K(P) = \det S(P)$$

biçiminde tanımlanan fonksiyona M nin **Gauss eğrilik fonksiyonu** ve $K(P)$ değerine de M nin P noktasındaki **Gauss eğriliği** denir.

Ayrıca,

$$\begin{aligned} H : M &\rightarrow \mathbb{R} \\ P &\rightarrow H(P) = izS(P) \end{aligned}$$

şeklinde tanımlı fonksiyona M nin **ortalama eğrilik fonksiyonu** ve $H(P)$ değerine de M nin P noktasındaki **ortalama eğriliği** denir [12].

Tanım 2.1.6. V bir reel vektör uzayı olsun. $\forall a, b \in \mathbb{R}$ ve $\forall X, Y, Z \in V$ için

$$\langle, \rangle : V \times V \rightarrow \mathbb{R}$$

dönüşümü aşağıdaki özelliklere sahip ise bu dönüşüme V vektör uzayı üzerinde bir **simetrik bilinear formdur** denir [4]:

1. $\langle X, Y \rangle = \langle Y, X \rangle$,
2. $\langle aX + bY, Z \rangle = a\langle X, Z \rangle + b\langle Y, Z \rangle$
 $\langle X, aY + bZ \rangle = a\langle X, Y \rangle + b\langle X, Z \rangle$.

Tanım 2.1.7. \langle, \rangle , V reel vektör uzayı üzerinde bir simetrik bilinear form olsun.

i) Eğer $\forall v \in V, v \neq 0$ için $\langle v, v \rangle > 0$ oluyorsa \langle, \rangle simetrik bilinear formuna **pozitif tanımlı**,

ii) eğer $\forall v \in V, v \neq 0$ için $\langle v, v \rangle < 0$ oluyorsa \langle, \rangle simetrik bilinear formuna **negatif tanımlı**,

iii) eğer $\forall v \in V$ için $\langle v, v \rangle \geq 0$ oluyorsa \langle, \rangle simetrik bilinear formuna **pozitif yarı-tanımlı**,

iv) eğer $\forall v \in V$ için $\langle v, v \rangle \leq 0$ oluyorsa \langle, \rangle simetrik bilinear formuna **negatif yarı-tanımlı**,

v) $\forall w \in V$ için $\langle v, w \rangle = 0$ iken $v = 0$ oluyorsa \langle, \rangle simetrik bilinear formuna **nonde-jeneredir** denir [4].

Tanım 2.1.8. V bir reel vektör uzayı ve $\langle , \rangle : V \times V \rightarrow \mathbb{R}$ bir simetrik bilinear form olsun.

$$\langle , \rangle|_W : W \times W \rightarrow \mathbb{R}$$

negatif tanımlı olacak şekilde en büyük boyutlu W altuzayının boyutuna \langle , \rangle simetrik bilinear formunun **indeksi** denir [4].

Tanım 2.1.9. Bir \mathbb{R}^n vektör uzayı üzerinde Öklid iç çarpımı yerine indeksi 1 olan

$$\begin{aligned} \langle , \rangle : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n &\rightarrow \mathbb{R} \\ (x, y) &\rightarrow \langle x, y \rangle = \sum_{i=1}^{n-1} x_i y_i - x_n y_n \end{aligned}$$

Lorentz iç çarpımı tanımlanırsa, \mathbb{R}^n uzayına **Lorentz vektör uzayı** denir ve \mathbb{R}_1^n ile gösterilir.

Özel olarak $n = 3$ için bu uzay **Minkowski 3-uzayı** olarak isimlendirilir ve genellikle E_1^3 ile gösterilir [26].

Tanım 2.1.10. \vec{x} , \mathbb{R}_1^n de bir vektör olmak üzere, \vec{x} vektörüne,

- i) $\langle \vec{x}, \vec{x} \rangle > 0$ veya $\vec{x} = 0$ ise **spacelike**,
- ii) $\langle \vec{x}, \vec{x} \rangle < 0$ ise **timelike**,
- iii) $\vec{x} \neq 0$ olmak üzere $\langle \vec{x}, \vec{x} \rangle = 0$ ise **lightlike** veya **null vektör** denir.

Timelike ve null vektörlere **causal vektörler** denir [26].

Ayrıca, \vec{x} vektörünün tipi, onun **causal karakteri** olarak adlandırılır.

Lemma 2.1.1. *Bir timelike vektöre dik causal vektör yoktur [26].*

Tanım 2.1.11. E_1^3 Minkowski 3-uzayında,

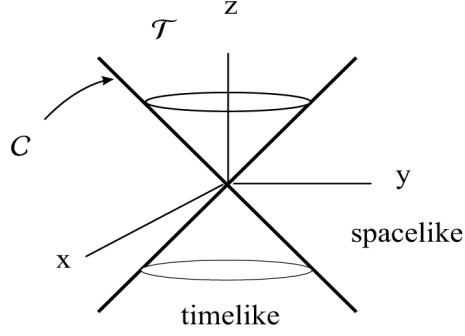
$$C = \{(x, y, z) : x^2 + y^2 - z^2 = 0\} - \{(0, 0, 0)\}$$

şeklinde tanımlı E_1^3 in bütün lightlike vektörlerinin kümesine E_1^3 in **light konisi** denir.

Benzer şekilde E_1^3 de,

$$T = \{(x, y, z) : x^2 + y^2 - z^2 < 0\}$$

olarak tanımlanan E_1^3 in bütün timelike vektörlerinin kümesine de E_1^3 in **time konisi** denir [18].



Şekil 2.1 Spacelike, Timelike ve Lightlike Bölgeler

Tanım 2.1.12. M bir C^∞ manifold ve M üzerinde tanımlı bir \langle, \rangle metriği verilmiş olsun.

Buna göre;

- i) \langle, \rangle pozitif tanımlı ise \langle, \rangle metriğine **Riemannian**,
- ii) $\forall P \in M$ noktasındaki $T_P(M)$ tanjant uzayının her ortonormal bazı tamamen bir timelike vektör içeriyorsa \langle, \rangle metriğine **Lorentzian** denir [24].

Tanım 2.1.13. M bir C^∞ n-manifold olsun. Buna göre M üzerinde,

- i) bir \langle, \rangle Riemannian metriği tanımlı ise M ye **Riemannian manifold**,
- ii) bir \langle, \rangle Lorentzian metriği tanımlı ise M ye **Lorentzian manifold**,
- iii) herhangi bir \langle, \rangle metriği tanımlı ise M ye **semi-Riemann manifold** denir ve (M, \langle, \rangle) ile gösterilir [24].

Lemma 2.1.2. $g(= \langle, \rangle)$ bir nondejenere metrik olmak üzere, (V, g) bir metrik uzay olsun.

Bu durumda

1. Eğer $U \subset V$ bir altuzay ise, bu taktirde $\text{boy}(U^\perp) = \text{boy}(V) - \text{boy}(U)$ dur.
2. Eğer $U \subset V$ bir altuzay ise, bu taktirde $(U^\perp)^\perp = U$ dur.
3. Eğer $U \subset V$ bir nondejenere altuzay ise, bu taktirde U^\perp de bir nondejenere altuzaydır [18].

İspat. 1. $\beta = \{e_1, e_2, \dots, e_m\}$, U nun bir bazı olsun. Bu bazı V nin bir $\alpha = \{e_1, e_2, \dots, e_n\}$

bazına genişletelim. Eğer $u = \sum_i x_i e_i \in U^\perp$ ise, bu taktirde

$$0 = \left\langle \sum_{i=1}^n x_i e_i, e_j \right\rangle = \sum_{i=1}^n g_{ji} x_i = 0, \quad 1 \leq j \leq m$$

olur. Bu ifade matris formunda,

$$\begin{bmatrix} g_{11} & \cdot & \cdot & \cdot & g_{1n} \\ \cdot & & & & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & & & & \cdot \\ g_{m1} & \cdot & \cdot & \cdot & g_{mn} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ 0 \end{bmatrix} \quad \text{veya } AX = 0, \quad A = [g_{ij}]_{m \times n}$$

olarak verilebilir. A'nın rankı m-dir. Çünkü metrik nondejenere dir. Sonuç olarak, $AX = 0$ denkleminin çözümleri (n-m)-boyutlu bir altuzay oluştururlar.

2. $U^\perp \subset V$ ise

$$\text{boy}(U^\perp)^\perp = \text{boy}(V) - \text{boy}(U^\perp)$$

ve $U \subset V$ ise

$$\text{boy}(U^\perp) = \text{boy}(V) - \text{boy}(U)$$

dur. O halde,

$$\text{boy}(U^\perp)^\perp = \text{boy}(U^\perp) + \text{boy}(U) - \text{boy}(U^\perp)$$

ve dolayısıyla

$$\text{boy}(U^\perp)^\perp = \text{boy}(U)$$

olur. $(U^\perp)^\perp \subset U$ olduğu için sonuç, $\text{boy}(U^\perp)^\perp = \text{boy}(U)$ eşitliğinden dolayı elde edilir.

3. $\beta = \{e_1, e_2, \dots, e_m\}$ U nun bir ortonormal bazı olsun, yani, $g|_U$ metriğine ait matris sadece 1 ve -1 ile diyagonal olsun. Bu bazı, V nin $\alpha = \{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ bazına genişletelim. $\text{boy}(U^\perp) = n - m$ olduğundan, $\{e_{m+1}, \dots, e_n\}$, U^\perp in bir bazıdır ve bu da ispatı tamamlar. □

Şimdi, üzerindeki causal karaktere bağlı olarak altuzayların bazı karakterizasyonlarını verelim:

Önerme 2.1.1. 1. $v \in E_1^3$ olsun. Bu takdirde v bir timelike vektördür ancak ve ancak $\langle v \rangle^\perp$ spacelike tır ve dolayısıyla $E_1^3 = \langle v \rangle \oplus \langle v \rangle^\perp$ dir. Benzer şekilde v spacelike tır ancak ve ancak $\langle v \rangle^\perp$ timelike tır.

2. $U \subset V$ bir altuzay olsun. Bu durumda, U spacelike tır ancak ve ancak U^\perp timelike tır.

3. U bir altuzay ise bu durumda, U lightlike tır ancak ve ancak U^\perp de lightlike tır [18].

İspat. 1. v bir timelike vektör ise, $v \in E_1^3$ in ortonormal bazının bir elemanı olacak şekilde $B = \{e_1, e_2, v\}$ bazını alalım. Bu takdirde, $\langle v \rangle^\perp = Sp\{e_1, e_2\}$ dir ve bu bir spacelike uzaydır.

Tersine, $\langle, \rangle|_{\langle v \rangle^\perp}$ pozitif tanımlı bir metrik olmak üzere, $\langle v \rangle^\perp$ in bir ortonormal bazı $\{e_1, e_2\}$ olsun. Bu takdirde metrik diyagonal olacak şekilde $\{e_1, e_2, v\}$ bir bazdır. $g_{11} = g_{22} = 1$ için $g_{33} < 0$ dir, yani, v bir timelike vektördür.

2. U bir timelike altuzay ve $v \in U$ bir timelike vektör olsun. Bu takdirde, $U^\perp \subset \langle v \rangle^\perp$ dir. $\langle v \rangle^\perp$ spacelike ise bu durumda U^\perp spacelike tır. Benzer şekilde tersi de, $(U^\perp)^\perp = U$ olduğundan dolayı açıktır.

3. Bu madde, yukarıdaki iki maddenin bir sonucudur. □

E^3 Öklid uzayının doğal yapısından farklı olarak, Lorentz-Minkowski uzayında timelike vektörlerin ve kendileriyle çarpımları sıfır olan lightlike vektörlerin var olması, ilginç durumların ortaya çıkmasına neden olur.

Şimdi de, lightlike vektörlerin bazı özelliklerinden bahsedelim:

Önerme 2.1.2. 1. u ve v iki lightlike vektör olsunlar. Bu takdirde, u ve v vektörleri lineer bağımlıdır ancak ve ancak $\langle u, v \rangle = 0$ dir.

2. Eğer U bir lightlike altuzay ise, bu takdirde $boy(U \cap U^\perp) = 1$ dir [18].

İspat. 1.(\implies): u ve v birbiriyle orantılı iki lightlike vektör olsunlar. Bu durumda,

$$u = (u_1, u_2, u_3), \quad v = c.u = (cu_1, cu_2, cu_3), \quad c \in \mathbb{R}$$

olmak üzere

$$\langle u, u \rangle = (u_1)^2 + (u_2)^2 - (u_3)^2 = 0$$

$$\langle u, v \rangle = c(u_1)^2 + c(u_2)^2 - c(u_3)^2 = c((u_1)^2 + (u_2)^2 - (u_3)^2) = 0$$

dır. Dolayısıyla u ve v ortogonaldır.

(\Leftarrow) : Kabul edelim ki u ve v ortogonal olan iki lightlike vektördür.

$E_1^3 = \langle E^3 \rangle^\perp \oplus \langle E^3 \rangle$ olmak üzere, $u = x + w$, $v = y + w$ olarak yazalım. Bu durumda,

$$\langle u, v \rangle = \langle x + w, y + w \rangle = \langle x, y \rangle + \langle x, w \rangle + \langle y, w \rangle + \langle w, w \rangle, \quad (2.1.1)$$

$$\langle u, u \rangle = 0 \implies \langle x + w, x + w \rangle = \langle x, x \rangle + 2\langle x, w \rangle + \langle w, w \rangle = 0, \quad (2.1.2)$$

$$\langle v, v \rangle = 0 \implies \langle y + w, y + w \rangle = \langle y, y \rangle + 2\langle y, w \rangle + \langle w, w \rangle = 0 \quad (2.1.3)$$

dir. (2.1.2) ve (2.1.3) denklemleri toplanırrsa,

$$\|x\|^2 + \|y\|^2 + 2\langle x + y, w \rangle + 2\langle w, w \rangle = 0$$

olur. $w = u - x$ alınırsa,

$$\|x\|^2 + \|y\|^2 + 2\langle x + y, u - x \rangle + 2\langle u - x, u - x \rangle = 0,$$

$$\|x\|^2 + \|y\|^2 - 2\langle x, u \rangle + 2\langle y, u \rangle - 2\langle x, y \rangle = 0,$$

$$\|x\|^2 + \|y\|^2 - 2\langle x - y, u \rangle - 2\langle x, y \rangle = 0,$$

$y - x = v - u$ olduğundan,

$$\|x\|^2 + \|y\|^2 + 2\langle v - u, u \rangle - 2\langle x, y \rangle = 0,$$

$$\|x\|^2 + \|y\|^2 + 2\langle u, v \rangle - 2\langle u, u \rangle - 2\langle x, y \rangle = 0,$$

$$\|x\|^2 + \|y\|^2 - 2\langle x, y \rangle = 0,$$

$$\|x - y\|^2 = 0,$$

$$x = y$$

bulunur. Dolayısıyla $u = v$ dir. Bu ise ispatı tamamlar.

2. U bir lightlike uzay olduğundan, $u, v \in U \cap U^\perp$ ise $\langle u, v \rangle = 0$ dır. Böylece u ve v vektörleri lineer bağımlıdır. Dolayısıyla bu, $\text{boy}(U \cap U^\perp) \leq 1$ olduğunu gösterir. Eğer

$\text{boy}(U \cap U^\perp) = 0$ ise $E_1^3 = U \oplus U^\perp$ dir. Dolayısıyla E_1^3 in her vektörü lightlike olmalıdır ki bu doğru değildir. O halde $\text{boy}(U \cap U^\perp) \neq 0$ dir. Bu nedenle, $\text{boy}(U \cap U^\perp) = 1$ dir. \square

Şimdi de timelike altuzaylarla ilgili aşağıdaki karakterizasyonu verelim:

Önerme 2.1.3. $U \subset E_1^3$ iki-boyutlu bir altuzay olsun. Bu taktirde aşağıdaki ifadeler denktir [18]:

1. U bir timelike altuzaydır.
2. U , iki tane lineer bağımsız lightlike vektör içerir.
3. U bir timelike vektör içerir.

İspat. 1 \implies 2: $e_1 = (1, 0, 0)$, $e_2 = (0, 1, 0)$, $e_3 = (0, 0, 1)$ olacak şekilde E_1^3 in $\{e_1, e_2, e_3\}$ ortonormal bazını alalım. Bu taktirde, $\pi = Sp\{e_2, e_3\}$ timelike düzleminde yer alan $e_2 + e_3$ ve $e_2 - e_3$ vektörleri lineer bağımsız lightlike vektörlerdir.

2 \implies 3: u ve v iki lineer bağımsız lightlike vektör iseler, bu taktirde $u + v$ veya $u - v$ vektörlerinden biri timelike tır. Çünkü u ve v lineer bağımsız iki lightlike vektör iseler $\langle u, v \rangle \neq 0$ olup

$$\langle u \pm v, u \pm v \rangle = \pm 2 \langle u, v \rangle \neq 0$$

dir.

3 \implies 1: v , U nun bir timelike vektörü olsun. Bu taktirde $U^\perp \subset \langle v \rangle^\perp$ ve $\langle v \rangle^\perp$ bir spacelike altuzaydır. Böylece U^\perp spacelike tır ve dolayısıyla U timelike tır. \square

Bu önerme, U nun bir hiperdüzlem olduğu düşünülerek keyfi boyutlara genellenebilir.

Şimdi, lightlike altuzayları karakterize eden şu önermeyi verelim:

Önerme 2.1.4. U , E_1^3 in bir altuzayı olsun. Bu durumda aşağıdaki ifadeler denktir:

1. U bir lightlike altuzaydır.
2. U bir lightlike vektör içerir fakat timelike vektör içermez.
3. $U \cap C = L - \{0\}$ ve $\text{boy}(L) = 1$ dir [18].

İspat. 1 \implies 2: \langle, \rangle bir dejenere metrik olduğundan bir lightlike vektör vardır. Önerme 2.1.3 ten, timelike vektör yoktur.

2 \implies 3: U da lightlike vektörlerin varoluşundan dolayı, $U \cap C$ boştan farklı bir kümedir. Önerme 2.1.3 ten, eğer iki lineer bağımsız lightlike vektör varsa bu taktirde bir timelike vektör vardır.

3 \implies 1: Yine Önerme 2.1.3 ten, U hem spacelike hem de timelike altuzay değildir. □

E_1^3 in timelike vektörlerinin kümesi T olduğundan, $\forall u \in T$ için u nun timelike konisi,

$$C(u) = \{v \in T : \langle u, v \rangle < 0\}$$

şeklinde verilen küme olarak tanımlanır.

Bu küme, $u \in C(u)$ olduğundan dolayı boş değildir. Ayrıca T , $C(u)$ ve $C(-u)$ nun ayrık birleşimidir: Eğer $v \in T$ ise bu taktirde $\langle u, v \rangle \neq 0$ dır ve dolayısıyla $v \in C(u)$ veya $v \in C(-u)$ dur. Ayrıca, $C(u) \cap C(-u) = \emptyset$ dir.

Timelike koninin bazı özellikleri şu önerme ile verilebilir:

Önerme 2.1.5. 1. İki timelike u ve v vektörü aynı timelike konide yatar ancak ve ancak $\langle u, v \rangle < 0$ dır.

2. $u \in C(v)$ dir ancak ve ancak $C(u) = C(v)$ dir.

3. Timelike koniler konveks kümelerdir [18].

İspat. 1. $\langle u, v \rangle < 0$ ise $u \in C(v)$ dir. Farzedelim ki $u, v \in C(w)$ dır.

$\langle w, w \rangle = -1$ kabul edebiliriz.

$$u = x + aw \text{ ve } v = y + bw, \quad x, y \in \langle w \rangle^\perp$$

yazalım. $\langle w \rangle^\perp$ bir spacelike altuzay iken

$$|\langle x, y \rangle| \leq \|x\| \|y\|$$

ve

$$\begin{aligned}\langle u, v \rangle &= \langle x + aw, y + bw \rangle = \langle x, y \rangle + b \langle x, w \rangle + a \langle w, y \rangle + ab \langle w, w \rangle \\ &= -ab + \langle x, y \rangle \leq -ab + \|x\| \|y\|\end{aligned}$$

dir.

$$\langle x, x \rangle < a^2 \text{ ve } \langle y, y \rangle < b^2$$

olduğundan $\langle u, v \rangle < 0$ dir. Bu da (1) in ispatını tamamlar.

2. $u \in C(v)$ ise bu taktirde $\langle u, v \rangle < 0$ dir. Dolayısıyla $v \in C(u)$ dur. Aynı zamanda $\forall v \in C(u)$ için $v \in C(v)$ dir. O halde $C(u) \subset C(v)$ dir.

$\forall u \in C(v)$ için aynı zamanda $u \in C(u)$ olduğundan $C(v) \subset C(u)$ dur. Bundan dolayı, $C(u) = C(v)$ dir.

3. Farzedelim ki $u, v \in C(w)$ ve $t \in [0, 1]$ olsun. Bu durumda

$$\langle tu + (1-t)v, w \rangle = t \langle u, w \rangle + (1-t) \langle v, w \rangle < 0$$

olduğundan $tu + (1-t)v \in C(w)$ dir. □

Şimdi, timelike vektörler için Cauchy-Schwarz eşitsizliğinin bir tipini gösterelim. Bu eşitsizlik, iki timelike vektör arasındaki açıyı tanımlamamızı sağlar.

Teorem 2.1.1. u ve v iki timelike vektör olsunlar. Bu durumda,

$$|\langle u, v \rangle| \geq \sqrt{-\langle u, u \rangle} \sqrt{-\langle v, v \rangle}$$

dir ve eşitlik ancak ve ancak u ve v orantılı iki vektör ise sağlanır.

Her iki vektörün aynı timelike konide yatması durumunda,

$$\langle u, v \rangle = -\|u\| \|v\| \cosh \varphi$$

olacak şekilde bir tek $\varphi \geq 0$ sayısı vardır.

Bu φ sayısı u ile v vektörleri arasındaki **hiperbolik açı** olarak adlandırılır [18].

İspat. Lineer bağımsız u, v timelike vektörlerini dikkate alalım. Bu durumda, $U = Sp\{u, v\}$ bir timelike düzlemdir. Önerme 2.1.3 ten,

$$\langle au + bv, au + bv \rangle = a^2 \langle u, u \rangle + b^2 \langle v, v \rangle + 2ab \langle u, v \rangle = 0$$

şeklindeki denklem a ve b ye göre çözüme sahiptir. Ayrıca $a \neq 0$ dır (aksi halde v vektörü lightlike olurdu). Denklem a^2 ile bölünürse,

$$\langle v, v \rangle \lambda^2 + 2 \langle u, v \rangle \lambda + \langle u, u \rangle = 0$$

denklemini λ ya göre çözüme sahiptir.

Bu kuadratik denklemin diskriminantı pozitif, yani

$$\langle u, v \rangle^2 > \langle u, u \rangle \langle v, v \rangle$$

olmalıdır. Bu eşitsizlik gösterir ki u ve v lineer bağımsızdır.

Diğer taraftan, eğer u ile v orantılılarsa bu taktirde eşitlik elde edilir.

Teoremin ikinci kısmı için

$$\frac{\langle u, v \rangle^2}{(-\langle u, u \rangle)(-\langle v, v \rangle)} \geq 1 \quad (2.1.4)$$

yazalım. Eğer u ve v aynı timelike konide yatarsa, bu taktirde $\langle u, v \rangle < 0$ ve (2.1.4) ifadesi

$$\frac{-\langle u, v \rangle}{\sqrt{-\langle u, u \rangle} \sqrt{-\langle v, v \rangle}} \geq 1$$

demektir. $\cosh : [0, \infty) \rightarrow [1, \infty)$ fonksiyonu 1:1 dir ve bu durumda bir tek

$$\cosh \varphi = \frac{-\langle u, v \rangle}{\sqrt{-\langle u, u \rangle} \sqrt{-\langle v, v \rangle}}$$

sayısı vardır. □

Sonuç 2.1.1. u ve v timelike konide yatan iki timelike vektör iseler, bu taktirde

$$\|u + v\| \geq \|u\| + \|v\|$$

dir ve eşitlik ancak ve ancak u ile v orantılı ise sağlanır [18].

Şimdi, spacelike vektörler için genel bir açı kavramı olmadığını görelim. Örneğin; $u = (0, \cosh t, \sinh t)$ ve $v = (0, 1, 0)$ birim spacelike vektörleri için 1 den büyük herhangi bir keyfi değer olan $\langle u, v \rangle = \cosh t$ elde edilir. Çünkü, $Sp\{u, v\}$ düzlemi timelike tir. Aksine, eğer u ve v bir spacelike P düzlemi belirtirlerse, P den indirgenen metrik pozitif definittir ve bu taktirde doğal Cauchy-Schwarz eşitsizliği elde edilir.

Şimdi, timelike yönlendirme kavramını vereceğiz. Önce, herhangi bir vektör uzayında yönlendirme tanımını hatırlayalım.

Bir V vektör uzayı için $\{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ ve $\{e'_1, e'_2, \dots, e'_n\}$ bazları, $e'_i = \sum A_i^j e_j$, ($1 \leq i, j \leq n$) olmak üzere $\det A > 0$ şartını sağlıyorsa aynı yönlendirmeye sahiptirler denir. V için bütün bazların kümesi üzerinde aynı yönlendirmeye sahip olma bir denklik bağıntısıdır ve sadece iki denklik sınıfı vardır. Bu denklik sınıflarına V nin yönlendirmeleri denir [4]. Örneğin; \mathbb{R}^3 vektör uzayının yönlendirmeleri diye adlandırılan tam olarak iki denklik sınıfı vardır. Bu denklik sınıflarından biri tespit edilirse, \mathbb{R}^3 e yönlendirilmiştir denir. Burada \mathbb{R}^3 yönlendirilmiştir dediğimizde β bir baz olmak üzere $(\mathbb{R}^3, [\beta])$ sıralı çiftini kastederiz.

E_1^3 de bütün ortonormal bazların β kümesini düşünelim.

" $B \sim B'$ dir eğer e_3 ve e'_3 aynı timelike konide yatıyorsa, yani $\langle e_3, e'_3 \rangle < 0$ ise" şeklindeki denklik bağıntısını tanımlayalım. Bu taktirde, timelike yönlendirmeler denilen tam olarak iki denklik sınıfına sahip oluruz. Ayrıca herbir denklik sınıfı bir tek timelike koni belirtir.

Eğer β için $(E_1^3, [\beta])$ sıralı çifti düşünülerek bir yönlendirme tespit edilirse, E_1^3 e timelike yönlendirilmiştir denir [18].

Tanım 2.1.14. $e_3 = (0, 0, 1)$ olsun. Verilen bir $v = (v_1, v_2, v_3)$ timelike vektörüne future-directed (veya past-directed) denir, eğer $v \in C(e_3)$ ise, yani $\langle v, e_3 \rangle < 0$ (veya $v \in C(-e_3)$, yani $\langle v, e_3 \rangle > 0$) ise [18].

Kolayca görülebilir ki, $v = (v_1, v_2, v_3)$ future-directed dir eğer $v_3 > 0$ ise. β_u , \mathbb{R}^3 ün doğal bazı olmak üzere E_1^3 i $(E_1^3, [\beta_u])$ olacak şekilde $C(e_3)$ timelike konisiyle yönlendirilmiş olarak düşüneceğiz.

Tanım 2.1.15. $u = (u_1, u_2, u_3)$, $v = (v_1, v_2, v_3)$ E_1^3 de iki vektör olsunlar. Lorentzian vektörel çarpım,

$$u \times v = \begin{bmatrix} e_1 & e_2 & -e_3 \\ u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{bmatrix} = (u_2v_3 - u_3v_2, u_3v_1 - u_1v_3, u_2v_1 - u_1v_2)$$

şeklinde tanımlanır, burada

$$e_1 = (1, 0, 0), e_2 = (0, 1, 0), e_3 = (0, 0, 1)$$

dir [20].

Sonuç 2.1.2. Kolayca görülebilir ki, $u \times v$ vektörü hem u ya hem de v ye dik bir vektördür.

Önerme 2.1.6. E_1^3 de x, y, z, w vektörleri için şu özellikler sağlanır [22]:

- i) $x \times y = 0 \iff x$ ve y lineer bağımlıdır.
- ii) $x \times y = -y \times x$ dir.
- iii) $(x \times y) \times z = -\langle x, z \rangle y + \langle y, z \rangle x$ dir.
- iv) $\langle x \times y, z \times w \rangle = \langle x, w \rangle \langle y, z \rangle - \langle x, z \rangle \langle y, w \rangle$ dir.

2.2 E_1^3 in İzometrileri

Bu kısımda, E_1^3 Minkowski 3-uzayının izometrileri incelenecektir. Burada E_1^3 in tüm vektör izometrilerinin kümesi ele alınıp, bu küme $O_1(3)$ ile gösterilecektir. Eğer β ve β' iki ortonormal baz ise, koordinat değişimi matrisi A olmak üzere bu matris, $A^tGA = G$ eşitliğini sağlar. Dolayısıyla,

$$O_1(3) = \{A \in Gl(3, \mathbb{R}) : A^tGA = G\}$$

dir. Burada $\det A = \pm 1$ dir. Bunun anlamı, $O_1(3)$ ün en az iki bağlantılı elemanının var olmasıdır. Determinantı 1 olan izometrilerin kümesini $SO_1(3)$ ile gösterelim. $SO_1(3)$ kümesi, **Özel Lorentz Grup** diye adlandırılır. Bu grup, \mathbb{R}^3 ün yönlendirme kavramıyla bağlantılı olarak bellidir. Eğer doğal bazla verilen yönlendirme alınırsa, β bir ortonormal baz olmak üzere $\beta \in SO_1(3)$ tür ancak ve ancak β pozitif yönlendirilmiştir.

Tanım 2.2.1. β bir future-directed ortonormal baz olmak üzere, $\beta' = A\beta$ de future-directed ise A timelike yönlendirmeyi korur denir [18].

$$O_1^+(3) = \{A \in O_1(3) : A \text{ timelike yönlendirmeyi korur}\}$$

şeklinde tanımlı küme bir grup olup, bu gruba **ortocrone grup** denir.

$O_1^+(3)$ için şu karakterizasyon verilebilir:

i) $A \in O_1^+(3)$ tür ancak ve ancak $a_{33} > 0$ dır.

ii) $O_1^+(3)$, bileşenlerinden biri $O_1^+(3) \cap SO_1(3)$, diğeri de $O_1^+(3) - (O_1^+(3) \cap SO_1(3))$ olan bir gruptur.

$$O_1^{++}(3) = SO_1(3) \cap O_1^+(3) = \{A \in O_1(3) : \det A = 1, A \text{ timelike yönlendirmeyi korur}\}$$

şeklinde tanımlı küme **Özel Lorentz Ortocrone Grup** olarak adlandırılır.

Topolojik bakış açısıyla, $O_1^{++}(3)$ bir kompakt küme değildir, çünkü

$$\left\{ \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cosh t & \sinh t \\ 0 & \sinh t & \cosh t \end{bmatrix}, t \in \mathbb{R} \right\}$$

altkümesi sınırlı değildir.

Teorem 2.2.1. $O_1(3)$,

i) $O_1^{++}(3) = \{A \in O_1(3) : \det A = 1, A \text{ timelike yönlendirmeyi korur}\}$,

ii) $O_1^{+-}(3) = \{A \in SO_1(3) : a_{33} < 0\}$,

iii) $O_1^{-+}(3) = \{A \in O_1^+(3) : \det A = -1\}$ ve

iv) $O_1^{--}(3) = \{A \in O_1(3) : \det A = -1, a_{33} < 0\}$

altgruplarına sahiptir.

Örneğin, $I \in O_1^{--}(3)$ dir, burada $I = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$ dir.

Eğer T_1 ve T_2 yi $T_1 = \text{diag}[1, 1, -1]$ ve $T_2 = \text{diag}[1, -1, 1]$ şeklinde ifade edersek, bu takdirde $T_3 \in O_1^{++}(3)$ için

$$T_1 \cdot T_2 \cdot T_3, T_2 \cdot T_3, T_1 \cdot T_3$$

sırasıyla (ii), (iii), (iv) gruplarına aittir.

Şimdi, 2-boyutlu E_1^2 Lorentz-Minkowski uzayının izometrisini inceleyelim.

A matrisi, $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ ile verilsin. Bu takdirde,

$A \in O_1(2)$ dir ancak ve ancak $G = A^t G A$ dir, yani,

$$a^2 - c^2 = 1, ab - cd = 0, d^2 - b^2 = 1$$

dir.

Burada, $a^2 - c^2 = 1$ eşitliğinde şu durumlar elde edilir:

i) $a = \cosh t$ ve $c = \sinh t$ olacak şekilde $t \in \mathbb{R}$ vardır. Ayrıca $d^2 - b^2 = 1$ eşitliğinden de şu iki durum ortaya çıkar:

a) $d = \cosh s$ ve $b = \sinh s$ olacak şekilde $s \in \mathbb{R}$ vardır. $ab - cd = 0$ eşitliğinden $s = t$ olur.

b) $d = -\cosh s$ ve $b = \sinh s$ olacak şekilde $s \in \mathbb{R}$ vardır. Yine $ab - cd = 0$ eşitliğinden $s = -t$ olur.

ii) $a = -\cosh t$ ve $c = \sinh t$ olacak şekilde $t \in \mathbb{R}$ vardır. $d^2 - b^2 = 1$ eşitliği yine iki olasılık doğurur:

a) $d = \cosh s$ ve $b = \sinh s$ olacak şekilde $s \in \mathbb{R}$ vardır. $ab - cd = 0$ eşitliğinden $s = -t$ bulunur.

b) $d = -\cosh s$ ve $b = \sinh s$ olacak şekilde $s \in \mathbb{R}$ vardır. $ab - cd = 0$ eşitliğinden $s = t$ elde edilir. Böylece 4 tip izometri elde edilir. Bu izometrisel matrisel olarak;

$$\begin{bmatrix} \cosh s & \sinh s \\ \sinh s & \cosh s \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \cosh s & \sinh s \\ -\sinh s & -\cosh s \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -\cosh s & \sinh s \\ -\sinh s & \cosh s \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -\cosh s & \sinh s \\ \sinh s & -\cosh s \end{bmatrix}$$

şeklinde yazılabilir.

Yukarıdaki teoremdeki notasyonlarla, bu matrisler sırasıyla aşağıdaki kümelere aittir:

$$O_1^{++}(2), O_1^{--}(2), O_1^{-+}(2), O_1^{+-}(2).$$

3. MINKOWSKI 3-UZAYINDA EĞRİLER

Bu bölümde, ilk olarak E_1^3 Minkowski 3-uzayında eğrilerin genel yapıları ve eğrilerin causal karakterlerine bağlı olarak bazı karakterizasyonlar verilecektir. Ayrıca eğrilerin farklı causal karakterleri için Frenet denklemleri elde edilip, bu denklemler yardımıyla eğrilerin eğrilik ve burulmaları incelenecektir. Daha sonra, sabit eğrilikli düzlemsel eğriler ele alınacak ve E_1^3 deki sabit eğrilikli düzlemsel eğrilerin sadece Öklidyen çemberler, hiperboller ve paraboller oldukları görülecektir. Ayrıca Minkowski 3-uzayında helisler ve Bertrand eğriler ile ilgili bazı karakterizasyonlar verilecektir. Son olarak da Öklid uzayında rektifiyan, oskülatör ve normal eğriler tanımlanarak E_1^3 de spacelike, timelike ve null normal eğriler ele alınacaktır.

\mathbb{R} de bir açık aralık I olmak üzere, $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}$ diferensiyellenebilir dönüşümüne **eğri** denir. Bu bölümde α tarafından I üzerinde indirgenmiş metrik gözönünde bulundurulacaktır. Bu yeni yapıda yapılacak işlemler, E^3 te Öklidyen eğriler için yapılanlarla benzerdir. Bununla birlikte, E_1^3 de bir vektörün ayrı ayrı gözönünde bulundurulması gereken farklı causal karakterleri olabileceğinden dolayı E_1^3 de çalışmak biraz zorlaşmaktadır.

3.1 Parametrik Eğriler

Tanım 3.1.1. α , E_1^3 de bir eğri ve I da parametre aralığı olsun. α , $t \in I$ da spacelike tır (veya timelike veya lightlike) denir, eğer $\alpha'(t)$ hız vektörü spacelike (veya timelike veya lightlike) vektör ise.

Bir eğriye I üzerinde spacelike (veya timelike veya lightlike) denir eğer $\forall t \in I$ için $\alpha'(t)$ spacelike (veya timelike veya lightlike) ise [4].

E_1^3 de genel olarak her eğri I aralığının tamamında yukarıda verilen causal karakterlerden sadece birine ait olmak zorunda değildir. α eğrisinin $\alpha'(t)$ hız vektörü herhangi bir $t \in I$ için spacelike, timelike veya lightlike tır, fakat bu özellik bütün I aralığında aynı olmak zorunda değildir. Yani bir eğri için I aralığı üzerinde farklı noktalarda farklı causal karakterler söz konusu olabilir.

Örneğin;

$$\alpha(t) = (\cosh t, t^2, \sinh t)$$

eğrisini inceleyelim:

Bu eğri için,

$$\langle \alpha'(t), \alpha'(t) \rangle = \langle (\sinh t, 2t, \cosh t), (\sinh t, 2t, \cosh t) \rangle = 4t^2 - 1$$

dir. Böylece bu eğri, $(-\infty, -\frac{1}{2}) \cup (\frac{1}{2}, \infty)$ aralığında spacelike, $(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ aralığında timelike ve $\{-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\}$ noktalarında da lightlike tir.

Ayrıca eğer α , $t_0 \in I$ noktasında spacelike (veya timelike) ise α nın yine spacelike (veya timelike) karaktere sahip olduğu bir $(t_0 - \delta, t_0 + \delta)$ aralığı vardır. Yani eğer $t_0 \in I$ noktasında $\langle \alpha'(t_0), \alpha'(t_0) \rangle > 0$ (< 0) ise t_0 noktası civarında $\langle \alpha'(t_0), \alpha'(t_0) \rangle > 0$ (< 0) olacak şekilde bir aralığın varlığını süreklilik garanti eder.

Causal karakter tanımı şu şekilde de ifade edilebilir:

$\alpha : I \rightarrow E_1^3$ bir eğri olsun. Her $t \in I$ için

$$(d\alpha)_t : T_t I \cong \mathbb{R} \rightarrow T_{\alpha(t)} E_1^3 \cong \mathbb{R}^3$$

diferensiyel dönüşümünü gözönüne alalım, öyle ki bu dönüşüm

$$(d\alpha)_t(s) = \left. \frac{d}{du} \right|_{u=0} \alpha(t + su) = s\alpha'(t)$$

veya

$$(d\alpha)_t = \alpha'(t)$$

şeklinde verilsin.

$\mathbb{R} = T_t I$ tanjant uzayında α dan indirgenen metriği, yani

$$\alpha^* \langle \cdot, \cdot \rangle_t(m, n) = \langle (d\alpha)_t(m), (d\alpha)_t(n) \rangle = mn \langle \alpha'(t), \alpha'(t) \rangle$$

şeklinde tanımlı $\alpha^* \langle \cdot, \cdot \rangle$ metriğini gözönüne alalım. Eğer $T_t I$ daki doğal bazı, yani $\frac{\partial}{\partial t}$ yi alırsak,

$$\alpha^* \langle \cdot, \cdot \rangle_t \left(\frac{\partial}{\partial t}, \frac{\partial}{\partial t} \right) = \langle \alpha'(t), \alpha'(t) \rangle$$

olur, ki bu durumda $(T_t I, \alpha^* \langle \cdot, \cdot \rangle)$ bir-boyutlu bir metrik uzaydır.

Şimdi bu metrik uzay yardımıyla $\alpha(t)$ de α nın causal karakterini yeniden tanımlayalım:

Eğer bu uzay pozitif tanımlı veya $\alpha'(t) = 0$ ise α eğrisine $\alpha(t)$ noktasında spacelike; eğer uzay negatif tanımlı ise bu durumda α ya $\alpha(t)$ de timelike ve eğer uzay dejenere ise α ya $\alpha(t)$ de lightlike (null) tır denir.

Tanım 3.1.2. Eğer $t_0 \in I$ için $\alpha'(t_0) \neq 0$ ise α eğrisine $t_0 \in I$ da **regülerdir** denir. Bu şart her $t \in I$ için sağlanıyorsa α eğrisine regülerdir denir [18].

Şimdi, E_1^3 de bazı düzlemsel eğri örnekleri verelim, öyle ki bu eğriler \mathbb{R}^3 ün bir afin düzleminde bulunurlar.

$p, v \in \mathbb{R}^3$ ve $r > 0$ olsun.

1. $\alpha(t) = p + tv$ doğrusu, v ile aynı causal karaktere sahiptir.
2. $\alpha(t) = p + r(\cos t, \sin t, 0)$ çemberi, spacelike düzlemde bulunan bir spacelike eğridir.
3. $\alpha(t) = p + r(0, \sinh t, \cosh t)$ hiperbolü, timelike düzlemde bulunan bir spacelike eğridir.
4. $\alpha(t) = p + r(0, \cosh t, \sinh t)$ hiperbolü, spacelike düzlemde bulunan bir timelike eğridir.
5. $\alpha(t) = (t, t^2, t^2)$ parabolü, lightlike düzlemde bulunan bir spacelike eğridir.

Şimdi de düzlemsel olmayan eğri örneklerine bakalım:

1. $\alpha(t) = (\cos t, \sin t, at), a \neq 0$ eğrisi Öklidyen helistir. Ayrıca $a \in (-\infty, -1) \cup (1, \infty)$ aralığında timelike, $a \in (-1, 1)$ aralığında spacelike ve $a = \{-1, 1\}$ noktalarında da lightlike tır.

2. $\alpha(t) = (at, \sinh t, \cosh t), a \neq 0$ eğrisi bir spacelike eğridir.

3. $\alpha(t) = (at, \cosh t, \sinh t), a \neq 0$ eğrisi, $a \in (-\infty, -1) \cup (1, \infty)$ aralığında spacelike, $a \in (-1, 1)$ aralığında timelike ve $a = \{-1, 1\}$ noktalarında da lightlike tır.

Minkowski 3-uzayında bir eğrinin causal karakteri, eğrinin topolojisi ve regülerliği

gibi özellikleri üzerinde etkilidir.

İlk olarak şu önermeyi verelim:

Önerme 3.1.1. Her timelike veya lightlike eğri regülerdir [18].

İspat. Eğrinin timelike olduğunu farzedelim. x, y, z fonksiyonları I üzerinde diferensiyelenebilir fonksiyonlar olmak üzere,

$$\alpha(t) = (x(t), y(t), z(t))$$

olsun. Bu taktirde,

$$\langle \alpha'(t), \alpha'(t) \rangle = x'(t)^2 + y'(t)^2 - z'(t)^2 < 0$$

dır, özellikle $z'(t) \neq 0$ dır, yani α bir regüler eğridir.

Eğer eğri lightlike ise bu durumda da $z'(t) \neq 0$ dır. Aksi taktirde $x'(t) = y'(t) = 0$ ve $\alpha'(t) = 0$ olur. Bu ise, α nın spacelike olması anlamına gelir. O halde $z'(t) \neq 0$ dır. \square

İspatın sonucu olarak, bazı f ve g düzgün fonksiyonları için, her timelike veya lightlike eğri t_0 civarında lokal olarak,

$$\alpha(t) = (f(t), g(t), t), \quad t \in (t_0 - \delta, t_0 + \delta)$$

olarak yazılabilir.

Spacelike bir eğri için de aşağıdaki sonucu verebiliriz:

$t_0 \in I$ verilsin. Bu durumda,

$$\alpha(t) = (t, f(t), g(t)) \text{ veya } \alpha(t) = (f(t), t, g(t))$$

olacak şekilde $\delta > 0$ vardır.

Causal karakterle ilgili bir diğer sonuç şudur:

Teorem 3.1.1. α, E_1^3 de bir π afin düzleminde bulunan kapalı bir eğri olsun.

1. α spacelike ise, bu taktirde π bir spacelike düzlemdir.
2. α timelike veya lightlike değildir [18].

İspat. 1. Genelliğin dışına çıkmadan, π düzleminin bir vektör düzlemi olduğunu farzedelim. π düzlemini $\pi = Sp\{e_2, e_3\}$ timelike düzlemi olarak alalım. Bu taktirde,

$$\alpha(t) = (0, y(t), z(t))$$

olarak alınabilir. $y : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ile verilen dönüşüm en az bir t_0 da bir maksimuma sahiptir. Bu durumda $y'(t_0) = 0$ dır ve $\alpha'(t_0) = (0, 0, z'(t_0))$ bir timelike vektördür.

π düzlemini $\pi = Sp\{e_1, e_2 + e_3\}$ lightlike düzlemi olarak alalım. Bu taktirde,

$$\alpha(t) = (x(t), y(t), y(t))$$

olarak alınabilir. t_0 , $x(t)$ fonksiyonunun maksimumu olsun. Bu durumda $\alpha'(t_0) = (0, y'(t_0), y'(t_0))$ bir lightlike vektördür.

Sonuç olarak α spacelike ise π bir spacelike düzlemdir.

2. α bir timelike eğri olsun. Bu durumda düzlem timelike olmalıdır, çünkü spacelike veya lightlike düzlemlerde timelike vektörler yoktur. Eğer $\pi = Sp\{e_2, e_3\}$ timelike düzlemi ve t_0 , $z(t)$ fonksiyonunun bir maksimumu ise $\alpha'(t_0) = (0, y'(t_0), 0)$ dır. Dolayısıyla bu vektör spacelike tır. Bu bir çelişkidir.

Benzer düşünce lightlike eğriler için de yapılabilir. □

Dolayısıyla şu sonuca sahip oluruz:

Sonuç 3.1.1. E_1^3 de timelike veya lightlike kapalı eğriler yoktur.

Şimdi, spacelike olmayan düzlemlerde kapalı olmayan spacelike eğrilerin var olduğunu görelim:

Bir örnek olarak;

$$\alpha(s) = (0, \sinh s, \cosh s)$$

eğrisini gözönüne alalım. Bu eğri, $Sp\{e_2, e_3\}$ timelike düzleminde bir spacelike eğridir. Benzer şekilde

$$\alpha(s) = (s, s^2, s^2)$$

eğrisi $Sp\{e_1, e_2 + e_3\}$ lightlike düzleminde yer alan bir spacelike eğridir.

Bu bölümde, bundan sonra bütün eğrilerin regüler oldukları farzedilecektir.

Lemma 3.1.1. α spacelike veya timelike bir eğri olsun. Bu taktirde $\|\alpha'(s)\| = 1$ olacak şekilde bir parametre değişimi vardır. Gerçekten, verilen bir $t_0 \in I$ için $\delta, \varepsilon > 0$ ve bir $\Phi : (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow (t_0 - \delta, t_0 + \delta)$ diffeomorfizmi vardır, öyle ki $\beta = \alpha \circ \Phi$ ile verilen $\beta : (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow E_1^3$ eğrisi $\|\beta'(s)\| = 1$ özelliğini sağlar. Böyle bir durumda, eğri yay uzunluğu ile parametrelendirilmiştir denir [18].

İspat. İspatı timelike eğriler için yapacağız. $S : I \rightarrow \mathbb{R}$ dönüşümünü,

$$S(t) = - \int_{t_0}^t \langle \alpha'(u), \alpha'(u) \rangle du$$

olarak tanımlayalım.

$S'(t_0) > 0$ olduğundan S fonksiyonu $t = t_0$ civarında bir lokal diffeomorfizmdir. Çünkü $S(t_0) \neq 0$ için $\delta, \varepsilon > 0$ vardır, öyle ki $S : (t_0 - \delta, t_0 + \delta) \rightarrow (-\varepsilon, \varepsilon)$ bir diffeomorfizmdir. Aradığımız dönüşüm, $\Phi = S^{-1}$ dir. \square

Lightlike eğriler için, $\alpha'(t)$ vektörü lightlike tır ve yay parametresi ile yeniden parametrelendirmek anlamlı değildir. Bununla birlikte, $\langle \alpha'(t), \alpha'(t) \rangle = 0$ denkleminin diferensiyeli alınırsa $\langle \alpha''(t), \alpha'(t) \rangle = 0$ olur. $\alpha''(t) \neq 0$ olduğunu kabul edelim. Bu durumda, $\alpha''(t)$ bir spacelike vektördür ve α yı $\|\alpha''(t)\| = 1$ olarak parametrelendirebiliriz. Aşağıdaki lemma bunun yapılabileceğini iddia eder:

Lemma 3.1.2. α, E_1^3 de bir lightlike eğri olsun. $\beta(s) = \alpha(\Phi(s))$ ile verilen α nın yeniden parametrelendirmesi $\|\beta''(s)\| = 1$ yoluyla elde edilecek şekilde vardır. β ya α nın pseudo yay parametresi ile parametrelendirilmesi denir [18].

İspat. Herhangi bir Φ fonksiyonu yardımıyla $\beta(s) = \alpha(\Phi(s))$ yazalım. 2 kez diferensiyelle

$$\beta''(s) = \Phi''(s)\alpha'(t) + \Phi'(s)^2\alpha''(t)$$

ye ulaşılır. Bu durumda,

$$\langle \beta''(s), \beta''(s) \rangle = \Phi'(s)^4 \|\alpha''(t)\|^2$$

dir. Böylece Φ , aşağıdaki diferensiyel denklemin çözümüdür:

$$\Phi'(s) = \frac{1}{\sqrt{\|\alpha''(\Phi(s))\|}}, \quad \Phi(0) = t_0.$$

□

3.2 Eğrilik ve Burulma

Bu kısımda E_1^3 de verilen bir eğrinin eğrilik ve burulması incelenecektir. Regüler bir α eğrisi verilsin. Eğrinin herhangi bir noktası için, eğrinin geometrisini belirleyen ortonormal bazı belirlemek istiyoruz. Bu bazı Frenet üç ayaklısı ile vereceğiz. Eğri boyunca bu bazın değişmesi bize, eğrinin esas uzayda nasıl değişime uğradığı hakkında bilgi verecektir.

Biliyoruz ki eğrilerin en basit yapısı doğrulardır. Eğer $p \in E_1^3$ ve $v \neq 0$ ise p noktasında v doğrultusu boyunca doğru, $\alpha(t) = p + tv$ şeklinde parametrelendirilir. Bu takdirde $\alpha''(t) = 0$ dır.

Tersine, eğer α her s için $\alpha''(s) = 0$ olacak şekilde bir regüler eğri ise, iki kez integralle $\alpha'(s) = v$ ve $v \neq 0$ için $\alpha(s) = sv + p$ olur. Bu demektir ki α , p noktasından geçen ve doğrultusu v olan parametrik bir doğrudur. Verilen bir doğrunun (\mathbb{R}^3 ün bir kümesi olarak) başka parametrelendirmelerle de parametrelendirilebileceğini görelim. Örneğin, $\alpha(s) = s^3 E_1, \langle E_1 \rangle$ doğrusunun bir parametrelendirilmesidir, fakat $\alpha'' = 0$ ı sağlamaz.

Burada, bir α eğrisinin yay parametresi veya pseudo yay parametresi ile parametrelendirildiği gözönünde tutulacaktır. $T(s) = \alpha'(s)$ vektörü α eğrisinin s noktasındaki **teğet vektörü** olarak adlandırılır. $\langle T(s), T'(s) \rangle = 0$ dır. Burada $T'(s) \neq 0$ olmak üzere $T'(s)$ nin herbir s için $T(s)$ ile orantılı olmadığı kabul edilecektir. Bu durum, eğrinin bir doğru olmamasını garanti eder.

Şimdi eğrinin timelike, spacelike ve lightlike olması durumlarını gözönüne alalım:

3.2.1 Eğrinin timelike olması hali:

α nın bir timelike eğri olduğunu kabul edelim. Bu taktirde, $T'(s) \neq 0$, $T(s)$ ile lineer bağımsız bir spacelike vektördür. s noktasında α eğrisinin eğriliği, $\kappa(s) = \|T'(s)\|$ dir. $N(s)$ **asli normal vektörü** de,

$$N(s) = \frac{T'(s)}{\kappa(s)} = \frac{\alpha''(s)}{\|\alpha''(s)\|}$$

dir. Ayrıca $\kappa(s) = \langle T'(s), N(s) \rangle$ dir.

$$B(s) = T(s) \times N(s)$$

şeklindeki $B(s)$ vektörüne **binormal vektör** denir. $B(s)$ vektörü, bir spacelike birim vektördür. Her s için α nın Frenet üç ayaklısı diye adlandırılan $\{T, N, B\}$, E_1^3 in bir ortonormal bazıdır.

α nın s deki burulması, $\tau(s) = \langle N'(s), B(s) \rangle$ şeklinde tanımlanır. Bu durum için Frenet denklemleri matris formunda,

$$\begin{bmatrix} T' \\ N' \\ B' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \kappa & 0 \\ \kappa & 0 & \tau \\ 0 & -\tau & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T \\ N \\ B \end{bmatrix} \quad (3.2.1)$$

şeklinde ifade edilir.

3.2.2 Eğrinin spacelike olması hali:

α bir spacelike eğri olsun. $T'(s)$ nin causal karakterine bağlı olarak 3 olasılık vardır:

1. $T'(s)$ vektörü spacelike olsun:

Yine $\kappa(s) = \|T'(s)\|$,

$$N(s) = \frac{T'(s)}{\kappa(s)}$$

ve

$$B(s) = T(s) \times N(s)$$

dir. Bu durum için Frenet denklemleri,

$$\begin{bmatrix} T' \\ N' \\ B' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \kappa & 0 \\ -\kappa & 0 & \tau \\ 0 & \tau & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T \\ N \\ B \end{bmatrix} \quad (3.2.2)$$

şeklindedir. α nın burulması, $\tau = -\langle N', B \rangle$ dir.

2. $T'(s)$ vektörü timelike olsun:

α nın eğriliği $\kappa(s) = \sqrt{-\langle T'(s), T'(s) \rangle}$ ve asli normal vektörü de

$$N(s) = \frac{T'(s)}{\kappa(s)}$$

dir.

$$B(s) = T(s) \times N(s)$$

binormal vektörü, bir spacelike vektördür. Bu durumda Frenet denklemleri,

$$\begin{bmatrix} T' \\ N' \\ B' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \kappa & 0 \\ \kappa & 0 & \tau \\ 0 & \tau & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T \\ N \\ B \end{bmatrix} \quad (3.2.3)$$

dir. α nın burulması, $\tau = \langle N', B \rangle$ dir.

3. Her s için $T'(s)$ vektörü lightlike ($T'(s) \neq 0$ ve $T(s)$ ile orantılı değil) olsun:

$T(s)$ ile lineer bağımsız olan asli normal vektör,

$$N(s) = T'(s)$$

şeklinde tanımlanır. B birim lightlike vektör olsun, öyle ki

$$\langle N(s), B(s) \rangle = 1$$

dir ve $B(s)$, $T(s)$ ye ortogondur. $B(s)$ vektörü, α nın s deki binormal vektörüdür. Frenet denklemleri,

$$\begin{bmatrix} T' \\ N' \\ B' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & \tau & 0 \\ -1 & 0 & -\tau \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T \\ N \\ B \end{bmatrix} \quad (3.2.4)$$

dir. τ fonksiyonuna α nın burulması denir.

3.2.3 Eğrinin lightlike olması hali:

α , pseudo yay parametresi ile parametrelendirilmiş bir lightlike eğri, yani α'' bir spacelike birim vektör olsun. $T = \alpha'$ teğet vektörünü gözönüne alalım. Buna göre

$$N(s) = T'(s)$$

şeklinde asli normal vektörü ve

$$\langle T(s), B(s) \rangle = 1$$

olacak şekilde $N(s)$ ye ortogonal birim lightlike $B(s)$ binormal vektörünü tanımlayalım.

Bu taktirde Frenet denklemleri,

$$\begin{bmatrix} T' \\ N' \\ B' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ \tau & 0 & -1 \\ 0 & -\tau & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T \\ N \\ B \end{bmatrix} \quad (3.2.5)$$

dir. Yine τ fonksiyonu α nın burulmasıdır. Belirtelim ki, T' ivme vektörü lightlike olan α spacelike eğrisinin eğriliği tanımlanamaz.

Öklid uzayındaki yapıya benzer olarak Minkowski 3-uzayında da yay parametresi ile parametrelendirilmemiş bir eğrinin eğrilik ve burulma fonksiyonları için birer formül vardır. $\beta = \alpha \circ \Phi$ yay uzunluğu ile parametrelendirilmiş bir eğri olsun. $\kappa_\alpha(t) = \kappa_\beta \circ \Phi^{-1}$ ve $\tau_\alpha(t) = \tau_\beta \circ \Phi^{-1}$ dir. O halde, eğriyi yeniden parametrelendirmeye gerek yoktur. Örneğin; timelike eğriler için,

$$\kappa_\alpha(t) = \frac{\|\alpha'(t) \times \alpha''(t)\|}{\|\alpha'(t)\|^3} = \frac{\|\alpha'(t) \times \alpha''(t)\|}{(-\langle \alpha'(t), \alpha'(t) \rangle)^{\frac{3}{2}}}$$

ve

$$\tau(t) = \frac{\det(\alpha'(t), \alpha''(t), \alpha'''(t))}{\|\alpha'(t) \times \alpha''(t)\|^2}$$

dir.

Teorem 3.2.1. $\kappa : I \rightarrow \mathbb{R}$ bir düzgün fonksiyon ve π bir timelike düzlem olsun. Bu durumda, π düzleminde κ eğriliğine sahip bir tek spacelike eğri vardır. Benzer şekilde, κ eğrilik fonksiyonu için π düzleminde bir tek timelike eğri de vardır [18].

İspat. Genelliği bozmaksızın $\pi = Sp\{e_1, e_3\}$ ve $P_0 = (0, 0, 0)$ olduğunu kabul edelim.

1. $\alpha(0) = (0, 0, 0)$, $\alpha'(0) = e_1$ ve $\kappa_\alpha(s) = \kappa(s)$ olacak şekildeki α spacelike eğrisini bulacağız.

$\theta : I \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu

$$\theta(s) = \int_0^s \kappa(t) dt$$

ve

$$x(s) = \int_0^s \cosh \theta(t) dt, \quad z(s) = \int_0^s \sinh \theta(t) dt$$

olsun. Bu durumda $\alpha(s) = (x(s), 0, z(s))$ aranan eğridir. Burada, $\alpha(0) = (0, 0, 0)$ dir.

$$\alpha'(s) = (\cosh \theta(s), 0, \sinh \theta(s))$$

$$\alpha''(s) = \kappa(s)(\sinh \theta(s), 0, \cosh \theta(s))$$

olmak üzere, α eğrisi yay parametresi ile parametrelendirilmiş,

$$\alpha'(0) = (\cosh(0), 0, \sinh(0)) = (1, 0, 0)$$

olacak şekilde bir spacelike eğridir. Bundan dolayı α nın $\kappa(s)$ eğriliği $\|\alpha''(s)\|$ dir.

2. Başlangıç hızı e_3 olan bir timelike eğri bulmak için,

$$\theta(t) = \int_0^t \kappa(t) dt$$

$$x(s) = \int_0^s \sinh \theta(t) dt, \quad z(s) = \int_0^s \cosh \theta(t) dt$$

almak yeterli olacaktır. □

3.3 Sabit Eğrilikli Düzlemsel Eğriler

Burada E_1^3 in bir afin düzleminde yer alan düzlemsel eğriler gözönünde bulundurulacaktır. Bir katı hareketten sonra bu düzlemin bir vektör düzlemi olduğu kabul edilebilir.

Bu kısımda, sabit eğrilikli düzlemsel eğriler çalışılacaktır. Önce, Öklid uzayında eğriler için sağlanan bir sonuç Lorentzian uzaydaki eğriler için düşünülecektir. Eğer α , E^2 de yay parametresi ile parametrelendirilmiş bir düzlemsel eğri ve v sabit bir doğrultu ise $T(s)$ ile v arasındaki $\theta(s)$ açısı, $\cos(\theta(s)) = \langle T(s), v \rangle$ ile verilir.

Bu durumu Lorentzian yapıya genişletmek, açı kavramından bahsetmek gerekeceğinden dolayı mümkün değildir. Bu, sadece timelike eğriler için mümkündür. Öncelikle şu teoremi verelim:

Teorem 3.3.1. a ve b , E_1^2 de future pointing timelike iki birim vektör olsunlar. θ , a dan b ye hiperbolik açı ise,

$$\cosh \theta = - \langle a, b \rangle$$

dir [10].

İspat. $a = (a_1, a_2)$, $b = (b_1, b_2)$ olmak üzere θ , a dan b ye açı ise,

$$\begin{bmatrix} \cosh \theta & \sinh \theta \\ \sinh \theta & \cosh \theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix}$$

dir. Buradan,

$$a_1 \cosh \theta + a_2 \sinh \theta = b_1$$

$$a_1 \sinh \theta + a_2 \cosh \theta = b_2$$

bulunur.

$$\begin{aligned} \langle a, b \rangle &= \langle (a_1, a_2), (b_1, b_2) \rangle \\ &= \langle (a_1, a_2), (a_1 \cosh \theta + a_2 \sinh \theta, a_1 \sinh \theta + a_2 \cosh \theta) \rangle \\ &= (a_1^2 - a_2^2) \cosh \theta \\ &= \|a\|^2 \cosh \theta \\ &= - \cosh \theta \end{aligned}$$

elde edilir. □

Teorem 3.3.2. α , yay parametresi ile parametrelendirilmiş ve timelike düzlemde kalan bir timelike eğri olmak üzere, v future pointing düzlemin sabit bir birim timelike vektörü ve $\theta(s)$ de $T(s)$ ile v arasındaki hiperbolik açı olsun. Bu taktirde,

$$\kappa(s) = |\theta'(s)|$$

dir [18].

İspat. Genelliğin dışına çıkmadan, $\pi = Sp\{e_2, e_3\}$ ve $v = (0, v_2, v_3), v_3 \neq 0$ olsun. $-\cosh(\theta(s)) = \langle T(s), v \rangle$ olduğunu hatırlayalım. Bu ifadenin diferensiyeli alınırsa,

$$-\theta'(s) \sinh \theta(s) = \kappa(s) \langle N(s), v \rangle$$

elde edilir. $\{N, T\}$, π nin bir bazı iken,

$$v = \langle v, N(s) \rangle N(s) - \langle v, T(s) \rangle T(s)$$

olarak yazılabilir. Bu taktirde,

$$-1 = \langle v, N(s) \rangle^2 - \langle v, T(s) \rangle^2 = \langle v, N(s) \rangle^2 - \cosh(\theta(s))^2$$

dir, yani,

$$\langle v, N(s) \rangle = \pm \sinh(\theta(s))$$

dir. Bu nedenle $\kappa(s) = |\theta'(s)|$ dir. □

Bu sonuç gösterildikten sonra, artık sabit eğrilikli düzlemsel eğriler çalışılabilir. Burada, sabit eğriliğin 0 olmadığı varsayılacaktır (eğer 0 olursa, α bir doğru olur).

Bu tip eğrilerin çalışılması, eğrinin farklı causal karakterleri için farklı olacaktır.

3.3.1 Eğrinin timelike olması durumu:

Eğri timelike olduğundan, eğriyi kapsayan düzlem timelike olmalıdır. Bu nedenle, $\pi = Sp\{e_2, e_3\}$ ve dolayısıyla y ve z düzgün fonksiyonlar olmak üzere

$$\alpha(s) = y(s)e_2 + z(s)e_3$$

olduğunu varsayalım. Eğri yay parametresi ile parametrelendirildiğinden dolayı

$$y'(s)^2 - z'(s)^2 = -1$$

dir. Bu durumda,

$$y'(s) = \sinh(\theta(s)), z'(s) = \cosh(\theta(s)),$$

olarak alınabilir. Böylece, α nın eğriliği

$$\kappa(s) = \|\alpha''(s)\| = |\theta'(s)| := a$$

olarak hesaplanır.

Dolayısıyla $\theta(s) = as + b$ olarak alınır,

$$y' = \sinh(as + b), z' = \cosh(as + b)$$

olur. Bu durumda,

$$\alpha(s) = \frac{1}{a}(\cosh(as + b)e_2 + \sinh(as + b)e_3)$$

olarak elde edilir. Bu eğri, π düzleminde bir Öklidyen hiperboldür.

3.3.2 Eğrinin spacelike olması durumu:

Sabit eğrilikli düzlemsel spacelike eğrileri araştıralım:

a) Eğrinin, $\pi = Sp\{e_1, e_2\}$ spacelike düzleminde yattığını varsayarsak, Lorentzian metrikle π den indirgenen metrik, Öklidyen metrikle bağdaşır. Bu durumda α bir Öklidyen çemberdir.

b) Eğrinin yattığı düzlem $\pi = Sp\{e_1, e_3\}$ ile verilen timelike düzlem olsun. Bu durumda yay parametresi ile verilen α spacelike eğrisi,

$$\alpha(s) = (x(s), 0, z(s)), x'(s)^2 - z'(s)^2 = 1$$

olarak yazılabilir. Böylece,

$$x'(s) = \cosh(\theta(s)), z' = \sinh(\theta(s))$$

olacak şekilde bir θ fonksiyonu vardır. Timelike durumdakiyle benzer düşünce kullanılırsa,

$$\begin{aligned}\alpha(s) = (x(s), 0, z(s)) &= \left(\frac{1}{a} \sinh(as + b), 0, \frac{1}{a} \cosh(as + b)\right) \\ &= \frac{1}{a} (\sinh(as + b), 0, \cosh(as + b))\end{aligned}$$

olur. Bu eğri, Öklidyen hiperboldür.

c) Düzlemin lightlike olduğunu farzedelim. Bu durumda, eğrinin eğriliği kavramı yoktur. Bir katı hareketten sonra farzedelim ki, eğriyi ihtiva eden düzlem $\pi = Sp\{e_2 - e_3 = 0\}$ dır. Böylece eğri,

$$\alpha(s) = (x(s), y(s), y(s))$$

şeklinde yazılabilir. α , yay parametresi ile parametrelendirilen bir spacelike eğri ise, bu taktirde $x'(s)^2 = 1$ dir. $x(s) = s$ olduğunu kabul edelim. Bu durumda $T(s) = (1, y'(s), y'(s))$ dir. Biliyoruz ki $T'(s)$ bir lightlike vektördür. Düzlemde bir tek lightlike doğrultu var olduğu için, bu durumda $T'(s)$ vektörü sabit bir vektörle örneğin $v = (0, 1, 1)$ vektörü ile orantılıdır. α eğrisine *sabit eğriliklidir* denir, eğer $\tau = 0$ ise. Sonuç olarak, $T'(s) = v$ dir. İntegrasyonla, w bir spacelike birim vektör olmak üzere,

$$\alpha(s) = p_0 + sw + \frac{s^2}{2}(e_2 + e_3)$$

elde edilir.

$\langle w, w \rangle = 1$ için w vektörü $w = e_1 + c(e_2 + e_3)$ şeklinde yazılabilir. Bu taktirde yeniden parametrelendirmeye,

$$\alpha(s) = p_0 + se_1 + \left(cs + \frac{s^2}{2}\right)(e_2 + e_3)$$

olur ki bu, π düzleminde ekseni lightlike doğrultuya paralel olan bir paraboldür.

3.3.3 Eğrinin lightlike olması durumu:

α , π düzleminde kalan bir lightlike eğri olsun. π düzlemi lightlike veya timelike olabilir. Bu durumları inceleyelim:

a) Düzlem lightlike olsun. $\pi = Sp\{e_1, e_2 + e_3\}$ olduğunu kabul edelim. $\alpha'(s)$ lightlike ve sadece bir tek lightlike doğrultu var olduğundan f diferensiyellenebilir fonksiyon olmak üzere

$$\alpha'(s) = f(s)(e_2 + e_3),$$

dir. Böyle bir durumda, α bir doğrudur. Biliyoruz ki, bu durumda Frenet üç ayaklısından bahsedilemez.

b) Düzlem timelike olsun. $\pi = Sp\{e_2, e_3\}$ alabiliriz. Bu durumda lineer bağımsız olacak şekilde $e_2 + e_3$ ve $e_2 - e_3$ gibi sadece iki lightlike doğrultu vardır.

$\alpha'(s) = f(s)(e_2 \pm e_3)$ alınarak, $v = 0$ vektörünün lightlike olmaması gerçeğiyle birlikte I da ya $\alpha'(s) = f(s)(e_2 + e_3)$ ya da $\alpha'(s) = f(s)(e_2 - e_3)$ dir. Eğri yine bir doğrudur.

α spacelike ve N lightlike iken benzer düşünceyle yaklaşırsak, denilebilir ki, I da $\tau = 0$ ise eğri sabit eğrilige sahiptir. Bu durumda, $N'(s) = 0$ dır. İntegrasyonla,

$\alpha'(s) = sv + w$ elde edilir, burada $N(s) = v$ bir spacelike vektördür. Fakat $\langle T, N \rangle = 0$ iken bu durumda $\forall s$ için $s + \langle v, w \rangle = 0$ dir. Bu ise bir çelişkidir.

O halde tek olasılık $v = 0$ dır, yani α bir doğrudur.

Teorem 3.3.3. E_1^3 in bir katı hareketinden sonra, sıfırdan farklı sabit eğrilikli düzlemsel eğriler sadece Öklidyen çemberler, hiperboller ve parabolldir [18].

3.4 E_1^3 de Helisler ve Bertrand Eğriler

Öklid uzayında bir helis, teğet doğruları sabit bir doğrultuyla sabit açı yapan bir eğridir. Bu doğrultuya helisin ekseni denir. Biliyoruz ki, bir eğri helistir ancak ve ancak $\frac{\tau}{\kappa}$ bir sabit fonksiyondur. Örneğin, düzlemsel eğriler helislerdir.

Sabit eğrilikli ve burulmalı bir helise **silindirik helis** denir.

Burada, bu kavram Lorentzian yapıya genişletilecektir. Vektörler arasındaki açı kavramı ile ilgili konuşmamamıza rağmen, sabit bir v doğrultusu için sabit olan $\langle T(s), v \rangle$ fonksiyonu gözönüne alınacaktır.

Tanım 3.4.1. E_1^3 de bir **helis**, en az bir $v \neq 0$ sabit vektörü için $\langle T(s), v \rangle$ sabit bir fonksiyon

olacak şekilde bir regüler eğridir. v doğrultusuna paralel olan doğruya **helisin eksen**i denir [18].

Burada eğrinin düzlemsel olmadığı gözönünde bulundurulacaktır.

Teorem 3.4.1. *Eğer bir (spacelike veya timelike) α eğrisi E_1^3 de bir helis ise bu durumda, $\frac{\tau}{\kappa}$ sabit bir fonksiyondur [18].*

İspat. α eğrisinin spacelike veya timelike olması durumlarını ayrı ayrı ele alalım:

★ α bir spacelike eğri olsun. Bu durumda 3 olasılık söz konusudur:

► T' bir spacelike vektör olsun:

α bir helis ise $\langle T(s), v \rangle = sbt$ dir. Bu ifadenin s ye göre diferensiyeli alınır, $\kappa(s) \langle N(s), v \rangle = 0$ olur. Bu taktirde $\langle N(s), v \rangle = 0$ dır ve dolayısıyla $v = aT + bB$ olacak şekilde a ve b fonksiyonları vardır. Bu ifadenin s ye göre diferensiyeli alınır ve (3.2.2) Frenet denklemleri kullanılırsa

$$\begin{aligned} 0 &= a'T + aT' + b'B + bB' \\ &= a'T + a\kappa N + b'B + b\tau N \\ &= a'T + b'B + (a\kappa + b\tau)N \end{aligned}$$

elde edilir. Buradan $a' = b' = 0$ ve $a\kappa + b\tau = 0$ bulunur. Bu da, bu durum için ispatı tamamlar.

► T' bir timelike vektör ise düşünce yine benzerdir.

► T' bir lightlike vektör olsun:

Aynı düşünceyle

$$0 = (a' - b)T + aN + (b' - \tau b)B$$

ye ulaşılır ki bu da $a = b = 0$, yani $v = 0$ demektir. Bu bir çelişkidir.

★ α nın timelike olması durumu, α nın ve N nin her ikisinin de spacelike olması durumuyla benzerdir. □

Şimdi bu teoremin tersini ifade edelim:

Teorem 3.4.2. α , normali lightlike olmayan bir spacelike veya timelike eğri olsun. Eğer $\frac{\tau}{\kappa}$ sabit ise, bu takdirde α bir helistir [18].

İspat. Farzedelim ki $\tau = c\kappa$, $c \in \mathbb{R}$ dir. α eğrisinin timelike olması durumunu inceleyelim.

$$v(s) = cT(s) + B(s)$$

ile verilen vektörel fonksiyonu tanımlayalım. Bu ifadenin diferensiyeli alınırsa,

$$\begin{aligned} v'(s) &= c'T(s) + cT'(s) + B'(s) \\ &= c\kappa N - \tau N \\ &= N(c\kappa - \tau) = 0 \end{aligned}$$

yani, $v' = 0$ elde edilir ki bu da v nin sabit fonksiyon olduğunu gösterir. Ayrıca $\langle T(s), v \rangle = c = sbt$ dir ve bu da α eğrisinin helis olduğunu ispatlar. \square

Normal vektörü lightlike olan α eğrisinin spacelike veya lightlike olması halinde ne olacağı düşünülebilir. Birinci durumu düşünelim. Yani, α asli normali lightlike olan bir spacelike eğri olsun. Bu durumda herhangi bir düzlemsel eğrinin helis olduğunu gösterelim:

$\pi = Sp\{e_1, e_2 + e_3\}$ düzlemini alalım; $\alpha'(s)$ bu düzleme ait ve $e_2 + e_3 \in \pi^\perp$ olduğundan, bu durumda $\langle T(s), e_2 + e_3 \rangle = 0$ dir. Diğer taraftan eğer α eğrisi $\langle T(s), v \rangle = a$ denklemini sağlarsa, Frenet denklemleri kullanılarak v vektörü,

$$v = aT(s) + b(s)N(s)$$

şeklinde yazılabilir. Diferensiyel alınarak

$$b' + b\tau + a = 0$$

elde edilir. Şimdi normal vektörü lightlike causal karaktere sahip olan herhangi bir spacelike eğrinin bir helis olduğunu görelim:

a bir sabit ve $b = b(s)$, $b'(s) + b(s)\tau(s) + a = 0$ diferensiyel denkleminin bir çözümü olsun.

$$v = aT(s) + b(s)N(s)$$

vektörel fonksiyonunu tanımlayalım. Bu fonksiyon,

$$v'(s) = (b' + b\tau + a)N = 0$$

olduğundan sabittir. Üstelik, $\langle T(s), v \rangle = a$ dır ve dolayısıyla α bir helistir. Bu durumda, v vektörlerinin kümesi sonsuz elemana sahiptir.

Burada önce Öklidyen anlamda Bertrand eğrisinin tanımını hatırlayalım. $M, N \subset E^3$ eğrileri, sırasıyla, (I, α) , (I, β) koordinat komşuluklarıyla verilsin. $s \in I$ ya karşılık gelen $\alpha(s) \in M$ ve $\beta(s) \in N$ noktalarında M ve N nin

$$\{V_1(s), V_2(s), V_3(s)\}, \{V_1^*(s), V_2^*(s), V_3^*(s)\}$$

Frenet üç ayaklıları verildiğinde $\forall s \in I$ için

$$\{V_2(s), V_2^*(s)\}$$

lineer bağımlı ise (M, N) eğri ikilisine **Bertrand çifti** denir [12].

Bu tanıma göre, düzlemsel eğriler Bertrand dır. Bunu görmek için, orjinal eğriye paralel eğriler almak yeterli olacaktır.

Eğer $\tau \neq 0$ ise, bir Bertrand eğrisinin karakterizasyonu şu şekildedir:

α eğrisi bir Bertrand eğrisidir ancak ve ancak herhangi A ve B sayıları için $A\kappa + B\tau = 1$ dir (eğer $A\kappa + B\tau = 0$ ise bir helis elde edilir).

Bertrand eğrilere örnek olarak, eğriliği ve burulması birer sabit fonksiyon olan silindirik helisleri alabiliriz.

E_1^3 Minkowski 3-uzayında Bertrand eğri tanımı, Öklid uzayındakiyle aynıdır.

Timelike eğriler için aşağıdaki teoremi verelim:

Teorem 3.4.3. α, E_1^3 de bir timelike eğri olsun. Bu durumda, α bir Bertrand eğrisidir ancak ve ancak $A\kappa + B\tau = 1$ olacak şekilde A ve B gibi iki sabit vardır [18].

İspat. α bir Bertrand eğri ve β da α nın eş eğrisi olsun. Bu durumda β ,

$$\beta(s) = \alpha(s) + \lambda(s)N(s)$$

şeklinde parametrelendirilebilir. Frenet denklemleri kullanılırsa,

$$\beta'(s) = (1 + \lambda\kappa)T + \lambda'N + \lambda\tau B$$

olur. Böylece, $\lambda' = 0$ yani λ nın bir sabit fonksiyon olduğu sonucuna ulaşılır. β nın lightlike eğri olduğunu varsayalım. Bu taktirde, $1 + \lambda\kappa = \pm\lambda\tau$ dur. Şimdi de β nın non-dejenere, örneğin spacelike bir eğri olduğunu kabul edelim. β nın normal doğrultusunu bulalım. Bunun için β yı $\gamma(s) = \beta(\Phi(s))$ olacak şekilde yay parametresi ile parametrelendirelim. Bu taktirde β nın normal doğrultusu $\gamma'(s)$ ile verilir. Buradan, türev alınırsa

$$\gamma'(s) = \Phi'(s)\beta'(t), \quad t = \Phi(s)$$

ve

$$\gamma''(s) = \Phi''(s)\beta'(t) + \Phi'^2(s)\beta''(t)$$

olur. Burada

$$\Phi'^2 = \frac{1}{\langle \beta', \beta' \rangle} \quad \text{ve} \quad \Phi'' = -\frac{\langle \beta'', \beta' \rangle}{\langle \beta', \beta' \rangle^2}$$

olduğu açıktır.

Bu taktirde, α nın Frenet üç ayaklısı cinsinden γ'' nün bir ifadesi elde edilir. Burada β nın normal doğrultusu γ'' doğrultusunda olduğundan T ve B nin katsayıları sıfır olacaktır. O halde,

$$(1 + \lambda\kappa) \frac{\lambda\kappa'(1 + \lambda\kappa) - \lambda^2\tau\tau'}{[\lambda^2\tau^2 - (1 + \lambda\kappa)^2]^2} + \frac{\lambda\kappa'}{\lambda^2\tau^2 - (1 + \lambda\kappa)^2} = 0$$

$$\lambda\tau \frac{\lambda\kappa'(1 + \lambda\kappa) - \lambda^2\tau\tau'}{[\lambda^2\tau^2 - (1 + \lambda\kappa)^2]^2} + \lambda\tau' \frac{\lambda\kappa'}{\lambda^2\tau^2 - (1 + \lambda\kappa)^2} = 0$$

veya

$$\lambda\tau(\lambda\kappa'\tau - \tau' - \lambda\kappa\tau') = 0$$

$$\lambda(1 + \lambda\kappa)(\lambda\kappa'\tau - \tau' - \lambda\kappa\tau') = 0$$

dır. Eğer en az bir noktada $\tau = 0$ ise α bir düzlemsel eğridir.

Eğer $\tau \neq 0$ ise bu taktirde,

$$\lambda\kappa'\tau - \tau' - \lambda\kappa\tau' = 0$$

ve bu da

$$\lambda\left(\frac{\kappa}{\tau}\right)' = -\left(\frac{1}{\tau}\right)'$$

demektir. O halde,

$$\frac{\lambda\kappa}{\tau} + \frac{1}{\tau} = b$$

olacak şekilde $b \in \mathbb{R}$ vardır.

$-\lambda = A$ ve $b = B$ alınırsa ispat tamamlanır.

Tersine, $A\kappa + B\tau = 1$ olacak şekilde A ve B gibi iki sabit varsa,

$$\beta(s) = \alpha(s) + AN(s)$$

eğrisini tanımlamak yeterli olacaktır. Bu taktirde, β nın α nın eş eğrisi olduğu açıktır. \square

3.5 E_1^3 Minkowski 3-Uzayında Spacelike Normal Eğriler

E^3 Öklid uzayında, diferensiyellenebilir bir $\alpha : I \subset \mathbb{R} \rightarrow E^3$ eğrisinin herhangi bir $\alpha(s)$ noktasında düzlemler, $\{T, N\}$, $\{T, B\}$ ve $\{N, B\}$ tarafından gerilir ve bu düzlemler sırasıyla, oskülatör düzlem, rektifiyan düzlem ve normal düzlem diye adlandırılırlar. Yer vektörleri sürekli rektifiyan düzlemde yatan $\alpha : I \subset \mathbb{R} \rightarrow E^3$ eğrilerine kısaca **rektifiyan eğriler** denir [5]. Benzer şekilde yer vektörleri sürekli oskülatör düzlemde yatan α eğrilerine kısaca **oskülatör eğriler** ve yer vektörleri sürekli normal düzlemde yatan α eğrilerine de kısaca **normal eğriler** denir.

Tanımdan dolayı bir normal eğri için, α eğrisinin yer vektörü, $s \in I \subset \mathbb{R}$ nin bazı diferensiyellenebilir λ ve μ fonksiyonları için

$$\alpha(s) = \lambda(s)N(s) + \mu(s)B(s)$$

şartını sağlar.

Bu kısımda, E_1^3 Minkowski 3-uzayında spacelike normal eğriler incelenecektir.

Hatırlayalım ki eğer α , spacelike veya timelike N asli normaline sahip bir spacelike

eğri ise Frenet denklemleri,

$$\begin{bmatrix} T' \\ N' \\ B' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \kappa & 0 \\ -\varepsilon\kappa & 0 & \tau \\ 0 & \tau & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T \\ N \\ B \end{bmatrix} \quad (3.5.1)$$

idi. Burada, $\langle T, T \rangle = 1$, $\langle N, N \rangle = \varepsilon = \pm 1$, $\langle B, B \rangle = -\varepsilon$, $\langle T, N \rangle = \langle T, B \rangle = \langle N, B \rangle = 0$ dir.

Eğer α , lightlike N asli normaline sahip bir spacelike eğri ise, Frenet denklemleri,

$$\begin{bmatrix} T' \\ N' \\ B' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \kappa & 0 \\ 0 & \tau & 0 \\ -\kappa & 0 & -\tau \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T \\ N \\ B \end{bmatrix} \quad (3.5.2)$$

dir. Burada, $\langle T, T \rangle = 1$, $\langle N, N \rangle = 0$, $\langle B, B \rangle = 0$, $\langle T, N \rangle = \langle T, B \rangle = 0$, $\langle N, B \rangle = 1$ dir. Bu durumda eğer α bir doğru ise $\kappa = 0$, diğer durumlarda $\kappa = 1$ dir.

m, E_1^3 de bir nokta ve $r > 0$ bir sabit olsun. Bu durumda,

pseudo-Riemannian küre,

$$\mathbb{S}_1^2(m, r) = \{u \in E_1^3 : \langle u - m, u - m \rangle = r^2\},$$

pseudo-Riemannian hiperbolik uzay,

$$\mathbb{H}_0^2(m, r) = \{u \in E_1^3 : \langle u - m, u - m \rangle = -r^2\}$$

ve pseudo-Riemannian lightlike koni de

$$C(m) = \{u \in E_1^3 : \langle u - m, u - m \rangle = 0\}$$

şeklinde tanımlanır [16].

Şimdi, E_1^3 Minkowski 3-uzayında spacelike normal eğrilerle ilgili bazı karakterizasyonlar verelim:

Teorem 3.5.1. $\alpha = \alpha(s)$, E_1^3 de N asli normali spacelike veya timelike olan birim hızlı bir spacelike normal eğri olsun. Herbir $s \in I \subset \mathbb{R}$ için $\kappa(s) > 0$ ve $\tau(s) \neq 0$ da α eğrisinin, sırasıyla, eğrilik ve burulması olsunlar. Bu taktirde aşağıdaki durumlar sağlanır [16]:

i) $\kappa(s)$ ve $\tau(s)$ aşağıdaki eşitliği sağlar:

$$\frac{1}{\kappa(s)} = c_1 \cosh\left(\int \tau(s) ds\right) + c_2 \sinh\left(\int \tau(s) ds\right), \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$

ii) Eğrinin yer vektörünün asli normal ve binormal bileşenleri sırasıyla,

$$\begin{aligned} \langle \alpha(s), N \rangle &= a_1 \cosh\left(\int \tau(s) ds\right) + a_2 \sinh\left(\int \tau(s) ds\right) \text{ ve} \\ \langle \alpha(s), B \rangle &= a_1 \sinh\left(\int \tau(s) ds\right) + a_2 \cosh\left(\int \tau(s) ds\right), \quad a_1, a_2 \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

şeklinde verilir.

iii) Eğer eğrinin yer vektörü null ise, bu taktirde α eğrisi, $C(m)$ pseudo-Riemannian lightlike konisinde yatar, $\kappa(s)$ ve $\tau(s)$ de

$$\frac{1}{\kappa(s)} = c_1 [\cosh\left(\int \tau(s) ds\right) \pm \sinh\left(\int \tau(s) ds\right)]$$

şartını sağlarlar.

Tersine, eğer $\alpha(s)$, E_1^3 de N asli normali spacelike veya timelike olan birim hızlı bir spacelike eğri ve her $s \in I \subset \mathbb{R}$ için $\kappa(s) > 0$ ve $\tau(s) \neq 0$ iseler, ayrıca (i), (ii) veya (iii) durumlarından biri sağlanıyorsa, bu taktirde α bir normal eğridir veya bir normal eğriye kongrüenttir.

İspat. $\alpha(s)$ nin E_1^3 de spacelike veya timelike N asli normaline sahip, s pseudo yay uzunluğu ile parametrelendirilmiş birim hızlı bir spacelike normal eğri olduğunu varsayalım. Bu taktirde tanımdan,

$$\alpha(s) = \lambda(s)N(s) + \mu(s)B(s)$$

dir. Bu denklemin s ye göre türevi alınır ve (3.5.1) Frenet denklemleri kullanılırsa,

$$\varepsilon\lambda\kappa = -1, \quad \lambda' + \mu\tau = 0, \quad \mu' + \lambda\tau = 0 \quad (3.5.3)$$

bulunur. (3.5.3) deki birinci ve ikinci denklemlerden,

$$\lambda = -\frac{\varepsilon}{\kappa}, \quad \mu = \frac{\varepsilon}{\tau} \left(\frac{1}{\kappa}\right)' \quad (3.5.4)$$

elde edilir. Böylece,

$$\alpha(s) = -\frac{\varepsilon}{\kappa}N + \frac{\varepsilon}{\tau}\left(\frac{1}{\kappa}\right)'B \quad (3.5.5)$$

olur. Ayrıca, (3.5.3) deki 3. denklem ve (3.5.4) kullanılırsa

$$\left[\frac{1}{\tau}\left(\frac{1}{\kappa}\right)'\right]' - \frac{\tau}{\kappa} = 0 \quad (3.5.6)$$

diferensiyel denklemine ulaşılır.

$y(s) = \frac{1}{\kappa}$ ve $p(s) = \frac{1}{\tau}$ alınır, (3.5.6) denklemini,

$$(p(s)y'(s))' - \frac{y(s)}{p(s)} = 0$$

şeklinde yazılabilir.

Yukarıdaki denklemde $t = \int \frac{1}{p(s)} ds$ değişken değişimi yapılırsa,

$$\frac{d^2y}{dt^2} - y = 0$$

elde edilir. Bu diferensiyel denklemin çözümü, $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ olmak üzere

$$y = c_1 \cosh(t) + c_2 \sinh(t)$$

dir. Böylece,

$$\frac{1}{\kappa(s)} = c_1 \cosh\left(\int \tau(s) ds\right) + c_2 \sinh\left(\int \tau(s) ds\right) \quad (3.5.7)$$

olup (i) ispatlanmış olur.

(3.5.7) denklemini, (3.5.4) ve (3.5.5) te yerine konursa,

$$\begin{aligned} \lambda &= -\varepsilon[c_1 \cosh\left(\int \tau(s) ds\right) + c_2 \sinh\left(\int \tau(s) ds\right)] \\ \mu &= \varepsilon[c_1 \sinh\left(\int \tau(s) ds\right) + c_2 \cosh\left(\int \tau(s) ds\right)] \end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned} \alpha &= -\varepsilon[c_1 \cosh\left(\int \tau(s) ds\right) + c_2 \sinh\left(\int \tau(s) ds\right)]N \\ &\quad + \varepsilon[c_1 \sinh\left(\int \tau(s) ds\right) + c_2 \cosh\left(\int \tau(s) ds\right)]B \end{aligned} \quad (3.5.8)$$

elde edilir. Dolayısıyla, (3.5.8) denkleminde kolayca bulunabilir ki,

$$\langle \alpha, \alpha \rangle = \varepsilon(c_1^2 - c_2^2), \quad (3.5.9)$$

$$\langle \alpha, N \rangle = a_1 \cosh\left(\int \tau(s) ds\right) + a_2 \sinh\left(\int \tau(s) ds\right) \quad (3.5.10)$$

$$\langle \alpha, B \rangle = a_1 \sinh\left(\int \tau(s) ds\right) + a_2 \cosh\left(\int \tau(s) ds\right) \quad (3.5.11)$$

dir. Burada $a_1 = -c_1 \in \mathbb{R}$, $a_2 = -c_2 \in \mathbb{R}$ dir. Sonuç olarak, (ii) ispatlanmış olur.

Şimdi farzedelim ki α , yer vektörü lightlike olan bir normal eğridir. Bu takdirde, $\langle \alpha, \alpha \rangle = 0$ dir. Bu, (3.5.9) da yerine yazılırsa, $c_1^2 = c_2^2$ elde edilir. Böylece (3.5.7) denklemini,

$$\frac{1}{\kappa(s)} = c_1 [\cosh\left(\int \tau(s) ds\right) \pm \sinh\left(\int \tau(s) ds\right)] \quad (3.5.12)$$

olur. Şimdi,

$$m = \alpha(s) + \frac{\varepsilon}{\kappa} N - \frac{\varepsilon}{\tau} \left(\frac{1}{\kappa}\right)' B \quad (3.5.13)$$

vektörünü gözönüne alalım. Bu vektörün s ye göre türevi alınır ve (3.5.1) Frenet denklemleri kullanılırsa, $m' = 0$ bulunur ve dolayısıyla $m = sbt$ tir. Bu takdirde, $\langle \alpha - m, \alpha - m \rangle = 0$ dir ve bu demektir ki α , $C(m)$ üzerinde yatar. Sonuç olarak (iii) ispatlanmış olur.

Tersine, (i) nin sağlandığını kabul edelim. Bu takdirde,

$$\frac{1}{\kappa(s)} = c_1 \cosh\left(\int \tau(s) ds\right) + c_2 \sinh\left(\int \tau(s) ds\right)$$

dir. Bu denklemin s ye göre 2 kez türevi alınır,

$$\left[\frac{1}{\tau} \left(\frac{1}{\kappa}\right)'\right]' = \frac{\tau}{\kappa}$$

bulunur. (3.5.1) Frenet denklemleri kullanılırsa,

$$\frac{d}{ds} \left[\alpha(s) + \frac{\varepsilon}{\kappa} N - \frac{\varepsilon}{\tau} \left(\frac{1}{\kappa}\right)' B \right] = 0$$

elde edilir. Sonuç olarak α , bir normal eğriye kongrüenttir.

Şimdi farzedelim ki (ii) sağlansın. Bu takdirde (3.5.9) ve (3.5.10) denklemleri geçerlidir. (3.5.9) in s ye göre türevi alınıp (3.5.10) kullanılırsa $\langle \alpha, T \rangle = 0$ bulunur ve bu demektir ki α bir normal eğridir.

Son olarak (iii) sağlansın. Bu taktirde α eğrisi, m noktasında $C(m)$ lightlike konisinde yatar ve $\kappa(s)$ ile $\tau(s)$ de (3.5.12) denklemini sağlar. Dolayısıyla $\langle \alpha - m, \alpha - m \rangle = 0$ dır. Bu denklemin 4 kez s ye göre türevi alınır ve (3.5.1) Frenet denklemleri kullanılırsa,

$$\alpha(s) - m = -\frac{\varepsilon}{\kappa}N + \frac{\varepsilon}{\tau}\left(\frac{1}{\kappa}\right)'B$$

olur. O halde, α eğrisi bir normal eğriye kongrüenttir. $m = 0$ diyelim. (3.5.13) kullanılarak kolayca $\langle \alpha, \alpha \rangle = 0$ bulunur. Bu da ispatı tamamlar. \square

3.6 E_1^3 Minkowski 3-Uzayında Timelike ve Null Normal Eğriler

$\{T, N, B\}$, E_1^3 de $\alpha(s)$ eğrisi boyunca Frenet çatısını belirtmek üzere, eğer α bir timelike eğri ise Frenet denklemleri,

$$\begin{bmatrix} T' \\ N' \\ B' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \kappa & 0 \\ \kappa & 0 & \tau \\ 0 & -\tau & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T \\ N \\ B \end{bmatrix} \quad (3.6.1)$$

şeklinde idi. Burada $\langle T, T \rangle = -1$, $\langle N, N \rangle = \langle B, B \rangle = 1$, $\langle T, N \rangle = \langle T, B \rangle = \langle N, B \rangle = 0$ dır.

Diğer taraftan eğer α bir null eğri ise Frenet denklemleri,

$$\begin{bmatrix} T' \\ N' \\ B' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \kappa & 0 \\ \tau & 0 & -\kappa \\ 0 & -\tau & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T \\ N \\ B \end{bmatrix} \quad (3.6.2)$$

idi. Burada da $\langle T, T \rangle = 0$, $\langle N, N \rangle = 1$, $\langle B, B \rangle = 0$, $\langle T, N \rangle = 0$, $\langle T, B \rangle = 1$, $\langle N, B \rangle = 0$ dır.

Bu durumda α bir doğru ise $\kappa = 0$, diğer bütün hallerde $\kappa = 1$ dir.

Şimdi E_1^3 de timelike ve null normal eğriler için bazı karakterizasyonlar verelim.

Teorem 3.6.1. $\alpha(s)$, E_1^3 de her $s \in I \subset \mathbb{R}$ için $\kappa(s) > 0$ ve $\tau(s) \neq 0$ olacak şekilde birim hızlı bir timelike eğri olsun. Bu taktirde, α bir normal eğridir ancak ve ancak α yer vektörünün asli normal ve binormal bileşenleri, sırasıyla,

$$\langle \alpha, N \rangle = \frac{1}{\kappa}; \quad \langle \alpha, B \rangle = \frac{1}{\tau}\left(\frac{1}{\kappa}\right)'$$

şeklinde verilir [15].

İspat. s yay parametresi olmak üzere farzedelim ki $\alpha(s)$ bir normal eğridir. Bu taktirde, tanımdan

$$\alpha(s) = \lambda(s)N(s) + \mu(s)B(s)$$

dir. Bu ifadenin s ye göre türevi alınır ve (3.5.1) Frenet denklemleri kullanılırsa,

$$\lambda\kappa = 1, \lambda' - \mu\tau = 0, \lambda\tau + \mu' = 0 \quad (3.6.3)$$

elde edilir. (3.6.3) teki 1. ve 2. denklemlerden,

$$\lambda = \frac{1}{\kappa}, \mu = \frac{1}{\tau} \left(\frac{1}{\kappa} \right)'$$

bulunur. Böylece,

$$\alpha = \frac{1}{\kappa}N + \frac{1}{\tau} \left(\frac{1}{\kappa} \right)' B \quad (3.6.4)$$

olur. Buradan,

$$\langle \alpha, N \rangle = \frac{1}{\kappa}, \quad \langle \alpha, B \rangle = \frac{1}{\tau} \left(\frac{1}{\kappa} \right)'$$

olduğu görülür.

Tersine, farzedelim ki

$$\langle \alpha, N \rangle = \frac{1}{\kappa}, \quad \langle \alpha, B \rangle = \frac{1}{\tau} \left(\frac{1}{\kappa} \right)'$$

dir. $\langle \alpha, N \rangle = \frac{1}{\kappa}$ denkleminin s ye göre türevi alınırsa,

$$\langle T, N \rangle + \langle \alpha, \kappa T + \tau B \rangle = \left(\frac{1}{\kappa} \right)' \quad (3.6.5)$$

denkleminde ulaşılır. (3.6.5) denkleminde

$$\langle \alpha, B \rangle = \frac{1}{\tau} \left(\frac{1}{\kappa} \right)'$$

kullanılırsa,

$$\kappa \langle \alpha, T \rangle + \tau \frac{1}{\tau} \left(\frac{1}{\kappa} \right)' = \left(\frac{1}{\kappa} \right)'$$

olur. Böylece, $\langle \alpha, T \rangle = 0$ olduğu görülür. Bu demektir ki, α bir normal eğridir. \square

Teorem 3.6.2. $\alpha(s), E_1^3$ de her $s \in I \subset \mathbb{R}$ için $\kappa(s) > 0$ ve $\tau(s) \neq 0$ olacak şekilde birim hızlı bir timelike eğri olsun. Bu taktirde, α bir normal eğriye kongrüenttir ancak ve ancak

$$\frac{\tau}{\kappa} = -\left(\frac{1}{\tau}\left(\frac{1}{\kappa}\right)'\right)' \quad (3.6.6)$$

dir [15].

İspat. İlk olarak $\alpha(s)$ nin bir normal eğriye kongrüent olduğunu kabul edelim. Bu taktirde (3.6.3) denklemleri bize (3.6.6) denklemini verir.

Tersine, farzedelim ki (3.6.6) sağlansın. (3.5.1) Frenet denklemleri kullanılırsa,

$$\frac{d}{ds}[\alpha(s) - \frac{1}{\kappa}N(s) - \frac{1}{\tau}\left(\frac{1}{\kappa}\right)'B(s)] = 0$$

olduğu kolayca görülür.

Sonuç olarak, α bir normal eğriye kongrüenttir. □

Teorem 3.6.3. $\alpha(s), E_1^3$ de her $s \in I \subset \mathbb{R}$ için $\kappa(s) = 1$ ve $\tau(s) \neq 0$ olacak şekilde bir null eğri olsun. Bu taktirde, α bir normal eğridir ancak ve ancak α yer vektörünün teğet ve asli normal bileşenleri sırasıyla,

$$\langle \alpha, T \rangle = \frac{1}{\tau}\left(\frac{1}{\tau}\right)' \text{ ve } \langle \alpha, N \rangle = \frac{1}{\tau}$$

şeklinde verilir [15].

İspat. Önce $\alpha(s)$ nin bir normal eğri olduğunu farzedelim. Bu taktirde tanımdan, λ ve μ s ye bağlı keyfi fonksiyonlar olmak üzere,

$$\alpha(s) = \lambda(s)N(s) + \mu(s)B(s) \quad (3.6.7)$$

dir. Bu denklemin s ye göre türevi alınıp Frenet denklemleri kullanılırsa,

$$\lambda' - \mu\tau = 0, \lambda\tau = 1, \mu' - \lambda = 0 \quad (3.6.8)$$

bulunur. Bu demektir ki,

$$\lambda = \frac{1}{\tau}, \mu = \frac{1}{\tau}\left(\frac{1}{\tau}\right)'$$

dir. Böylece (3.6.7) denkleminde,

$$\langle \alpha, T \rangle = \mu = \frac{1}{\tau} \left(\frac{1}{\tau} \right)' \text{ ve } \langle \alpha, N \rangle = \lambda = \frac{1}{\tau}$$

elde edilir.

Tersine, farzedelim ki

$$\langle \alpha, T \rangle = \frac{1}{\tau} \left(\frac{1}{\tau} \right)' \text{ ve } \langle \alpha, N \rangle = \frac{1}{\tau}$$

olsun. $\langle \alpha, N \rangle = \frac{1}{\tau}$ nun s ye göre türevi alınırsa,

$$\langle T, N \rangle + \langle \alpha, \tau T - B \rangle = \left(\frac{1}{\tau} \right)'$$

elde edilir ve sonuç olarak $\langle \alpha, B \rangle = 0$ dır.

$\alpha(s)$ vektörünü $\{T, N, B\}$ bazına göre, $a(s)$, $b(s)$ ve $c(s)$ keyfi fonksiyonlar olmak üzere,

$$\alpha(s) = a(s)T(s) + b(s)N(s) + c(s)B(s)$$

şeklinde yazabiliriz. Bu taktirde kolayca görülebilir ki,

$$\langle \alpha, T \rangle = c = \frac{1}{\tau} \left(\frac{1}{\tau} \right)', \quad \langle \alpha, N \rangle = b = \frac{1}{\tau}, \quad \langle \alpha, B \rangle = a = 0$$

dır. Bu nedenle

$$\alpha = \left(\frac{1}{\tau} \right) N + \frac{1}{\tau} \left(\frac{1}{\tau} \right)' B$$

olur ki, α bir normal eğridir. □

Teorem 3.6.4. $\alpha(s)$, E_1^3 de her $s \in I \subset \mathbb{R}$ için $\kappa(s) = 1$ ve $\tau(s) \neq 0$ olacak şekilde bir null eğri olsun. Bu taktirde, α bir normal eğriye kongrüenttir ancak ve ancak

$$\left(\frac{1}{\tau} \left(\frac{1}{\tau} \right)' \right)' = \frac{1}{\tau} \tag{3.6.9}$$

dir [15].

İspat. Farzedelim ki α bir normal eğriye kongrüenttir. Bu taktirde, α eğrisi (3.6.7) denkleminde sahiptir ve dolayısıyla (3.6.8) denklemini sağlar. (3.6.8) denkleminin sağlanması da (3.6.9) denkleminin sağlanması anlamına gelir.

Diğer taraftan tersine, (3.6.9) denkleminin sağlandığını düşünelim. (3.6.2) Frenet denklemleri kullanılarak,

$$\frac{d}{ds}[\alpha(s) - \frac{1}{\tau}N(s) - \frac{1}{\tau}(\frac{1}{\tau})'B(s)] = 0$$

elde edilir. Sonuç olarak $\alpha(s)$, bir normal eğriye kongrüenttir. □

4. MINKOWSKI 3-UZAYINDA YÜZEYLER

Bu bölümde, önce spacelike ve timelike yüzey kavramları tanıtılacak, ardından bu yüzey türleri için ortalama eğrilik ve Gauss eğriliği tanımlanacak ve daha sonra bu eğrilikler lokal olarak yazılacaktır. Ayrıca E_1^3 in umbilik yüzeyleri karakterize edilecektir.

Spacelike ve timelike yüzeylerin inşası, Öklid uzayındakiyle benzerdir. Bununla birlikte, bu yüzeyler üzerinde çalışırken causal karakterlerin nasıl sınırlamalar ortaya koyduğu görülecektir. Örneğin, yüzey kapalı olamayacaktır. Ayrıca Weingarten dönüşümü, timelike yüzeyler için diyagonalleştirilebilir değildir (ve asli eğrilikler kavramı düşünülemez).

Daha sonra, Öklid uzayında da önemli bir yeri olan yüzey çeşitlerinden dönel yüzeyler E_1^3 Minkowski 3-uzayında genel olarak tanıtılıp bu yüzeyler için bazı sınıflandırmalar verilecektir. Ayrıca üçüncü bölümde elde edilen sabit eğrilikli düzlemsel eğriler tarafından oluşturulan dönel yüzeyler elde edilerek bu yüzeylerle ilgili bazı karakterizasyonlar verilecektir. Ardından regle yüzeylerin genel yapısı oluşturularak timelike regle yüzeyler için bazı karakterizasyonlar verilecektir.

4.1 E_1^3 de Spacelike ve Timelike Yüzeyler

M düzgün, bağlantılı ve ∂M sınırına sahip bir yüzey olsun. $x : M \rightarrow E_1^3$ bir immer-siyon, yani x in $dx_p : T_p M \rightarrow \mathbb{R}^3$ diferensiyel dönüşümü 1:1 olacak şekilde bir diferensiyellenebilir dönüşüm olsun.

$T_p(M)$ tanjant düzlemini $(dx)_p(T_p M)$ ile gösterelim. $g_p = x^*(\langle, \rangle_p)$ pullback metriğini, yani

$$g_p(u, v) = \langle u, v \rangle_p = \langle dx_p(u), dx_p(v) \rangle$$

metriğini gözönüne alalım.

Öklidyen yapıda $(T_p M, \langle, \rangle_p)$ pozitif tanımlı metrik ile bir Riemannian uzaydır. Bununla birlikte, E_1^3 de x dönüşümü alınırsa, bu metrik 3 tip olabilir [18]:

1. $T_p M$ bir spacelike düzlemdir, yani g_p pozitif tanımlıdır.

2. T_pM bir timelike düzlemdir, yani g_p 1-indeksli bir metriktir.

3. T_pM bir lightlike düzlemdir, yani g_p bir dejenere metriktir.

Tanım 4.1.1. Bir immersiyona spacelike (timelike, lightlike) denir, eğer herbir tanjant düzlem spacelike (timelike, lightlike) ise [18].

Bundan sonra g_p yerine genellikle \langle, \rangle kullanılacaktır. Eğer immersiyon spacelike veya timelike ise, uzay $E_1^3 = T_pM \oplus (T_pM)^\perp$ şeklinde ayrıştırılabilir. Burada eğer immersiyon spacelike veya timelike ise ikinci altuzay sırasıyla, timelike veya spacelike olacak şekilde vektörler içerir.

Şimdi, bazı spacelike ve timelike yüzey örneklerine bakalım:

1) Bir yatay düzlem spacelike tır ve bir dikey düzlem timelike tır.

2)

$$\mathbb{H}^2 = \{p \in E_1^3 \mid \langle p, p \rangle = -1, z > 0\}$$

hiperboloidi bir spacelike yüzeydir. Herbir $p \in \mathbb{H}^2$ için tanjant düzlem

$$T_pM = \{v \in \mathbb{R}^3 \mid \langle p, v \rangle = 0\} = \langle p \rangle^\perp$$

dir. Bu yüzeye hiperbolik düzlem denir.

3) De Sitter uzayı

$$\mathbb{S}_2^1 = \{p \in E_1^3 \mid \langle p, p \rangle = 1\}$$

şeklinde tanımlanır. Öklidyen bakış açısıyla bu yüzey bir regle hiperboloiddir. $T_pM = \langle p \rangle^\perp$ ve p bir spacelike vektör olduğundan \mathbb{S}_2^1 bir timelike düzlemdir. (Şekil 4.1).

4) $T_pM = \langle p \rangle^\perp$ ve p bir lightlike vektör olduğundan

$$C = \{p \in E_1^3 \mid \langle p, p \rangle = 0\} - \{(0, 0, 0)\}$$

lightlike konisi bir lightlike yüzeydir.

5) $f, \Omega \subset \mathbb{R}^2$ bölgesi üzerinde tanımlı bir düzgün dönüşüm olsun.

$X(x, y) = (x, y, f(x, y))$ ile verilen $X : \Omega \rightarrow E_1^3$ immersiyonunu (Monge yüzeyi) ele alalım.

$X_x = (1, 0, f_x)$ ve $X_y = (0, 1, f_y)$ olmak üzere, tanjant düzlemindeki indirgenmiş metrik,

$$\begin{bmatrix} 1 - f_x^2 & -f_x f_y \\ -f_x f_y & 1 - f_y^2 \end{bmatrix}$$

matrisine sahiptir.

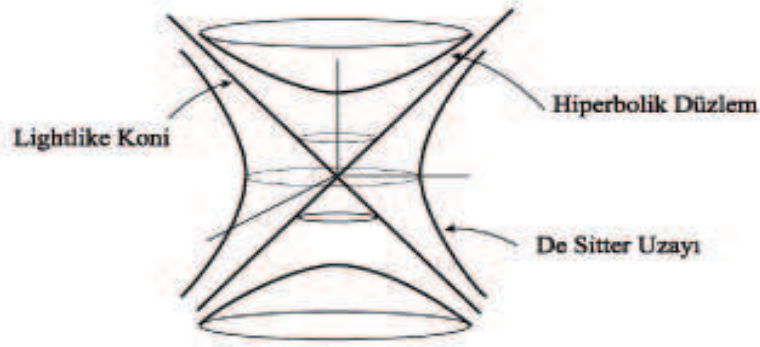
Bu matrisin determinanı, $1 - f_x^2 - f_y^2 = 1 - |Df|^2$ dir.

Böylece, eğer $|Df|^2 < 1$ ise immersiyon spacelike ve eğer $|Df|^2 > 1$ ise immersiyon timelike tır.

Şu örnekler de verilebilir:

■ $\Omega \in \mathbb{R}^2$ düzlemi üzerinde tanımlanan $f(x, y) = \sqrt{1 + x^2 + y^2}$ bir \mathbb{H}^2 hiperbolik düzlemdir.

■ $f(x, y) = \sqrt{1 + x^2}$ ise bu yüzey $z^2 - x^2 = 1$ regle yüzeyidir. Bu bir spacelike yüzeydir.



Şekil 4.1 De Sitter Uzayı, Hiperbolik Düzlem ve Lightlike Koni

Biliyoruz ki Öklid uzayında x , $\partial M = \emptyset$ olacak şekilde bir imbedding ise yüzey yönlendirilebilir. Eğer sınır boş küme değilse bu takdirde, Möbius şeridi gibi yönlendirilemeyen yüzey örnekleri vardır. Eğer x bir immersiyon ise, E^3 te Klein şişesi ve projektif düzlem gibi yönlendirilemeyen yüzey örnekleri vardır.

Şimdi, herhangi bir spacelike yüzeyin yönlendirilebilir olduğunu gösteren teoremi verelim:

Teorem 4.1.1. $x : M \rightarrow E_1^3$ bir spacelike immersiyon olsun. Bu taktirde, M bir yönlendirilebilir yüzeydir [18].

İspat. x bir spacelike immersiyon olduğundan her bir $T_p(M) = (dx)_p(T_pM)$ tanjant düzlemi spacelike tır. Lorentzian vektörel çarpımla, lokal olarak tanjant düzlemin ortogonal bir N birim vektörünü tanımlayabiliriz. $X = x(u, v)$ olsun. Bu taktirde

$$X_u = (dx)_p\left(\frac{\partial}{\partial u}\right) \text{ ve } X_v = (dx)_p\left(\frac{\partial}{\partial v}\right)$$

dir. X_u ve X_v spacelike vektörleri için $X_u \times X_v$ vektörel çarpımı bir timelike vektördür. N birim normal vektörünü

$$N(u, v) = \frac{X_u \times X_v}{\|X_u \times X_v\|}$$

şeklinde tanımlayabiliriz. Böylece her noktanın bir komşuluğunda, yüzey üzerinde diferensiyellenebilir birim normal vektör alanı vardır. $e_3 = (0, 0, 1)$ olsun. Bu vektör de timelike olduğundan, $|\langle N_p, e_3 \rangle| \geq 1$ dir. Böylece bir koordinat komşuluğunda $\forall p$ için, ya $\langle N_p, e_3 \rangle \geq 1$ ya da $\langle N_p, e_3 \rangle \leq -1$ dir. Örneğin, N vektörünü negatif işaretli seçelim. Bu, global olarak yüzeyin bir normal vektör alanını tanımlamamıza imkan sağlar ve dolayısıyla M bir yönlendirilebilir yüzeydir. \square

Şimdi de, yukarıdaki gibi tanımlanan $N : M \rightarrow \mathbb{H}^2$ dönüşümünü gözönüne alalım. Global olarak tanımlı N , immersiyonun Gauss dönüşümü olarak adlandırılır. Ayrıca N , future-directed dır. N nin seçimi, T_pM de bir yönlendirme verir: T_pM nin verilen bir $\{u, v\}$ bazı için T_pM pozitif yönlendirilmiştir denir, eğer $\{u, v, N(p)\}$ E_1^3 in bir pozitif yönlendirmesi ise, yani $\det(u, v, N(p)) > 0$ ise.

M üzerindeki yönlendirme, ∂M sınırı üzerinde bir yönlendirme tanımlar: $u \in T_p\partial M$ verilsin. M pozitif yönlendirilmiştir denir, eğer $\{u, v\}$, T_pM nin bir pozitif yönlendirmesi ise. Burada v iç konormal vektördür.

Benzer olarak, timelike yüzeyler için de lokal olarak tanımlanmış bir Gauss dönüşümünün var olduğu gösterilebilir.

4.2 Nondejenere Yüzeylerin Eğrilikleri

Burada, yüzeyin spacelike ve timelike olması durumları ayrı ayrı ele alınacaktır.

4.2.1 Spacelike durum

$x : M \rightarrow E_1^3$ bir M yüzeyinin spacelike immersiyonu, N de M nin future pointing Gauss dönüşümü ve X, M nin bir tanjant vektör alanı olsun. $\bar{\nabla}$ ve ∇ ile sırasıyla E_1^3 ve M nin Levi-Civita konneksiyonlarını gösterelim. Ayrıca

$$\nabla_X Y = (\bar{\nabla}_X Y)^\top$$

dir, ki burada $(\bar{\nabla}_X Y)^\top, \nabla_X Y$ vektör alanının tanjant kısmını gösterir.

x immersiyonunun ikinci temel formu simetrik

$$\begin{aligned} \sigma : \quad \chi(M) \times \chi(M) &\rightarrow \chi(M)^\perp \\ \sigma(X, Y) &= (\bar{\nabla}_X Y)^\perp \end{aligned}$$

tensörü ile tanımlanır.

X ve Y, M nin tanjant vektör alanları olmak üzere, Gauss formülü

$$\bar{\nabla}_X Y = \nabla_X Y + \sigma(X, Y)$$

dir.

Eğer Z, x immersiyonunun bir normal vektör alanı ise, $-(\bar{\nabla}_X Z)$ nin tanjant bileşeni $A_Z(X)$ ile yani

$$A_Z(X) = -(\bar{\nabla}_X Z)^\top$$

ile gösterilir.

Ayrıca, A_Z dönüşümü M nin metriğine göre lineer ve self-adjoint tir. Eğer $Z = N$ alınırsa, $\langle \bar{\nabla}_X N, N \rangle = 0$ olduğundan

$$A_N(X) = -\bar{\nabla}_X N$$

elde edilir.

$A = A_N$, x immersiyonunun Weingarten endomorfizmi diye adlandırılır.

A self adjoint olduğundan, $\langle AX, Y \rangle = \langle X, AY \rangle$ dir. Eğer $X, Y \in \chi(M)$ ise,

$$\sigma(X, Y) = -\langle \sigma(X, Y), N \rangle N = -\langle AX, Y \rangle N$$

ve

$$\bar{\nabla}_X Y = \nabla_X Y - \langle AX, Y \rangle N$$

dir.

Sonuç olarak, Weingarten endomorfizmi diyagonalleştirilebilirdir, yani eğer $p \in M$ ise $A_p(v) = (AX)_p$ ile tanımlanan $A_p : T_p M \rightarrow T_p M$ dönüşümü diyagonalleştirilebilirdir. Burada $X \in \chi(M)$, v yi geren bir vektör alanıdır. A_p nin özdeğerleri, asli eğrilikler olarak adlandırılır ve $\lambda_i(p)$ ile gösterilir.

İmmersiyonun ortalama eğrilik vektör alanı,

$$\vec{H} = \frac{1}{2} iz(\sigma)$$

olarak tanımlanır.

$\{E_1, E_2\}$ bir ortonormal lokal vektör alanı olmak üzere,

$$\begin{aligned} \vec{H} = \frac{1}{2} iz(\sigma) &= \frac{1}{2} (\sigma(E_1, E_1) + \sigma(E_2, E_2)) \\ &= -\frac{1}{2} (\langle AE_1, E_1 \rangle + \langle AE_2, E_2 \rangle) N \\ &= \left(-\frac{1}{2} iz(A)\right) N \end{aligned}$$

dir. Eğer bir $\vec{H} = HN$ özdeşliği elde edilmek istenirse, immersiyonun ortalama eğriliği, $H = -\frac{1}{2} iz(A)$ fonksiyonu olarak tanımlanır.

Özellikle eğer $\vec{H} \neq \vec{0}$ ise $\langle \vec{H}, \vec{H} \rangle = -H^2 < 0$ olduğundan, \vec{H} future directed dır.

Şimdi M yüzeyinin eğrilik tensörünü hesaplayalım. E_1^3 in \bar{R} eğriliği sıfır olduğu için, Gauss denkleminde

$$R(X, Y)Z = -\langle AX, Z \rangle AY + \langle AY, Z \rangle AX$$

dir. Ricci eğriliği,

$$Ric(X, Y) = \sum_{i=1}^2 \langle R(X, E_i)Y, E_i \rangle = \langle AX, AY \rangle + 2H \langle AX, Y \rangle$$

dir. Skalar eğrilik de

$$\rho = iz(Ric) = -4H^2 + iz(A^2)$$

dir. $\rho = 2K$ olduğundan,

$$K = -2H^2 + \frac{iz(A^2)}{2}$$

dir, burada K Gauss eğriliğidir [18].

4.2.2 Timelike durumu

$x : M \rightarrow E_1^3$ bir timelike immersiyon, yani x yardımıyla M üzerine indirgenmiş metrik 1-indeksli bir nondejenere metrik olsun. Yüzey lokal olarak yönlendirilebilir: N bir spacelike birim vektör alanı olsun ve $N : U \subset M \rightarrow \mathbb{S}_1^2$ şeklinde tanımlansın.

Lokal olarak N yi tanımlamak mümkün olduğundan, spacelike immersiyonlardakine benzer ifadeler verilebilir. Bu nedenle

$$\begin{aligned} \bar{\nabla}_X Y &= \nabla_X Y + \sigma(X, Y) = \nabla_X Y + \langle \sigma(X, Y), N \rangle N \\ &= \nabla_X Y + \langle AX, Y \rangle N \end{aligned}$$

dir. A Weingarten dönüşümü yine self-adjointtir, yani

$$\langle AX, Y \rangle = \langle X, AY \rangle, X, Y \in \chi(M)$$

dir.

Buradaki fark, A_p diyagonalleştirilebilir değildir (pozitif tanımlı olmayan bir metriğe göre self-adjoint bir endomorfizm diyagonalleştirilebilir olmayabilir). Bununla birlikte, ortalama eğrilik ve Gauss eğriliği, spacelike yüzeyler için verilen yapıyla benzer olarak tanımlanabilir. Burada

$$H = \frac{1}{2} iz_I(\sigma), K = \det_I(\sigma)$$

dir. Buradaki I alt indeksi, yüzeyin metriğine göre hesaplama yapıldığını belirtir. Örneğin, E_2 timelike vektör olmak üzere eğer $\{E_1, E_2\}$, ortonormal tanjant vektör alanları ise bu takdirde

$$H = \frac{1}{2}(\sigma(E_1, E_1) - \sigma(E_2, E_2)), K = \sigma(E_1, E_1)\sigma(E_2, E_2) - \sigma(E_1, E_2)^2$$

dir.

$\mathbb{S}_1^2(r)$ De Sitter uzayı bir timelike yüzey örneğidir. Şimdi $\mathbb{S}_1^2(r)$ nin ortalama eğrilik ve Gauss eğriliğini hesaplayalım.

$N(p) = \frac{p}{r}$ olduğundan, $dN_p(v) = \frac{v}{r}$ dir. Bu demektir ki,

$$\sigma_p(u, v) = \frac{1}{r} \langle u, v \rangle$$

dir. Bu nedenle

$$H = \frac{1}{r}, K = \frac{1}{r^2}$$

dir.

4.3 Eğriliklerin Lokal Hesaplamaları

x bir spacelike immersiyon ve $X = X(u, v)$ bir lokal parametrelendirme olsun. $\{X_u, X_v\}$ herbir noktada tanjant düzlemin bir lokal bazı olsun. T_pM üzerinde birinci temel formun metrik olduğunu yani,

$$I_p = \langle \cdot, \cdot \rangle_p : T_pM \times T_pM \rightarrow \mathbb{R}$$

$$I_p(u, v) = \langle u, v \rangle_p$$

olduğunu hatırlayalım.

$B = \{X_u, X_v\}$ bazına göre I metriğinin matris formu

$$\begin{bmatrix} E & F \\ F & G \end{bmatrix}$$

olarak yazılabilir. Burada,

$$E = \langle X_u, X_u \rangle, F = \langle X_u, X_v \rangle, G = \langle X_v, X_v \rangle$$

dir. Metrik pozitif tanımlıdır ancak ve ancak $\det(I) = EG - F^2 > 0$ dır.

Eğer immersiyon timelike ise $EG - F^2 < 0$ dır.

$$N = \frac{X_u \times X_v}{\|X_u \times X_v\|}$$

şeklinde tanımlı normal vektör alanını alalım. p deki ikinci temel form,

$$\begin{aligned} \sigma_p & : T_pM \times T_pM \rightarrow \mathbb{R} \\ \sigma_p(u, v) & = -\langle (dN)_p(u), v \rangle_p = \langle A_p(u), v \rangle \end{aligned}$$

dir. σ da matris formunda

$$\begin{bmatrix} L & M \\ M & N \end{bmatrix}$$

olarak yazılabilir. Burada,

$$L = -\langle X_u, N_u \rangle = \langle N, X_{uu} \rangle$$

$$M = -\langle X_u, N_v \rangle = -\langle X_v, N_u \rangle = \langle N, X_{uv} \rangle$$

$$N = -\langle X_v, N_v \rangle = \langle N, X_{vv} \rangle$$

dir. Eğer $a, b \in T_pM$ ise, bu durumda

$$a^t \begin{bmatrix} L & M \\ M & N \end{bmatrix} b = a^t \begin{bmatrix} E & F \\ F & G \end{bmatrix} Ab$$

elde edilir. Böylece

$$A = \begin{bmatrix} E & F \\ F & G \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} L & M \\ M & N \end{bmatrix}$$

dir. Ortalama eğrilik ve Gauss eğriliği, sırasıyla,

$$H = -\frac{1}{2} \frac{GL - 2FM + EN}{EG - F^2}, \quad K = -\frac{LN - M^2}{EG - F^2}$$

dir.

Spacelike ve timelike durumlar arasındaki farkı göstermek için, Weingarten endomorfizmi diyagonalleştirilemeyen bir timelike regle yüzeyi ele alalım. $\alpha : I \rightarrow E_1^3$ bir

lightlike eğri ve $\{T, N, B\}$ de Frenet üç ayaklısı olsun. Burada B binormal vektörü birim lightlike bir vektördür.

$$X(s, t) = \alpha(s) + tB(s)$$

ile verilen $X : I \times \mathbb{R} \rightarrow E_1^3$ dönüşümünü gözönüne alalım.

Şimdi $\{X_s, X_t\}$ bazına göre A_p dönüşümünün matrisini hesaplayalım.

$$X_s = T + tB' = T - t\tau N \text{ ve } X_t = B$$

olduğundan

$$\begin{bmatrix} t^2\tau^2 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

dır. Determinant negatif olduğu için yüzey timelike tir.

Şimdi de ikinci temel formun katsayılarını hesaplayalım. Bunun için

$$X_{ss} = -t\tau^2 T + (1 - t\tau')N + t\tau B$$

$$X_{st} = -\tau N$$

$$X_{tt} = 0$$

dır. Buna göre ikinci temel form,

$$\begin{bmatrix} -1 + t(-\tau + \tau' + t^2\tau^3) & \tau \\ \tau & 0 \end{bmatrix}$$

dır. O halde Weingarten endomorfizmi

$$A = \begin{bmatrix} \tau & 0 \\ -1 + t\tau(-1 + (-1 + t)t\tau^2) + t\tau' & \tau \end{bmatrix}$$

dur. Bu matris diyagonalleştirilebilir değildir. Diğer taraftan, ortalama eğrilik $H = \tau$ ve Gauss eğriliği $K = \tau^2$ dir.

4.4 Umbilik Yüzeyler

Bu kısımda, E_1^3 in (spacelike veya timelike) umbilik yüzeyleri incelenecektir.

Tanım 4.4.1. Bir $p \in M$ noktasına umbilik tir denir, eğer

$$\sigma_p(u, v) = \lambda(p) \langle u, v \rangle$$

ise, yani ikinci temel form metrikle orantılı ise. İmmersiyonun spacelike olması halinde bu, $\lambda_1(p) = \lambda_2(p)$ demekle denktir. Bir yüzeye total umbilik denir, eğer herbir noktası umbilik ise [18].

x bir spacelike immersiyon olsun. λ_i ler A nın özdeğerleri olmak üzere,

$$H = -\frac{\lambda_1 + \lambda_2}{2}, K = -\lambda_1 \lambda_2$$

dir. Bu durumda,

$$\left(\frac{\lambda_1 - \lambda_2}{2}\right)^2 = \left(\frac{\lambda_1 + \lambda_2}{2}\right)^2 - \lambda_1 \lambda_2 = H^2 + K$$

dır. Böylece bir spacelike yüzey için $H^2 + K \geq 0$ sağlanır. Ayrıca $H^2 + K = 0$ dır ancak ve ancak $p \in M$ noktası umbiliktir.

Diğer taraftan asli eğrilikler,

$$\lambda_i = -H \pm \sqrt{H^2 + K}$$

dır.

Şimdi, bazı umbilik yüzey örneklerini inceleyelim:

1. Bir spacelike veya timelike $\pi = p_0 + \langle v \rangle^\perp$, $\|v\| = 1$, düzlemi için $N = v$ sağlanır. Bu taktirde $dN = 0$ dır ve π nin spacelike düzlem olması halinde $\lambda_i = 0$ olduğundan yüzey total umbiliktir.

2.

$$\mathbb{H}^2(r, p_0) = \{p \in E_1^3 \mid \langle p - p_0, p - p_0 \rangle = -r^2, z > 0\}$$

hiperbolik düzlemini alalım. Bu durumda $N(p) = \frac{p}{r}$ ve $dN_p(v) = \frac{v}{r}$ dir ve dolayısıyla $\lambda_i = -\frac{1}{r}$ olduğundan yüzey total umbiliktir. Burada $H = \frac{1}{r}$, $K = -\frac{1}{r^2}$ dir.

Şimdi, \mathbb{H}^2 yüzeyine neden hiperbolik düzlem dendiğini görelim:

Herbir $p \in \mathbb{H}^2$ ve $v \in T_p \mathbb{H}^2$, $\|v\| = 1$, için $\alpha(s) = \cosh(s)p + \sinh(s)v$ eğrisini tanımlayalım. Bu taktirde $\alpha(0) = p$ ve $\alpha'(0) = v$ olup $\alpha(s) \in \mathbb{H}^2$ dir. $\alpha''(s) = \alpha(s)$

olduğundan ivmenin teğet kısmı yok olur, yani $\alpha''(s)^\top = 0$ dir. Bu demektir ki α bir geodeziktir.

v tanjant vektörü keyfi olduğundan, p den başlayan bütün geodezikler yukarıdaki gibi yazılabilirler. α , herhangi bir $s \in \mathbb{R}$ için tanımlı olduğundan, yüzey tamdır. Bu taktirde \mathbb{H}^2 , $K = -1$ sabit eğriliği ile birlikte tam, basit bağlantılı bir yüzeydir. Diferensiyel Geometri'nin bir klasik sonucuna göre \mathbb{H}^2 , hiperbolik düzleme izometriktir.

3. $\mathbb{S}_1^2(r, p_0)$ De Sitter uzayı

$$\mathbb{S}_1^2(r, p_0) = \{p \in E_1^3 \mid \langle p - p_0, p - p_0 \rangle = r^2\}$$

olsun. Bu taktirde, $N(p) = \frac{p}{r}$ ve $dN_p(v) = \frac{v}{r}$ dir ve dolayısıyla yüzey total umbiliktir. Burada, $H = \frac{1}{r}$, $K = \frac{1}{r^2}$ dir.

Teorem 4.4.1. *Minkowski uzayda total umbilik yüzeyler sadece düzlemler, hiperbolik düzlemler veya De Sitter uzaylarıdır [18].*

İspat. Uygun parametrelendirilmiş bir $X = X(u, v)$ yüzeyi verilsin. Yüzey total umbilik ise,

$$\begin{aligned} (N \circ X)_u &= (f \circ X)X_u \\ (N \circ X)_v &= (f \circ X)X_v \end{aligned}$$

olacak şekilde bir düzgün f fonksiyonu vardır. u ve v ye göre diferensiyel alınırsa,

$$(f \circ X)_u X_v + (f \circ X)X_{uv} = (f \circ X)_v X_u + (f \circ X)X_{uv}$$

olur. Böylece,

$$f_u \circ X = f_v \circ X$$

dir. Bu demektir ki, bir koordinat komşuluğunda f bir sabit fonksiyondur, yani $f \circ X = r$, $r \in \mathbb{R}$ dir. Yüzey bağlantılı olduğundan, M üzerinde $f \circ X = r$ dir.

1. Eğer $r = 0$ ise, bu taktirde $N_u = N_v$ dir, yani N sabittir. Bu gösterir ki, yüzey bir düzlemdir.

2.Eğer $r \neq 0$ ise, $(N \circ X)_u = rX_u$ ve $(N \circ X)_v = rX_v$ dir. Bir komşulukta

$$h(u, v) = X(u, v) - \frac{1}{r}(N \circ X)(u, v)$$

fonksiyonunu tanımlayalım. Bu durumda $h_u = h_v = 0$ dır. Bu demektir ki h sabittir. Böylece,

$$X(u, v) - \frac{1}{r}(N \circ X)(u, v) = p_0$$

olacak şekilde $p_0 \in E_1^3$ vardır. Bu taktirde,

$$\langle X - p_0, X - p_0 \rangle = \pm \frac{1}{r^2}$$

dir. İşaret yüzeyin sırasıyla spacelike ve timelike olmasına bağlıdır. Bu durumlarda yüzey ya bir hiperbolik düzlem ya da De Sitter uzayıdır. \square

4.5 Sabit Ortalama Eğrilikli Spacelike Yüzeyler

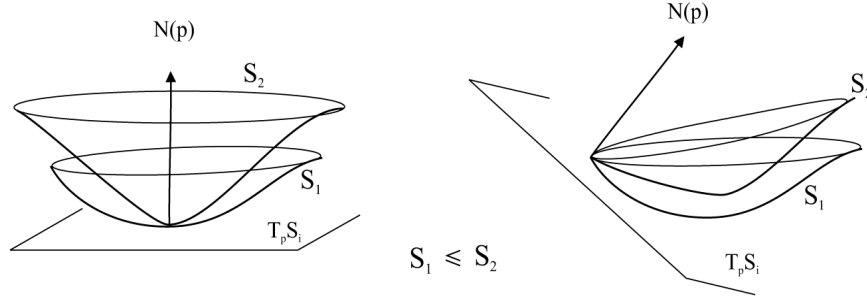
4.5.1 Maksimum prensibi

Bu kısımda, sabit ortalama eğrilikli spacelike yüzeyler için maksimum prensibi ifade edilecektir. Maksimum prensibi, kısmi diferensiyel denklemler teorisinin yine maksimum prensibi denilen teorisinin bir sonucudur. Maksimum prensibi ile, aynı ortalama eğriliğe sahip iki yüzeyin "karşılaştırması" yapılabilir.

S_1 ve S_2 , $p \in S_1 \cap S_2$ arakesit noktasında teğet iki düzlem olsunlar. Farzedelim ki yüzeylerden biri, örneğin S_1 , p noktası civarında diğerinin aşağısında yatsın. Her iki yüzeyi, $T_p S_1 = T_p S_2$ ortak tanjant düzleminin bir bölgesi üzerinde u_1 ve u_2 düzgün fonksiyonlarının graph ları olarak ele alalım. Bir izometriden sonra farzedelim ki $T_p S_i$, $z = 0$ yatay düzlemidir (burada spacelike şartı kullanılmaktadır). Bu iki graph için de p noktasında bağdaşacak şekilde yönlendirme alalım, yani $N_1(p) = N_2(p)$ olsun. Bu durumda, eğer tanjant düzlemde p nin bir komşuluğunda $u_1 \leq u_2$ ise S_1, S_2 nin aşağısında yatar denir. Bu taktirde, $S_1 \leq S_2$ (veya $S_2 \geq S_1$) yazılır [18].

p nin bir sınır noktası olması halinde şu tanım verilebilir:

Tanım 4.5.1. S_1 ve S_2 , E_1^3 de $p \in S_1 \cap S_2$ ve $N_1(p) = N_2(p)$ olmak üzere iki spacelike yüzey olsunlar. Eğer ortak tanjant düzlemde $S_i = \text{graph}(u_i)$ olarak alındığında, p nin bir komşuluğunda $u_1 \leq u_2$ ise p civarında $S_1 \leq S_2$ denir [18]. Eğer $p \in \partial S_1 \cap \partial S_2$ ise $T_p \partial S_1 = T_p \partial S_2$ şartı da ilave edilir (Şekil 4.2).



Şekil 4.2 Bir teğet noktada $S_1 \leq S_2$ olacak şekilde iki yüzey

Eğer $u_1 \leq u_2$ ise bu taktirde $H_1(p) \leq H_2(p)$ dir [18].

Literatürde bu sonuç genellikle karşılaştırma prensibi olarak adlandırılır.

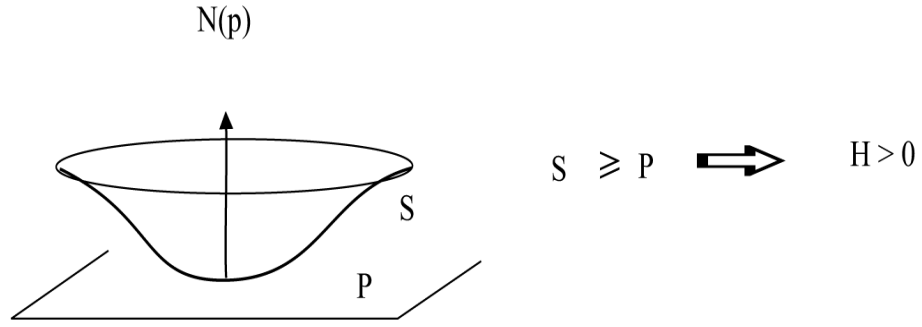
Karşılaştırma prensibi için aşağıdaki örnek verilebilir:

S , Şekil 4.3 ile verilen $H \neq 0$ sabit ortalama eğrilikli bir yüzey olsun. Yukarı doğru olan yönlendirmeye ortalama eğriliğin pozitif mi negatif mi olduğunu öğrenmek istiyoruz. S nin en alt noktasında P tanjant düzlemini alalım. Bu taktirde, $P \leq S$ dir. P düzlemi sıfır ortalama eğriliğe sahiptir (yönlendirmeden bağımsız). P noktasında yukarı doğru olan yönlendirmeyi alalım. Bu taktirde, $P \leq S$ dir ve karşılaştırma prensibinden dolayı $0 \leq H(p)$ elde edilir. $H(p)$ pozitif olduğundan $H \neq 0$ dır ve dolayısıyla S de $H > 0$ dır.

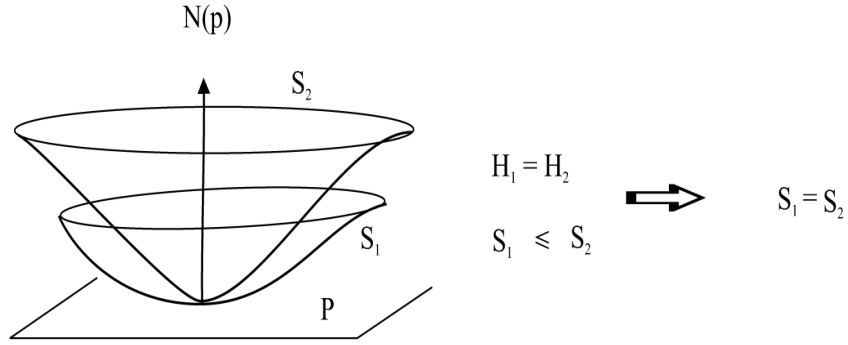
Maksimum prensibi şu gerçeği ifade eder:

Aynı ortalama eğriliğe sahip iki yüzeyden biri diğerinin aşağısında yatıyorsa, bu durumda her iki yüzey p civarında bir açık kümede bağıdaşır.

Teorem 4.5.1. (Maksimum Prensibi): S_1 ve S_2 bir ortak p noktasında (iç veya sınır) teğet iki spacelike yüzey olsunlar. Farzedelim ki $S_1 \leq S_2$ dir. Eğer ortalama eğrilikler aynı ve sabitlerse, bu taktirde p nin bir komşuluğunda $S_1 = S_2$ dir (Şekil 4.4) [18].



Şekil 4.3 Karşılaştırma Prensibi



Şekil 4.4 Maksimum Prensibi

4.6 Minkowski 3-Uzayında Dönel Yüzeyler

M, E_1^3 Minkowski 3-uzayında indirgenmiş metrikle donatılmış 2-boyutlu bir yüzey olsun.

Öklid uzayında bir dönel yüzey, keyfi bir eğrinin keyfi bir eksen etrafında döndürülmesiyle elde edilen yüzeydir. Bununla birlikte Minkowski 3-uzayında eğrilerin spacelike, timelike veya lightlike (null) gibi farklı türleri olduğundan ve bunun gibi spacelike, timelike veya lightlike (null) gibi farklı dönme eksenleri olduğundan dönel

yüzeylerin farklı çeşitleri vardır [25].

$\alpha : I = (a, b) \subset \mathbb{R} \longrightarrow \pi, E_1^3$ in π düzleminde bir eğri ve d de π düzleminin α eğrisiyle kesişmeyen bir doğrusu olmak üzere E_1^3 de bir M dönel yüzeyi, d dönme eksenini etrafında α eğrisinin döndürülmesiyle elde edilen yüzeydir.

Şimdi dönme ekseninin spacelike, timelike veya lightlike (null) olması durumlarına göre dönel yüzeyleri elde edelim:

İlk olarak farzedelim ki dönme eksenini $e_1 = (1, 0, 0)$ spacelike eksenini olsun. Bu takdirde α eğrisinin $Sp\{e_1, e_2\}$ düzleminde veya $Sp\{e_1, e_3\}$ düzleminde yattığı kabul edilebilir. Dolayısıyla α eğrisi f ve g düzgün fonksiyonlar ve f bir pozitif fonksiyon olmak üzere

$$\alpha(u) = (g(u), f(u), 0) \text{ veya } \alpha(u) = (g(u), 0, f(u)),$$

şeklinde parametrelendirilebilir.

A , 3×3 -tipinde bir regüler matris ve $0 \neq \xi \in E_1^3$ bir vektör olsun. Eğer A aşağıdaki şartları sağlıyorsa bu durumda pozitif yönlü bir dönme belirtir [20]:

$$I = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

3×3 -tipinde Lorentzian birim matris olmak üzere,

i) $A \cdot \xi = \xi,$

ii) $AIA^t = I,$

iii) $\det A = 1,$

dir .

Buradan görülebilir ki, $e_1 = (1, 0, 0)$ spacelike vektörünü sabit bırakan dönme matrisi,

$$A(v) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cosh v & \sinh v \\ 0 & \sinh v & \cosh v \end{bmatrix}, v \in \mathbb{R}$$

şeklindeki 3×3 matrislerin kümesidir.

Eğer α eğrisi $Sp\{e_1, e_2\}$ düzleminde ise M dönel yüzeyi,

$$\Psi(u, v) = (g(u), f(u) \cosh v, f(u) \sinh v); \quad (4.6.1)$$

eğer α eğrisi $Sp\{e_1, e_3\}$ düzleminde ise M dönel yüzeyi,

$$\Psi(u, v) = (g(u), f(u) \sinh v, f(u) \cosh v) \quad (4.6.2)$$

olarak parametrelendirilebilir.

Şimdi dönme ekseninin $e_3 = (0, 0, 1)$ timelike eksenini olduğunu kabul edelim. α eğrisi $Sp\{e_1, e_3\}$ düzleminde yatsın. Bu durumda α eğrisinin parametrelendirmelerinden biri, f ve g düzgün fonksiyonlar ve f bir pozitif fonksiyon olmak üzere,

$$\alpha(u) = (f(u), 0, g(u))$$

olarak alınabilir. $e_3 = (0, 0, 1)$ timelike vektörünü sabit bırakan dönme matrisi

$$A(v) = \begin{bmatrix} \cos v & -\sin v & 0 \\ \sin v & \cos v & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, 0 \leq v \leq 2\pi$$

dir. Dolayısıyla e_3 timelike eksenini etrafında α eğrisinin döndürülmesiyle oluşan M dönel yüzeyi

$$\Psi(u, v) = (f(u) \cos v, f(u) \sin v, g(u)) \quad (4.6.3)$$

şeklinde parametrelendirilir.

Şimdi de dönme ekseninin $Sp\{e_1, e_3\}$ düzleminin $(1, 0, 1)$ tarafından gerilen bir null doğrusu olduğunu kabul edelim. Bu taktirde $(1, 0, 1)$ vektörünü sabit bırakan dönme matrisi

$$A(v) = \begin{bmatrix} 1 - \frac{v^2}{2} & v & \frac{v^2}{2} \\ -v & 1 & v \\ -\frac{v^2}{2} & v & 1 + \frac{v^2}{2} \end{bmatrix}, v \in \mathbb{R}$$

şeklinde verilen 3×3 matrislerin kümesidir.

Dolayısıyla $\alpha(u) = (f(u), 0, g(u))$ şeklindeki $Sp\{e_1, e_3\}$ düzleminde yatan α eğrisinin $(1, 0, 1)$ tarafından gerilen null eksen etrafında döndürülmesiyle elde edilen M dönel yüzeyi,

$$\Psi(u, v) = \left(\left(1 - \frac{v^2}{2}\right)f(u) + \frac{v^2}{2}g(u), -vf(u) + vg(u), -\frac{v^2}{2}f(u) + \left(1 + \frac{v^2}{2}\right)g(u) \right)$$

dur.

4.6.1 Minkowski 3-uzayında dönel yüzeylerin bir sınıflandırması

Girişte de belirtildiği gibi Minkowski 3-uzayında dönel yüzeyler için çeşitli sınıflandırmalar yapılmıştır ([9, 17, 20]). Biz de burada dönel yüzeyleri, Γ_{ij}^k Christoffel sembolleri yardımıyla tanımladığımız ve Christoffel-like operatörü dediğimiz bir operatör yardımıyla sınıflandıracğız.

İyi bilindir ki Γ_{ij}^k Christoffel Sembolleri

$$\Gamma_{ij}^k = \frac{1}{2} \sum_m g^{km} \left\{ \frac{\partial g_{jm}}{\partial x^i} + \frac{\partial g_{im}}{\partial x^j} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial x^m} \right\}$$

şeklinde tanımlıdır [12]. Burada $g^{ij} = (g_{ij})^{-1}$ dir. Biz de burada Γ_{ij}^k Christoffel Sembolleri yardımıyla Christoffel-like operatörü diyeceğimiz şu operatörü tanımlayacağız:

$$\tilde{\Gamma}_{ij}^k = \frac{1}{2} \sum_m g^{km} \left\{ g_{jm} \frac{\partial}{\partial x^i} + g_{im} \frac{\partial}{\partial x^j} - g_{ij} \frac{\partial}{\partial x^m} \right\}.$$

E, F, G yukarıda tanımlanan dönel yüzeylerin 1. temel formlarının katsayılarını belirtmek üzere, $\tilde{\Gamma}_{11}^1$ Christoffel-like operatörü bir düzgün $\Psi(u, v)$ fonksiyonuna uygulanırsa

$$\tilde{\Gamma}_{11}^1(\Psi) = \frac{1}{2} \left\{ \frac{G}{EG - F^2} \{E\Psi_u\} - \frac{F}{EG - F^2} \{2F\Psi_u - E\Psi_v\} \right\} \quad (4.6.4)$$

elde edilir.

Bu kısımda,

$$\tilde{\Gamma}_{11}^1 \Psi_i = \lambda_i \Psi_i, \quad \lambda_i \in \mathbb{R}, \quad i = 1, 2, 3 \quad (4.6.5)$$

şartını sağlayan dönel yüzeylerin bir sınıflandırması incelenecektir. (4.6.1) ve (4.6.3) ile verilen dönel yüzeyler için iki farklı durum ayrı ayrı ele alınacaktır.

1. DURUM

Farzedelim ki M d6nel y6zeyi (4.6.1) ile verilsin. α eğrisinin

$$f'^2(u) + g'^2(u) = 1, \forall u \in I \quad (4.6.6)$$

olacak Şekilde yay parametresi ile verildiğini kabul edelim. Bu d6nel y6zey iÇin birinci ve ikinci temel formların katsayıları, sırasıyla,

$$E = 1, F = 0, G = -f^2(u), \quad (4.6.7)$$

$$L = g''(u)f'(u) - f''(u)g'(u), M = 0, N = -f(u)g'(u)$$

ve ortalama eğrilik ile Gauss eğriliği, sırasıyla,

$$H = \frac{1}{2}(g''(u)f'(u) - f''(u)g'(u) + \frac{g'(u)}{f(u)}), \quad (4.6.8)$$

$$K = \frac{g'(u)}{f(u)}(g''(u)f'(u) - f''(u)g'(u)) = -\frac{f''(u)}{f(u)}$$

dir. $t = t(u)$ bir d6zg6n fonksiyon olmak 6zere (4.6.6) Şartından dolayı f' ve g' fonksiyonları,

$$f'(u) = \cos t(u), g'(u) = \sin t(u), \forall u \in I \quad (4.6.9)$$

olarak yazılabilirler. Dolayısıyla

$$E = 1, F = 0, G = -f^2(u), L = t'(u), M = 0, N = -f(u) \cdot \sin t(u) \quad (4.6.10)$$

$$H = \frac{1}{2}(t'(u) + \frac{\sin t(u)}{f(u)}), K = \frac{\sin t(u) \cdot t'(u)}{f(u)}$$

olur.

$\tilde{\Gamma}_{11}^1 \Psi_i = \lambda_i \Psi_i, i = 1, 2, 3$ Şartını (4.6.1) d6nel y6zeyine uygularsak,

$$\tilde{\Gamma}_{11}^1(g(u)) = \lambda_1 g(u)$$

$$\tilde{\Gamma}_{11}^1(f(u) \cosh v) = \lambda_2 f(u) \cosh v \quad (4.6.11)$$

$$\tilde{\Gamma}_{11}^1(f(u) \sinh v) = \lambda_3 f(u) \sinh v$$

eŐitliklerine sahip oluruz.

(4.6.1) d6nel y6zeyi iin $\Psi_1(u, v) = g(u)$ olduğundan

$$\Psi_{1_u} = g'(u) = \sin t(u), \quad \Psi_{1_v} = 0$$

dir. Dolayısıyla (4.6.4) , (4.6.9), (4.6.10) ve (4.6.11) den

$$\tilde{\Gamma}_{11}^1(g(u)) = \frac{1}{2} \sin t(u)$$

ve buradan

$$\frac{1}{2} \sin t(u) = \lambda_1 g(u)$$

olur.

$\Psi_2(u, v) = f(u) \cosh v$ olduğundan

$$\Psi_{2_u} = f'(u) \cosh v = \cos t(u) \cosh v, \quad \Psi_{2_v} = f(u) \sinh v$$

dir. Dolayısıyla

$$\tilde{\Gamma}_{11}^1(f(u) \cosh v) = \frac{1}{2} \cos t(u) \cosh v$$

olup buradan

$$\frac{1}{2} \cos t(u) = \lambda_2 f(u)$$

dir.

Benzer ekilde

$\Psi_3(u, v) = f(u) \sinh v$ olduğundan

$$\frac{1}{2} \cos t(u) = \lambda_3 f(u)$$

bulunur. Dolayısıyla

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \sin t(u) &= \lambda_1 g(u) \\ \frac{1}{2} \cos t(u) &= \lambda_2 f(u) \\ \frac{1}{2} \cos t(u) &= \lambda_3 f(u) \end{aligned}$$

denklem sistemine ulaşırız. Buradan $\lambda_2 = \lambda_3$ olduğu açıktır. $\lambda_2 = \lambda_3 = \lambda$, $\lambda_1 = \mu$ dersek;

$$\cos t(u) = 2\lambda f(u) \quad (4.6.12)$$

$$\sin t(u) = 2\mu g(u)$$

denklem sistemine ulaşırız.

Bu nedenle $\tilde{\Gamma}_{11}^1 \Psi_i = \lambda_i \Psi_i$ şartını sağlayan (4.6.1) ile verilen d6nel y6zeylerin sınıflandırılması problemi, bu adi diferensiyel denklem sistemini 6zmeye indirgenmiş olur. şimdi λ ve μ değerlerine g6re bu denklem sisteminin 6z6mlerini irdeleyelim:

A. $\lambda = \mu = 0$ olsun. Bu taktirde,

$$\cos t(u) = 0$$

$$\sin t(u) = 0$$

denklem sistemine ulaşılır ki bu durum m6mk6n değildir. Dolayısıyla bu durumda d6nel y6zey yoktur.

B. $\lambda = \mu \neq 0$ olsun. Bu durumda (4.6.12) denklem sistemi,

$$\cos t(u) = 2\lambda f(u)$$

$$\sin t(u) = 2\lambda g(u)$$

olur.

Bu denklem sisteminde birinci denklem $-\sin t(u)$ ile, ikinci denklem $\cos t(u)$ ile çarpılıp çıkan denklemler toplanırsa,

$$f(u) \sin t(u) - g(u) \cos t(u) = 0$$

denklemini elde edilir. (4.6.9) dan

$$f(u)g'(u) - f'(u)g(u) = 0$$

veya

$$\frac{f'(u)}{f(u)} = \frac{g'(u)}{g(u)}$$

olur. Burada her iki tarafın integrali alınırsa;

$$f(u) = c.g(u)$$

olup bu durumda (4.6.1) döneel yüzeyi

$$\Psi(u, v) = (g(u), c.g(u) \cosh v, c.g(u) \sinh v)$$

şeklinde parametrelendirilir.

C. $\lambda = 0, \mu \neq 0$ olsun. Bu durumda (4.6.12) den $\cos t(u) = 0$ olur. O halde,

$$f'(u) = \cos t(u) = 0 \text{ olduğundan } f(u) = c_1, c_1 \in \mathbb{R};$$

$$f'^2(u) + g'^2(u) = 1 \text{ olduğundan } g(u) = u + c_2, c_2 \in \mathbb{R} \text{ dir.}$$

Dolayısıyla bu durumdaki döneel yüzey,

$$\Psi(u, v) = (u + c_2, c_1 \cosh v, c_1 \sinh v)$$

şeklinde bir parametrelendirmeye sahiptir. Bu yüzey, $\mathbb{S}_1^1(r) \times \mathbb{R}$ Lorentz hiperbolik silindiridir.

D. $\lambda \neq 0, \mu = 0$ olsun. Bu taktirde (4.6.12) den $\sin t(u) = 0$ olup (4.6.10) dan $H = K = 0$ elde edilir. Bu demektir ki bu durumdaki döneel yüzey minimaldir.

Ayrıca $g'(u) = \sin t(u) = 0$ olduğundan $g(u) = c_1, c_1 \in \mathbb{R}$ dir. Buradan, $f(u) = u + c_2, c_2 \in \mathbb{R}$ olur. Böylece döneel yüzey,

$$\Psi(u, v) = (c_1, (u + c_2) \cosh v, (u + c_2) \sinh v)$$

şeklinde parametrelendirilebilir.

E. $\lambda \neq 0, \mu \neq 0$ ve $\lambda \neq \mu$ olsun.

Bu durumda (4.6.12) denklem sistemi,

$$\cos t(u) = 2\lambda f(u)$$

$$\sin t(u) = 2\mu g(u)$$

şeklindedir.

B dekiyle aynı prosedür uygulanırsa,

$$-\lambda f(u) \sin t(u) + \mu g(u) \cos t(u) = 0,$$

veya

$$\frac{f'(u)}{f(u)} = \frac{\lambda g'(u)}{\mu g(u)}$$

olup $\frac{\lambda}{\mu} = c_1$ denir ve her iki tarafın integrali alınırsa,

$$f(u) = c_2 \cdot g^{c_1}(u)$$

bulunur. Dolayısıyla bu durumdaki dönele yüzey

$$\Psi(u, v) = (g(u), c_2 \cdot g^{c_1}(u) \cosh v, c_2 \cdot g^{c_1}(u) \sinh v)$$

şeklindedir.

Böylece aşağıdaki teorem verilebilir:

Teorem 4.6.1. M, E_1^3 de (4.6.1) ile verilen dönele yüzey olsun. Bu takdirde M için $\tilde{\Gamma}_{11}^1 \Psi_i = \lambda_i \Psi_i, i = 1, 2, 3$ dir ancak ve ancak M aşağıdaki dönele yüzeylerden biridir:

- i) $\Psi(u, v) = (g(u), c \cdot g(u) \cosh v, c \cdot g(u) \sinh v), c \in \mathbb{R}$ dönele yüzeyi,
- ii) $\Psi(u, v) = (u + c_2, c_1 \cosh v, c_1 \sinh v), c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ Lorentz hiperbolik silindiri,
- iii) $\Psi(u, v) = (c_1, (u + c_2) \cosh v, (u + c_2) \sinh v), c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ minimal yüzeyi,
- iv) $\Psi(u, v) = (g(u), c_2 \cdot g^{c_1}(u) \cosh v, c_2 \cdot g^{c_1}(u) \sinh v), c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ dönele yüzeyi.

2. DURUM

Şimdi farzedelim ki E_1^3 de M yüzeyi (4.6.3) ile verilsin.

$$f'^2(u) - g'^2(u) = -1, \forall u \in I \quad (4.6.13)$$

olduğunu varsayalım.

(4.6.13) ten dolayı, bir $t = t(u)$ düzgün fonksiyonu için

$$f'(u) = \sinh t(u), g'(u) = \cosh t(u), \forall u \in I \quad (4.6.14)$$

olarak yazılabilir.

Bu yüzey için

$$E = -1, F = 0, G = f^2(u), \quad (4.6.15)$$

$$L = g''(u)f'(u) - g'(u)f''(u), M = 0, N = f(u)g'(u);$$

$$H = \frac{1}{2}(g'(u)f''(u) - g''(u)f'(u) + \frac{g'(u)}{f(u)}), \quad (4.6.16)$$

$$K = -\frac{g'(u)}{f(u)}(g''(u)f'(u) - g'(u)f''(u)) = \frac{f''(u)}{f(u)}$$

ve (4.6.14) ten dolayı

$$E = -1, F = 0, G = f^2(u), L = -t'(u), M = 0, N = f(u) \cosh t(u); \quad (4.6.17)$$

$$H = \frac{1}{2}(t'(u) + \frac{\cosh t(u)}{f(u)}), K = \frac{\cosh t(u).t'(u)}{f(u)}$$

olarak elde edilir. $\tilde{\Gamma}_{11}^1 \Psi_i = \lambda_i \Psi_i$, $i = 1, 2, 3$ şartını (4.6.3) ile verilen dönele yüzeye uygularsak,

$$\tilde{\Gamma}_{11}^1(f(u) \cos v) = \lambda_1 f(u) \cos v$$

$$\tilde{\Gamma}_{11}^1(f(u) \sin v) = \lambda_2 f(u) \sin v \quad (4.6.18)$$

$$\tilde{\Gamma}_{11}^1(g(u)) = \lambda_3 g(u)$$

olur. (4.6.4), (4.6.14), (4.6.15) ve (4.6.18) den

$$\frac{1}{2} \sinh t(u) = \lambda_1 f(u)$$

$$\frac{1}{2} \sinh t(u) = \lambda_2 f(u)$$

$$\frac{1}{2} \cosh t(u) = \lambda_3 g(u)$$

denkleme sistemine ulaşılır. Bu sistemden, $\lambda_1 = \lambda_2$ dir. Burada $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda$, $\lambda_3 = \mu$ denirse,

$$\sinh t(u) = 2\lambda f(u) \quad (4.6.19)$$

$$\cosh t(u) = 2\mu g(u)$$

denklem sistemi elde edilir.

Bu nedenle $\tilde{\Gamma}_{11}^1 \Psi_i = \lambda_i \Psi_i$ şartını sağlayan ve (4.6.3) denklemi ile verilen dönele yüzeyin sınıflandırılması problemi, bu adi diferensiyel denklem sisteminin çözümüne indirgenmiş olur.

Şimdi bu denklem sisteminin çözümlerini λ ve μ değerleri için irdeleyelim:

A. $\lambda = \mu = 0$ olsun. Bu takdirde (4.6.19) dan,

$$\sinh t(u) = 0$$

$$\cosh t(u) = 0$$

denklem sistemi elde edilir ki bu mümkün değildir. Dolayısıyla $\lambda = \mu = 0$ iken dönele yüzey yoktur.

B. $\lambda = \mu \neq 0$ olsun. Bu durumda,

$$\sinh t(u) = 2\lambda f(u)$$

$$\cosh t(u) = 2\lambda g(u)$$

sistemine ulaşılır.

Bu denklem sisteminde birinci denklem $-\cosh t(u)$ ile, ikinci denklem $\sinh t(u)$ ile çarpılıp çıkan sonuçlar toplanırsa

$$f(u) \cosh t(u) - g(u) \sinh t(u) = 0$$

denklemine ulaşılır. (4.6.14) ten

$$f(u)g'(u) - g(u)f'(u) = 0$$

veya

$$\frac{f'(u)}{f(u)} = \frac{g'(u)}{g(u)}$$

denklemine ulaşılır. Her iki tarafın integralinden,

$$f(u) = c.g(u), c \in \mathbb{R}$$

olup bu taktirde d6nel y6zey,

$$\Psi(u, v) = (c \cdot g(u) \cos v, c \cdot g(u) \sin v, g(u))$$

olur.

C. $\lambda = 0, \mu \neq 0$ olsun.

Bu durumda $\sinh t(u) = 0$ olacağından $f'(u) = \sinh t(u) = 0$ ve dolayısıyla $f(u) = c_1, c_1 \in \mathbb{R}$ dir. Buradan $g(u) = u + c_2, c_2 \in \mathbb{R}$ bulunur. Yani $\lambda = 0, \mu \neq 0$ olması durumunda d6nel y6zey

$$\Psi(u, v) = (c_1 \cos v, c_1 \sin v, u + c_2)$$

olur ki bu y6zey dairesel silindirdir.

D. $\lambda \neq 0, \mu = 0$ olsun. Bu durumda,

$\cosh t(u) = 0$ olur. Bu durum "cosh" fonksiyonunun tanımından dolayı m6mk6n değildir. Dolayısıyla bu Şartı sağlayan d6nel y6zey yoktur.

E. $\lambda \neq 0, \mu \neq 0$ ve $\lambda \neq \mu$ olsun. Bu taktirde (4.6.19) denklem sistemimiz,

$$\sinh t(u) = 2\lambda f(u)$$

$$\cosh t(u) = 2\mu g(u)$$

dir.

Bu denklem sisteminde birinci denklem $\cosh t(u)$ ile, ikinci denklem $-\sinh t(u)$ ile çarpılıp toplanırsa,

$$\lambda f(u)g'(u) - \mu g(u)f'(u) = 0$$

veya

$$\frac{f'(u)}{f(u)} = \frac{\lambda g'(u)}{\mu g(u)}$$

olur. $\frac{\lambda}{\mu} = c_1, c_1 \in \mathbb{R}$ denirse ve integral alınırsa

$$f(u) = c_2 \cdot g^{c_1}(u), c_2 \in \mathbb{R}$$

bulunur. Dolayısıyla d6nel y6zey,

$$\Psi(u, v) = (c_2 \cdot g^{c_1}(u) \cos v, c_2 \cdot g^{c_1}(u) \sin v, g(u))$$

şeklinde parametrelendirilir.

Böylece aşağıdaki teorem verilebilir:

Teorem 4.6.2. M, E_1^3 de (4.6.3) ile verilen dönel yüzey olsun. Bu taktirde $\tilde{\Gamma}_{11}^1 \Psi_i = \lambda_i \Psi_i$, $i = 1, 2, 3$ dir ancak ve ancak M aşağıdaki dönel yüzeylerden biridir:

i) $\Psi(u, v) = (c.g(u) \cos v, c.g(u) \sin v, g(u)), c \in \mathbb{R}$ dönel yüzeyi,

ii) $\Psi(u, v) = (c_1 \cos v, c_1 \sin v, u + c_2), c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ dairesel silindiri,

iii) $\Psi(u, v) = (c_2.g^{c_1}(u) \cos v, c_2.g^{c_1}(u) \sin v, g(u)), c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ dönel yüzeyi.

Şimdi bu dönel yüzeyler için birkaç örnek verelim:

Örnek 4.6.1. $\Psi(u, v) = (u + 2, 3 \cosh v, 3 \sinh v)$ dönel yüzeyinin cinsini, $\tilde{\Gamma}_{11}^1 \Psi_i = \lambda_i \Psi_i$, $i = 1, 2, 3$ şartı altında λ ve μ değerlerine bağlı olarak belirleyelim:

$\Psi(u, v)$ yüzeyinin u ve v ye göre türevleri sırasıyla,

$$\Psi_u = (1, 0, 0), \Psi_v = (0, 3 \sinh v, 3 \cosh v)$$

dir. Ayrıca,

$$E = 1, F = 0, G = -9$$

dur.

$$\begin{aligned}\tilde{\Gamma}_{11}^1(u+2) &= \frac{1}{2} \\ \tilde{\Gamma}_{11}^1(3 \cosh v) &= 0 \\ \tilde{\Gamma}_{11}^1(3 \sinh v) &= 0\end{aligned}$$

olduğundan, (4.6.5) ten dolayı

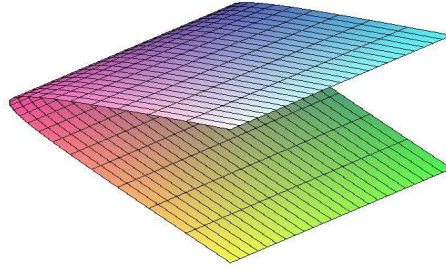
$$\begin{aligned}\frac{1}{2} &= \lambda_1(u+2) \\ 0 &= \lambda_2 \cosh v \\ 0 &= \lambda_3 \sinh v\end{aligned}$$

elde edilir. O halde $\lambda_2 = \lambda_3 = \lambda = 0$, $\lambda_1 = \mu \neq 0$ olmalıdır. Dolayısıyla bu durum verilen yüzeyin, birinci durumun **C** şikkına ait olup Lorentz Hiperbolik silindir olduğunu gösterir.

Ayrıca bu yüzey için,

$$L = 0, M = 0, N = -3 \text{ ve } H = \frac{1}{6}, K = 0 \text{ dır.}$$

Şekil 4.5 te, $\Psi(u, v) = (u + 2, 3 \cosh v, 3 \sinh v)$ Lorentz Hiperbolik silindiri görülebilir.



Şekil 4.5 $\Psi(u, v) = (u + 2, 3 \cosh v, 3 \sinh v)$ Lorentz Hiperbolik Silindiri

Örnek 4.6.2. $\Psi(u, v) = (3, (u + 2) \cosh v, (u + 2) \sinh v)$ yüzeyi için;

$$E = 1, F = 0, G = -(u + 2)^2$$

bulunur.

$$\tilde{\Gamma}_{11}^1(3) = 0, \tilde{\Gamma}_{11}^1((u + 2) \cosh v) = \frac{1}{2} \cosh v, \tilde{\Gamma}_{11}^1((u + 2) \sinh v) = \frac{1}{2} \sinh v$$

olduğundan, (4.6.5) ten dolayı, sırasıyla,

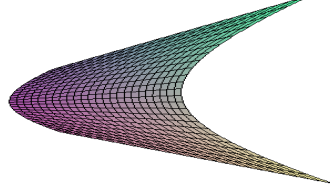
$$0 = 3\lambda_1, \frac{1}{2} = \lambda_2(u + 2), \frac{1}{2} = \lambda_3(u + 2)$$

elde edilir. Dolayısıyla $\lambda_2 = \lambda_3 = \lambda \neq 0, \lambda_1 = \mu = 0$ olmalıdır. Burada

$$L = M = N = 0 \text{ ve } H = K = 0$$

dır (1.Durum **D** şikkı).

Şekil 4.6'da bu yüzey görülmektedir.



Şekil 4.6 $\Psi(u, v) = (3, (u+2) \cosh v, (u+2) \sinh v)$ Dönel Yüzeyi

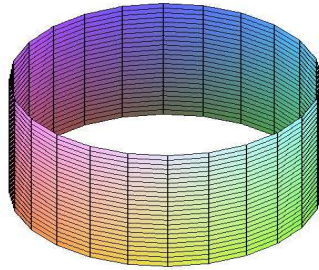
Örnek 4.6.3. $\Psi(u, v) = (3 \cos v, 3 \sin v, u+2)$ dönel yüzeyi ele alınırsın ve (4.6.5) şartı kullanılırsa,

$$0 = 3\lambda_1 \cos v$$

$$0 = 3\lambda_2 \sin v$$

$$\frac{1}{2} = \lambda_3(u+2)$$

elde edilir. Dolayısıyla $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda = 0$ ve $\lambda_3 = \mu \neq 0$ dır. Bu taktirde bu dönel yüzey ikinci durumun C şikkına ait olup dairesel silindirdir (Şekil 4.7).



Şekil 4.7 $\Psi(u, v) = (3 \cos v, 3 \sin v, u+2)$ Dairesel Silindiri

Örnek 4.6.4. Şimdi de $\Psi(u, v) = (3 \cos^2 u \cos v, 3 \cos^2 u \sin v, \cos u)$ dönel yüzeyini inceleyelim.

$$\tilde{\Gamma}_{11}^1(3 \cos^2 u \cos v) = -3 \cos u \sin u \cos v$$

$$\tilde{\Gamma}_{11}^1(3 \cos^2 u \sin v) = -3 \cos u \sin u \sin v$$

$$\tilde{\Gamma}_{11}^1(\cos u) = -\frac{1}{2} \sin u$$

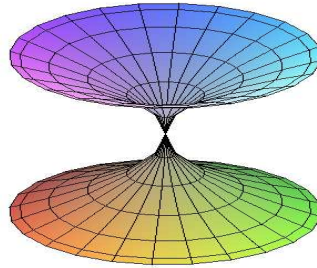
olduğundan, (4.6.5) şartından dolayı

$$-\sin u = \lambda_1 \cos u$$

$$-\sin u = \lambda_2 \cos u$$

$$-\frac{1}{2} \sin u = \lambda_3 \cos u$$

olur. Bu nedenle, $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda \neq 0$ ve $\lambda_3 = \mu \neq 0$ dir. Ayrıca $\lambda \neq \mu$ dür. Dolayısıyla bu yüzey ikinci durumun **E** şikkına aittir. Bu yüzey Şekil 4.8’de görülebilir.



Şekil 4.8 $\Psi(u, v) = (3 \cos^2 u \cos v, 3 \cos^2 u \sin v, \cos u)$ Dönel Yüzeyi

4.6.2 E_1^3 Minkowski 3-uzayında spacelike ve timelike eksenli spacelike minimal dönel yüzeyler

Teorem 4.6.3. $\Psi : M \rightarrow E_1^3, E_1^3$ de spacelike veya timelike eksenler etrafındaki bir spacelike dönel yüzey olsun. Bu durumda Ψ , aşağıdakilerden biriyle parametrelendirilir:

1) Ψ , $e_1 = (1, 0, 0)$ spacelike eksenini etrafında, $Sp\{e_1, e_3\}$ düzlemindeki $(u, 0, f(u))$ şeklinde tanımlı profil eğrisinin döndürülmesiyle elde edilen dönel yüzey ise,

$$\Psi(u, v) = (u, f(u) \sinh v, f(u) \cosh v)$$

şeklinde parametrelendirilebilir.

Bu yüzey için ortalama eğrilik,

$$H = \frac{f(u)f''(u) - f'^2(u) + 1}{2f(u)(1 - f'^2)^{\frac{3}{2}}} \quad (4.6.20)$$

dir.

2) Ψ , $e_3 = (0, 0, 1)$ timelike eksenini etrafında, $Sp\{e_1, e_3\}$ düzlemindeki $(f(u), 0, u)$ şeklinde tanımlı profil eğrisinin döndürülmesiyle elde edilen dönel yüzey ise,

$$\Psi(u, v) = (f(u) \cos v, f(u) \sin v, u)$$

şeklinde parametrelendirilebilir.

Bu yüzey için ortalama eğrilik,

$$H = \frac{f(u)f''(u) - f'^2(u) + 1}{2f(u)(f'^2 - 1)^{\frac{3}{2}}} \quad (4.6.21)$$

dir.

Tanım 4.6.1. $\varphi : M \rightarrow E_1^3$ immersiyonuna **konformal** denir, eğer

$$\begin{aligned} \langle \varphi_u, \varphi_v \rangle &= 0, \\ \|\varphi_u\| &= \|\varphi_v\| = e^{\frac{x}{2}} \end{aligned}$$

ise, ki burada (u, v) M de bir lokal koordinat sistemi ve x , M den \mathbb{R} ye reel değerli bir fonksiyondur [20].

Tanım 4.6.2. Bir $\Psi : M \rightarrow E_1^3$ konformal spacelike immersiyonuna **minimal** denir, eğer $H = 0$ ise.

E_1^3 de spacelike veya timelike eksenler etrafındaki spacelike minimal dönel yüzeyler, $H = 0$ olmak üzere yukarıdaki teoremden verilen diferensiyel denklemler çözülerek bulunabilir.

E_1^3 -de dönme eksenini spacelike olan spacelike minimal dönel yüzeyler

Burada, dönme eksenini $e_1 = (1, 0, 0)$ olan dönel yüzeyin minimal, yani $H = 0$ olduğunu kabul edelim. Bu durumda (4.6.20) denkleminde,

$$\frac{f(u)f''(u) - f'^2(u) + 1}{f(u)(1 - f'^2)^{\frac{3}{2}}} = 0 \quad (4.6.22)$$

olur. Ayrıca bu dönel yüzey için,

$$E = 1 - f'^2(u), \quad F = 0, \quad G = f^2(u)$$

dur. Diğer yandan, Ψ konformal spacelike immersiyon olduğundan,

$$1 - f'^2(u) = f^2(u)$$

dur. Böylece, (4.6.22) deki non-lineer $f(u)f''(u) - f'^2(u) + 1 = 0$ denklemi, konformallik şartıyla birlikte

$$f''(u) + f(u) = 0$$

lineer denkleme indirgenir ki bu lineer diferensiyel denklemin çözümü,

$$f(u) = c_1 \cos u + c_2 \sin u$$

dur. Bu nedenle, dönme eksenini e_1 spacelike eksenini olan spacelike minimal dönel yüzeyler,

$$\Psi(u, v) = (u, (c_1 \cos u + c_2 \sin u) \sinh v, (c_1 \cos u + c_2 \sin u) \cosh v)$$

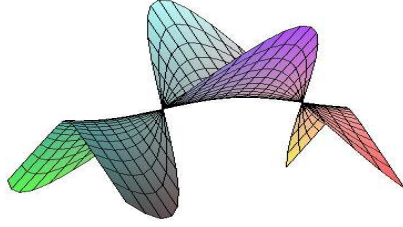
şeklinde verilir.

Şekil 4.9, $c_1 = 3, c_2 = 2$ olacak şekilde bu yüzeylerin bir örneğini verir.

E_1^3 -de dönme eksenini timelike olan spacelike minimal dönel yüzeyler

$e_3 = (0, 0, 1)$ timelike eksenini etrafındaki dönel yüzeylerin ortalama eğriliği (4.6.21) ile verilmişti. Şimdi kabul edelim ki $H = 0$ dır. Bu durumda,

$$\frac{f(u)f''(u) - f'^2(u) + 1}{f(u)(f'^2 - 1)^{\frac{3}{2}}} = 0 \quad (4.6.23)$$



Şekil 4.9

olur. Burada, konformallik şartından dolayı,

$$f'^2(u) - 1 = f^2(u)$$

dur. Böylece (4.6.23) denklemi

$$f''(u) - f(u) = 0$$

lineer denkleme indirgenir ve bu lineer diferensiyel denklemin çözümü de,

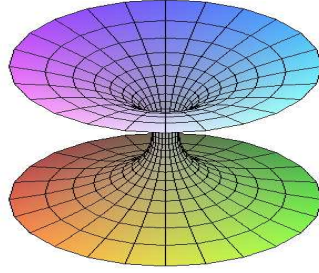
$$f(u) = c_1 e^u + c_2 e^{-u}$$

dur. Bu nedenle e_3 timelike eksenini etrafındaki spacelike minimal dönele yüzeyler,

$$\Psi(u, v) = ((c_1 e^u + c_2 e^{-u}) \cos v, (c_1 e^u + c_2 e^{-u}) \sin v, u)$$

şeklindedir.

Şekil 4.10, $c_1 = \frac{1}{2}$, $c_2 = \frac{1}{2}$ olacak şekilde bu yüzeyler için bir örnektir.



Şekil 4.10

4.6.3 Sabit Eğrilikli Düzlemsel Profil Eğrileri Tarafından Oluşturulan Dönel Yüzeyler

Üçüncü bölümde, Minkowski 3-uzayında sabit eğrilikli düzlemsel eğriler ele alınmıştır. Bu kısımda da elde edilen o eğriler profil eğrileri olarak düşünülüp, bu profil eğrilerinin spacelike, timelike ve lightlike eksenler etrafında döndürülmesiyle oluşan dönel yüzeyler elde edilerek bu dönel yüzeylerle ilgili bazı karakterizasyonlar verildi.

4.6.3.1. Sabit eğrilikli düzlemsel timelike profil eğrileri tarafından oluşturulan dönel yüzeyler

Üçüncü bölümde $\pi = Sp\{e_2, e_3\}$ timelike düzleminde yer alan sabit eğriliğe sahip düzlemsel timelike eğri,

$$\alpha(s) = \frac{1}{a}(0, \cosh(as + b), \sinh(as + b)) \quad (4.6.24)$$

olarak bulunmuştur. Şimdi bu α eğrisinin eksenler etrafında döndürülmesiyle oluşan dönel yüzeyleri bulalım:

- i) Sabit eğrilikli düzlemsel (4.6.24) timelike profil eğrisinin e_1 ve e_2 spacelike ek-

senleri etrafında döndürülmesiyle oluşan dönel yüzeyler, sırasıyla,

$$\Psi(s,t) = \frac{1}{a}(0, \cosh(as+b) \cosh t + \sinh(as+b) \sinh t, \cosh(as+b) \sinh t + \sinh(as+b) \cosh t) \quad (4.6.25)$$

ve

$$\Psi(s,t) = \frac{1}{a}(\sinh(as+b) \sinh t, \cosh(as+b), \sinh(as+b) \cosh t) \quad (4.6.26)$$

dir.

(4.6.25) dönel yüzeyi $\pi = Sp\{e_2, e_3\}$ düzleminin bir parçası olup timelike tır.

(4.6.26) dönel yüzeyinin Gauss dönüşümü,

$$G = (\sinh(as+b) \sinh t, \cosh(as+b), \sinh(as+b) \cosh t)$$

dir. G bir spacelike vektördür ve dolayısıyla (4.6.26) ile verilen dönel yüzey timelike tır.

Ayrıca, (4.6.26) ile verilen dönel yüzeyin H ortalama eğriliği ve K Gauss eğriliği, sırasıyla,

$$H = -a, \quad K = a^2$$

olarak bulunur.

ii) Sabit eğrilikli düzlemsel (4.6.24) timelike profil eğrisinin e_3 timelike eksenini etrafında döndürülmesiyle oluşan dönel yüzey

$$\Psi(s,t) = \frac{1}{a}(-\cosh(as+b) \sinh t, \cosh(as+b) \cosh t, \sinh(as+b)) \quad (4.6.27)$$

dir. Bu yüzeyin Gauss dönüşümü

$$G = (\cosh(as+b) \sinh t, -\cosh(as+b) \cosh t, -\sinh(as+b))$$

olup, G spacelike olduğundan dolayı Ψ yüzeyi timelike tır. Ayrıca bu dönel yüzey için

$$H = a, \quad K = a^2$$

dir.

iii) Sabit eğrilikli düzlemsel (4.6.24) timelike profil eğrisinin $(1, 0, 1)$ lightlike eksenini etrafında döndürülmesiyle oluşan dönel yüzey

$$\Psi(s, t) = \frac{1}{a}(t \cosh(as + b) + \frac{t^2}{2} \sinh(as + b), \cosh(as + b) + t \sinh(as + b), t \cosh(as + b) + (1 + \frac{t^2}{2}) \sinh(as + b)) \quad (4.6.28)$$

dir. Bu yüzeyin G Gauss dönüşümü

$$G = (t \cosh(as + b) + \frac{t^2}{2} \sinh(as + b), \cosh(as + b) + t \sinh(as + b), t \cosh(as + b) + (1 + \frac{t^2}{2}) \sinh(as + b))$$

dir. G spacelike olduğundan (4.6.28) ile verilen yüzey timelike tır. Ayrıca bu yüzey için

$$H = -a, \quad K = a^2$$

elde edilir.

O halde sabit eğrilikli düzlemsel timelike profil eğrisinin spacelike, timelike ve lightlike eksenler etrafında döndürülmesiyle oluşan dönel yüzeyler için aşağıdaki tabloyu verebiliriz:

Profil Eğrisi	Düzlem	Dönme Ekseni	DÖNEL YÜZEY
Timelike	Timelike	Spacelike (e_1)	Timelike
		Spacelike (e_2)	Timelike
		Timelike (e_3)	Timelike
		Lightlike ($(1, 0, 1)$)	Timelike

4.6.3.2. Sabit eğrilikli düzlemsel spacelike profil eğrileri tarafından oluşturulan dönel yüzeyler

a) $\pi = Sp\{e_1, e_2\}$ spacelike düzleminde yer alan sabit eğrilikli düzlemsel spacelike eğri

$$\alpha(s) = \frac{1}{a}(-\cos(as + b), \sin(as + b), 0) \quad (4.6.29)$$

olarak bulunmuştur.

i) Sabit eğrilikli düzlemsel (4.6.29) spacelike profil eğrisinin e_1 ve e_2 spacelike eksenleri etrafında döndürülmesiyle oluşan dönel yüzeyler, sırasıyla,

$$\Psi(s, t) = \frac{1}{a}(-\cos(as + b), \sin(as + b) \cosh t, \sin(as + b) \sinh t) \quad (4.6.30)$$

ve

$$\Psi(s, t) = \frac{1}{a}(-\cos(as + b) \cosh t, \sin(as + b), -\cos(as + b) \sinh t) \quad (4.6.31)$$

dir. (4.6.30) ile verilen dönel yüzeyin Gauss dönüşümü

$$G = (\cos(as + b), -\sin(as + b) \cosh t, -\sin(as + b) \sinh t)$$

olup, G bir spacelike vektör olduğundan (4.6.30) ile verilen dönel yüzey timelike tir.

(4.6.31) ile verilen dönel yüzeyin Gauss dönüşümü

$$G = (-\cos(as + b) \cosh t, \sin(as + b), -\cos(as + b) \sinh t)$$

dir ve G spacelike tir. Dolayısıyla (4.6.31) ile verilen dönel yüzey timelike tir.

Ayrıca (4.6.30) ve (4.6.31) ile verilen dönel yüzeyler için H ve K , sırasıyla,

$$H = a, \quad K = a^2$$

ve

$$H = -a, \quad K = a^2$$

olarak elde edilir.

ii) Sabit eğrilikli düzlemsel (4.6.29) spacelike profil eğrisinin e_3 timelike eksen etrafında döndürülmesiyle oluşan dönel yüzey

$$\Psi(s, t) = \frac{1}{a}(-\cos(as + b) \cos t - \sin(as + b) \sin t, -\cos(as + b) \sin t + \sin(as + b) \cos t, 0) \quad (4.6.32)$$

dir. Bu dönel yüzey $\pi = Sp\{e_1, e_2\}$ düzleminin bir parçası olup spacelike tir.

iii) Sabit eğrilikli düzlemsel (4.6.29) spacelike profil eğrisinin $(1, 0, 1)$ lightlike eksenini etrafında döndürülmesiyle oluşan dönel yüzey

$$\Psi(s, t) = \frac{1}{a} \left(-\left(1 - \frac{t^2}{2}\right) \cos(as + b) + t \sin(as + b), \right. \\ \left. t \cos(as + b) + \sin(as + b), \frac{t^2}{2} \cos(as + b) + t \sin(as + b) \right) \quad (4.6.33)$$

dir. Bu dönel yüzey için Gauss dönüşümü

$$G = \left(\left(1 - \frac{t^2}{2}\right) \cos(as + b) - t \sin(as + b), -t \cos(as + b) - \sin(as + b), \right. \\ \left. - \frac{t^2}{2} \cos(as + b) - t \sin(as + b) \right)$$

olup, G bir spacelike vektördür. Dolayısıyla (4.6.33) ile verilen dönel yüzey timelike tır.

Ayrıca (4.6.33) için

$$H = a, \quad K = a^2$$

dir.

O halde $\pi = Sp\{e_1, e_2\}$ spacelike düzleminde yer alan sabit eğrilikli düzlemsel spacelike profil eğrisinin spacelike, timelike ve lightlike eksenler etrafında döndürülmesiyle oluşan dönel yüzeyler için aşağıdaki tabloyu verebiliriz:

Profil Eğrisi	Düzlem	Dönme Ekseni	DÖNEL YÜZEY
Spacelike	Spacelike	Spacelike (e_1)	Timelike
		Spacelike (e_2)	Timelike
		Timelike (e_3)	Spacelike
		Lightlike ($(1, 0, 1)$)	Timelike

b) $\pi = Sp\{e_1, e_3\}$ timelike düzleminde yer alan sabit eğrilikli düzlemsel spacelike eğri

$$\alpha(s) = \frac{1}{a} (\sinh(as + b), 0, \cosh(as + b)) \quad (4.6.34)$$

şeklinde elde edilmişti.

i) Sabit eğrilikli düzlemsel (4.6.34) spacelike profil eğrisinin e_1 ve e_2 spacelike eksenleri etrafında döndürülmesiyle oluşan dönel yüzeyler, sırasıyla,

$$\Psi(s, t) = \frac{1}{a} (\sinh(as + b), \cosh(as + b) \sin ht, \cosh(as + b) \cos ht) \quad (4.6.35)$$

ve

$$\Psi(s,t) = \frac{1}{a}(\sinh(as+b) \cosh t + \cosh(as+b) \sinh t, 0, \sinh(as+b) \sinh t + \cosh(as+b) \cosh t) \quad (4.6.36)$$

dir.

(4.6.35) ile verilen dönel yüzeyin Gauss dönüşümü

$$G = (-\sinh(as+b), -\cosh(as+b) \sinh t, -\cosh(as+b) \cosh t)$$

dir. G bir timelike vektör olduğundan (4.6.35) dönel yüzeyi spacelike tır. Ayrıca (4.6.35) için

$$H = a, \quad K = a^2$$

dır.

(4.6.36) ile verilen dönel yüzey $\pi = Sp\{e_1, e_3\}$ düzleminin bir parçası olup timelike tır.

ii) Sabit eğrilikli düzlemsel (4.6.34) spacelike profil eğrisinin e_3 timelike eksenini etrafında döndürülmesiyle oluşan dönel yüzey

$$\Psi(s,t) = \frac{1}{a}(\sinh(as+b) \cos t, \sinh(as+b) \sin t, \cosh(as+b)) \quad (4.6.37)$$

dir. Bu dönel yüzey için

$$G = (-\sinh(as+b) \cos t, -\sinh(as+b) \sin t, -\cosh(as+b))$$

Gauss dönüşümü timelike olduğundan (4.6.37) ile verilen dönel yüzey spacelike tır.

Ayrıca (4.6.37) için

$$H = a, \quad K = a^2$$

olarak bulunur.

iii) Sabit eğrilikli düzlemsel (4.6.34) spacelike profil eğrisinin $(1, 0, 1)$ lightlike eksenini etrafında döndürülmesiyle oluşan dönel yüzey

$$\Psi(s,t) = \frac{1}{a}\left(\left(1 - \frac{t^2}{2}\right) \sinh(as+b) + \frac{t^2}{2} \cosh(as+b), \right. \quad (4.6.38) \\ \left. -t \sinh(as+b) + t \cosh(as+b), -\frac{t^2}{2} \sinh(as+b) + \left(1 + \frac{t^2}{2}\right) \cosh(as+b)\right)$$

dir. Bu dönel yüzey için G Gauss dönüşümü

$$G = \frac{1}{\cosh(as+b) - \sinh(as+b)} \left(t^2 \sinh(as+b) \cosh(as+b) - \frac{t^2}{2} \cosh^2(as+b) \right. \\ \left. - \frac{t^2}{2} \sinh^2(as+b) + \sinh^2(as+b) - \sinh(as+b) \cosh(as+b), \right. \\ \left. 2t \sinh(as+b) \cosh(as+b) - t \cosh^2(as+b) - t \sinh^2(as+b), \right. \\ \left. \sinh(as+b) \cosh(as+b) - \cosh^2(as+b) - \frac{t^2}{2} \cosh^2(as+b) \right. \\ \left. - \frac{t^2}{2} \sinh^2(as+b) + t^2 \sinh(as+b) \cosh(as+b) \right)$$

dir. G bir timelike vektör olduğundan (4.6.38) ile verilen dönel yüzey spacelike tır.

Ayrıca bu dönel yüzey için

$$H = a, \quad K = a^2$$

dir.

O halde $\pi = Sp\{e_1, e_3\}$ timelike düzleminde yer alan sabit eğrilikli düzlemsel spacelike profil eğrisinin spacelike, timelike ve lightlike eksenler etrafında döndürülmesiyle oluşan dönel yüzeyler için aşağıdaki tabloyu verebiliriz:

Profil Eğrisi	Düzlem	Dönme Ekseni	DÖNEL YÜZEY
Spacelike	Timelike	Spacelike (e_1)	Spacelike
		Spacelike (e_2)	Timelike
		Timelike (e_3)	Spacelike
		Lightlike ($(1, 0, 1)$)	Spacelike

c) $\pi = Sp\{e_2 - e_3 = 0\}$ lightlike düzleminde yer alan sabit eğrilikli düzlemsel spacelike eğriyi

$$\alpha(s) = \left(s, \frac{s^2}{2} + as + b, \frac{s^2}{2} + as + b \right) \quad (4.6.39)$$

olarak yazabiliriz.

i) Sabit eğrilikli düzlemsel (4.6.39) spacelike profil eğrisinin e_1 ve e_2 spacelike eksenleri etrafında döndürülmesiyle oluşan dönel yüzeyler, sırasıyla,

$$\Psi(s, t) = \left(s, \left(\frac{s^2}{2} + as + b \right) (\sinh t + \cosh t), \left(\frac{s^2}{2} + as + b \right) (\sinh t + \cosh t) \right) \quad (4.6.40)$$

ve

$$\Psi(s,t) = (s \cosh t + (\frac{s^2}{2} + as + b) \sinh t, \frac{s^2}{2} + as + b, s \sinh t + (\frac{s^2}{2} + as + b) \cosh t) \quad (4.6.41)$$

dir.

(4.6.40) ile verilen d6nel y6zeyin normal vekt6r6,

$$N = (0, -(\frac{s^2}{2} + as + b)(\sinh t + \cosh t), -(\frac{s^2}{2} + as + b)(\sinh t + \cosh t))$$

lightlike vekt6r6 olduğundan dolayı (4.6.40) d6nel y6zeyi lightlike tır.

(4.6.41) ile verilen d6nel y6zeyin normal vekt6r6 $B = s + a$ ve $C = \frac{s^2}{2} + as + b$ olmak 6zere

$$N = (Bs \cosh t + BC \sinh t, -s + BC, Bs \sinh t + BC \cosh t)$$

dir. $A_1 = -2abs - (-1 + a^2 + 2b)s^2 - as^3$ olarak alınır, eğer $A_1 > 0$ ise (4.6.41) d6nel y6zeyi timelike, $A_1 < 0$ ise (4.6.41) d6nel y6zeyi spacelike ve $A_1 = 0$ ise (4.6.41) d6nel y6zeyi lightlike tır. Ayrıca (4.6.41) i7in $D = -\frac{s^2}{2} + b$ olmak 6zere ortalama ve Gauss eğriliği sırasıyla

$$H = \frac{1}{2\sqrt{|A_1|}} \frac{-s[-s^2 + C^2] + [Bs^2 - BC^2] - 2D[B^2s - BC]}{-s^2 + C^2 - D^2}$$

ve

$$K = \frac{1}{A_1} \frac{-s[Bs^2 - BC^2] - [B^2s - BC]^2}{-s^2 + C^2 - D^2}$$

dir.

ii) Sabit eğriliğli d6zlemsel (4.6.39) spacelike profil eğrisinin e_3 timelike eksenini etrafında d6nd6r6lmesiyle oluğan d6nel y6zey

$$\Psi(s,t) = (s \cos t - (\frac{s^2}{2} + as + b) \sin t, s \sin t + (\frac{s^2}{2} + as + b) \cos t, \frac{s^2}{2} + as + b) \quad (4.6.42)$$

dir. Bu d6nel y6zeyin normal vekt6r6

$$N = (-Bs \cos t + BC \sin t, -Bs \sin t - BC \cos t, -s - BC)$$

dir. O halde bu y6zey, $A_2 = -2abs - (1 + a^2 + 2b)s^2 - as^3$ olmak 6zere, $A_2 > 0$ ise timelike, $A_2 < 0$ ise spacelike ve $A_2 = 0$ ise lightlike tır.

Ayrıca bu dönel yüzey için

$$H = \frac{1}{2\sqrt{|A_2|}} \frac{s[s^2 + C^2] + [Bs^2 + BC^2] + 2D[B^2s - BC]}{s^2 + C^2 - D^2}$$

ve

$$K = \frac{1}{A_2} \frac{s[Bs^2 + BC^2] - [B^2s - BC]^2}{s^2 + C^2 - D^2}$$

olarak bulunur.

iii) Sabit eğrilikli düzlemsel (4.6.39) spacelike profil eğrisinin $(0, 1, 1)$ lightlike eksenini etrafında döndürülmesiyle oluşan dönel yüzey

$$\Psi(s, t) = (s, st + \frac{s^2}{2} + as + b, st + \frac{s^2}{2} + as + b) \quad (4.6.43)$$

olup, bu dönel yüzeyin normal vektörü

$$N = (0, -s, -s)$$

lightlike vektörü olduğundan (4.6.43) dönel yüzeyi lightlike tır.

O halde $\pi = Sp\{e_2 - e_3 = 0\}$ lightlike düzleminde yer alan sabit eğrilikli düzlemsel spacelike profil eğrisinin spacelike, timelike ve lightlike eksenler etrafında döndürülmesiyle oluşan dönel yüzeyler için aşağıdaki tabloyu verebiliriz:

Profil Eğrisi	Düzlem	Dönme Eksenini	DÖNEL YÜZEY
Spacelike	Timelike	Spacelike (e_1)	Lightlike
		Spacelike (e_2)	Space, Time veya Lightlike
		Timelike (e_3)	Space, Time veya Lightlike
		Lightlike $((0, 1, 1))$	Lightlike

4.6.3.3. Sabit eğrilikli düzlemsel lightlike profil eğrileri tarafından oluşturulan dönel yüzeyler

Üçüncü bölümde eğrinin lightlike olması durumunda sabit eğrilikli düzlemsel eğri bulunamayacağını görmüştük. Dolayısıyla sabit eğrilikli düzlemsel lightlike profil eğrileri tarafından oluşturulan dönel yüzey yoktur.

Eğer bir yüzeyin H ortalama eğriliği ve K Gauss eğriliği aşık olmaya bir $\Phi(H, K) = 0$ bağıntısını sağlıyorsa, bu taktirde bu yüzeye *Weingarten yüzeyi* denir [8].

Dolayısıyla şu teoremi verebiliriz:

Teorem 4.6.4. E_1^3 de sabit eğrilikli düzlemsel profil eğrilerine sahip olan (4.6.26), (4.6.27), (4.6.28), (4.6.30), (4.6.31), (4.6.33), (4.6.35), (4.6.37) ve (4.6.38) dönel yüzeyleri

$$H^2 - K = 0$$

şartını sağlayan Weingarten yüzeyidirler.

M, E_1^3 de bir yüzey ve A_p de $p \in M$ noktasında bu yüzeyin şekil operatörü olsun. p ye M nin bir *umbilik noktası* (veya *genelleştirilmiş umbilik nokta*) denir, eğer A_p

$$A_1 = \begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{bmatrix} \text{ (veya } A_2 = \begin{bmatrix} a & 0 \\ 1 & a \end{bmatrix} \text{)}$$

kanonik formunda yazılabiliyorsa. M yüzeyine E_1^3 de bir umbilik yüzey (veya genelleştirilmiş umbilik yüzey) denir, eğer $\forall p \in M$ için A_p şekil operatörü A_1 (veya A_2) kanonik formunda yazılacak şekilde bir a reel sayısı varsa [13].

O halde,

Teorem 4.6.5. E_1^3 de sabit eğrilikli düzlemsel profil eğrilerine sahip olan (4.6.26), (4.6.27), (4.6.28), (4.6.30), (4.6.31), (4.6.33), (4.6.35), (4.6.37) ve (4.6.38) dönel yüzeyleri *umbilik yüzeylerdir*.

Sonuç 4.6.1. E_1^3 de sabit eğrilikli düzlemsel profil eğrilerine sahip olan (4.6.26), (4.6.27), (4.6.28), (4.6.30), (4.6.31), (4.6.33), (4.6.35), (4.6.37) ve (4.6.38) dönel yüzeylerinin parametre eğrileri, onların eğrilik çizgileridir.

4.7 E_1^3 Minkowski 3-Uzayında Regle Yüzeyler

Bir *regle yüzey*, bir α eğrisi boyunca hareket eden bir l doğrusu tarafından oluşturulur. Regle yüzeyi oluşturan l doğrusunun çeşitli durumlarına, yüzeyin *doğrultman*

doğrusu denir. Böyle bir yüzey,

$$\alpha(t, v) = \alpha(t) + vZ(t)$$

formunda parametrik olarak ifade edilebilir. Burada α eğrisine *dayanak eğrisi* ve Z ye de l nin *doğrultman vektörü* denir [12].

Eğer Z doğrultman vektörü sabit ise regle yüzeye *silindirik*, aksi halde *silindirik olmayan* denir.

İlk olarak α dayanak eğrisinin spacelike veya timelike olması durumlarını gözönüne alalım. Bu durumda, Z doğrultman vektörü α ya ortogonal olacak şekilde seçilebilir. Bununla birlikte, α dayanak eğrisinin ve Z doğrultmanın causal karakterine bağlı olarak 5 farklı tip regle yüzey elde edilebilir. Bu regle yüzey çeşitleri şu şekilde oluşturulurlar:

Eğer α dayanak eğrisi spacelike veya timelike ise, bu taktirde M regle yüzeyi, sırasıyla, M_+ veya M_- tipindedir denir. Ayrıca M_+ tipindeki regle yüzeyler de kendi içinde 3 tipe ayrılabilir.

Bu durumda, Z spacelike olmak üzere eğer Z' non-null veya lightlike ise M regle yüzeyi sırasıyla, M_+^1 veya M_+^2 tipindedir denir.

Z timelike iken Z' spacelike olmak zorundadır. Bu durumda da M , M_+^3 tipindedir denir.

Diğer taraftan, M_- tipindeki regle yüzeyler için eğer Z' non-null veya lightlike ise M regle yüzeyine sırasıyla, M_-^1 veya M_-^2 tipindedir denir. Şunu belirtelim ki, M_- tipine ait regle yüzeyler için Z doğrultman vektörü daima spacelike tir.

M_+^1 veya M_+^2 tipindeki regle yüzeyler spacelike; M_+^3 , M_-^1 veya M_-^2 tipindeki regle yüzeyler de timelike tir.

Eğer α dayanak eğrisi bir lightlike eğri ise ve α eğrisi boyunca Z vektör alanı bir lightlike vektör alanı ise, bu taktirde M regle yüzeyine bir *null scroll* denir [27].

Eğer tanjant düzlem, tespit edilen doğrultman doğrusu boyunca sabit ise regle yüzeye *açılabilir regle yüzey* denir. Bir başka deyişle, bir regle yüzeyin anadoğruları boyunca teğet düzlemleri aynı ise regle yüzeye *açılabilir* denir. Bu şartı sağlamayan

diğer regle yüzeylere *aykırı (skew) regle yüzeyler* denir.

Bir aykırı yüzeyin komşu iki doğrultmanın ortak dikmesinin esas doğrultman üzerindeki dikme ayak noktasına *boğaz noktası* (veya *merkez noktası* veya *striksiyon noktası*) denir.

Merkez noktaların geometrik yerine de *striksiyon eğrisi* denir.

Bir regle yüzeyin anadoğrularının herbirini dik olarak kesen eğriye regle yüzeyin *ortogonal yöriügesi* denir [12].

Şimdi timelike regle yüzeyleri tanıtıp, bazı karakterizasyonlar verelim:

4.7.1 Timelike regle yüzeyler

Minkowski 3-uzayında yay uzunluğu parametresi ile parametrelendirilmiş bir diferensiyellenebilir timelike eğri, $0 \in I$ olmak üzere

$$\begin{aligned}\alpha : I &\rightarrow \mathbb{R}_1^3 \\ t &\rightarrow \alpha(t) = (\alpha_1(t), \alpha_2(t), \alpha_3(t))\end{aligned}$$

olsun. α eğrisinin teğet vektör alanını T ile gösterelim. Bir

$$\begin{aligned}l : \mathbb{R} &\rightarrow E_1^3 \\ v &\rightarrow l(v) = (\alpha_1(t) + va_1(t), \alpha_2(t) + va_2(t), \alpha_3(t) + va_3(t))\end{aligned}$$

spacelike doğrusu, l doğrultman vektörü doğrultusundaki vektör ile α eğrisinin teğet vektörü α eğrisinin herbir noktasında lineer bağımsız olacak şekilde seçilebilir. Burada $a_i(t)$, $1 \leq i \leq 3$, skalarları $\alpha(t)$ noktasında doğrultman vektörünün bileşenleridir. l doğrusu α eğrisi boyunca hareket ederken $(I \times \mathbb{R}, \varphi)$ parametrizasyonu ile verilen bir regle yüzey çizer. Buradaki φ , Minkowski 3-uzayında

$$\begin{aligned}\varphi : I \times \mathbb{R} &\rightarrow E_1^3 \\ (t, v) &\rightarrow \varphi(t, v) = (\alpha_1(t) + va_1(t), \alpha_2(t) + va_2(t), \alpha_3(t) + va_3(t))\end{aligned}$$

şeklinde parametrik olarak verilir.

Bu regle yüzey M ile gösterilecektir.

M nin tanjant vektör alanlarının uzayı $\chi(M)$ olmak üzere, $\chi(M)$ nin bir $\{T, X\}$ ortonormal bazı elde edilebilir. Böylece, $N = T \times X$ dir. Burada N , M nin birim normal vektör alanıdır. Bu nedenle, $\{X, N, T\}$ sistemi, E_1^3 deki α eğrisi boyunca bir ortonormal çatı teşkil eder.

$\bar{\nabla}$, E_1^3 üzerinde Levi-Civita konneksiyonu olsun. E_1^3 de α eğrisi boyunca bu sistemin türev formülleri,

$$\bar{\nabla}_T X = cN + aT$$

$$\bar{\nabla}_T N = -cX + bT$$

$$\bar{\nabla}_T T = aX + bN$$

dir. Burada $a = -\langle T, \bar{\nabla}_T X \rangle = \langle \bar{\nabla}_T T, X \rangle$ dir.

Gerçekten, X bir spacelike birim vektör, N birim normal vektör ve T de bir birim timelike vektör ise sırasıyla,

$$\langle X, X \rangle = 1, \langle N, N \rangle = 1, \langle T, T \rangle = -1 \quad (4.7.1)$$

$$\langle X, N \rangle = \langle N, T \rangle = \langle T, X \rangle = 0 \quad (4.7.2)$$

ve

$$T \times X = N, X \times N = -T, N \times T = X$$

dir. (4.7.1) denkleminin türevi alınırsa

$$\langle \bar{\nabla}_T X, X \rangle = 0$$

$$\langle \bar{\nabla}_T N, N \rangle = 0 \quad (4.7.3)$$

$$\langle \bar{\nabla}_T T, T \rangle = 0$$

olur. Ayrıca,

$$\bar{\nabla}_T X = a_{11}X + a_{12}N + a_{13}T$$

$$\bar{\nabla}_T N = a_{21}X + a_{22}N + a_{23}T \quad (4.7.4)$$

$$\bar{\nabla}_T T = a_{31}X + a_{32}N + a_{33}T$$

olarak yazılabilir.

(4.7.2) eşitliklerinin türevleri alınır,

$$\begin{aligned}\langle \bar{\nabla}_T X, N \rangle + \langle X, \bar{\nabla}_T N \rangle &= 0 \\ \langle \bar{\nabla}_T N, T \rangle + \langle N, \bar{\nabla}_T T \rangle &= 0 \\ \langle \bar{\nabla}_T T, X \rangle + \langle T, \bar{\nabla}_T X \rangle &= 0\end{aligned}\tag{4.7.5}$$

olur.

(4.7.4) eşitlikleri (4.7.3) te yerine yazılırsa,

$$a_{11} = a_{22} = a_{33} = 0$$

olur.

(4.7.4) eşitlikleri (4.7.5) te yerine yazılırsa,

$$\begin{aligned}a_{12} + a_{21} &= 0 \implies a_{12} = -a_{21} = c \\ -a_{23} + a_{32} &= 0 \implies a_{23} = a_{32} = b \\ a_{31} - a_{13} &= 0 \implies a_{31} = a_{13} = a\end{aligned}$$

elde edilir. Böylece (4.7.4) formülleri,

$$\begin{aligned}\bar{\nabla}_T X &= cN + aT \\ \bar{\nabla}_T N &= -cX + bT \\ \bar{\nabla}_T T &= aX + bN\end{aligned}$$

veya matrisel formda

$$B = \begin{bmatrix} 0 & c & a \\ -c & 0 & b \\ a & b & 0 \end{bmatrix}$$

olarak elde edilir.

$$B^T = -\varepsilon B \varepsilon \text{ olduğundan } B \text{ bir anti-adjoint matristir. Burada } \varepsilon = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \text{ dir.}$$

$\varphi(t, v) = \vec{\alpha}(t) + v\vec{X}(t)$ parametrizasyonu gözönüne alındığında,

$$\begin{aligned} E &= \left\langle \frac{\partial \varphi}{\partial t}, \frac{\partial \varphi}{\partial t} \right\rangle = \langle \bar{\nabla}_T \alpha + v \bar{\nabla}_T X, \bar{\nabla}_T \alpha + v \bar{\nabla}_T X \rangle \\ &= \langle (1+av)T + cvN, (1+av)T + cvN \rangle \\ &= -(1+av)^2 + c^2v^2 \\ F &= \left\langle \frac{\partial \varphi}{\partial t}, \frac{\partial \varphi}{\partial v} \right\rangle = \langle (1+av)T + cvN, X \rangle = 0 \\ G &= \left\langle \frac{\partial \varphi}{\partial v}, \frac{\partial \varphi}{\partial v} \right\rangle = \langle X, X \rangle = 1 \end{aligned}$$

E nin negatif olması durumunda regle yüzey üzerinde indirgenmiş metrik bir Lorentz metriğidir. E nin kökleri,

$$\min\left\{-\frac{1}{a-c}, -\frac{1}{a+c}\right\} \text{ ve } \max\left\{-\frac{1}{a-c}, -\frac{1}{a+c}\right\}$$

dir. Burada, $c^2 - a^2 = \langle \bar{\nabla}_T X, \bar{\nabla}_T X \rangle$ tir.

Belirtelim ki,

1. Eğer $\bar{\nabla}_T X$ bir timelike vektör alanı ise,

$$-\infty < v < \min\left\{-\frac{1}{a-c}, -\frac{1}{a+c}\right\} \text{ veya } \max\left\{-\frac{1}{a-c}, -\frac{1}{a+c}\right\} < v < \infty$$

dur.

2. Eğer $\bar{\nabla}_T X$ bir spacelike vektör alanı ise,

$$\min\left\{-\frac{1}{a-c}, -\frac{1}{a+c}\right\} < v < \max\left\{-\frac{1}{a-c}, -\frac{1}{a+c}\right\}$$

dir.

3. $\bar{\nabla}_T X, E_1^3$ de null vektör alanı olsun.

Eğer $a > 0$ ise $v < -\frac{1}{2a}$ ve eğer $a < 0$ ise $v > -\frac{1}{2a}$ dir.

Bu nedenle, yukarıdaki 3 durumda da v parametresinin tanım kümesi \mathbb{R} nin tamamı değil, fakat yukarıdaki aralıklardan biridir.

v nin tanım kümesini J ile gösterelim. Eğer J de v parametresini tespit edersek, bu taktirde M üzerinde,

$$\begin{aligned} \varphi(v) : I \times \{v\} &\rightarrow M \\ (t, v) &\rightarrow \varphi_v(t, v) = \alpha(t) + vX(t) \end{aligned}$$

eğrisi elde edilebilir. Bu eğrinin tanjant vektör alanı,

$$\frac{\partial \varphi_v(t, v)}{\partial t} = \bar{\nabla}_T \alpha(t) + v \bar{\nabla}_T X(t)$$

ve dolayısıyla

$$\begin{aligned} A &= T + v \bar{\nabla}_T X \\ &= T + v(cN + aT) \\ &= (1 + av)T + cvN \end{aligned}$$

olarak elde edilir. Bu da, A vektör alanının X e dik olduğunu gösterir.

Teorem 4.7.1. *M bir timelike regle yüzey olsun. M nin herhangi bir doğrultmanı boyunca tanjant düzlemleri çakışıktır ancak ve ancak $c = 0$ dir [3].*

İspat. M timelike yüzeyi,

$$\begin{aligned} \varphi : I \times \mathbb{R} &\rightarrow E^3 \\ (t, v) &\rightarrow \varphi(t, v) = (\alpha_1(t) + va_1(t), \alpha_2(t) + va_2(t), \alpha_3(t) + va_3(t)) \end{aligned}$$

olmak üzere $\{(I \times \mathbb{R}, \varphi)\}$ atlası ile verilsin.

$\{X, N, T\}$ ortonormal sistemini ve doğrultmanın herhangi bir $v = sbt$ değerine karşılık gelen noktasından geçen

$$\varphi_v : I \times \{v\} \rightarrow M$$

eğrisinin $A = (1 + av)T + cvN$ tanjant vektör alanını gözönüne alalım.

$\alpha(t)$ noktasından geçen doğrultmanın her noktasında tanjant düzlemlerin sabit olması için, doğrultman boyunca N nin sabit olması gerekir. Çünkü bu durumda, her tanjant düzlemin ortak birer doğruları (doğrultman) var ve normalleri aynı olur. N nin doğrultman boyunca sabit olması için $\{A, T\}$ sisteminin lineer bağımlı olması gerekir. Bu ise,

$$A = (1 + av)T + cvN, A = \lambda T$$

eşitliği gereğince $c = 0$ olmasını gerektirir. □

Şimdi, E_1^3 de açılabilir olan timelike regle yüzeyler için bir karakterizasyon verelim:

Sonuç 4.7.1. M timelike regle yüzeyi açılabilir ancak ve ancak $c = 0$ dır [3].

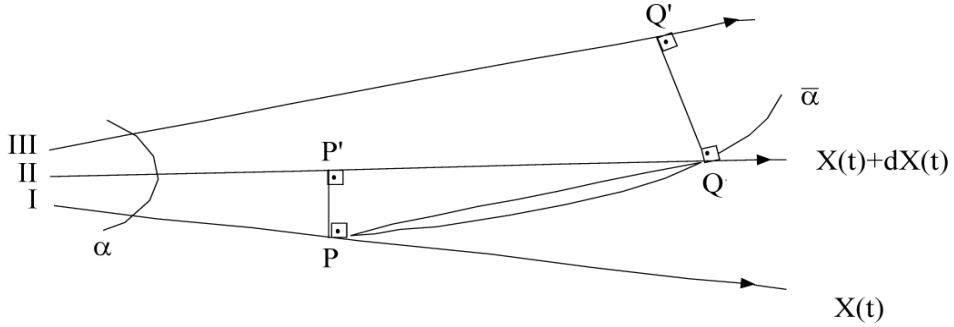
Lemma 4.7.1. Bir M timelike regle yüzeyi için $c = -\det(T, X, D_T X)$ tir [3].

Merkez noktasının yer vektörü

Bir aykırı timelike regle yüzeyin dayanak eğrisi ile merkez nokta arasındaki uzaklık \bar{u} ise, $\vec{\alpha}(t)$ yer vektörü

$$\vec{\alpha}(t, \bar{u}) = \alpha(t) + \bar{u}X(t) \quad (4.7.6)$$

şeklinde ifade edilebilir. Burada $\alpha(t)$, dayanak eğrisinin yer vektörü ve $X(t)$ de doğrultmana ait olan doğrultu vektörüdür. \bar{u} parametresi dayanak eğrisinin yer vektörü ile doğrultman vektörünün bileşenleri cinsinden ifade edilebilir. Bir regle yüzeyin birinci ve ikinci doğrultmanları sırasıyla, $X(t)$ ve $X(t) + dX(t)$ olan komşu üç doğrultman doğrusunu gözönüne alalım.



Şekil 4.11

P, P' ve Q, Q' noktaları komşu iki anadoğruya dik olan ortak dikmelerin doğrultman doğrusu üzerindeki ayak noktaları olsunlar. İlk iki komşu anadoğrunun ortak dikmesi, $X(t) \times (X(t) + \bar{V}_T X(t) dt) = X(t) \times \bar{V}_T X(t) dt$ bağıntısından dolayı $X(t) \times \bar{V}_T X(t)$ vektörüne paraleldir.

Limit durumunda \vec{PQ} vektörü \vec{PP}' vektörü ile çakışacağından \vec{PQ} vektörü striksiyon eğrisinin teğet vektörü olacaktır. Dolayısıyla,

$$\langle X(t), \vec{PQ} \rangle = 0, \quad \langle X + \vec{\nabla}_T X dt, \vec{PQ} \rangle = 0 \quad (4.7.7)$$

olacağından

$$\langle \vec{\nabla}_T X, \vec{PQ} \rangle = 0$$

elde edilir. Ayrıca (4.7.6) ifadesinin t ye göre türevi alınır ve (4.7.7) kullanılırsa,

$$\bar{u} = -\frac{\langle \vec{\nabla}_T X, T \rangle}{\langle \vec{\nabla}_T X, \vec{\nabla}_T X \rangle}$$

elde edilir. Gerçekten, $\vec{PQ} = \frac{d\bar{\alpha}(t)}{dt}$ olduğundan

$$\begin{aligned} \langle \vec{\nabla}_T X, \vec{PQ} \rangle &= 0 \\ \left\langle \vec{\nabla}_T X, \frac{d\alpha(t)}{dt} + \frac{d\bar{u}(t)}{dt} X(t) + \bar{u}(t) \frac{dX(t)}{dt} \right\rangle &= 0 \\ \langle \vec{\nabla}_T X, T \rangle + \frac{d\bar{u}(t)}{dt} \langle \vec{\nabla}_T X, X(t) \rangle + \bar{u}(t) \left\langle \vec{\nabla}_T X, \frac{dX(t)}{dt} \right\rangle &= 0 \\ \langle \vec{\nabla}_T X, T \rangle + \bar{u}(t) \langle \vec{\nabla}_T X, \vec{\nabla}_T X \rangle &= 0 \end{aligned}$$

ve dolayısıyla

$$\bar{u}(t) = -\frac{\langle \vec{\nabla}_T X, T \rangle}{\langle \vec{\nabla}_T X, \vec{\nabla}_T X \rangle}$$

bulunur. Böylece striksiyon eğrisinin yer vektörü

$$\bar{\alpha}(t) = \alpha(t) - \frac{\langle \vec{\nabla}_T X, T \rangle}{\langle \vec{\nabla}_T X, \vec{\nabla}_T X \rangle} X(t) \quad (4.7.8)$$

olarak ifade edilebilir.

Burada $\langle \vec{\nabla}_T X, \vec{\nabla}_T X \rangle \neq 0$ dır. Eğer $\langle \vec{\nabla}_T X, \vec{\nabla}_T X \rangle = 0$ ise regle yüzey striksiyon eğrisine sahip değildir (bu durum, regle yüzeyin bir silindir olması halini karakterize eder). Regle yüzeyler için striksiyon eğrisi dayanak eğrisi olarak alınabilir. Bu ise $\bar{u} = 0$ olduğundan $\langle \vec{\nabla}_T X, T \rangle = 0$ demektir.

Diğer yandan, $\langle \frac{d\bar{\alpha}}{dt}, X \rangle = 0$ olduğundan

$$\bar{u}(t) = -\frac{\langle \vec{\nabla}_T X, T \rangle}{\langle \vec{\nabla}_T X, \vec{\nabla}_T X \rangle} = -\frac{\langle cN + aT, T \rangle}{\langle cN + aT, cN + aT \rangle} = \frac{a}{c^2 - a^2}$$

sabitidir.

Teorem 4.7.2. *M bir aykırı timelike yüzey olsun. Bu durumda, α eğrisinin $\alpha(t)$ noktasından geçen anadoğrultman üzerindeki $\varphi(t, v_0)$ noktası merkez noktadır ancak ve ancak $\bar{\nabla}_T X$, $\varphi(t, v_0)$ noktasında tanjant düzlemin bir normal vektörüdür [3].*

İspat. (\Leftarrow): $\bar{\nabla}_T X$, $\alpha(t)$ noktasından geçen anadoğrultman üzerindeki $\varphi(t, v_0)$ noktasında tanjant düzlemin normali olsun. Diğer taraftan,

$$\varphi(t, v) = \alpha(t) + vX(t)$$

ile verilen ifade $\{(I \times \mathbb{R}, \varphi)\}$ atlasında, $\forall v \in \mathbb{R}$ sabit değeri için M nin bir

$$\varphi_v : I \times \{v\} \rightarrow M, \varphi(t) = \alpha(t) + vX(t)$$

eğrisini belirtir. Bu eğrinin teğet vektör alanı,

$$\begin{aligned} \frac{d\varphi}{dt} = A &= \frac{d\alpha}{dt} + v\bar{\nabla}_T X(t) \\ &= (1 + av)T + cvN \end{aligned}$$

şeklinde bulunur. $\bar{\nabla}_T X$, tanjant düzleme normal olduğundan,

$$\langle \bar{\nabla}_T X, A \rangle = 0$$

dır. Bu nedenle

$$\langle cN + aT, (1 + av_0)T + cv_0N \rangle = 0$$

olup

$$v_0 = \frac{a}{c^2 - a^2}$$

elde edilir. Bu ise $\varphi(t, v_0)$ noktasının bir merkez nokta olduğunu gösterir.

(\Rightarrow): Tersine, $\alpha(t)$ noktasından geçen doğrultmanın merkez noktası $\varphi(t, v_0)$ olsun.

$\langle \bar{\nabla}_T X, A \rangle = \langle \bar{\nabla}_T X, X \rangle = 0$ olduğunu göstereceğiz.

$\langle X, X \rangle = 1$ olduğundan $\langle \bar{\nabla}_T X, X \rangle = 0$ dır. Ayrıca,

$$\langle \bar{\nabla}_T X, A \rangle = \langle cN + aT, (1 + av_0)T + cv_0N \rangle = c^2v_0 - a - a^2v_0 \text{ dır.}$$

$\varphi(t, v_0)$ merkez nokta olduğundan,

$$v_0 = \frac{a}{c^2 - a^2}$$

veya

$$c^2 v_0 - a - a^2 v_0 = 0$$

dir. O halde,

$$\langle \bar{\nabla}_T X, A \rangle = 0$$

bulunur. □

$\bar{\nabla}_T X$, merkez noktasında tanjant düzlemin normal vektörü olduğundan merkez noktasında $\bar{\nabla}_T X$ bir spacelike vektördür. Böylece,

$$\langle \bar{\nabla}_T X, \bar{\nabla}_T X \rangle = c^2 - a^2 > 0$$

dir.

Teorem 4.7.3. *Bir aykırı timelike regle yüzeyin striksiyon eğrisi,*

$$\bar{\alpha}(t) = \alpha(t) + \frac{a}{c^2 - a^2} X(t)$$

bir timelike eğridir [3].

İspat.

$$\frac{d\bar{\alpha}}{dt} = \frac{d\alpha}{dt} + \frac{a}{c^2 - a^2} \bar{\nabla}_T X = T + \frac{a}{c^2 - a^2} \bar{\nabla}_T X$$

dir. O halde,

$$\begin{aligned} \left\langle \frac{d\bar{\alpha}}{dt}, \frac{d\bar{\alpha}}{dt} \right\rangle &= \left\langle T + \frac{a}{c^2 - a^2} \bar{\nabla}_T X, T + \frac{a}{c^2 - a^2} \bar{\nabla}_T X \right\rangle \\ &= \langle T, T \rangle + \frac{2a}{c^2 - a^2} \langle T, \bar{\nabla}_T X \rangle + \frac{a^2}{(c^2 - a^2)^2} \langle \bar{\nabla}_T X, \bar{\nabla}_T X \rangle \\ &= \langle T, T \rangle - \frac{2a^2}{c^2 - a^2} + \frac{a^2}{(c^2 - a^2)^2} (c^2 - a^2) \\ &= \underbrace{\langle T, T \rangle}_{<0} - \underbrace{\frac{a^2}{c^2 - a^2}}_{>0} \end{aligned}$$

Bu da

$$\left\langle \frac{d\bar{\alpha}}{dt}, \frac{d\bar{\alpha}}{dt} \right\rangle < 0$$

demektir. O halde $\bar{\alpha}$ eğrisi timelike tir. □

Bir timelike regle yüzeyin dağılma parametresi

Timelike regle yüzeyin dayanak eğrisi striksiyon eğrisi, yani $\bar{\alpha}(t) = \alpha(t)$ olsun. Bu durumda $\bar{u} = 0$, yani

$$\frac{a^2}{c^2 - a^2} = 0$$

dır. Böylece $a = 0$ olur. Bu nedenle, $\bar{\nabla}_T X$ ve N lineer bağımlıdır, yani

$$N = \lambda \bar{\nabla}_T X$$

tir.

Burada

$$\bar{\nabla}_T X = aT + cN \quad \text{ve} \quad N = T \times X = \frac{d\bar{\alpha}}{dt} \times X$$

tir. Böylece

$$P_X = \frac{\langle T \times X, \bar{\nabla}_T X \rangle}{\langle \bar{\nabla}_T X, \bar{\nabla}_T X \rangle} = -\frac{\det(T, X, \bar{\nabla}_T X)}{\langle \bar{\nabla}_T X, \bar{\nabla}_T X \rangle} \quad (4.7.9)$$

elde edilir. Bu şekilde elde edilen P_X e timelike regle yüzeyin **dağılma parametresi (drali)** denir [12]. $\bar{\nabla}_T X$ bir timelike vektör alanı olduğundan $\langle \bar{\nabla}_T X, \bar{\nabla}_T X \rangle \neq 0$ dir.

Anadoğrularının birim doğrultman vektörü X olan bir regle yüzeyin dralini P_X ile gösterelim. Komşu anadoğruların ortak dikmesi doğrultusundaki vektör, $X \times X'$ olduğundan bu doğrultudaki birim vektör

$$\frac{X \times X'}{\|X'\|}$$

dir, burada $X' = \bar{\nabla}_T X$ tir.

Dayanak eğrisinin komşu iki noktası α ve $\alpha(s + ds) = \alpha(s) + d\alpha(s)$ olduğundan bu noktalaradaki anadoğrular arasındaki en kısa uzaklık $d\alpha$ vektörünün $\frac{d\alpha \times X'}{\|X'\|}$ vektörü üzerindeki izdüşümüdür. Böylece en kısa uzaklık k ile gösterilirse

$$k = \left\langle d\alpha, \frac{X \times X'}{\|X'\|} \right\rangle = \frac{\det(d\alpha, X, X')}{\|X'\|}$$

olarak bulunur. Eğer anadoğruların küresel göstergesini gözönüne alırsak, bu gösterge yay elementi olan

$$d\Psi = \left\| \frac{dX}{ds} \right\| ds = \|\bar{\nabla}_T X\| ds = \sqrt{c^2 - a^2} ds$$

komşu iki anadoğru arasındaki açı olarak alınabilir. Böylece regle yüzeyin drali için

$$P_X = \frac{k}{d\Psi} = \frac{\det(d\alpha, X, X')}{\|X'\|} : \|X'\| ds = \frac{c}{c^2 - a^2}$$

olarak bulunur [3].

Teorem 4.7.4. *Timelike bir regle yüzey açılabilir ancak ve ancak dağılma parametresi sıfırdır [3].*

İspat. (\implies): Regle yüzeyin açılabilir olması için anadoğrular boyunca teğet düzlemin, dolayısıyla yüzey normallerinin, aynı kalması gerekir. Regle yüzeyin

$$\varphi(t, v) = \alpha(t) + vX(t)$$

denkleminde t ve v parametrelerine göre kısmi türev alınır,

$$\frac{\partial \varphi(t, v)}{\partial t} = \varphi_t = T + v\bar{\nabla}_T X, \quad \frac{\partial \varphi(t, v)}{\partial v} = \varphi_v = X(s)$$

elde edilir. Buradan,

$$\varphi_t \times \varphi_v = (T + v\bar{\nabla}_T X) \times X = T \times X + v\bar{\nabla}_T X \times X \quad (4.7.10)$$

tir, ayrıca yüzey normali

$$N = \frac{\varphi_t \times \varphi_v}{\|\varphi_t \times \varphi_v\|}$$

olduğundan N nin anadoğru boyunca değişmemesi için v parametresinden bağımsız olması gerekir. Bu nedenle (4.7.10) daki $T \times X$ ve $\bar{\nabla}_T X \times X$ vektörleri lineer bağımlıdır.

Böylece,

$$(T \times X) \times (\bar{\nabla}_T X \times X) = 0$$

dır. Bu nedenle

$$\langle T \times X, X \rangle \bar{\nabla}_T X - \langle T \times X, \bar{\nabla}_T X \rangle X = 0$$

$$X \langle T \times X, \bar{\nabla}_T X \rangle = 0$$

$$\det(T, X, \bar{\nabla}_T X) = 0$$

veya

$$P_X = 0$$

elde edilir.

(\Leftarrow): Tersine hareket ederek $P_X = 0$ ise regle yüzeyin normallerinin aynı kalacağı ve dolayısıyla regle yüzeyin açılabilir olduğu görülür. \square

Açılabilir regle yüzeyler için dralin sıfır olması, anadoğrular arasındaki en kısa uzaklığın sıfır olmasını, yani bu doğruların kesişmesini gerektirir.

Teorem 4.7.5. M, E_1^3 de bir timelike regle yüzey olsun. M nin doğrultmanları M de hem asimptotik hem de geodezik çizgilerdir [3].

İspat. $X \in \chi(M)$, M nin bir doğrultmanının teğet vektör alanı olsun. Anadoğruların her biri E_1^3 de bir doğru olduğundan geodeziktir. Böylece $\bar{\nabla}_T X = 0$ dır. Bu ise,

$$\nabla_X X = \bar{\nabla}_X X + \langle S(X), X \rangle N$$

Gauss denkleminde,

$$\nabla_X X = \langle S(X), X \rangle N$$

ve

$$\nabla_X X \in \chi(M) \text{ ve } \langle S(X), X \rangle N \in \chi(M)^\perp$$

olduğundan $\chi(M) \cap \chi(M)^\perp = \{\vec{0}\}$ dır. Buradan da $\nabla_X X = 0$ ve $\langle S(X), X \rangle = 0$ olmalıdır.

$\nabla_X X = 0$ olduğundan M nin doğrultmanları M nin geodezik çizgileri olurlar.

$\langle S(X), X \rangle = 0$ olması ise bu doğrultmanların asimptotik çizgiler olduğunu gösterir. \square

Teorem 4.7.6. M, E_1^3 de bir timelike regle yüzey olsun. Bu taktirde herhangi bir $P \in M$ noktasında M nin Gauss eğrilik fonksiyonu $K(P)$,

$$K(P) \geq 0$$

şartını sağlar [3].

İspat. X , bir $P \in M$ noktasındaki doğrultman doğrusunun bir spacelike vektörü olsun. $\chi(M)$, Y bir timelike vektör alanı olmak üzere $\{X, Y\}$ şeklinde tanjant düzlemin bir ortogonal bazı olarak elde edilebilir. Bu baza göre M nin S şekil operatörünün matrisi,

$$S = \begin{bmatrix} \langle S(X), X \rangle & -\langle S(Y), X \rangle \\ \langle S(X), Y \rangle & -\langle S(Y), Y \rangle \end{bmatrix}$$

dir. S self-adjoint olduğundan bir önceki teoremden $\langle S(X), X \rangle = 0$ olduğu görülür. O halde Gauss eğriliği,

$$K = \det(S) = (\langle S(X), Y \rangle)^2$$

olup

$$K(P) \geq 0$$

elde edilir. □

KAYNAKLAR

- [1] A. Ferrandez and P. Lucas, *On Surfaces in the 3-Dimensional Lorentz-Minkowski Space*, **Pacific J. Math.**, Vol. 152, No. 1, (1992).
- [2] A. T. Ali and M. Önder, *Some Characterizations of Rectifying Spacelike Curves in the Minkowski Space-Time*, arXiv: 0904.0655v1, [math. DG], (2009).
- [3] A. Turgut and H. H. Hacısalihoğlu, *Timelike Ruled Surfaces in Minkowski 3-Spaces-II*, **Turkish J. Math**, 22, 33-46, (1998).
- [4] B. O'Neill, *Semi-Riemannian Geometry with Applications to Relativity*, Academic press, New York, (1983).
- [5] B. Y. Chen, *When does the Position Vector of a Space Curve Always Lie in Its Rectifying Plane?*, **Amer. Math. Mounthly**, 110, 147-152, (2003).
- [6] B-Y. Chen, M. Choi and Y. H. Kim, *Surfaces of Revolution with Pointwise 1-Type Gauss Map*, **J. Korean Math. Soc.**, 42, No. 3, 447-455, (2005).
- [7] E. G. Rio and D. N. Küpeli, *Semi-Riemannian Maps and Their Applications*, Kluwer Academic Publishers, (1999).
- [8] F. Dillen and W. Kühnel, *Ruled Surfaces in Minkowski 3-space*, **Manuscripta Math.**, 98, 307-320, (1999).
- [9] G. Kaimakamis and B. Papantoniou, *Surfaces of Revolution in the 3-Dimensional Lorentz-Minkowski Space Satisfying $\Delta^II\vec{r} = A\vec{r}$* , **J.Geom.**, 81, 81-92, (2004).
- [10] G. S. Birman and K. Nomizu, *Trigonometry in Lorentzian Geometry*, **Amer. Math. Mounthly**, 91(9), 534-549, (1984).
- [11] H. Balgetir, A. O. Öğrenmiş and M. Bektaş, *Curves on Ruled Surfaces in Minkowski 3-Space*, **Int. J. Contemp. Math. Sci.**, Vol. 1, no. 1, 31-37, (2006).

- [12] H. H. Hacısalihoğlu, *Diferensiyel Geometri*, İ.Ü. Fen-Edeb. Fak. Yayınları, Mat. No:2, Malatya, (1983).
- [13] H. H. Zhong and J. Fenghui, *Helicoidal Surfaces with $H^2 = K$ in Minkowski 3-space*, **J. Math. Anal. Appl**, 325, 101-113, (2007).
- [14] J. K. Beem, P. E. Ehrlich and K. L. Easley, *Global Lorentzian Geometry*, Marcel Dekker, Inc., New York, (1996).
- [15] K. İlarıslan and E. Nesovic, *Timelike and Null Normal Curves in Minkowski Space E_1^3* , **Indian J. Pure Appl. Math.**, 35(7), 881-888, (2004).
- [16] K. İlarıslan, *Spacelike Normal Curves in Minkowski Space E_1^3* , **Turkish J. Math**, 29, 53-63, (2005).
- [17] M. Bekkar and H. Zoubir, *Surfaces of Revolution in the 3-Dimensional Lorentz-Minkowski Space Satisfying $\Delta x^i = \lambda^i x^i$* , **Int. J. Contemp. Math. Sci.**, Vol.3, no.24, 1173-1185, (2008).
- [18] Rafael Lopez, *Differential Geometry of Curves and Surfaces in Lorentz-Minkowski Space*, math.DG., (2008).
- [19] S. Izumiya and N. Takeuchi, *Special Curves and Ruled Surfaces*, **Beiträge Algebra Geom.**, Volume 44, No. 1, 203-212, (2003).
- [20] S. Lee and J. H. Varnado, *Spacelike Constant mean curvature surfaces of revolution in Minkowski 3-space*, **Differ. Geom. Dyn. Syst.**, Vol. 8, 144-165, (2006).
- [21] S. Lee and J. H. Varnado, *Timelike Surfaces of Revolution with Constant Mean Curvature in Minkowski 3-Space*, **Differ. Geom. Dyn. Syst.**, Vol. 9, 82-102, (2007).
- [22] S. M. Choi, *On the Gauss Map of Ruled Surfaces in a Three-Dimensional Minkowski Space*, **Tsukuba J. Math**, 19, 285-304, (1995).
- [23] T. Ikawa, *Bour's Theorem in Minkowski Geometry*, **Tokyo J. Math.**, Vol. 24, No. 2, (2001).

- [24] T. Weinstein, *An Introduction to Lorentz Surfaces*, Walter de Gruyter and Co. New York, (1996).
- [25] W. Kühnel, *Differential Geometry, Curves-Surfaces-Manifolds*, American Mathematical Society, Student Mathematical Library, Volume 16, Second Edition, (2006).
- [26] Y. H. Kim and D. W. Yoon, *Ruled Surfaces with Finite Type Gauss Map in Minkowski Spaces*, **Soochow J. Math.**, submitted for publication.
- [27] Y. H. Kim and D. W. Yoon, *Classification of Ruled Surfaces in Minkowski 3-Spaces*, **J. Geom. Phys.**, 49, 89-100, (2004).
- [28] Y. H. Kim, C. W. Lee and D. W. Yoon, *On the Gauss Map of Surfaces of Revolution Without Parabolic Points*, **Bull. Korean Math. Soc.**, 46, No. 6, 1141-1149, (2009).

ÖZGEÇMİŞ

27 Haziran 1985 tarihinde Malatya'da doğdu. İlköğretim ve lise öğrenimini Malatya'da tamamladı. 2004 yılında Bursa Uludağ Üniversitesi Fen Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümü lisans programına kayıt yaptırdı ve Haziran 2008'de öğrenimini tamamlayarak yine 2008'de İnönü Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalında yüksek lisans programına kayıt yaptırdı. Eylül 2009'da İnönü Üniversitesi Fen Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümünde araştırma görevlisi olarak göreve başladı ve halen bu görevine devam etmektedir.