T.C.
İNÖNÜ ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

FUZZY DİZİ UZAYLARI

Yaprak GÜLDOĞAN

YÜKSEK LİSANS TEZİ

MATEMATİK ANABİLİM DALI

MALATYA
Ağustos 2012

Tezin Başlığı : FUZZY DİZİ UZAYLARI

Tezi Hazırlayan : Yaprak GÜLDOĞAN

Sınav Tarihi : 09.08.2012

Yukarıda adı geçen tez jürimizce değerlendirilerek Matematik Ana Bilim Dalında Yüksek Lisans Tezi olarak kabul edilmiştir.

Sınav Jürisi Üyeleri (ilk isim jüri başkanı, ikinci isim tez danışmanı)

Prof.Dr. Bilal ALTAY ____________________

Yrd.Doç.Dr. M. Kemal ÖZDEMİR ____________________

Doç.Dr. Yılmaz YILMAZ ____________________

İnönü Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Onayı

____

Prof.Dr. Mehmet ALPASLAN

Enstitü Müdürü

ONUR SÖZÜ

Yüksek Lisans Tezi olarak sunduğum ”Fuzzy Dizi Uzayları” başlıklı bu çalışmanın bilimsel ahlâk ve geleneklere aykırı düşecek bir yardıma başvurmaksızın tarafımdan yazıldığını ve yararlandığım bütün kaynakların, hem metin içinde hem de kaynakçada yöntemine uygun biçimde gösterilenlerden oluştuğunu belirtir, bunu onurumla doğrularım.

Yaprak GÜLDOĞAN

ÖZET

Yüksek Lisans Tezi

FUZZY DİZİ UZAYLARI

Yaprak GÜLDOĞAN

İnönü Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Anabilim Dalı

50+v sayfa

2012

Danışman: Yrd.Doç.Dr. M. Kemal ÖZDEMİR

Beş bölümden oluşan bu çalışmanın ilk bölümünde, çalışmanın amacı ve literatürdeki yeri açıklandı.

İkinci bölümde, daha sonraki bölümlerde kullanılacak olan bazı temel tanım ve teoremler verildi.

Üçüncü bölümde, fuzzy cümle tanımı verildi. Klasik cümleler için geçerli olan birleşim, kesişim, tümleme ve konvekslik gibi kavramlar fuzzy cümleler için verildi ve bunların bazı özelliklerinden bahsedildi.

Dördüncü bölümde, reel sayılar için aralık tanımı verildi. Daha sonra fuzzy sayı kavramı tanımlandı ve fuzzy sayılara ait bazı özellikler ile fuzzy sayılar üzerinde tanımlanan bazı cebirsel işlemler verildi.

Beşinci bölümde, fuzzy sayı dizisi tanımı verilerek bu diziler ile inşaa edilen bazı dizi uzaylarına ve bunların topolojik özelliklerine yer verildi. Ayrıca fuzzy sayılarının fark dizi uzayları tanımlandı. Fuzzy sayılarının fark dizi uzayları ile çeşitli dizi uzayları inşaa edilip bu uzayların bazı topolojik özellikleri incelendi.

ANAHTAR KELİMELER: Fuzzy cümle, fuzzy sayı, fuzzy sayı dizisi, fuzzy dizi uzayı, fuzzy sayılarının fark dizi uzayı.

ABSTRACT

M.Sc. Thesis

FUZZY SEQUENCE SPACES

Yaprak GÜLDOĞAN

İnönü University
Graduate School of Natural and Applied Sciences
Department of Mathematics

50+v pages

2012

Supervisor: Assist.Prof.Dr. M. Kemal ÖZDEMİR

In the first chapter of this thesis that consists of five chapters, the goal of the work and its importance in the literature are emphasized.

In the second chapter, some basic definitions and theorems which will be used in the next chapters were given.

In the third chapter, fuzzy sets and their some properties such as union, intersection, complement, convexsity, etc. were given.

In the fourth chapter, some properties of a real interval and fuzzy numbers were defined. Then some special types of fuzzy numbers and their algebraic operations were given.

In the fifth chapter is concerned with the sequences of fuzzy numbers. In this chapter, the definition of sequence spaces of fuzzy numbers and some sequence spaces which constructed by sequence spaces of fuzzy numbers were given. Then some topological properties of these sequences were introduced. Additionally the difference sequence spaces of fuzzy numbers and their topological properties were examined.

KEY WORDS: Fuzzy set, fuzzy number, sequence of fuzzy numbers, fuzzy sequence space, difference sequence space of fuzzy numbers.

TEŞEKKÜR

Yüksek lisans tez danışmanlığımı üstlenen ve tezin hazırlanması sürecinde yardımlarını ve desteğini esirgemeyen değerli hocam Sayın Yrd. Doç. Dr. M. Kemal ÖZDEMİR'e ve kıymetli ailesine, Matematik Anabilim Dalı Başkanımız Sayın Prof. Dr. Sadık KELEŞ'e, tezin yazımı sürecinde yardımlarını esirgemeyen Harran Üniversitesi öğretim üyelerinden Sayın Yrd. Doç. Dr. Haydar ALICI' ya ve eğitim hayatım boyunca büyük fedâkarlıklar yapan, maddi ve manevi desteklerini esirgemeyen aileme sonsuz teşekkürlerimi sunarım.

SİMGELER VE KISALTMALAR

$\mathbb{N}$	:	Doğal sayılar cümlesi,
$\mathbb{R}$	:	Reel sayılar cümlesi,
$\mathbb{C}$	:	Kompleks sayılar cümlesi,
$F(X)$	:	X cümlesi üzerindeki bütün fuzzy cümlelerinin cümlesi,
C	:	Reel terimli Cauchy dizilerinin uzayı,
w	:	Kompleks terimli tüm dizilerin uzayı,
l_∞	:	Kompleks terimli sınırlı dizilerin uzayı,
c	:	Kompleks terimli yakınsak dizilerin uzayı,
c_0	:	Kompleks terimli sıfıra yakınsak dizilerin uzayı,
$L(\mathbb{R})$	:	Fuzzy sayı uzayı,
w^F	:	Bütün fuzzy sayı dizilerinin uzayı,
l_∞^F	:	Sınırlı fuzzy sayı dizilerinin uzayı,
c^F	:	Yakınsak fuzzy sayı dizilerinin uzayı,
c_0^F	:	Sıfıra yakınsak fuzzy sayı dizilerinin uzayı,
C^F	:	Fuzzy Cauchy sayı dizilerinin uzayı,
$l_\infty^F(\Delta_m)$	:	Sınırlı fuzzy dizilerinin fark dizi uzayı,
$c^F(\Delta_m)$	:	Yakınsak fuzzy dizilerinin fark dizi uzayı,
$c_0^F(\Delta_m)$	:	Sıfıra yakınsak fuzzy dizilerinin fark dizi uzayı.

İÇİNDEKİLER

1. GİRİŞ

Günlük yaşantımızda, kesin olduğunu düşündüğümüz ancak gerçekte kesin olmayan durumlarla karşılaşırız. Birçok sosyal, ekonomik ve teknik olayda da belirsizlik ve dolayısıyla karmaşıklık bulunmaktadır. Bu belirsizliklerin analiz edilmesi Zadeh tarafından geliştirilen fuzzy mantık teorisi kapsamında mümkündür.

Fuzzy mantık kavramı ilk kez 1965 yılında California Berkeley Üniversitesinden Azeri bilim adamı Prof. Lütfü A. Zadeh'in bu konudaki araştırmalarına ait ilk makalelerini yayınlamasıyla duyuldu. O tarihten sonra önemi gittikçe artarak günümüze kadar gelen fuzzy mantık, belirsizliklerin anlatımı ve belirsizliklerle çalışılabilmesi için kurulmuş esnek bir matematik düzen olarak tanımlanabilir. Fuzzy mantık ve klasik mantık arasındaki temel farklılık klasik mantığın önermelerinin sadece aşırı uç değerleri kullanmasıdır. Klasik mantıkta bir nesne ya A kümesinin elemanıdır ya da değildir. Klasik mantık yöntemleriyle karmaşık sistemleri modellemek ve kontrol etmek zordur, çünkü veriler tam ve net olmalıdır. Fuzzy mantık kişiyi bu zorunluluktan kurtarır ve daha niteliksel bir tanımlama olanağı sağlar. Günlük hayatta kullanılan birçok terim genellikle bir fuzzy yapıya sahiptir. Bir kavram tanımlanırken, bir olay açıklanırken, komut verilirken ve daha birçok durumda kullanılan sözel veya sayısal ifadeler belirsizlik içerir. Örneğin; yaşlı, genç, uzun, kısa, soğuk, ılık, bulutlu, parçalı bulutlu gibi daha pek çok sözel terim gösterilebilir. Bir kişi için 38.5 yaşında demektense orta yaşlı demek bir çok uygulama için yeterli bir veridir. Fuzzy mantık ve fuzzy mantık tabanlı uygulamalar son yıllarda hem üniversite çevrelerinde hem de üretici firmalar tarafından ilgiyle izlenen bir konu haline geldi. Geliştirilen son teoremler fuzzy mantığın ilke olarak, ister mühendislik, ister biyoloji ve hatta isterse ekonomi olsun, her türlü alanda sürekli sistemleri modellemek için kullanılabileceğini göstermektedir. Fuzzy mantık fotoğraf makineleri, çamaşır makineleri, klimalar ve otomatik iletim hatları gibi uygulamalarda kullanılmaktadır. Bundan başka uzay araştırmaları ve havacılık endüstrisinde de kullanılmaktadır. Çoğu alanda fuzzy mantık temelli sağduyulu modellerin standart matematiksel modellerden daha yararlı ya da daha kesin sonuçlar verdiği görülmektedir.

Fuzzy kuramının merkez kavramı fuzzy cümlelerdir. Bir fuzzy cümle kendine ait üyelik fonksiyonuyla açık olarak temsil edilebilir. Bir fuzzy sayısı reel sayıların alt cümlesi olan bir fuzzy cümlesidir. Fuzzy sayılar ve bu sayılar üzerinde aritmetik işlemler ilk olarak Zadeh [1] tarafından tanımlanmıştır. Fuzzy sayıların bir dizisi ilk olarak Matloka [2] tarafından tanımlanmış ve bu dizilerin sınırlılık ve yakınsaklık özellikleri incelenmiştir. Daha sonra Nanda [3] fuzzy sayı dizilerinin tam metrik uzay olduğunu ispatlamıştır. H. Kızmaz [4] klasik cümleler için $l_\infty(\Delta), c(\Delta), c_0(\Delta)$ fark dizi uzaylarını inceledi. Bu uzaylar daha sonra Tripathy ve Esi [5] tarafından genelleştirildi. E. Savaş [6] bu çalışmadan fuzzy reel sayıları için fark dizi uzaylarını inşaa ederek ve farklı özelliklerini araştırmak için faydalandı.

Bu tezde ilk olarak Fuzzy cümle, fuzzy sayı kavramları açıklanmış daha sonra fuzzy dizi uzayları üzerine yapılan çalışmaların bir kısmı takdim edilmiştir.

2. TEMEL KAVRAMLAR

2.1 Temel Tanım ve Teoremler

Bu kısımda tezin ilerdeki kısımlarında kullanılacak bazı temel kavramlardan bahsedilecektir.

Tanım 2.1.1. *([7]) X cümlesi, K kompleks sayılar cismi üzerinde boştan farklı bir cümle olsun.*

$$+ : X \times X \to X$$

$$. : K \times X \to X$$

fonksiyonları aşağıdaki şartları sağlıyor ise X cümlesine K cismi üzerinde bir vektör (lineer) uzayı denir. $\forall x, y, z \in X$ ve $\lambda, \mu \in K$ olmak üzere

1. $x + y = y + x$
2. $(x + y) + z = x + (y + z)$
3. $\forall x \in X$ için $x + \theta = x$ olacak şekilde bir $\theta \in X$ vardır.
4. $\forall x \in X$ için $x + (-x) = \theta$ olacak şekilde bir $(-x) \in X$ vardır.
5. $1.x = x$
6. $\lambda(x + y) = \lambda x + \lambda y$

7. $(\lambda + \mu) x = \lambda x + \mu x$

8. $\lambda(\mu x) = (\lambda\mu)x$

Tanım 2.1.2. *([7]) $X \neq \varnothing$ ve $x, y \in X$ olsun. $\forall x, y, z \in X$ için*

(d1) $d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$

(d2) $d(x, y) = d(y, x)$, *(simetri aksiyomu)*

(d3) $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$, *(üçgen eşitsizliği)*

şartlarını sağlayan $d : X \times X \to \mathbb{R}$ fonksiyonuna bir metrik, (X, d) ikilisine de bir metrik uzay denir.

Tanım 2.1.3. *([7]) $x = (x_n)$ bir dizi olsun. Verilen her $\varepsilon > 0$ için ve $\forall\ n, m > N$ olduğunda $d(x_n, x_m) < \varepsilon$ olacak şekilde bir $N = N(\varepsilon)$ sayısı mevcut ise $x = (x_n)$ dizisine bir Cauchy dizisidir denir.*

Tanım 2.1.4. *([7]) (X, d) bir metrik uzay olmak üzere X uzayındaki herbir Cauchy dizisi yine X in bir noktasına yakınsıyor ise (X, d) uzayına bir tam metrik uzay denir.*

Tanım 2.1.5. *([7]) X , K cismi üzerinde bir vektör uzayı olsun.*

$$\|.\| : X \to \mathbb{R}$$
$$x \to \|x\|$$

dönüşümü, $\forall x, y \in X$ ve $\lambda \in K$ için

(N1) $\|x\| \geq 0$

(N2) $\|x\| = 0 \Rightarrow x = \theta$

(N3) $\|\lambda x\| = |\lambda| \,.\, \|x\|$

(N4) $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$

şartlarını sağlıyor ise bu dönüşüme bir norm, $(X, \|.\|)$ ikilisine de bir normlu uzay denir.

Tanım 2.1.6. *([7])* $(X, \|.\|)$ *normlu uzayı tam ise, yani* X *uzayından alınan her Cauchy dizisi bu uzayda bir noktaya yakınsıyor ise, bu normlu uzaya bir Banach uzayı denir.*

Tanım 2.1.7. *([7])* X *bir vektör uzayı ve* $Y \subset X$ *olsun.* $\forall x, y \in Y$ *ve* $\lambda \in [0, 1]$ *için*

$$A = \{z \in X : z = \lambda x + (1 - \lambda)y\} \subset Y$$

ise Y *konvekstir denir.*

Tanım 2.1.8. *([7]) Kompleks cisim üzerindeki bütün* $x = (x_k)$, *dizilerinin uzayı* w *ile gösterilir.* w *uzayı* $x = (x_k), y = (y_k)$ *ve* $\lambda \in \mathbb{C}$ *için*

$$+ : w \times w \to w$$

$$(x, y) \to x + y = (x_k + y_k)$$

ve

$$. : \mathbb{C} \times w \to w$$

$$(\lambda, x) \to \lambda x = (\lambda x_k)$$

işlemleriyle bir lineer uzaydır. w *uzayının her altuzayına bir dizi uzayı denir.*

Tanım 2.1.9. *([7]) $x = (x_n)$ kompleks terimli bir dizi olmak üzere $\forall n \in \mathbb{N}$ için $|x_n| \leq M$ olacak şekilde bir $M > 0$ var ise $x = (x_n)$ dizisine sınırlıdır denir ve tüm sınırlı dizilerin uzayı l_∞ ile gösterilir,*

$$d(x, y) = \sup_n |x_n - y_n|$$

olmak üzere d, l_∞ üzerinde bir metrik tanımlar.

Tanım 2.1.10. *([7]) $x = (x_n)$, (X, d) metrik uzayında kompleks terimli bir dizi olmak üzere eğer verilen her $\varepsilon > 0$ ve $n \geq N$ için $d(x_n, l) < \varepsilon$ olacak şekilde en az bir $N = N(\varepsilon)$ bulunabiliyor ise $x = (x_n)$ dizisi l ye yakınsaktır denir ve $x_n \to l$ ($n \to \infty$ için) veya $\lim_{n\to\infty} x_n = l$ ile gösterilir. Tüm yakınsak dizilerin uzayı c ile, tüm sıfıra yakınsak dizilerin uzayı c_0 ile gösterilir.*

$$d(x, y) = \sup_n |x_n - y_n|$$

fonksiyonu c üzerinde,

$$d(x, y) = \max_n |x_n - y_n|$$

fonksiyonu c_0 üzerinde bir metrik tanımlar.

Kolayca görülebileceği gibi bu dizi uzayları üzerinde

$$c_0 \subset c \subset l_\infty$$

kapsamaları geçerlidir.

l_∞, c ve c_0 uzayları

$$\|x\|_\infty = \sup_k |x_k|$$

normu ile birer Banach uzayıdır.

Şimdi solid uzay, monoton uzay, convergence free uzay ve simetrik uzay kavramlarından bahsedelim:

Tanım 2.1.11. *([8]) E bir dizi uzayı ve (α_k) dizisi $\forall\ k \in \mathbb{N}$ için $|\alpha_k| \leq 1$ şartını sağlayan skalerlerin bir dizisi olmak üzere $(x_k) \in E$ iken $(\alpha_k x_k) \in E$ ise E ye solid (normal) dir denir.*

Tanım 2.1.12. *([8]) E bir dizi uzayı olmak üzere eğer E uzayı tüm basamak uzaylarının kanonik öngörüntülerini içeriyorsa E ye monotondur denir.*

Tanım 2.1.13. *([8]) E bir dizi uzayı olmak üzere eğer $(x_k) \in E$ iken $(y_k) \in E$ ve $x_k = 0$ iken $y_k = 0$ ise E ye convergence freedir denir.*

Tanım 2.1.14. *([8]) E bir dizi uzayı olmak üzere eğer $(x_k) \in E$ iken $\left(x_{\pi(k)}\right) \in E$ ise E ye simetriktir denir, burada $\pi(k)$, $\mathbb{N}$ nin bir permütasyonudur.*

Fark dizi uzayları kavramı ilk olarak H.Kizmaz [4] tarafından aşağıdaki gibi tanımlandı:

Tanım 2.1.15. *l_∞, c ve c_0 uzayları da kompleks terimli $x = (x_k)$ $(k \in \mathbb{N})$ dizisinin sırasıyla sınırlı, yakınsak ve sıfıra yakınsak uzayları olsun. $\Delta x = (x_k - x_{k+1})$, $k = 1, 2, ...$ olmak üzere bu uzayların fark dizi uzayları, sırasıyla*

$$l_\infty(\Delta) = \{x = (x_k) : \Delta x \in l_\infty\};$$

$$c(\Delta) = \{x = (x_k) : \Delta x \in c\};$$

$$c_0(\Delta) = \{x = (x_k) : \Delta x \in c_0\}$$

şeklindedir.

Bu tanım daha sonra Tripathy ve Esi [5] tarafından aşağıdaki gibi genelleştirildi:

Tanım 2.1.16. *([5]) $m \geq 0$ bir tamsayı ve $k \in \mathbb{N}$ için $\Delta_m x_k = (x_k - x_{k+m})$ olmak üzere l_∞, c ve c_0 uzaylarının fark dizi uzayları, sırasıyla*

$$l_\infty(\Delta_m) = \{x = (x_k) : \Delta_m x \in l_\infty\}$$

$$c(\Delta_m) = \{x = (x_k) : \Delta_m x \in c\}$$

$$c_0(\Delta_m) = \{x = (x_k) : \Delta_m x \in c_0\}$$

şeklindedir.

Özel olarak $m = 1$ için bu uzaylar $l_\infty(\Delta_1) = l_\infty(\Delta)$, $c(\Delta_1) = c(\Delta)$, $c_0(\Delta_1) = c_0(\Delta)$ olur.

Fark dizi uzayları için geçerli bazı topolojik özellikler aşağıdaki gibi verilebilir:

Teorem 2.1.1. *([5]) $l_\infty(\Delta_m)$, $c(\Delta_m)$ ve $c_0(\Delta_m)$ uzayları*

$$\|x\|_{\Delta_m} = \sum_{r=1}^{m} |x_r| + \sup_k |\Delta_m x_k|$$

normuyla birer normlu lineer uzaydır.

Teorem 2.1.2. *([5]) Aşağıdaki kapsama bağıntıları geçerlidir:*

(i) $c_0(\Delta_m) \subset c(\Delta_m) \subset l_\infty(\Delta_m)$,

(ii) $Z = c_0,\ c,\ l_\infty$ *olmak üzere* $Z(\Delta) \subset Z\left(\Delta_m\right)$ *dir.*

Teorem 2.1.3. *([5]) $l_\infty(\Delta_m)$, $c(\Delta_m)$ ve $c_0(\Delta_m)$ uzayları*

$$\|x\|_{\Delta_m} = \sum_{r=1}^{m} |x_r| + \sup_k |\Delta_m x_k|$$

normu ile birer Banach uzayıdır.

Teorem 2.1.4. *([5])* $l_\infty(\Delta_m)$, $c(\Delta_m)$ *ve* $c_0(\Delta_m)$ *uzayları solid uzay değildir.*

Teorem 2.1.5. *([5])*

(i) $m = 1$ *için* $c_0(\Delta)$ *uzayı simetrik uzaydır,*

(ii) $l_\infty(\Delta_m)$, $c(\Delta_m)$ *ve* $c_0(\Delta_m)$ $(m > 1)$ *uzayları simetrik uzay değildir.*

Teorem 2.1.6. *([5])* $l_\infty(\Delta_m)$, $c(\Delta_m)$ *ve* $c_0(\Delta_m)$ *uzayları convergence free değildir.*

Teorem 2.1.7. *([5])* $l_\infty(\Delta_m)$, $c(\Delta_m)$ *ve* $c_0(\Delta_m)$ *uzayları monoton değildir.*

3. FUZZY CÜMLELER

Fuzzy cümle kavramı ilk olarak Lutfi A. Zadeh tarafından 1965'de ortaya atılmıştır. Fuzzy cümle kuramı, belirsizlik ifade eden kavramlara belirlilik getirme ihtiyacından doğmuştur. Fuzzy cümleler klasik cümlelerin genelleştirilmiş şeklidir . Bir fuzzy cümle sürekli üyelik derecesine sahip nesnelerin bir sınıfıdır. Bu tarz cümleler nesnelere 0 ile 1 arasında değişen değerler tahsis eden üyelik fonksiyonlarıyla karakterize edilir. Bu kısımda fuzzy cümleler için birleşim, kesişim, tümleme ve konvekslik gibi kavramlar Zadeh [1] e dayanılarak tanımlanacaktır.

X genel elemanı x ile gösterilen nesnelerin bir cümlesi olsun. X de bir A fuzzy cümlesi X deki herbir noktayı $[0,1]$ aralığındaki bir reel sayıya karşılık getiren $f_A(x)$ üyelik fonksiyonuyla karakterize edilir. Üyelik fonksiyonu $x \in A$ için $f_A(x) \in (0,1]$, $x \notin A$ için $f_A(x) = 0$ şeklinde tanımlıdır. $f_A(x)$ değeri $x \in A$ nın üyelik derecesini belirtir. A klasik anlamda bir cümle olduğunda A nın üyelik fonksiyonu yalnızca iki farklı değer alır. Üyelik olduğunda $f_A(x) = 1$ ve üyelik olmadığında $f_A(x) = 0$ dır. Klasik cümle ile fuzzy cümlesi arasında ayrım yapma ihtiyacı doğarsa üyelik fonksiyonunun sadece iki değer alması klasik cümleyi fuzzy cümleden ayırır.

Örneğin; $\mathbb{R}$ de 1 den çok büyük sayıların fuzzy cümlesi A olsun. Bu durumda A nın f_A üyelik fonksiyonunun değerleri

$$f_A(0) = 0,\ f_A(1) = 0,\ f_A(5) = 0.01,\ f_A(10) = 0.2,\ f_A(100) = 0.95,\ f_A(500) = 1$$

olabilir [1].

3.1 Tanımlar ve Temel Kavramlar

Tanım 3.1.1. *([1]) Bir A fuzzy cümlesinin üyelik fonksiyonu sıfıra özdeş ise A fuzzy cümlesine boştur denir.*

Tanım 3.1.2. *([1]) A ve B gibi iki fuzzy cümlesinin üyelik fonksiyonları sırasıyla* f_A *ve* f_B *olsun. Eğer* $\forall\ x \in X$ *için* $f_A(x) = f_B(x)$ *ise A ve B fuzzy cümleleri birbirine eşittir denir.*

Tanım 3.1.3. *([1]) Bir A fuzzy cümlesinin tümleyeni A′ ile gösterilir ve*

$$f_{A'} = 1 - f_A$$

olarak tanımlanır.

Klasik cümlelerde olduğu gibi kapsama unsuru fuzzy cümlelerde de merkezi bir işleve sahiptir.

Tanım 3.1.4. *([1]) A ve B gibi iki fuzzy cümlesinin üyelik fonksiyonları sırasıyla,* f_A *ve* f_B *olsun. Eğer bu iki üyelik fonksiyonu arasında* $f_A \leq f_B$ *gibi bir bağıntı var ise A fuzzy cümlesine B nin bir altcümlesi denir ve*

$$f_A \leq f_B$$

şeklinde gösterilir.

Tanım 3.1.5. *([1]) A ve B üyelik fonksiyonları sırasıyla* f_A *ve* f_B *olan iki fuzzy cümle olsun. Üyelik fonksiyonu*

$$f_C(x) = \max_{x \in X}\{f_A(x), f_B(x)\}$$

olarak tanımlanan C fuzzy cümlesine A ve B fuzzy cümlelerinin birleşimi denir, kısaltılmış formda

$$f_C = f_A \vee f_B$$

ile gösterilir.

Tanım 3.1.6. *([1]) A ve B üyelik fonksiyonları sırasıyla f_A ve f_B olan iki fuzzy cümle olsun. Üyelik fonksiyonu*

$$f_C(x) = \min_{x \in X}\{f_A(x), f_B(x)\}$$

olarak tanımlanan C fuzzy cümlesine A ve B fuzzy cümlelerinin kesişimi denir, kısaltılmış formda

$$f_C = f_A \wedge f_B$$

ile gösterilir. $A \cap B = \varnothing$ ise A ve B cümlelerine ayrıktır denir.

Tanım 3.1.7. *([1]) A, X de bir fuzzy cümlesi olmak üzere $f_A(x) = 1$ olacak şekilde en az bir $x \in X$ mevcut ise A ya normaldir denir, aksi taktirde A ya subnormaldir denir.*

Tanım 3.1.8. *([1]) A cümlesi, X de bir fuzzy cümle olsun. A nın desteği $suppA$ ile gösterilir ve*

$$suppA = \{x \mid f_A(x) > 0\}$$

cümlesiyle tanımlanır. Yani A nın desteği üyelik derecesi sıfırdan farklı noktalarının cümlesidir.

3.1.1 Birleşim, Kesişim ve Tümlemenin Bazı Özellikleri

X uzayındaki A, B ve C fuzzy cümleleri aşağıdaki özellikleri sağlar [1]:

- Eşgüçlülük Özelliği

$$A \cup A = A$$

$$A \cap A = A$$

- Değişme Özelliği

$$A \cap B = B \cap A$$

$$A \cup B = B \cup A$$

- Birleşme Özelliği

$$(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$$

$$(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$$

- Dağılma Özelliği

$$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$$

$$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$$

- De Morgan Kuralları

$$(\overline{A \cap B}) = \bar{A} \cup \bar{B}$$

$$(\overline{A \cup B}) = \bar{A} \cap \bar{B}$$

- Birim Özelliği

$$A \cap X = A$$

$$A \cup \varnothing = A$$

$$A \cap \varnothing = \varnothing$$

$$A \cup X = X$$

- Tümleme Özelliği

$$A \cap A' = \varnothing$$

$$(A')' = A$$

$$A \cup A' = X$$

3.1.2 Fuzzy Cümleler Üzerinde Cebirsel İşlemler

Fuzzy cümleler üzerinde cebirsel işlemler Zadeh [1] e dayanılarak verilebilir:

Cebirsel Çarpma: A ve B gibi iki fuzzy cümlenin cebirsel çarpımı $A.B$ ile gösterilen ve üyelik fonksiyonu

$$f_{A.B} = f_A.f_B$$

olarak tanımlanan cümledir. Klasik cümleler için $A.B = A \cap B$ iken fuzzy cümleler için $A.B = A \cup B$ dir.

Cebirsel Toplama: A ve B gibi iki fuzzy cümlenin cebirsel toplamı $A + B$ ile gösterilen ve üyelik fonksiyonu

$$f_{A+B} = f_A + f_B$$

olarak tanımlanan cümledir. Cebirsel toplam, $x \in X$ olmak üzere $f_A(x) + f_B(x) \leq 1$ şartını sağlayan tüm x ler için geçerlidir.

Mutlak Fark: A ve B gibi iki fuzzy cümlenin mutlak farkı $|A - B|$ ile gösterilen ve üyelik fonksiyonu

$$f_{|A-B|} = |f_A - f_B|$$

olarak tanımlanan cümledir. Klasik cümleler için bu fark

$$|A - B| = (A \cup B) \backslash (A \cap B)$$

ile tanımlıdır.

İki Fuzzy Cümlesinin Farkı: A fuzzy cümlesinin B fuzzy cümlesinden farkı

$$A - B = A \cap B'$$

ile tanımlanır.

3.1.3 Dönüşümler Tarafından Üretilen Fuzzy Cümleler

$T : X \to Y$ bir dönüşüm ve B, Y de üyelik fonksiyonu f_B olan bir fuzzy cümle olsun. T^{-1} dönüşümü, X de bir A fuzzy cümlesi üretir öyleki bu A fuzzy cümlesinin üyelik fonksiyonu T tarafından Y ye dönüştürülen her x için

$$f_A(x) = f_B(y), y \in Y$$

şeklinde tanımlıdır, yani

$$A = T^{-1}(B) = \{x \in X : T(x) = y, y \in Y\}$$

cümlesi bir fuzzy cümlesidir ve bu cümlenin üyelik fonksiyonu $x \in T^{-1}(y)$ olan x ler için

$$f_A(x) = f_B(y),\ y \in Y$$

dir. Tersine $T : X \to Y$ bir dönüşüm ve A, X de üyelik fonksiyonu $f_A(x)$ olan bir fuzzy cümle olsun. T dönüşümü, Y de üyelik fonksiyonu

$$f_B(y) = \max_{x \in T^{-1}(y)} f_A(x), y \in Y$$

şeklinde tanımlanan bir B fuzzy cümlesi üretir [1].

3.1.4 Konvekslik

X, $\mathbb{R}^n$ uzayını göstermek üzere A, X de bir fuzzy cümle olsun. A fuzzy cümlesinin konveks olması için gerek ve yeter şart Γ_α ile tanımlı

$$\Gamma_\alpha = \{x \mid f_A(x) \geq \alpha\}$$

cümlesinin $\forall \alpha \in (0, 1]$ için konveks olmasıdır. Konvekslikle ilgili bir başka tanım şöyle verilebilir:

A cümlesinin konveks olması için gerek ve yeter şart

$$f_A[\lambda x_1 + (1 - \lambda)x_2] \geq \min\{f_A(x_1), f_A(x_2)\}$$

şartının $\forall x_1, x_2 \in X$ ve $\forall \lambda \in (0, 1]$ için sağlanmasıdır.

Bu iki tanım birbirine denktir, yani;

A fuzzy cümlesi $\Gamma_\alpha = \{x \mid f_A(x) \geq \alpha\}$ anlamında konveks olsun. Burada $\alpha = f_A(x_1)$ seçilirse $\alpha = f_A(x_1) \leq f_A(x_2)$ olur ve $x_2 \in \Gamma_\alpha$ dır. Γ_α konveks olduğundan

$\forall\lambda \in (0,1]$ için $\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2 \in \Gamma_\alpha$ olur. Böylece

$$f_A[\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2] \geq \alpha = f_A(x_1) = \min\{f_A(x_1), f_A(x_2)\}$$

olur. Tersine A fuzzy cümlesi $f_A[\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2] \geq \alpha = f_A(x_1) = \min\{f_A(x_1), f_A(x_2)\}$ anlamında konveks olsun ve $\alpha = f_A(x_1)$ olsun. Γ_α, $f_A(x_2) \geq f_A(x_1)$ şartını sağlayan x_2 noktalarının cümlesi olarak kabul edilebilir. Buradan $f_A[\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2] \geq f_A(x_1)$ olup $\forall\lambda \in (0,1]$ için $\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2 \in \Gamma_\alpha$ olur ki bu ise Γ_α nın konveks olması demektir [1].

Teorem 3.1.1. *([1]) İki konveks fuzzy cümlenin kesişimi de konvekstir.*

4. ARALIK SAYILARI VE FUZZY SAYILAR

4.1 Aralık Sayıları

Bu kısımda, aralıklar arasındaki cebirsel işlemler ve sıralama bağıntısı tanımlandı. Daha sonra, fuzzy sayı tanımı verilerek fuzzy sayıların özelliklerine dair teoremler ve fuzzy sayılar arasındaki cebirsel işlemler ifade edildi.

a ve b iki reel sayı olmak üzere

$$[a, b] = \{x \in \mathbb{R} : a \leq x \leq b\}$$

ile tanımlanan reel sayıların bir kümesine kapalı bir aralık denir. X bir aralık olmak üzere bu aralığın uç noktaları sırasıyla, $\underline{X}$ ve $\overline{X}$ ile gösterilir. Böylece

$$X = [\underline{X}, \overline{X}]$$

şeklinde bir gösterim elde edilir. Burada $\underline{X}$ sayısına aralığın başlangıç noktası, $\overline{X}$ sayısına da aralığın bitim noktası denir. Bir x reel sayısı $x = [x, x]$ ile gösterilir [9].

Bundan sonraki kısımda, aralıklar sayı gibi düşünülerek onlar üzerindeki sıralama bağıntısı ve cebirsel işlemler Matloka [2]'ya dayanılarak tanımlanacaktır:

X ve Y aralıklarının birbirine eşit olması için gerek ve yeter şart

$$\underline{X} = \underline{Y} \qquad \text{ve} \qquad \overline{X} = \overline{Y}$$

olmasıdır. $X = [\underline{X}, \overline{X}]$ ve $Y = [\underline{Y}, \overline{Y}]$ olmak üzere, X ve Y aralıklarının oluşturduğu kümede toplama işlemi

$$X+Y=[\underline{X},\overline{X}]+[\underline{Y},\overline{Y}]=[\underline{X}+\underline{Y},\overline{X}+\overline{Y}]$$

ile tanımlanır ve $x \in X$, $y \in Y$ olmak üzere

$$\underline{X}+\underline{Y} \leq x+y \leq \overline{X}+\overline{Y}$$

eşitsizliği sağlanır. Buradan

$$X+Y=\{x+y: \quad x \in X, \quad y \in Y\}$$

olup iki aralığın toplamının yine bir aralık olduğu görülür.

X aralığının negatifi, yani $-X$ aralığı

$$-X=-[\underline{X},\overline{X}]=[-\overline{X},-\underline{X}]$$

olarak tanımlanır.

$X=[\underline{X},\overline{X}]$ ve $Y=[\underline{Y},\overline{Y}]$ aralıklarının oluşturduğu kümede çıkarma işlemi ise

$$X-Y=[\underline{X},\overline{X}]-[\overline{Y},\underline{Y}]=[\underline{X}-\overline{Y},\overline{X}-\underline{Y}]$$

ile tanımlanır ve $x \in X$ ve $y \in Y$ olmak üzere

$$\underline{X}-\overline{Y} \leq x-y \leq \underline{X}-\overline{Y}$$

dir.

X ve Y aralıkları arasındaki çarpma işlemi de

$$X.Y=[\min\{\underline{XY},\underline{X}\overline{Y},\overline{X}\underline{Y},\overline{XY}\},\max\{\underline{XY},\underline{X}\overline{Y},\overline{X}\underline{Y},\overline{XY}\}]$$

ile tanımlanır.

$X = [\underline{X}, \overline{X}]$ ve $k \in \mathbb{R}$ olsun. X aralığının bir $k = [k, k]$ skaleriyle çarpımı

$$k.X = [k, k].[\underline{X}, \overline{X}] = [k\underline{X}, k\overline{X}]$$

ile tanımlanır.

X aralığının tersi ise $0 \notin [\underline{X}, \overline{X}]$ olmak üzere

$$X^{-1} = [\underline{X}, \overline{X}]^{-1} = \left[\frac{1}{\overline{X}}, \frac{1}{\underline{X}}\right]$$

şeklinde tanımlıdır.

X ve Y aralıkları arasındaki bölme işlemi de

$$X/Y = X.(1/Y) = \left[\min\left\{\frac{\underline{X}}{\underline{Y}}, \frac{\underline{X}}{\overline{Y}}, \frac{\overline{X}}{\overline{Y}}, \frac{\overline{X}}{\underline{Y}}\right\}, \max\left\{\frac{\underline{X}}{\underline{Y}}, \frac{\underline{X}}{\overline{Y}}, \frac{\overline{X}}{\overline{Y}}, \frac{\overline{X}}{\underline{Y}}\right\}\right]$$

ile tanımlanır.

İki aralık arasındaki uzaklık ise

$$d(A, B) = \max(|\underline{A} - \underline{B}|, |\overline{A} - \overline{B}|) \tag{4.1.1}$$

şeklinde tanımlıdır.

4.2 Fuzzy Sayıları

$\mathbb{R}$ reel sayılar cümlesini, $\mathbb{N}$ de tüm pozitif tamsayıların cümlesini ve $F(\mathbb{R})$ de $\mathbb{R}$ deki tüm fuzzy cümlelerin cümlesini göstersin.

$u \in F(\mathbb{R})$ için, u nun λ seviye cümlesi

$$[u]_\lambda = \begin{cases} \{x \in \mathbb{R} : u(x) \geq \lambda\} & , \quad 0 < \lambda \leq 1 \ ise \\ cl\{x \in \mathbb{R} : u(x) > 0\} & , \quad \lambda = 0 \ ise \end{cases}$$

şeklinde tanımlanır [10].

Tanım 4.2.1. *([10])* $\mathbb{R}$ *, reel sayılar cümlesinden* $[0,1]$ *aralığına tanımlı ve aşağıdaki özellikleri sağlayan bir u fonksiyonuna bir fuzzy sayı denir.*

- u normaldir, yani $u(x) = 1$ olacak şekilde bir $x \in \mathbb{R}$ vardır.

- u konvekstir, yani $\forall x, y \in \mathbb{R}$ ve $\forall \lambda \in [0,1]$ için

  $$u(\lambda x + (1-\lambda)y) \geq \min\{u(x), u(y)\}$$

  dir.

- u üst yarı süreklidir, yani $\forall \alpha \in \mathbb{R}$ için,

  $$u^{-1}(-\infty, \alpha) = \{x \in \mathbb{R} : \ u(x) < \alpha\}$$

  cümlesi, $\mathbb{R}$'deki alışılmış topolojiye göre açıktır.

- u^0 olarak tanımlanan $\{x \in \mathbb{R} : u(x) > 0\}$ cümlesinin kapanışı kompakttır.

Yukarıdaki dört özellik her $\lambda \in [0,1]$ için u fuzzy sayının λ seviye cümlesi olarak tanımlanan

$$[u]_\lambda = [u^-(\lambda), u^+(\lambda)]$$

cümlesinin $\mathbb{R}$ nin boş olmayan kompakt ve konveks altcümlesi olması anlamını taşır. Benzer durum $[u]_0$ için de söylenebilir. Ayrıca $[u]_0 = \lim_{\lambda \to 0^+} [u]_\lambda$ şeklinde de yazılabilir. Bir r reel sayısı

$$\tilde{r}(t) = \begin{cases} 1 & , \quad t = r \\ 0 & , \quad t \neq r \end{cases}$$

şeklinde tanımlı bir $\tilde{r}$ fuzzy sayısı olarak düşünülebilir.

$\mathbb{R}$ üzerindeki tüm fuzzy sayıların cümlesi $L(\mathbb{R})$ ile gösterilecektir. Yani

$$L(\mathbb{R}) = \{X : \mathbb{R} \to [0,1], X \text{ fuzzy sayı}\}$$

dir.

Uyarı 4.2.1. *([10]) $u \in L(\mathbb{R})$ olması durumunda herbir $\lambda \in [0,1]$ için $[u]_\lambda = [u^-(\lambda), u^+(\lambda)]$ boş olmayan, kapalı ve sınırlı bir aralıktır.*

Tanım 4.2.2. *([10]) Fuzzy sayılar üzerindeki kısmi sıralama bağıntısı ; u, v birer fuzzy sayı ve $[u]_\lambda = [u^-(\lambda), u^+(\lambda)]$, $[v]_\lambda = [v^-(\lambda), v^+(\lambda)]$ olmak üzere*

$$\begin{aligned} u \leq v &\Longleftrightarrow \forall\lambda \in [0,1] \text{ } \textit{için } [u]_\lambda \leq [v]_\lambda \\ &\Longleftrightarrow \forall\lambda \in [0,1] \text{ } \textit{için } u^-(\lambda) \leq v^-(\lambda) \text{ } \textit{ve } u^+(\lambda) \leq v^+(\lambda) \end{aligned}$$

şeklinde tanımlanır.

Tanım 4.2.3. *([10]) $A \subset L(\mathbb{R})$ olmak üzere $\forall u \in A$ için $u \leq K$ olacak şekilde bir K fuzzy sayı varsa A ya üstten sınırlıdır ve K ya A için bir üst sınırdır denir. Eğer K, A nin bir üst sınırı ve üst sınırların en küçüğü ise K ya A nın en küçük üst sınırı denir ve $\sup A$ ile gösterilir. Benzer şekilde $\forall u \in A$ için $k \leq u$ olacak şekilde bir k fuzzy sayı varsa A ya alttan sınırlıdır ve k ya A için bir alt sınırdır denir. Eğer k, A nin bir alt sınırı ve alt sınırların en büyüğü ise k ya A nin en büyük alt sınırı denir ve $\inf A$ ile gösterilir. A cümlesi hem alttan hem üstten sınırlı ise A ya sınırlıdır denir.*

Teorem 4.2.1. *([10]) (Fuzzy Sayılarının Temsil Teoremi): $u \in L(\mathbb{R})$ ve $\lambda \in [0,1]$ için $[u]_\lambda = [u^-(\lambda), u^+(\lambda)]$ olmak üzere*

(i) $u^-(\lambda)$, $(0,1]$ aralığı üzerinde sınırlı, azalmayan ve soldan sürekli bir fonsiyondur.

(ii) $u^+(\lambda)$, $(0,1]$ aralığı üzerinde sınırlı, artmayan ve soldan sürekli bir fonksiyondur.

(iii) $u^-(\lambda)$ ve $u^+(\lambda)$ fonksiyonları $\lambda = 0$ da sağdan süreklidir.

(iv) $u^-(\lambda) \leq u^+(\lambda)$ dir.

Tersine $\alpha(\lambda)$ ve $\beta(\lambda)$ fonksiyon çifti $(i) - (iv)$ şartlarını sağlıyor ise $\forall\lambda \in [0,1]$ için $[u]_\lambda = [\alpha(\lambda), \beta(\lambda)]$ olacak şekilde bir tek $u \in L(\mathbb{R})$ vardır. Burada α ve β fonksiyon çiftine karşılık gelen u fuzzy sayı;

$$u : \mathbb{R} \to [0,1], \; u(x) = \sup\{\lambda : \alpha(\lambda) \leq x \leq \beta(\lambda)\}$$

şeklinde tanımlıdır.

Tanım 4.2.4. *([10]) u bir fuzzy sayı olsun. Eğer $\forall x < 0$ için $u(x) = 0$ ise u ya negatif olmayan fuzzy sayı denir. Negatif olmayan fuzzy sayılarının uzayı $L^*(\mathbb{R})$ ile gösterilecektir.*

Tanım 4.2.5. *([10]) $u, v \in L(\mathbb{R})$ olmak üzere eğer $\forall x \in \mathbb{R}$ için $u(x) = v(x)$ ise u ve v fuzzy sayıları eşittir denir ve $u = v$ yazılır.*

Tanım 4.2.6. *([11]) (Zadeh Genişleme Prensibi): $X \neq \varnothing$ ve $F(X)$ de X üzerindeki tüm fuzzy cümlelerinin cümlesi olsun. $U, V, W \subseteq \mathbb{R}$ ve*

$$f : U \times V \to W$$

bir fonksiyon olsun. A ve B sırasıyla U ve V üzerinde iki fuzzy cümle olmak üzere f fonksiyonunun fuzzy sayılar üzerine genişlemesi

$$\tilde{f} : F(U) \times F(V) \to F(W)$$

olup $\tilde{f}\,(A,B)$*, W nin bir fuzzy cümlesi olmak üzere*

$$\tilde{f}\,(A,B)\,(z)=\begin{cases}\sup_{f(x,y)=z}\{\min\{A(x),B(y)\}\} & , \quad f^{-1}(z)\neq\varnothing\\ 0 & , \quad f^{-1}(z)=\varnothing\end{cases}$$

şeklinde tanımlı $\tilde{f}$ *fonksiyonudur, burada*

$$f^{-1}(z)=\{(x,y)\in U\times V: f(x,y)=z\in W\}$$

dir. Böyle bir $\tilde{f}$ *fonksiyonuna genişleme prensibi ile indirgenen fuzzy fonksiyon denir.*

Genişleme prensibi aracılığıyla $L(\mathbb{R})\times L(\mathbb{R})$ üzerinde tanımlanan toplama, çıkarma, çarpma ve bölme işlemleri aşağıdaki gibi tanımlanabilir: $u,v\in L(\mathbb{R})$ olmak üzere

$$(u+v)(t)=\sup_{s\in\mathbb{R}}\min(u(s),v(t-s)),\ t\in\mathbb{R},$$

$$(u-v)(t)=\sup_{s\in\mathbb{R}}\min(u(s),v(s-t)),\ t\in\mathbb{R},$$

$$(u.v)(t)=\sup_{s\in\mathbb{R},\ s\neq 0}\min(u(s),v(t/s)),\ t\in\mathbb{R},$$

$$(u/v)(t)=\sup_{s\in\mathbb{R}}\min(u(t.s),v(s)),\ t\in\mathbb{R}$$

dir. $L(\mathbb{R})$ de toplamsal ve çarpımsal etkisiz elemanlar sırasıyla $\bar{0}$ ve $\bar{1}$ olup

$$\bar{0}(t)=\begin{cases}1 & , \quad t=0\ ise\\ 0 & , \quad t\neq 0\ ise\end{cases}\quad , \quad \bar{1}(t)=\begin{cases}1 & , \quad t=1\ ise\\ 0 & , \quad t\neq 1\ ise\end{cases}$$

olarak tanımlıdır. Bir u fuzzy sayının $-u$ negatifi $-u=\bar{0}-u$ şeklinde tanımlıdır. Buradan $\forall t\in\mathbb{R}$ için $(-u)(t)=u(-t)$ ve $v\in L(\mathbb{R})$ olmak üzere $u-v=u+(-v)$ eşitlikleri geçerlidir.

Tanım 4.2.7. *([10]) $u \in L(\mathbb{R})$ olmak üzere bir u fuzzy sayının $|u|$ mutlak değeri ,*

$$|u|(t) = \begin{cases} \max(u(t), u(-t)) & , \quad t \geq 0 \ ise \\ 0 & , \quad t < 0 \ ise \end{cases}$$

şeklinde tanımlıdır.

Fuzzy sayılar üzerindeki cebirsel işlemler λ seviye cümleleri yardımıyla aşağıdaki gibi tanımlıdır:

Tanım 4.2.8. *([12]) $u, v \in L(\mathbb{R})$, $k \in \mathbb{R}$ ve $\lambda \in [0,1]$ için $[u]_\lambda = [u^-(\lambda), u^+(\lambda)]$, $[v]_\lambda = [v^-(\lambda), v^+(\lambda)]$ olmak üzere*

$$[u+v]_\lambda = [u]_\lambda + [v]_\lambda = [u^-(\lambda) + v^-(\lambda), u^+(\lambda) + v^+(\lambda)]$$

$$[u-v]_\lambda = [u]_\lambda - [v]_\lambda = [u^-(\lambda) - v^+(\lambda), u^+(\lambda) - v^-(\lambda)]$$

$$[u.v]_\lambda = [u^-(\lambda).v^-(\lambda), u^+(\lambda).v^+(\lambda)], \ (u, v \in L^*(\mathbb{R}))$$

$$[1/u]_\lambda = \left[\frac{1}{u^+(\lambda)}, \frac{1}{u^-(\lambda)}\right], \ (u^-(\lambda) > 0 \ \text{ için})$$

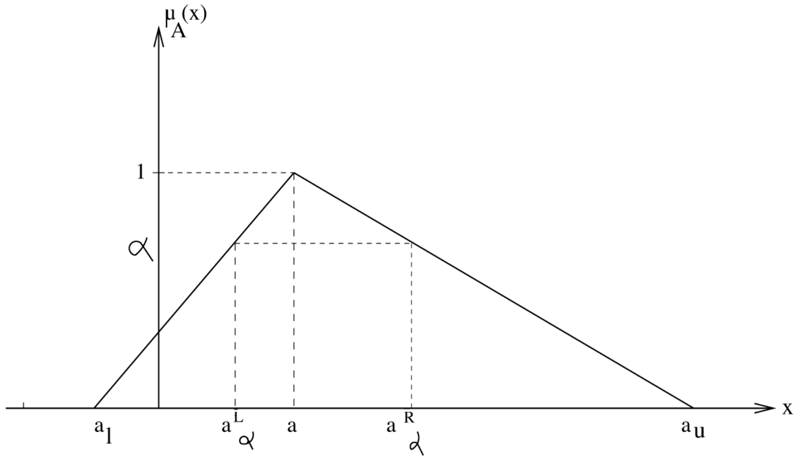
$$[|u|]_\lambda = [\max(0, u^-(\lambda), -u^+(\lambda)), \max(\left|u^-(\lambda)\right|, \left|u^+(\lambda)\right|)]$$

$$[k.u]_\lambda = k.[u]_\lambda$$

dir.

$\overline{d} : L(\mathbb{R}) \times L(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ dönüşümüyle verilen $\overline{d}(u,v) = \sup_{0 \leq \alpha \leq 1} d([u]_\lambda, [v]_\lambda)$ eşitliğinin $L(\mathbb{R})$ üzerinde bir metrik tanımladığı açıktır. $L(\mathbb{R})$ uzayı $\overline{d}$ metriğiyle bir tam metrik uzaydır.

$\{\overline{d}(u,v) : u, v \in E\}$ kümesinin en küçük üst sınırına E nın çapı denir ve $\delta(E)$ ile gösterilir. Eğer $\delta(E)$ sonluysa E ye sınırlıdır denir.



Şekil 4.1. Bir üçgen fuzzy sayı $A = (a_l, a, a_u)$

4.3 Bazı Fuzzy Sayı Çeşitleri ve Bunların Aritmetiği

Bu kısımda üçgensel fuzzy sayı, yamuk fuzzy sayı ve $(L - R)$ fuzzy sayı çeşitleri Bector ve Chandra [13] ya dayanılarak açıklanacaktır.

Tanım 4.3.1. *([13]) (Üçgensel Fuzzy Sayı): Bir* V *fuzzy sayının üyelik fonksiyonu*

$$f_V(t) = \begin{cases} 0 & , \quad t < v_l, \quad t > v_u \ ise \\ \frac{t-v_l}{v-v_l} & , \quad v_l \leq t \leq v \quad ise \\ \frac{v_u-t}{v_u-v} & , \quad v < t \leq v_u \quad ise \end{cases}$$

şeklinde verilmiş ise bu sayıya üçgensel fuzzy sayı denir ve $V = (v_l, v, v_u)$ *şeklinde gösterilir.*

Bu sayının λ seviye cümlesi olan $[V]_\lambda$,

$$[V]_\lambda = [V^-(\lambda), V^+(\lambda)] = [(v - v_l)\lambda + v_l, -(v_u - v)\lambda + v_u], \quad \lambda \in [0, 1]$$

şeklinde tanımlanır.

$V = (v_l, v, v_u)$ ve $W = (w_l, w, w_u)$ iki üçgensel fuzzy sayı olsun. Bu sayılar üzerinde "+","−","∗","/" gibi aritmetik işlemler hem aralık aritmetiğiyle hem de sayıların λ seviye cümleleri aracılığıyla bulunabilir.

$$U + W = (v_l + w_l, v + w, v_u + w_u)$$

$$-V = (-v_u, -v, -v_l)$$

$$kV = (kv_l, kv, kv_u)$$

$$V - W = (v_l - w_u, v - w, v_u - w_l)$$

olup bu sayılar birer üçgensel sayıdır ancak $V^{-1}, V.W, V/W$ sayıları üçgensel olmak zorunda değildir.

Örneğin;

$V = (-3, 2, 4)$ ve $W = (-1, 0, 5)$ iki üçgensel fuzzy sayı olmak üzere

$$V + W = (-3, 2, 4) + (-1, 0, 5) = (-4, 2, 9)$$

ve

$$V - W = (-3, 2, 4) + (-5, 0, 1) = (-8, 2, 5)$$

olur. Aynı sonuç λ seviye cümleleri aracılığıyla:

$$\begin{aligned}
[V]_\lambda &= [V^-(\lambda), V^+(\lambda)] \\
&= [(v - v_l)\lambda + v_l, -(v_u - v)\lambda + v_u] \\
&= [(2 + 3)\lambda - 3, -(4 - 2)\lambda + 4] \\
&= [5\lambda - 3, -2\lambda + 4]
\end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned}
[W]_\lambda &= [W^-(\lambda), W^+(\lambda)] \\
&= [(w - w_l)\lambda + w_l, -(w_u - w)\lambda + w_u] \\
&= [(0 + 1)\lambda - 1, -(5 - 0)\lambda + 5] \\
&= [\lambda - 1, -5\lambda + 5]
\end{aligned}$$

olup

$$
\begin{aligned}
[V]_\lambda + [W]_\lambda &= [5\lambda - 3, -2\lambda + 4] + [\lambda - 1, -5\lambda + 5] \\
&= [6\lambda - 4, -7\lambda + 9] \\
&= [U^-(\lambda), U^+(\lambda)]
\end{aligned}
$$

elde edilir. Böylece

$$
f(V+W)(t) = \begin{cases} 0 & . \quad t < -4, t > 9 \; ise \\ \frac{t+4}{6} & , \quad -4 \leq t \leq 2 \; ise \\ \frac{-t+9}{7} & , \quad 2 < t \leq 9 \; ise \end{cases}
$$

$-, *, /$ işlemleri de benzer şekilde yapılır.

Tanım 4.3.2. *([13]) (Yamuk Fuzzy Sayı) : Bir V fuzzy sayının üyelik fonksiyonu*

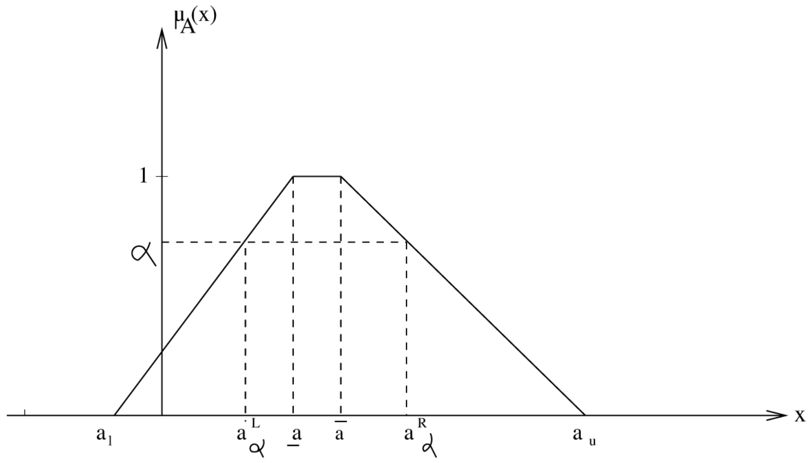
$$
f_V(t) = \begin{cases} 0 & , \quad t < v_l, t > v_u \; ise \\ \frac{t - v_l}{\underline{v} - v_l} & , \quad v_l \leq t \leq \underline{v} \; ise \\ 1 & , \quad \underline{v} \leq t \leq \overline{v} \; ise \\ \frac{v_u - t}{v_u - \overline{v}} & , \quad \overline{v} \leq t \leq v_u \; ise \end{cases}
$$

şeklinde verilmiş ise V ye yamuk fuzzy sayı denir ve $V = (v_l, \underline{v}, \overline{v}, v_u)$ şeklinde gösterilir.

Bu sayının λ seviye cümlesi olan $[V]_\lambda$,

$$
[V]_\lambda = [V^-(\lambda), V^+(\lambda)] = [(\underline{v} - v_l)\lambda + v_l, -(v_u - \overline{v})\lambda + v_u], \;\; \lambda \in [0,1]
$$

şeklindedir. $V = (v_l, \underline{v}, \overline{v}, v_u)$ ve $W = (w_l, \underline{w}, \overline{w}, w_u)$ iki yamuk fuzzy sayı olsun. Bu sayılar üzerinde "+","−","*","/" gibi aritmetik işlemler hem aralık aritmetiğiyle hem de sayıların λ seviye cümleleri aracılığıyla bulunabilir.



Şekil 4.2. Bir yamuk fuzzy sayı $A = (a_l, \underline{a}, \bar{a}, a_u)$

$$V + W = (v_l + w_l, \underline{v} + \underline{w}, \overline{v} + \overline{w}, v_u + w_u)$$

$$-V = (-v_u, -\underline{v}, -\overline{v}, -v_l)$$

$$kV = (kv_l, k\underline{v}, k\overline{v}, kv_u)$$

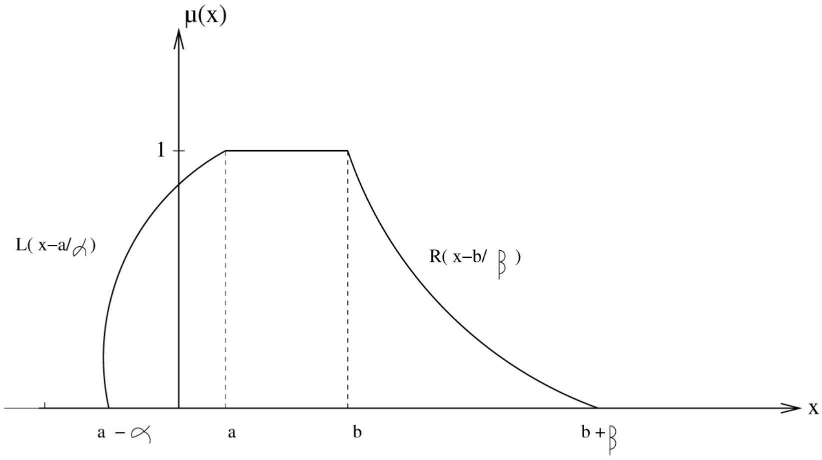
$$V - W = (v_l - w_u, v - w, v_u - w_l)$$

olup bu sayılar birer yamuk sayıdır ancak $V^{-1}, V.W, V/W$ sayıları yamuk olmak zorunda değildir.

Tanım 4.3.3. *([13]) ((L − R) Fuzzy Sayı) : Bir V fuzzy sayının* $f_V : \mathbb{R} \to [0,1]$ *üyelik fonksiyonu*

$$f_V(t) = \begin{cases} L(\frac{t-v}{v}) & , \quad v - \lambda \leq t \leq v, \ \lambda > 0 \\ 1 & , \quad v \leq x \leq w \\ R(\frac{t-w}{\mu}) & , \quad w \leq t \leq (w + \mu), \ \mu > 0 \\ 0 & , \quad \textit{aksi taktirde} \end{cases}$$

şeklinde verilmiş ise V ye bir $(L - R)$ *fuzzy sayı denir. Burada L ve R fonksiyonları parçalı sürekli olup, L artan ve R azalandır. Ayrıca* $L(0) = R(0) = 1$ *dir.*



Şekil 4.3. L-R Fuzzy sayı $A = (a_1, b_1, \alpha, \beta)$

Bir V, $(L-R)$ fuzzy sayı $V = (v, w, \lambda, \mu)_{LR}$ şeklinde gösterilir. v ve w aralığın başlangıç ve bitiş noktaları olup λ sol sıçrama, μ ise sağ sıçramadır. $V = (v_1, w_1, \lambda, \mu)_{LR}$ ve $W = (v_2, w_2, \gamma, \vartheta)$ iki $(L-R)$ fuzzy sayı olsun. Buradan

$$V + W = (v_1 + v_2, w_1 + w_2, \lambda + \gamma, \mu + \vartheta)_{LR}$$

$$-V = -(v_1, w_1, \lambda, \mu) = (-w_1, -v_1, -\mu, -\lambda)_{LR}$$

olur.

$$\begin{aligned} V - W &= (v_1, w_1, \lambda, \mu)_{LR} + (-(v_2, w_2, \gamma, \vartheta)_{RL}) \\ &= (v_1, w_1, \lambda, \mu)_{LR} + (-w_2, -v_2, \vartheta, \gamma)_{LR} \\ &= (v_1 - w_2, w_1 - v_2, \lambda + \vartheta, \mu + \gamma)_{LR} \end{aligned}$$

olur. Üçgensel ve yamuk fuzzy sayılarda olduğu gibi $V^{-1}, V.W, V/W$, $(L-R)$ fuzzy sayı olmak zorunda değildir.

5. FUZZY DİZİ UZAYLARI

5.1 Fuzzy Sayı Dizisi

Fuzzy sayı dizisi kavramı tanımlanmadan önce $\bar{d}$ metriği kavramı verilmelidir.

$L(\mathbb{R})$ üzerindeki $\bar{d}$ metriği aşağıdaki gibi tanımlıdır: $u, v \in L(\mathbb{R})$ ve d, (4.1.1) de tanımlandığı gibi olmak üzere

$$\bar{d}(u,v) = \sup_{\lambda\in[0,1]} d([u]_\lambda, [v]_\lambda) = \sup_{\lambda\in[0,1]} \max\{\left|u^-(\lambda) - v^-(\lambda)\right|, \left|u^+(\lambda) - v^+(\lambda)\right|\}$$

dir.

Tanım 5.1.1. *([2]) Bir fuzzy sayı dizisi, tanım cümlesi* $\mathbb{N}$ *doğal sayılar değer cümlesi* $L(\mathbb{R})$ *fuzzy sayı uzayı olarak tanımlanan bir fonksiyondur. Bütün fuzzy sayı dizilerinin uzayı* w^F *ile gösterilir.*

Bu durumda bir $u = (u_n)$ fuzzy sayı dizisi her doğal sayının bir fuzzy sayıya karşılık gelmesidir, yani her $n \in \mathbb{N}$ sayısı bir u_n fuzzy sayıya karşılık gelir. u_n fuzzy sayıya dizinin n. terimi denir. $\mathbb{R}$ de fuzzy sayıların bir $u = (u_n)$ dizisine örnek olarak

$$u_n(t) = \begin{cases} \frac{n}{2n-1}t & , \quad t \in [0, \frac{2n-1}{n}), \ ise \\ 1 & , \quad t \in \left[\frac{2n-1}{n}, \frac{2n+1}{n}\right], ise \\ \frac{-n}{2n-1}(t-4) & , \quad t \in (\frac{2n+1}{n}, 4], \ ise \\ 0 & , \quad \text{diğer hallerde} \end{cases}$$

verilebilir.

Tanım 5.1.2. *([2]) Bir* $u = (u_n) \subset L(\mathbb{R})$ *ve* $u_0 \in L(\mathbb{R})$ *olmak üzere eğer verilen her* $\varepsilon > 0$ *için* $n > n_0$ *olduğunda* $\overline{d}(u_n, u_0) < \varepsilon$ *olacak şekilde en az bir* $n_0 \in \mathbb{N}$ *bulunabiliyor ise* (u_n) *fuzzy sayı dizisi* u_0 *a yakınsaktır denir ve* $u_n \to u_0$ $(n \to \infty)$ *ile veya* $\lim_{n\to\infty} u_n = u_0$ *ile gösterilir. Örneğin* $(u_n(t))$ *dizisi*

$$u_0(t) = \begin{cases} \frac{1}{2}t & , \ t \in [0,2), \ ise \\ -\frac{1}{2}t(t-4) & , \ t \in [2,4], \ ise \\ 0 & , \ diğer\ hallerde \end{cases}$$

fuzzy sayıya yakınsaktır. Tüm yakınsak fuzzy sayı dizilerinin uzayı c^F *ile, sıfıra yakınsak fuzzy sayı dizilerinin uzayı ise* c_0^F *ile gösterilir.*

Tanım 5.1.3. *([2]) Bir* u_0 *fuzzy sayının* ε *yarıçaplı bir* $K(u_0, \varepsilon)$ *komşuluğu*

$$K(u_0, \varepsilon) = \{u \in L(\mathbb{R}) : d(u_0, u) < \varepsilon\}$$

şeklinde tanımlıdır.

Teorem 5.1.1. *([2])* $u = (u_n)$ *bir dizi ve* u_0 *da bir fuzzy sayı olmak üzere eğer* u_0 *ın her* ε *komşuluğu dizinin sonsuz çoklukta terimini içeriyor ise* $u = (u_n)$ *dizisinin limiti* u_0*'dır denir.*

Teorem 5.1.2. *([2]) Bir* (u_n) *dizisi yakınsak ise sadece bir tek limiti vardır.*

İspat. $\lim_n u_n = u_0$ olsun. v_0, u_0 dan farklı bir fuzzy sayı olsun. u_0 ın bir K komşuluğu ve $K \cap K' = 0$ şartını sağlayan v_0 ın bir K' komşuluğu vardır. $\lim_n u_n = u_0$ olduğundan K, $\{u_n\}$ in sonlu sayıda terimini içerir. Bu nedenle v_0 ın K' komşuluğu (u_n) in sonsuz çoklukta terimini içeremez. Bu v_0 ın $\{u_n\}$ in bir limiti olamayacağını gösterir. Dolayısıyla $\lim_n u_n = u_0$ ise (u_n) in sadece bir tek limiti vardır o da u_0 dır. $\square$

Teorem 5.1.3. *([2]) $n > n_0$ ve $(u_n) \leq (v_n) \leq (w_n)$ olacak şekilde bir n_0 sayısı mevcut ve $\lim\limits_n u_n = u_0 = \lim\limits_n w_n$ ise $\lim\limits_n v_n = u_0$ dır.*

İspat. $\varepsilon > 0$ olsun. $\lim\limits_n u_n = u_0$ olduğundan bir $n_1 \in \mathbb{N}$ vardır öyleki $n > n_1$ olduğunda $\bar{d}(u_n, u_0) < \varepsilon$ dur. Ayrıca $\lim\limits_n w_n = u_0$ olduğundan bir $n_2 \in \mathbb{N}$ vardır öyleki $n > n_2$ olduğunda $\bar{d}(w_n, u_0) < \varepsilon$ dur. $\bar{n} = \max\{n_0, n_1, n_2\}$ olsun. Buradan $n > \bar{n}$ olduğunda

$$\begin{aligned}
\bar{d}(v_n, u_0) &\leq \bar{d}(v_n, w_n) + \bar{d}(w_n, u_0) \leq \bar{d}(u_n, w_n) + \bar{d}(w_n, u_0) \\
&\leq \bar{d}(u_n, u_0) + \bar{d}(w_n, u_0) + \bar{d}(w_n, u_0) \\
&< 3\varepsilon
\end{aligned}$$

elde edilir ve dolayısıyla $\lim\limits_n v_n = u_0$ dır. □

Tanım 5.1.4. *([3]) $(u_n) \subset L(\mathbb{R})$ bir fuzzy sayı dizisi olsun. Eğer $\{u_n : n = 1, 2, ...\}$ fuzzy sayı cümlesi sınırlı ise (u_n) dizisine sınırlıdır denir veya her $n \in \mathbb{N}$ için $k \leq u_n \leq K$ olacak şekilde k ve K fuzzy sayıları mevcut ise (u_n) dizisi sınırlıdır. Tüm sınırlı fuzzy sayı dizilerinin uzayı l_∞^F ile gösterilir.*

Tanım 5.1.5. *([3]) $(u_n) \subset L(\mathbb{R})$ bir fuzzy sayı dizisi olsun. Eğer $\forall\varepsilon > 0$ verildiğinde $\forall n, m > n_0$ iken $\overline{d}(u_n, u_m) < \varepsilon$ şartını sağlayan en az bir $n_o \in \mathbb{N}$ mevcut ise $u = (u_n)$ dizisine bir Cauchy dizisidir denir. Bütün fuzzy sayıların Cauchy dizilerinin uzayı C^F ile gösterilir.*

$A \subset L(\mathbb{R})$ olsun. $\{\bar{d}(u, v) : u, v \in A\}$ cümlesinin en küçük üst sınırına A nın çapı denir ve $\delta(A)$ ile gösterilir. Eğer $\delta(A)$ sonlu ise A sınırlıdır.

Teorem 5.1.4. *([2]) Her yakınsak fuzzy sayı dizisi sınırlıdır.*

İspat. $\lim\limits_{n} u_n = u_0$ ve $A = \{u_n : n = 1, 2, ...\}$ olsun. Tanım 5.1.3 de olduğu gibi bir $N \in \mathbb{N}$ sayısı vardır öyleki $n > N$ iken $\overline{d}(u_n, u_0) < 1$ dir. $\delta = (\overline{d}(u_1, u_0), \overline{d}(u_2, u_0), ..., \overline{d}(u_n, u_0), 1)$ olsun. Buradan her n için $\overline{d}(u_n, u) \leq \delta$ dır. Fakat $\overline{d}$, $L(\mathbb{R})$ de bir metrik olduğundan

$$\overline{d}(u_n, u_m) \leq \overline{d}(u_n, u_0) + \overline{d}(u_{0,}u_m) \leq 2\delta$$

dır. Buradan $\delta(A) \leq 2\delta$ olup (u_n) dizisi sınırlıdır. □

Açık olarak

$$c_0^F \subset c^F \subset C^F \subset l_\infty^F \subset w^F$$

dir.

Tanım 5.1.6. *([2]) (u_n) bir fuzzy sayı dizisi ve (n_k) da doğal sayıların artan bir dizisi olmak üzere (u_{n_k}) dizisine (u_n) nin bir alt dizisidir denir.*

Teorem 5.1.5. *([2]) Bir fuzzy sayı dizisi yakınsak ise her alt dizisi de aynı noktaya yakınsaktır. Yani $(u_n) \subset L(\mathbb{R})$ bir fuzzy sayı dizisi olmak üzere eğer $\lim\limits_{n} u_n = u_0$ ise $\forall k \in \mathbb{N}$ için $\lim\limits_{n} u_{n_k} = u_0$ dır.*

İspat. Eğer $\lim\limits_{n} u_n = u_0$ ise (u_n) in bir (u_{n_k}) alt dizisi için de $\lim\limits_{n}(u_{n_k}) = u_0$ olduğu gösterilmelidir. Böylece $\forall\varepsilon > 0$ için bir k_0 sayısı vardır öyleki $k > k_0$ iken $u_{n_k} \in K(u_0, \varepsilon) > 0$ olduğu gösterilmelidir. $\varepsilon > 0$ olsun. $\lim\limits_{n} u_n = u_0$ olduğundan bir $N \in \mathbb{N}$ sayısı vardır öyleki tüm $n > N$ için $u_n \in K(u_0, \varepsilon)$ dur. Ayrıca (n_k) doğal sayıların artan bir dizisi olduğundan bir k_0 sayısı vardır öyleki $k > k_0$ olduğunda $n_k > N$ dir. Böylece eğer $k > k_0$ ve $n_k > N$ ise $u_{n_k} \in K(u_0, \varepsilon)$ olur. □

Yakınsak fuzzy sayı dizilerinin sağladığı bazı özellikler aşağıdaki teoremle verilebilir :

Teorem 5.1.6. *([2]) Eğer* $\lim\limits_{n} u_n = u_0$ *ve* $\lim\limits_{n} v_n = v_0$ *ise*

(i) $\lim\limits_{n}(u_n + v_n) = u_0 + v_0,$

(ii) $\lim\limits_{n}(u_n - v_n) = u_0 - v_0,$

(iii) $\lim\limits_{n}(u_n.v_n) = u_0.v_0,$

(iv) $\lim\limits_{n} u_n/v_n = u_0/v_0$, $\forall n$ için $0 \notin$suppv_n ve $0 \notin$supp v_0.

İspat. **(i)** $\lim\limits_{n}\ u_n = u_0$ ve $\lim\limits_{n}\ v_n = v_0$ olsun. Böylece $\forall\varepsilon > 0$ için bir $n_0 \in \mathbb{N}$ vardır öyleki $n > n_0$ iken

$$\bar{d}(u_n, u_0) < \varepsilon \quad , \quad \bar{d}(v_n, v_0) < \varepsilon$$

dir. Buradan $\forall\lambda \in [0, 1]$ için

$$d([u_n]_\lambda, [u_0]_\lambda) = \max\left(\left|u_n^-(\lambda) - u_0^-(\lambda)\right|, \left|u_n^+(\lambda) - u_0^+(\lambda)\right|\right) < \varepsilon$$

ve

$$d([v_n]_\lambda, [v_0]_\lambda) = \max\left(\left|v_n^-(\lambda) - v_0^-(\lambda)\right|, \left|v_n^+(\lambda) - v_0^+(\lambda)\right|\right) < \varepsilon$$

elde edilir. Böylece

$$\begin{aligned}
&d([u_n]_\lambda + [v_n]_\lambda, [u_0]_\lambda + [v_0]_\lambda)\\
&= d([u_n^-(\lambda) + v_n^-(\lambda), u_n^+(\lambda) + v_n^+(\lambda)], [u_0^-(\lambda) + v_0^-(\lambda), u_0^+(\lambda) + v_0^+(\lambda)])\\
&= \max(\left|u_n^-(\lambda) + v_n^-(\lambda) - u_0^-(\lambda) - v_0^-(\lambda)\right|, \left|u_n^+(\lambda) + v_n^+(\lambda) - u_0^+(\lambda) - v_0^+(\lambda)\right|)\\
&\quad \le \max(\left|u_n^-(\lambda) - u_0^-(\lambda)\right| + \left|v_n^-(\lambda) - v_0^-(\lambda)\right|, |u_n^+(\lambda) - u_0^+(\lambda)| + \left|v_n^+(\lambda) - v_0^+(\lambda)\right|)\\
&\quad \le \max\left(\left|u_n^-(\lambda) - u_0^-(\lambda)\right|, |u_n^+(\lambda) - u_0^+(\lambda)|\right)\\
&\quad + \max(\left|v_n^-(\lambda) - v_0^-(\lambda)\right|, \left|v_n^+(\lambda) - v_0^+(\lambda)\right|)
\end{aligned}$$

$$=d([u_n]_\lambda,[u_0]_\lambda)+d([v_n]_\lambda,[v_0]_\lambda)$$
$$<2\varepsilon$$

olur. Dolayısıyla $\forall\lambda\in[0,1]$ için

$$\bar{d}([u_n]_\lambda+[v_n]_\lambda,[u_0]_\lambda+[v_0]_\lambda)<2\varepsilon$$

elde edilir ve buradan $\lim\limits_n(u_n+v_n)=u_0+v_0$ sonucuna ulaşılır.

(ii) (i) ye benzer şekilde ispatı verilebilir.

(iii) $u_n^-(\lambda),v_n^-(\lambda),u_0^-(\lambda)$ ve $v_0^-(\lambda)>0$ durumunu ispatlayalım:

$$\begin{aligned}
&d([u_n]_\lambda.[v_n]_\lambda,[u_0]_\lambda.[v_0]_\lambda)\\
&=d\left(\left[u_n^-(\lambda).v_n^-(\lambda),u_n^+(\lambda).v_n^+(\lambda)\right],\left[u_0^-(\lambda).v_0^-(\lambda),u_0^+(\lambda).v_0^+(\lambda)\right]\right)\\
&=\max\left(\left|u_n^-(\lambda).v_n^-(\lambda)-u_0^-(\lambda).v_0^-(\lambda)\right|,\left|u_n^+(\lambda).v_n^+(\lambda)-u_0^+(\lambda).v_0^+(\lambda)\right|\right)\\
&\le\max\begin{pmatrix}\left|u_n^-(\lambda)-u_0^-(\lambda)\right|.\left|v_n^-(\lambda)\right|+\left|v_n^-(\lambda)-v_0^-(\lambda)\right|.\left|u_0^-(\lambda)\right|\\ ,\left|u_n^+(\lambda)-u_0^+(\lambda)\right|.\left|v_n^+(\lambda)\right|+\left|v_n^+(\lambda)-v_0^+(\lambda)\right|.\left|u_0^+(\lambda)\right|\end{pmatrix}
\end{aligned}$$

(u_n) ve (v_n) dizileri yakınsak olduğundan sınırlıdır. Dolayısıyla $\left|v_n^-(\lambda)\right|,\left|v_n^+(\lambda)\right|,\left|u_n^-(\lambda)\right|$ ve$\left|u_n^+(\lambda)\right|<k_0$ olacak şekilde bir k_0 sayısı vardır. Böylece

$$\begin{aligned}
&d([u_n]_\lambda.[v_n]_\lambda,[u_0]_\lambda.[v_0]_\lambda)\\
&\le\max\begin{pmatrix}\left|u_n^-(\lambda)-u_0^-(\lambda)\right|.k_0+\left|v_n^-(\lambda)-v_0^-(\lambda)\right|.k_0\\ ,\left|u_n^+(\lambda)-u_0^+(\lambda)\right|.k_0+\left|v_n^+(\lambda)-v_0^+(\lambda)\right|.k_0\end{pmatrix}\\
&\le k_0.(\max(\left|u_n^-(\lambda)-u_0^-(\lambda)\right|,\left|u_n^+(\lambda)-u_0^+(\lambda)\right|)\\
&+\max(\left|v_n^-(\lambda)-v_0^-(\lambda)\right|,\left|v_n^+(\lambda)-v_0^+(\lambda)\right|))
\end{aligned}$$

$$\leq k_0.(d([u_n]_\lambda, [u_0]_\lambda) + d([v_n]_\lambda, [v_0]_\lambda))$$

$$\leq k_0.2\varepsilon$$

elde edilir. Burada $\varepsilon = \acute{\varepsilon}/2k_0$ alınırsa

$$\bar{d}([u_n]_\lambda.[v_n]_\lambda, [u_0]_\lambda.[v_0]_\lambda) < \varepsilon'$$

olur ve buradan $\lim_n (u_n.v_n) = u_0.v_0$ sonucuna ulaşılır.

(iv) $\lim_n v_n = v_0$ olsun. İlk olarak, $\forall\lambda \in [0,1]$ için $d(1/[v_n]_\lambda, 1/[v_0]_\lambda) < \varepsilon$ olduğu gösterilmelidir. $v_n^-(\lambda), v_n^+(\lambda), v_0^-(\lambda)$ ve $v_0^+(\lambda) > 0$ olsun. Buradan

$$d(1/[v_n]_\lambda, 1/[v_0]_\lambda) = d([1/v_n^+(\lambda), 1/v_n^-(\lambda)], \left[1/v_0^+(\lambda), 1/v_0^-(\lambda)\right])$$

$$= \max(\left|1/v_n^+(\lambda) - 1/v_0^+(\lambda)\right|, \left|1/v_n^-(\lambda) - 1/v_0^-(\lambda)\right|)$$

$$= \max(\left|(v_0^+(\lambda) - v_n^+(\lambda))/v_n^+(\lambda).v_0^+(\lambda)\right|, \left|(v_0^-(\lambda) - v_n^-(\lambda))/v_n^-(\lambda).v_0^-(\lambda)\right|)$$

elde edilir. $\lim_n v_n = v_0$ olduğundan

$$d(1/v_n^+(\lambda), 1/v_0^+(\lambda)) < \max(\left|v_n^+(\lambda) - v_0^+(\lambda)\right|, \left|v_n^-(\lambda) - v_0^-(\lambda)\right|).k_0$$

$$= d([v_n]_\lambda, [v_0]_\lambda).k_0$$

$$< \varepsilon.k_0$$

olup burada $\varepsilon = \acute{\varepsilon}/k_0$ alınırsa

$$\bar{d}(1/[v_n]_\lambda, 1/[v_0]_\lambda) < \varepsilon'$$

elde edilir. Böylece $\lim_n 1/v_n = 1/v_0$ olup (iii) den

$$\lim_n u_n/v_n = \lim_n u_n.1/v_n = u_0.1/v_0 = u_0/v_0$$

sonucuna ulaşılır.

$\square$

Fuzzy sayı dizileri için bazı topolojik kavramlar Tripathy ve Baruah [14] a dayanılarak verilebilir:

Tanım 5.1.7. *([14]) E^F bir dizi uzayı olsun. $(u_n) \in E^F$ olmak üzere $\forall n \in \mathbb{N}$ için $|v_n| \leq |u_n|$ şartı sağlandığında eğer $(v_n) \in E^F$ oluyorsa E^F e normal(veya solid) dir denir.*

Tanım 5.1.8. *([14]) $K = \{k_1 < k_2 < k_3 < ...\} \subseteq \mathbb{N}$ ve E^F bir dizi uzayı olsun. E^F nin $K-$basamak cümlesi*

$$\lambda_k^{E^F} = \{(u_{k_n}) \in w^F : (u_n) \in E^F\}$$

şeklinde tanımlı dizilerin bir uzayıdır. $(u_{k_n}) \in \lambda_k^{E^F}$ dizisinin bir kanonik öngörüntüsü olan $(v_n) \in w^F$

$$v_n = \begin{cases} u_n & , \quad n \in K \text{ için}, \\ \bar{0} & , \quad \text{diğer hallerde} \end{cases}$$

şeklinde tanımlıdır. $\lambda_k^{E^F}$ in bir kanonik öngörüntüsü $\lambda_k^{E^F}$ deki tüm dizilerin kanonik öngörüntülerinin cümlesidir. Eğer E^F, tüm basamak uzaylarının kanonik öngörüntülerini içeriyorsa E^F monotondur denir.

Uyarı 5.1.1. *([14]) E^F bir dizi uzayı olmak üzere E^F solid ise monotondur.*

Tanım 5.1.9. *[14]) E^F bir dizi uzayı olsun. Eğer $(u_k) \in E^F$ iken $\left(u_{\pi(k)}\right) \in E^F$ ise E^F ye simetriktir denir. Burada $\pi(k)$, $\mathbb{N}$ nin bir permütasyonudur.*

Tanım 5.1.10. *([14]) E^F bir dizi uzayı olsun. Eğer $(u_k) \in E^F$ iken $(v_k) \in E^F$ ve $u_k = \bar{0}$ iken $v_k = \bar{0}$ ise E^Fye convergence free dir denir.*

Teorem 5.1.7. *([15]) l_∞^F ve c_0^F uzayları solid uzaydır.*

İspat. $\mu^F = l_\infty^F$ veya c_0^F olsun. $(u_k) \in \mu^F$ ve (v_k) da $\forall k \in \mathbb{N}$ için $\bar{d}(v_k, \bar{0}) \leq \bar{d}(u_k, \bar{0})$ şartını sağlayan bir dizi olsun. Buradan eşitsizliğin her iki tarafının supremumu alınırsa

$$\begin{aligned} \sup_{k\in\mathbb{N}} \bar{d}(v_k, \bar{0}) &\leq \sup_{k\in\mathbb{N}} \bar{d}(u_k, \bar{0}) \\ &< \infty \end{aligned}$$

eşitsizliği elde edilir. Diğer taraftan $\bar{d}(v_k, \bar{0}) \leq \bar{d}(u_k, \bar{0})$ eşitsizliğinin her iki tarafının limiti alınırsa

$$\lim_{k\to\infty} \bar{d}(v_k, \bar{0}) \leq \lim_{k\to\infty} \bar{d}(u_k, \bar{0}) = 0$$

olup $(v_k) \in \mu^F$ dir. Dolayısıyla l_∞^F ve c_0^F uzayları solid uzaydır. □

Teorem 5.1.8. *([3]) $u = (u_n)$ ve $v = (v_n)$ yakınsak veya sınırlı fuzzy sayı dizileri olmak üzere c^F ve l_∞^F dizi uzayları*

$$\rho(u, v) = \sup_n \bar{d}(u_n, v_n)$$

metriğiyle birer tam metrik uzaydır.

İspat. Bu teoremin ispatını c^F için yapmak yeterlidir. ρ nun c^F üzerinde bir metrik olduğu açıktır. c^F in bu metrikle tam olduğunu göstermek için c^F de bir (u^i) Cauchy dizisi alınsın. Her sabit n için (u_n^i) de $L(\mathbb{R})$ de bir Cauchy dizisidir ve $(L(\mathbb{R}), \bar{d})$ tamdır. Dolayısıyla $\forall n \in \mathbb{N}$ için $\lim_i u_n^i = u_n$ dir. $u = (u_n)$ olsun. Gösterilmelidir ki $\lim_i u^i = u$ ve $u \in c^F$ dir. (u^i), c^F de bir Cauchy dizisi olduğundan $\forall \varepsilon > 0$ için bir $n_0 \in \mathbb{N}$ vardır öyleki $i, j > n_0$ için

$$\bar{d}(u_n^i, u_n^j) < \frac{1}{5}\varepsilon$$

dur. $j \to \infty$ için limit alınırsa

$$\bar{d}(u_n^i, u_n) < \frac{1}{5}\varepsilon$$

elde edilir. Buradan $\lim_i u^i = u$ dir. Şimdi $u \in c^F$ olduğu gösterilmelidir. $(u^i) \in c^F$ olduğundan bir $(u_0^i) \in L(\mathbb{R})$ vardır öyleki

$$\bar{d}(u_n^i, u_0^i) < \frac{1}{5}\varepsilon$$

dur. Böylece

$$\begin{aligned} \bar{d}(u_0^i, u_0^j) &\leq \bar{d}(u_n^i, u_n^j) + \bar{d}(u_n^i, u_0^i) + \bar{d}(u_n^j, u_0^j) \\ &< \frac{1}{5}\varepsilon + \frac{1}{5}\varepsilon + \frac{1}{5}\varepsilon = \frac{3}{5}\varepsilon \end{aligned}$$

olur. O halde (u_0^i), $L(\mathbb{R})$ de bir Cauchy dizisidir. $L(\mathbb{R})$ tam olduğundan bir $u_0 \in L(\mathbb{R})$ vardır öyleki

$$\bar{d}(u_0^i, u_0) < \frac{3}{5}\varepsilon$$

dur. Böylece

$$\begin{aligned} \bar{d}(u_n, u_0) &\leq \bar{d}(u_n^i, u_n) + \bar{d}(u_n^i, u_0^i) + \bar{d}(u_0^i, u_0) \\ &< \frac{1}{5}\varepsilon + \frac{1}{5}\varepsilon + \frac{3}{5}\varepsilon = \varepsilon \end{aligned}$$

olup $u \in c^F$ dir. Bu da c^F nin tam olduğunu gösterir. □

5.2 Fuzzy Sayıların Fark Dizi Uzayları

H. Kızmaz [4] $m = 1$ için $l_\infty(\Delta), c(\Delta), c_0(\Delta)$ uzaylarını inceledi. Bu uzaylar daha sonra Tripathy ve Esi [5] tarafından genelleştirildi. E. Savaş [6] bu çalışmadan fuzzy reel sayıları için fark dizi uzaylarını inşaa ederek ve farklı özelliklerini araştırmak için faydalandı. Açık olarak $l_\infty^F \subset l_\infty^F(\Delta_m)$, $c^F \subset c^F(\Delta_m)$ ve $c_0^F \subset c_0^F(\Delta_m)$ dir.

$l_\infty^F(\Delta_m), c^F(\Delta_m)$ ve $c_0^F(\Delta_m)$ uzayları toplama ve skalerle çarpma işlemleri altında kapalıdır.

Tanım 5.2.1. *([16]) $\Delta u = (\Delta u_n)$ bir fuzzy fark sayı dizisi, $\forall \varepsilon > 0$ için bir $N \in \mathbb{N}$ öyleki $n > N$ olduğunda*

$$\overline{d}(\Delta u_n, u_0) < \varepsilon$$

ise (Δu_n) fark dizisine bir u_0 fuzzy sayıya yakınsıyor denir ve $\lim\limits_n \Delta u_n = u_0$ olarak yazılır. Fuzzy sayıların tüm yakınsak fark dizilerinin uzayı $c^F(\Delta_m)$, tüm sıfıra yakınsak fark dizilerinin uzayı ise $c_0^F(\Delta_m)$ ile gösterilir.

Tanım 5.2.2. *([16]) $\Delta u = (\Delta u_n)$ bir fuzzy fark sayı dizisi ve $\Delta u = (u_n - u_{n+1})$ olmak üzere eğer $|\Delta u_n| \leq \mu$ olacak şekilde $\mu \in L^*(\mathbb{R})$ varsa ya da $\sup\limits_n \bar{d}\,(\Delta u_n, \bar{0}) < \infty$ ise $u = (\Delta u_n)$ dizisine sınırlıdır denir. Fuzzy sayıların tüm sınırlı fark dizilerinin uzayı $l_\infty^F(\Delta_m)$ ile gösterilir.*

E. Savaş ([6]), $m = 1$ için fark dizi uzayları üzerinde bir metrik tanımlayarak bu uzayların birer metrik uzay olduğunu gösterdi.

Lemma 5.2.1. *([6]) $u = (u_n)$ ve $v = (v_n)$ sınırlı(veya yakınsak) fuzzy sayı dizileri olmak üzere $l_\infty^F(\Delta)$(veya $c^F(\Delta)$) dizi uzayı*

$$\rho(u, v)_\Delta = \overline{d}(u_1, v_1) + \sup_n \overline{d}(\Delta u_n, \Delta v_n)$$

metriğiyle bir tam metrik uzaydır.

İspat. $\forall n \in \mathbb{N}$ için $(u^n) = (u_k^n) = (u_1^n, u_2^n, ...)$, $l_\infty^F(\Delta)$ uzayında bir Cauchy dizisi olsun. Bu durumda $n, m \to \infty$ için $\rho(u^n, u^m)_\Delta = \bar{d}(u_1^n, u_1^m) + \sup\limits_k \bar{d}(\Delta u_k^n, \Delta u_k^m) \to 0$ olur. Dolayısıyla $\forall k \in \mathbb{N}$ ve $n, m \to \infty$ için $\bar{d}(u_k^n, u_k^m) \to 0$ elde edilir. Böylece

$(u_k^n) = (u_k^1, u_k^2, ...)$, $L(\mathbb{R})$ de bir Cauchy dizisidir ve $L(\mathbb{R})$ tam olduğundan yakınsaktır. Şimdi, $\forall k \in \mathbb{N}$ için $\lim_n u_k^n = u_k$ olsun. (u^n) bir Cauchy dizisi olduğundan $\forall \varepsilon > 0$ için bir $N = N(\varepsilon)$ vardır öyleki $n, m \geq N$ olduğunda $\rho(u^n, u^m)_\Delta < \varepsilon$ olur. Dolayısıyla $\forall k \in \mathbb{N}$ ve $n, m \geq N$ için

$$\bar{d}(u_1^n, u_1^m) < \varepsilon,\ \bar{d}((u_{k+1}^n - u_{k+1}^m), (u_k^n - u_k^m)) < \varepsilon$$

olur. Böylece,

$$\lim_m \bar{d}(u_1^n, u_1^m) = \bar{d}(u_1^n, u_1) < \varepsilon$$

$$\lim_m\ \bar{d}((u_{k+1}^n - u_{k+1}^m), (u_k^n - u_k^m)) =\ \bar{d}((u_{k+1}^n - u_{k+1}), (u_k^n - u_k)) < \varepsilon,\ n \geq N \text{ için}$$

olup $\forall n \geq N$ için $\rho(u^n, u)_\Delta \leq 2\varepsilon$ olduğu görülür, yani $l_\infty^F(\Delta)$ uzayında $n \to \infty$ için $u^n \to u$ dir. Şimdi $u \in l_\infty^F(\Delta)$ olduğu gösterilmelidir.

$$\bar{d}(u_k, u_{k+1}) \leq \bar{d}(u_k^N, u_{k+1}^N) + \rho(u^N, u)_\Delta = o(1).$$

Buradan $u = (u_k) \in l_\infty^F(\Delta)$ dir. Böylece ispat tamamlanır. $c^F(\Delta)$ uzayının da tam metrik uzay olduğu benzer şekilde gösterilebilir. □

$m = 1$ durumunda fark dizi uzayları için tanımlanan metrik B. C. Tripathy ve A. Baruah [14] tarafından genelleştirilerek aşağıdaki sonuç elde edildi:

Teorem 5.2.1. *$l_\infty^F(\Delta_m)$, $c^F(\Delta_m)$ ve $c_0^F(\Delta_m)$ uzayları*

$$\rho(u, v) = \sum_{k=1}^{m} \bar{d}(u_k, v_k) + \sup_k \bar{d}(\Delta_m u_k, \Delta_m v_k)$$

ile tanımlı ρ metriği ile birer tam metrik uzaydır, burada $u = (u_n), v = (v_n) \in l_\infty^F(\Delta_m)$ (veya $c^F(\Delta_m)$, $c_0^F(\Delta_m)$) dir.

İspat. (u^i) dizisi $l_\infty^F(\Delta_m)$ de $\forall i \in \mathbb{N}$ için $(u^i) = (u_k^i) = (u_1^i, u_2^i, u_3^i, ...) \in l_\infty^F(\Delta_m)$ şeklinde tanımlı bir Cauchy dizisi olsun. O halde verilen her $\varepsilon > 0$ için bir $n_0 \in \mathbb{N}$ vardır öyleki $i, j \geq n_0$ olduğunda

$$\rho(u^i, v^j) = \sum_{k=1}^{m} \bar{d}(u_k^i, v_k^j) + \sup_k \bar{d}(\Delta_m u_k^i, \Delta_m v_k^j) < \varepsilon \tag{5.2.1}$$

dir. Böylece $\forall\ i, j \geq n_0$ ve $k = 1, 2, 3, ..., m$ için

$$\sum_{k=1}^{m} \bar{d}(u_k^i, v_k^j) < \varepsilon$$

$$\Rightarrow \bar{d}(u_k^i, v_k^j) < \varepsilon,\ \forall i, j \geq n_0 \text{ ve } k = 1, 2, 3, ..., m \text{ için}$$

$$\Rightarrow k = 1, 2, 3, ..., m \text{ için } (u_k^j)\ ,\ L(\mathbb{R}) \text{ de bir Cauchy dizisidir}$$

$$\Rightarrow k = 1, 2, 3, ..., m \text{ için}(u_k^j)\ ,\ L(\mathbb{R}) \text{ de yakınsak bir dizidir}$$

$k = 1, 2, 3, ..., m$ olmak üzere $\lim_{j \to \infty} u_k^j = u_k$ olsun. (5.2.1) den $\forall\ i, j \geq n_0$ ve $k \in \mathbb{N}$ için

$$\bar{d}(\Delta_m u_k^i, \Delta_m v_k^j) < \varepsilon$$

$$\Rightarrow (\Delta_m u_k^j)\ ,\ L(\mathbb{R}) \text{ de bir Cauchy dizisidir, } k \in \mathbb{N} \text{ için}$$

$$\Rightarrow (\Delta_m u_k^j)\ ,\ L(\mathbb{R}) \text{ de yakınsak bir dizidir, } k \in \mathbb{N} \text{ için}$$

dir. $\forall\ k \in \mathbb{N}$ için $\lim_{j \to \infty} \Delta_m u_k^j = v_k$ olsun. $k = 1, 2, 3, ..., m$ için $\lim_{j \to \infty} u_k^j = u_k$ olduğundan $\forall\ k \in \mathbb{N}$ için $\lim_{j \to \infty} u_k^j = u_k$ mevcuttur. $\forall\ i \geq n_0$ için,

$$\lim_{j \to \infty} \sum_{k=1}^{m} \bar{d}(u_k^i, u_k^j) = \sum_{k=1}^{m} \bar{d}(u_k^i, u_k) < \varepsilon,$$

$$\lim_{j \to \infty} \bar{d}(\Delta_m u_k^i, \Delta_m u_k^j) = \bar{d}(\Delta_m u_k^i, \Delta_m u_k) < \varepsilon$$

yazılabilir. Buradan $\forall\ i \geq n_0$ için,

$$\sup_k \bar{d}(\Delta_m u_k^i, \Delta_m u_k) < \varepsilon$$

olur. Böylece $\forall\, i, j \geq n_0$ için

$$\sum_{k=1}^{m} \bar{d}(u_k^i, u_k) + \sup_k \bar{d}(\Delta_m u_k^i, \Delta_m u_k) < 2\varepsilon \Rightarrow \rho(u^i, u) < 2\varepsilon$$

elde edilir. Yani $l_\infty^F(\Delta_m)$ uzayında $i \to \infty$ iken $u^i \to u$ dir. $\forall\, i \geq n_0$ için,

$$\sup_k \bar{d}(\Delta_m u_k, \bar{0}) \leq \sup_k \bar{d}(\Delta_m u_k, \Delta_m u_k^i) + \sup_k \bar{d}(\Delta_m u_k^i, \bar{0}) < \infty$$

bulunur. Böylece ispat tamamlanır. □

Fuzzy sayıların fark dizi uzaylarına ait bazı topolojik özellikler Tripathy ve Baruah [14] a dayanılarak tanımlanmıştır.

Teorem 5.2.2. *$l_\infty^F(\Delta_m)$, $c^F(\Delta_m)$ ve $c_0^F(\Delta_m)$ uzayları solid değildir.*

$c^F(\Delta_m)$ uzayının solid olmadığına dair bir örnek verelim :

Örnek 5.2.1. *(u_n) bir dizi olmak üzere*

$$u_n(t) = \begin{cases} \frac{nt+n+1}{n+1} & , \quad -1 - \frac{1}{n} \leq t \leq 0, \ ise \\ \frac{n+1-nt}{n+1} & , \quad 0 \leq t \leq 1 + \frac{1}{n}, \ ise \\ 0 & , \quad diğer\ hallerde \end{cases}$$

şeklinde tanımlı olsun. $m = 3$ için $(\Delta_3 u_n(t))$ fark dizisi

$$\Delta_3 u_n(t) = \begin{cases} \frac{tn^2+2n^2+3nt+8n+3}{2n^2+8n+3} & , \quad -2 - \frac{1}{n} - \frac{1}{n+3} \leq t \leq 0, \ ise \\ \frac{-tn^2-3tn+2n^2+8n+3}{2n^2+8n+3} & , \quad 0 \leq t \leq 2 + \frac{1}{n} + \frac{1}{n+3}, \ ise \\ 0 & , \quad diğer\ hallerde \end{cases}$$

olur. $n \to \infty$ için $(\Delta_3 u_n)$ dizisinin limiti alınırsa $\lim_{n\to\infty} \Delta_3 u_n = u$ olup $u = u(t)$,

$$u(t) = \begin{cases} \frac{t+2}{2} & , \quad -2 \leq t \leq 0, \\ \frac{2-t}{2} & , \quad 0 \leq t \leq 2, \\ 0 & , \quad diğer\ hallerde \end{cases}$$

şeklinde elde edilir. Böylece $(u_n) \in c^F(\Delta_3)$ *dir. Şimdi bir* (α_n) *skaler dizisini göz önüne alalım öyleki bu dizi*

$$(\alpha_n) = \begin{cases} 1 & , \quad n = 3k-2, \ k \in \mathbb{N}, \ ise \\ 0 & , \quad \text{diğer hallerde} \end{cases}$$

olarak tanımlanmış olsun. Buradan $(\alpha_n u_n) = \{u_1, \bar{0}, \bar{0}, u_4, \bar{0}, \bar{0}, u_7, \bar{0}, \bar{0}, u_{10,...}\}$ *olur. Ancak* $(\Delta_3 \alpha_n u_n) = \{u_1 - u_4, \bar{0}, \bar{0}, u_4 - u_7, \bar{0}, \bar{0}, ...\} \notin c^F(\Delta_3)$ *olur. O halde* $c^F(\Delta_m)$ *solid değildir. Benzer şekilde* $l_\infty^F(\Delta_m)$ *ve* $c_0^F(\Delta_m)$ *uzaylarının da solid olmadığı gösterilebilir.*

Teorem 5.2.3. $l_\infty^F(\Delta_m)$, $c^F(\Delta_m)$ *ve* $c_0^F(\Delta_m)$ *uzayları simetrik değildir.*

$c^F(\Delta_m)$ uzayının simetrik olmadığına dair bir örnek verelim :

Örnek 5.2.2. $m = 1$ *ve*

$$A = \begin{cases} \frac{t+4}{4} & , \quad -4 \le t \le 0, \\ \frac{4-t}{4} & , \quad 0 \le t \le 4, \\ 0 & , \quad \text{diğer hallerde} \end{cases} , \qquad B = \begin{cases} \frac{t+5}{5} & , \quad -5 \le t \le 0, \\ \frac{5-t}{5} & , \quad 0 \le t \le 5, \\ 0 & , \quad \text{diğer hallerde} \end{cases}$$

olsun. $u = \{A, B, A, B, A, B, ...\}$ *şeklinde tanımlı bir dizi olsun. Bir* (v_n) *dizisi* (u_n) *dizisinin yeniden düzenlenmiş hali olarak gözönüne alınabilir öyleki* $(v_n) = \{A, A, B, B, A, A, ...\}$ *şeklinde tanımlı olsun. Bu durumda* $(u_n) \in c^F(\Delta_m)$ *iken* $(v_n) \notin c^F(\Delta_m)$ *dir. Dolayısıyla* $\forall m \in N$ *için* $c^F(\Delta_m)$ *simetrik değildir. Benzer şekilde* $l_\infty^F(\Delta_m)$ *ve* $c_0^F(\Delta_m)$ *uzaylarının da simetrik olmadığı gösterilebilir.*

Teorem 5.2.4. $l_\infty^F(\Delta_m)$, $c^F(\Delta_m)$ *ve* $c_0^F(\Delta_m)$ *uzayları convergence free değildir.*

$c^F(\Delta_m)$ uzayının convergence free olmadığına dair bir örnek verelim :

Örnek 5.2.3. *Bir (u_n) dizisi*

$$u_n(t) = \begin{cases} \frac{nt+n+1}{n+1} & , \quad -1-\frac{1}{n} \leq t \leq 0, \\ \frac{n+1-nt}{n+1} & , \quad 0 \leq t \leq 1+\frac{1}{n}, \\ 0 & , \quad \textit{diğer hallerde} \end{cases}$$

şeklinde tanımlanmış olsun. $m = 3$ için $(\Delta_3 u_n(t))$ fark dizisi

$$\Delta_3 u_n(t) = \begin{cases} \frac{tn^2+2n^2+3nt+8n+3}{2n^2+8n+3} & , -2-\frac{1}{n}-\frac{1}{n+3} \leq t \leq 0, \ ise \\ \frac{-tn^2-3nt+2n^2+8n+3}{2n^2+8n+3} & , 0 \leq t \leq 2+\frac{1}{n}+\frac{1}{n+3}, \ ise \\ 0 & , \textit{diğer hallerde} \end{cases}$$

olur. $n \to \infty$ için $(\Delta_3 u_n)$ in limiti alınırsa $\lim\limits_{n\to\infty} \Delta_3 u_n = u$ olup $u = u(t)$,

$$u(t) = \begin{cases} \frac{t+2}{2} & , \quad -2 \leq t \leq 0, \\ \frac{2-t}{2} & , \quad 0 \leq t \leq 2, \\ 0 & , \quad \textit{diğer hallerde} \end{cases}$$

şeklinde elde edilir. Böylece $(u_n) \in c^F(\Delta_3)$ dir. (v_n),

$$v_n(t) = \begin{cases} \frac{t+n}{n} & , \quad -n \leq t \leq 0, \\ \frac{n-t}{n} & , \quad 0 \leq t \leq n, \\ 0 & , \quad \textit{diğer hallerde} \end{cases}$$

olarak tanımlanan bir dizi olsun. Bu durumda $(\Delta_3 v_n(t))$ fark dizisi,

$$\Delta_3 v_n(t) = \begin{cases} \frac{t+2n+3}{2n+3} & , \quad -2n-3 \leq t \leq 0, \\ \frac{2n+3-t}{2n+3} & , \quad 0 \leq t \leq 2n+3, \\ 0 & , \quad \textit{diğer hallerde} \end{cases}$$

olur. Açıkça görülür ki $(v_n) \notin c^F(\Delta_3)$ dir. O halde $c^F(\Delta_3)$ convergence free değildir. Benzer şekilde $l_\infty^F(\Delta_m)$ ve $c_0^F(\Delta_m)$ uzaylarının da convergence free olmadığı gösterilebilir.

6. KAYNAKLAR

[1] L. A. Zadeh, Fuzzy sets, Inform. Contr., 8 (1965)

[2] M. Matloka, Sequence of fuzzy numbers, BUSEFAL, 28(1986), 28-37.

[3] S. Nanda, On Sequences of Fuzzy Numbers, Fuzzy Sets and Systems, 33 (1989), 123-126

[4] H. Kızmaz, On certain Sequence Spaces, Canad. Math. Bull. 24 (2) (1981), 168-176

[5] B. C. Tripathy, A. Esi, A New Type of Difference Sequence Spaces, International Journal of Science&Technology, Volume 1, No 1, 11-14, 2006

[6] E. Savaş, A note on Sequence of Fuzzy Numbers, Information Sciences, 124(2000), 297-300

[7] I. J. Maddox, Elements of Functional Analysis, Cambridge at the University Press, 1970

[8] P. K. Kamthan, M. Gupta, Sequence Spaces and Series, Marcel Dekker Inc., New York, 1981

[9] R. E. Moore, F. Bierbaum, Methods and applications of interval analysis, SIAM, 9-11, 1995.

[10] J.-X. Fang, H. Huang, On the Level Convergence of a Sequence of Fuzzy Numbers, Fuzzy Sets and Systems, 147(2004), 417-435

[11] O. A. AbuAarqob, N. T. Shawagfeh, O.A. AbuGhneim, Functions Defined on Fuzzy Real Numbers According to Zadeh's Extension, Int. Math. Forum, 3, 2008, no.16, 763-776

[12] O. Kaleva, S. Seikkala, On Fuzzy Metric Spaces, Fuzzy Sets and Systems, 12 (1984), 215-229

[13] C. R. Bector, S. Chandra, Fuzzy mathematical programming and fuzzy matrix games, Springer, 44-53, 2005.

[14] B. C. Tripathy, A. Baruah, New Type of Difference Sequence Spaces of Fuzzy Real Numbers, Math. Model. Anal., Volume 14, Number 3, 2009, pages 391-397

[15] Ö. Talo, F. Başar, Determination of the Duals of Classical Sets of Sequences of Fuzzy Numbers and Related Matrix Transformations, Computers and Mathematics with Applications, 58(2009) , 717-733

[16] B. C. Tripathy, P. C. Das, Some Classes of Difference Sequences of Fuzzy Real Numbers, Fasc. Math. , 40 (2004) 106-117

ÖZGEÇMİŞ

Yaprak GÜLDOĞAN, 21/03/1986 tarihinde Malatya' da doğdu. İlk, orta ve lise öğrenimini Malatya 'da tamamladı. 2005 yılında İnönü Üniversitesi Fen Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümü' ne girdi. 2009 yılında "üçüncülük" derecesiyle mezun olduktan sonra İnönü Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü, Fonksiyonlar Teorisi ve Analiz Anabilim Dalı' nda yüksek lisans öğrenimine başladı. 2010 yılında Harran Üniversitesi Fen Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümü' nün açmış olduğu araştırma görevliliği sınavını kazandı ve şu anda bu görevine devam etmektedir.