T.C.
İNÖNÜ ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

PSEUDOSİMETRİK LİGHTLİKE HİPERYÜZEYLER

Sema KAZAN

DOKTORA TEZİ
MATEMATİK ANABİLİM DALI

MALATYA
Ekim 2014

Tezin Başlığı: **Pseudosimetrik Lightlike Hiperyüzeyler**

Tezi Hazırlayan: **Sema KAZAN**

Sınav Tarihi: **2 Ekim 2014**

Yukarıda adı geçen tez, Jürimizce değerlendirilerek Matematik Anabilim Dalında Doktora Tezi olarak kabul edilmiştir.

Sınav Jüri Üyeleri

Tez Danışmanı:	**Prof. Dr. Bayram ŞAHİN** (İnönü Üniversitesi)	....
	Prof. Dr. Rıfat GÜNEŞ (İnönü Üniversitesi)	....
	Yrd. Doç. Dr. A. Fatih ÖZCAN (İnönü Üniversitesi)	....
	Yrd. Doç. Dr. Yılmaz GÜNDÜZALP (Dicle Üniversitesi)	....
	Yrd. Doç. Cumali YILDIRIM (İnönü Üniversitesi)	....

Prof. Dr. Mehmet ALPASLAN

Enstitü Müdürü

Sevgili eşim Ahmet'e ve biricik kızım Elif'e...

ONUR SÖZÜ

Doktora Tezi olarak sunduğum "Pseudosimetrik Lightlike Hiperyüzeyler" başlıklı bu çalışmanın bilimsel ahlak ve geleneklere aykırı düşecek bir yardıma başvurmaksızın tarafımdan yazıldığını ve yararlandığım bütün kaynakların, hem metin içinde hem de kaynakçada yöntemine uygun biçimde gösterilenlerden oluştuğunu belirtir, bunu onurumla doğrularım.

Sema Kazan

ÖZET

Doktora Tezi

PSEUDOSİMETRİK LİGHTLİKE HİPERYÜZEYLER

Sema KAZAN

İnönü Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Anabilim Dalı

84+v sayfa

2014
Danışman: Prof. Dr. Bayram ŞAHİN

Bu tez dört bölümden oluşmaktadır. İlk bölümde problemin ortaya çıkışı, geometrik anlamı ve ilgili çalışmalar tanıtılmaktadır. İkinci bölümde, tezin orijinal bölümlerinde kullanılacak tanım ve teoremler verilmektedir.

Üçüncü bölüm tezin orijinal bölümlerinden birini oluşturmaktadır. Bu bölümde, bir semi-Riemann manifoldun pseudosimetrik lightlike hiperyüzeyi incelenmektedir. Öncelikle, pseudosimetrik lightlike hiperyüzeylere bir örnek verilmekte ve yeter şartlar sunulmaktadır. Ayrıca, bir lightlike hiperyüzeyin pseudoparalellik durumu incelenmekte ve karakterizasyonlar verilmektedir. Bu bölümde son olarak, bir lightlike hiperyüzeyin Ricci-pseudosimetrik olma şartları da elde edilmekte ve genelleştirilmiş Ricci pseudoparalel lightlike hiperyüzeyler incelenmektedir.

Son bölümde ise bir Sasakiyan uzay formun bir lightlike hiperyüzeyinin pseudosimetri olma durumu incelenerek çeşitli karakterizasyonlar elde edilmektedir. Ayrıca, bir Sasakiyan uzay formun bir lightlike hiperyüzeyinin pseudoparalelliği çalışılmakta ve karakterizasyonlar verilmektedir. Daha sonra, bir Sasakiyan uzay formun bir lightlike hiperyüzeyinin Ricci-pseudosimetri şartı incelenmektedir. Son olarak da, bir Sasakiyan uzay formun bir lightlike hiperyüzeyinin Weyl projektif pseudosimetrikliği tanımlanarak bazı sonuçlar verilmektedir.

ANAHTAR KELİMELER: Pseudosimetrik lightlike hiperyüzey, Pseudoparalel lightlike hiperyüzey, Ricci-pseudosimetrik lightlike hiperyüzey.

ABSTRACT

Ph.D. Thesis

PSEUDOSYMMETRIC LIGHTLIKE HYPERSURFACES

Sema KAZAN

İnönü University
Graduate School of Natural and Applied Sciences
Department of Mathematics

84+v pages

2014
Supervisor: Prof.Dr. Bayram ŞAHİN

We study pseudosymmetric lightlike hypersurfaces of semi-Euclidean spaces and indefinite Sasakian space forms. After, we explain our motivation to study this problem and give related literatures, we give basic metarials used in the thesis.

In the third chapter, we study pseudosymmetric lightlike hypersurfaces of semi-Euclidean spaces. We give an example, find sufficient conditions for a lightlike hypersurface to be pseudosymmetric and obtain characterizations of pseudosymmetric lightlike hypersurfaces of semi-Euclidean spaces. Then, we find sufficient conditions for a lightlike hypersurface to be pseudoparallel and give a characterization of pseudoparallel lightlike hypersurfaces. We also study Ricci-pseudosymmetric lightlike hypersurfaces, give an example and obtain characterizations for such lightlike hypersurfaces.

In the fourth chapter, we study pseudosymmetric lightlike hypersurfaces of indefinite Sasakian space forms such that its sectional curvature $c = 1$. We first obtain integrability conditions for screen distribution of a lightlike hypersurface and then we find sufficient conditions for a lightlike hypersurface to be pseudosymmetric under integrable screen distribution. We also give a characterization of a pseudosymmetric lightlike hypersurface and investigate relations between pseudosymmetric lightlike hypersurface and its screen distribution. Moreover, we give sufficient conditions for a lightlike hypersurface of a Sasakian space form $\bar{M}(1)$ to be pseudoparallel, Ricci-pseudosymmetric and obtain characterizations for such hypersurfaces. In the last subsection, we check the effect of Weyl projective pseudosymmetry conditions on the geometry of lightlike hypersurfaces.

KEY WORDS: Pseudosymmetric lightlike hypersurface, Pseudoparallel lightlike hypersurface, Ricci-pseudosymmetric lightlike hypersurface.

TEŞEKKÜR

Beni bu konuda çalışmaya teşvik ederek, bilgi ve tecrübeleriyle yönlendiren, öneri ve desteklerini esirgemeyen tez danışmanım Sayın Prof.Dr.Bayram Şahin' e, lisansüstü öğrenimim boyunca beni yönlendiren bölüm başkanım Sayın Prof.Dr.Sadık Keleş' e, zaman zaman karşılaştığım problemleri tartışmak için bana değerli zamanını ve bilgilerini sunan değerli hocam Yrd.Doç.Dr.Cumali Yıldırım' a, manevi desteklerini hiçbir zaman esirgemeyen anneme, babama ve çalışmalarım boyunca gösterdiği destek ve sonsuz güveninden dolayı Sevgili eşim Ahmet' e teşekkürlerimi sunarım.

İÇİNDEKİLER

BÖLÜM 1

GİRİŞ

M, bir diferensiyellenebilir manifold ve ∇, M üzerinde bir lineer konneksiyon olsun. Eğer $p \in M$ noktasının bir U komşuluğunda involutive afin dönüşümü varsa ∇ ya $p \in M$ de yerel simetriktir denir. Eğer ∇ torsiyonsuz ise ∇ konneksiyonunun yerel simetrik olması için gerek ve yeter şart $\nabla R = 0$ olmasıdır, burada R eğrilik tensörünü göstermektedir. Yerel simetrik manifoldlar sabit eğrilikli manifoldları içeren daha geniş bir sınıftır. Yerel simetrik manifoldlar birçok yazar tarafından hala çalışılmaktadır (bkz [1, 2, 3]). Diğer taraftan, yerel simetrik Riemann manifoldların bir genellemesi olarak $R \cdot R = 0$ şartını sağlayan Riemann manifoldlarına semi-simetrik manifoldlar denir. Her bir yerel simetrik manifold semi-simetrik manifolddur, fakat tersi geçerli değildir [4]. Bu tip manifoldlar E. Cartan tarafından incelenmiş ve Szabo tarafından da yerel olarak sınıflandırılmıştır (ayrıca bu konuyla ilgili [5] numaralı makaleye de bakılabilir).

Semi-simetri şartı diğer eğriliklere de genişletilmiş ve bu durumlar için de birçok sonuç elde edilmiştir. Örneğin, eğer S Ricci tensörü ise $R \cdot S = 0$ olması durumunda manifolda Ricci semi-simetriktir denir. Semi-simetrik manifoldların bir genelleştirilmesi olarak pseudosimetrik manifoldlar ilk olarak Verstraelen tarafından Catholic University of Leuven de bir seminerde tanımlandı. İlk detaylı çalışma Ryszard Deszcz tarafından [6, 7] de sunuldu. Pseudosimetrik manifoldlar esas olarak semi-simetrik manifoldların tamamen umbilik hiperyüzeyleri çalışılırken ortaya çıktı [8]. Daha sonra gösterildi ki semi-simetrik manifoldlara tanımlanan jeodezik dönüşümler de pseudosimetrik manifoldlar üretmektedir. g Riemann metriği, R eğrilik tensörü olmak üzere,

$$
\begin{aligned}
Q(g, R) &= (X_1, ..., X_n, X, Y) \\
&= ((X \wedge Y)R)(X_1, ..., X_k) \\
&= -\Sigma_{i=1}^{k} R(X_1, ..., (X \wedge Y)X_i, ..., X_k)
\end{aligned}
$$

tanımlansın, burada $(X \wedge Y)$ endomorfizmi

$$(X \wedge Y)Z = g(Y, Z)X - g(X, Z)Y$$

ile tanımlıdır. Bu durumda, eğer M manifoldunun her noktasında $R \cdot R$ ile $Q(g, R)$ lineer bağımlı ise M manifolduna pseudosimetrik manifold denir. Daha açık olarak şöyle ifade edilebilir: $U = \{x \in M \mid Q(g, R) \neq 0\}$ üzerinde $R \cdot R = L_R Q(g, R)$ ise manifolda pseudosimetrik manifold adı verilir, burada L_R diferensiyellenebilir bir fonksiyondur. Her semi-simetrik Riemann manifoldu pseudosimetrik manifolddur, fakat tersi doğru değildir. Pseudosimetrik manifoldların geometrik yorumu ise Haesen ve Verstraelen tarafından elde edildi. Buna göre, bir manifoldun pseudosimetrik olması geometrik olarak manifoldun bir p noktasının komşuluğundaki bütün çift kat (double) kesit eğriliklerinin aynı olmasıdır [9].

Ayrıca, pseudosimetri şartları Ricci eğrilik, Weyl eğrilik durumlarına da genişletildi. Semi-simetrik olmayan pseudosimetrik manifoldlar ilk olarak Deprez, Deszcz ve Verstraelen tarafından incelendi [10] ve bu tip manifoldlarla ilgili olarak verilen tüm örneklerin warped çarpım manifoldlar olduğu görüldü. Daha sonra, pseudosimetri, Ricci-pseudosimetri ve pseudoparalel eğrilik şartlarıyla ilgili olarak pek çok çalışma yapılmıştır (bkz [7, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18, 19, 20]).

Lightlike hiperyüzeyler üzerine araştırmalar matematiksel fizikteki önemi nedeni ile 1960 lı yıllardan itibaren çalışılmaya başlansa da, bu tür hiperyüzeyler sistematik olarak Duggal-Bejancu tarafından incelendi [21]. Bir lightlike hiperyüzeyde en önemli özellik hiperyüzeyin dik uzayının da hiperyüzeyin tanjant uzayında kalmasıdır. Bu ise hiperyüzeyin dışsal (extrinsic) çalışmasındaki en önemli araçtan yoksun olmasını doğurmaktadır. Duggal-Bejancu, bir semi-Riemann manifoldun lightlike hiperyüzeyi boyunca hiperyüzeyin tanjant uzayına tamamlayan fakat ortogonal olmayan bir vektör demetinin varlığını gösterdiler. Bu vektör demetini kullanarak hiperyüzeyi dışsal olarak incelediler. Lightlike hiperyüzeyler ile non-dejenere hiperyüzeyler arasında önemli farklar mevcuttur. Örneğin, bir lightlike hiperyüzey üzerine indirgenen konneksiyon Levi-Civita konneksiyon değildir. Ayrıca, Ricci tensörü simetrik değildir. Böylece görülmektedir ki lightlike hiperyüzeyin incelenmesi için yeni araç ve metodlara ihtiyaç vardır. Duggal-Bejancu yaklaşımını kullanarak bir çok yazar günümüzde lightlike hiperyüzeyler üzerine araştırmalar yapmaktadır.

[22] de Şahin, bir semi-simetrik lightlike hiperyüzey kavramını tanımlayarak bu kavramla ilgili yeni sonuçlar verdi ve bu çalışma birçok yazara çalışmaları için ışık tutmaktadır (bkz [2, 23, 24, 25, 26, 27]).

Bu tez dört bölümden oluşmaktadır. İkinci bölüm, tezde kullanılacak temel kavramlara ayrılmaktadır. Tezin orijinal bölümü üçüncü bölüm ile başlamaktadır ve bu bölüm üç altbölümden oluşmaktadır. Birinci altbölümde, bir semi-Riemann manifoldunun bir lightlike hiperyüzeyinin pseudosimetri şartı incelenerek örnek verilmektedir ve bazı karakterizasyonlar sunulmaktadır. Ayrıca, bir lightlike Einstein hiperyüzeyin pseudosimetrik olması için yeter şart elde edilmektedir. İkinci altbölümde, bir semi-Riemann manifoldunun bir lightlike hiperyüzeyinin pseudoparalelliği incelenmektedir ve bazı karakterizasyonlar verilmektedir. Üçüncü altbölümde ise bir semi-Riemann manifoldunun bir lightlike hiperyüzeyinin Ricci-pseudosimetrik olma durumu incelenmektedir ve örnek verilmektedir. Bu bölümde Ricci-pseudosimetrik hiperyüzeyler karakterize edilmektedir. Son olarak da, bir semi-Riemann manifoldunun bir lightlike hiperyüzeyinin Ricci-genelleştirilmiş pseudoparalelliği verilmektedir.

Dördöncü bölüm, tezin son bölümü olup Sasakiyan uzay formların pseudosimetrik lightlike hiperyüzeylerine ayrılmaktadır. Bu bölüm, dört altbölümden oluşmaktadır. İlk altbölümde, bir Sasakiyan uzay formun bir lightlike hiperyüzeyinin pseudosimetri olma durumu incelenmektedir ve karakterizasyonlar verilmektedir. İkinci altbölümde, bir Sasakiyan uzay formun bir lightlike hiperyüzeyinin pseudoparalelliği çalışılmaktadır ve karakterizasyonlar verilmektedir. Üçüncü altbölümde, bir Sasakiyan uzay formun bir lightlike hiperyüzeyinin Ricci-pseudosimetrik şartı incelenmektedir. Son altbölümde ise bir Sasakiyan uzay formun bir lightlike hiperyüzeyinin Weyl projektif pseudosimetrikliği tanımlanarak, bir karakterizasyon verilmektedir.

BÖLÜM 2

TEMEL KAVRAMLAR

Tezin orijinal kısımlarında faydalı olacak bilgilerin verildiği bu bölüm beş altbölümden oluşmaktadır. Birinci altbölümde, semi-Riemann manifoldlar, skaler çarpım uzayları, Radikal uzay, eğrilikler ve benzeri kavramlar hatırlatılmaktadır. İkinci altbölümde, semi-Riemann manifoldlarda tanımlanan yerel simetri, semi-simetri ve pseudosimetri kavramları tanıtılmaktadır. Üçüncü altbölümde, belirsiz Sasakiyan manifoldlar verilmektedir. Dördüncü altbölümde, semi-Riemann manifoldlarda lightlike hiperyüzeyler için gerekli olan temel tanım ve formüller sunulmaktadır. Beşinci altbölümde, bir belirsiz Sasakiyan manifoldun lightlike hiperyüzeyinin inşaası detaylı olarak oluşturulmaktadır.

2.1 Semi-Riemann Manifoldlar

Bu altbölüm, semi-Riemann geometrinin temel kavramı olan non-dejenere bilineer form kavramı ile başlamaktadır.

Tanım 2.1.1. V, n-boyutlu bir reel vektör uzayı olsun. Eğer $g : V \times V \longrightarrow R$ dönüşümü, $\forall \alpha, \beta \in R$ ve $\forall u, v, w \in V$ için

i) Simetriklik: $g(u, v) = g(v, u)$,

ii) Bilineerlik: $g(\alpha u + \beta v, w) = \alpha g(u, w) + \beta g(v, w)$ ve
$g(u, \alpha v + \beta w) = \alpha g(u, v) + \beta g(u, w)$,

iii) Non-dejenerelik: $\forall v \in V$ için $g(u, v) = 0$ iken $u = 0$ dır

özelliklerini sağlıyorsa, g dönüşümüne V üzerinde *skaler çarpım* ve (V, g) uzayına *skaler çarpım uzayı* denir [28]. Not edelim ki, her skaler çarpım uzayı ortonormal baza sahiptir.

Tanım 2.1.2. (V,g) bir skaler çarpım uzayı olmak üzere, V üzerinde bir v vektörü için

i) $g(v,v)>0$ veya $v=0$ ise, v ye *spacelike vektör*,

ii) $g(v,v)=0$ ve $v\neq 0$ ise, v ye *lightlike (null) vektör*,

iii) $g(v,v)<0$ ise, v ye *timelike vektör*

denir. Timelike, spacelike ve lightlike terimlerine vektörün *causal* karakterleri denir [28].

Tanım 2.1.3. V, n-boyutlu bir reel vektör uzayı ve g de V üzerinde simetrik bilineer form olsun. Bu durumda,

$$RadV=\{\xi\in V: g(\xi,v)=0,\ \forall v\in V\}$$

şeklinde tanımlı altuzaya V nin *radikal (null) uzayı* denir. Ayrıca, $RadV$ altuzayının boyutuna g nin *null-luk derecesi* denir ve $nullV$ ile gösterilir [29].

Tanım 2.1.4. V bir reel vektör uzayı, g, V üzerinde bir bilineer form ve W da V uzayının herhangi bir altuzayı olsun. $g|_W$ nın negatif tanımlı olduğu en geniş W altuzayının boyutuna V üzerinde *g bilineer formun indeksi* denir [28].

Örnek 2.1.1. E^n, n-boyutlu Öklid uzayı verilsin. $0\leq s\leq n$ olmak üzere s tamsayısı için E^n üzerinde

$$g(X_p,Y_p)=-\sum_{i=1}^{s}x_iy_i+\sum_{i=s+1}^{n}x_iy_i$$

şeklinde verilen metrik tensör göz önüne alınırsa elde edilen uzay *semi-Öklidyen uzay* olarak adlandırılır ve E_s^n ile gösterilir. Eğer $s=0$ ise E^n Öklid uzayı elde edilir [28].

Tanım 2.1.5. (V,g), bir n-boyutlu semi-Öklidyen uzay olsun. V uzayının $\{e_1,...,e_p\}$ birim timelike ve $\{e_{p+1},...,e_{p+q}\}$, $p+q=n$, birim spacelike vektörler olacak şekilde $\{e_1,...,e_n\}$ ortonormal bazı göz önüne alınsın. Bu durumda, lightlike vektörleri de içeren aşağıdaki üç durum söz konusudur;

1. Durum: ***$(p<q)$.*** Bu durumda,

$$N_i=\frac{1}{\sqrt{2}}(e_{p+i}+e_i),\ N_i^*=\frac{1}{\sqrt{2}}(e_{p+i}-e_i),\ 1\leq i\leq p \qquad (2.1.1)$$

vektörleri inşaa edilsin. Buradan

$$g(N_i, N_j) = g(N_i^*, N_j^*) = 0,\ g(N_i, N_j^*) = \delta_{ij},\ 1 \le i, j \le p \qquad (2.1.2)$$

olduğu görülür. Böylece,

$$\{N_1, ..., N_p, N_1^*, ..., N_p^*, e_{2p+1}, ..., e_{p+q} = e_n\},$$

V uzayının $2q$-tane lightlike vektörü ve $(q-p)$-tane de spacelike vektörü içeren bir bazıdır.

2. Durum: ***(**$p > q$**).*** Bu durumda,

$$N_a = \frac{1}{\sqrt{2}}(e_{p+a} + e_a),\ N_a^* = \frac{1}{\sqrt{2}}(e_{p+a} - e_a),\ 1 \le a \le q \qquad (2.1.3)$$

olur. Böylece, (2.1.1) ve (2.1.2) de i, j yerine $1 \le a, b \le q$ alınırsa, V uzayının $2q$-tane lightlike vektör ve $(p-q)$ -tane de timelike vektör içeren

$$\{N_1, ..., N_q, N_1^*, ..., N_q^*, e_{2q+1}, ..., e_{p+q} = e_n\}$$

bazı elde edilir.

3. Durum: ***(**$p = q$**).*** $n = 2p = 2q$ olduğundan, (2.1.1) veya (2.1.3) de tanımlanan

$$\{N_1, ..., N_p, N_1^*, ..., N_p^*\}$$

lightlike bazı elde edilir.

Eğer $p.q \neq 0$ ise, V semi-Öklidyen uzayına bir *proper semi-Öklidyen uzay* denir. Bir proper semi-Öklidyen uzayın, $i, j \in \{1, ..., r\}$, $a, b \in \{1, ..., s\}$, $2r + s = n$ ve $\epsilon_a = \pm 1$ için

$$\begin{aligned} g(N_i, N_j) &= g(N_i^*, N_j^*) = 0,\ g(N_i, N_j^*) = \delta_{ij}, \\ g(u_a, N_i) &= g(u_a, N_i^*) = 0,\ g(u_a, u_b) = \epsilon_a \delta_{ab}, \end{aligned}$$

şartlarını sağlayan bir

$$\{N_1, ..., N_r, N_1^*, ..., N_r^*, u_1, ..., u_s\}$$

bazı vardır ve bu baza *quasi-ortonormal baz* denir [30].

Önerme 2.1.1. (W, g), $nullW = r < n$ olacak şekilde n-boyutlu bir reel lightlike vektör uzayı olsun. Bu taktirde, $RadW$ radikal uzayının tamamlayanı olan altuzay non-dejeneredir [29].

Bu durumda, $RadW$ uzayının tamamlayanı olan altuzaya *ekran altuzay* denir, SW ile gösterilir [29].

Tanım 2.1.6. M, bir diferensiyellenebilir manifold olsun. M üzerinde sabit indeksli, simetrik, non-dejenere (0,2)-tensör alanına bir *metrik tensör* denir [28].

Tanım 2.1.7. M, bir diferensiyellenebilir manifold ve g de M üzerinde bir metrik tensör olsun. Bu durumda, (M, g) ikilisine *semi-Riemann manifold* denir [28].

Eğer M manifoldunun indeksi 1 ise manifolda *Lorentz manifoldu* denir.

Şimdi, semi-Riemann manifoldlar üzerindeki temel kavramlar verilecektir:

Teorem 2.1.1. (M, g), bir semi-Riemann manifold olsun. Bu durumda, $\forall X, Y, Z \in \chi(M)$ için

i) $[X, Y] = \nabla_X Y - \nabla_Y X$,

ii) $Xg(Y, Z) = g(\nabla_X Y, Z) + g(Y, \nabla_X Z)$

şartlarını sağlayan bir tek ∇ konneksiyonu vardır. Bu konneksiyona M manifoldunun *Levi-Civita konneksiyonu* denir ve bu konneksiyon

$$\begin{aligned} 2g(\nabla_X Y, Z) &= Xg(Y, Z) + Yg(Z, X) - Zg(X, Y) \\ &\quad + g([X, Y], Z) - g([Y, Z], X) + g([Z, X], Y) \end{aligned}$$

şeklindeki *Koszul özdeşliği* ile karakterize edilir [28].

Tanım 2.1.8. M, n-boyutlu bir semi-Riemann manifold ve ∇ da M nin Levi-Civita konneksiyonu olsun. M üzerinde

$$\begin{aligned} R : \chi(M) \times \chi(M) \times \chi(M) &\to \chi(M) \\ (X, Y, Z) &\to R(X, Y, Z) = R(X, Y)Z \\ R_{XY}Z = R(X, Y)Z &= \nabla_X \nabla_Y Z - \nabla_Y \nabla_X Y - \nabla_{[X,Y]} Z \end{aligned}$$

olarak tanımlanan tensöre ∇ konneksiyonunun *eğrilik tensörü* denir [28].

Tanım 2.1.9. (M, g), bir semi-Riemann manifold olsun. Bu durumda, $\forall X, Y, Z, W \in \chi(M)$ için

$$\begin{aligned} K : \chi(M) \times \chi(M) \times \chi(M) \times \chi(M) &\rightarrow C^\infty(M, \boldsymbol{R}) \\ (X, Y, Z, W) &\rightarrow K(X, Y, Z, W) =< R(X, Y)Z, W > \\ &= g(R(X, Y)Z, W) \end{aligned}$$

olarak tanımlanan 4. mertebeden kovaryant tensöre M üzerinde *Riemann Christoffel eğrilik tensörü* denir [31].

Teorem 2.1.2. Bir semi-Riemann manifold M ve M üzerindeki Levi-Civita konneksiyonu ∇ olsun. Bu durumda, M üzerinde aşağıdaki bağıntılar geçerlidir [31]*:*

i) $R(X, Y)Z + R(Z, X)Y + R(Y, Z)X = 0,$

ii) $K(X, Y, Z, W) = -K(Y, X, Z, W),$

iii) $K(X, Y, Z, W) = -K(X, Y, W, Z),$

iv) $K(X, Y, Z, W) = K(Z, W, X, Y).$

Tanım 2.1.10. (M, g), bir semi-Riemann manifold ve $p \in M$ noktasındaki T_pM tanjant uzayının 2-boyutlu non-dejenere bir altuzayı P olsun. P altuzayının bir bazı $\{X, Y\}$ olmak üzere

$$K(P) = \frac{K(X, Y, X, Y)}{g(X, X)g(Y, Y) - g(X, Y)^2}$$

şeklinde tanımlanan $K(P)$ reel sayısına P nin *kesit eğriliği* denir. Eğer $K(P) = c$ (sbt) ise, M manifolduna c sabit kesit eğrilikli semi-Riemann manifold denir ve $M(c)$ ile gösterilir. Bu durumda, M manifoldunun R eğrilik tensör alanı $\forall X, Y, Z \in T_pM$ için

$$R(X, Y)Z = c\{g(Y, Z)X - g(X, Z)Y\}$$

şeklinde verilir [28].

Bir basit bağlantılı sabit c kesit eğrilikli semi-Riemann manifoldu,

i) $c > 0$ ise pseudo-küreye izometriktir,

ii) $c = 0$ ise R_v^n semi-Öklidyen uzaya izometriktir,

iii) $c < 0$ ise pseudo-hiperbolik uzaya izometriktir.

Bu tezin orijinal kısımlarında, semi-Öklidyen uzaylar göz önüne alınacaktır. Bir R_v^n semi-Öklidyen uzay,

$$ds^2 = -\Sigma_{i=1}^{v} dx^i \otimes dx^i + \Sigma_{j=v+1}^{n} dx^j \otimes dx^j$$

metriğine sahip R^n uzayıdır [28].

Tanım 2.1.11. M manifoldunun ortonormal bir tabanı $\{e_1, ..., e_n\}$ olsun. Böylece ϵ_i, $\{e_i\}$ bazının işareti ve $\forall X \in \Gamma(TM)$ için

$$g(e_i, e_j) = \epsilon_i \delta_{ij}$$

ve

$$X = \Sigma_{i=1}^{n} \epsilon_i g(X, e_i) e_i$$

olmak üzere

$$g(X, Y) = \Sigma_{i=1}^{n} \epsilon_i g(X, e_i) g(Y, e_i)$$

yazılır. (M, g), semi-Riemann manifoldu olsun. Bu durumda,

$$Ric(X, Y) = izZ \rightarrow R(X, Y)Z,$$

$$Ric(X, Y) = \sum_i \epsilon_i K(X, e_i, Y, e_i)$$

şeklinde tanımlı Ric tensörüne M manifoldunun Ricci eğrilik tensörü denir, burada $\epsilon_i = g(e_i, e_i)$ dir [28].

Tanım 2.1.12. M, g metrik tensörüyle birlikte n-boyutlu bir semi-Riemann manifold olsun. Bu durumda, M manifoldunun $(1,3)$-tipinde *Weyl projektif eğrilik tensörü* W,

$$W(X, Y)Z) = R(X, Y)X - \frac{1}{n-1}[S(Y, Z)X - S(X, Z)Y] \tag{2.1.4}$$

ile verilir [32].

Tanım 2.1.13. P, bir M semi-Riemann manifoldunun altmanifoldu olsun. $j : P \to M$ inclusion dönüşümü olmak üzere, eğer j^* geri-çağırma (pull-back) dönüşümü P üzerinde bir metrik tensör ise bu durumda, P manifolduna M manifoldunun bir *semi-Riemann (non-dejenere) altmanifoldu* denir [28].

Semi-Riemann altmanifoldlar, semi-Riemann manifoldlar ile benzer özelliklere sahiptir. Örneğin, indirgenmiş konneksiyon metrik konneksiyondur ve Ricci tensörü simetriktir.

Tanım 2.1.14. $\bar{M}$, bir semi-Riemann manifold ve M de $\bar{M}$ manifoldunun bir altmanifoldu olsun. $\bar{M}$ ve M üzerindeki konneksiyonlar sırasıyla, $\bar{\nabla}$ ve ∇ olmak üzere, $\forall X, Y \in \chi(M)$ için

$$\bar{\nabla}_X Y = \nabla_X Y + h(X, Y) \tag{2.1.5}$$

ile tanımlı denkleme *Gauss formülü* denir. Burada h

$$h : \chi(M) \times \chi(M) \to \chi^{\perp}(M)$$

ile tanımlı normal demet değerli simetrik bilineer formdur ve *ikinci temel form* olarak adlandırılır. Bu durumda, $h = 0$ şartı sağlanıyorsa M altmanifolduna *tamamen jeodeziktir* denir [28].

Tanım 2.1.15. $\bar{M}$, bir semi-Riemann manifoldu ve M, $\bar{M}$ manifoldunun bir altmanifoldu olsun. Bu durumda, eğer $\forall v, w \in T_p(M)$ için

$$h(v, w) =< v, w > z$$

şartını sağlayan bir $z \in T_p(M)^{\perp}$ normal vektör alanı varsa $p \in M \subset \bar{M}$ noktasına *umbiliktir* denir. Eğer M altmanifoldunun her noktası umbilik ise M manifolduna *tamamen umbiliktir* denir [28].

Şimdi vektör demetleri tanımlanacak ve bazı özellikleri verilecektir:

Tanım 2.1.16. E, B ve F, C^{∞} manifoldlar ve $\pi : E \to B$ bir C^{∞} dönüşüm olsun. B manifoldunun bir açık örtüsü $\{U_{\alpha}\}_{\alpha \in I}$ (I, indis kümesi) olmak üzere eğer

$$(\pi \circ \psi_{\alpha})(x, y) = x \quad x \in U_{\alpha},\ y \in F$$

olacak şekilde

$$\psi_\alpha : U_\alpha \times F \to \pi^{-1}(U_\alpha)$$

diffeomorfizmlerinin bir $\{\psi_\alpha\}_{\alpha\in I}$ ailesi varsa π, F ye göre *yerel çarpım özelliğine sahiptir* denir ve $D = \{(U_\alpha, \psi_\alpha)\}_{\alpha\in I}$ sistemine de π nin *yerel ayrışması* denir [33].

Tanım 2.1.17. $\pi : E \to B$ dönüşümü yerel çarpım özelliğine sahip olsun. Bu durumda $\zeta = (E, \pi, B, F)$ dörtlüsüne bir diferensiyellenebilir *lif demeti* adı verilir [33].

Bir lif demetinde E ye *total uzay*, B ye *baz (taban) uzay*, F ye *lif modeli* ve π ye de *projeksiyon (fibrasyon)* adı verilir [33].

Lif demeti E veya π ile gösterilecektir.

Tanım 2.1.18. $\pi : E \to B$ bir lif demeti olsun. $\forall x \in B$ için

$$\pi^{-1}(x) = F_x = \{p \in E | \pi(p) = x\}$$

kümesine x üzerinde bir *lif* denir. Tüm F_x liflerinin ayrık birleşimi E total uzayını verir [33].

Tanım 2.1.19. $\zeta = (E, \pi, B, F)$, bir diferensiyellenebilir lif demeti olsun. π nin D yerel ayrışmasına ζ lif demetinin *yerel koordinat temsilcisi* denir [33].

Tanım 2.1.20. $\zeta = (E, \pi, B, F)$ lif demetinin $D = \{(U_\alpha, \psi_\alpha)\}_{\alpha\in I}$ yerel koordinat temsilcisini göz önüne alalım. $\forall x \in U_\alpha$ için

$$\psi_{\alpha,x} : F \to F_x$$

dönüşümü $y \in F$ için

$$\psi_{\alpha,x}(y) = \psi_\alpha(x, y)$$

şeklinde tanımlanırsa, ψ_α lar diffeomorfizm olduklarından, $\psi_{\alpha,x}$ ler de diffeomorfizmdirler [33].

Tanım 2.1.21. $\zeta = (E, \pi, B, F)$, bir diferensiyellenebilir lif demeti olsun. Eğer aşağıdaki iki özellik sağlanıyorsa ζ ya bir *vektör demeti* denir [33]:

i)$\forall x \in B$ için F ve F_x bir $\mathcal{K}$ cismi üzerinde vektör uzayıdır.

ii)$\forall x \in B$ için $\psi_{\alpha,x} : F \to F_x$ dönüşümleri lineer izomorfizm olacak şekilde ζ nın bir $D = \{(U_\alpha, \psi_\alpha)\}_{\alpha \in I}$ yerel koordinat temsilcisi vardır.

Tanım 2.1.22. $\pi : E \to B$ bir C^∞ lif demeti olsun. Bu durumda,

$$\pi \circ S = I \ \ (I, \text{B nin birim dönüşümü})$$

olacak şekilde

$$S : B \to E$$

C^∞ dönüşümüne *lif demetinin kesiti* denir ve $\Gamma(E)$ ile gösterilir [33].

Tanım 2.1.23. E, bir vektör demeti olsun. $\forall p \in B$ için T_pB tanjant uzayına bir X_p vektörü taşıyan dönüşüme *vektör demetinin kesiti* denir. E nin $\Gamma(E)$ kesitlerinin uzayı, $\mathcal{K}$ cismi üzerinde bir vektör uzayıdır [33].

Şimdi de vektör demetlerinin bir alt sınıfı olan distribüsyonlar tanıtılacaktır:

Tanım 2.1.24. $\bar{M}$, bir m-boyutlu manifold olsun. $\bar{M}$ üzerinde

$$\begin{aligned} \mathcal{D} : \bar{M} \ &\to \ T_x\bar{M} \\ p \ &\to \ \mathcal{D}_p \subset T_p\bar{M}, boy(D_p) = r \end{aligned}$$

ile tanımlanan $\mathcal{D}$ dönüşümüne r-boyutlu *distribüsyon* denir [34].

$X \in \chi(\bar{M})$ için $X_p \in \mathcal{D}_p$ ise X vektör alanına $\mathcal{D}$ distribüsyonuna aittir denir. Eğer her p noktası için $\mathcal{D}_p$ altuzayına ait r-tane diferensiyellenebilir lineer bağımsız vektör var ise $\mathcal{D}$ distribüsyonuna *diferensiyellenebilirdir* denir [34].

Tanım 2.1.25. $\bar{M}$, bir C^∞-manifold ve $\mathcal{D}$, $\bar{M}$ üzerinde r-boyutlu bir distribüsyon olsun. Eğer $X, Y \in \Gamma(\mathcal{D})$ için $[X, Y] \in \Gamma(\mathcal{D})$ ise $\mathcal{D}$ distribüsyonuna *involutivedir* denir [34].

Tanım 2.1.26. $\bar{M}$, bir C^∞ manifold ve $\mathcal{D}$, $\bar{M}$ üzerinde r-boyutlu bir distribüsyon olsun. M, $\bar{M}$ manifoldunun bir altmanifoldu olmak üzere, eğer M nin her p noktasında M manifoldunun tanjant uzayı ile $\mathcal{D}_p$ aynı ise M ye $\mathcal{D}$ distribüsyonunun *integral manifoldu* denir. Yani

$$f : M \to \bar{M}$$

bir imbedding olmak üzere $\forall p \in M$ için

$$f_*(T_pM) = \mathcal{D}_p$$

dir. Eğer $\mathcal{D}$ distribüsyonunun M altmanifoldunu kapsayan bir başka integral manifoldu yoksa bu manifolda distribüsyonun bir *maksimal integral manifoldu* (veya *leaf*) denir [34].

Tanım 2.1.27. $\bar{M}$, bir C^∞ manifold ve M, $\bar{M}$ manifoldunun bir altmanifoldu olsun. Eğer $\forall p \in M$ için $\mathcal{D}$ distribüsyonunun p noktasını kapsayan bir maksimal integral manifoldu varsa $\mathcal{D}$ distribüsyonuna *integrallenebilirdir* denir [34].

Tanım 2.1.28. M, bir manifold ve ∇, manifold üzerinde bir konneksiyon olsun. Eğer $X, Y \in \Gamma(\mathcal{D})$ için

$$\nabla_X Y \in \Gamma(\mathcal{D})$$

ise $\mathcal{D}$ distribüsyonuna *paraleldir* denir [34].

Tanım 2.1.29. B ve F, Riemann manifoldları ve $f > 0$, B üzerinde bir C^∞ fonksiyon olsun. $M = B \times_f F$ warped çarpım manifold,

$$g = \pi^*(g_B) + (f \circ \pi)^2 \sigma^*(g_F)$$

metrik tensörü ile oluşturulmuş $B \times F$ çarpım manifoldudur. Eğer $v, w \in T_{(p,q)}B \times F$ ise bu durumda,

$$\begin{aligned} g(v,w) &= \pi^*(g_B(v,w)) + (f \circ \pi)^2 \sigma^*(g_F(v,w)) \\ &= g_B(d\pi(v), d\pi(w)) + (f \circ \pi)^2 g_F(d\sigma(v), d\sigma(w)) \end{aligned}$$

dir. Özel olarak, eğer $f = 1$ ise $B \times_f F$ bir $B \times F$ çarpım manifolduna indirgenir [28].

2.2 Pseudosimetrik Semi-Riemann Manifoldlar

M, n-boyutlu $(n \geq 2)$ C^∞ sınıfından bağlantılı bir semi-Riemann manifold olsun. ∇, M üzerindeki lineer konneksiyon olmak üzere $\nabla R = 0$ ise M manifolduna *yerel* *simetriktir* denir. M üzerinde tanımlı $(0,2)$-tipinde bir simetrik tensör A olmak üzere $\wedge_A$ endomorfizmi

$$\wedge_A : \chi(M) \times \chi(M) \times \chi(M) \to \chi(M)$$
$$(X \wedge_A Y)Z = A(Y,Z)X - A(X,Z)Y \tag{2.2.1}$$

biçiminde tanımlanır. Eğer $A = g$ alınırsa (2.2.1) denklemi

$$(X \wedge_g Y)Z = g(Y,Z)X - g(X,Z)Y \tag{2.2.2}$$

biçimine indirgenir. Bundan sonra $X \wedge_A Y$ yerine $X \wedge Y$ kullanılacaktır [18].

M üzerinde $(0,2)$-tipinde simetrik iki tensör A ve B ise, bu tensörlerin $Kulkarni-Nomizu$ çarpımı $\hat{\wedge}$, her $X_1, X_2, X_3, X_4 \in \chi(M)$ için

$$\begin{aligned}(A \hat{\wedge} B)(X_1, X_2, X_3, X_4) &= A(X_1,X_4)B(X_2,X_3) + A(X_2,X_3)B(X_1,X_4) \\ &\quad - A(X_1,X_3)B(X_2,X_4) - A(X_2,X_4)B(X_1,X_3)\end{aligned} \tag{2.2.3}$$

biçiminde tanımlanır [18].

M üzerinde $(0,k)$-tipindeki $(k \geq 1)$ bir T tensör alanı verildiğinde T nin kovaryant türevi ∇T,

$$\begin{aligned}&(\nabla T)(X_1, ..., X_k; X) \\ &= (\nabla_X T)(X_1, ..., X_k) \\ &= \nabla_X (T(X_1, ..., X_k)) - \Sigma_{i=1}^{k} T(X_1, ..., \nabla_X X_i, ... X_k)\end{aligned} \tag{2.2.4}$$

biçiminde tanımlanır.

(M, g), n-boyutlu $(n \geq 3)$ C^∞ sınıfından bağlantılı semi-Riemann manifoldu olsun. M üzerinde T, $(0,k)$-tipinde $(k \geq 1)$ bir tensör alanı olmak üzere $X_1, ..., X_k$, $X, Y \in \Gamma(TM)$ için $(0, k+2)$-tipindeki $R \cdot T$ ve $Q(g,T)$ tensörleri

$$\begin{aligned}(R \cdot T)(X_1, ..., X_k; X, Y) &= (\tilde{R}(X,Y) \cdot T)(X_1, ..., X_k) \\ &= -T(\tilde{R}(X,Y)X_1, X_2, ..., X_k) \\ &- \; ... - T(X_1, ..., X_{k-1}, \tilde{R}(X,Y)X_k),\end{aligned}$$

ve

$$
\begin{aligned}
Q(g,T)(X_1,...,X_k;X,Y) &= ((X\wedge Y)\cdot T)(X_1,...,X_k)\\
&= -T((X\wedge Y)X_1,X_2,...,X_k)\\
&- \ ... - T(X_1,...,X_{k-1},(X\wedge Y)X_k)
\end{aligned}
$$

ile tanımlanırlar, burada $\tilde{R}$, M nin eğrilik tensörüdür ve R, $R(X_1,X_2,X_3,X_4) = g(\tilde{R}(X_1,X_2)X_3,X_4)$ ile verilen Riemann Christoffel eğrilik tensörüdür, endomorfizmler ise $\tilde{R}(X,Y)Z = [\nabla_X,\nabla_Y]Z - \nabla_{[X,Y]}Z$ ve $(X\wedge Y)Z = g(Y,Z)X - g(X,Z)Y$ ile tanımlıdır. Burada $R\cdot T = 0$ olduğunda eğrilik koşullarına semi-simetrik eğrilik koşulları denir [35]. Ayrıca R nin R üzerine etkisi olan $R\cdot R$ tensörü ile $Q(g,R)$ tensörü her $X_1,X_2,X_3,X_4,X,Y\in\chi(M)$ için

$$
\begin{aligned}
&(R\cdot R)(X_1,X_2,X_3,X_4;X,Y) =\\
&-R(\tilde{R}(X,Y)X_1,X_2,X_3,X_4) - R(X_1,\tilde{R}(X,Y)X_2,X_3,X_4)\\
&-R(X_1,X_2,\tilde{R}(X,Y)X_3,X_4) - R(X_1,X_2,X_3,\tilde{R}(X,Y)X_4),
\end{aligned}
\tag{2.2.5}
$$

ve

$$
\begin{aligned}
&Q(g,R)(X_1,X_2,X_3,X_4;X,Y) =\\
&-R((X\wedge Y)X_1,X_2,X_3,X_4) - R(X_1,(X\wedge Y)X_2,X_3,X_4)\\
&-R(X_1,X_2,(X\wedge Y)X_3,X_4) - R(X_1,X_2,X_3,(X\wedge Y)X_4)
\end{aligned}
\tag{2.2.6}
$$

ile tanımlanır [18]. Bu durumda, eğer $R\cdot R = 0$ ise (M,g) semi-Riemann manifoldu *semi-simetrik* ve $R\cdot S = 0$ ise (M,g) *Ricci semi-simetrik* diye isimlendirilir [36]. Her yerel simetrik manifold semi-simetriktir, fakat tersi doğru değildir.

Şimdi, bu tezin ana kavramı olan pseudosimetri kavramını tanımlayalım.

Tanım 2.2.1. (M,g), semi-Riemann manifoldu olsun. M manifoldunun her noktasında $R\cdot R$ ve $Q(g,R)$ tensörleri lineer bağımlı ise M manifolduna *pseudosimetrik manifold* denir. Bu ifade, $U_R = \{x\in M : Q(g,R)\neq 0\}$ kümesi üzerinde tanımlı

$$
R\cdot R = L_R Q(g,R) \tag{2.2.7}
$$

ifadesine denktir, burada L_R, U_R üzerinde tanımlı bir fonksiyondur [37].

Diğer taraftan, Ricci pseudosimetrik manifoldlar aşağıda tanımlanmaktadır:

Tanım 2.2.2. (M, g) semi-Riemann manifoldu ve S, M nin Ricci tensörü olsun. Eğer M manifoldunun her noktasında $R \cdot S$ ve $Q(g, S)$ tensörleri lineer bağımlı ise M manifolduna *Ricci-pseudosimetrik manifold* denir. Bu ifade ise, $U_S = \{x \in M : Q(g, S) \neq 0\}$ kümesi üzerinde tanımlı

$$R \cdot S = L_S Q(g, S), \tag{2.2.8}$$

ifadesine denktir, burada L_S, U_S üzerinde tanımlı bir fonksiyondur ve S, Ricci tensörüdür [38].

$n \geq 4$ boyutlu semi-Riemann manifoldlarının sınıfında, simetri şartları için aşağıda verilen kapsama bağıntıları geçerlidir [18]:

$$\begin{aligned} R \cdot R = 0 &\subset R \cdot S = 0, \\ R \cdot S = 0 &\subset R \cdot S = L_S Q(g, S), \\ R \cdot R = 0 &\subset R \cdot R = L_R Q(g, R), \\ R \cdot R = L_R Q(g, R) &\subset R \cdot S = L_S Q(g, S). \end{aligned}$$

Tanım 2.2.3. $(N, \tilde{g})$ semi-Riemann manifoldunun bir altmanifoldu (M, g) olsun. $X, Y, U, V \in \chi(M)$ için

$$\bar{R} \cdot h : \chi(M) \times \chi(M) \times \chi(M) \times \chi(M) \to \chi^{\perp}(M)$$

$$(\bar{R}(X, Y) \cdot h)(U, V) = R^{\perp}(X, Y)h(U, V) - h(\tilde{R}(X, Y)U, V) - h(U, \tilde{R}(X, Y)V)$$

ile tanımlıdır. Eğer M altmanifoldunun her noktasında $\bar{R}.h = 0$ ise M altmanifolduna *semiparalel altmanifold* adı verilir [18].

Bu aşamada, semi-Riemann manifoldun hiperyüzeyleri üzerine olan bazı önemli simetri şartlarını hatırlatalım:

(M, g) ve $(N, \hat{g})$ sırasıyla n ve $(n+1)$-boyutlu semi-Riemann manifoldlar olmak üzere $f : M \to N$ bir izometrik immersiyon olsun. $\xi \in \chi^{\perp}(M)$ birim normal vektör alanı ve $X, Y \in \chi(M)$ olmak üzere Gauss ve Weingarten denklemleri sırasıyla,

$$\begin{aligned} \bar{\nabla}_X Y &= \nabla_X Y + \varepsilon H(X, Y)\xi \\ \bar{\nabla}_X \xi &= -A_{\xi}(X) \end{aligned}$$

şeklinde ifade edilebilir, burada H, M nin ξ ye göre ikinci temel tensörü ve $\varepsilon = \hat{g}(\xi,\xi) = \pm 1$ dir. Böylece

$$g(A_\xi(X),Y) = H(X,Y)$$

olur. Ayrıca $p \geq 1$ için

$$g(A_\xi^p(X),Y) = H^p(X,Y)$$

şeklinde tanımlanır [18].

R ve $\hat{R}$, sırasıyla M ve N_s^{n+1} manifoldlarının Riemann-Christoffel eğrilik tensörleri ve $X_1, X_2, X_3, X_4 \in \chi(M)$ olmak üzere M manifoldunun N_s^{n+1} de Gauss denklemi

$$R(X_1,X_2,X_3,X_4) = \hat{R}(X_1,X_2,X_3,X_4) + \varepsilon E(X_1,X_2,X_3,X_4) \tag{2.2.9}$$

olarak tanımlanır. Burada E tensörü

$$E(X_1,X_2,X_3,X_4) = H(X_1,X_4)H(X_2,X_3) - H(X_1,X_3)H(X_2,X_4)$$

şeklinde tanımlanır. Eğer N_s^{n+1} semi-Riemann manifoldu, semi-Öklid uzayı E_s^{n+1} ise (2.2.9) Gauss denklemi

$$R(X_1,X_2,X_3,X_4) = \varepsilon(H(X_1,X_4)H(X_2,X_3) - H(X_1,X_3)H(X_2,X_4))$$

denklemine dönüşür [18].

Teorem 2.2.1. $M \subset E_s^{n+1}$ $(n \geq 3)$ bir hiperyüzey olsun. Bu durumda, M hiperyüzeyinin semisimetrik $(R \cdot R = 0)$ olması için gerek ve yeter şart her $p \in M$ noktasında M nin ikinci temel tensörünün $H^2 = \lambda H (\lambda \in R)$ veya $v, w \in T_x^*(M), \alpha, \beta \in R$ için

$$H = \alpha v \otimes v + \beta w \otimes w$$

eşitliklerinden birini sağlamasıdır [18].

Pseudosimetri için aşağıdaki sonuç geçerlidir:

Teorem 2.2.2. $M \subset E_s^{n+1}$ $(n \geq 3)$ bir hiperyüzey olsun. Bu durumda, M hiperyüzeyinin pseudosimetrik $(R \cdot R = L_R Q(g, R))$ olması için gerek ve yeter şart her $p \in M$ noktası için $R \cdot R = 0$ olması veya M nin ikinci temel tensörünün

$$H^2 = \alpha H + \beta g (\alpha, \beta \in R) \qquad (2.2.10)$$

eşitliğini sağlamasıdır [18].

Teorem 2.2.3. $M \subset E_s^{n+1}$ $(n \geq 3)$ bir hiperyüzey olsun. Bu durumda, M hiperyüzeyinin Ricci-pseudosimetrik $(R \cdot S = L_R Q(g, S))$ olması için gerek ve yeter şart her $p \in M$ noktası için $R \cdot S = 0$ olması veya M nin ikinci temel tensörü (2.2.10) eşitliğini sağlamasıdır [18].

Son olarak bu altbölümde aşağıdaki bağıntı verilebilir:

Teorem 2.2.4. $M \subset E_s^{n+1}$ $(n \geq 3)$ bir hiperyüzey olsun. Bu durumda,

$$R \cdot R = Q(S, R) \qquad (2.2.11)$$

dir [18].

2.3 Belirsiz Sasakiyan Manifoldlar

Bu altbölümde, belirsiz Sasakiyan manifoldlar verilmektedir. Belirsiz Sasakiyan ve Sasakiyan manifoldlar arasındaki farkı tanıtmak için öncelikle Riemann hemen hemen kontakt metrik manifoldlar tanımlanmaktadır.

Tanım 2.3.1. M, (2n+1)-boyutlu bir diferensiyellenebilir manifold, Φ, ξ ve η, sırasıyla, M üzerinde (1,1)-tipinde tensör alanı, vektör alanı ve 1-form olsunlar. Eğer Φ, ξ ve η

$$\eta(\xi) = 1 \qquad (2.3.1)$$

ve

$$\Phi^2 = -I + \eta \otimes \xi \qquad (2.3.2)$$

şartlarını sağlıyorsa, M manifolduna bir (Φ, ξ, η) *hemen hemen kontakt yapısına sahiptir* ve (M, Φ, ξ, η) ye de bir *hemen hemen kontakt manifold* denir, burada I, TM üzerinde birim dönüşümdür [39].

Önerme 2.3.1. M^{2n+1}, bir (Φ, ξ, η) hemen hemen kontakt yapısına sahip olsun. Bu taktirde,

$$\begin{aligned} \Phi\xi &= 0, && (2.3.3) \\ \eta(\Phi X) &= 0, && (2.3.4) \\ rank\Phi &= 2n && (2.3.5) \end{aligned}$$

dir [39].

Tanım 2.3.2. M^{2n+1}, (Φ, ξ, η) ile birlikte bir hemen hemen kontakt manifold olsun. Eğer M^{2n+1}, herhangi X ve Y vektör alanları için

$$g(\Phi X, \Phi Y) = g(X, Y) - \eta(X)\eta(Y) \tag{2.3.6}$$

olacak şekilde bir g Riemann metriğine sahipse, M^{2n+1} manifolduna (Φ, ξ, η, g) *hemen hemen kontakt metrik yapısına sahiptir* denir [39].

Eğer (2.3.6) da Y yerine ξ alınırsa (2.3.1) ve (2.3.3) denklemlerinden

$$\eta(X) = g(X, \xi) \tag{2.3.7}$$

elde edilir.

Şimdi, böyle bir g metriğinin, (Φ, ξ, η) yapısına sahip bir manifoldda daima var olduğunu ifade eden şu önermeyi verelim:

Önerme 2.3.2. Eğer M^{2n+1}, (Φ, ξ, η) ile birlikte bir hemen hemen kontakt manifold ise, bu taktirde M^{2n+1}

$$g(\Phi X, \Phi Y) = g(X, Y) - \eta(X)\eta(Y)$$

olacak şekilde bir g Riemann metriğine sahiptir [39].

Sonuç 2.3.1. M^{2n+1}, (Φ, ξ, η, g) hemen hemen kontakt metrik yapısına sahip olsun. Bu durumda, $\forall X, Y \in \chi(M)$ için

$$g(\Phi X, Y) = -g(X, \Phi Y) \tag{2.3.8}$$

dir. Yani Φ, g ye göre bir anti-simetrik tensör alanıdır [40].

Tanım 2.3.3. (2n+1)-boyutlu bir Riemann manifoldu M olsun. M üzerinde her noktada

$$\eta \wedge (d\eta)^n \neq 0$$

koşulunu sağlayan bir η diferensiyel 1-formu varsa, η ya *kontakt form* ve (M, η) ikilisine de *kontakt manifold* denir. Burada $(d\eta)^n$, $d\eta$ nın kendisi ile n-defa dış çarpımını belirtir [39].

Teorem 2.3.1. (M, Φ, ξ, η), (2n+1)-boyutlu bir hemen hemen kontakt manifold olsun. M manifoldunun kontakt formu verildiğinde $\forall X, Y \in \chi(M)$ için

$$g(X, \Phi Y) = d\eta(X, Y)$$

olacak şekilde bir (Φ, ξ, η, g) hemen hemen kontakt metrik yapısı vardır [40].

Tanım 2.3.4. M üzerinde bir (Φ, ξ, η, g) hemen hemen kontakt metrik yapısı verilsin. $\forall X, Y \in \chi(M)$ için

$$\Omega(X, Y) = g(X, \Phi Y)$$

şeklinde tanımlı Ω dönüşümüne (Φ, ξ, η, g) hemen hemen kontakt metrik yapısının *temel 2-formu* denir [40].

Tanım 2.3.5. (M, Φ, ξ, η, g), (2n+1)-boyutlu bir hemen hemen kontakt metrik manifold olsun. Eğer $\forall X, Y \in \chi(M)$ için

$$d\eta(X, Y) = g(X, \Phi Y) = \Omega(X, Y)$$

eşitliği sağlanıyorsa, (Φ, ξ, η, g) dörtlüsüne *kontakt metrik yapı* ve (M, Φ, ξ, η, g) ye de *kontakt metrik manifold* denir [40].

Önerme 2.3.3. (M, Φ, ξ, η), (2n+1)-boyutlu bir hemen hemen kontakt manifold olsun. Bu durumda, (Φ, ξ, η) yapısının normal olabilmesi için gerek ve yeter şart $\forall X, Y \in \chi(M)$ için

$$N_\Phi(X, Y) + 2d\eta(X, Y)\xi = 0$$

olmasıdır [40, 41].

Tanım 2.3.6. M, kontakt metrik yapısı (Φ, ξ, η, g) olan (2n+1)-boyutlu bir kontakt metrik manifold olsun. Eğer M manifoldunun kontakt metrik yapısı normal ise, (Φ, ξ, η, g) yapısına *Sasakiyan yapı* ve (M, Φ, ξ, η, g) ye de *Sasakiyan manifold* denir [40].

Aşağıdaki teorem, Sasakiyan manifoldları için kullanışlı ve pratik bir karakterizasyon sunmaktadır.

Teorem 2.3.2. (2n+1)-boyutlu (M, Φ, ξ, η, g) hemen hemen kontakt metrik manifoldunun bir Sasakiyan manifold olması için gerek ve yeter şart $\forall X, Y \in \chi(M)$ için

$$(\nabla_X \Phi)Y = g(X, Y)\xi - \eta(Y)X$$

olmasıdır [40].

1990 yılında Duggal, hemen hemen kontakt manifoldlar ve uzay zaman geometrisi arasındaki ilişkileri inceledi [42]. Buna göre,

$\bar{M}$, bir $(2n+1)$-boyutlu semi-Riemann manifoldu olsun. Eğer

$$\bar{\phi}^2 = -I + \eta \otimes \xi,\ \eta(\xi) = 1,\ \eta \circ \phi = 0 \text{ and } \mathrm{rank}\bar{\phi} = 2n \qquad (2.3.9)$$

şartları sağlanıyorsa $(\bar{\phi}, \xi, \eta)$ üçlüsüne *hemen hemen kontakt yapı* denir, burada $\bar{\phi}$, $(1,1)$-tipinde bir tensör alanı, ξ bir vektör alanı ve η bir 1-formdur. $(\bar{\phi}, \xi, \eta)$, $\bar{M}$ üzerinde bir hemen hemen kontakt yapı ve $\bar{g}$ de $\bar{M}$ üzerinde bir semi-Riemann metrik olmak üzere, eğer

$$\begin{aligned} &\bar{g}(\xi, \xi) = \epsilon = \pm 1,\ \eta(\bar{X}) = \epsilon \bar{g}(\xi, \bar{X}), \\ &\bar{g}(\bar{\phi}\bar{X}, \bar{\phi}\bar{Y}) = \bar{g}(\bar{X}, \bar{Y}) - \epsilon \eta(\bar{X})\eta(\bar{Y}). \end{aligned} \qquad (2.3.10)$$

şartları sağlanıyorsa $(\bar{\phi}, \xi, \eta, \bar{g})$ dörtlüsüne bir *hemen hemen kontakt metrik yapı* denir, burada $\bar{X}$ ve $\bar{Y}$, $\bar{M}$ üzerinde vektör alanıdır. Üstelik, eğer $d\eta(\bar{X}, \bar{Y}) = -\bar{g}(\bar{\phi}\bar{X}, \bar{Y})$ ve $(\bar{\nabla}_{\bar{X}}\bar{\phi})\bar{Y} = \bar{g}(\bar{X}, \bar{Y})\xi - \epsilon\eta(\bar{Y})\bar{X}$ şartları sağlanıyorsa $\bar{M}$ ye *belirsiz Sasakiyan manifold* denir, burada $\bar{\nabla}$, $\bar{g}$ semi-Riemannian metriği için Levi-Civita konneksiyonudur. (2.3.10) un ilk denkleminden, ξ, $\bar{M}$ üzerinde asla bir lightlike vektör alanı değildir.

Diğer taraftan Takahashi [43], ξ spacelike vektör alanına sahip hemen hemen kontakt manifoldları düşünmenin yeterli olduğunu gösterdiği için burada ξ, bir spacelike birim vektörüne (yani $\bar{g}(\xi,\xi)=1$) kısıtlanacaktır.

$T_p\bar{M}$ de bir σ düzlem kesiti, eğer $\bar{X}$ ve $\bar{\phi}\bar{X}$ vektör alanları tarafından gerilirse, bu durumda $\bar{\phi}$*-kesiti* diye isimlendirilir, burada $\bar{X}$, ξ ye dik (ortogonal) birim vektör alanıdır. Ayrıca σ nın kesit eğriliğine, $\bar{\phi}$*-kesit eğriliği* denir. $\bar{\phi}$-kesit eğriliği sabit c olan bir $\bar{M}$ Sasakiyan manifoldu, *Sasakiyan uzay form* diye isimlendirilir ve $\bar{M}(c)$ ile gösterilir. $\bar{M}(c)$ Sasakiyan uzay formunun $\bar{R}$ eğrilik tensörü,

$$\begin{aligned}
&\bar{R}(\bar{X},\bar{Y})\bar{Z}=\frac{c+3}{4}\{g(\bar{Y},\bar{Z})\bar{X}-g(\bar{X},\bar{Z})\bar{Y}\}+\frac{c-1}{4}\{\eta(\bar{X})\eta(\bar{Z})\bar{Y}\\
&-\eta(\bar{Y})\eta(\bar{Z})\bar{X}+g(\bar{X},\bar{Z})\eta(Y)\xi-g(\bar{Y},\bar{Z})\eta(\bar{X})\xi+\bar{g}(\bar{\phi}\bar{Y},\bar{Z})\bar{\phi}\bar{X} \qquad (2.3.11)\\
&-\bar{g}(\bar{\phi}\bar{X},\bar{Z})\bar{\phi}Y-2\bar{g}(\bar{\phi}\bar{X},\bar{Y})\bar{\phi}\bar{Z}\}
\end{aligned}$$

dır, burada $\bar{X},\bar{Y},\bar{Z}\in\Gamma(T\bar{M})$ [2].

$\bar{M}$ bir $(2n+1)$-boyutlu, $\bar{\phi}$-kesit eğriliği sabit c olan Sasakiyan manifoldu olsun. Bu durumda, eğer $c=-3$ ise $\bar{M}$ manifoldu E_q^{2n+1} uzayına izometrik ve $c=1$ ise $\bar{M}$ manifoldu, S_q^{2n+1} uzayına izometriktir [40].

2.4 Semi-Riemann Manifoldların Lightlike Hiperyüzeyleri

$(\bar{M},\bar{g})$, $(m+2)$-boyutlu semi-Riemann manifoldu ve $g=\bar{g}_{|M}$, $m>0$, indeks $q\geq 1$ olmak üzere (M,g), $\bar{M}$ nin bir hiperyüzeyi olsun. x noktasında M nin tanjant uzayı T_xM olmak üzere dik uzay,

$$T_x^{\perp}M=\{V_x\in T_x\bar{M}:\bar{g}_x(V_x,W_x)=0,\forall W_x\in T_xM\},$$

ile tanımlıdır. Bu durumda

$$RadT_xM=T_xM\cap T_x^{\perp}M,$$

ile tanımlı $RadTM$ distribüsyonuna *radikal distribüsyon* denir. $RadT_xM$ nin boyutu, g metriğinin nulluk derecesidir. Eğer $RadT_xM\neq\{0\}$ ise M ye *lightlike hiperyüzey* denir [29].

M, $\bar{M}$ semi-Riemann manifoldunun lightlike hiperyüzeyi olsun. Bu durumda, TM de $RadTM$ ye tamamlayan olan $S(TM)$ distribüsyonu göz önüne alınırsa,

$$TM = RadTM \oplus_{ort} S(TM), \tag{2.4.1}$$

dır. Burada $S(TM)$ distribüsyonuna ekran distribüsyonu denir ve Önerme 2.1.1 den non-dejeneredir.

Diğer taraftan, Duggal-Bejancu, TM demetine tamamlayan fakat ortogonal olmayan bir vekör demetinin varlığını gösterdiler.

Teorem 2.4.1. $(\bar{M}, \bar{g})$ bir semi-Riemann manifold ve $(M, g, S(TM))$, $\bar{M}$ manifoldunun bir lightlike hiperyüzeyi olsun. Bu durumda,

$$\bar{g}(\xi, N) = 1, \bar{g}(N, N) = \bar{g}(N, X) = 0, \forall X \in \Gamma(STM), \xi \in \Gamma(RadTM) \tag{2.4.2}$$

olacak şekilde bir tek $tr(TM)$ vektör demeti vardır [29].

Teoremde ifade edildiği gibi, bu vektör demeti TM ye tamamlayan uzaydır, fakat dik değildir. Dik olması manifoldun semi-Riemann olması ile çelişir.

Böylece, (2.4.1) ve (2.4.2) den,

$$\begin{aligned} T\bar{M}|_M &= S(TM) \oplus (TM^{\perp} \oplus tr(TM)) \\ &= TM \oplus tr(TM) \end{aligned} \tag{2.4.3}$$

olur. Burada, $T\bar{M}|_M$ deki TM tanjant demetine komplement (dik değil) $tr(TM)$ vektör demeti, M nin $S(TM)$ ye göre *lightlike transversal demeti* diye isimlendirilir [29].

Kabul edelim ki $\bar{\nabla}$ ve ∇, sırasıyla $\bar{M}$ semi-Riemann manifoldu ve M lightlike hiperyüzeyinin Levi-Civita konneksiyonları olsun. (2.4.3) denkleminde herhangi $X, Y \in \Gamma(TM)$, $N \in \Gamma(tr(TM))$ için,

$$\bar{\nabla}_X Y = \nabla_X Y + h(X, Y) \tag{2.4.4}$$

$$\bar{\nabla}_X N = -A_N X + \nabla^t_X N, \tag{2.4.5}$$

dir, burada $\nabla_X Y, A_N X \in \Gamma(TM)$ ve $h(X, Y), \nabla^t_X N \in \Gamma(tr(TM))$ dir. $B(X, Y) = g(h(X, Y), \xi)$ ve $\tau(X) = \bar{g}(\nabla^t_X N, \xi)$ olmak üzere, herhangi $X, Y \in \Gamma(TM)$, $N \in$

$\Gamma(tr(TM))$ için, (2.4.4) ve (2.4.5) denklemlerinden

$$\bar{\nabla}_X Y = \nabla_X Y + B(X,Y)N \quad (2.4.6)$$

$$\bar{\nabla}_X N = -A_N X + \tau(X)N \quad (2.4.7)$$

olur. A_N ve B sırasıyla M lightlike hiperyüzeyinin *şekil operatörü* ve *ikinci temel formu* diye isimlendirilir.

(2.4.6) ifadesinden,

$$(\bar{\nabla}_X g)(Y,Z) = B(X,Y)\eta(Z) + B(X,Z)\eta(Y) \quad (2.4.8)$$

elde edilir. Böylece semi-Riemann hiperyüzeylerinin aksine, bir lightlike hiperyüzeyde indirgenmiş konneksiyon Levi-Civita konneksiyonu değildir.

P, $\Gamma(S(TM))$ üzerinde $\Gamma(TM)$ nın projeksiyonu olsun. Bu durumda, herhangi $X, Y \in \Gamma(TM)$ için,

$$\nabla_X PY = \nabla^*_X PY + C(X,PY)\xi \quad (2.4.9)$$

$$\nabla_X \xi = -A^*_\xi X + \tau(X)\xi, \quad (2.4.10)$$

dır, burada $\nabla^*_X PY$, $A^*_\xi X \in \Gamma(S(TM))$ dir ve C, U üzerinde

$$C(X,PY) = \bar{g}(\nabla_X PY, N) \quad (2.4.11)$$

ile tanımlı bir 1-formdur. C, $A^*_\xi X$ ve ∇^*, sırasıyla $S(TM)$ üzerinde tanımlı yerel ikinci temel form, yerel şekil operatörü ve indirgenmiş konneksiyondur. Bu durumda, $X, Y, W \in \Gamma(TM), \xi \in \Gamma(TM^\perp)$ ve $N \in \Gamma(tr(TM))$ için aşağıdaki ifadeler geçerlidir:

$$g(A_N Y, PW) = C(Y,PW), g(A_N Y, N) = 0, B(X,\xi) = 0, \quad (2.4.12)$$

$$g(A^*_\xi X, PY) = B(X,PY), g(A^*_\xi X, N) = 0. \quad (2.4.13)$$

$\bar{M}$, bir semi-Riemann manifoldu ve M de $\bar{M}$ manifoldunun bir lightlike hiperyüzeyi olsun. $\bar{M}$ ve M manifoldlarının eğrilik tensörleri sırasıyla $\bar{R}$ ve R ile gösterilsin. Bu durumda, her $X, Y, Z \in \Gamma(TM_{|U})$ için

$$\begin{aligned} \bar{R}(X,Y)Z &= R(X,Y)Z + B(X,Z)A_N Y - B(Y,Z)A_N X \\ &+ \{(\nabla_X B)(Y,Z) - (\nabla_Y B)(X,Z) \\ &+ \tau(X)B(Y,Z) - \tau(Y)B(X,Z)\}N \end{aligned} \quad (2.4.14)$$

elde edilir [29].

Şimdi M, $R_q^{(n+2)}$ semi-Riemann manifoldun bir lightlike hiperyüzeyi olsun. Bu durumda, kesit eğriliği sıfır olduğundan $\bar{R} = 0$ olur. Böylece $X, Y, Z \in \Gamma(TM)$ ve $N \in \Gamma(tr(TM))$ için M hiperyüzeyinin Gauss denklemi,

$$R(X,Y)Z = B(Y,Z)A_N X - B(X,Z)A_N Y, \tag{2.4.15}$$

dır, burada R, M hiperyüzeyinin eğrilik tensör alanıdır [30].

M, $(m+2)$-semi-Öklidyen uzayın bir lightlike hiperyüzeyi olsun. Bu durumda, herhangi $X, Y \in \Gamma(TM)$, $N \in \Gamma(tr(TM))$ için M hiperyüzeyinin Ric Ricci tensörü,

$$Ric(X,Y) = -\Sigma_{i=1}^{m}\varepsilon_i\{B(X,Y)C(W_i,W_i) - g(A_\xi^* Y, A_N X)\}, \varepsilon_i = \pm 1 \tag{2.4.16}$$

ile verilir, burada $\{W_{i=1}^m\}$, $S(TM)$ ekran distribüsyonunun bir ortonormal bazıdır [30]. Kolayca görülür ki, Ricci tensörü simetrik değildir.

M, bir semi-Öklidyen uzayın bir lightlike hiperyüzeyi olsun. Eğer herhangi $X, Y, X_1, X_2, X_3, X_4 \in \Gamma(TM)$ için

$$(R(X,Y)\cdot R)(X_1, X_2, X_3, X_4) = 0 \tag{2.4.17}$$

şartı sağlanıyorsa M hiperyüzeyi *semi-simetrik* diye adlandırılır [22]. Benzer olarak, $X, Y, X_1, X_2 \in \Gamma(TM)$ için

$$(R(X,Y)\cdot Ric)(X_1, X_2) = 0 \tag{2.4.18}$$

şartı sağlanıyorsa M hiperyüzeyi *Ricci semi-simetrik* diye adlandırılır [22].

Lightlike hiperyüzeylerin geometrisi için [22], [29], [30] çalışmalarına bakılabilir.

2.5 Belirsiz Sasakiyan Manifoldların Lightlike Hiperyüzeyleri

Şimdi, bir belirsiz Sasakiyan manifoldun bir lightlike hiperyüzeyinin yapısı hatırlatılacaktır. Detaylı bilgi için [2] kaynağına bakılabilir.

$(\bar{M}, \bar{\phi}, \xi, \eta, \bar{g})$, bir belirsiz Sasakiyan manifold ve (M, g) de $\xi \in \Gamma(TM)$ yapı vektör alanına teğet bir lightlike hiperyüzeyi olsun. Eğer E, $TM^\perp$ demetinin bir yerel kesiti ise bu durumda, $\bar{g}(\bar{\phi}E, E) = 0$ dir ve $\bar{\phi}E$, M ye teğettir. Böylece

$\bar{\phi}(TM^{\perp})$, M üzerinde 1 ranklı bir distribüsyondur ve $\bar{\phi}(TM^{\perp}) \cap TM^{\perp} = \{0\}$ dır. Bu ise $\bar{\phi}(TM^{\perp})$ altvektör demetini içeren bir $S(TM)$ ekran distribüsyonunun seçimine olanak sağlar. N, $tr(TM)$ demetinin bir yerel kesiti ise $\bar{g}(\bar{\phi}N, E) = -\bar{g}(N, \bar{\phi}E) = 0$ olduğundan $\bar{\phi}E$, $S(TM)$ ye aittir. Diğer taraftan $\bar{g}(\bar{\phi}N, N) = 0$ olduğundan, $\bar{\phi}N$ nin E ye göre bileşeni sıfırdır. Böylece $\bar{\phi}N \in \Gamma(S(TM))$ dir. Ayrıca kolayca görülür ki $\bar{g}(\bar{\phi}N, \bar{\phi}E) = 1$ olur. Dolayısıyla $\bar{\phi}(TM^{\perp}) \oplus \bar{\phi}(tr(TM))$, $S(TM)$ demetinin 2 ranklı bir non-dejenere altvektör demetidir. Diğer taraftan, eğer M, ξ yapı vektör alanına teğet ise bu durumda, [44] den biliyoruz ki ξ, $S(TM)$ ye aittir. Böylece,

$$S(TM) = \{\bar{\phi}(TM^{\perp}) \oplus \bar{\phi}(tr(TM))\} \perp D_0 \perp < \xi > \tag{2.5.1}$$

dır, burada $< \xi > = Sp\{\xi\}$ dir ve D_0, non-dejenere invaryant vektör demetidir [2].

Bu durumda, (2.4.1) ve (2.4.3) denklemlerinden,

$$TM = \{\bar{\phi}(TM^{\perp}) \oplus \bar{\phi}(tr(TM))\} \perp D_0 \perp < \xi > \perp TM^{\perp} \tag{2.5.2}$$

ve

$$T\bar{M}|_M = \{\bar{\phi}(TM^{\perp}) \oplus \bar{\phi}(tr(TM))\} \perp D_0 \perp < \xi > \perp (TM^{\perp} \oplus tr(TM)) \tag{2.5.3}$$

ayrışımları elde edilir. M üzerinde iki distribüsyonu

$$D := TM^{\perp} \perp \bar{\phi}(TM^{\perp}) \perp D_0 \text{ ve } D' := \bar{\phi}(tr(TM)) \tag{2.5.4}$$

ile tanımlayalım. Bu durumda D, $\bar{\phi}$ altında invaryanttır ve

$$TM = (D \oplus D') \perp < \xi > \tag{2.5.5}$$

dir.

$$U := -\bar{\phi}N \text{ ve } V := -\bar{\phi}E$$

yerel null vektör alanları olsunlar. Bu durumda, (2.5.5) den herhangi bir $X \in \Gamma(TM)$ içın

$$X = RX + QX + \eta(X)\xi, \; QX = u(X)U \tag{2.5.6}$$

olarak yazılır, burada R ve Q, sırasıyla TM demetinin D ve D' distribüsyonlarına projeksiyonları ve u da M üzerinde $u(X) = g(X, V)$ şeklinde tanımlanan bir diferensiyel

1-formdur. (2.5.6) denklemine $\bar{\phi}$ uygulanır, (2.3.9) kullanılır ve $\bar{\phi}^2 N = -N$ olması dikkate alınırsa,

$$\bar{\phi}X = \phi X + u(X)N \tag{2.5.7}$$

elde edilir, burada ϕ, herhangi bir $X \in \Gamma(TM)$ için $\phi X := \bar{\phi}RX$ şeklinde M üzerinde tanımlı (1,1)-tipinde bir tensör alanıdır. (2.5.7) denklemine $\bar{\phi}$ uygulanır ve (2.3.9) kullanılırsa

$$\phi^2 X = -X + \eta(X)\xi + u(X)U, \ \forall X \in \Gamma(TM) \tag{2.5.8}$$

eşitliğine ulaşılır.

Herhangi $X, Y \in \Gamma(TM)$ için (2.3.10) ve (2.5.7) ifadeleri kullanılarak

$$g(\phi X, \phi Y) = g(X,Y) - \eta(X)\eta(Y) - u(Y)v(X) - u(X)v(Y) \tag{2.5.9}$$

ifadesi elde edilir, burada v, M üzerinde $v(X) = g(X,U)$, $\forall X \in \Gamma(TM)$, şeklinde tanımlı bir 1-formdur.

Ayrıca, direkt hesaplamalarla aşağıdaki özdeşlikler elde edilir:

$$\begin{aligned}
\nabla_X \xi &= -\phi X, && (2.5.10)\\
B(X,\xi) &= -u(X), && (2.5.11)\\
C(X,\xi) &= -v(X), && (2.5.12)\\
B(X,U) &= C(X,V), && (2.5.13)\\
(\nabla_X u)Y &= -B(X,\phi Y) - u(Y)\tau(X), && (2.5.14)\\
(\nabla_X \phi)Y &= g(X,Y)\xi - \eta(Y)X - B(X,Y)U + u(Y)A_N X. && (2.5.15)
\end{aligned}$$

$\bar{M}(c)$ bir belirsiz Sasakiyan uzay form, (M,g), $\bar{M}(c)$ uzayının bir lightlike hiperyüzeyi ve $\xi \in \Gamma(TM)$ olsun. $U \subset M$ üzerinde $\{E,N\}$ çiftini göz önüne alalım. Bu durumda $X,Y,Z \in \Gamma(TM)$ için, (2.3.11), (2.3.11) ve (2.5.7) ifadeleri kullanılıp teğet kısımı yazılırsa,

$$\begin{aligned}
R(X,Y)Z = {} & \frac{c+3}{4}\{g(Y,Z)X - g(X,Z)Y\} + \frac{c-1}{4}\{\eta(X)\eta(Z)Y \\
& -\eta(Y)\eta(Z)X + g(X,Z)\eta(Y)\xi - g(Y,Z)\eta(X)\xi + \bar{g}(\bar{\phi}Y,Z)\phi X \qquad (2.5.16)\\
& -\bar{g}(\bar{\phi}X,Z)\phi Y - 2\bar{g}(\bar{\phi}X,Y)\phi Z\} + B(Y,Z)A_N X - B(X,Z)A_N Y
\end{aligned}$$

olur. Bu durumda, $c = 1$ için Gauss denklemi,

$$\begin{aligned} R(X,Y)Z &= g(Y,Z)X - g(X,Z)Y + B(Y,Z)A_N X \\ &- B(X,Z)A_N Y \end{aligned} \tag{2.5.17}$$

dir. Diğer taraftan, doğrudan işlemlerle,

$$\begin{aligned} R(X,Y)Z &= R^*(X,Y)Z + C(X,Z)A^*_E Y - C(Y,Z)A^*_E X \\ &+ \{(\nabla_X C)(Y,Z) - (\nabla_Y C)(X,Z) + \tau(Y)C(X,Z) \\ &- \tau(X)C(Y,Z)\}E \end{aligned} \tag{2.5.18}$$

bulunur. Ayrıca $X, Y \in \Gamma(TM)$ için, lightlike hiperyüzeyin Ricci eğriliği

$$Ric(X,Y) = ag(X,Y) - b\eta(X)\eta(Y) + B(X,Y)izA_N - B(A_N X, Y) \tag{2.5.19}$$

olarak elde edilir, burada $a = \frac{(2n+1)(c+3)-8}{4}$, $b = \frac{(2n+1)(c-1)}{4}$ dir ve iz, $S(TM)$ ekran distribüsyonuna kısıtlanmış g ye göre yazılır [24].

M, bir semi-Riemann manifoldunun bir lightlike hiperyüzeyi olsun. Bu durumda, herhangi $X \in \Gamma(\bar{\phi}(TM^\perp))$ ve $Y \in \Gamma(D \oplus D')$ için M hiperyüzeyinin ikinci temel formu h için $h(X,Y) = 0$ şartı sağlanıyorsa, M hiperyüzeyine $(\bar{\phi}(TM^\perp), D \oplus D')$-*mixed tamamen jeodeziktir* denir [2].

Umbilik kavramı belirsiz Sasakiyan manifoldların altmanifoldları için kullanışlı olmadığından (tamamen jeodezikliğe karşılık gelmektedir), aşağıdaki umbiliklik kavramı tanımlanmıştır:

M, bir $\bar{M}$ semi-Riemann manifoldunun bir altmanifoldu olsun. Bu durumda, herhangi $X, Y \in \Gamma(TM)$ için M altmanifoldunun ikinci temel formu h

$$h(X,Y) = \lambda\{g(X,Y) - \eta(X)\eta(Y)\}N. \tag{2.5.20}$$

şartını sağlıyorsa M ye η-*tamamen umbilik lightlike hiperyüzeyidir* denir [2].

Belirsiz Sasakiyan manifoldlar üzerindeki lightlike hiperyüzeylerin simetri özellikleri için [2], [23], [27] çalışmalarına da bakılabilir.

BÖLÜM 3
SEMİ-ÖKLİDYEN UZAYLARDA PSEUDOSİMETRİK LİGHTLİKE HİPERYÜZEYLER

Bu bölüm, üç altbölümden oluşmaktadır. Birinci altbölümde, pseudosimetrik lightlike hiperyüzeylere örnek verilmekte ve bir lightlike hiperyüzeyin pseudosimetrik lightlike hiperyüzey olması için yeter şartlar verilmektedir. Ayrıca, pseudosimetrik lightlike hiperyüzeyin karakterizasyonu sunulmakta ve hiperyüzeyin pseudosimetrik olması ile ekran distribüsyonunun pseudosimetrik olması arasındaki ilişki araştırılmaktadır. Diğer taraftan, bir pseudosimetrik lightlike hiperyüzeyin semi-simetrik lightlike hiperyüzey olma durumu tartışılmakta ve lightlike Einstein hiperyüzeyin pseudosimetrik olma durumu incelenmektedir. İkinci altbölümde, pseudoparalel lightlike hiperyüzeyler için karakterizasyon elde edilmekte ve semi-simetri olma şartları verilmektedir. Üçüncü altbölümde, semi-Öklidyen uzayın Ricci-pseudosimetrik lightlike hiperyüzey olması için yeter şartlar verilmekte, karakterizasyon elde edilmekte ve Ricci-genelleştirilmiş pseudoparalel lightlike hiperyüzey için yeter şartlar bulunmaktadır.

3.1 Semi-Öklidyen Uzaylarda Pseudosimetrik Lightlike Hiperyüzeyler

Bu altbölüme, ilk olarak lightlike hiperyüzey için pseudosimetri tanımı ve bir örnek sunularak başlanmaktadır.

Tanım 3.1.1. M, bir semi-Öklidyen uzayın bir lightlike hiperyüzeyi olsun. Eğer M hiperyüzeyinin her noktasında $R \cdot R$ ve $Q(g, R)$ tensörleri lineer bağımlı ise M hiperyüzeyine *pseudosimetrik lightlike hiperyüzey* denir, yani M hiperyüzeyinin pseudosimetrik lightlike hiperyüzey olması için gerek ve yeter şart $U_R = \{p \in M | Q(g, R) \neq 0\}$ kümesi üzerinde $R \cdot R = L_R Q(g, R)$ olmasıdır, burada L_R, U_R

üzerinde fonksiyondur.

Öncelikle aşikar olmayan, fakat basit bir örnek sunalım:

Örnek 3.1.1. M, R_1^4 de

$$x_1 = u_1 \sec u_3 \ , \ x_2 = u_1 \cos(u_2+u_3) \ , \ x_3 = u_1 \sin(u_2+u_3) \ , \ x_4 = u_1 \tan u_3,$$

ile verilen bir hiperyüzey olsun, burada R_1^4,

$$\{\partial x_1, \partial x_2, \partial x_3, \partial x_4\}$$

standart bazına göre $(-,+,+,+)$ işaretli semi-Öklidyen uzaydır ve $u_1 \neq 0$; $u_3, u_2 + u_3 \in (0, \frac{\pi}{2})$ dir. Bu durumda TM,

$$\begin{aligned}
Z_1 &= \sec u_3 \partial x_1 + \cos(u_2+u_3)\partial x_2 + \sin(u_2+u_3)\partial x_3 + \tan u_3 \partial x_4 \\
Z_2 &= -u_1 \sin(u_2+u_3)\partial x_2 + u_1 \cos(u_2+u_3)\partial x_3 \\
Z_3 &= u_1 \sec u_3 \tan u_3 \partial x_1 - u_1 \sin(u_2+u_3)\partial x_2 + u_1 \cos(u_2+u_3)\partial x_3 + u_1 \sec^2 u_3 \partial x_4
\end{aligned}$$

ile gerilir. Böylece, M hiperyüzeyinin indirgenmiş metriği

$$\begin{aligned}
\partial s^2 &= 0\partial u_1^2 + u_1^2(\partial u_2^2 + \partial u_2 \partial u_3 + (1+\sec^2 u_3)\partial u_3^2) \\
&= u_1^2(\partial u_2^2 + \partial u_2 \partial u_3 + (1+\sec^2 u_3)\partial u_3^2)
\end{aligned}$$

ile verilir. Bu durumda, M bir warped çarpım lightlike hiperyüzeydir ve $RadTM = Sp\{Z_1\}$ ve $S(TM) = Sp\{Z_2, Z_3\}$ dir. Dolayısıyla, M hiperyüzeyinin lightlike transversal vektör demeti,

$$N = -\frac{1}{2}(\sec u_3 \partial x_1 - \cos(u_2+u_3)\partial x_2 - \sin(u_2+u_3)\partial x_3 + \tan u_3 \partial x_4)$$

ile verilir. Doğrudan işlemlerle,

$$\begin{aligned}
\bar{\nabla}_{Z_2} Z_2 &= -u_1 \cos(u_2+u_3)\partial x_2 - u_1 \sin(u_2+u_3)\partial x_3 \\
\bar{\nabla}_{Z_2} Z_3 &= -u_1 \cos(u_2+u_3)\partial x_2 - u_1 \sin(u_2+u_3)\partial x_3 \\
\bar{\nabla}_{Z_3} Z_3 &= u_1(\sec u_3 \tan^2 u_3 + \sec u_3 \sec^2 u_3)\partial x_1 - u_1 \cos(u_2+u_3)\partial x_2 \\
&- u_1 \sin(u_2+u_3)\partial x_3 + 2u_1 \sec^2 u_3 \tan u_3 \partial x_4
\end{aligned}$$

elde edilir. Burada $[Z_2, Z_3] = 0$ ifadesine ulaşılır. Bu durumda, direkt hesaplamalarla $\eta(Z_2) = 0$, $\eta(Z_3) = 0$ ve $\eta([Z_2, Z_3]) = 0$ elde edilir. Böylece, $S(TM)$ integralenebilirdir. Şimdi, Gauss formülünden

$$B(Z_2, Z_2) = -u_1\ ,\ B(Z_2, Z_3) = -u_1\ ,\ B(Z_3, Z_3) = -u_1 - u_1 \sec^2 u_3$$

bulunur. Diğer taraftan,

$$\begin{aligned}
\bar{\nabla}_{Z_2} N &= -\frac{1}{2}(\sin(u_2 + u_3)\partial x_2 - \cos(u_2 + u_3)\partial x_3) \\
\bar{\nabla}_{Z_3} N &= -\frac{1}{2}(\sec u_3 \tan u_3 \partial x_1 + \sin(u_2 + u_3)\partial x_2 - \cos(u_2 + u_3)\partial x_3) + \sec^2 u_3 \partial x_4)
\end{aligned}$$

elde edilir. Böylece (2.4.7) Weingarten formülünden

$$A_N Z_2 = -\frac{1}{2u_1} Z_2\ ,\ A_N Z_3 = -\frac{1}{u_1} Z_2 + \frac{1}{2u_1} Z_3$$

elde edilir. Bu durumda, yukarıdaki denklemlerden

$$(R \cdot R)(Z_2, Z_3, Z_2, Z_3; Z_2, Z_3) = -\frac{u_1^2 \sec^2 u_3}{2},$$

ve

$$Q(g, R)(Z_2, Z_3, Z_2, Z_3; Z_2, Z_3) = u_1^4 \sec^2 u_3$$

elde edilir. Böylece,

$$(R \cdot R)(Z_2, Z_3, Z_2, Z_3; Z_2, Z_3) = -\frac{1}{2u_1^2} Q(g, R)(Z_2, Z_3, Z_2, Z_3; Z_2, Z_3)$$

bulunur. $A_N Z_1 = 0$ kullanılarak,

$$\begin{aligned}
(R \cdot R)(Z_1, Z_3, Z_2, Z_3; Z_2, Z_3) &= 0\ ,\ (R \cdot R)(Z_2, Z_1, Z_2, Z_3; Z_2, Z_3) = 0, \\
(R \cdot R)(Z_2, Z_3, Z_1, Z_3; Z_2, Z_3) &= 0\ ,\ (R \cdot R)(Z_2, Z_3, Z_2, Z_1; Z_2, Z_3) = 0
\end{aligned}$$

elde edilir, burada $Z_1 \in \Gamma(RadTM)$ dir. Benzer şekilde,

$$\begin{aligned}
Q(g, R)(Z_1, Z_3, Z_2, Z_3; Z_2, Z_3) &= 0\ ,\ Q(g, R)(Z_2, Z_1, Z_2, Z_3; Z_2, Z_3) = 0, \\
Q(g, R)(Z_2, Z_3, Z_1, Z_3; Z_2, Z_3) &= 0\ ,\ Q(g, R)(Z_2, Z_3, Z_2, Z_1; Z_2, Z_3) = 0
\end{aligned}$$

elde edilir, burada $Z_1 \in \Gamma(RadTM)$ dir. Böylece, M tamamen umbilik pseudosimetrik lightlike hiperyüzeydir.

M lightlike hiperyüzeylerinin pseudosimetrikliği için aşağıdaki teorem verilebilir:

Teorem 3.1.1. M, integrallenebilir ekran distribüsyonuna sahip bir lightlike hiperyüzey olsun. Bu durumda, eğer $B(X,Y)A_N^2 Z = g(X,Y)A_N Z$ ve $B(X,Y)A_\xi^* A_N Z = g(X,Y)A_\xi^* Z$ ise M bir pseudosimetrik lightlike hiperyüzeydir, öyle ki $\lambda = 1$ dir, burada $X, Y, Z \in \Gamma(TM)$ dir.

İspat. Hipotezden, $X, Y, Z \in \Gamma(TM)$ için $B(X,Y)A_N^2 Z = g(X,Y)A_N Z$ ise $W \in \Gamma(TM)$ olmak üzere

$$\begin{aligned} & g(B(X,Y)A_N^2 Z, W) = g(g(X,Y)A_N Z, W) \\ & \Rightarrow B(X,Y)g(A_N^2 Z, W) = g(X,Y)g(A_N Z, W) \end{aligned} \tag{3.1.1}$$

olur. Diğer taraftan, $B(X,Y)A_\xi^* A_N Z = g(X,Y)A_\xi^* Z$ ise $U \in \Gamma(TM)$ olmak üzere

$$\begin{aligned} & g(B(X,Y)A_\xi^* Z, U) = g(g(X,Y)A_\xi^* Z, U) \\ & \Rightarrow B(X,Y)B(A_N Z, U) = g(X,Y)B(Z,U) \end{aligned} \tag{3.1.2}$$

olur. $X_1, X_2, X_3, X_4, X, Y \in \Gamma(TM)$ için (2.2.5) denkleminde (2.4.15) ifadesi yazılırsa,

$$\begin{aligned} & (R \cdot R)(X_1, X_2, X_3, X_4; X, Y) \\ & = -R(R(X,Y)X_1, X_2, X_3, X_4) - R(X_1, R(X,Y)X_2, X_3, X_4) \\ & - R(X_1, X_2, R(X,Y)X_3, X_4) - R(X_1, X_2, X_3, R(X,Y)X_4) \\ & = -R(B(Y,X_1)A_N X - B(X,X_1)A_N Y, X_2, X_3, X_4) \\ & - R(X_1, B(Y,X_2)A_N X - B(X,X_2)A_N Y, X_3, X_4) \\ & - R(X_1, X_2, B(Y,X_3)A_N X - B(X,X_3)A_N Y, X_4) \\ & - R(X_1, X_2, X_3, B(Y,X_4)A_N X - B(X,X_4)A_N Y) \end{aligned}$$

bulunur. R, lineer olduğundan

$$\begin{aligned} & (R \cdot R)(X_1, X_2, X_3, X_4; X, Y) \\ & = -B(Y,X_1)R(A_N X, X_2, X_3, X_4) + B(X,X_1)R(A_N Y, X_2, X_3, X_4) \\ & - B(Y,X_2)R(X_1, A_N X, X_3, X_4 + B(X,X_2)R(X_1, A_N Y, X_3, X_4) \\ & - B(Y,X_3)R(X_1, X_2, A_N X, X_4) + B(X,X_3)R(X_1, X_2, A_N Y, X_4) \\ & - B(Y,X_4)R(X_1, X_2, X_3, A_N X) + B(X,X_4)R(X_1, X_2, X_3, A_N Y) \end{aligned} \tag{3.1.3}$$

olur. Böylece

$$
\begin{aligned}
&(R\cdot R)(X_1,X_2,X_3,X_4;X,Y)\\
&=-B(Y,X_1)g(R(A_NX,X_2)X_3,X_4)+B(X,X_1)g(R(A_NY,X_2)X_3,X_4)\\
&-B(Y,X_2)g(R(X_1,A_NX)X_3,X_4)+B(X,X_2)g(R(X_1,A_NY)X_3,X_4)\\
&-B(Y,X_3)g(R(X_1,X_2)A_NX,X_4)+B(X,X_3)g(R(X_1,X_2)A_NY,X_4)\\
&-B(Y,X_4)g(R(X_1,X_2)X_3,A_NX)+B(X,X_4)g(R(X_1,X_2)X_3,A_NY)
\end{aligned}
$$

dır. Burada Gauss denklemi kullanılırsa,

$$
\begin{aligned}
&(R\cdot R)(X_1,X_2,X_3,X_4;X,Y)\\
&=-B(Y,X_1)g(B(X_2,X_3)A_N^2X-B(A_NX,X_3)A_NX_2,X_4)\\
&+B(X,X_1)g(B(X_2,X_3)A_N^2Y-B(A_NY,X_3)A_NX_2,X_4)\\
&-B(Y,X_2)g(B(A_NX,X_3)A_NX_1-B(X_1,X_3)A_N^2X,X_4)\\
&+B(X,X_2)g(B(A_NY,X_3)A_NX_1-B(X_1,X_3)A_N^2Y,X_4)\\
&-B(Y,X_3)g(B(X_2,A_NX)A_NX_1-B(X_1,A_NX)A_NX_2,X_4)\\
&+B(X,X_3)g(B(X_2,A_NY)A_NX_1-B(X_1,A_NY)A_NX_2,X_4)\\
&-B(Y,X_4)g(B(X_2,X_3)A_NX_1-B(X_2,X_3)A_NX_2,A_NX)\\
&+B(X,X_4)g(B(X_2,X_3)A_NX_1-B(X_2,X_3)A_NX_2,A_NY)
\end{aligned}
$$

elde edilir. Bu ifade düzenlenirse,

$$
\begin{aligned}
&(R\cdot R)(X_1,X_2,X_3,X_4;X,Y)\\
&=-B(Y,X_1)[g(A_N^2X,X_4)B(X_2,X_3)-B(A_NX,X_3)g(A_NX_2,X_4)]\\
&+B(X,X_1)[g(A_N^2Y,X_4)B(X_2,X_3)-B(A_NY,X_3)g(A_NX_2,X_4)]\\
&-B(Y,X_2)[B(A_NX,X_3)g(A_NX_1,X_4)-g(A_N^2X,X_4)B(X_1,X_3)]\\
&+B(X,X_2)[B(A_NY,X_3)g(A_NX_1,X_4)-g(A_N^2Y,X_4)B(X_1,X_3)]\\
&-B(Y,X_3)[B(X_2,A_NX)g(A_NX_1,X_4)-B(X_1,A_NX)g(A_NX_2,X_4)]\\
&+B(X,X_3)[B(X_2,A_NY)g(A_NX_1,X_4)-B(X_1,A_NY)g(A_NX_2,X_4)]\\
&-B(Y,X_4)[g(A_NX_1,A_NX)B(X_2,X_3)-g(A_NX_2,A_NX)B(X_1,X_3)]\\
&+B(X,X_4)[g(A_NX_1,A_NY)B(X_2,X_3)-g(A_NX_2,A_NY)B(X_1,X_3)]
\end{aligned}
$$

bulunur. Burada (3.1.1) ve (3.1.2) ifadeleri kullanılırsa

$$\begin{aligned}
&(R\cdot R)(X_1,X_2,X_3,X_4;X,Y)\\
&=-g(Y,X_1)[g(A_NX,X_4)B(X_2,X_3)-B(X,X_3)g(A_NX_2,X_4)]\\
&+g(X,X_1)[g(A_NY,X_4)B(X_2,X_3)-B(Y,X_3)g(A_NX_2,X_4)]\\
&-g(Y,X_2)[B(X,X_3)g(A_NX_1,X_4)-g(A_NX,X_4)B(X_1,X_3)]\\
&+g(X,X_2)[B(Y,X_3)g(A_NX_1,X_4)-g(A_NY,X_4)B(X_1,X_3)]\\
&-g(Y,X_3)[B(X_2,X)g(A_NX_1,X_4)-B(X_1,X)g(A_NX_2,X_4)]\\
&+g(X,X_3)[B(X_2,Y)g(A_NX_1,X_4)-B(X_1,Y)g(A_NX_2,X_4)]\\
&-g(Y,X_4)[g(A_NX_1,X)B(X_2,X_3)-g(A_NX_2,X)B(X_1,X_3)]\\
&+g(X,X_4)[g(A_NX_1,Y)B(X_2,X_3)-g(A_NX_2,Y)B(X_1,X_3)]\\
&=Q(g,R)(X_1,X_2,X_3,X_4;X,Y), \qquad (3.1.4)
\end{aligned}$$

olur. Bu ise ispatı tamamlar. □

Böylece aşağıdaki sonuç verilebilir:

Sonuç 3.1.1. *M bir semi-Öklidyen uzayın bir lightlike hiperyüzeyi olsun. Bu durumda, eğer M üzerinde $B(X,Y)A_N^2Z = g(X,Y)A_NZ$ ve $B(X,Y)A_\xi^*A_NZ = g(X,Y)A_\xi^*Z$ şartları sağlanıyorsa $B(A_NX,U) = g(X,U)$ dır, burada $X,Y,Z,U \in \Gamma(TM)$ dir.*

İspat. $X,Y,Z,W,U \in \Gamma(TM)$ için (3.1.1) den,

$$B(X,Y)=\frac{g(X,Y)}{g(A_N^2Z,W)}g(A_NZ,W) \qquad (3.1.5)$$

dır. Diğer taraftan (3.1.2) den,

$$B(X,Y)=\frac{g(X,Y)}{B(A_NZ,U)}B(Z,U) \qquad (3.1.6)$$

dır. Böylece (3.1.5) ve (3.1.6) ifadelerinden,

$$\frac{g(X,Y)}{g(A_N^2Z,W)}g(A_NZ,W)=\frac{g(X,Y)}{B(A_NZ,U)}B(Z,U)$$

olur. Bu ifade düzenlenirse,

$$g(X,Y)g(A_NZ,W)B(A_NZ,U)=g(X,Y)g(A_N^2Z,W)B(Z,U)$$

deklemleri elde edilir. Bu eşitlik ise

$$g(X,Y)[g(A_NZ,W)B(A_NZ,U) - g(A_N^2Z,W)B(Z,U)] = 0$$

ifadesine denktir. Burada $X, Y \in \Gamma(S(TM))$ alınırsa ve A_N operatörünün $S(TM)$ değerli olduğu göz önüne alınırsa,

$$\begin{aligned} g(A_NZ,W)B(A_NZ,U) - g(A_N^2Z,W)B(Z,U) = 0, \\ g(A_NZ,W)B(A_NZ,U) - g(B(Z,U)A_N^2Z,W) = 0 \end{aligned} \tag{3.1.7}$$

olur. Ayrıca hipotezden,

$$B(X,Y)A_N^2Z = g(X,Y)A_NZ$$

olduğu için, (3.1.7) ifadesi

$$\begin{aligned} g(A_NZ,W)B(A_NZ,U) - g(B(Z,U)A_N^2Z,W) &= 0 \\ g(A_NZ,W)B(A_NZ,U) - g(g(Z,U)A_NZ,W) &= 0 \\ g(A_NZ,W)B(A_NZ,U) - g(Z,U)g(A_NZ,W) &= 0 \\ g(A_NZ,W)[B(A_NZ,U) - g(Z,U)] &= 0 \end{aligned}$$

denklemine denktir. □

Şimdi, semi-Öklidyen uzay üzerinde M ve $S(TM)$ nin pseudosimetrikliği arasındaki ilişkiyi veren aşağıdaki teoremi ifade edelim:

Teorem 3.1.2. M, bir semi-Öklidyen uzayın $B(X,Y)A_\xi^*A_NZ = g(X,Y)A_\xi^*Z$ şartını sağlayan, integrallenebilir ekran distribüsyonuna sahip bir lightlike hiperyüzeyi olsun. Bu durumda, M hiperyüzeyinin pseudosimetrik olması için gerek ve yeter şart ekran distribüsyonunun integral manifoldunun pseudosimetrik olmasıdır.

İspat. (2.4.15) den,

$$R(X,Y)PZ = B(Y,PZ)A_NX - B(X,PZ)A_NY$$

olup buradan

$$g(R(X,Y)PZ,PW) = B(Y,PZ)g(A_NX,PW) - B(X,PZ)g(A_NY,PW)$$

bulunur. Burada hipotez gereğince (3.1.2) kullanılırsa, $X, Y, Z, W \in \Gamma(TM)$ için

$$\begin{aligned} g(R(X,Y)PZ, PW) &= B(A_N Y, PZ)B(A_N X, PW) \\ &- B(A_N X, PZ)B(A_N Y, PW) \end{aligned} \tag{3.1.8}$$

elde edilir. (3.1.8) ifadesinde Gauss ve Weingarten denklemleri kullanılırsa,

$$\begin{aligned} & g(R(X,Y)PZ, PW) \\ & = g(\nabla_X \nabla_Y PZ - \nabla_Y \nabla_X PZ - \nabla_{[X,Y]} PZ, PW) \\ & = g(\nabla_X (\nabla^*_Y PZ + h^*(Y, PZ)) - \nabla_Y (\nabla^*_X PZ + h^*(X, PZ)) \\ & - \nabla^*_{[X,Y]} PZ - h^*([X,Y], PZ), PW) \\ & = g(\nabla_X \nabla^*_Y PZ + \nabla_X h^*(Y, PZ) - \nabla_Y \nabla^*_X PZ - \nabla_Y h^*(X, PZ) \\ & - \nabla^*_{[X,Y]} PZ - h^*([X,Y], PZ), PW) \\ & = g(\nabla_X \nabla^*_Y PZ, PW) + C(X, \nabla^*_Y PZ) g(\xi, PW) \\ & + X(C(Y, PZ)) g(\xi, PW) + C(Y, PZ) g(-A^*_\xi X - \tau(X)\xi, PW) \\ & - g(\nabla_Y \nabla^*_X PZ, PW) - C(Y, \nabla^*_X PZ) g(\xi, PW) \\ & - Y(C(X, PZ)) g(\xi, PW) - C(X, PZ) g(-A^*_\xi Y - \tau(Y)\xi, PW) \\ & - g(\nabla^*_{[X,Y]} PZ, PW) - C([X,Y], PZ) g(\xi, PW) \\ & = g(R^*(X,Y)PZ, PW) - C(Y, PZ) g(A^*_\xi X, PW) + C(X, PZ) g(A^*_\xi Y, PW) \\ & = g(R^*(X,Y)PZ, PW) - g(A_N Y, PZ) B(X, PW) \\ & + g(A_N X, PZ) B(Y, PW) \end{aligned} \tag{3.1.9}$$

bulunur. Buna göre (3.1.9) ifadesinde (3.1.2) kullanılırsa, $X, Y, Z, W \in \Gamma(TM)$ için

$$\begin{aligned} g(R(X,Y)PZ, PW) &= g(R^*(X,Y)PZ, PW) - B(A_N Y, PZ)B(A_N X, PW) \\ &+ B(A_N X, PZ)B(A_N Y, PW) \end{aligned} \tag{3.1.10}$$

dir. Böylece (3.1.8) ve (3.1.10) dan,

$$g(R(X,Y)PZ, PW) = \frac{1}{2} g(R^*(X,Y)PZ, PW) \tag{3.1.11}$$

olur. Diğer taraftan, (2.4.12) ve (2.4.15) den, $\forall X, Y, Z \in \Gamma(TM)$, $N \in \Gamma(tr(TM))$ için

$$g(R(X,Y)PZ, N) = 0, \tag{3.1.12}$$

dır. Böylece, (3.1.11) ve (3.1.12) den

$$R(X,Y)PZ = \frac{1}{2}R^{*}(X,Y)PZ \tag{3.1.13}$$

elde edilir. Diğer taraftan, $X,Y,Z,U,V,W \in \Gamma(TM)$ için

$$\begin{aligned}
&(R(X,Y)\cdot R)(U,V,W,Z)\\
&= -R(R(X,Y)U,V,W,Z) - R(U,R(X,Y)V,W,Z)\\
&- R(U,V,R(X,Y)W,Z) - R(U,V,W,R(X,Y)Z)
\end{aligned}$$

olduğundan, bu ifadede (3.1.13) ifadesi kullanılır ve $X,Y,U,V,W \in \Gamma(S(TM))$ seçimi yapılırsa,

$$(R(X,Y)\cdot R)(U,V,W,Z) = \frac{1}{4}(R^{*}(X,Y).R^{*})(U,V,W,Z) \tag{3.1.14}$$

bulunur. Diğer taraftan, $X,Y,U,V,W \in \Gamma(S(TM))$ için

$$\begin{aligned}
&Q(g,R)(U,V,W,Z;X,Y)\\
&= -R((X\wedge Y)U,V,W,Z) - R(U,(X\wedge Y)V,W,Z)\\
&- R(U,V,(X\wedge Y)W,Z) - R(U,V,W,(X\wedge Y)Z)\\
&= -R(g(Y,U)X - g(X,U)Y,V,W,Z) - R(U,g(Y,V)X - g(X,V)Y,W,Z)\\
&- R(U,V,g(Y,W)X - g(X,W)Y,Z) - R(U,V,W,g(Y,Z)X - g(X,Z)Y)\\
&= -g(Y,U)R(X,V,W,Z) + g(X,U)R(Y,V,W,Z) - g(Y,V)R(U,X,W,Z)\\
&+ g(X,V)R(U,Y,W,Z) - g(Y,W)R(U,V,X,Z) + g(X,W)R(U,V,Y,Z)\\
&- g(Y,Z)R(U,V,W,X) + g(X,Z)R(U,V,W,Y)\\
&= -g(Y,U)g(R(X,V)W,Z) + g(X,U)g(R(Y,V)W,Z) - g(Y,V)g(R(U,X)W,Z)\\
&+ g(X,V)g(R(U,Y)W,Z) - g(Y,W)g(R(U,V)X,Z) + g(X,W)g(R(U,V)Y,Z)\\
&- g(Y,Z)g(R(U,V)W,X) + g(X,Z)g(R(U,V)W,Y)
\end{aligned} \tag{3.1.15}$$

olur. (3.1.13) kullanılır ve ifade düzenlenirse,

$$Q(g,R)(U,V,W,Z;X,Y) = \frac{1}{2}Q(g,R^{*})(U,V,W,Z;X,Y) \tag{3.1.16}$$

olur. Böylece, eğer M pseudosimetrik ise, bu durumda (3.1.14) ve (3.1.16) dan $S(TM)$ pseudosimetriktir. Tersi (3.1.14) ve (3.1.16) den açıktır. $\square$

M ve $S(TM)$ nin tamamen umbilik olması durumunda aşağıdaki teorem verilebilir:

Teorem 3.1.3. M, semi-Öklidyen uzayın pseudosimetrik lightlike hiperyüzeyi olsun. Eğer M ve $S(TM)$ tamamen umbilik ise M bir semi-simetrik lightlike hiperyüzeydir.

İspat. M, semi-Öklidyen uzayın pseudosimetrik lightlike hiperyüzeyi yani, $R \cdot R = L_R Q(g, R)$ olsun. Böylece $X_2, X_3, X_4, X, Y \in \Gamma(TM)$ ve $X_1 = \xi \in \Gamma(RadTM)$ için (2.2.5) ifadesinde (2.4.15) kullanılarak,

$$\begin{aligned}
&(R \cdot R)(\xi, X_2, X_3, X_4; X, Y)\\
&= -R(R(X,Y)\xi, X_2, X_3, X_4) - R(\xi, R(X,Y)X_2, X_3, X_4)\\
&- R(\xi, X_2, R(X,Y)X_3, X_4) - R(\xi, X_2, X_3, R(X,Y)X_4)
\end{aligned}$$

olur. Burada Gauss denklemi göz önüne alınırsa,

$$\begin{aligned}
&(R \cdot R)(\xi, X_2, X_3, X_4; X, Y)\\
&= -R(B(Y,\xi)A_N X - B(X,\xi)A_N Y, X_2, X_3, X_4) - R(\xi, B(Y, X_2)A_N X\\
&- B(X, X_2)A_N Y, X_3, X_4) - R(\xi, X_2, B(Y, X_3)A_N X - B(X, X_3)A_N Y, X_4\\
&- R(\xi, X_2, X_3, B(Y, X_4)A_N X - B(X, X_4)A_N Y)
\end{aligned}$$

elde edilir. Bu ifade düzenlenirse,

$$\begin{aligned}
&(R \cdot R)(\xi, X_2, X_3, X_4; X, Y)\\
&= -B(Y,\xi)R(A_N X, X_2, X_3, X_4) + B(X,\xi)R(A_N Y, X_2, X_3, X_4)\\
&- B(Y, X_2)R(\xi, A_N X, X_3, X_4 + B(X, X_2)R(\xi, A_N Y, X_3, X_4)\\
&- B(Y, X_3)R(\xi, X_2, A_N X, X_4) + B(X, X_3)R(\xi, X_2, A_N Y, X_4)\\
&- B(Y, X_4)R(\xi, X_2, X_3, A_N X) + B(X, X_4)R(\xi, X_2, X_3, A_N Y)\\
&= -B(Y, X_2)g(R(\xi, A_N X)X_3, X_4) + B(X, X_2)g(R(\xi, A_N Y)X_3, X_4)\\
&- B(Y, X_3)g(R(\xi, X_2)A_N X, X_4) + B(X, X_3)g(R(\xi, X_2)A_N Y, X_4)\\
&- B(Y, X_4)g(R(\xi, X_2)X_3, A_N X) + B(X, X_4)g(R(\xi, X_2)X_3, A_N Y)
\end{aligned}$$

olur. Burada, tekrar Gauss denklemi kullanılırsa,

$$(R \cdot R)(\xi, X_2, X_3, X_4; X, Y)$$

$$
\begin{aligned}
&= -B(Y, X_2)[B(A_N X, X_3)g(A_N\xi, X_4) - g(A_N^2 X, X_4)B(\xi, X_3)] \\
&+ B(X, X_2)[B(A_N Y, X_3)g(A_N\xi, X_4) - g(A_N^2 Y, X_4)B(\xi, X_3)] \\
&- B(Y, X_3)[B(X_2, A_N X)g(A_N\xi, X_4) - B(\xi, A_N X)g(A_N X_2, X_4)] \\
&+ B(X, X_3)[B(X_2, A_N Y)g(A_N\xi, X_4) - B(\xi, A_N Y)g(A_N X_2, X_4)] \\
&- B(Y, X_4)[g(A_N\xi, A_N X)B(X_2, X_3) - g(A_N X_2, A_N X)B(\xi, X_3)] \\
&+ B(X, X_4)[g(A_N\xi, A_N Y)B(X_2, X_3) - g(A_N X_2, A_N Y)B(\xi, X_3)]
\end{aligned}
$$

bulunur. Bu ifade düzenlenirse,

$$
\begin{aligned}
&(R \cdot R)(\xi, X_2, X_3, X_4; X, Y) \\
&= -B(Y, X_2)B(A_N X, X_3)g(A_N\xi, X_4) + B(X, X_2)B(A_N Y, X_3)g(A_N\xi, X_4) \\
&- B(Y, X_3)B(X_2, A_N X)g(A_N\xi, X_4) + B(X, X_3)B(X_2, A_N Y)g(A_N\xi, X_4) \\
&- B(Y, X_4)g(A_N\xi, A_N X)B(X_2, X_3) + B(X, X_4)g(A_N\xi, A_N Y)B(X_2, X_3)
\end{aligned}
$$

olur. M ve $S(TM)$ tamamen umbilik olduğundan $X, Y \in \Gamma(TM)$ için $B(X, Y) = \rho g(X, Y)$ ve $C(X, Y) = \lambda g(X, Y)$ dir. Bu durumda, ifadeler yerine yazılırsa,

$$
\begin{aligned}
&(R \cdot R)(\xi, X_2, X_3, X_4; X, Y) \\
&= -\rho g(Y, X_2)\rho g(A_N X, X_3)C(\xi, X_4) + \rho g(X, X_2)\rho g(A_N Y, X_3)C(\xi, X_4) \\
&- \rho g(Y, X_3)\rho g(X_2, A_N X)C(\xi, X_4) + \rho g(X, X_3)\rho g(X_2, A_N Y)C(\xi, X_4) \\
&- \rho g(Y, X_4)C(\xi, A_N X)\rho g(X_2, X_3) + \rho g(X, X_4)C(\xi, A_N Y)\rho g(X_2, X_3)
\end{aligned}
$$

veya

$$
\begin{aligned}
&(R \cdot R)(\xi, X_2, X_3, X_4; X, Y) \\
&= -\rho g(Y, X_2)\rho g(A_N X, X_3)\lambda g(\xi, X_4) + \rho g(X, X_2)\rho g(A_N Y, X_3)\lambda g(\xi, X_4) \\
&- \rho g(Y, X_3)\rho g(X_2, A_N X)\lambda g(\xi, X_4) + \rho g(X, X_3)\rho g(X_2, A_N Y)\lambda g(\xi, X_4) \\
&- \rho g(Y, X_4)\lambda g(\xi, A_N X)\rho g(X_2, X_3) + \rho g(X, X_4)\lambda g(\xi, A_N Y)\rho g(X_2, X_3)
\end{aligned}
$$

elde edilir. M, pseudosimetrik kabul edildiğinden,

$$
\begin{aligned}
&(R \cdot R)(\xi, X_2, X_3, X_4; X, Y) \\
&= \rho^2 \lambda Q(g, R)(\xi, X_2, X_3, X_4; X, Y) \\
&= 0
\end{aligned}
$$

bulunur. Benzer şekilde

$$
\begin{aligned}
(R\cdot R)(X_1,\xi,X_3,X_4;X,Y) &= 0, (R\cdot R)(X_1,X_2,\xi,X_4;X,Y)=0,\\
(R\cdot R)(X_1,X_2,X_3,\xi;X,Y) &= 0, (R\cdot R)(X_1,X_2,X_3,X_4;\xi,Y)=0,\\
(R\cdot R)(X_1,X_2,X_3,X_4;X,\xi) &= 0
\end{aligned}
$$

ve

$$
\begin{aligned}
Q(g,R)(X_1,\xi,X_3,X_4;X,Y) &= 0, Q(g,R)(X_1,X_2,\xi,X_4;X,Y)=0,\\
Q(g,R)(X_1,X_2,X_3,\xi;X,Y) &= 0, Q(g,R)(X_1,X_2,X_3,X_4;\xi,Y)=0,\\
Q(g,R)(X_1,X_2,X_3,X_4;X,\xi) &= 0
\end{aligned}
$$

dır. Diğer taraftan, $X_1, X_2, X_3, X_4, X, Y \in \Gamma(S(TM))$ olduğundan $X_1 = PX_1$ alınır ve benzer işlemler yapılırsa,

$$
\begin{aligned}
&(R\cdot R)(PX_1,X_2,X_3,X_4;X,Y)\\
&= -B(Y,PX_1)[g(A_N^2X,X_4)B(X_2,X_3) - B(A_NX,X_3)g(A_NX_2,X_4)]\\
&+ B(X,PX_1)[g(A_N^2Y,X_4)B(X_2,X_3) - B(A_NY,X_3)g(A_NX_2,X_4)]\\
&- B(Y,X_2)[B(A_NX,X_3)g(A_NPX_1,X_4) - g(A_N^2X,X_4)B(PX_1,X_3)]\\
&+ B(X,X_2)[B(A_NY,X_3)g(A_NPX_1,X_4) - g(A_N^2Y,X_4)B(PX_1,X_3)]\\
&- B(Y,X_3)[B(X_2,A_NX)g(A_NPX_1,X_4) - B(PX_1,A_NX)g(A_NX_2,X_4)]\\
&+ B(X,X_3)[B(X_2,A_NY)g(A_NPX_1,X_4) - B(PX_1,A_NY)g(A_NX_2,X_4)]\\
&- B(Y,X_4)[g(A_NPX_1,A_NX)B(X_2,X_3) - g(A_NX_2,A_NX)B(PX_1,X_3)]\\
&+ B(X,X_4)[g(A_NPX_1,A_NY)B(X_2,X_3) - g(A_NX_2,A_NY)B(PX_1,X_3)]
\end{aligned}
$$

olur, burada P, $\Gamma(S(TM))$ üzerinde $\Gamma(TM)$ nin projeksiyon morfizmidir. M ve $S(TM)$ tamamen umbilik olduğundan yukarıdaki denklem

$$
\begin{aligned}
&(R\cdot R)(PX_1,X_2,X_3,X_4;X,Y)\\
&= -\rho g(Y,PX_1)[C(A_NX,X_4)\rho g(X_2,X_3) - \rho C(X,X_3)g(A_NX_2,X_4)]\\
&+ \rho g(X,PX_1)[C(A_NY,X_4)\rho g(X_2,X_3) - \rho C(Y,X_3)g(A_NX_2,X_4)]
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&- \rho g(Y, X_2)[\rho C(X, X_3)g(A_N PX_1, X_4) - C(A_N X, X_4)\rho g(PX_1, X_3)]\\
&+ \rho g(X, X_2)[\rho C(Y, X_3)g(A_N PX_1, X_4) - C(A_N Y, X_4)\rho g(PX_1, X_3)]\\
&- \rho g(Y, X_3)[\rho C(X_2, X)g(A_N PX_1, X_4) - \rho C(PX_1, X)g(A_N X_2, X_4)]\\
&+ \rho g(X, X_3)[\rho C(X_2, Y)g(A_N PX_1, X_4) - \rho C(PX_1, Y)g(A_N X_2, X_4)]\\
&- \rho g(Y, X_4)[C(A_N PX_1, X)\rho g(X_2, X_3) - C(A_N X_2, X)\rho g(PX_1, X_3)]\\
&+ \rho g(X, X_4)[C(A_N PX_1, Y)\rho g(X_2, X_3) - C(A_N X_2, Y)\rho g(PX_1, X_3)]\\
&= -\rho g(Y, PX_1)[\lambda^2 g(X, X_4)\rho g(X_2, X_3) - \rho\lambda g(X, X_3)\lambda g(X_2, X_4)]\\
&+ \rho g(X, PX_1)[\lambda^2 g(Y, X_4)\rho g(X_2, X_3) - \rho\lambda g(Y, X_3)\lambda g(X_2, X_4)]\\
&- \rho g(Y, X_2)[\rho\lambda g(X, X_3)\lambda g(PX_1, X_4) - \lambda^2 g(X, X_4)\rho g(PX_1, X_3)]\\
&+ \rho g(X, X_2)[\rho\lambda g(Y, X_3)\lambda g(PX_1, X_4) - \rho\lambda^2 g(Y, X_4)\rho g(PX_1, X_3)]\\
&- \rho g(Y, X_3)[\rho\lambda g(X_2, X)\lambda g(PX_1, X_4) - \rho\lambda g(PX_1, X)\lambda g(X_2, X_4)]\\
&+ \rho g(X, X_3)[\rho\lambda g(X_2, Y)\lambda g(PX_1, X_4) - \rho\lambda g(PX_1, Y)\lambda g(X_2, X_4)]\\
&- \rho g(Y, X_4)[\lambda^2 g(PX_1, X)\rho g(X_2, X_3) - \lambda^2 g(X_2, X)\rho g(PX_1, X_3)]\\
&+ \rho g(X, X_4)[\lambda^2 g(PX_1, Y)\rho g(X_2, X_3) - \lambda^2 g(X_2, Y)\rho g(PX_1, X_3)]\\
&= \rho^2\lambda^2\{-g(Y, PX_1)[g(X, X_4)g(X_2, X_3) - g(X, X_3)g(X_2, X_4)]\\
&+ g(X, PX_1)[g(Y, X_4)g(X_2, X_3) - g(Y, X_3)g(X_2, X_4)]\\
&- g(Y, X_2)[g(X, X_3)g(PX_1, X_4) - g(X, X_4)g(PX_1, X_3)]\\
&+ g(X, X_2)[g(Y, X_3)g(PX_1, X_4) - g(Y, X_4)g(PX_1, X_3)]\\
&- g(Y, X_3)[g(X_2, X)g(PX_1, X_4) - g(PX_1, X)g(X_2, X_4)]\\
&+ g(X, X_3)[g(X_2, Y)g(PX_1, X_4) - g(PX_1, Y)g(X_2, X_4)]\\
&- g(Y, X_4)[g(PX_1, X)g(X_2, X_3) - g(X_2, X)g(PX_1, X_3)]\\
&+ g(X, X_4)[g(PX_1, Y)g(X_2, X_3) - g(X_2, Y)g(PX_1, X_3)]\}
\end{aligned}
$$

olur. Burada ise M, pseudosimetrik kabul edildiğinden

$$
\begin{aligned}
&(R \cdot R)(PX_1, X_2, X_3, X_4; X, Y)\\
&= \rho^2\lambda^2 Q(g, R)(PX_1, X_2, X_3, X_4; X, Y)\\
&= 0
\end{aligned}
$$

bulunur. Benzer şekilde

$$\begin{aligned}
(R\cdot R)(X_1,PX_2,X_3,X_4;X,Y) &= 0, (R\cdot R)(X_1,X_2,PX_3,X_4;X,Y)=0,\\
(R\cdot R)(X_1,X_2,X_3,PX_4;X,Y) &= 0, (R\cdot R)(X_1,X_2,X_3,X_4;PX,Y)=0,\\
(R\cdot R)(X_1,X_2,X_3,X_4;X,PY) &= 0
\end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned}
Q(g,R)(X_1,PX_2,X_3,X_4;X,Y) &= 0, Q(g,R)(X_1,X_2,PX_3,X_4;X,Y)=0,\\
Q(g,R)(X_1,X_2,X_3,PX_4;X,Y) &= 0, Q(g,R)(X_1,X_2,X_3,X_4;PX,Y)=0,\\
Q(g,R)(X_1,X_2,X_3,X_4;X,PY) &= 0
\end{aligned}$$

dır. Böylece ispat tamamlanır. □

Bu teoremde görülmektedir ki, bir pseudosimetrik lightlike hiperyüzeyin tamamen umbilik olması bu tür hiperyüzeyleri daha özel olan semi-simetrik lightlike hiperyüzeyler sınıfına dahil etmektedir.

Teorem 3.1.4. *M bir semi-Öklidyen uzayın pseudosimetrik lightlike hiperyüzeyi ve $A_N\xi$ null olmayan vektör alanı olsun. Bu durumda, ya M tamamen jeodeziktir ya da $A^*_\xi X_2$ ve $A_N\xi$ lineer bağımlıdır.*

İspat. Kabul edelim ki M, bir semi-Öklidyen uzay üzerinde pseudosimetrik lightlike hiperyüzey olsun. (2.2.5) ve (2.2.6) da (2.4.15) kullanılır ve $X_1=\xi\in\Gamma(RadTM)$ alınırsa,

$$\begin{aligned}
&(R\cdot R)(\xi,X_2,X_3,X_4;X,Y)\\
&= -B(Y,X_2)B(A_NX,X_3)g(A_N\xi,X_4)+B(X,X_2)B(A_NY,X_3)g(A_N\xi,X_4)\\
&- B(Y,X_3)B(X_2,A_NX)g(A_N\xi,X_4)+B(X,X_3)B(X_2,A_NY)g(A_N\xi,X_4)\\
&- B(Y,X_4)g(A_N\xi,A_NX)B(X_2,X_3)+B(X,X_4)g(A_N\xi,A_NY)B(X_2,X_3)
\end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned}
&Q(g,R)(\xi,X_2,X_3,X_4;X,Y)\\
&= -g(Y,X_2)B(X,X_3)g(A_N\xi,X_4)+g(X,X_2)B(Y,X_3)g(A_N\xi,X_4)\\
&- g(Y,X_3)B(X_2,X)g(A_N\xi,X_4)+g(X,X_3)B(X_2,Y)g(A_N\xi,X_4)\\
&- g(Y,X_4)g(A_N\xi,X)B(X_2,X_3)+g(X,X_4)g(A_N\xi,Y)B(X_2,X_3).
\end{aligned}$$

olduğu görülür. Bu durumda, $Y = \xi$ için $Q(g,R)(\xi, X_2, X_3, X_4; X, \xi) = 0$ dır ve

$$
\begin{aligned}
&(R \cdot R)(\xi, X_2, X_3, X_4; X, \xi) \\
&= B(X, X_2)B(A_N\xi, X_3)g(A_N\xi, X_4) + B(X, X_3)B(X_2, A_N\xi)g(A_N\xi, X_4) \\
&+ B(X, X_4)g(A_N\xi, A_N\xi)B(X_2, X_3) \qquad (3.1.17)
\end{aligned}
$$

bulunur. Ayrıca, M pseudosimetrik lightlike hiperyüzey olduğu için $R{\cdot}R = L_R Q(g,R)$ dir. Bu durumda, (3.1.17) ifadesi sıfıra eşittir. Eğer $X_2 = X_3 = X_4$ alınırsa, (3.1.17) ifadesi

$$
\begin{aligned}
&(R \cdot R)(\xi, X_2, X_3, X_4; X, \xi) \\
&= B(X, X_2)B(A_N\xi, X_2)g(A_N\xi, X_2) + B(X, X_2)B(X_2, A_N\xi)g(A_N\xi, X_2) \\
&+ B(X, X_2)g(A_N\xi, A_N\xi)B(X_2, X_2) \\
&= 0
\end{aligned}
$$

olur. Böylece,

$$B(X, X_2)[2B(A_N\xi, X_2)g(A_N\xi, X_2) + g(A_N\xi, A_N\xi)B(X_2, X_2)] = 0$$

elde edilir ve

$$B(X, X_2)[2g(A_N\xi, A^*_\xi X_2)g(A_N\xi, X_2) + g(A_N\xi, A_N\xi)g(A^*_\xi X_2, X_2)] = 0$$

bulunur. Buna göre, ya M tamamen jeodeziktir ya da

$$A^*_\xi X_2 = -\frac{2g(A_N\xi, A^*_\xi X_2)}{g(A_N\xi, A_N\xi)} A_N\xi$$

dır. Bu ise ispatı tamamlar. □

Teorem 3.1.5. *M bir semi-Öklidyen uzayın pseudosimetrik lightlike hiperyüzeyi olsun. Eğer $\forall X \in \Gamma(TM)$, $\xi \in \Gamma(RadTM)$ için $S(\xi, X) = 0$ ve $A_N\xi$ null olmayan vektör alanı ise, M tamamen jeodeziktir, burada S Ricci tensörüdür.*

İspat. Kabul edelim ki M pseudosimetrik lightlike hiperyüzey olsun. Bu durumda, $X_1, X_2, X_3, X_4, X, Y \in \Gamma(TM)$ için,

$$(R \cdot R)(X_1, X_2, X_3, X_4; X, Y) = \lambda Q(g,R)(X_1, X_2, X_3, X_4; X, Y),$$

dir. Buradan, $X_2 = \xi$ için (2.2.5) ve (2.2.6) ifadelerinde (2.4.15) kullanılarak,

$$\begin{aligned}
B(Y,X_1)B(A_NX,X_3)g(A_N\xi,X_4) - B(X,X_1)B(A_NY,X_3)g(A_N\xi,X_4)\\
+B(Y,X_3)B(X_1,A_NX)g(A_N\xi,X_4) - B(X,X_3)B(X_1,A_NY)g(A_N\xi,X_4)\\
+B(Y,X_4)B(X_1,X_3)g(A_N\xi,A_NX) - B(X,X_4)B(X_1,X_3)g(A_N\xi,A_NY)\\
-\lambda[g(Y,X_1)B(X,X_3)g(A_N\xi,X_4) - g(X,X_1)B(Y,X_3)g(A_N\xi,X_4)\\
+g(Y,X_3)B(X_1,X)g(A_N\xi,X_4) - g(X,X_3)B(X_1,Y)g(A_N\xi,X_4)\\
+g(Y,X_4)B(X_1,X_3)g(A_N\xi,X) - g(X,X_4)B(X_1,X_3)g(A_N\xi,Y)] = 0
\end{aligned}$$

elde edilir. $X = \xi$ için,

$$\begin{aligned}
B(Y,X_1)B(A_N\xi,X_3)g(A_N\xi,X_4) + B(Y,X_3)B(X_1,A_N\xi)g(A_N\xi,X_4)\\
+B(Y,X_4)B(X_1,X_3)g(A_N\xi,A_N\xi) = 0 \quad (3.1.18)
\end{aligned}$$

bulunur. Hipotezden $S(\xi,X) = B(X,A_N\xi) = 0$ için (3.1.18) denklemi,

$$B(Y,X_4)B(X_1,X_3)g(A_N\xi,A_N\xi) = 0$$

ifadesine denktir. $A_N\xi$, null olmayan vektör alanı olduğundan, $Y = X_1$ ve $X_4 = X_3$ alınarak, $B(X_1,X_3) = 0$ elde edilir ki, bu da M nin tamamen jeodezik olduğunu gösterir. □

$(\bar{M},\bar{g})$, $(m+2)$-boyutlu bir semi-Riemannian manifold olsun. Eğer $\bar{S} = \bar{k}\bar{g}$ ise $\bar{M}$ manifolduna *Einstein manifold* denir, burada $\bar{k}$ sabittir ve S Ricci tensörüdür. Üstelik, $\bar{M}$ manifoldunun Einstein olması için gerek ve yeter şart $\bar{k} = \bar{r}/(m+2)$ olmasıdır, burada $\bar{r}$, $\bar{M}$ manifoldunun skaler eğriliğidir [30]. Geometrik olarak bir lightlike Einstein hiperyüzey kavramı, skaler eğrilik kavramını içermektedir. Diğer taraftan, Duggal'in çalışmalarından biliniyor ki [45], lightlike geometride skaler eğrilik kavramı ancak Ricci tensörünün simetrik olması ile geometrik bir anlama kavuşmaktadır. Böylece, lightlike Einstein hiperyüzey kavramından bahsedildiğinde hiperyüzeyin Ricci simetrik olduğu kabul edilmektedir.

Bir lightlike Einstein hiperyüzeyi için aşağıdaki sonuç verilebilir:

Sonuç 3.1.2. M, bir semi-Öklidyen uzayın lightlike Einstein hiperyüzeyi olsun. Eğer $R\cdot R = Q(S,R)$ ise bu durumda, M bir pseudosimetrik lightlike hiperyüzeydir, burada S, M hiperyüzeyinin Ricci tensörüdür.

İspat. Kabul edelim ki, M bir semi-Öklidyen uzayın lightlike Einstein hiperyüzeyi olsun. Bu durumda, $X_1, X_2, X_3, X_4, X, Y \in \Gamma(TM)$ için

$$
\begin{aligned}
&Q(S,R)(X_1,X_2,X_3,X_4;X,Y)\\
&= -R((X\wedge_S Y)X_1,X_2,X_3,X_4) - R(X_1,(X\wedge_S Y)X_2,X_3,X_4)\\
&- R(X_1,X_2,(X\wedge_S Y)X_3,X_4) - R(X_1,X_2,X_3,(X\wedge_S Y)X_4)\\
&= -R(S(Y,X_1)X - S(X,X_1)Y,X_2,X_3,X_4) - R(X_1,S(Y,X_2)X\\
&- S(X,X_2)Y,X_3,X_4) - R(X_1,X_2,S(Y,X_3)X - S(X,X_3),X_4)\\
&- R(X_1,X_2,X_3,S(Y,X_4)X - S(X,X_4))
\end{aligned}
$$

bulunur. R, lineer olduğundan,

$$
\begin{aligned}
&Q(S,R)(X_1,X_2,X_3,X_4;X,Y)\\
&= -S(Y,X_1)R(X,X_2,X_3,X_4) + S(X,X_1)R(Y,X_2,X_3,X_4)\\
&- S(Y,X_2)R(X_1,X,X_3,X_4) + S(X,X_2)R(X_1,Y,X_3,X_4)\\
&- S(Y,X_3)R(X_1,X_2,X,X_4) + S(X,X_3)R(X_1,X_2,Y,X_4)\\
&- S(Y,X_4)R(X_1,X_2,X_3,X) + S(X,X_4)R(X_1,X_2,X_3,Y)
\end{aligned}
\tag{3.1.19}
$$

elde edilir. Hipotezden,

$$(R\cdot R)(X_1,X_2,X_3,X_4;X,Y) = Q(S,R)(X_1,X_2,X_3,X_4;X,Y)$$

dır. Burada (3.1.19) kullanılırsa,

$$
\begin{aligned}
&(R\cdot R)(X_1,X_2,X_3,X_4;X,Y)\\
&= -\lambda g(Y,X_1)R(X,X_2,X_3,X_4) + \lambda g(X,X_1)R(Y,X_2,X_3,X_4)\\
&- \lambda g(Y,X_2)R(X_1,X,X_3,X_4) + \lambda g(X,X_2)R(X_1,Y,X_3,X_4)\\
&- \lambda g(Y,X_3)R(X_1,X_2,X,X_4) + \lambda g(X,X_3)R(X_1,X_2,Y,X_4)\\
&- \lambda g(Y,X_4)R(X_1,X_2,X_3,X) + \lambda g(X,X_4)R(X_1,X_2,X_3,Y)
\end{aligned}
$$

olur. Bu ise

$$(R\cdot R)(X_1,X_2,X_3,X_4;X,Y) = \lambda Q(g,R)(X_1,X_2,X_3,X_4;X,Y)$$

demektir. Böylece ispat tamamlanır. $\square$

3.2 Semi-Öklidyen Uzaylarda Pseudoparalel Lightlike Hiperyüzeyler

Bu altbölümde, pseudoparalel lightlike hiperyüzey olma şartı verilmekte, bir pseudoparalel lightlike hiperyüzeyin karakterizasyonu elde edilmekte ve semi-paralel olma şartları da elde edilmektedir.

Tanım 3.2.1. M, bir semi-Öklidyen uzayın bir lightlike hiperyüzeyi olsun. Eğer M hiperyüzeyinin her noktasında $R \cdot h$ ve $Q(g,h)$ tensörleri lineer bağımlı ise M hiperyüzeyine *pseudoparalel lightlike hiperyüzey* denir, yani M nin pseudoparalel lightlike hiperyüzey olması için gerek ve yeter şart $U_h = \{p \in M | Q(g,h) \neq 0\}$ kümesi üzerinde $R \cdot h = L_h Q(g,h)$ olmasıdır, burada L_h, U_h üzerinde fonksiyondur.

Şimdi, M lightlike hiperyüzeyinin pseudoparalel olma durumu için aşağıdaki teoremi verelim:

Teorem 3.2.1. M, bir semi-Öklidyen uzayın bir lightlike hiperyüzeyi ve A_N, B ye göre simetrik olsun. Eğer τ-paralel ve $B(X,Y)A^*_\xi A_N Z = g(X,Y)A^*_\xi Z$ ise bu durumda, M pseudoparalel lightlike hiperyüzeydir, öyle ki $L_h = 1$ dir, burada $X, Y, Z \in \Gamma(TM)$ ve τ, M üzerinde 1-formdur.

İspat. $X_1, X_2, X, Y \in \Gamma(TM)$ için Gauss denklemi kullanılırsa,

$$\begin{aligned}
&(R(X,Y) \cdot h)(X_1, X_2) \\
&= R^\perp(X,Y)h(X_1,X_2) - h(R(X,Y)X_1, X_2) - h(X_1, R(X,Y)X_2) \\
&= [(\nabla_X \tau)Y - (\nabla_Y \tau)X]h(X_1,X_2) - h(X, A_{h(X_1,X_2)}Y) \\
&+ h(Y, A_{h(X_1,X_2)}X) - B(Y,X_1)B(A_N X, X_2)N \\
&+ B(X,X_1)B(A_N Y, X_2)N - B(Y,X_2)B(X_1, A_N X)N \\
&+ B(X,X_2)B(X_1, A_N Y)N
\end{aligned}$$

olur. Burada, $h(X_1,X_2) = B(X_1,X_2)N$ olduğundan

$$\begin{aligned}
&(R(X,Y) \cdot h)(X_1, X_2) \\
&= [(\nabla_X \tau)Y - (\nabla_Y \tau)X]B(X_1,X_2)N - B(X, A_{B(X_1,X_2)N}Y)N
\end{aligned}$$

$$+ B(Y, A_{B(X_1,X_2)N}X)N - B(Y, X_1)B(A_NX, X_2)N$$
$$+ B(X, X_1)B(A_NY, X_2)N - B(Y, X_2)B(X_1, A_NX)N$$
$$+ B(X, X_2)B(X_1, A_NY)N$$

bulunur. Bu ifade düzenlenirse,

$$\begin{aligned}
&(R(X,Y)\cdot h)(X_1,X_2)\\
&= [(\nabla_X\tau)Y - (\nabla_Y\tau)X - B(X, A_NY) + B(Y, A_NX)]B(X_1, X_2)N\\
&- B(Y, X_1)B(A_NX, X_2)N + B(X, X_1)B(A_NY, X_2)N\\
&- B(Y, X_2)B(X_1, A_NX)N + B(X, X_2)B(X_1, A_NY)N \qquad (3.2.1)
\end{aligned}$$

dır. Hipotezden ve (3.1.2) den

$$\begin{aligned}
(R(X,Y)\cdot h)(X_1,X_2) &= -B(Y,X_1)B(A_NX,X_2)N + B(X,X_1)B(A_NY,X_2)N\\
&- B(Y,X_2)B(X_1,A_NX)N + B(X,X_2)B(X_1,A_NY)N\\
&= -g(Y,X_1)B(X,X_2)N + g(X,X_1)B(Y,X_2)N\\
&- g(Y,X_2)B(X_1,X)N + g(X,X_2)B(X_1,Y)N\\
&= Q(g,h)(X_1,X_2;X,Y),
\end{aligned}$$

elde edilir. Bu ise ispatı tamamlar. □

Burada not edelim ki, Teorem 3.2.1 de verilen şartlar altındaki lightlike hiperyüzeyde Ricci tensörü simetriktir.

Tanım 3.2.2. $M \subset E_s^{n+1}$, $g(A_\xi^*X, Y) = h(X, Y)$ olmak üzere h ikinci temel forma sahip bir hiperyüzey olsun. Eğer,

$$(R(X,Y)\cdot h)(U,V) = 0, \ \ \forall X,Y,U,V \in \Gamma(TM)$$

koşulu sağlanıyorsa, M hiperyüzeyine *semi-paraleldir* denir [18].

Teorem 3.2.2. M, bir semi-Öklidyen uzayın pseudoparalel lightlike hiperyüzeyi ve A_N, B formuna göre simetrik olsun. Eğer M ve $S(TM)$ tamamen umbilik ve τ-paralel ise, M bir semi-paralel lightlike hiperyüzeydir.

İspat. Kabul edelim ki M ve $S(TM)$ tamamen umbilik olsunlar. Bu durumda, $X_1, X_2, X, Y \in \Gamma(TM)$ için hipotezden,

$$\begin{aligned}(R(X,Y)\cdot h)(X_1,X_2) &= -B(Y,X_1)B(A_NX,X_2)N + B(X,X_1)B(A_NY,X_2)N \\ &- B(Y,X_2)B(X_1,A_NX)N + B(X,X_2)B(X_1,A_NY)N\end{aligned}$$

olur. M ve $S(TM)$ tamamen umbilik olduğundan

$$\begin{aligned}(R(X,Y)\cdot h)(X_1,X_2) &= -\rho g(Y,X_1)\rho\lambda g(X,X_2)N + \rho g(X,X_1)\rho\lambda g(Y,X_2)N \\ &- \rho g(Y,X_2)\rho\lambda g(X_1,X)N + \rho g(X,X_2)\rho\lambda(X_1,Y)N \\ &= \rho^2\lambda Q(g,h)(X_1,X_2;X,Y) \\ &= 0\end{aligned}$$

elde edilir ki bu da ispatı tamamlar. □

Aşağıdaki sonuçta, Ricci tensörünün simetrikliği ve τ nun paralelliği yerine $R^\perp = 0$ şartı alınmaktadır.

Sonuç 3.2.1. M, bir semi-Öklidyen uzayın bir pseudoparalel lightlike hiperyüzeyi olsun. Eğer M ve $S(TM)$ tamamen umbilik ve $R^\perp$ sıfır ise bu durumda, M bir semi-paralel lightlike hiperyüzeydir.

İspat. İspat (3.2.1) den açıktır. □

Teorem 3.2.3. M, bir semi-Öklidyen uzayın bir pseudoparalel lightlike hiperyüzeyi ve A_N, B ye göre simetrik olsun. Eğer τ-paralel ise bu durumda, ya M tamamen jeodeziktir ya da $B(A_N\xi, X_1) = 0$ dır.

İspat. Kabul edelim ki M pseudoparallel lightlike hiperyüzey, yani

$$(R(X,Y)\cdot h)(X_1,X_2) = \lambda Q(g,h)(X_1,X_2;X,Y)$$

olsun. Bu durumda, $X_1, X_2, X, Y \in \Gamma(TM)$ ve $\xi \in \Gamma(RadTM)$ için hipotezden,

$$\begin{aligned}&- B(Y,X_1)B(A_NX,X_2)N + B(X,X_1)B(A_NY,X_2)N \\ &- B(Y,X_2)B(X_1,A_NX)N + B(X,X_2)B(X_1,A_NY)N \\ &+ \lambda g(Y,X_1)B(X,X_2)N - \lambda g(X,X_1)B(Y,X_2)N \\ &+ \lambda g(Y,X_2)B(X_1,X)N - \lambda g(X,X_2)B(X_1,Y)N \\ &= 0 \qquad (3.2.2)\end{aligned}$$

olur. Böylece $Y = \xi$ için,

$$B(X, X_1)B(A_N\xi, X_2) + B(X, X_2)B(X_1, A_N\xi) = 0$$

bulunur. Buna göre $X_1 = X_2$ için $B(X, X_1)B(A_N\xi, X_1) = 0$ sonucuna ulaşılır. Bu ise ispatı tamamlar. □

Tanım 3.2.3. M, bir lightlike hiperyüzey ve $R^{\perp}$, $\nabla^{\perp}$ konneksiyonuna göre eğrilik tensör alanı olsun. Eğer $R^{\perp}$ sıfır ise M hiperyüzeyine *transversal flat* denir.

Sonuç 3.2.2. M, bir semi-Öklidyen uzayın pseudoparalel lightlike hiperyüzeyi olsun. Eğer M transversal flat ise bu durumda, ya M tamamen jeodeziktir ya da $B(A_N\xi, X_1) = 0$ dır.

İspat. İspat, Theorem 3.2.3 den açıktır. □

3.3 Semi-Öklidyen Uzaylarda Ricci-Pseudosimetrik Lightlike Hiperyüzeyler

Bu bölümde, Ricci-pseudosimetrik lightlike hiperyüzeyler incelenmekte ve bir örnek verilmektedir. Bir lightlike hiperyüzeyin Ricci semi-simetrik olması için yeter koşullar elde edilmekte ve Ricci-pseudosimetrik, Ricci semi-simetrik ve tamamen jeodezik lightlike hiperyüzeyler arasındaki ilişkiler incelenmektedir. Ayrıca, τ 1-formu üzerine konulan belirli koşullar altında bir lightlike hiperyüzeyin Ricci-genelleştirilmiş pseudoparalel lightlike hiperyüzey olma durumu elde edilmektedir.

Tanım 3.3.1. M, bir semi-Öklidyen uzayın bir lightlike hiperyüzeyi olsun. Eğer M hiperyüzeyinin her noktasında $R \cdot S$ ve $Q(g, S)$ tensörleri lineer bağımlı ise M hiperyüzeyine *Ricci-pseudosimetrik lightlike hiperyüzey* denir, yani M hiperyüzeyinin Ricci-pseudosimetrik lightlike hiperyüzey olması için gerek ve yeter şart $U_S = \{p \in M | Q(g, S) \neq 0\}$ kümesi üzerinde $R \cdot S = L_S Q(g, S)$ olmasıdır, burada L_S, U_S üzerinde fonksiyondur ve S, Ricci tensörüdür.

Öncelikle, Ricci-pseudosimetrik lightlike hiperyüzeyler için aşağıdaki örneği sunalım:

Örnek 3.3.1. *M, R_2^4 de*

$$x_1 = u_1 \sec u_3 \ , \ x_2 = u_1 \tan u_2 \ , \ x_3 = u_1 \sec u_2 \ , \ x_4 = u_1 \tan u_3,$$

ile verilen bir hiperyüzey olsun, burada R_2^4,

$$\{\partial x_1, \partial x_2, \partial x_3, \partial x_4\}$$

standart bazına göre $(-,-,+,+)$ işaretli semi-Öklidyen uzaydır ve $u_1 \neq 0$; $u_2, u_3 \in (0, \frac{\pi}{2})$ dir. Bu durumda TM,

$$\begin{aligned}
Z_1 &= \sec u_3 \partial x_1 + \tan u_2 \partial x_2 + \sec u_2 \partial x_3 + \tan u_3 \partial x_4 \\
Z_2 &= u_1 \sec^2 u_2 \partial x_2 + u_1 \sec u_2 \tan u_2 \partial x_3 \\
Z_3 &= u_1 \sec u_3 \tan u_3 \partial x_1 + u_1 \sec^2 u_3 \partial x_4
\end{aligned}$$

ile gerilir. Böylece, M hiperyüzeyinin indirgenmiş metriği

$$\begin{aligned}
\partial s^2 &= 0 \partial u_1^2 + u_1^2(-\sec^2 u_2 \partial u_2^2 + \sec^2 u_3 \partial u_3^2) \\
&= u_1^2(-\sec^2 u_2 \partial u_2^2 + \sec^2 u_3 \partial u_3^2)
\end{aligned}$$

olur. Bu durumda, M bir warped çarpım lightlike hiperyüzeyidir ve $RadTM = Sp\{Z_1\}$ ve $S(TM) = Sp\{Z_2, Z_3\}$ dür. Dolayısıyla, M hiperyüzeyinin lightlike transversal vektör demeti,

$$N = \frac{1}{2}(-\sec u_3 \partial x_1 + \tan u_2 \partial x_2 + \sec u_2 \partial x_3 - \tan u_3 \partial x_4).$$

ile verilir. Doğrudan hesaplamalarla,

$$\begin{aligned}
\bar{\nabla}_{Z_2} Z_2 &= 2u_1 \sec^2 u_2 \tan u_2 \partial x_2 + u_1 \sec u_2(\tan^2 u_2 + \sec^2 u_2)\partial x_3 \\
\bar{\nabla}_{Z_2} Z_3 &= 0 \\
\bar{\nabla}_{Z_3} Z_3 &= u_1 \sec u_3(\tan^2 u_3 + \sec^2 u_3)\partial x_1 + 2u_1 \sec^2 u_3 \tan u_3 \partial x_4.
\end{aligned}$$

elde edilir. Burada $\bar{\nabla}_{Z_2} Z_3 = 0$ ve benzer şekilde $\bar{\nabla}_{Z_3} Z_2 = 0$ olduğundan, $[Z_2, Z_3] = 0$ dır. Bu durumda, direkt hesaplamalarla $\eta(Z_2) = 0$, $\eta(Z_3) = 0$ ve $\eta([Z_2, Z_3]) = 0$ elde edilir. Böylece, $S(TM)$ integrallenebilirdir. Şimdi, Gauss formülü kullanılarak

$$B(Z_2, Z_2) = u_1 \sec^2 u_2 \ , \ B(Z_2, Z_3) = 0 \ , \ B(Z_3, Z_3) = -u_1 \sec^2 u_3.$$

elde edilir. Diğer taraftan,

$$\begin{aligned} \bar{\nabla}_{Z_2} N &= \frac{1}{2}(\sec^2 u_2 \partial x_2 + \sec u_2 \tan u_2 \partial x_3) \\ \bar{\nabla}_{Z_3} N &= \frac{1}{2}(-\sec u_3 \tan u_3 \partial x_1 - \sec^2 u_3 \partial x_4) \end{aligned}$$

bulunur. Böylece (2.4.7) Weingarten formülünden

$$A_N Z_2 = -\frac{1}{2u_1} Z_2 \ , \ A_N Z_3 = \frac{1}{2u_1} Z_3$$

elde edilir. Bu durumda, yukarıdaki denklemlerden

$$(R \cdot S)(Z_2, Z_3; Z_2, Z_3) = \alpha u_1 \sec^2 u_2 \sec^2 u_3,$$

ve

$$Q(g, S)(Z_2, Z_3; Z_2, Z_3) = u_1^2 \sec^2 u_2 \sec^2 u_3$$

elde edilir, burada $\alpha = \Sigma_{i=1}^{n} \varepsilon_i C(W_i, W_i)$ dır. Böylece

$$(R \cdot S)(Z_2, Z_3; Z_2, Z_3) = \frac{\alpha}{u_1} Q(g, S)(Z_2, Z_3; Z_2, Z_3)$$

elde edilir. $A_N Z_1 = 0$ kullanılarak,

$$\begin{aligned} (R \cdot S)(Z_1, Z_3; Z_2, Z_3) &= 0 \ , \ (R \cdot S)(Z_2, Z_1; Z_2, Z_3) = 0, \\ (R \cdot S)(Z_2, Z_3; Z_1, Z_3) &= 0 \ , \ (R \cdot S)(Z_2, Z_3; Z_2, Z_1) = 0, \end{aligned}$$

dır, burada $Z_1 \in \Gamma(RadTM)$ dir. Benzer şekilde

$$\begin{aligned} Q(g, S)(Z_1, Z_3; Z_2, Z_3) &= 0 \ , \ Q(g, S)(Z_2, Z_1; Z_2, Z_3) = 0, \\ Q(g, S)(Z_2, Z_3; Z_1, Z_3) &= 0 \ , \ Q(g, S)(Z_2, Z_3; Z_2, Z_1) = 0, \end{aligned}$$

bulunur, burada $Z_1 \in \Gamma(RadTM)$ dir. Böylece, M tamamen umbilik Ricci-pseudosimetrik lightlike hiperyüzeydir.

Aşağıdaki teoremde, bir lightlike hiperyüzeyin Ricci-pseudosimetrik lightlike hiperyüzey olması için yeter şartlar verilmektedir:

Teorem 3.3.1. M, bir semi-Öklidyen uzayın bir lightlike hiperyüzeyi ve A_N, B ye göre simetrik olsun. Eğer $B(X,Y)A_\xi^* A_N Z = g(X,Y)A_\xi^* Z$ ise bu durumda ,M Ricci-pseudosimetrik lightlike hiperyüzeydir, öyle ki $L_S = 1$ dir, burada $X, Y, Z \in \Gamma(TM)$ dir.

İspat. $X_1, X_2, X, Y \in \Gamma(TM)$ için

$$(R \cdot S)(X_1, X_2; X, Y) = -S(R(X,Y)X_1, X_2) - S(X_1, R(X,Y)X_2)$$

dır. Gauss denklemi kullanılırsa,

$$\begin{aligned}&(R \cdot S)(X_1, X_2; X, Y)\\ &= -B(Y, X_1)S(A_N X, X_2) + B(X, X_1)S(A_N Y, X_2)\\ &- B(Y, X_2)S(X_1, A_N X) + B(X, X_2)S(X_1, A_N Y)\end{aligned}$$

olur. Burada, Ricci tensörünün ifadesi yerine yazılırsa,

$$\begin{aligned}&(R \cdot S)(X_1, X_2; X, Y)\\ &= -B(Y, X_1)\{-\Sigma_{i=1}^n \varepsilon_i[B(A_N X, X_2)C(W_i, W_i) - B(X_2, A_N^2 X)]\}\\ &+ B(X, X_1)\{-\Sigma_{i=1}^n \varepsilon_i[B(A_N Y, X_2)C(W_i, W_i) - B(X_2, A_N^2 Y)]\}\\ &- B(Y, X_2)\{-\Sigma_{i=1}^n \varepsilon_i[B(X_1, A_N X)C(W_i, W_i) - B(A_N X, A_N X_1)]\}\\ &+ B(X, X_2)\{-\Sigma_{i=1}^n \varepsilon_i[B(X_1, A_N Y)C(W_i, W_i) - B(A_N Y, A_N X_1)]\}\end{aligned} \qquad (3.3.1)$$

elde edilir. Böylece, (3.3.1) ifadesinde (3.1.2) ve hipotez kullanılırsa,

$$\begin{aligned}(R \cdot S)(X_1, X_2; X, Y) &= \alpha g(Y, X_1)B(X, X_2) - g(Y, X_1)B(X_2, A_N X)\\ &- \alpha g(X, X_1)B(Y, X_2) + g(X, X_1)B(X_2, A_N Y)\\ &+ \alpha g(Y, X_2)B(X_1, X) - g(Y, X_2)B(X, A_N X_1)\\ &- \alpha g(X, X_2)B(X_1, Y) + g(X, X_2)B(Y, A_N X_1)\\ &= Q(g, S)(X_1, X_2; X, Y),\end{aligned} \qquad (3.3.2)$$

elde edilir, burada $\alpha = \Sigma_{i=1}^n \varepsilon_i C(W_i, W_i)$ dir. Böylece ispat tamamlanır. □

Teorem 3.1.3, Ricci-pseudosimetrik durumunda aşağıdaki formu almaktadır:

Teorem 3.3.2. *M, bir semi-Öklidyen uzayın bir Ricci-pseudosimetrik lightlike hiperyüzeyi olsun. Eğer M ve $S(TM)$ tamamen umbilik ise M, Ricci semi-simetrik lightlike hiperyüzeydir.*

İspat. Kabul edelim ki M ve $S(TM)$ tamamen umbilik olsun. Bu durumda, $X_1, X_2, X, Y \in \Gamma(TM)$ için (3.3.2) ifadesi,

$$\begin{aligned}(R \cdot S)(X_1, X_2; X, Y) &= \rho^2\lambda[\alpha g(Y, X_1)g(X, X_2) - \lambda g(Y, X_1)g(X_2, X) \\ &- \alpha g(X, X_1)g(Y, X_2) + \lambda g(X, X_1)g(X_2, Y) \\ &+ \alpha g(Y, X_2)g(X_1, X) - \lambda g(Y, X_2)g(X, X_1) \\ &- \alpha g(X, X_2)g(X_1, Y) + \lambda g(X, X_2)g(Y, X_1)] \\ &= \rho\lambda Q(g, S)(X_1, X_2; X, Y) \\ &= 0,\end{aligned}$$

olur. Bu ise ispatı tamamlar. □

Aşağıdaki teorem, Ricci-pseudosimetrik lightlike hiperyüzeyi karakterize etmektedir.

Teorem 3.3.3. M, bir semi-Öklidyen uzayın bir Ricci-pseudosimetrik lightlike hiperyüzeyi olsun. Bu durumda, ya M tamamen jeodeziktir ya da $B(A_N\xi, A_N\xi) = 0$ dır.

İspat. Hipotezden $X_1, X_2, X, Y \in \Gamma(TM)$ için,

$$(R \cdot S)(X_1, X_2; X, Y) = \lambda Q(g, S)(X_1, X_2; X, Y)$$

dır. Bu ifadenin açılımından,

$$\begin{aligned}&- B(Y, X_1)\{-\Sigma_{i=1}^n \varepsilon_i[B(A_N X, X_2)C(W_i, W_i) - B(X_2, A_N^2 X)]\} \\ &+ B(X, X_1)\{-\Sigma_{i=1}^n \varepsilon_i[B(A_N Y, X_2)C(W_i, W_i) - B(X_2, A_N^2 Y)]\} \\ &- B(Y, X_2)\{-\Sigma_{i=1}^n \varepsilon_i[B(X_1, A_N X)C(W_i, W_i) - B(A_N X, A_N X_1)]\} \\ &+ B(X, X_2)\{-\Sigma_{i=1}^n \varepsilon_i[B(X_1, A_N Y)C(W_i, W_i) - B(A_N Y, A_N X_1)]\} \\ &- \lambda g(Y, X_1)\{-\Sigma_{i=1}^n \varepsilon_i[B(X, X_2)C(W_i, W_i) - B(X_2, A_N X)]\} \\ &+ \lambda g(X, X_1)\{-\Sigma_{i=1}^n \varepsilon_i[B(Y, X_2)C(W_i, W_i) - B(X_2, A_N Y)]\} \\ &- \lambda g(Y, X_2)\{-\Sigma_{i=1}^n \varepsilon_i[B(X_1, X)C(W_i, W_i) - B(X, A_N X_1)]\} \\ &+ \lambda g(X, X_2)\{-\Sigma_{i=1}^n \varepsilon_i[B(X_1, Y)C(W_i, W_i) - B(Y, A_N X_1)]\} = 0\end{aligned}$$

elde edilir. Böylece $X = \xi \in \Gamma(RadTM)$ alınırsa,

$$\begin{aligned}&\alpha B(Y, X_1)B(A_N\xi, X_2) - B(Y, X_1)B(X_2, A_N^2\xi) + \alpha B(Y, X_2)B(X_1, A_N\xi) \\ &\qquad -B(Y, X_2)B(A_N\xi, A_N X_1) + \lambda g(Y, X_1)B(X_2, A_N\xi) = 0\end{aligned}$$

elde edilir. Bu durumda, $X_1 = \xi$ için $B(Y, X_2)B(A_N\xi, A_N\xi) = 0$ olur. Böylece ispat tamamlanır. $\square$

Bu altbölümün son kısmında, Ricci-genelleştirilmiş pseudoparalel lightlike hiperyüzeyler incelenerek, bu hiperyüzeyler için bir yeter koşul elde edilmektedir.

Tanım 3.3.2. M, bir semi-Öklidyen uzayının bir lightlike hiperyüzeyi olsun. Eğer M hiperyüzeyinin her noktasında $R \cdot h$ ve $Q(S, h)$ tensörleri lineer bağımlı ise M hiperyüzeyine *Ricci-genelleştirilmiş pseudoparalel lightlike hiperyüzey* denir, yani M hiperyüzeyinin Ricci-genelleştirilmiş pseudoparalel lightlike hiperyüzey olması için gerek ve yeter şart $U = \{p \in M | Q(S, h) \neq 0\}$ kümesi üzerinde $R \cdot h = LQ(S, h)$ olmasıdır, burada L, U üzerinde fonksiyondur.

Teorem 3.3.4. M, bir semi-Öklidyen uzayının lightlike hiperyüzeyi ve A_N, B ye göre simetrik olsun. Eğer τ-paralel ise, bu durumda $\lambda = -1$ olmak üzere M bir Ricci-genelleştirilmiş pseudoparalel lightlike hiperyüzeyidir.

İspat. $X_1, X_2, X, Y \in \Gamma(TM)$ için, Ricci tensörünün ifadesi ve Gauss denklemi kullanılırsa,

$$
\begin{aligned}
&Q(S, h)(X_1, X_2; X, Y) \\
&= \Sigma_{i=1}^{n} \varepsilon_i [B(Y, X_1)C(W_i, W_i) - B(X_1, A_N Y)]h(X, X_2) \\
&- \Sigma_{i=1}^{n} \varepsilon_i [B(X, X_1)C(W_i, W_i) - B(X_1, A_N X)]h(Y, X_2) \\
&+ \Sigma_{i=1}^{n} \varepsilon_i [B(Y, X_2)C(W_i, W_i) - B(X_2, A_N Y)]h(X_1, X) \\
&- \Sigma_{i=1}^{n} \varepsilon_i [B(X, X_2)C(W_i, W_i) - B(X_2, A_N X)]h(X_1, Y) \\
&= \alpha B(Y, X_1)B(X, X_2)N - B(X_1, A_N Y)B(X, X_2)N \\
&- \alpha B(X, X_1)B(Y, X_2)N + B(X_1, A_N X)B(Y, X_2)N \\
&+ \alpha B(Y, X_2)B(X_1, X)N - B(X_2, A_N Y)B(X_1, X)N \\
&- \alpha B(X, X_2)B(X_1, Y)N + B(X_2, A_N X)B(X_1, Y)N \\
&= -[-B(X_2, A_N X)B(X_1, Y)N + B(X_2, A_N Y)B(X_1, X)N \\
&- B(Y, X_2)B(X_1, A_N X)N + B(X, X_2)B(X_1, A_N Y)N] \\
&= -(R.h)(X_1, X_2; X, Y),
\end{aligned}
$$

elde edilir, burada $\alpha = \Sigma_{i=1}^{n} \varepsilon_i C(W_i, W_i)$ dir. Böylece ispat tamamlanır. $\square$

BÖLÜM 4

BELİRSİZ SASAKİYAN UZAY FORMLARDA PSEUDOSİMETRİK LİGHTLİKE HİPERYÜZEYLER

Bu bölüm, dört altbölümden oluşmaktadır. Birinci altbölümde, bir belirsiz Sasakiyan uzay formun lightlike hiperyüzeyinin pseudosimetri olma durumu incelenmektedir. Bu altbölümde, bir lightlike hiperyüzeyin önce pseudosimetri olması için en genel durum göz önüne alınmakta, sonrada kesit eğriliğinin 1 olması durumunda yeter şartlar elde edilmekte ve bu tür lightlike hiperyüzeyler karakterize edilmektedir. Ayrıca, lightlike hiperyüzey ile onun ekran distribüsyonunun pseudosimetri koşulları araştırılmaktadır. İkinci altbölümde, kesit eğriliği 1 olan bir belirsiz Sasakiyan uzay formun lightlike hiperyüzeyinin pseudoparalel olma şartları elde edilmektedir. Üçüncü altbölümde, eğriliği 1 olan bir belirsiz Sasakiyan uzay formun lightlike hiperyüzeyinin Ricci-pseudosimetrik olması için yeter şartlar elde edilmekte ve bu tür yüzeyler karakterize edilmektedir. Son altbölümde, Weyl pseudosimetri şartının, eğriliği 1 olan bir belirsiz Sasakiyan uzay formun lightlike hiperyüzeyinin geometrisi üzerine olan etkileri araştırılmaktadır. Ayrıca, lightlike Einstein hiperyüzeylerinin pseudosimetrikliğine bakılmaktadır.

4.1 Belirsiz Sasakiyan Uzay Formlarda Pseudosimetrik Lightlike Hiperyüzeyler

Bu altbölüm, lightlike hiperyüzeyler için pseudosimetrik şartı hatırlatılarak başlamaktadır.

Tanım 4.1.1. $\bar{M}(c)$, bir belirsiz Sasakiyan uzay form ve (M, g) de $\bar{M}(c)$ uzay formunun bir lightlike hiperyüzey olsun. Eğer M hiperyüzeynin her noktasında $R \cdot R$ ve $Q(g, R)$ tensörleri lineer bağımlı ise, M hiperyüzeyine *pseudosimetrik lightlike* *hiperyüzey* denir, yani M hiperyüzeyinin pseudosimetrik lightlike hiperyüzey olması için gerek ve yeter şart $U_R = \{p \in M | Q(g, R) \neq 0\}$ kümesi üzerinde $R \cdot R = L_R Q(g, R)$ olmasıdır, burada L_R, U_R üzerinde fonksiyondur.

Belirsiz Sasakiyan uzay formda, bir lightlike hiperyüzeyin ekran distribüsyonunun integrallenebilme durumu için aşağıdaki sonuç verilebilir:

Lemma 4.1.1. $\bar{M}(c)$, bir belirsiz Sasakiyan uzay form ve (M, g) de $\bar{M}(c)$ uzay formunun bir lightlike hiperyüzey olsun. Bu durumda, $S(TM)$ distribüsyonunun integrallenebilmesi için gerek ve yeter şart

$$g(\nabla^*_X \phi Y - \nabla^*_Y \phi X, \phi N) = g(u(Y)A_N X - u(X)A_N Y + \eta(X)Y - \eta(Y)X, \phi N)$$

dir, burada $X, Y \in \Gamma(S(TM))$ ve $N \in \Gamma(tr(TM))$ dır.

İspat. $X, Y \in \Gamma(S(TM))$ için

$$\bar{g}([X, Y], N) = \bar{g}(\bar{\nabla}_X Y - \bar{\nabla}_Y X, N) \tag{4.1.1}$$

olur. (4.1.1) denkleminde

$$\bar{g}([X, Y], N) = \bar{g}(\bar{\phi}\bar{\nabla}_X Y, \bar{\phi}N) + \eta(\bar{\nabla}_X Y)\eta(N) - \bar{g}(\bar{\phi}\bar{\nabla}_Y X, \bar{\phi}N) - \eta(\bar{\nabla}_Y X)\eta(N)$$

dır. $\eta(N) = 0$ olduğundan,

$$\bar{g}([X, Y], N) = \bar{g}(\bar{\phi}\bar{\nabla}_X Y, \bar{\phi}N) - \bar{g}(\bar{\phi}\bar{\nabla}_Y X, \bar{\phi}N)$$

elde edilir. $\bar{\phi}$ tensörünün kovaryant türevinden,

$$\bar{g}([X, Y], N) = \bar{g}(\bar{\nabla}_X \bar{\phi}Y, \bar{\phi}N) - \bar{g}((\bar{\nabla}_X \bar{\phi})Y, \bar{\phi}N) - \bar{g}(\bar{\nabla}_Y \bar{\phi}X, \bar{\phi}N) + \bar{g}((\bar{\nabla}_Y \bar{\phi})X, \bar{\phi}N)$$

olur. (4.1.1) denkleminden,

$$\begin{aligned} \bar{g}([X, Y], N) &= \bar{g}(\bar{\nabla}_X \bar{\phi}Y, \bar{\phi}N) - \bar{g}(\bar{g}(X, Y)\xi - \eta(Y)X, \bar{\phi}N) \\ &- \bar{g}(\bar{\nabla}_Y \bar{\phi}X, \bar{\phi}N) + \bar{g}(\bar{g}(Y, X)\xi - \eta(X)Y, \bar{\phi}N) \end{aligned}$$

bulunur. $\bar{g}(\xi, \bar{\phi}N) = 0$ olduğundan,

$$\bar{g}([X, Y], N) = \bar{g}(\bar{\nabla}_X \bar{\phi}Y, \bar{\phi}N) + \eta(Y)g(X, \bar{\phi}N) - \bar{g}(\bar{\nabla}_Y \bar{\phi}X, \bar{\phi}N) - \eta(X)g(Y, \bar{\phi}N)$$

dir. Diğer taraftan, $\bar{\phi}Y = \phi Y + u(Y)N$ olduğundan

$$\begin{aligned} \bar{g}([X,Y],N) &= \bar{g}(\bar{\nabla}_X(\phi Y + u(Y)N), \bar{\phi}N) + \eta(Y)g(X,\bar{\phi}N) \\ &- \bar{g}(\bar{\nabla}_Y(\phi X + u(X)N, \bar{\phi}N) - \eta(X)g(Y,\bar{\phi}N) \end{aligned}$$

yazılır. Doğrudan işlemlerle,

$$\begin{aligned} \bar{g}([X,Y],N) &= \bar{g}(\bar{\nabla}_X\phi Y, \bar{\phi}N) + X(u(Y))\bar{g}(N,\bar{\phi}N) + u(Y)\bar{g}(\bar{\nabla}_X N, \bar{\phi}N) \\ &+ \eta(Y)\bar{g}(X,\bar{\phi}N) - \bar{g}(\bar{\nabla}_Y\phi X, \bar{\phi}N) - Y(u(X))\bar{g}(N,\bar{\phi}N) \\ &- u(X)\bar{g}(\bar{\nabla}_Y N, \bar{\phi}N) - \eta(X)\bar{g}(Y,\bar{\phi}N) \end{aligned}$$

olur. Burada Gauss formülü kullanılırsa,

$$\begin{aligned} \bar{g}([X,Y],N) &= g(\nabla_X\phi Y + B(X,\phi Y)N, \bar{\phi}N) + u(Y)\bar{g}(-A_N X + \tau(X)N, \bar{\phi}N) \\ &+ \eta(Y)\bar{g}(X,\bar{\phi}N) - g(\nabla_Y\phi X + B(Y,\phi X)N, \bar{\phi}N) - u(X)\bar{g}(-A_N Y \\ &+ \tau(Y)N, \bar{\phi}N) - \eta(X)\bar{g}(Y,\bar{\phi}N) \end{aligned}$$

dır. Buradan,

$$\begin{aligned} \bar{g}([X,Y],N) &= g(\nabla_X\phi Y, \phi N) - u(Y)g(A_N X, \phi N) + \eta(Y)g(X,\phi N) \\ &- g(\nabla_Y\phi X, \phi N) + u(X)g(A_N Y, \phi N) - \eta(X)g(Y,\phi N) \end{aligned}$$

elde edilir. Bu ifadede $S(TM)$ distribüsyonuna göre Gauss formülü kullanılırsa,

$$\begin{aligned} \bar{g}([X,Y],N) &= g(\nabla^*_X\phi Y + C(X,\phi Y)E, \phi N) - u(Y)g(A_N X, \phi N) + \eta(Y)g(X,\phi N) \\ &- g(\nabla^*_Y\phi X + C(Y,\phi X)E, \phi N) + u(X)g(A_N Y, \phi N) - \eta(X)g(Y,\phi N) \end{aligned}$$

bulunur. Böylece ispat tamamlanır. □

Şimdi, bir belirsiz Sasakiyan uzay formun bir lightlike hiperyüzeyinin pseudosimetrik olma durumu için şu teorem verilebilir:

Teorem 4.1.1. $\bar{M}(c = 1)$, bir belirsiz Sasakiyan uzay form ve (M, g) de $\bar{M}(c)$ uzayının integrallenebilir ekran distribüsyonuna sahip bir lightlike hiperyüzeyi olsun. Bu durumda, eğer $B(X,Y)A_N^2 Z = g(X,Y)A_N Z$, $B(X,Y)A_E^* A_N Z = g(X,Y)A_E^* Z$ ve $C(X,Y)Z = C(X,Z)Y$ ise M bir pseudosimetrik lightlike hiperyüzeyidir, öyle ki $\lambda = 2$ dir, burada $X, Y, Z \in \Gamma(TM)$, $E \in \Gamma(RadTM)$ dir.

İspat. $X, Y, X_1, X_2, X_3, X_4 \in \Gamma(TM)$ için

$$
\begin{aligned}
&(R \cdot R)(X_1, X_2, X_3, X_4; X, Y) \\
&= -R(R(X,Y)X_1, X_2, X_3, X_4) - R(X_1, R(X,Y)X_2, X_3, X_4) \\
&- R(X_1, X_2, R(X,Y)X_3, X_4) - R(X_1, X_2, X_3, R(X,Y)X_4)
\end{aligned}
$$

dır. Burada (2.5.17) kullanılırsa,

$$
\begin{aligned}
&(R \cdot R)(X_1, X_2, X_3, X_4; X, Y) \\
&= -R(g(Y, X_1)X - g(X, X_1)Y + B(Y, X_1)A_N X - B(X, X_1)A_N Y, X_2, X_3, X_4) \\
&- R(X_1, g(Y, X_2)X - g(X, X_2)Y + B(Y, X_2)A_N X - B(X, X_2)A_N Y, X_3, X_4) \\
&- R(X_1, X_2, g(Y, X_3)X - g(X, X_3)Y + B(Y, X_3)A_N X - B(X, X_3)A_N Y, X_4) \\
&- R(X_1, X_2, X_3, g(Y, X_4)X - g(X, X_4)Y + B(Y, X_4)A_N X - B(X, X_4)A_N Y)
\end{aligned}
$$

olur. R, lineer olduğundan

$$
\begin{aligned}
&(R \cdot R)(X_1, X_2, X_3, X_4; X, Y) \\
&= -g(Y, X_1)R(X, X_2, X_3, X_4) + g(X, X_1)R(Y, X_2, X_3, X_4) \\
&- B(Y, X_1)R(A_N X, X_2, X_3, X_4) + B(X, X_1)R(A_N Y, X_2, X_3, X_4) \\
&- g(Y, X_2)R(X_1, X, X_3, X_4) + g(X, X_2)R(X_1, Y, X_3, X_4) \\
&- B(Y, X_2)R(X_1, A_N X, X_3, X_4 + B(X, X_2)R(X_1, A_N Y, X_3, X_4) \\
&- g(Y, X_3)R(X_1, X_2, X, X_4) + g(X, X_3)R(X_1, X_2, Y, X_4) \\
&- B(Y, X_3)R(X_1, X_2, A_N X, X_4) + B(X, X_3)R(X_1, X_2, A_N Y, X_4) \\
&- g(Y, X_4)R(X_1, X_2, X_3, X) + g(X, X_4)R(X_1, X_2, X_3, Y) \\
&- B(Y, X_4)R(X_1, X_2, X_3, A_N X) + B(X, X_4)R(X_1, X_2, X_3, A_N Y) \qquad (4.1.2)
\end{aligned}
$$

elde edilir. Buradan,

$$
\begin{aligned}
&(R \cdot R)(X_1, X_2, X_3, X_4; X, Y) \\
&= -g(Y, X_1)g(R(X, X_2)X_3, X_4) + g(X, X_1)g(R(Y, X_2)X_3, X_4) \\
&- B(Y, X_1)g(R(A_N X, X_2)X_3, X_4) + B(X, X_1)g(R(A_N Y, X_2)X_3, X_4) \\
&- g(Y, X_2)g(R(X_1, X)X_3, X_4) + g(X, X_2)g(R(X_1, Y)X_3, X_4)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&- B(Y,X_2)g(R(X_1,A_NX)X_3,X_4) + B(X,X_2)g(R(X_1,A_NY)X_3,X_4)\\
&- g(Y,X_3)g(R(X_1,X_2)X,X_4) + g(X,X_3)g(R(X_1,X_2)Y,X_4)\\
&- B(Y,X_3)g(R(X_1,X_2)A_NX,X_4) + B(X,X_3)g(R(X_1,X_2)A_NY,X_4)\\
&- g(Y,X_4)g(R(X_1,X_2)X_3,X) + g(X,X_4)g(R(X_1,X_2)X_3,Y)\\
&- B(Y,X_4)g(R(X_1,X_2)X_3,A_NX) + B(X,X_4)g(R(X_1,X_2)X_3,A_NY)
\end{aligned}
$$

dır. Tekrar (2.5.17) ifadesi kullanılırsa,

$$
\begin{aligned}
&(R\cdot R)(X_1,X_2,X_3,X_4;X,Y)\\
&= -g(Y,X_1)g(g(X_2,X_3)X - g(X,X_3)X_2 + B(X_2,X_3)A_NX - B(X,X_3)A_NX_2,X_4)\\
&+ g(X,X_1)g(g(X_2,X_3)Y - g(Y,X_3)X_2 + B(X_2,X_3)A_NY - B(Y,X_3)A_NX_2,X_4)\\
&- B(Y,X_1)g(g(X_2,X_3)A_NX - g(A_NX,X_3)X_2 + B(X_2,X_3)A_N^2X\\
&- B(A_NX,X_3)A_NX_2,X_4) + B(X,X_1)g(g(X_2,X_3)A_NY - g(A_NY,X_3)X_2\\
&+ B(X_2,X_3)A_N^2Y - B(A_NY,X_3)A_NX_2,X_4) - g(Y,X_2)g(g(X,X_3)X_1\\
&- g(X_1,X_3)X + B(X,X_3)A_NX_1 - B(X_1,X_3)A_NX,X_4) + g(X,X_2)g(g(Y,X_3)X_1\\
&- g(X_1,X_3)Y + B(Y,X_3)A_NX_1 - B(X_1,X_3)A_NY,X_4) - B(Y,X_2)g(g(A_NX,X_3)X_1\\
&- g(X_1,X_3)A_NX + B(A_NX,X_3)A_NX_1 - B(X_1,X_3)A_N^2X,X_4)\\
&+ B(X,X_2)g(g(A_NY,X_3)X_1 - g(X_1,X_3)A_NY + B(A_NY,X_3)A_NX_1\\
&- B(X_1,X_3)A_N^2Y,X_4) - g(Y,X_3)g(g(X_2,X)X_1 - g(X_1,X)X_2\\
&+ B(X_2,X)A_NX_1 - B(X_1,X)A_NX_2,X_4) + g(X,X_3)g(g(X_2,Y)X_1\\
&- g(X_1,Y)X_2 + B(X_2,Y)A_NX_1 - B(X_1,Y)A_NX_2,X_4)\\
&- B(Y,X_3)g(g(X_2,A_NX)X_1 - g(X_1,A_NX)X_2 + B(X_2,A_NX)A_NX_1\\
&- B(X_1,A_NX)A_NX_2,X_4) + B(X,X_3)g(g(X_2,A_NY)X_1 - g(X_1,A_NY)X_2\\
&+ B(X_2,A_NY)A_NX_1 - B(X_1,A_NY)A_NX_2,X_4) - g(Y,X_4)g(g(X_2,X_3)X_1\\
&- g(X_1,X_3)X_2 + B(X_2,X_3)A_NX_1 - B(X_1,X_3)A_NX_2,X)\\
&+ g(X,X_4)g(g(X_2,X_3)X_1 - g(X_1,X_3)X_2 + B(X_2,X_3)A_NX_1\\
&- B(X_1,X_3)A_NX_2,Y) - B(Y,X_4)g(g(X_2,X_3)X_1 - g(X_1,X_3)X_2\\
&+ B(X_2,X_3)A_NX_1 - B(X_1,X_3)A_NX_2,A_NX) + B(X,X_4)g(g(X_2,X_3)X_1\\
&- g(X_1,X_3)X_2 + B(X_2,X_3)A_NX_1 - B(X_1,X_3)A_NX_2,A_NY)
\end{aligned}
$$

bulunur. Böylece

$$
\begin{aligned}
&(R\cdot R)(X_1,X_2,X_3,X_4;X,Y)\\
&=-g(Y,X_1)g(X_2,X_3)g(X,X_4)+g(Y,X_1)g(X,X_3)g(X_2,X_4)\\
&-g(Y,X_1)B(X_2,X_3)g(A_NX,X_4)+g(Y,X_1)B(X,X_3)g(A_NX_2,X_4)\\
&+g(X,X_1)g(X_2,X_3)g(Y,X_4)-g(X,X_1)g(Y,X_3)g(X_2,X_4)\\
&+g(X,X_1)B(X_2,X_3)g(A_NY,X_4)-g(X,X_1)B(Y,X_3)g(A_NX_2,X_4)\\
&-B(Y,X_1)g(X_2,X_3)g(A_NX,X_4)+B(Y,X_1)g(A_NX,X_3)g(X_2,X_4)\\
&-B(Y,X_1)B(X_2,X_3)g(A_N^2X,X_4)+B(Y,X_1)B(A_NX,X_3)g(A_NX_2,X_4)\\
&+B(X,X_1)g(X_2,X_3)g(A_NY,X_4)-B(X,X_1)g(A_NY,X_3)g(X_2,X_4)\\
&+B(X,X_1)B(X_2,X_3)g(A_N^2Y,X_4)-B(X,X_1)B(A_NY,X_3)g(A_NX_2,X_4)\\
&-g(Y,X_2)g(X,X_3)g(X_1,X_4)+g(Y,X_2)g(X_1,X_3)g(X,X_4)\\
&-g(Y,X_2)B(X,X_3)g(A_NX_1X_4)+g(Y,X_2)B(X_1,X_3)g(A_NX,X_4)\\
&+g(X,X_2)g(Y,X_3)g(X_1,X_4)-g(X,X_2)g(X_1,X_3)g(Y,X_4)\\
&+g(X,X_2)B(Y,X_3)g(A_NX_1,X_4)-g(X,X_2)B(X_1,X_3)g(A_NY,X_4)\\
&-B(Y,X_2)g(A_NX,X_3)g(X_1,X_4)+B(Y,X_2)g(X_1,X_3)g(A_NX,X_4)\\
&-B(Y,X_2)B(A_NX,X_3)g(A_NX_1,X_4)+B(Y,X_2)B(X_1,X_3)g(A_N^2X,X_4)\\
&+B(X,X_2)g(A_NY,X_3)g(X_1,X_4)-B(X,X_2)g(X_1,X_3)g(A_NY,X_4)\\
&+B(X,X_2)B(A_NY,X_3)g(A_NX_1,X_4)-B(X,X_2)B(X_1,X_3)g(A_N^2Y,X_4)\\
&-g(Y,X_3)g(X_2,X)g(X_1,X_4)+g(Y,X_3)g(X_1,X)g(X_2,X_4)\\
&-g(Y,X_3)B(X_2,X)g(A_NX_1,X_4)+g(Y,X_3)B(X_1,X)g(A_NX_2,X_4)\\
&+g(X,X_3)g(X_2,Y)g(X_1,X_4)-g(X,X_3)g(X_1,Y)g(X_2,X_4)\\
&+g(X,X_3)B(X_2,Y)g(A_NX_1,X_4)-g(X,X_3)B(X_1,Y)g(A_NX_2,X_4)\\
&-B(Y,X_3)g(X_2,A_NX)g(X_1,X_4)+B(Y,X_3)g(X_1,A_NX)g(X_2,X_4)\\
&-B(Y,X_3)B(X_2,A_NX)g(A_NX_1,X_4)+B(Y,X_3)B(X_1,A_NX)g(A_NX_2,X_4)\\
&+B(X,X_3)g(X_2,A_NY)g(X_1,X_4)-B(X,X_3)g(X_1,A_NY)g(X_2,X_4)\\
&+B(X,X_3)B(X_2,A_NY)g(A_NX_1,X_4)-B(X,X_3)B(X_1,A_NY)g(A_NX_2,X_4)\\
&-g(Y,X_4)g(X_2,X_3)g(X_1,X)+g(Y,X_4)g(X_1,X_3)g(X_2,X)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&- g(Y,X_4)B(X_2,X_3)g(A_NX_1,X) + g(Y,X_4)B(X_1,X_3)g(A_NX_2,X)\\
&+ g(X,X_4)g(X_2,X_3)g(X_1,Y) - g(X,X_4)g(X_1,X_3)g(X_2,Y)\\
&+ g(X,X_4)B(X_2,X_3)g(A_NX_1,Y) - g(X,X_4)B(X_1,X_3)g(A_NX_2,Y)\\
&- B(Y,X_4)g(X_2,X_3)g(X_1,A_NX) + B(Y,X_4)g(X_1,X_3)g(X_2,A_NX)\\
&- B(Y,X_4)B(X_2,X_3)g(A_NX_1,A_NX) + B(Y,X_4)B(X_1,X_3)g(A_NX_2,A_NX)\\
&+ B(X,X_4)g(X_2,X_3)g(X_1,A_NY) - B(X,X_4)g(X_1,X_3)g(X_2,A_NY)\\
&+ B(X,X_4)B(X_2,X_3)g(A_NX_1,A_NY) - B(X,X_4)B(X_1,X_3)g(A_NX_2,A_NY)
\end{aligned}
$$

olur. Bu ifade düzenlenirse,

$$
\begin{aligned}
&(R\cdot R)(X_1,X_2,X_3,X_4;X,Y)\\
&= Q(g,R)(X_1,X_2,X_3,X_4;X,Y)\\
&- B(Y,X_1)g(X_2,X_3)g(A_NX,X_4) + B(Y,X_1)g(A_NX,X_3)g(X_2,X_4)\\
&- B(Y,X_1)B(X_2,X_3)g(A_N^2X,X_4) + B(Y,X_1)B(A_NX,X_3)g(A_NX_2,X_4)\\
&+ B(X,X_1)g(X_2,X_3)g(A_NY,X_4) - B(X,X_1)g(A_NY,X_3)g(X_2,X_4)\\
&+ B(X,X_1)B(X_2,X_3)g(A_N^2Y,X_4) - B(X,X_1)B(A_NY,X_3)g(A_NX_2,X_4)\\
&- B(Y,X_2)g(A_NX,X_3)g(X_1,X_4) + B(Y,X_2)g(X_1,X_3)g(A_NX,X_4)\\
&- B(Y,X_2)B(A_NX,X_3)g(A_NX_1,X_4) + B(Y,X_2)B(X_1,X_3)g(A_N^2X,X_4)\\
&+ B(X,X_2)g(A_NY,X_3)g(X_1,X_4) - B(X,X_2)g(X_1,X_3)g(A_NY,X_4)\\
&+ B(X,X_2)B(A_NY,X_3)g(A_NX_1,X_4) - B(X,X_2)B(X_1,X_3)g(A_N^2Y,X_4)\\
&- B(Y,X_3)g(X_2,A_NX)g(X_1,X_4) + B(Y,X_3)g(X_1,A_NX)g(X_2,X_4)\\
&- B(Y,X_3)B(X_2,A_NX)g(A_NX_1,X_4) + B(Y,X_3)B(X_1,A_NX)g(A_NX_2,X_4)\\
&+ B(X,X_3)g(X_2,A_NY)g(X_1,X_4) - B(X,X_3)g(X_1,A_NY)g(X_2,X_4)\\
&+ B(X,X_3)B(X_2,A_NY)g(A_NX_1,X_4) - B(X,X_3)B(X_1,A_NY)g(A_NX_2,X_4)\\
&- B(Y,X_4)g(X_2,X_3)g(X_1,A_NX) + B(Y,X_4)g(X_1,X_3)g(X_2,A_NX)\\
&- B(Y,X_4)B(X_2,X_3)g(A_NX_1,A_NX) + B(Y,X_4)B(X_1,X_3)g(A_NX_2,A_NX)\\
&+ B(X,X_4)g(X_2,X_3)g(X_1,A_NY) - B(X,X_4)g(X_1,X_3)g(X_2,A_NY)\\
&+ B(X,X_4)B(X_2,X_3)g(A_NX_1,A_NY) - B(X,X_4)B(X_1,X_3)g(A_NX_2,A_NY)
\end{aligned}
\tag{4.1.3}
$$

elde edilir. Eğer (3.1.1), (3.1.2) ve $C(X,Y)Z = C(X,Z)Y$ sağlanırsa,

$$(R\cdot R)(X_1,X_2,X_3,X_4;X,Y) = 2Q(g,R)(X_1,X_2,X_3,X_4;X,Y)$$

olur ve bu da ispatı tamamlar. □

Aşağıdaki teorem, pseudosimetrik lightlike hiperyüzeylerin $c = 1$ olan belirsiz Sasakiyan uzay formlardaki karakterizasyonunu vermektedir.

Teorem 4.1.2. $\bar{M}(c = 1)$, bir belirsiz Sasakiyan uzay form, (M, g), $\bar{M}(c)$ uzayının bir pseudosimetrik ($L_R = 1$) lightlike hiperyüzeyi ve $\xi \in \Gamma(TM)$, $A_N E \in \Gamma(D_0)$ olsun. Bu durumda, ya M tamamen jeodeziktir ya da

$$g(g(A_N E, A_N X)Y - g(A_N E, A_N Y)X, A^*\bar{\phi}N) = 0$$

dır, burada $X, Y \in \Gamma(TM)$, $N \in \Gamma(tr(TM))$ *dir.*

İspat. Kabul edelim ki M pseudosimetrik lightlike hiperyüzey olsun. Bu durumda, $X_1 \in \Gamma(RadTM)$ ve $X_4 = U = -\bar{\phi}N$ için

$$(R\cdot R)(E,X_2,X_3,-\bar{\phi}N;X,Y) = L_R Q(g,R)(E,X_2,X_3,-\bar{\phi}N;X,Y)$$

dır. Böylece,

$$\begin{aligned}
Q(g,R)(E,X_2,X_3,-\bar{\phi}N;X,Y) + B(Y,X_2)B(A_NX,X_3)g(A_NE,\bar{\phi}N)\\
-B(X,X_2)B(A_NY,X_3)g(A_NE,\bar{\phi}N) + B(Y,X_3)B(X_2,A_NX)g(A_NE,\bar{\phi}N)\\
-B(X,X_3)B(X_2,A_NY)g(A_NE,\bar{\phi}N) + B(Y,\bar{\phi}N)B(X_2,X_3)g(A_NE,A_NX)\\
-B(X,\bar{\phi}N)B(X_2,X_3)g(A_NE,A_NY) - L_RQ(g,R)(E,X_2,X_3,-\bar{\phi}N;X,Y) = 0
\end{aligned}$$

denkleminde $Q(g,R)$ ifadesi yerine yazılırsa

$$\begin{aligned}
(1-L_R)[g(Y,X_2)B(X,X_3)g(A_NE,\bar{\phi}N) - g(X,X_2)B(Y,X_3)g(A_NE,\bar{\phi}N)\\
+g(Y,X_3)B(X_2,X)g(A_NE,\bar{\phi}N) - g(X,X_3)B(X_2,Y)g(A_NE,\bar{\phi}N)\\
+g(Y,\bar{\phi}N)B(X_2,X_3)g(A_NE,X) - g(X,\bar{\phi}N)B(X_2,X_3)g(A_NE,Y)]\\
+B(Y,\bar{\phi}N)B(X_2,X_3)g(A_NE,A_NX) - B(X,\bar{\phi}N)B(X_2,X_3)g(A_NE,A_NY) = 0
\end{aligned}$$

bulunur. Hipotezden ($L_R = 1$) olduğundan,

$$B(X_2,X_3)g(g(A_NE,A_NX)Y - g(A_NE,A_NY)X, A^*\bar{\phi}N) = 0$$

elde edilir, burada $X, Y, X_1, X_2, X_3, X_4 \in \Gamma(TM)$ dir. Böylece ispat tamamlanır. □

$(L_R \neq 1)$ durumunda aşağıdaki sonuç söz konusudur:

Teorem 4.1.3. $\bar{M}(c=1)$, bir belirsiz Sasakiyan uzay form, (M,g), $\bar{M}(c)$ uzayının bir η-tamamen umbilik pseudosimetrik $(L_R \neq 1)$ lightlike hiperyüzeyi ve $\xi \in \Gamma(TM)$, $A_N E \in \Gamma(D_0)$ olsun. Bu durumda, ya M tamamen jeodeziktir ya da $\eta(Y)C(E,X) = \eta(X)C(E,Y)$ dir, burada $X, Y \in \Gamma(TM)$ dir.

İspat. Kabul edelim ki M, pseudosimetrik lightlike hiperyüzey olsun. Bu durumda, $X_1 \in \Gamma(RadTM)$ ve $X_4 = \xi$ için

$$(R \cdot R)(E, X_2, X_3, \xi; X, Y) = L_R Q(g,R)(E, X_2, X_3, \xi; X, Y)$$

olur. Burada (4.1.3) ifadesi kullanılırsa,

$$B(X_2,X_3)\{(1-L_R)[-g(Y,\xi)g(A_N E, X) + g(X,\xi)g(A_N E, Y)] - B(Y,\xi)g(A_N E, A_N X)$$
$$+ B(X,\xi)g(A_N E, A_N Y)\} = 0$$

bulunur. Hipotezden M η-tamamen umbilik olduğundan

$$B(X_2,X_3)\{(1-L_R)[-\eta(Y)g(A_N E, X) + \eta(X)g(A_N E, Y)]$$
$$- \lambda[g(Y,\xi) - \eta(Y)\eta(\xi)]g(A_N E, A_N X) + \lambda[g(X,\xi) - \eta(X)\eta(\xi)]g(A_N E, A_N Y)\} = 0$$

elde edilir. Dolayısıyla

$$B(X_2,X_3)((1-L_R)[-\eta(Y)g(A_N E, X) + \eta(X)g(A_N E, Y)] = 0,$$

olur, burada $X_1, X_2, X_3, X_4, X, Y \in \Gamma(TM)$ dir. Böylece ispat tamamlanır. □

Tamamen jeodezik pseudosimetrik lightlike hiperyüzeyler için aşağıdaki durum söz konusudur:

Sonuç 4.1.1. $\bar{M}(c)$, bir belirsiz Sasakiyan uzay form ve (M,g) de $\bar{M}(c)$ uzayının pseudosimetrik lightlike hiperyüzeyi olsun. Bu durumda, M tamamen jeodezik ise semi-simetriktir.

İspat. İspat (4.1.3) den açıktır. □

Şimdi bir belirsiz Sasakiyan uzay formun, $(c=1)$, M ve $S(TM)$ ekran distribüsyonunun pseudosimetrikliği arasındaki ilişkiyi veren aşağıdaki teoremi verelim:

Teorem 4.1.4. $\bar{M}(c=1)$, bir belirsiz Sasakiyan uzay form ve (M,g) de $\bar{M}(c)$ uzayının bir lightlike hiperyüzeyi olsun. Eğer $C=0$ ise, bu durumda M hiperyüzeyinin pseudosimetrik olması için gerek ve yeter şart ekran distribüsyonunun integral manifoldunun pseudosimetrik olmasıdır, burada C, M lightlike hiperyüzeyinin ekran distribüsyonunun ikinci temel formudur.

İspat. $(c=1)$ için (2.5.18) kullanılarak doğrudan hesaplamalar yapılırsa,

$$
\begin{aligned}
&(R\cdot R)(X_1,X_2,X_3,X_4;X,Y)\\
&=-R(R(X,Y)X_1,X_2,X_3,X_4)-R(X_1,R(X,Y)X_2,X_3,X_4)\\
&-R(X_1,X_2,R(X,Y)X_3,X_4)-R(X_1,X_2,X_3,R(X,Y)X_4)\\
&=(R^*\cdot R^*)(X_1,X_2,X_3,X_4;X,Y)-C(R^*(X,Y)X_1,X_3)g(A^*_NX_2,X_4)\\
&+C(X_2,X_3)g(R^*(X,Y)X_1,X_4)-C(X,X_1)[g(R^*(A^*_NY,X_2)X_3,X_4)\\
&+C(A^*_NY,X_3)g(A^*_NX_2,X_4)-C(X_2,X_3)g(A^{*2}_NX_2,X_4)]\\
&+C(Y,X_1)[g(R^*(A^*_NX,X_2)X_3,X_4)+C(A^*_NX,X_3)g(A^*_NX_2,X_4)\\
&-C(X_2,X_3)g(A^{*2}_NX,X_4)]-C(X_1,X_2)g(A^*_NR^*(X,Y)X_2,X_4)\\
&+C(R^*(X,Y)X_2,X_3)g(A^*_NX_1,X_4)-C(X,X_2)[g(R^*(X_1,A^*_NY)X_3,X_4)\\
&+C(X_1,X_3)g(A^{*2}_NY,X_4)-C(A^*_NY,X_3)g(A^*_NX_1,X_4)]\\
&+C(Y,X_2)[g(R^*(X_1,A^*_NX)X_3,X_4)+C(X_1,X_3)g(A^{*2}_NX,X_4)\\
&-C(A^*_NX,X_3)g(A^*_NX_1,X_4)]-C(X_1,R^*(X,Y)X_3)g(A^*_NX_2,X_4)\\
&+C(X_2,R^*(X,Y)X_3)g(A^*_NX_1,X_4)-C(X,X_3)[g(R^*(X_1,X_2)A^*_NY,X_4)\\
&+C(X_1,A^*_NY)g(A^*_NX_2,X_4)-C(X_2,A^*_NY)g(A^*_NX_1,X_4)]\\
&+C(Y,X_3)[g(R^*(X_1,X_2)A^*_NX,X_4)+C(X_1,A^*_NX)g(A^*_NX_2,X_4)\\
&-C(X_2,A^*_NX)g(A^*_NX_1,X_4)]-C(X_1,X_3)g(A^*_NX_2,R^*(X,Y)X_4)\\
&+C(X_2,X_3)g(A^*_NX_1,R^*(X,Y)X_4)-C(X,X_4)[g(R^*(X_1,X_2)X_3,A^*_NY)\\
&+C(X_1,X_3)g(A^*_NX_2,A^*_NY)-C(X_2,X_3)g(A^*_NX_1,A^*_NY)]\\
&+C(Y,X_4)[g(R^*(X_1,X_2)X_3,A^*_NX)+C(X_1,X_3)g(A^*_NX_2,A^*_NX)\\
&-C(X_2,X_3)g(A^*_NX_1,A^*_NX)]
\end{aligned}
$$

elde edilir. Diğer taraftan,

$$
\begin{aligned}
&Q(g,R)(X_1,X_2,X_3,X_4;X,Y)\\
&= -R((X \wedge_g Y)X_1,X_2,X_3,X_4) - R(X_1,(X \wedge_g Y)X_2,X_3,X_4)\\
&- R(X_1,X_2,(X \wedge_g Y)X_3,X_4) - R(X_1,X_2,X_3,(X \wedge_g Y)X_4)\\
&= Q(g,R^*)(X_1,X_2,X_3,X_4;X,Y) - g(Y,X_1)[C(X,X_3)g(A_N^*X_2,X_4)\\
&- C(X_2,X_3)g(A_N^*X,X_4)] + g(X,X_1)[C(Y,X_3)g(A_N^*X_2,X_4)\\
&- C(X_2,X_3)g(A_N^*Y,X_4)] - g(Y,X_2)[C(X_1,X_3)g(A_N^*X,X_4)\\
&- C(X,X_3)g(A_N^*X_1,X_4)] + g(X,X_2)[C(X_1,X_3)g(A_N^*Y,X_4)\\
&- C(Y,X_3)g(A_N^*X_1,X_4)] - g(Y,X_3)[C(X_1,X)g(A_N^*X_2,X_4)\\
&- C(X_2,X)g(A_N^*X_1,X_4)] + g(X,X_3)[C(X_1,Y)g(A_N^*X_2,X_4)\\
&- C(X_2,Y)g(A_N^*X_1,X_4)] - g(Y,X_4)[C(X_2,X_3)g(A_N^*X_1,X)\\
&- C(X_1,X_3)g(A_N^*X_2,X)] + g(X,X_4)[C(X_2,X_3)g(A_N^*X_1,Y)\\
&- C(X_1,X_3)g(A_N^*X_2,Y)]
\end{aligned}
$$

bulunur. Böylece, ekran distribüsyonunun ikinci temel formu sıfır olduğundan ispat tamamlanır. □

Bir belirsiz Sasakiyan uzay formun bir lightlike Einstein hiperyüzeyinin pseudosimetrikliği için aşağıdaki sonuç verilebilir:

Sonuç 4.1.2. $\bar{M}(c)$, bir belirsiz Sasakiyan uzay form ve (M,g) de $\bar{M}(c)$ uzayının lightlike Einstein hiperyüzeyi olsun. Eğer $R \cdot R = Q(S,R)$ ise bu durumda, M bir pseudosimetrik lightlike hiperyüzeydir, burada S, M hiperyüzeyinin Ricci tensörüdür.

İspat. İspat Sonuç 3.1.2 ile aynıdır. □

Teorem 4.1.5. $\bar{M}(c=1)$, bir belirsiz Sasakiyan uzay form, (M,g), $\bar{M}(c)$ uzayının lightlike hiperyüzeyi ve $\xi \in TM$, $A_N E \in \Gamma(D_0)$ de null olmayan vektör alanı olsun. Bu durumda, $X \in \Gamma(TM)$ için $u(X) \neq 0$ olmak üzere eğer $R \cdot R = Q(S,R)$ ise, M tamamen jeodeziktir.

İspat. (2.5.19) ve (4.1.2) den $X_1, X_2, X_3, X_4, X, Y \in \Gamma(TM)$ olmak üzere $c = 1$ için,

$$
\begin{aligned}
&Q(S,R)(X_1,X_2,X_3,X_4;X,Y)\\
=&-[\alpha g(Y,X_1)+B(Y,X_1)izA_N-B(A_NY,X_1)]R(X,X_2,X_3,X_4)\\
&+[\alpha g(X,X_1)+B(X,X_1)izA_N-B(A_NX,X_1)]R(Y,X_2,X_3,X_4)\\
&-[\alpha g(Y,X_2)+B(Y,X_2)izA_N-B(A_NY,X_2)]R(X_1,X,X_3,X_4)\\
&+[\alpha g(X,X_2)+B(X,X_2)izA_N-B(A_NX,X_2)]R(X_1,Y,X_3,X_4)\\
&-[\alpha g(Y,X_3)+B(Y,X_3)izA_N-B(A_NY,X_3)]R(X_1,X_2,X,X_4)\\
&+[\alpha g(X,X_3)+B(X,X_3)izA_N-B(A_NX,X_3)]R(X_1,X_2,Y,X_4)\\
&-[\alpha g(Y,X_4)+B(Y,X_4)izA_N-B(A_NY,X_4)]R(X_1,X_2,X_3,X)\\
&+[\alpha g(X,X_4)+B(X,X_4)izA_N-B(A_NX,X_4)]R(X_1,X_2,X_3,Y)
\end{aligned}
$$

olur. $R \cdot R = Q(S,R)$ olduğu kullanılırsa,

$$
\begin{aligned}
&-[(\alpha-1)g(Y,X_1)+B(Y,X_1)izA_N-B(A_NY,X_1)][g(X_2,X_3)g(X,X_4)\\
&-g(X,X_3)g(X_2,X_4)+B(X_2,X_3)g(A_NX,X_4)-B(X,X_3)g(A_NX_2,X_4)]\\
&+[(\alpha-1)g(X,X_1)+B(X,X_1)izA_N-B(A_NX,X_1)][g(X_2,X_3)g(Y,X_4)\\
&-g(Y,X_3)g(X_2,X_4)+B(X_2,X_3)g(A_NY,X_4)-B(Y,X_3)g(A_NX_2,X_4)]\\
&-[(\alpha-1)g(Y,X_2)+B(Y,X_2)izA_N-B(A_NY,X_2)][g(X,X_3)g(X_1,X_4)\\
&-g(X_1,X_3)g(X,X_4)+B(X,X_3)g(A_NX_1,X_4)-B(X_1,X_3)g(A_NX,X_4)]\\
&+[(\alpha-1)g(X,X_2)+B(X,X_2)izA_N-B(A_NX,X_2)][g(Y,X_3)g(X_1,X_4)\\
&-g(X_1,X_3)g(Y,X_4)+B(Y,X_3)g(A_NX_1,X_4)-B(X_1,X_3)g(A_NY,X_4)]\\
&-[(\alpha-1)g(Y,X_3)+B(Y,X_3)izA_N-B(A_NY,X_3)][g(X_2,X)g(X_1,X_4)\\
&-g(X_1,X)g(X_2,X_4)+B(X_2,X)g(A_NX_1,X_4)-B(X_1,X)g(A_NX_2,X_4)]\\
&+[(\alpha-1)g(X,X_3)+B(X,X_3)izA_N-B(A_NX,X_3)][g(X_2,Y)g(X_1,X_4)\\
&-g(X_1,Y)g(X_2,X_4)+B(X_2,Y)g(A_NX_1,X_4)-B(X_1,Y)g(A_NX_2,X_4)]\\
&-[(\alpha-1)g(Y,X_4)+B(Y,X_4)izA_N-B(A_NY,X_4)][g(X_2,X_3)g(X_1,X)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&- g(X_1, X_3)g(X_2, X) + B(X_2, X_3)g(A_N X_1, X) - B(X_1, X_3)g(A_N X_2, X)] \\
&+ [(\alpha - 1)g(X, X_4) + B(X, X_4) iz A_N - B(A_N X, X_4)][g(X_2, X_3)g(X_1, Y) \\
&- g(X_1, X_3)g(X_2, Y) + B(X_2, X_3)g(A_N X_1, Y) - B(X_1, X_3)g(A_N X_2, Y)] \\
&+ B(Y, X_1)[g(X_2, X_3)g(A_N X, X_4) - g(A_N X, X_3)g(X_2, X_4) + B(X_2, X_3)g(A_N^2 X, X_4) \\
&- B(A_N X, X_3)g(A_N X_2, X_4)] - B(X, X_1)[g(X_2, X_3)g(A_N Y, X_4) - g(A_N Y, X_3)g(X_2, X_4) \\
&+ B(X_2, X_3)g(A_N^2 Y, X_4) - B(A_N Y, X_3)g(A_N X_2, X_4)] + B(Y, X_2)[g(A_N X, X_3)g(X_1, X_4) \\
&- g(X_1, X_3)g(A_N X, X_4) + B(A_N X, X_3)g(A_N X_1, X_4) - B(X_1, X_3)g(A_N^2 X, X_4)] \\
&- B(X, X_2)[g(A_N Y, X_3)g(X_1, X_4) - g(X_1, X_3)g(A_N Y, X_4) + B(A_N Y, X_3)g(A_N X_1, X_4) \\
&- B(X_1, X_3)g(A_N^2 Y, X_4)] + B(Y, X_3)[g(X_2, A_N X)g(X_1, X_4) - g(X_1, A_N X)g(X_2, X_4) \\
&+ B(X_2, A_N X)g(A_N X_1, X_4) - B(X_1, A_N X)g(A_N X_2, X_4)] - B(X, X_3)[g(X_2, A_N Y)g(X_1, X_4) \\
&- g(X_1, A_N Y)g(X_2, X_4) + B(X_2, A_N Y)g(A_N X_1, X_4) - B(X_1, A_N Y)g(A_N X_2, X_4)] \\
&+ B(Y, X_4)[g(X_2, X_3)g(X_1, A_N X) - g(X_1, X_3)g(X_2, A_N X) + B(X_2, X_3)g(A_N X_1, A_N X) \\
&- B(X_1, X_3)g(A_N X_2, A_N X)] - B(X, X_4)[g(X_2, X_3)g(X_1, A_N Y) - g(X_1, X_3)g(X_2, A_N Y) \\
&+ B(X_2, X_3)g(A_N X_1, A_N Y) - B(X_1, X_3)g(A_N X_2, A_N Y)] = 0
\end{aligned}
$$

bulunur. Burada $X_1 = Y = E \in \Gamma(RadTM)$ alınırsa

$$
\begin{aligned}
B(A_N E, X_2)B(X, X_3)g(A_N E, X_4) - B(A_N E, X_2)B(X_2, X)g(AE, X_4) \\
-B(A_N E, X_4)B(X_2, X_3)g(A_N E, X) - B(X, X_2)B(A_N E, X_3)g(A_N E, X_4) \\
-B(X, X_3)B(X_2, A_N E)g(A_N E, X_4) - B(X, X_4)B(X_2, X_3)g(A_N E, A_N E) = 0
\end{aligned}
$$

olup $X_4 = \xi$ için

$$
u(X)B(X_2, X_3)g(A_N E, A_N E) = 0
$$

bulunur. Böylece hipotezden ispat tamamlanır. □

4.2 Belirsiz Sasakiyan Uzay Formlarda Pseudoparalel Lightlike Hiperyüzeyler

Bu altbölümde, bir belirsiz Sasakiyan uzay formda pseudoparalel lightlike hiperyüzeyler incelenmekte ve bazı karakterizasyonlar verilmektedir.

Tanım 4.2.1. $\bar{M}(c)$, bir belirsiz Sasakiyan uzay form ve (M, g) de $\bar{M}(c)$ uzayının bir lightlike hiperyüzeyi olsun. Eğer M hiperyüzeyinin her noktasında $R{\cdot}h$ ve $Q(g, h)$ tensörleri lineer bağımlı ise, M hiperyüzeyine *pseudoparalel lightlike hiperyüzey* denir, yani M hiperyüzeyinin pseudoparalel lightlike hiperyüzey olması için gerek ve yeter şart $U_h = \{p \in M | Q(g, h) \neq 0\}$ kümesi üzerinde $R \cdot h = L_h Q(g, h)$ olmasıdır, burada L_h, U_h üzerinde fonksiyondur.

Teorem 4.2.1. $\bar{M}(c = 1)$, bir belirsiz Sasakiyan uzay form, (M, g), $\bar{M}(c)$ uzayının bir lightlike hiperyüzeyi ve A_N, B ye göre simetrik olsun. Eğer τ-paralel ve $B(X, Y)A^*_\xi A_N Z = g(X, Y)A^*_\xi Z$ ise bu durumda, M pseudoparalel lightlike hiperyüzeydir, öyle ki $L_h = 2$ dir, burada $X, Y, Z \in \Gamma(TM)$ ve τ, M üzerinde 1-formdur.

İspat. $X_1, X_2, X, Y \in \Gamma(TM)$ olmak üzere $c = 1$ alınırsa,

$$
\begin{aligned}
&(R(X, Y) \cdot h)(X_1, X_2)\\
&= R^\perp(X, Y)h(X_1, X_2) - h(R(X, Y)X_1, X_2) - h(X_1, R(X, Y)X_2)\\
&= -h(g(Y, X_1)X - g(X, X_1)Y + B(Y, X_1)A_N X - B(X, X_1)A_N Y, X_2)\\
&- h(X_1, g(Y, X_2)X - g(X, X_2)Y + B(Y, X_2)A_N X - B(X, X_2)A_N Y)
\end{aligned}
$$

olur. Buradan

$$(R(X, Y) \cdot h)(X_1, X_2) \tag{4.2.1}$$

$$
\begin{aligned}
&= -g(Y, X_1)h(X, X_2) + g(X, X_1)h(Y, X_2) - B(Y, X_1)h(A_N X, X_2)\\
&+ B(X, X_1)h(A_N Y, X_2) - g(Y, X_2)h(X_1, X) + g(X, X_2)h(X_1, Y)\\
&- B(Y, X_2)h(X_1, A_N X) + B(X, X_2)h(X_1, A_N Y)
\end{aligned}
\tag{4.2.2}
$$

elde edilir. İkinci temel tensör alanı h yazılırsa,

$$
\begin{aligned}
&(R(X, Y) \cdot h)(X_1, X_2)\\
&= -g(Y, X_1)B(X, X_2)N + g(X, X_1)B(Y, X_2)N - B(Y, X_1)B(A_N X, X_2)N\\
&+ B(X, X_1)B(A_N Y, X_2)N - g(Y, X_2)B(X_1, X)N + g(X, X_2)B(X_1, Y)N\\
&- B(Y, X_2)B(X_1, A_N X)N + B(X, X_2)B(X_1, A_N Y)N\\
&= Q(g, R)(X_1, X_2; X, Y) - B(Y, X_1)B(A_N X, X_2)N + B(X, X_1)B(A_N Y, X_2)N\\
&- B(Y, X_2)B(X_1, A_N X)N + B(X, X_2)B(X_1, A_N Y)N
\end{aligned}
$$

dir. (3.1.2) kullanılırsa,

$$(R(X,Y)\cdot h)(X_1,X_2) = 2Q(g,h)(X_1,X_2;X,Y),$$

bulunur. Bu ise ispatı tamamlar. $\square$

Not edelim ki, yukarıdaki sonuç semi-Öklidyen uzayda $L_h = 1$ durumunda geçerlidir.

Sonuç 4.2.1. $\bar{M}(c=1)$, bir belirsiz Sasakiyan uzay form, (M,g) de $\bar{M}(c)$ uzayının bir lightlike hiperyüzeyi olsun. Eğer hiperyüzey transversal flat ve $B(X,Y)A^*_E A_N Z = g(X,Y)A^*_E Z$ ise bu durumda, M pseudoparalel lightlike hiperyüzeydir, öyle ki $L_h = 2$ dir, burada $X,Y,Z \in \Gamma(TM)$, $E \in \Gamma(RadTM)$ ve τ, M üzerinde 1-formdur.

Teorem 4.2.2. $\bar{M}(c=1)$, bir belirsiz Sasakiyan uzay form, (M,g), $\bar{M}(c)$ uzayının bir pseudoparalel ($L_h = 1$) lightlike hiperyüzeyi ve A_N, B ye göre simetrik, $\xi \in \Gamma(TM)$ olsun. Eğer τ-paralel ve

$$B(Y,X_2)B(A_N\xi,\bar{\phi}E)N = -u(X_2)B(\bar{\phi}E,A_NY)N$$

ise, bu durumda ya M, $(\bar{\phi}(TM^{\perp}), D\oplus D')$-mixed tamamen jeodeziktir ya da $B(A_N\xi,X_2) = 0$ dır, burada $X_2 \in \Gamma(TM)$, $Y \in \Gamma(D\oplus D')$, $E \in \Gamma(RadTM)$, $N \in \Gamma(tr(TM))$ dir.

İspat. Kabul edelim ki M, pseudoparalel lightlike hiperyüzey yani,

$$(R(X,Y)\cdot h)(X_1,X_2) = L_h Q(g,h)(X_1,X_2;X,Y)$$

olsun, burada $X_1,X_2,X \in \Gamma(TM)$, $Y \in \Gamma(D\oplus D')$ dir. $c=1$ için $X=\xi$ ve $X_1 = V = -\bar{\phi}E$ alınırsa

$$(R(\xi,Y)\cdot h)(-\bar{\phi}E,X_2) = L_h Q(g,h)(-\bar{\phi}E,X_2;\xi,Y)$$

olur. Burada, R eğrilik tensör alanı ve $Q(g,h)$ yazılırsa,

$$\begin{aligned}(1-L_h)[g(Y,\bar{\phi}E)B(\xi,X_2) - g(\xi,X_2)B(\bar{\phi}E,Y)]N \\ +B(Y,\bar{\phi}E)B(A_N\xi,X_2)N - B(\xi,\bar{\phi}E)B(A_NY,X_2)N \\ +B(Y,X_2)B(A_N\xi,\bar{\phi}E)N - B(\xi,X_2)B(\bar{\phi}E,A_NY)N = 0\end{aligned}$$

olur. Buradan $L_h = 1$ ve $B(\xi, \bar{\phi}E) = -u(\bar{\phi}E) = g(\bar{\phi}E, \bar{\phi}E) = 0$ olduğu göz önüne alınırsa

$$\begin{aligned} &B(Y, \bar{\phi}E)B(A_N\xi, X_2)N + B(Y, X_2)B(A_N\xi, \bar{\phi}E)N \\ &- B(\xi, X_2)B(\bar{\phi}E, A_NY)N = 0 \end{aligned}$$

elde edilir. Böylece hipotez gereğince

$$B(Y, \bar{\phi}E)B(A_N\xi, X_2)N = 0$$

bulunur. Dolayısıyla ispat tamamlanır. □

Sonuç 4.2.2. $\bar{M}(c)$, bir belirsiz Sasakiyan uzay form, (M, g) de $\bar{M}(c)$ uzayının bir pseudoparalel lightlike hiperyüzeyi olsun. Eğer hiperyüzey transversal flat ve M tamamen jeodezik ise bu durumda, M semi-paralel lightlike hiperyüzey olur.

İspat. İspat (4.2.2) den açıktır. □

4.3 Belirsiz Sasakiyan Uzay Formlarda Ricci-Pseudosimetrik Lightlike Hiperyüzeyler

Bu altbölümde, bir belirsiz Sasakiyan uzay formda Ricci-pseudosimetrik lightlike hiperyüzeyler incelenmekte ve bazı karakterizasyonlar verilmektedir.

Tanım 4.3.1. $\bar{M}(c)$ bir belirsiz Sasakiyan uzay form ve (M, g) de $\bar{M}(c)$ uzayının bir lightlike hiperyüzeyi olsun. Eğer M hiperyüzeyinin her noktasında $R \cdot S$ ve $Q(g, S)$ tensörleri lineer bağımlı ise, M hiperyüzeyine *Ricci-pseudosimetrik lightlike hiperyüzey* denir, yani M Ricci-pseudosimetrik lightlike hiperyüzey olması için gerek ve yeter şart $U_S = \{p \in M | Q(g, S) \neq 0\}$ kümesi üzerinde $R \cdot S = L_S Q(g, S)$ olmasıdır, burada L_S, U_S üzerinde fonksiyondur ve S Ricci tensörüdür.

Aşağıdaki teoremde, bir lightlike hiperyüzeyin Ricci-pseudosimetrik olması için yeter şart sunulmaktadır:

Teorem 4.3.1. $\bar{M}(c = 1)$, bir belirsiz Sasakiyan uzay form, (M, g), $\bar{M}(c)$ uzayının bir lightlike hiperyüzeyi ve A_N, B ye göre simetrik olsun. Eğer $B(X, Y)A^*_E A_N Z =$

$g(X,Y)A^*_\xi Z$ ve $C(X,Y)A^*_E Z = g(X,Y)Z$ ise bu durumda, M Ricci-pseudosimetrik lightlike hiperyüzeydir, öyle ki $L_S = 2$ dir, burada $X, Y, Z \in \Gamma(TM)$, $E \in \Gamma(RadTM)$ dir.

İspat. $X_1, X_2, X, Y \in \Gamma(TM)$ için $c = 1$ olduğundan,

$$
\begin{aligned}
&(R \cdot S)(X_1, X_2; X, Y) \\
&= -S(R(X,Y)X_1, X_2) - S(X_1, R(X,Y)X_2) \\
&= -S(g(Y,X_1)X - g(X,X_1)Y + B(Y,X_1)A_N X - B(X,X_1)A_N Y, X_2) \\
&- S(X_1, g(Y,X_2)X - g(X,X_2)Y + B(Y,X_2)A_N X - B(X,X_2)A_N Y) \\
&= -g(Y,X_1)S(X,X_2) + g(X,X_1)S(Y,X_2) + B(Y,X_1)S(A_N X, X_2) \\
&- B(X,X_1)S(A_N Y, X_2) - g(Y,X_2)S(X_1,X) + g(X,X_2)S(X_1,Y) \\
&- B(Y,X_2)S(X_1, A_N X) + B(X,X_2)S(X_1, A_N Y)
\end{aligned} \tag{4.3.1}
$$

olur. Burada düzenleme yapılırsa,

$$
\begin{aligned}
&(R \cdot S)(X_1, X_2; X, Y) \\
&= Q(g,S)(X_1, X_2; X, Y) + B(Y,X_1)S(A_N X, X_2) - B(X,X_1)S(A_N Y, X_2) \\
&- B(Y,X_2)S(X_1, A_N X) + B(X,X_2)S(X_1, A_N Y)
\end{aligned}
$$

dır. Diğer taraftan doğrudan hesaplamalarla,

$$
\begin{aligned}
&(R \cdot S)(X_1, X_2; X, Y) \\
&= Q(g,S)(X_1, X_2; X, Y) \\
&+ B(Y,X_1)[\alpha g(A_N X, X_2) + B(A_N X, X_2) iz A_N - B(A_N^2 X, X_2)] \\
&- B(X,X_1)[\alpha g(A_N Y, X_2) + B(A_N Y, X_2) iz A_N - B(A_N^2 Y, X_2)] \\
&- B(Y,X_2)[\alpha g(X_1, A_N X) + B(X_1, A_N X) iz A_N - B(A_N X_1, A_N X)] \\
&+ B(X,X_2)[\alpha g(X_1, A_N Y) + B(X_1, A_N Y) iz A_N - B(A_N X_1, A_N Y)]
\end{aligned} \tag{4.3.2}
$$

bulunur. Böylece eğer teoremin hipotezi sağlanırsa ve (4.3.1) ile (4.3.2) den,

$$(R \cdot S)(X_1, X_2; X, Y) = 2Q(g,S)(X_1, X_2; X, Y),$$

elde edilir, burada $\alpha = 2n - 1$ dir. Böylece ispat tamamlanır. $\square$

Son olarak bu altbölümde, $c = 1$ olan bir belirsiz Sasakiyan uzay formun Ricci-pseudosimetrik lightlike hiperyüzeyi için karakterizasyon verilmektedir.

Teorem 4.3.2. $\bar{M}(c = 1)$, bir belirsiz Sasakiyan uzay form, M, $M(c)$ uzayının bir Ricci-pseudosimetrik $(L_S = 1)$ lightlike hiperyüzeyi ve $\xi \in \Gamma(TM)$ olsun. Eğer $B(\xi, X_2) = 0$ ise bu durumda, ya M tamamen jeodeziktir ya da $S(E, A_N\xi) = 0$ dir.

İspat. Kabul edelim ki M, $\bar{M}(c = 1)$ bir belirsiz Sasakiyan uzay formun Ricci-pseudosimetrik lightlike hiperyüzeyi olsun. Böylece $X_1, X_2, X, Y \in \Gamma(TM)$ için (2.3.10) dan

$$\begin{aligned}
&(1 - L_S)Q(g, S)(X_1, X_2; X, Y) + B(Y, X_1)[\alpha g(A_N X, X_2) + B(A_N X, X_2) iz A_N \\
&- B(A_N^2 X, X_2)] - B(X, X_1)[\alpha g(A_N Y, X_2) + B(A_N Y, X_2) iz A_N - B(A_N^2 Y, X_2)] \\
&- B(Y, X_2)[\alpha g(X_1, A_N X) + B(X_1, A_N X) iz A_N - B(A_N X_1, A_N X)] \\
&+ B(X, X_2)[\alpha g(X_1, A_N Y) + B(X_1, A_N Y) iz A_N - B(A_N X_1, A_N Y)] = 0,
\end{aligned}$$

dir. Burada, $X_1 = E \in \Gamma(RadTM)$ alınırsa

$$\begin{aligned}
&(1 - L_S)Q(g, S)(E, X_2; X, Y) + B(Y, E)[\alpha g(A_N X, X_2) + B(A_N X, X_2) iz A_N \\
&- B(A_N^2 X, X_2)] - B(X, E)[\alpha g(A_N Y, X_2) + B(A_N Y, X_2) iz A_N - B(A_N^2 Y, X_2)] \\
&- B(Y, X_2)[\alpha g(E, A_N X) + B(E, A_N X) iz A_N - B(A_N E, A_N X)] \\
&+ B(X, X_2)[\alpha g(E, A_N Y) + B(E, A_N Y) iz A_N - B(A_N E, A_N Y)] = 0.
\end{aligned}$$

elde edilir. Bu durumda,

$$\begin{aligned}
&(1 - L_S)[g(Y, X_2)B(A_N E, X) + g(X, X_2)B(A_N E, Y)] \\
&+ B(Y, X_2)B(A_N E, A_N X) - B(X, X_2)B(A_N E, A_N Y) = 0.
\end{aligned}$$

dir. $(L_S = 1)$ olduğu göz önüne alınırsa ve $X = \xi$ seçilirse

$$B(Y, X_2)B(A_N E, A_N \xi) - B(\xi, X_2)B(A_N E, A_N Y) = 0.$$

olur. Eğer $B(\xi, X_2) = 0$ ise

$$B(Y, X_2)B(A_N E, A_N \xi) = 0$$

elde edilir. $S(E, A_N\xi) = -B(A_N E, A_N\xi)$ olduğundan ispat tamamlanır. □

Sonuç 4.3.1. $\bar{M}(c)$, bir belirsiz Sasakiyan uzay form ve (M, g) de $\bar{M}(c)$ uzayının Ricci-pseudosimetrik lightlike hiperyüzeyi olsun. Bu durumda, M tamamen jeodezik ise Ricci semi-simetriktir.

İspat. İspat (4.3.2) den açıktır. □

4.4 Belirsiz Sasakiyan Uzay Formlarda Weyl Projektif Pseudosimetrik Lightlike Hiperyüzeyler

Bu altbölümde, Weyl projektif pseudosimetri olma şartının lightlike hiperyüzeyler üzerine olan etkisi araştırılmakta ve bir karakterizasyon verilmektedir.

Tanım 4.4.1. $\bar{M}(c)$, bir belirsiz Sasakiyan uzay form ve (M, g) de $\bar{M}(c)$ uzayının bir lightlike hiperyüzeyi olsun. Eğer M hiperyüzeyinin her noktasında $R \cdot W$ ve $Q(g, W)$ tensörleri lineer bağımlı ise M hiperyüzeyine *Weyl projektif pseudosimetrik lightlike hiperyüzeyi* denir, yani M hiperyüzeyinin pseudosimetrik lightlike hiperyüzey olması için gerek ve yeter şart $U_W = \{p \in M | Q(g, W) \neq 0\}$ kümesi üzerinde $R \cdot W = L_W Q(g, W)$ olmasıdır, burada L_W, U_W üzerinde fonksiyondur.

Bir Weyl projektif pseudosimetrik lightlike hiperyüzeyinin pseudosimetrik olması için gerek ve yeter şart aşağıdaki teoremde verilmektedir:

Teorem 4.4.1. $\bar{M}(c = 1)$, bir belirsiz Sasakiyan uzay form ve (M, g) de $\bar{M}(c)$ uzayının bir Weyl projektif pseudosimetrik lightlike hiperyüzeyi olsun. Bu durumda, M hiperyüzeyinin pseudosimetrik olması için gerek ve yeter şart $\mathcal{A} = \mathcal{B}$ olmasıdır, burada

$$\begin{aligned}
\mathcal{A} = -\frac{1}{n-1}\{&-g(Y, X_1)[S(X_2, X_3)g(X, X_4) - S(X, X_3)g(X_2, X_4)] \\
&+ g(X, X_1)[S(X_2, X_3)g(Y, X_4) - S(Y, X_3)g(X_2, X_4)] \\
&- B(Y, X_1)[S(X_2, X_3)g(A_N X, X_4) - S(A_N X, X_3)g(X_2, X_4)] \\
&+ B(X, X_1)[S(X_2, X_3)g(A_N Y, X_4) - S(A_N Y, X_3)g(X_2, X_4)] \\
&- g(Y, X_2)[S(X, X_3)g(X_1, X_4) - S(X_1, X_3)g(X, X_4)] \\
&+ g(X, X_2)[S(Y, X_3)g(X_1, X_4) - S(X_1, X_3)g(Y, X_4)]
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&- B(Y,X_2)[S(A_N X,X_3)g(X_1,X_4) - S(X_1,X_3)g(A_N X,X_4)]\\
&+ B(X,X_2)[S(A_N Y,X_3)g(X_1,X_4) - S(X_1,X_3)g(A_N Y,X_4)]\\
&- g(Y,X_3)[S(X_2,X)g(X_1,X_4) - S(X_1,X)g(X_2,X_4)]\\
&+ g(X,X_3)[S(X_2,Y)g(X_1,X_4) - S(X_1,Y)g(X_2,X_4)]\\
&- B(Y,X_3)[S(X_2,A_N X)g(X_1,X_4) - S(X_1,A_N X)g(X_2,X_4)]\\
&+ B(X,X_3)[S(X_2,A_N Y)g(X_1,X_4) - S(X_1,A_N Y)g(X_2,X_4)]\\
&- g(Y,X_4)[S(X_2,X_3)g(X_1,X) - S(X_1,X_3)g(X_2,X)]\\
&+ g(X,X_4)[S(X_2,X_3)g(X_1,Y) - S(X_1,X_3)g(X_2,Y)]\\
&- B(Y,X_4)[S(X_2,X_3)g(X_1,A_N X) - S(X_1,X_3)g(X_2,A_N X)]\\
&+ B(X,X_4)[S(X_2,X_3)g(X_1,A_N Y) - S(X_1,X_3)g(X_2,A_N Y)]\}
\end{aligned}
$$

ve

$$
\begin{aligned}
&\mathcal{B} = -\frac{1}{n-1}\{-g(Y,X_1)[S(X_2,X_3)g(X,X_4) - S(X,X_3)g(X_2,X_4)]\\
&+ g(X,X_1)[S(X_2,X_3)g(Y,X_4) - S(Y,X_3)g(X_2,X_4)]\\
&- g(Y,X_2)[S(X,X_3)g(X_1,X_4) - S(X_1,X_3)g(X,X_4)]\\
&+ g(X,X_2)[S(Y,X_3)g(X_1,X_4) - S(X_1,X_3)g(Y,X_4)]\\
&- g(Y,X_3)[S(X_2,X)g(X_1,X_4) - S(X_1,X)g(X_2,X_4)]\\
&+ g(X,X_3)[S(X_2,Y)g(X_1,X_4) - S(X_1,Y)g(X_2,X_4)]\\
&- g(Y,X_4)[S(X_2,X_3)g(X_1,X) - S(X_1,X_3)g(X_2,X)]\\
&+ g(X,X_4)[S(X_2,X_3)g(X_1,Y) - S(X_1,X_3)g(X_2,Y)]\}
\end{aligned}
$$

dir.

İspat. $X_1, X_2, X_3, X_4, X, Y \in \Gamma(TM)$ için

$$
\begin{aligned}
&(R \cdot W)(X_1,X_2,X_3,X_4;X,Y)\\
&= -W(R(X,Y)X_1,X_2,X_3,X_4) - W(X_1,R(X,Y)X_2,X_3,X_4)\\
&- W(X_1,X_2,R(X,Y)X_3,X_4) - W(X_1,X_2,X_3,R(X,Y)X_4)
\end{aligned}
$$

dır. Burada $c = 1$ durumunda Gauss denklemi kullanılırsa,

$$
\begin{aligned}
&(R \cdot W)(X_1, X_2, X_3, X_4; X, Y) \\
&= -W(g(Y, X_1)X - g(X, X_1)Y + B(Y, X_1)A_N X - B(X, X_1)A_N Y, X_2, X_3, X_4) \\
&- W(X_1, g(Y, X_2)X - g(X, X_2)Y + B(Y, X_2)A_N X - B(X, X_2)A_N Y, X_3, X_4) \\
&- W(X_1, X_2, g(Y, X_3)X - g(X, X_3)Y + B(Y, X_3)A_N X - B(X, X_3)A_N Y, X_4) \\
&- W(X_1, X_2, X_3, g(Y, X_4)X - g(X, X_4)Y + B(Y, X_4)A_N X - B(X, X_4)A_N Y)
\end{aligned}
$$

olur. R ve S lineer olduğundan,

$$
\begin{aligned}
&(R \cdot W)(X_1, X_2, X_3, X_4; X, Y) \\
&= -g(Y, X_1)W(X, X_2, X_3, X_4) + g(X, X_1)W(Y, X_2, X_3, X_4) \\
&- B(Y, X_1)W(A_N X, X_2, X_3, X_4) + B(X, X_1)W(A_N Y, X_2, X_3, X_4) \\
&- g(Y, X_2)W(X_1, X, X_3, X_4) + g(X, X_2)W(X_1, Y, X_3, X_4) \\
&- B(Y, X_2)W(X_1, A_N X, X_3, X_4 + B(X, X_2)W(X_1, A_N Y, X_3, X_4) \\
&- g(Y, X_3)W(X_1, X_2, X, X_4) + g(X, X_3)W(X_1, X_2, Y, X_4) \\
&- B(Y, X_3)W(X_1, X_2, A_N X, X_4) + B(X, X_3)W(X_1, X_2, A_N Y, X_4) \\
&- g(Y, X_4)W(X_1, X_2, X_3, X) + g(X, X_4)W(X_1, X_2, X_3, Y) \\
&- B(Y, X_4)W(X_1, X_2, X_3, A_N X) + B(X, X_4)W(X_1, X_2, X_3, A_N Y)
\end{aligned}
$$

bulunur. Buradan,

$$
\begin{aligned}
&(R \cdot W)(X_1, X_2, X_3, X_4; X, Y) \\
&= -g(Y, X_1)g(W(X, X_2)X_3, X_4) + g(X, X_1)g(W(Y, X_2)X_3, X_4) \\
&- B(Y, X_1)g(W(A_N X, X_2)X_3, X_4) + B(X, X_1)g(W(A_N Y, X_2)X_3, X_4) \\
&- g(Y, X_2)g(W(X_1, X)X_3, X_4) + g(X, X_2)g(W(X_1, Y)X_3, X_4) \\
&- B(Y, X_2)g(W(X_1, A_N X)X_3, X_4 + B(X, X_2)g(W(X_1, A_N Y)X_3, X_4) \\
&- g(Y, X_3)g(W(X_1, X_2)X, X_4) + g(X, X_3)g(W(X_1, X_2)Y, X_4) \\
&- B(Y, X_3)g(W(X_1, X_2)A_N X, X_4) + B(X, X_3)g(W(X_1, X_2)A_N Y, X_4) \\
&- g(Y, X_4)g(W(X_1, X_2)X_3, X) + g(X, X_4)g(W(X_1, X_2)X_3, Y) \\
&- B(Y, X_4)g(W(X_1, X_2)X_3, A_N X) + B(X, X_4)g(W(X_1, X_2)X_3, A_N Y)
\end{aligned}
$$

elde edilir. (2.1.4) kullanılırsa,

$$
\begin{aligned}
&(R\cdot W)(X_1,X_2,X_3,X_4;X,Y)\\
&= -g(Y,X_1)g(R(X,X_2)X_3-\frac{1}{n-1}[S(X_2,X_3)X-S(X,X_3)X_2],X_4)\\
&+g(X,X_1)g(R(Y,X_2)X_3-\frac{1}{n-1}[S(X_2,X_3)Y-S(Y,X_3)X_2],X_4)\\
&-B(Y,X_1)g(R(A_NX,X_2)X_3-\frac{1}{n-1}[S(X_2,X_3)A_NX-S(A_NX,X_3)X_2],X_4)\\
&+B(X,X_1)g(R(A_NY,X_2)X_3-\frac{1}{n-1}[S(X_2,X_3)A_NY-S(A_NY,X_3)X_2],X_4)\\
&-g(Y,X_2)g(R(X_1,X)X_3-\frac{1}{n-1}[S(X,X_3)X_1-S(X_1,X_3)X],X_4)\\
&+g(X,X_2)g(R(X_1,Y)X_3-\frac{1}{n-1}[S(Y,X_3)X_1-S(X_1,X_3)Y],X_4)\\
&-B(Y,X_2)g(R(X_1,A_NX)X_3-\frac{1}{n-1}[S(A_NX,X_3)X_1-S(X_1,X_3)A_NX],X_4)\\
&+B(X,X_2)g(R(X_1,A_NY)X_3-\frac{1}{n-1}[S(A_NY,X_3)X_1-S(X_1,X_3)A_NY],X_4)\\
&-g(Y,X_3)g(R(X_1,X_2)X-\frac{1}{n-1}[S(X_2,X)X_1-S(X_1,X)X_2],X_4)\\
&+g(X,X_3)g(R(X_1,X_2)Y-\frac{1}{n-1}[S(X_2,Y)X_1-S(X_1,Y)X_2],X_4)\\
&-B(Y,X_3)g(R(X_1,X_2)A_NX-\frac{1}{n-1}[S(X_2,A_NX)X_1-S(X_1,A_NX)X_2],X_4)\\
&+B(X,X_3)g(R(X_1,X_2)A_NY-\frac{1}{n-1}[S(X_2,A_NY)X_1-S(X_1,A_NY)X_2],X_4)\\
&-g(Y,X_4)g(R(X_1,X_2)X_3-\frac{1}{n-1}[S(X_2,X_3)X_1-S(X_1,X_3)X_2],X)\\
&+g(X,X_4)g(R(X_1,X_2)X_3-\frac{1}{n-1}[S(X_2,X_3)X_1-S(X_1,X_3)X_2],Y)\\
&-B(Y,X_4)g(R(X_1,X_2)X_3-\frac{1}{n-1}[S(X_2,X_3)X_1-S(X_1,X_3)X_2],A_NX)\\
&+B(X,X_4)g(R(X_1,X_2)X_3-\frac{1}{n-1}[S(X_2,X_3)X_1-S(X_1,X_3)X_2],A_NY) \qquad (4.4.1)
\end{aligned}
$$

bulunur. Böylece (2.5.16) ve (2.5.19) den

$$
\begin{aligned}
&(R\cdot W)(X_1,X_2,X_3,X_4;X,Y)\\
&= Q(g,W)(X_1,X_2,X_3,X_4;X,Y)\\
&-B(Y,X_1)g(X_2,X_3)g(A_NX,X_4)+B(Y,X_1)g(A_NX,X_3)g(X_2,X_4)\\
&-B(Y,X_1)B(X_2,X_3)g(A_N^2X,X_4)+B(Y,X_1)B(A_NX,X_3)g(A_NX_2,X_4)
\end{aligned}
$$

$$+ B(X,X_1)g(X_2,X_3)g(A_NY,X_4) - B(X,X_1)g(A_NY,X_3)g(X_2,X_4)$$
$$+ B(X,X_1)B(X_2,X_3)g(A_N^2Y,X_4) - B(X,X_1)B(A_NY,X_3)g(A_NX_2,X_4)$$
$$- B(Y,X_2)g(A_NX,X_3)g(X_1,X_4) + B(Y,X_2)g(X_1,X_3)g(A_NX,X_4)$$
$$- B(Y,X_2)B(A_NX,X_3)g(A_NX_1,X_4) + B(Y,X_2)B(X_1,X_3)g(A_N^2X,X_4)$$
$$+ B(X,X_2)g(A_NY,X_3)g(X_1,X_4) - B(X,X_2)g(X_1,X_3)g(A_NY,X_4)$$
$$+ B(X,X_2)B(A_NY,X_3)g(A_NX_1,X_4) - B(X,X_2)B(X_1,X_3)g(A_N^2Y,X_4)$$
$$- B(Y,X_3)g(X_2,A_NX)g(X_1,X_4) + B(Y,X_3)g(X_1,A_NX)g(X_2,X_4)$$
$$- B(Y,X_3)B(X_2,A_NX)g(A_NX_1,X_4) + B(Y,X_3)B(X_1,A_NX)g(A_NX_2,X_4)$$
$$+ B(X,X_3)g(X_2,A_NY)g(X_1,X_4) - B(X,X_3)g(X_1,A_NY)g(X_2,X_4)$$
$$+ B(X,X_3)B(X_2,A_NY)g(A_NX_1,X_4) - B(X,X_3)B(X_1,A_NY)g(A_NX_2,X_4)$$
$$- B(Y,X_4)g(X_2,X_3)g(X_1,A_NX) + B(Y,X_4)g(X_1,X_3)g(X_2,A_NX)$$
$$- B(Y,X_4)B(X_2,X_3)g(A_NX_1,A_NX) + B(Y,X_4)B(X_1,X_3)g(A_NX_2,A_NX)$$
$$+ B(X,X_4)g(X_2,X_3)g(X_1,A_NY) - B(X,X_4)g(X_1,X_3)g(X_2,A_NY)$$
$$+ B(X,X_4)B(X_2,X_3)g(A_NX_1,A_NY) - B(X,X_4)B(X_1,X_3)g(A_NX_2,A_NY)$$
$$- \frac{1}{n-1}\{B(Y,X_1)[-\alpha g(A_NX,X_4)g(X_2,X_3) - g(A_NX,X_4)B(X_2,X_3)izA_N$$
$$+ g(A_NX,X_4)B(A_NX_2,X_3) + \alpha g(X_2,X_4)g(A_NX,X_3) + g(X_2,X_4)B(A_NX,X_3)izA_N$$
$$- g(X_2,X_4)B(A_N^2X,X_3)] + B(X,X_1)[\alpha g(A_NY,X_4)g(X_2,X_3)$$
$$+ g(A_NY,X_4)B(X_2,X_3)izA_N - g(A_NY,X_4)B(A_NX_2,X_3) - \alpha g(X_2,X_4)g(A_NY,X_3)$$
$$- g(X_2,X_4)B(A_NY,X_3)izA_N + g(X_2,X_4)B(A_N^2Y,X_3)]$$
$$+ B(Y,X_2)[-\alpha g(X_1,X_4)g(A_NX,X_3) - g(X_1,X_4)B(A_NX,X_3)izA_N$$
$$+ g(X_1,X_4)B(A_N^2X,X_3) + \alpha g(A_NX,X_4)g(X_1,X_3) + g(A_NX,X_4)B(X_1,X_3)izA_N$$
$$- g(A_NX,X_4)B(A_NX_1,X_3)] + B(X,X_2)[\alpha g(X_1,X_4)g(A_NY,X_3)$$
$$+ g(X_1,X_4)B(A_NY,X_3)izA_N - g(X_1,X_4)B(A_N^2Y,X_3) - \alpha g(A_NY,X_4)g(X_1,X_3)$$
$$- g(A_NY,X_4)B(X_1,X_3)izA_N + g(A_NY,X_4)B(A_NX_1,X_3)]$$
$$+ B(Y,X_3)[-\alpha g(X_1,X_4)g(X_2,A_NX) - g(X_1,X_4)B(X_2,A_NX)izA_N$$
$$+ g(X_1,X_4)B(A_NX_2,A_NX) + \alpha g(X_2,X_4)g(X_1,A_NX) + g(X_2,X_4)B(X_1,A_NX)izA_N$$
$$- g(X_2,X_4)B(A_NX_1,A_NX)] + B(X,X_3)[g(X_1,X_4)g(X_2,A_NY)$$

$$+ g(X_1,X_4)B(X_2,A_NY)izA_N - g(X_1,X_4)B(A_NX_2,A_NY) - \alpha g(X_2,X_4)g(X_1,A_NY)$$

$$- g(X_2,X_4)B(X_1,A_NY)izA_N + g(X_2,X_4)B(A_NX_1,A_NY)]$$

$$+ B(Y,X_4)[-\alpha g(X_1,A_NX)g(X_2,X_3) - g(X_1,A_NX)B(X_2,X_3)izA_N$$

$$+ g(X_1,A_NX)B(A_NX_2,X_3) - \alpha g(X_2,A_NX)g(X_1,X_3) + g(X_2,A_NX)B(X_1,X_3)izA_N$$

$$- g(X_2,A_NX)B(A_NX_1,X_3)] + B(X,X_4)[\alpha g(X_1,A_NY)g(X_2,X_3)$$

$$+ g(X_1,A_NY)B(X_2,X_3)izA_N - g(X_1,A_NY)B(A_NX_2,X_3) - \alpha g(X_2,A_NY)g(X_1,X_3)$$

$$- g(X_2,A_NY)B(X_1,X_3)izA_N + g(X_2,A_NY)B(A_NX_1,X_3)]\}$$

elde edilir. Diğer taraftan,

$$\begin{aligned}
&Q(g,W)(X_1,X_2,X_3,X_4;X,Y)\\
&= -W((X\wedge_g Y)X_1,X_2,X_3,X_4) - W(X_1,(X\wedge_g Y)X_2,X_3,X_4)\\
&- W(X_1,X_2,(X\wedge_g Y)X_3,X_4) - W(X_1,X_2,X_3,(X\wedge_g Y)X_4)\\
&= -g(Y,X_1)W(X,X_2,X_3,X_4) + g(X,X_1)W(Y,X_2,X_3,X_4)\\
&- g(Y,X_2)W(X_1,X,X_3,X_4) + g(X,X_2)W(X_1,Y,X_3,X_4)\\
&- g(Y,X_3)W(X_1,X_2,X,X_4) + g(X,X_3)W(X_1,X_2,Y,X_4)\\
&- g(Y,X_4)W(X_1,X_2,X_3,X) + g(X,X_4)W(X_1,X_2,X_3,Y)
\end{aligned}$$

dır. Burada (2.1.4) kullanılırsa,

$$\begin{aligned}
&Q(g,W)(X_1,X_2,X_3,X_4;X,Y)\\
&= -g(Y,X_1)g(R(X,X_2)X_3 - \frac{1}{n-1}[S(X_2,X_3)X - S(X,X_3)X_2],X_4)\\
&+ g(X,X_1)g(R(Y,X_2)X_3 - \frac{1}{n-1}[S(X_2,X_3)Y - S(Y,X_3)X_2],X_4)\\
&- g(Y,X_2)g(R(X_1,X)X_3 - \frac{1}{n-1}[S(X,X_3)X_1 - S(X_1,X_3)X],X_4)\\
&+ g(X,X_2)g(R(X_1,Y)X_3 - \frac{1}{n-1}[S(Y,X_3)X_1 - S(X_1,X_3)Y],X_4)\\
&- g(Y,X_3)g(R(X_1,X_2)X - \frac{1}{n-1}[S(X_2,X)X_1 - S(X_1,X)X_2],X_4)\\
&+ g(X,X_3)g(R(X_1,X_2)Y - \frac{1}{n-1}[S(X_2,Y)X_1 - S(X_1,Y)X_2],X_4)\\
&- g(Y,X_4)g(R(X_1,X_2)X_3 - \frac{1}{n-1}[S(X_2,X_3)X_1 - S(X_1,X_3)X_2],X)\\
&+ g(X,X_4)g(R(X_1,X_2)X_3 - \frac{1}{n-1}[S(X_2,X_3)X_1 - S(X_1,X_3)X_2],Y) \qquad (4.4.2)
\end{aligned}$$

olur. (2.5.16) ve (2.5.19) dan,

$$
\begin{aligned}
&Q(g,W)(X_1,X_2,X_3,X_4;X,Y)\\
&= -g(Y,X_1)[g(A_NX,X_4)B(X_2,X_3) - B(X,X_3)g(A_NX_2,X_4)]\\
&+ g(X,X_1)[g(A_NY,X_4)B(X_2,X_3) - B(Y,X_3)g(A_NX_2,X_4)]\\
&- g(Y,X_2)[B(X,X_3)g(A_NX_1,X_4) - g(A_NX,X_4)B(X_1,X_3)]\\
&+ g(X,X_2)[B(Y,X_3)g(A_NX_1,X_4) - g(A_NY,X_4)B(X_1,X_3)]\\
&- g(Y,X_3)[B(X_2,X)g(A_NX_1,X_4) - B(X_1,X)g(A_NX_2,X_4)]\\
&+ g(X,X_3)[B(X_2,Y)g(A_NX_1,X_4) - B(X_1,Y)g(A_NX_2,X_4)]\\
&- g(Y,X_4)[g(A_NX_1,X)B(X_2,X_3) - g(A_NX_2,X)B(X_1,X_3)]\\
&+ g(X,X_4)[g(A_NX_1,Y)B(X_2,X_3) - g(A_NX_2,Y)B(X_1,X_3)]\\
&- \frac{1}{n-1}\{g(Y,X_1)g(X_2,X_4)[B(X,X_3)izA_N - B(A_NX,X_3)]\\
&- g(X,X_1)g(X_2,X_4)[B(Y,X_3)izA_N - B(A_NY,X_3)] - g(Y,X_2)g(X_1,X_4)[B(X,X_3)izA_N\\
&- B(A_NX,X_3)] + g(X,X_2)g(X_1,X_4)[B(Y,X_3)izA_N - B(A_NY,X_3)]\\
&- g(Y,X_3)g(X_1,X_4)[B(X_2,X)izA_N - B(A_NX_2,X)] + g(Y,X_3)g(X_2,X_4)[B(X_1,X)izA_N\\
&- B(A_NX_1,X)] + g(X,X_3)g(X_1,X_4)[B(X_2,Y)izA_N - B(A_NX_2,Y)]\\
&- g(X,X_3)g(X_2,X_4)[B(X_1,Y)izA_N - B(A_NX_1,Y)]\}
\end{aligned}
$$

elde edilir. Burada (4.4.1) ve (4.4.2) denklemleri düzenlenirse,

$$(R\cdot W)(X_1,X_2,X_3,X_4;X,Y) = (R\cdot R)(X_1,X_2,X_3,X_4;X,Y) + \mathcal{A},$$

ve

$$Q(g,W)(X_1,X_2,X_3,X_4;X,Y)) = Q(g,R)(X_1,X_2,X_3,X_4;X,Y) + \mathcal{B},$$

ifadeleri elde edilir. Böylece, $\mathcal{A}$ ve $\mathcal{B}$ ifadeleri göz önüne alınırsa ispat tamamlanır.

□

Ayrıca, bir başka ifade olarak da şu teorem verilebilir:

Teorem 4.4.2. $\bar{M}(c=1)$, bir belirsiz Sasakiyan uzay form ve (M,g) de $\bar{M}(c)$ uzayının bir pseudosimetrik lightlike hiperyüzey olsun. Bu durumda, M hiperyüzeyinin Weyl projektif pseudosimetrik olması için gerek ve yeter koşul $\mathcal{A}=\mathcal{B}$ olmasıdır.

Teorem 4.4.3. $\bar{M}(c=1)$, bir belirsiz Sasakiyan uzay form, (M,g), $\bar{M}(c)$ uzayının bir Weyl projektif pseudosimetrik lightlike hiperyüzeyi, $\xi \in \Gamma(TM)$ ve $A_N E \in \Gamma(D_0)$ null olmayan bir vektör alanı olsun. Eğer $u(Y) \neq 0$ ise, bu durumda M tamamen jeodeziktir.

İspat. $X_2, X_3, X_4, Y \in \Gamma(TM)$ ve $X_1 = X = E \in \Gamma(RadTM)$ için

$$
\begin{aligned}
&(R \cdot W)(E, X_2, X_3, X_4; E, Y) \\
&= Q(g,W)(E, X_2, X_3, X_4; E, Y) - B(Y, X_2)B(A_N E, X_3)g(A_N E, X_4) \\
&+ B(E, X_2)B(A_N Y, X_3)g(A_N E, X_4) - B(Y, X_3)B(X_2, A_N E)g(A_N E, X_4) \\
&+ B(E, X_3)B(X_2, A_N Y)g(A_N E, X_4) - B(Y, X_4)B(X_2, X_3)g(A_N E, A_N E) \\
&- \frac{1}{n-1}\{-B(Y, X_2)g(A_N E, X_4)B(A_N E, X_3) - B(Y, X_3)g(X_2, X_4)B(A_N E, A_N E) \\
&- B(Y, X_4)g(X_2, A_N E)B(A_N E, X_3)\}
\end{aligned}
$$

bulunur. Bu durumda $Q(g,W)(E, X_2, X_3, X_4; E, Y) = 0$ olduğu göz önüne alınarak M Weyl projektif pseudosimetrik lightlike hiperyüzeyi için $X_4 = \xi$ ve $X_2 = V = -\bar{\phi}E$ alınırsa

$$
\begin{aligned}
&B(Y,\xi)B(X_2, X_3)g(A_N E, A_N E) - \frac{1}{n-1}\{B(Y, X_3)g(\bar{\phi}E, \xi)B(A_N E, A_N E) \\
&+ B(Y,\xi)g(\bar{\phi}E, A_N E)B(A_N E, X_3)\} = 0
\end{aligned}
$$

olur. Buradan,

$$
B(Y,\xi)B(X_2, X_3)g(A_N E, A_N E) = 0
$$

bulunur. Böylece ispat tamamlanır. □

KAYNAKLAR

[1] Cartan, E. (1926). Sur une classse remarquable d'espaces de Rieamnn. *Bull. Soc. Math. France* **54**, 214-264.

[2] Lungiambudila, O., Massamba F., Tossa, J. (2010). Symmetry properties of lightlike hypersurfaces in indefinite Sasakian manifolds. *STU. J. Math* **46(2)**, 177-204.

[3] Güneş, R., Şahin B., Kılıç, E. (2003). On Lightlike Hypersurfaces of a Semi-Riemannian Space from. *Turk J. Math.* **27**, 283-297.

[4] Takagi, R. (1972). An example of Riemannian manifold satisfying $R(X,Y).R = 0$ but not $\nabla R = 0$. *Tôhoku Math. J.* **24**, 105-108.

[5] Boeckx, E., Kowalski, O., Vanhecke, L. (1996). *Riemannian manifolds of conullity two*. World Scientific,.

[6] Deszcz, R. (1992). *On pseudo symmetric spaces*. Habilitation Thesis, K.U. Leuven,.

[7] Deszcz, R. (1992). On pseudosymmetric spaces. *Bull. Soc. Math. Belg.* **44**, Sér. A, Fasc.1, 1-34.

[8] Adamow, A., Deszcz, R. (1983). On totally umbilical submanifolds of some class of Riemannian manifolds. *Demonstratio Math.* **16**, 39-59.

[9] Haesen, S., Verstraelen L. (2007). Properties of a Scalar Curvature Invariant Depending on Two Planes. *Manuscripta Math.* **122**, 59-72.

[10] Deprez, J., Deszcz, R., Verstraelen, L. (1989). Examples of pseudosymmetric conformally flat warped product. *Chinese J. Math.* **17**, 51-65.

[11] Arslan, K., Deszcz, R., Ezentaş, R., Hotloś, M., Murathan, C. (2014). On generalized Robertson-Walker spacetimes satisfying some curvature condition. *Turkish J.Math.* **38**, 353-373.

[12] De, U.C., Murathan, C., Özgür, C. (2010). Pseudo symmetric and pseudo Ricci symmetric warped product manifolds. *Commun. Korean Math. Soc.* **25(4)**, 615-621.

[13] Deszcz, R., Grycak, W. (1987). On some class of warped product manifolds. *Bull. Inst. Math. Acad. Sinica* **15**, 311-322.

[14] Deszcz, R., Hotloś, M. (1988). Remarks on Riemannian manifolds satisfying certain curvature condition imposed on the Ricci tensor. *Pr.Nauk.Pol.Szczec* **11**, 23-34.

[15] Deszcz, R., Verheyen, P., Verstraelen, L. (1996). On some generalized Einstein metric conditions. *Publ. Inst. Math. (Beograd) (N.S.)* **60(74)**, 108-120.

[16] Deszcz R., Haesen S., Verstraelen L. (2008). On natural symmetries, in: Topics in Differential Geometry, *Romanian Academy of Sciences, Bucharest*, 249-308.

[17] Deszcz, R., Glogowska, M., Hotloś, M., Sawicz, K. (2011). A Survey on Generalized Einstein Metric Conditions, in: Advances in Lorentzian Geometry: Proceedings of the Lorentzian Geometry Conference in Berlin, AMS/IP Studies in Advanced Mathematics, S.-T. Yau(series ed.), M. Plaue, A.D. Rendall and M. Scherfner (eds.) **49**: 27-46.

[18] Özgür, C. (2001). *Pseudo Simetrik Manifoldlar.* Doktora Tezi, Uludağ Üniversitesi, Fen-Bilimleri Enstitüsü Bursa, Türkiye.

[19] Yıldız, A., Murathan C. (2008). Ricci Generalized Pseudo-Parallel Kaehlerian Submanifolds in Complex Space Forms. *Bull. Malays. Math. Sci. Soc.* **31(2)**, 153-163.

[20] Deszcz, R., Hotloś, M. (2003). On some pseudosymmetry type curvature condition. *Tsukuba J. Math.* **27**, 13-30.

[21] Bejancu, A., Duggal, K.L. (1995). Lightlike submanifolds of semi-Riemannian manifolds. *Acta. Appl. Math.* **38(2)**, 197-215.

[22] Şahin, B. (2007). Lightlike hypersurfaces of semi-Euclidean spaces satisfying curvature conditions of semisymmetry type. *Turk J. Math* **31**, 139-162.

[23] Massamba, F. (2008). Semi-parallel lightlike hypersurfaces of indefinite Sasakian manifolds. *Int. J. Contemp. Math. Sciences* **3(13)**, 629-634.

[24] Massamba, F. (2008). On weakly Ricci symmetric lightlike hypersurfaces. *STU J. Math* **44(2)**, 181-201.

[25] Massamba, F. (2009). On semi-parallel lightlike hypersurfaces of indefinite Kenmotsu manifolds. *J. Geom* **95**, 73-89.

[26] Massamba, F. (2013). Symmetry of null geometry in indefinite Kenmotsu manifolds. *Mediterr. J. Math. Springer Basel AG.* **10(2)**, 1079-1099.

[27] Upadhyay, A., Gupta R.S., Sharfuddin, A. (2012). Semi-symmetric and Ricci semi-symmetric lightlike hypersurfaces of an indefinite generalized Sasakian space form. *International Electronic Journal of Geometry* **5(1)**, 140-150.

[28] O'Neill, B. (1983). *Semi-Riemann Geometry.* Academic Press, New York.

[29] Duggal K. L., Bejancu, A. (1996). *Lightlike Submanifolds of Semi-Riemannian Manifolds and Applications.* Dordrecht: Kluwer Acad. Publishers.

[30] Duggal K.L., Şahin, B. (2010). *Differential Geometry of Lightlike Submanifolds.* Birkhäuser Verlag AG.

[31] Hacısağlihoğlu, H.H. (1993). *Diferensiyel Geometri cilt I, II, III.* Ankara.

[32] Narain, D., Prakash, A., Prasad, B. (2009). A pseudo projective curvature tensor on a Lorentzian para-Sasakian manifold. *Analele Ştiinţifice Ale Universităţii"Al.i. Cuza" din Iaşi (S.N.) Matematică, Tomul LV.* **2**, 275-284.

[33] Şahin, B. (1996). *CR-Altmanifoldların Geometrisi.* Yüksek Lisans Tezi, İnönü Üniversitesi, Fen-Bilimleri Enstitüsü Malatya, Türkiye.

[34] Şahin, B. (2012). *Manifoldların Diferensiyel Geometrisi.* Nobel Akademik Yayıncılık.

[35] Defever, F. (2000). Ricci-semisymmetric hypersurfaces. *Balkan J. of Geometry and Its Appl* **5(1)**, 81-91.

[36] Arslan, K., Çelik, Y., Deszcz R., Ezentaş R. (1998). On the equivalence of Ricci-semisymmetry and semisymmetry. *Colloquium Mathematicum* **76(2)**.

[37] Deszcz, R. (1996). On certain classes of hypersurfaces in spaces of constant curvature. *Geometry and Topology of Submanifolds* **8**, Singapore, World Sci., 101-110.

[38] Deszcz, R., Verstraelen L., Yaprak, Ş. (1996). On hypersurfaces with pseudosymmetric Weyl tensor. *Geometry and Topology of Submanifolds* **8**, Singapore, World Sci, 111-120.

[39] Blair D.E. (1976). *Contact Manifolds in Riemannian Geometry.* Lecture Notes in Math., 509, Springer Verlag.

[40] Yano, K., Kon, M. (1984). *Structures on Manifolds*, World Scientific.

[41] Blair D.E. (2002). *Riemannian Geometry of Contact and Symplectic Manifolds.* Birkhäuser Boston.

[42] Duggal, K.L. (1990). Spacetime manifolds and contact structures. *Internat. J. Math. and Math. Sci.* **13**, 545-554.

[43] Takahashi, T. (1969). Sasakian manifolds with pseudo-Riemannian metric. *Tôhoku Math. J.* **21**, 271-290.

[44] Calin, C. (1999). On the existence of degenerate hypersurfaces in Sasakian manifolds. *Arab Journal of Mathematical Sciences* **5(1)**, 21-27.

[45] Duggal K. L. (2007). On scalar curvature in lightlike geometry. *J. Geom. Phys.* **57(2)**, 473-481.

ÖZGEÇMİŞ

30 Mayıs 1983 tarihinde Erzurum'da doğdu. İlk öğrenimini Erzurum'da, orta ve lise öğrenimini Malatya'da tamamladı. 2001 yılında İnönü Üniversitesi Fen-Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümü lisans programına kayıt yaptırdı ve Temmuz 2005'de öğrenimini tamamladı. 2006'da İnönü Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalında yüksek lisans programına kayıt yaptırdı. Eylül 2009' da İnönü Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim dalında doktora programına kayıt yaptırdı. 2011'de, İnönü Üniversitesi Fen-Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümünde araştırma görevlisi olarak göreve başladı. Evli ve bir çocuk annesi olan Sema Kazan, halen İnönü Üniversitesi Fen-Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümünde araştırma görevlisi olarak görev yapmaktadır.