T.C.
İNÖNÜ ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

BAZI KISMİ DİFERENSİYEL DENKLEMLERİN B-SPLİNE DİFERENSİYEL QUADRATURE METODU İLE NÜMERİK ÇÖZÜMLERİ

Ali BAŞHAN

DOKTORA TEZİ

MATEMATİK ANABİLİM DALI

Ocak 2015

Tezin Başlığı : BAZI KISMİ DİFERENSİYEL DENKLEMLERİN B-SPLİNE DİFERENSİYEL QUADRATURE METODU İLE NÜMERİK ÇÖZÜMLERİ

Tezi Hazırlayan : Ali BAŞHAN

Sınav Tarihi : 16.01.2015

Yukarıda adı geçen tez jürimizce değerlendirilerek Matematik Ana Bilim Dalında Doktora Tezi olarak kabul edilmiştir.

Sınav Jüri Üyeleri

Tez Danışmanı: **Yrd. Doç. Dr. Turabi GEYİKLİ** ________________

İnönü Üniversitesi

Eş Danışman : **Yrd.Doç.Dr.S.B.Gazi KARAKOÇ** ________________

Nevşehir Hacı Bektaş Veli Üniversitesi

Prof. Dr. İdris DAĞ ________________

Osmangazi Üniversitesi

Prof. Dr. Alaattin ESEN ________________

İnönü Üniversitesi

Prof. Dr. İsmet ÖZDEMİR ________________

İnönü Üniversitesi

Doç. Dr. Alper KORKMAZ ________________

Çankırı Karatekin Üniversitesi

Prof. Dr. Alaattin ESEN
Enstitü Müdürü

ONUR SÖZÜ

Doktora Tezi olarak sunduğum "Bazı Kısmi Diferensiyel Denklemlerin B-spline Diferensiyel Quadrature Metodu ile Nümerik Çözümleri" başlıklı bu çalışmanın bilimsel ahlâk ve geleneklere aykırı düşecek bir yardıma başvurmaksızın tarafımdan yazıldığını ve yararlandığım bütün kaynakların, hem metin içinde hem de kaynakçada yöntemine uygun biçimde gösterilenlerden oluştuğunu belirtir, bunu onurumla doğrularım.

Ali BAŞHAN

ÖZET

Doktora Tezi

BAZI KISMİ DİFERENSİYEL DENKLEMLERİN B-SPLİNE DİFERENSİYEL QUADRATURE METODU İLE NÜMERİK ÇÖZÜMLERİ

Ali BAŞHAN

İnönü Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Anabilim Dalı

166+xix sayfa

2015

Danışman: Yrd. Doç. Dr. Turabi GEYİKLİ

Bu tez beş bölümden oluşmaktadır. Birinci bölümde, tezde kullanılacak olan diferensiyel quadrature metodu hakkında bazı genel bilgiler verildikten sonra spline fonksiyonlar, B-spline fonksiyonlar, Thomas algoritmaları, dördüncü mertebeden Runge-Kutta algoritması, kararlılık ve yakınsama oranı hakkında temel bilgiler verildi.

İkinci bölümde, daha sonraki bölümlerde kullanılacak olan B-spline diferensiyel quadrature metotlar hakkında temel bilgiler verildi.

Üçüncü bölümde, mKdV denkleminin kuintik B-spline diferensiyel quadrature metot ile nümerik çözümleri elde edildi. Bu yöntem ele alınan dört test probleme uygulandı. Elde edilen nümerik sonuçlar literatürde mevcut olan bazı sonuçlar ile karşılaştırılarak hata normları ve korunum sabitleri tablolar halinde verildi. Elde edilen nümerik çözümlerin ve bu çözümler elde edilirken kullanılan katsayı matrisinden elde edilen özdeğerlerin grafikleri verilerek kararlılık analizi incelendi.

Dördüncü bölümde, KdVB denkleminin yanısıra KdV ve Burgers' denklemlerinin de kuintik B-spline diferensiyel quadrature metot ile nümerik çözümleri elde edildi. Bu yöntem, ele alınan dört test probleme uygulandı. Elde edilen nümerik sonuçlar literatürde mevcut olan bazı sonuçlar ile karşılaştırılarak hata normları ve korunum sabitleri tablolar halinde verildi. Elde edilen nümerik çözümlerin ve bu çözümler elde edilirken kullanılan katsayı matrisinden elde edilen özdeğerlerin grafikleri verilerek kararlılık analizi incelendi.

Beşinci bölümde, mBurgers' denkleminin kuintik ve kuartik B-spline diferensiyel quadrature metotlar ile nümerik çözümleri elde edildi. Bu yöntemler ele alınan bir test probleme uygulandı. Elde edilen nümerik sonuçlar literatürdeki mevcut sonuçlar ile karşılaştırılarak hata normları tablolar halinde verildi. Önceki bölümlerde olduğu gibi elde edilen nümerik çözümlerin ve bu çözümler elde edilirken kullanılan katsayı matrisinden elde edilen özdeğerlerin grafikleri verilerek kararlılık analizi incelendi.

ANAHTAR KELİMELER: Diferensiyel Quadrature Metot, Kısmi Diferensiyel Denklemler, B-spline Fonksiyonlar, mKdV Denklemi, KdVB Denklemi, KdV Denklemi, Burgers' Denklemi, mBurgers' Denklemi, Kararlılık.

ABSTRACT

Ph.D. Thesis

NUMERICAL SOLUTIONS OF SOME PARTIAL DIFFERENTIAL EQUATIONS WITH B-SPLINE DIFFERENTIAL QUADRATURE METHOD

Ali BAŞHAN

İnönü University
Graduate School of Natural and Applied Sciences
Department of Mathematics

166+xix pages

2015

Supervisor: Assist. Prof. Dr. Turabi GEYİKLİ

This thesis consists of five chapters. In the first chapter, after giving some general information about the differential quadrature method which will be used in the thesis, fundamental concepts about spline functions, and B-spline functions, Thomas algorithms, fourth order Runge-Kutta algorithm, stability, and rate of convergence are presented.

B-spline differential quadrature methods are presented in the second chapter. The weighting coefficients, necessary to approximate the derivatives, are determined by using B-spline functions.

In the third chapter, numerical solutions of the mKdV equation are obtained by quintic B-spline differential quadrature method. This method is applied to four model problems. The obtained numerical results are compared with existing results in the literature, the error norms and the invariants are given in the form of tables. The figures of the numerical solutions and eigenvalues of the solutions are given and the stability analysis of the approximation obtained by applying quintic B-spline differential quadrature method is also investigated.

In the fourth chapter, besides numerical solutions of the KdVB equation, numerical solutions of the KdV and Burgers' equations are also obtained by quintic B-spline differential quadrature method. The method is applied to four model problems. The obtained numerical results are compared with existing results in the literature, the error norms and the invariants are given in the form of tables. The figures of the numerical solutions and eigenvalues of the solutions are given and the stability analysis of the approximation obtained by applying quintic B-spline differential quadrature method is also investigated.

In the fifth chapter, numerical solutions of the mBurgers' equation are obtained by quintic and quartic B-spline differential quadrature methods. Both methods are applied to one model problem. The obtained numerical results are compared with existing results in the literature, the error norms are given in the form of tables. The figures of the numerical solutions and eigenvalues of the solutions are given and the stability analysis of the approximation obtained by applying quintic and quartic B-spline differential quadrature methods is also investigated.

KEY WORDS: Differential Quadrature Method, Partial Differential Equations, B-spline Functions, mKdV Equation, KdVB Equation, KdV Equation, Burgers' Equation, mBurgers' Equation, Stability.

TEŞEKKÜR

Doktora eğitimim süresince danışmanlığımı yürüten ve bu tezin hazırlanması sırasında her zaman yakın ilgi ve yardımlarını gördüğüm değerli hocalarım Sayın Yrd. Doç. Dr. Turabi GEYİKLİ ve Sayın Yrd. Doç. Dr. S.Battal Gazi KARAKOÇ' a ayrıca doktora süresince bana sürekli yardımcı olan bölüm başkanımız, Sayın Prof. Dr. Sadık KELEŞ 'in şahsında bütün bölüm hocalarıma, karşılaştığım her türlü güçlüklerin üstesinden gelmem için bana yol gösteren değerli hocam Sayın Prof. Dr. Alaattin ESEN' e, tez süresince bana her zaman destek olan değerli hocalarım Sayın Yrd. Doç. Dr. Yusuf UÇAR ve Sayın Yrd. Doç. Dr. N. Murat YAĞMURLU 'ya, tez jürimde yer alan saygıdeğer hocalarıma, her zaman sabır ve sevgi ile bana destek olan eşim ve çocuklarıma, hiçbir zaman emeklerini ödeyemeyeceğim aileme teşekkürü bir borç bilirim.

İÇİNDEKİLER

ŞEKİLLER DİZİNİ

TABLOLAR DİZİNİ

SİMGELER VE KISALTMALAR

DQM	:	Diferensiyel Quadrature Metot
KdV	:	Korteweg-de Vries denklemi
KdVB	:	Korteweg-de Vries Burgers' denklemi
mBurgers'	:	Modifiye edilmiş Burgers' denklemi
mKdV	:	Modifiye edilmiş Korteweg-de Vries denklemi
YO	:	Yakınsama Oranı
Δt	:	Zaman adımı uzunluğu
$w_{i,j}^{(1)}$	:	Birinci türeve ait ağırlık katsayıları
$w_{i,j}^{(2)}$	:	İkinci türeve ait ağırlık katsayıları
$w_{i,j}^{(3)}$	:	Üçüncü türeve ait ağırlık katsayıları

GİRİŞ

Doğadaki biyolojik, jeolojik veya mekanik birçok olay fizik kuralları yardımıyla cebirsel, diferensiyel veya integral denklemler olarak ifade edilebilir. Doğadaki bu olayları inceleyen bilim adamları, olayların matematiksel modellerini oluşturmak için çoğunlukla lineer olmayan diferensiyel denklemler kullanmaktadırlar. Bu tip diferensiyel denklemlerin genellikle tam çözümleri aranır. Ancak bu tür diferensiyel denklemlerin tam çözümlerine ulaşmak çoğu zaman zor olmakta hatta bazı durumlarda mümkün olmamaktadır. Bu durumlarda diferensiyel denklemlerin yaklaşık çözümlerini bulmak için nümerik yöntemler kullanılır [1]. En yaygın olarak kullanılan nümerik yöntemler; sonlu fark yöntemleri, varyasyonel yöntemler, sonlu eleman yöntemleri ve diferensiyel quadrature metot (DQM) vb. şeklinde sayılabilir.

DQM, temel olarak fonksiyonun çözüm bölgesindeki herhangi bir noktadaki türev değerini, fonksiyonun verilen bölgede değeri bilinen tüm düğüm noktalarındaki değerlerinin lineer kombinasyonu şeklinde ifade etmesi esasına dayanmaktadır. Birçok araştırmacı ağırlık katsayılarının elde edilmesinde farklı baz fonksiyonlar kullanmıştır. Bellman vd. [2, 3] ağırlık katsayılarını elde etmek için Legendre polinomları ve spline fonksiyonları, Quan ve Chang [4, 5] Lagrange interpolasyon polinomları, Bonzani [6] ile Korkmaz ve Dağ [22] Sinc fonksiyonları, Cheng vd. [7] Hermit polinomlarını, O'Mahoney [8] Laguerre polinomlarını, Shu ve Wu [9] radial baz fonksiyonları, Zhong [10] spline fonksiyonları, Korkmaz ve Dağ [11 − 14] B-spline fonksiyonları, Arora ve Singh [26] ise, modifiye B-spline fonksiyonları kullanmıştır. DQM, literatürde lineer ve lineer olmayan birçok diferensiyel denkleme uygulanmıştır. Bunlardan bazıları Burgers' denklemi:

$$U_t + UU_x - \nu U_{xx} = 0,$$

Korteweg-de Vries denklemi (KdV):

$$U_t + \varepsilon UU_x + \mu U_{xxx} = 0,$$

Regularized Long Wave denklemi (RLW):

$$U_t + U_x + \varepsilon UU_x - \mu U_{xxt} = 0,$$

Adveksiyon-Difüzyon denklemi:

$$U_t + \alpha U_x - \lambda U_{xx} = 0,$$

dir. Bu tezde lineer olmayan modifiye edilmiş Korteweg-de Vries (mKdV):

$$U_t + \varepsilon U^2 U_x + \mu U_{xxx} = 0,$$

Korteweg-de Vries-Burgers' (KdVB):

$$U_t + \varepsilon UU_x - \nu U_{xx} + \mu U_{xxx} = 0,$$

Modifiye edilmiş Burgers' (mBurgers'):

$$U_t + \varepsilon U^2 U_x - \nu U_{xx} = 0,$$

denklemlerinin B-spline diferensiyel quadrature metotlar ile yaklaşık çözümleri elde edilecektir.

1. TEMEL KAVRAMLAR

Bu bölümde, tezde kullanılacak diferensiyel quadrature metot ile B-spline fonksiyonlar hakkında temel bilgiler verildi. Yine bu bölümde diferensiyel quadrature metot kullanılarak nümerik çözümleri elde edilecek olan mKdV, KdVB ve mBurgers' denklemleri tanıtıldı.

1.1 Diferensiyel Quadrature Metot (DQM)

DQM, ilk olarak Bellman vd. [2] tarafından kısmi diferensiyel denklemleri çözmek için 1972 'de sunulmuştur. Bellman, integral quadrature fikrinden yola çıkarak diferensiyel quadrature fikrini ortaya atmıştır. DQM 'un ana düşüncesi, U fonksiyonunun çözüm bölgesinde yer alan herhangi bir x_i noktasındaki türev değerini, U fonksiyonunun bölgedeki tüm düğüm noktalarındaki bilinen değerlerinin lineer toplamı şeklinde ifade edilmesidir. DQM, nümerik analizde türev yaklaşımları için kullanılan bir nümerik ayrıştırma metodudur. Bu tekniğe göre $[a, b]$ aralığında tanımlı tek değişkenli düzgün bir fonksiyonda x_i 'ler bu aralığın düğüm noktaları, N düğüm nokta sayısı ve $w_{ij}^{(r)}$ r. mertebeden türev yaklaşımında kullanılacak ağırlık katsayılarıdır. Problemin çözüm aralığındaki herhangi bir $U(x)$ fonksiyonun x bağımsız değişkenine göre, x_i noktasındaki r. mertebeden türevine

$$U_x^{(r)}(x_i) = \frac{d^{(r)}U}{dx^{(r)}}\Big|_{x_i} = \sum_{j=1}^{N} w_{ij}^{(r)} U(x_j), \quad i = 1, 2, ..., N, \quad r = 1, 2, ..., N-1 \quad (1.1.1)$$

eşitliği ile bir yaklaşım yapılabilir [27]. Burada esas aşama, fonksiyonun çözüm bölgesinde bulunan düğüm noktalarındaki fonksiyon değerlerinin ağırlık katsayılarının elde edilmesidir. Bunun için düğüm noktalarında fonksiyon değerleri bilinen çeşitli baz fonksiyonlar kullanılmaktadır. Günümüze kadar birçok araştırmacı farklı baz fonksiyonlar kullanarak ağırlık katsayılarını elde etmişlerdir. Bellman vd. [2, 3] ağırlık katsayılarını elde etmek için Legendre polinomlarını ve spline fonksiyonlarını kullanmıştır. Quan ve Chang [4, 5] Lagrange interpolasyon polinomları kullanmıştır. Bonzani [6] ile Korkmaz ve Dağ [22] Sinc fonksiyonlarını kullanarak ağırlık katsayılarını tespit etmiştir. Cheng vd. [7] ağırlık katsayılarını elde etmek için Hermit polinomlarını kullanırken, O'Mahoney [8] iki boyutlu ters ısı iletim denkleminin çözümü için Laguerre polinomlarını baz polinomlar olarak kullanıp ağırlık katsayılarını tespit etmiştir. Shu ve Wu [9] ise radial baz fonksiyonları kullanarak radial tabanlı diferensiyel quadrature metodu geliştirmişlerdir. Zhong [10] spline fonksiyon tabanlı diferensiyel quadrature metodunu geliştirmiştir. Korkmaz ve Dağ [$11-14$] B-spline fonksiyonları kullanarak ağırlık katsayılarını elde etmiştir. Arora ve Singh [26] modifiye B-spline fonksiyonları kullanarak ağırlık katsayılarını elde etmiştir.

1.2 Spline Fonksiyonlar

İlk olarak Schoenberg [95] tarafından 1946'da ortaya atılan spline fonksiyonlar, interpolasyon, eğri uydurma, adi ve kısmi diferensiyel denklemlerin çözümü, eğri ve yüzey yaklaşımı ile karmaşık geometrik nesnelerin matematiksel modellemesi gibi alanlarda sıkça kullanılmaktadır. Depolanması, işlenmesi ve kullanılması kolay olan spline fonksiyonlar dijital bilgisayarlardaki gelişmeler ile daha önemli hale gelmiştir [30].

Spline fonksiyonlar, belirli düzgünlük şartlarını taşıyan polinomların biraraya getirilmesiyle oluşan parçalı fonksiyonlardır. Reel sayıların monoton artan bir dizisi

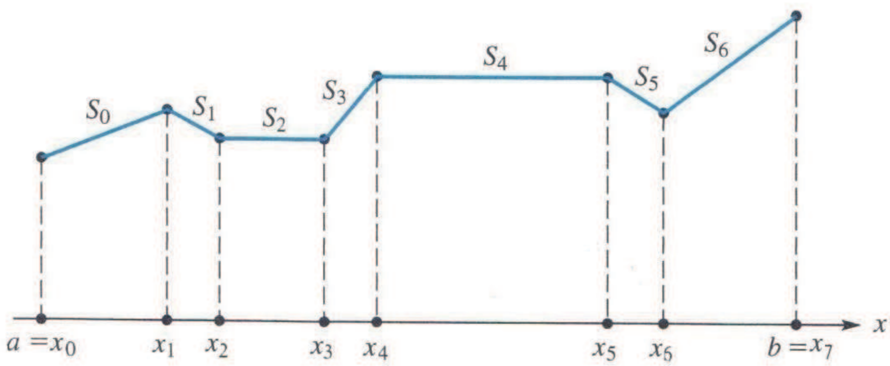
$$-\infty = x_0 < x_1 < ... < x_n < x_{n+1} = \infty$$

olacak şeklinde $x_1, x_2, ..., x_n$' e bağlı ve reel eksen üzerinde tanımlı m. dereceden bir $s(x)$ spline fonksiyonu aşağıdaki iki özelliği sağlar.

1. $s(x)$, her bir (x_i, x_{i+1}) $i = 0, ..., n$ aralığında m. veya daha düşük dereceden bir polinomdur. Burada $x_0 = -\infty$, $x_{n+1} = \infty$' dır.

2. $s(x)$ fonksiyonu ve $1, 2, ..., (m-1)$. mertebeden türevleri tanımlanan her aralıkta ve x_i, $i = 1, 2, .., n$ düğüm noktalarında süreklidir.

Spline fonksiyonlar, parçalı polinom fonksiyonların sürekli olması ve türevlerinin belirli şartları sağlaması ile elde edilir. 0. dereceden spline fonksiyonu $(m = 0)$ için ikinci şart kullanılmaz ve 0. dereceden spline fonksiyonu adım fonksiyonu denilir. 1. dereceden spline fonksiyonu $(m = 1)$ ise, Şekil 1.1 'de verilen bir poligon'(kırık çizgi) dur [96].



Şekil 1.1. 1. Dereceden Spline Fonksiyon.

Spline fonksiyonların özellikleri aşağıdaki gibi sıralanabilir.

- Spline fonksiyonlar düzgün fonksiyonlardır,
- Spline fonksiyonlar uygun bazlara sahip sonlu boyutlu lineer uzaylardır,
- Spline fonksiyonların türevleri ve integralleri yine spline fonksiyonlardır,
- Spline fonksiyonlar dijital bilgisayarlarda işleme, hesaplama ve depolama açısından uygun fonksiyonlardır.
- Spline fonksiyonlar kullanıldığında ortaya çıkan matrisler uygun işaretleri ve determinant özellikleri açısıdan kolay hesaplanabilir,
- Düşük dereceli spline fonksiyonlar oldukça esnektirler ve polinomlardaki gibi keskin salınımlar sergilemezler,
- Yaklaşım işlemi sonucunda elde edilen yapılar, işaretler ve katsayılar gibi polinomların yapıları ile de ilgilidir,
- Spline fonksiyonlar kullanıldığında yakınsaklık ve kararlılığın incelenmesi daha kolay olur,
- Fonksiyonlar ve türevleri aynı anda yaklaşık olarak hesaplanırlar.

Bazı spline fonksiyonlar farklı özelliklere sahiptirler. Örneğin; $[a,b]$ aralığının bir parçalanışı $a = x_0 < x_1 < ... < x_n = b$ ve $h = \frac{b-a}{n}$, $x_i = x_{i-1} + h$, $i = 1, ..., n$ olsun. Bu düğüm noktalarında fonksiyon değerleri $f(x_0), f(x_1), ..., f(x_n)$ ve m defa ard arda türevlenebilir sürekli fonksiyonların kümesi $C^m[a,b]$ olsun. $s(x)$ fonksiyonu

1. $s(x) \in C^1[a,b]$,

2. $s(x)$ her $[x_j, x_{j+1}]$, $(j = 0, 1, ..., n-1)$ alt aralığında en fazla ikinci dereceden bir polinomdur,

3. $s(x_j) = f(x_j)$, $0 \leq j \leq n$

şartlarını sağlıyorsa kuadratik spline fonksiyon olarak adlandırılır.

Aşağıdaki özellikler ise $[a, b]$ üzerinde bir kübik spline fonksiyonu tanımlar.

1. $s(x) \in C^2[a, b]$,

2. $s(x_j) = f(x_j)$, $0 \leq j \leq n$,

3. $s(x)$ her $[x_j, x_{j+1}]$, $(j = 0, 1, ..., n-1)$ alt aralığında en fazla üçüncü dereceden bir polinomdur [97].

1.3 B-spline Fonksiyonlar

Spline fonksiyonların hesaplanmasıyla elde edilen lineer veya lineer olmayan sistemler bazen istenilen parametrelerin hesaplanmasına izin vermeyecek şekilde ill-conditioned (iyi şartlı olmayan) olabilir. Ayrıca spline yaklaşımları elde etme sürecinde nümerik kararsızlıklarla da karşılaşılabilir. Bu tür zorluklar, bütün spline fonksiyonlar kümesi için bir baz oluşturan ve B-spline olarak adlandırılan farklı bir spline fonksiyon sınıfı ile aşılabilir. B-spline fonksiyonlar nümerik hesaplamalar için oldukça kullanışlıdırlar [31].

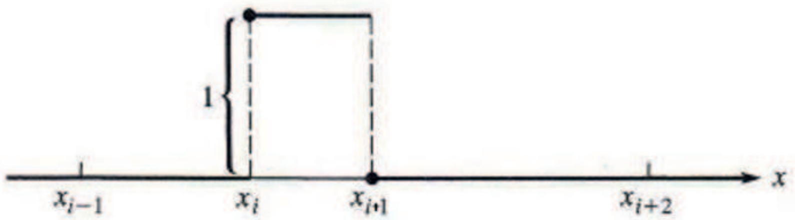
$\lim_{i\to\infty} x_i = \infty$ ve $\lim_{i\to-\infty} x_i = -\infty$ olmak üzere reel eksen üzerinde düğüm noktalarının bir kümesi

$$... < x_{-2} < x_{-1} < x_0 < x_1 < x_2 < ...$$

olsun. 0. dereceden bir B-spline fonksiyonu

$$B_i^0 = \begin{cases} 1\ , & x_i \leq x < x_{i+1} \\ 0\ , & \text{diğer durumlar} \end{cases}$$

şeklinde tanımlanır [96]. Bu tanımdan $B_i^0(x_i) = 1$ ve $B_i^0(x_{i+1}) = 0$'dır (Şekil 1.2).



Şekil 1.2. 0. Dereceden B-spline Fonksiyon.

0. dereceden bir B-spline fonksiyonunun bazı özellikleri aşağıdaki gibi sıralanabilir:

1. $B_i^0(x)$ B-spline fonksiyonu $[x_i, x_{i+1})$ yarı açık aralığında tanımlıdır.

2. $\forall\ x$ ve $\forall\ i$ için $B_i^0(x) \geq 0$ eşitsizliği vardır.

3. B_i^0 fonksiyonu sayı doğrusu üzerinde sıçramanın olduğu tüm düğüm noktalarında sağdan süreklidir.

4. $\forall x \in R$ için $\sum_{i=-\infty}^{\infty} B_i^0(x) = 1$ eşitliği geçerlidir.

5. Düğüm noktaları dizisi üzerinde 0. dereceden tüm spline fonksiyonlar bir baz oluştururlar. 0. dereceden B-spline fonksiyonlar kullanılarak daha yüksek dereceden diğer B-spline fonksiyonlar $k = 1, 2, ...$ ve $i = 0, \pm 1, \pm 2, ...$ olmak üzere

$$B_i^k(x) = \frac{x - x_i}{x_{i+k} - x_i} B_i^{k-1}(x) + \frac{x_{i+k+1} - x}{x_{i+k+1} - x_{i+1}} B_{i+1}^{k-1}(x)$$

şeklinde tümevarım yöntemi ile hesaplanabilir [31, 96].

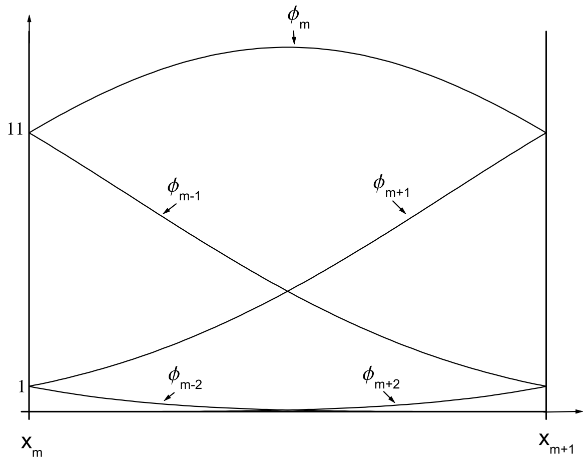
Bu tezde ele alınan diferensiyel denklemlerin diferensiyel quadrature metot ile nümerik çözümleri bulunurken, baz fonksiyonları olarak kullanılacak olan kuartik ve kuintik B-spline fonksiyonların tanımları ile birlikte bazı özellikleri aşağıda verildi.

1.3.1 Kuartik B-spline Fonksiyonlar

$[a, b]$ aralığının düzgün bir parçalanışı $a = x_o < x_1 < ...x_{N-1} < x_N = b$ olsun. $h = x_{m+1} - x_m$ olmak üzere x_m düğüm noktalarında $\phi_m(x)$ kuartik B-spline fonksiyonlar $m = -2, -1, \ldots, N, N+1$ noktaları için;

$$\phi_i(x) = \frac{1}{h^4}\begin{cases} (x - x_{m-2})^4 \ , & [x_{m-2}, x_{m-1}] \\ (x - x_{m-2})^4 - 5(x - x_{m-1})^4, & [x_{m-1}, x_m] \\ (x - x_{m-2})^4 - 5(x - x_{m-1})^4 + 10(x - x_m)^4, & [x_m, x_{m+1}] \\ (x_{m+3} - x)^4 - 5(x_{m+2} - x)^4, & [x_{m+1}, x_{m+2}] \\ (x_{m+3} - x)^4, & [x_{m+2}, x_{m+3}] \\ 0, & \text{diğer durumlar} \end{cases} \tag{1.3.1}$$

şeklinde tanımlanır [32]. $\{\phi_{-2}(x), \phi_{-1}(x), \ldots, \phi_N(x), \phi_{N+1}(x)\}$ kümesi $a \leq x \leq b$ aralığında tanımlı fonksiyonlar için bir baz oluşturur. Kuartik B-spline $\phi_m(x)$ fonksiyonu ve türevleri $[x_{m-2}, x_{m+3}]$ aralığı dışında sıfırdır. Şekil 1.3 'de görüldüğü gibi her bir $\phi_m(x)$ kuartik B-spline $[x_{m-2}, x_{m+3}]$ aralığında ardışık beş elemanı örtmekte ve dolayısıyla her bir $[x_m, x_{m+1}]$ sonlu elemanı ϕ_{m-2}, ϕ_{m-1}, ϕ_m, ϕ_{m+1}, ϕ_{m+2} gibi beş tane kuartik B-spline şekil fonksiyonları tarafından örtülmektedir.



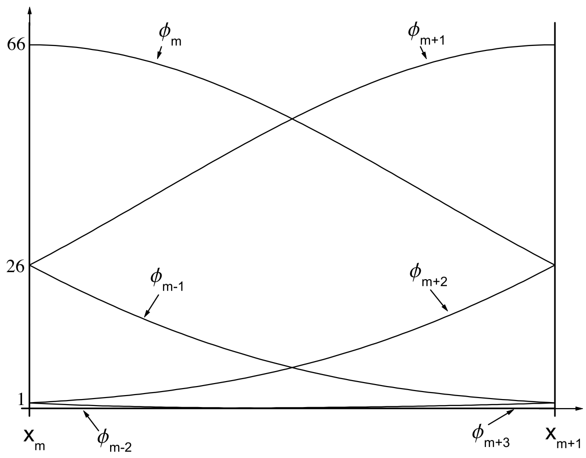
Şekil 1.3. Kuartik B-spline Şekil Fonksiyonları.

1.3.2 Kuintik B-spline Fonksiyonlar

$[a, b]$ aralığının düzgün bir parçalanışı $a = x_o < x_1 < ... < x_{N-1} < x_N = b$ olsun. $h = x_{m+1} - x_m$ olmak üzere x_m düğüm noktalarında $\phi_m(x)$ kuintik B-spline fonksiyonlar $m = -2, -1, \ldots, N+1, N+2$ noktaları için;

$$\phi_m(x) = \frac{1}{h^5} \begin{cases} (x - x_{m-3})^5, & [x_{m-3}, x_{m-2}] \\ (x - x_{m-3})^5 - 6(x - x_{m-2})^5, & [x_{m-2}, x_{m-1}] \\ (x - x_{m-3})^5 - 6(x - x_{m-2})^5 + 15(x - x_{m-1})^5, & [x_{m-1}, x_m] \\ (x - x_{m-3})^5 - 6(x - x_{m-2})^5 + 15(x - x_{m-1})^5 - & [x_m, x_{m+1}] \\ 20(x - x_m)^5, & \\ (x - x_{m-3})^5 - 6(x - x_{m-2})^5 + 15(x - x_{m-1})^5 - & [x_{m+1}, x_{m+2}] \\ 20(x - x_m)^5 + 15(x - x_{m+1})^5 & \\ (x - x_{m-3})^5 - 6(x - x_{m-2})^5 + 15(x - x_{m-1})^5 - & [x_{m+2}, x_{m+3}] \\ 20(x - x_m)^5 + 15(x - x_{m+1})^5 - 6(x - x_{m+2})^5 & \\ 0 & \textit{diğer durumlar} \end{cases} \tag{1.3.2}$$

şeklinde tanımlanır [32]. $\{\phi_{-2}(x), \phi_{-1}(x), \ldots, \phi_{N+1}(x), \phi_{N+2}(x)\}$ kümesi $a \leq x \leq b$ aralığında tanımlı fonksiyonlar için bir baz oluşturur. Kuintik B-spline $\phi_m(x)$ fonksiyonu ve türevleri $[x_{m-3}, x_{m+3}]$ aralığı dışında sıfırdır. Şekil 1.4 'de görüldüğü gibi her bir $\phi_m(x)$ kuintik B-spline $[x_{m-3}, x_{m+3}]$ aralığında ardışık altı elemanı örtmekte ve dolayısıyla her bir $[x_m, x_{m+1}]$ sonlu eleman ϕ_{m-2}, ϕ_{m-1}, ϕ_m, ϕ_{m+1}, ϕ_{m+2}, ϕ_{m+3} gibi altı kuintik B-spline fonksiyon tarafından örtülmektedir.



Şekil 1.4. Kuintik B-spline Şekil Fonksiyonları.

1.4 Lineer Denklem Sistemlerinin Çözümleri

Lineer denklem sistemlerinin çözümlerinde çeşitli yöntemler kullanılmaktadır. Bu yöntemlerden Gauss eliminasyon yöntemi yaygın bir kullanım alanına sahiptir. Gauss eliminasyon yönteminde temel mantık, katsayı matrisinde esas köşegen altındaki terimlerin sıfırlanmasıdır. Ancak kimi zaman, birinci köşegeni merkez kabul eden ve üçlü, beşli vb. köşegenler dışındaki terimlerin sıfır olduğu katsayı matrisleri ile karşılaşılmaktadır. Bu tür durumlarda, gereksiz sıfırlama işlemlerinden kaçınmak ve böylece depolama, zaman ve enerji gibi konularda tasarruflar sağlamak için geliştirilen Thomas algoritmaları kullanılmaktadır. Thomas algoritmaları 3-bant (tridiagonal), 5-bant (pentadiagonal),... vb. tek sayılı bant matrisler için geliştirilmiştir. Bant katsayılı matrislerin klasik Gauss eliminasyonu ile çözümleri de mümkündür. Ancak, Thomas algoritmaları köşegen ve köşegen yakınlarında bulunan sıfırdan farklı katsayıları vektör biçiminde tanımladığından programlama sırasında bellek kullanımını oldukça azaltmaktadır. Örneğin, $N \times N$ boyutlu 3-bant matislerinde katsayılar matrisinin çoğu sıfır olan elemanlar için bilgisayar hafızasında gereksiz yer işgal etmemek ve gereksiz işlemlerden kaçınmak amacıyla $N \times N$ boyutunda bir katsayılar matrisi yerine $N \times 3$ boyutunda bir katsayılar matrisi kullanacak biçimde bir düzenleme ve buna uygun bir çözüm algoritması kullanılması tercih edilir. Bant genişliği çift olan matrislerin çözümünde ise, bu algoritmalar duruma göre üstteki veya alttaki bir köşegenin sıfır alınması şeklinde modifiye edilerek kullanılırlar. Genel olarak Thomas algoritmaları iki ana kısımdan oluşmaktadır. Birinci kısım katsayı matrisinin köşegen altında bulunan elemanlarının elenmesi, ikinci kısım ise, geri-süpürme olarak ifade edilen üst-üçgensel hale getirilen katsayı matrisinin denklem sisteminin çözümünü en son bilinmeyenden başlayarak geriye doğru elde edilmesidir. Bu tezde 5-bant (pentadiagonal) katsayılı denklem sistemi kullanıldığı için kısaca değinilecektir.

5-bant (pentadiagonal) katsayılı lineer denklem sisteminin genel hali

$$
\begin{bmatrix}
c_0 & d_0 & e_0 & & & & \\
b_1 & c_1 & d_1 & e_1 & & & \\
a_2 & b_2 & c_2 & d_2 & e_2 & & \\
 & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \\
 & & a_{N-2} & b_{N-2} & c_{N-2} & d_{N-2} & e_{N-2} \\
 & & & a_{N-1} & b_{N-1} & c_{N-1} & d_{N-1} \\
 & & & & a_N & b_N & c_N
\end{bmatrix}
\begin{bmatrix}
x_0 \\ x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_{N-2} \\ x_{N-1} \\ x_N
\end{bmatrix}
=
\begin{bmatrix}
f_0 \\ f_1 \\ f_2 \\ \vdots \\ f_{N-2} \\ f_{N-1} \\ f_N
\end{bmatrix}
$$

şeklinde verilir. Bu denklem sisteminin çözümünde ise aşağıdaki 5-bant (pentadiagonal) Thomas algoritması kullanılır:

Eleme Algoritması:

$$\beta_0 = b_0, \qquad \varsigma_0 = c_0, \qquad \alpha_0 = \frac{d_0}{\varsigma_0}, \qquad \lambda_0 = \frac{e_0}{\varsigma_0}, \qquad \gamma_0 = \frac{f_0}{\varsigma_0},$$

$$\beta_1 = b_1, \qquad \varsigma_1 = c_1 - \beta_1\alpha_0, \qquad \alpha_1 = \frac{d_1 - \beta_1\lambda_0}{\varsigma_1}, \qquad \lambda_1 = \frac{e_1}{\varsigma_1}, \qquad \gamma_1 = \frac{f_1 - \beta_1\gamma_0}{\varsigma_1},$$

$$\beta_i = b_i - a_i\alpha_{i-2}, \qquad \varsigma_i = c_i - \beta_i\alpha_{i-1} - ai\lambda_{i-2}, \qquad \alpha_i = \frac{d_i - \beta_i\lambda_{i-1}}{\varsigma_i}, \qquad \lambda_i = \frac{e_i}{\varsigma_i},$$

$$\gamma_i = \frac{f_i - \beta_i\gamma_{i-1} - a_i\gamma_{i-2}}{\varsigma_i}, \qquad i = 2, 3, ..., N$$

Geri süpürme (Çözüm) Algoritması:

$$x_N = \gamma_N,$$

$$x_{N-1} = \gamma_{N-1} - \alpha_{N-1}x_N,$$

$$x_i = \gamma_i - x_{i+2}\lambda_i - x_{i+1}\alpha_i, \qquad i = N-2, N-3, ..., 0$$

1.5 Dördüncü Mertebeden Runge-Kutta Algoritması

Nümerik analizde, adi diferensiyel denklemlerin çözüm yaklaşımlarında çeşitli metotlar kullanılmaktadır. Zamana bağlı kısmi türevli diferensiyel denklemler önce konum türevi içeren terimler diferensiyel quadrature, sonlu farklar, sonlu elemanlar vb. metotlardan birinin kullanımıyla nümerik olarak ayrıştırılır. Böylece, kısmi türevli diferensiyel denklemin adi diferensiyel denkleme dönüştürülmesi, sonraki aşamada ise Crank-Nicolson, Runge-Kutta vb. metotlar kullanılarak zamana göre adi diferensiyel denklemin nümerik olarak integrasyonu ile çözümün elde edilmesi sağlanır. Dördüncü mertebe Runge-Kutta metodunun kararlılığı, doğruluğunun yüksek olması ve programlama maliyetinin düşük olması bu metodu tercih edilen bir metot yapmaktadır. Bu tezde kullanılacak B-spline DQM ile zamana bağlı kısmi türevli diferensiyel denklemlerin konum ayrıştırılması yapılıp ardından elde edilecek olan adi diferensiyel denklemin nümerik integrasyonu da dördüncü mertebe Runge-Kutta metodu ile yapıldı. Tez konusunun B-spline DQM olması sebebiyle, Runge-Kutta metotları ayrıntılı olarak incelenmeyip sadece dördüncü mertebe Runge-Kutta metodu kısaca izah edildi. DQM ile konum ayrıştırması yapılmış test problemleri

$$\frac{dU}{dt} = f(U), \qquad U(t_0) = U_0, \qquad t \in [t_0, T] \tag{1.5.1}$$

eşitliği ile ifade edilen bir adi diferensiyel denkleme dönüştürüldü. Zaman integrasyonu için kullanılacak dördüncü mertebe Runge-Kutta algoritması, $h = \Delta t$ zaman adımı uzunluğu olmak üzere aşağıdaki gibidir:

$$\begin{aligned}
U^{0} &= U_0, \\
K_1 &= h.f\left(U^{i}\right), \\
K_2 &= h.f\left(U^{i} + \frac{1}{2}K_1\right), \\
K_3 &= h.f\left(U^{i} + \frac{1}{2}K_2\right), \\
K_4 &= h.f\left(U^{i} + K_3\right), \\
U^{i+1} &= U^{i} + \frac{1}{6}\left[K_1 + 2.\left(K_2 + K_3\right) + K_4\right], \qquad i = 0, 1, ..., N-1.
\end{aligned}$$

Zamana bağlı bir diferensiyel denklemin genel biçimi, uygun başlangıç ve sınır şartları ile

$$\frac{\partial U}{\partial t} = \ell\left(U\right), \qquad U\left(t_0\right) = U_0, \qquad t \in \left[t_0, T\right]. \tag{1.5.2}$$

eşitliği ile ifade edilir. Burada ℓ konuma bağlı diferensiyel operatör ve genel olarak lineer olmayan operatördür. (1.5.2) eşitliği ile verilen kısmi diferensiyel denklem, genel olarak DQM ile konum ayrıştırmaları ve gerekli lineerleştirmeler yapıldığında adi diferensiyel denkleme dönüşür. Elde edilen eşitliğin düğüm noktalarında olacak biçimde açılımı yapıldığında ve sınır şartları uygulandığında elde edilen matris biçimi

$$\frac{d\left\{U\right\}}{dt} = \left[A\right]\left\{U\right\} + \left\{s\right\} \tag{1.5.3}$$

(1.5.3) şeklinde olur. (1.5.3) eşitliğinde $\{U\}$ problem bölgesinin iç noktalarında fonksiyon değerleri, $\{s\}$ ise sınır şartlarından ve denklemin homojen olmayan teriminden gelen ve genellikle de sabit olan bir vektör ve A ise katsayı matrisidir. (1.5.3) eşitliğinde verilen adi diferensiyel denklemin Runge-Kutta metodu ile integrasyonunun kararlılığı öncelikle (1.5.3) denklem sisteminin kararlılığına bağlıdır.

(1.5.3) denklem sisteminin kararsız olması durumunda, nümerik metot kararlı olsa bile (1.5.3) denklem sisteminin nümerik integrasyonu kararsız olacaktır. (1.5.3) adi diferensiyel denklem sisteminin kararlılığı da A matrisinin özdeğerlerine bağlıdır [27].

A matrisinin özdeğerlerinin λ_i olduğunu varsayalım. λ_i özdeğerlerinin reel ve sanal bileşenlerinin durumuna göre (1.5.3) denkleminin kararlılığı için farklı şartlar bulunmaktadır. $\mathrm{Re}(\lambda_i)$ özdeğerlerin reel kısmı ve $\mathrm{Sa}(\lambda_i)$ özdeğerlerin sanal kısmı olmak üzere, (1.5.3) denkleminin kararlılığı;

1.) Eğer bütün özdeğerler reel ise

$$-2.78 < \Delta t \lambda_i < 0,$$

2.) Eğer özdeğerlerin sadece sanal bileşenleri varsa

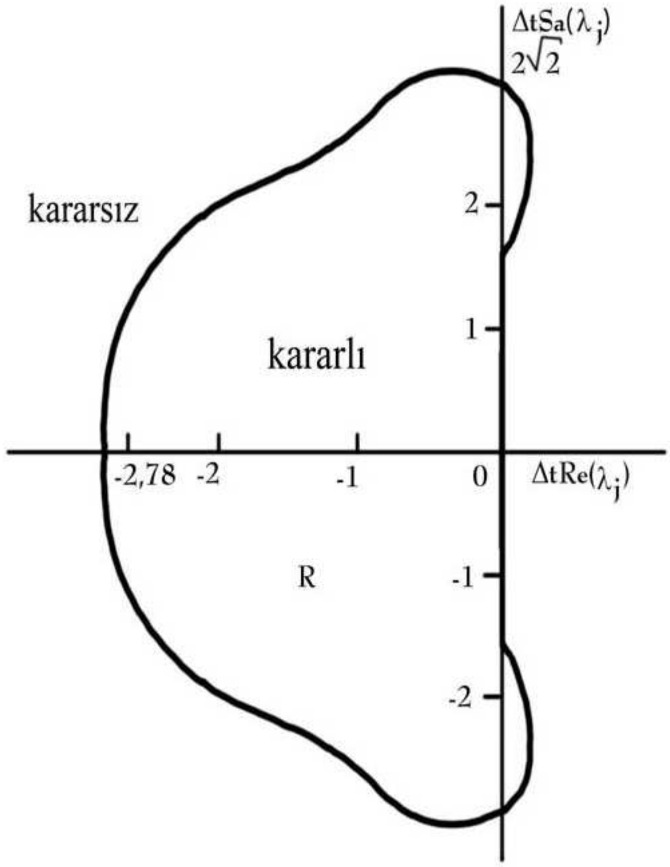
$$-2\sqrt{2} < \Delta t \lambda_i < 2\sqrt{2},$$

3.) Eğer özdeğerlerin reel ve sanal bileşenleri varsa, $\Delta t \lambda_i$ Şekil 1.5 'de [11] verilen bölge içinde olmalıdır Eğer özdeğerler karmaşık sayı iseler, özdeğerlerin reel kısımlarının küçük pozitif değerler alabileceği bir tolerans mevcuttur [28].

Özdeğerlerin tespit edilmesi özellikle büyük boyutlu matrislerde oldukça zor olmaktadır. Bu tezde katsayı matrislerine ait özdeğerlerin tespitinde *Matlab* programı tercih edildi.

1.6 Hata Normları ve Yakınsama Oranı

Kullanılan nümerik metotlar ile elde edilen sonuçların doğruluğunu ölçmek için çeşitli hata normları kullanılmaktadır. Analitik çözümün mevcut olduğu durumlarda nümerik çözüm ile analitik çözüm arasındaki farkın ölçülmesi ile hata normları tespit



Şekil 1.5. Reel ve sanal bileşenleri olan kompleks özdeğerler için kararlılık bölgesi

edilir. Uygun test problemlerinde B-spline DQM 'lar ile elde edilen sonuçlardaki hatalar L_2 ve L_∞ hata normları ile ölçüldü. Bu tezde,

$$L_2 = \left\| U^{exact} - U^{nümerik} \right\|_2 \simeq \sqrt{h \sum_{J=1}^{N} \left| U_j^{exact} - \left(U^{nümerik}\right)_j \right|^2}, \qquad (1.6.1)$$

ortalama hata normu ile

$$L_\infty = \left\| U^{exact} - U^{nümerik} \right\|_\infty \simeq \max_j \left| U_j^{exact} - \left(U^{nümerik}\right)_j \right|, \qquad (1.6.2)$$

maksimum hata normu kullanıldı.

Bunun yanında metotların analitik çözümlere yakınsama oranı (YO) hesaplandı. B-spline DQM 'lar ile konum ayrıştırmaları yapılacağından, yakınsama oran analizleri konuma göre yapıldı. Yakınsama oran analizi için,

$$YO \approx \frac{\ln\left(E\left(N_2\right)\right)/\ln\left(E\left(N_1\right)\right)}{\ln\left(N_1/N_2\right)} \tag{1.6.3}$$

eşitliği kullanıldı [29]. (1.6.3) eşitliği ile verilen YO hesap formülünde $E\left(N_j\right), (j=1,2)$ farklı sayılardaki düğüm noktaları için bulunan L_2 ve L_∞ hata normlarını göstermektedir. YO analizi yapılırken zaman adımı sabit tutularak farklı düğüm nokta sayıları için YO hesaplanır.

1.7 Model Problemler

Bu kısımda tezde kullanılacak nümerik yöntem olan DQM 'un test edilmesi için üç tane yaygın olarak bilinen lineer olmayan kısmi türevli denklem tanıtılacaktır. Bu denklemlere ait test problemlerde başlangıç şartı olarak

$$U(x,0)=U_0, \tag{1.7.1}$$

kullanılacak ve $g_i\left(t\right), (i=1,2)$ sabit olmak üzere

$$U(a,t)=g_1\left(t\right), \qquad U(b,t)=g_2\left(t\right), \tag{1.7.2}$$

sınır şartlarından uygun olanlar kullanılarak nümerik çözümler elde edilmeye çalışıldı.

1.7.1 Modifiye edilmiş Korteweg-de Vries (mKdV) Denklemi

KdV ve mKdV denklemleri ε ile μ sabit katsayılar olmak üzere sırasıyla

$$U_t + \varepsilon U U_x + \mu U_{xxx} = 0, \tag{1.7.3}$$

ve

$$U_t + \varepsilon U^2 U_x + \mu U_{xxx} = 0, \tag{1.7.4}$$

şeklindedir.

KdV denklemi doğada plazmadaki iyon ses dalgaları ve sığ su dalgaları gibi çeşitli lineer olmayan olayları modellemekte sıkça kullanılan bir denklemdir. Örneğin; (1.7.3) denkleminde U_t terimi dalganın tek bir yönde yayılmasında zamanın gelişimini, lineer olmayan terim olan UU_x, dalganın formunu korumasını ve lineer terim olan U_{xxx} ise dalganın ayrılmasını veya yayılmasını (dispersion) sağlar. KdV denklemi, Korteweg ve de Vries isimli iki araştırmacı tarafından uzun dalga boyuna ve küçük genliğe sahip sığ su dalgalarını tanımlamak için elde edilmiştir [74]. KdV lineer olmayan gelişim denklemi, sonlu genlikli farklı dalga dağılım olaylarını modellemektedir. KdV denklemi, iki önemli etkiyi betimleyen en basit lineer olmayan denklemlerden biridir. Öyle ki; lineer olmama UU_x terimiyle ve lineer yayılma (dispersion) da U_{xxx} terimiyle temsil edilmiştir. UU_x teriminin lineer olmaması, dalga dışarıya ayrılırken dalgayı sabitlemektedir. Solitonların kararlılığı lineer olmama ve yayılma (dispersion) arasındaki denge duyarlılığının bir sonucudur [75 − 78].

KdV tipindeki en önemli denklemlerden biri de Miura [79] tarafından ortaya atılan modifiye edilmiş KdV denklemidir. Bu denklem elektrodinamik, elektromanyetik dalgalar, elastik ortam, trafik akışı [80, 81] akışkanlar mekaniği [82, 83] ve plazma fiziği [84] gibi geniş fiziksel uygulama alanına sahiptir.

Lineer olmayan mKdV denkleminin nümerik ve analitik çözümleri birçok araştırmacı tarafından araştırılmıştır. Wazwaz [86], tanh–coth metot, sinh–cosh metot ve rasyonel tanh–coth metotlarını kullanarak analitik çözümü, Salas ise [87], değişken katsayılarla analitik çözümünü elde etmişlerdir. Ayrıca, Gardner vd. [85], kuintik B-spline sonlu elemanlar metodu kullanarak, Kaya [88], Adomian decomposition metot ile ve Gardner vd. [89], lumped Galerkin yöntemini kuadratik B-spline kullanarak sonlu elemanlar metodu ile nümerik çözümü elde etmişlerdir.

1.7.2 Korteweg-de Vries-Burgers' (KdVB) Denklemi

Doğadaki bazı fiziksel olayları tanımlamasıyla bilinen Korteweg–de Vries–Burgers' (KdVB) denkleminin genel hali ε, υ ve μ pozitif sabit katsayılar olmak üzere

$$U_t + \varepsilon U U_x - \upsilon U_{xx} + \mu U_{xxx} = 0, \tag{1.7.5}$$

şeklindedir.

KdVB denklemi ilk olarak Su ve Gardner [33] tarafından ortaya atılmıştır. KdVB denklemi, sönme (damping) ve yayılmayı (dispersion) birlikte barındırdığından zayıf lineer olmama ve uzun dalga boyu yaklaşımları için lineer olmayan sistemlere yönelik geniş alana sahip uygun bir model sunmaktadır. KdVB denklemi, manyetik alana dik olarak ilerleyen zayıf plazma şoklarının ilerleyişini modellediği gösterilen kararlı durum çözümüne sahiptir [34]. Difüzyon yayılmaya (dispersion) baskın olduğu zaman KdVB denkleminin kararlı durum çözümleri monoton şok dalgası, yayılma (dispersion) difüzyona baskın olduğu zaman ise şok dalga salınım yapar. KdVB denklemi, akışkan dolu elastik tüpler boyunca dalga dağılımları [35] ve viskoz akışkanlarında sığ su dalgalarının betimlenmesi [36] çalışmalarında kullanmıştır. Bazı araştırmacılar KdVB denkleminin çözümünü elde etmek için farklı çalışmalar yapmışlardır. Monoton şok dalganın analitik olmayan başlangıç verilerinin gelişimini tartışan Canosa ve Gazdag [37], KdVB denkleminin nümerik çözümünü kesin türev metodu ile yaparak yöntemin kısa detaylarını sunmuşlardır. Ali vd. [38] B-spline sonlu elemanlar metodu, Gardner vd. [39] sonlu elemanlar üzerinde kuadratik B-spline fonksiyonlarla Galerkin metodu kullanarak çözümler elde etmiştir. Ardından, KdVB denklemi çeşitli nümerik veya analitik metotlar yardımıyla çözülmüştür. Bunlardan bazıları; Sonlu elemanlar metot [40−42], tanh metot [43], hiperbolik tanjant metot, üstel rasyonel fonksiyon yaklaşımı [44], sonlu farklar metodu [45] ve Adomian decomposition metod [46, 47] şeklinde sayılabilir.

Eğer $\upsilon = 0$ olursa, (1.7.5) ile verilen KdVB denklemi aşağıda verilen KdV denklemine

$$U_t + \varepsilon U U_x + \mu U_{xxx} = 0, \tag{1.7.6}$$

dönüşür.

Eğer $\mu = 0$ olursa, (1.7.5) ile verilen KdVB denklemi aşağıda verilen Burgers' denklemine

$$U_t + \varepsilon U U_x - \upsilon U_{xx} = 0, \tag{1.7.7}$$

dönüşür.

1.7.3 Modifiye edilmiş Burgers' (mBurgers') Denklemi

İkinci mertebeden lineer olmayan kısmi diferensiyel denklem olan tek-boyutlu Burgers' denklemi, ilk olarak Bateman [48] tarafından ortaya atılmıştır ve sonrasında Burgers' [49] tarafından ele alındıktan sonra, υ pozitif bir reel sayı olmak üzere aşağıdaki formu almıştır:

$$U_t + UU_x - vU_{xx} = 0. \tag{1.7.8}$$

Burgers' denklemi akışkanlar mekaniğinde önemli bir yere sahiptir. Özellikle türbülans problemleri, gaz akışı, ısı iletimi, sürekli olasılık işlemleri ve şok dalgalar teorisi bu alanlardan bazılarıdır [50]. Akışkanlar mekaniğinde kinematik viskoziteyi gösteren v 'nin sınırlı değerleri için Burgers' denkleminin analitik çözümü elde edilmiştir. Bundan dolayı, Burgers' denkleminin nümerik çözümü birçok çalışmanın ana teması olmuştur. Burgers' denkleminin nümerik çözümünde sonlu farklar metodu [51, 52], Runge-Kutta-Chebyshev metodu [53, 54], grup-teorisi metotları [55] ve Galerkin, Petrov-Galerkin, en küçük kareler ve kollokasyon yöntemlerini içeren sonlu elemanlar metodu [56 − 64] kullanılmıştır. Temeli Burgers' denklemine dayanan modifiye edilmiş Burgers' denklemi, v pozitif bir reel sayı olmak üzere aşağıdaki forma sahiptir:

$$U_t + U^2U_x - vU_{xx} = 0. \tag{1.7.9}$$

Modifiye edilmiş Burgers' denklemi güçlü lineer olmayan özelliğe sahiptir. Bu denklem birçok uygulamalı transfer probleminde kullanılmıştır. Örneğin; düşük frekanslı pompalama veya emmeli ortamda lineer olmayan dalgalar, türbülans transferi, termoelastik ortamda dalga işlemleri, nehirlerdeki kirliliğin taşınması ve yayılması ile tortu transferi, yarı-dikey şokların iyon yansıması sayılabilir. Yakın zamanda modifiye edilmiş Burgers' denkleminin birçok nümerik çözümü yapılmıştır. M. A. Ramadan vd. [67] kuintik B-spline kollokasyonu kullanarak sonlu elemanlar metodu ile nümerik çözümler elde etmişlerdir. Y. Duan vd. [68] tarafından özel Boltzmann ızgara modeli geliştirilmiştir. B. Saka vd. [69] kuintik B-spline kullanarak Galerkin sonlu elemanlar metodu ve zamanı yarılama tekniğiyle nümerik çözümler elde etmişlerdir. D. Irk [70] tarafından sektik B-spline kullanılarak kollokasyon metot ile nümerik çözüm elde edilmiştir. T. Roshan vd. [71] ağırlık fonksiyonu olarak lineer şapka fonksiyonu ve test fonksiyonu olarak kübik B-spline fonksiyon kullanarak Petrov-Galerkin metodu uygulamışlardır. Süreksiz Galerkin metot Zhang Rong-Pei vd. [72] tarafından sunulmuştur. A. G. Bratsos [73] ise, denklemin nümerik çözümünü elde etmek için iki-zaman seviyeli yinelenmeli ilişki içinde matris üstel terime karşılık gelen dördüncü mertebe kesirli yaklaşımlara dayalı sonlu farklar metodunu kullanmıştır.

2. B-SPLİNE DİFERENSİYEL QUADRATURE METOTLAR

Bu bölümde tezde kullanılacak kuartik ve kuintik B-spline diferensiyel quadrature metotlar tanıtılacaktır. $[a,b]$ problem aralığının düzgün parçalanışının $a = x_1 < x_2 < \cdots < x_N = b$ şeklinde olduğunu varsayalım. Burada her bir aralık $h = x_m - x_{m-1}$ şeklinde birbirine eşit olsun. B-spline fonksiyonlar bulundukları bölgede bir baz oluştururlar. Baz fonksiyonlar olduklarından, B-spline fonksiyonlar nümerik metotlarda test fonksiyonları olarak da kullanılabilirler.

2.1 Kuartik B-spline DQM

Kuartik B-spline fonksiyonlar dördüncü dereceden polinomlardır ve düğüm noktaları haricinde dördüncü mertebeye kadar türevleri mevcuttur. Düğüm noktalarında sağdan ve soldan dördüncü mertebe türevleri birbirine eşit olmadığından bu noktalarda dördüncü mertebe türevleri yoktur. Kuartik B-spline fonksiyonlar

$$\phi_i(x) = \frac{1}{h^4} \begin{cases} (x - x_{m-2})^4 \ , & [x_{m-2}, x_{m-1}] \\ (x - x_{m-2})^4 - 5(x - x_{m-1})^4, & [x_{m-1}, x_m] \\ (x - x_{m-2})^4 - 5(x - x_{m-1})^4 + 10(x - x_m)^4, & [x_m, x_{m+1}] \\ (x_{m+3} - x)^4 - 5(x_{m+2} - x)^4, & [x_{m+1}, x_{m+2}] \\ (x_{m+3} - x)^4, & [x_{m+2}, x_{m+3}] \\ 0, & \text{diğer durumlar} \end{cases} \tag{2.1.1}$$

eşitliği ile verilmektedir. N düğüm noktalı bir problem aralığında $N + 3$ tane $\{\phi_{-1}(x),\ \phi_0(x),\ \ldots,\ \phi_N(x),\ \phi_{N+1}(x)\}$ kuartik B-spline fonksiyon bir baz oluşturur. $\phi_m(x)$ ve üçüncü mertebeye kadar olan $\phi'_m(x), \phi''_m(x), \phi'''_m(x)$ türevlerinin düğüm noktalarındaki değerleri Tablo 2.1 'de verildi.

Tablo 2.1. $\phi_m(x), \phi'_m(x)$, $\phi''_m(x)$ ve $\phi'''_m(x)$'in düğüm noktalarındaki değerleri

x	x_{m-2}	x_{m-1}	x_m	x_{m+1}	x_{m+2}	x_{m+3}
ϕ_m	0	1	11	11	1	0
$h\phi'_m$	0	4	12	-12	-4	0
$h^2\phi''_m$	0	12	-12	-12	12	0
$h^3\phi'''_m$	0	24	-72	72	-24	0

2.1.1 Birinci Türev Ağırlık Katsayılarının Tespit Edilmesi

(1.1.1) eşitliği ile verilen temel diferensiyel quadrature yaklaşımında kuartik B-spline fonksiyonların test fonksiyonlar olarak kullanılması ile ağırlık katsayıları elde edilecektir. (1.1.1) eşitliğinde $r = 1$ olarak seçildiğinde birinci türev ağırlık katsayılarının elde edilebilmesi için diferensiyel quadrature metodolojisi kullanılacaktır. (1.1.1) eşitliğinde $r = 1$ olarak seçildiğinde

$$\frac{d\phi_m(x_i)}{dx} = \sum_{j=m-1}^{m+2} w_{i,j}^{(1)}\phi_m(x_j), \quad m = -1, 0, \ldots, N+1,\ i = 1, 2, ..., N. \tag{2.1.2}$$

elde edilir. İlk olarak, birinci düğüm noktası x_1 'deki ağırlık katsayılarının $w_{1,j}^{(1)}$, $(j = -2, -1, \ldots, N+3)$ 'nin elde edilebilmesi için sırasıyla test fonksiyonları ϕ_m , $m = -1, 0, \ldots, N+1$ kullanılır. $i = 1$ ve $m = -1$ için

$$\frac{d\phi_{-1}(x_1)}{dx} = \sum_{j=-2}^{1} w_{1,j}^{(1)}\phi_{-1}(x_j) \tag{2.1.3}$$

eşitliği elde edilir. Tablo 2.1 'de verilen fonksiyon ve türevleri (2.1.3) eşitliğinde yerine yazılırsa

$$w^{(1)}_{1,-2} + 11w^{(1)}_{1,-1} + 11w^{(1)}_{1,0} + w^{(1)}_{1,1} = -\frac{4}{h} \tag{2.1.4}$$

bulunur. Ardından bir sonraki test fonksiyonu ϕ_0 kullanılırsa

$$\frac{d\phi_0\left(x_1\right)}{dx} = \sum_{j=-1}^{2} w^{(1)}_{1,j}\phi_0\left(x_j\right) \tag{2.1.5}$$

eşitliği elde edilir. (2.1.5) eşitliğinde fonksiyon ve türev değerleri yerine yazılırsa

$$w^{(1)}_{1,-1} + 11w^{(1)}_{1,0} + 11w^{(1)}_{1,1} + w^{(1)}_{1,2} = -\frac{12}{h} \tag{2.1.6}$$

bulunur. Benzer şekilde problem aralığını geren tüm test fonksiyonları sırasıyla kullanılır. Son iki B-spline fonksiyonunun ϕ_N ve ϕ_{N+1} kullanılması ile sırasıyla

$$\frac{d\phi_N\left(x_1\right)}{dx} = \sum_{j=N-1}^{N+2} w^{(1)}_{1,j}\phi_N\left(x_j\right) \tag{2.1.7}$$

eşitliği elde edilir. (2.1.7) eşitliğinde fonksiyon ve türev değerleri yerine yazılırsa

$$w^{(1)}_{1,N-1} + 11w^{(1)}_{1,N} + 11w^{(1)}_{1,N+1} + w^{(1)}_{1,N+2} = 0 \tag{2.1.8}$$

bulunur ve

$$\frac{d\phi_{N+1}\left(x_1\right)}{dx} = \sum_{j=N}^{N+3} w^{(1)}_{1,j}\phi_{N+1}\left(x_j\right) \tag{2.1.9}$$

eşitliği elde edilir. (2.1.9) eşitliğinde fonksiyon ve türev değerleri yerine yazılırsa

$$w^{(1)}_{1,N} + 11w^{(1)}_{1,N+1} + 11w^{(1)}_{1,N+2} + w^{(1)}_{1,N+3} = 0 \tag{2.1.10}$$

bulunur. Elde edilen eşitlikler matris formunda yazılırsa

$$
\begin{bmatrix}
1 & 11 & 11 & 1 & & & & & \\
 & 1 & 11 & 11 & 1 & & & & \\
 & & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & & & \\
 & & & & & & & & \\
 & & & & & & & & \\
 & & & & & & & & \\
 & & & & 1 & 11 & 11 & 1 & \\
 & & & & & 1 & 11 & 11 & 1
\end{bmatrix}
\begin{bmatrix}
w^{(1)}_{1,-2} \\ w^{(1)}_{1,-1} \\ w^{(1)}_{1,0} \\ w^{(1)}_{1,1} \\ \vdots \\ \\ w^{(1)}_{1,N+2} \\ w^{(1)}_{1,N+3}
\end{bmatrix}
=
\begin{bmatrix}
-4/h \\ -12/h \\ 12/h \\ 4/h \\ 0 \\ \vdots \\ \\ 0 \\ 0
\end{bmatrix}
\tag{2.1.11}
$$

cebirsel sistemi elde edilir. (2.1.11) sisteminde $N+6$ tane bilinmeyen ve $N+3$ tane denklem mevcut olduğundan sistemin çözülebilmesi için katsayı matrisinde soldan bir sütun ve sağdan iki sütun ile bilinmeyenler vektöründen de $w^{(1)}_{1,-2}$, $w^{(1)}_{1,N+2}$ ve $w^{(1)}_{1,N+3}$ terimlerinin elenmesi gerekmektedir. Bu eleme ile denklem sayısı bilinmeyen sayısına eşitlenerek (2.1.11) sistemi 5-bant Thomas algoritması ile çözülebilir bir denklem sistemi biçimini alır. (2.1.3) eşitliğinin türevlenmesi ve türev değerlerinin yerine yazılması ile

$$
\frac{d^2\phi_{-1}(x_1)}{dx^2} = \sum_{j=-2}^{1} w^{(1)}_{1,j}\phi'_{-1}(x_j),
$$

$$
\begin{aligned}
\frac{12}{h^2} = {} & w^{(1)}_{1,-2}\phi'_{-1}(x_{-2}) + w^{(1)}_{1,-1}\phi'_{-1}(x_{-1}) + \\
& w^{(1)}_{1,0}\phi'_{-1}(x_0) + w^{(1)}_{1,1}\phi'_{-1}(x_1),
\end{aligned}
$$

$$
\frac{12}{h^2} = w^{(1)}_{1,-2}\frac{4}{h} + w^{(1)}_{1,-1}\frac{12}{h} - w^{(1)}_{1,0}\frac{12}{h} - w^{(1)}_{1,1}\frac{4}{h} \tag{2.1.12}
$$

elde edilir. (2.1.12) eşitliğinin düzenlenmesi ile

$$w_{1,-2}^{(1)} = \frac{3}{h} - 3w_{1,-1}^{(1)} + 3w_{1,0}^{(1)} + w_{1,1}^{(1)} \tag{2.1.13}$$

elde edilir. (2.1.13) eşitliği (2.1.4) 'de yerine yazılırsa

$$-\frac{7}{h} = 8w_{1,-1}^{(1)} + 14w_{1,0}^{(1)} + 2w_{1,1}^{(1)} \tag{2.1.14}$$

bulunur. (2.1.7) eşitliğinin türevlenmesi ve türev değerlerinin yerine yazılması ile

$$\frac{d^2\phi_N(x_1)}{dx^2} = \sum_{j=N-1}^{N+2} w_{1,j}^{(1)}\phi_N'(x_j),$$

$$\begin{aligned} 0 = {} & w_{1,N-1}^{(1)}\phi_N'(x_{N-1}) + w_{1,N}^{(1)}\phi_N'(x_N) + \\ & w_{1,N+1}^{(1)}\phi_N'(x_{N+1}) + w_{1,N+2}^{(1)}\phi_N'(x_{N+2}), \end{aligned}$$

$$0 = w_{1,N-1}^{(1)}\frac{4}{h} + w_{1,N}^{(1)}\frac{12}{h} - w_{1,N+1}^{(1)}\frac{12}{h} - w_{1,N+2}^{(1)}\frac{4}{h} \tag{2.1.15}$$

elde edilir. (2.1.15) eşitliğinin düzenlenmesi ile

$$w_{1,N+2}^{(1)} = w_{1,N-1}^{(1)} + 3w_{1,N}^{(1)} - 3w_{1,N+1}^{(1)} \tag{2.1.16}$$

elde edilir. (2.1.16) eşitliği (2.1.8) 'de yerine yazılırsa

$$0 = 2w_{1,N-1}^{(1)} + 14w_{1,N}^{(1)} + 8w_{1,N+1}^{(1)} \tag{2.1.17}$$

bulunur. (2.1.9) eşitliğinin türevlenmesi ve türev değerlerinin yerine yazılması ile

$$\frac{d^2\phi_{N+1}(x_1)}{dx^2} = \sum_{j=N}^{N+3} w_{1,j}^{(1)}\phi_{N+1}'(x_j),$$

$$0 = w_{1,N}^{(1)} \phi_{N+1}^{'}(x_N) + w_{1,N+1}^{(1)} \phi_{N+1}^{'}(x_{N+1}) +$$
$$w_{1,N+2}^{(1)} \phi_{N+1}^{'}(x_{N+2}) + w_{1,N+3}^{(1)} \phi_{N+1}^{'}(x_{N+3}),$$

$$0 = w_{1,N}^{(1)} \frac{4}{h} + w_{1,N+1}^{(1)} \frac{12}{h} - w_{1,N+2}^{(1)} \frac{12}{h} - w_{1,N+3}^{(1)} \frac{4}{h} \tag{2.1.18}$$

elde edilir. (2.1.18) eşitliğinin düzenlenmesi ile de

$$w_{1,N+3}^{(1)} = w_{1,N}^{(1)} + 3w_{1,N+1}^{(1)} - 3w_{1,N+2}^{(1)} \tag{2.1.19}$$

elde edilir. (2.1.16) ve (2.1.19) eşitlikleri (2.1.10) 'da yerine yazılırsa

$$0 = 30w_{1,N}^{(1)} + 42w_{1,N+1}^{(1)} \tag{2.1.20}$$

bulunur. Elde edilen (2.1.14), (2.1.17) ve (2.1.20) eşitliklerinin kullanılmasıyla

$$\begin{bmatrix} 8 & 14 & 2 & & & & & & \\ 1 & 11 & 11 & 1 & & & & & \\ & 1 & 11 & 11 & 1 & & & & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & & & \\ & & & & & & & & \\ & & & & & 1 & 11 & 11 & 1 \\ & & & & & & 2 & 14 & 8 \\ & & & & & & & 30 & 42 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w_{1,-1}^{(1)} \\ w_{1,0}^{(1)} \\ w_{1,1}^{(1)} \\ w_{1,2}^{(1)} \\ \vdots \\ \\ w_{1,N}^{(1)} \\ w_{1,N+1}^{(1)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -7/h \\ -12/h \\ 12/h \\ 4/h \\ 0 \\ \vdots \\ \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \tag{2.1.21}$$

cebirsel sistemi elde edilir. (2.1.21) sisteminin 5-bant Thomas algoritması ile çözülmesiyle x_1 noktasına ait birinci türev ağırlık katsayıları elde edilir.

$2 \leq k \leq N-1$ olmak üzere k. düğüm noktası ile ilgili birinci türev ağırlık katsayıları olan $w_{k,j}^{(1)}$ 'lerin elde edilmesi için de aynı metodoloji kullanılır. $\{\phi_{-1}(x), \phi_0(x), \ldots, \phi_N(x), \phi_{N+1}(x)\}$ baz fonksiyonlarının her birinin test fonksiyonu olarak kullanılması ve elde edilen denklemlerin düzenlenmesi ile

$$\begin{bmatrix} 8 & 14 & 2 & & & & & \\ 1 & 11 & 11 & 1 & & & & \\ & 1 & 11 & 11 & 1 & & & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & & \\ & & & & & & & \\ & & & & & & & \\ & & & & & & & \\ & & & & & & & \\ & & & & 1 & 11 & 11 & 1 \\ & & & & & 2 & 14 & 8 \\ & & & & & & 15 & 21 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w_{k,-1}^{(1)} \\ \vdots \\ w_{k,k-2}^{(1)} \\ w_{k,k-1}^{(1)} \\ w_{k,k}^{(1)} \\ w_{k,k+1}^{(1)} \\ \vdots \\ w_{k,N+1}^{(1)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ -4/h \\ -12/h \\ 12/h \\ 4/h \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \tag{2.1.22}$$

$N-2$ tane denklem sistemi elde edilir. Bu sistemlerin Thomas algoritması ile çözümünden $N-2$ tane düğüm noktasına ait birinci türev ağırlık katsayıları elde edilir.

Son düğüm noktası olan x_N noktasına ait birinci türev ağırlık katsayıları olan $w_{N,j}^{(1)}$ 'lerin bulunması için de

$$\frac{d\phi_m\left(x_N\right)}{dx} = \sum_{j=m-1}^{m+2} w_{N,j}^{(1)} \phi_m\left(x_j\right), \quad m = -1, 0, \ldots, N+1 \tag{2.1.23}$$

kullanılır. (2.1.23) eşitliğinde $\{\phi_{-1}(x), \phi_0(x), \ldots, \phi_N(x), \phi_{N+1}(x)\}$ baz fonksiyonlarının her biri sırasıyla test fonksiyonu olarak kullanılırsa

$$
\begin{aligned}
w^{(1)}_{N,-2} + 11w^{(1)}_{N,-1} + 11w^{(1)}_{N,0} + w^{(1)}_{N,1} &= 0,\\
w^{(1)}_{N,-1} + 11w^{(1)}_{N,0} + 11w^{(1)}_{N,1} + w^{(1)}_{N,2} &= 0,\\
&\vdots\\
w^{(1)}_{N,N-4} + 11w^{(1)}_{N,N-3} + 11w^{(1)}_{N,N-2} + w^{(1)}_{N,N-1} &= 0,\\
w^{(1)}_{N,N-3} + 11w^{(1)}_{N,N-2} + 11w^{(1)}_{N,N-1} + w^{(1)}_{N,N} &= -4/h,\\
w^{(1)}_{N,N-2} + 11w^{(1)}_{N,N-1} + 11w^{(1)}_{N,N} + w^{(1)}_{N,N+1} &= -12/h,\\
w^{(1)}_{N,N-1} + 11w^{(1)}_{N,N} + 11w^{(1)}_{N,N+1} + w^{(1)}_{N,N+2} &= 12/h,\\
w^{(1)}_{N,N} + 11w^{(1)}_{N,N+1} + 11w^{(1)}_{N,N+2} + w^{(1)}_{N,N+3} &= 4/h
\end{aligned}
\qquad (2.1.24)
$$

denklem sistemi elde edilir. Bu denklem sistemi matris formunda

$$
\begin{bmatrix}
1 & 11 & 11 & 1 & & & & & \\
 & 1 & 11 & 11 & 1 & & & & \\
 & & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & & & \\
 & & & & & & & & \\
 & & & & 1 & 11 & 11 & 1 & \\
 & & & & & 1 & 11 & 11 & 1
\end{bmatrix}
\begin{bmatrix}
w^{(1)}_{N,-2}\\
w^{(1)}_{N,-1}\\
\vdots\\
\\
w^{(1)}_{N,N}\\
w^{(1)}_{N,N+1}\\
w^{(1)}_{N,N+2}\\
w^{(1)}_{N,N+3}
\end{bmatrix}
=
\begin{bmatrix}
0\\
0\\
\vdots\\
\\
0\\
-4/h\\
-12/h\\
12/h\\
4/h
\end{bmatrix}
\qquad (2.1.25)
$$

şeklinde ifade edilir. Benzer metodoloji kullanılarak yapılan elemeler ile (2.1.25) denklem sistemi

$$\begin{bmatrix} 8 & 14 & 2 & & & & & \\ 1 & 11 & 11 & 1 & & & & \\ & 1 & 11 & 11 & 1 & & & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & & \\ & & & & & & & \\ & & & & 1 & 11 & 11 & 1 \\ & & & & & 2 & 14 & 8 \\ & & & & & & 30 & 42 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w_{N,-1}^{(1)} \\ w_{N,0}^{(1)} \\ \vdots \\ \\ w_{N,N-2}^{(1)} \\ w_{N,N-1}^{(1)} \\ w_{N,N}^{(1)} \\ w_{N,N+1}^{(1)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ \\ 0 \\ -4/h \\ -12/h \\ 9/h \\ 53/h \end{bmatrix} \tag{2.1.26}$$

şeklinde Thomas algoritması ile çözülebilir bir denklem sistemine dönüşür.

2.1.2 İkinci Türev Ağırlık Katsayılarının Tespit Edilmesi

(1.1.1) eşitliği ile verilen temel diferensiyel quadrature yaklaşımında kuartik B-spline fonksiyonların test fonksiyonlar olarak kullanılması ile ağırlık katsayıları elde edilecektir. (1.1.1) eşitliğinde $r = 2$ olarak seçildiğinde ikinci türev ağırlık katsayılarının elde edilebilmesi için diferensiyel quadrature metodolojisi kullanılacaktır. (1.1.1) eşitliğinde $r = 2$ olarak seçildiğinde

$$\frac{d^2\phi_m(x_i)}{dx^2} = \sum_{j=m-1}^{m+2} w_{i,j}^{(2)} \phi_m(x_j), \quad m = -1, 0, \ldots, N+1, \ i = 1, 2, ..., N \tag{2.1.27}$$

elde edilir. İlk olarak, birinci düğüm noktası x_1 'deki ağırlık katsayıları $w_{1,j}^{(2)}$, $(j = -2, -1, \ldots, N+3)$ 'nin elde edilebilmesi için sırasıyla test fonksiyonları ϕ_m , $m = -1, 0, \ldots, N+1$ kullanılır. $i = 1$ ve $m = -1$ için

$$\frac{d^2\phi_{-1}(x_1)}{dx^2} = \sum_{j=-2}^{1} w_{1,j}^{(2)} \phi_{-1}(x_j) \tag{2.1.28}$$

eşitliği elde edilir. Tablo 2.1 'de verilen fonksiyon ve türevleri (2.1.28) eşitliğinde yerine yazılırsa

$$w_{1,-2}^{(2)} + 11w_{1,-1}^{(2)} + 11w_{1,0}^{(2)} + w_{1,1}^{(2)} = \frac{12}{h^2} \tag{2.1.29}$$

bulunur. Ardından bir sonraki test fonksiyonu ϕ_0 kullanılırsa

$$\frac{d^2\phi_0\left(x_1\right)}{dx^2} = \sum_{j=-1}^{2} w_{1,j}^{(2)}\phi_0\left(x_j\right) \tag{2.1.30}$$

eşitliği elde edilir. (2.1.30) eşitliğinde fonksiyon ve türev değerleri yerine yazılırsa

$$w_{1,-1}^{(2)} + 11w_{1,0}^{(2)} + 11w_{1,1}^{(2)} + w_{1,2}^{(2)} = -\frac{12}{h^2} \tag{2.1.31}$$

bulunur. Benzer şekilde problem aralığını geren tüm test fonksiyonları sırasıyla kullanılır. Son iki B-spline fonksiyonunun ϕ_N ve ϕ_{N+1} kullanılması ile sırasıyla

$$\frac{d^2\phi_N\left(x_1\right)}{dx^2} = \sum_{j=N-1}^{N+2} w_{1,j}^{(2)}\phi_N\left(x_j\right) \tag{2.1.32}$$

eşitliği elde edilir. (2.1.32) eşitliğinde fonksiyon ve türev değerleri yerine yazılırsa

$$w_{1,N-1}^{(2)} + 11w_{1,N}^{(2)} + 11w_{1,N+1}^{(2)} + w_{1,N+2}^{(2)} = 0 \tag{2.1.33}$$

bulunur ve

$$\frac{d^2\phi_{N+1}\left(x_1\right)}{dx^2} = \sum_{j=N}^{N+3} w_{1,j}^{(2)}\phi_{N+1}\left(x_j\right) \tag{2.1.34}$$

eşitliği elde edilir. (2.1.34) eşitliğinde fonksiyon ve türev değerleri yerine yazılırsa

$$w_{1,N}^{(2)} + 11w_{1,N+1}^{(2)} + 11w_{1,N+2}^{(2)} + w_{1,N+3}^{(2)} = 0 \tag{2.1.35}$$

bulunur. Elde edilen eşitlikler matris formunda yazılırsa

$$\begin{bmatrix} 1 & 11 & 11 & 1 & & & & & \\ & 1 & 11 & 11 & 1 & & & & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & & & \\ & & & & & & & & \\ & & & & 1 & 11 & 11 & 1 & \\ & & & & & 1 & 11 & 11 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w^{(2)}_{1,-2} \\ w^{(2)}_{1,-1} \\ w^{(2)}_{1,0} \\ w^{(2)}_{1,1} \\ \vdots \\ \\ w^{(2)}_{1,N+2} \\ w^{(2)}_{1,N+3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 12/h^2 \\ -12/h^2 \\ -12/h^2 \\ 12/h^2 \\ 0 \\ \vdots \\ \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \tag{2.1.36}$$

cebirsel sistemi elde edilir. (2.1.36) sisteminde $N+6$ tane bilinmeyen ve $N+3$ tane denklem mevcut olduğundan sistemin çözülebilmesi için katsayı matrisinde soldan bir sütun ve sağdan iki sütun ile bilinmeyenler vektöründen de $w^{(2)}_{1,-2}$, $w^{(2)}_{1,N+2}$ ve $w^{(2)}_{1,N+3}$ terimlerinin elenmesi gerekmektedir. Bu eleme ile denklem sayısı bilinmeyen sayısına eşitlenerek (2.1.36) sistemi 5-bant Thomas algoritması ile çözülebilir bir denklem sistemi biçimini alır. (2.1.28) eşitliğinin türevlenmesi ve türev değerlerinin yerine yazılması ile

$$\frac{d^3\phi_{-1}(x_1)}{dx^3} = \sum_{j=-2}^{1} w^{(2)}_{1,j}\phi'_{-1}(x_j),$$

$$-\frac{24}{h^3} = w^{(2)}_{1,-2}\phi'_{-1}(x_{-2}) + w^{(2)}_{1,-1}\phi'_{-1}(x_{-1}) + \\ w^{(2)}_{1,0}\phi'_{-1}(x_0) + w^{(2)}_{1,1}\phi'_{-1}(x_1),$$

$$-\frac{24}{h^3} = w^{(2)}_{1,-2}\frac{4}{h} + w^{(2)}_{1,-1}\frac{12}{h} - w^{(2)}_{1,0}\frac{12}{h} - w^{(2)}_{1,1}\frac{4}{h} \tag{2.1.37}$$

elde edilir. (2.1.37) eşitliğinin düzenlenmesi ile de

$$w_{1,-2}^{(2)} = -\frac{6}{h^2} - 3w_{1,-1}^{(2)} + 3w_{1,0}^{(2)} + w_{1,1}^{(2)} \tag{2.1.38}$$

elde edilir. (2.1.38) eşitliği (2.1.29) 'da yerine yazılırsa

$$\frac{18}{h^2} = 8w_{1,-1}^{(2)} + 14w_{1,0}^{(2)} + 2w_{1,1}^{(2)} \tag{2.1.39}$$

bulunur. (2.1.32) eşitliğinin türevlenmesi ve türev değerlerinin yerine yazılması ile

$$\frac{d^3\phi_N(x_1)}{dx^3} = \sum_{j=N-1}^{N+2} w_{1,j}^{(2)}\phi_N'(x_j),$$

$$\begin{aligned}0 = {} & w_{1,N-1}^{(2)}\phi_N'(x_{N-1}) + w_{1,N}^{(2)}\phi_N'(x_N) + \\ & w_{1,N+1}^{(2)}\phi_N'(x_{N+1}) + w_{1,N+2}^{(2)}\phi_N'(x_{N+2}),\end{aligned}$$

$$0 = w_{1,N-1}^{(2)}\frac{4}{h} + w_{1,N}^{(2)}\frac{12}{h} - w_{1,N+1}^{(2)}\frac{12}{h} - w_{1,N+2}^{(2)}\frac{4}{h} \tag{2.1.40}$$

elde edilir. (2.1.40) eşitliğinin düzenlenmesi ile

$$w_{1,N+2}^{(2)} = w_{1,N-1}^{(2)} + 3w_{1,N}^{(2)} - 3w_{1,N+1}^{(2)} \tag{2.1.41}$$

elde edilir. (2.1.41) eşitliği (2.1.33) 'de yerine yazılırsa

$$0 = 2w_{1,N-1}^{(2)} + 14w_{1,N}^{(2)} + 8w_{1,N+1}^{(2)} \tag{2.1.42}$$

bulunur. (2.1.34) eşitliğinin türevlenmesi ve türev değerlerinin yerine yazılması ile

$$\frac{d^3\phi_{N+1}(x_1)}{dx^3} = \sum_{j=N}^{N+3} w_{1,j}^{(2)}\phi_{N+1}'(x_j),$$

$$0 = w_{1,N}^{(2)}\phi_{N+1}^{'}(x_N) + w_{1,N+1}^{(2)}\phi_{N+1}^{'}(x_{N+1}) +$$
$$w_{1,N+2}^{(2)}\phi_{N+1}^{'}(x_{N+2}) + w_{1,N+3}^{(2)}\phi_{N+1}^{'}(x_{N+3}),$$

$$0 = w_{1,N}^{(2)}\frac{4}{h} + w_{1,N+1}^{(2)}\frac{12}{h} - w_{1,N+2}^{(2)}\frac{12}{h} - w_{1,N+3}^{(2)}\frac{4}{h} \tag{2.1.43}$$

elde edilir. (2.1.43) eşitliğinin düzenlenmesi ile

$$w_{1,N+3}^{(2)} = w_{1,N}^{(2)} + 3w_{1,N+1}^{(2)} - 3w_{1,N+2}^{(2)} \tag{2.1.44}$$

elde edilir. (2.1.41) ve (2.1.44) eşitlikleri (2.1.35) 'de yerine yazılırsa

$$0 = 30w_{1,N}^{(2)} + 42w_{1,N+1}^{(2)} \tag{2.1.45}$$

bulunur. Elde edilen (2.1.39), (2.1.42) ve (2.1.45) eşitliklerinin kullanılmasıyla

$$\begin{bmatrix} 8 & 14 & 2 & & & & & \\ 1 & 11 & 11 & 1 & & & & \\ & 1 & 11 & 11 & 1 & & & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & & \\ & & & & & & & \\ & & & & 1 & 11 & 11 & 1 \\ & & & & & 2 & 14 & 8 \\ & & & & & & 30 & 42 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w_{1,-1}^{(2)} \\ w_{1,0}^{(2)} \\ w_{1,1}^{(2)} \\ w_{1,2}^{(2)} \\ \vdots \\ w_{1,N}^{(2)} \\ w_{1,N+1}^{(2)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 18/h^2 \\ -12/h^2 \\ -12/h^2 \\ 12/h^2 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \tag{2.1.46}$$

cebirsel sistemi elde edilir. (2.1.46) sisteminin 5-bant Thomas algoritması ile çözülmesiyle x_1 noktasına ait ikinci türev ağırlık katsayıları elde edilir.

$2 \leq k \leq N-1$ olmak üzere k. düğüm noktası ile ilgili ikinci türev ağırlık katsayıları olan $w_{k,j}^{(2)}$ 'lerin elde edilmesi için de aynı metodoloji kullanılır. $\{\phi_{-1}(x),\, \phi_0(x),\, \ldots,\, \phi_N(x),\, \phi_{N+1}(x)\}$ baz fonksiyonlarının her birinin test fonksiyonu olarak kullanılması ve elde edilen denklemlerin düzenlenmesi ile

$$\begin{bmatrix} 8 & 14 & 2 & & & & & \\ 1 & 11 & 11 & 1 & & & & \\ & 1 & 11 & 11 & 1 & & & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & & \\ & & & & & & & \\ & & & & 1 & 11 & 11 & 1 \\ & & & & & 2 & 14 & 8 \\ & & & & & & 30 & 42 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w_{k,-1}^{(2)} \\ \vdots \\ w_{k,k-2}^{(2)} \\ w_{k,k-1}^{(2)} \\ w_{k,k}^{(2)} \\ w_{k,k+1}^{(2)} \\ \vdots \\ w_{k,N+1}^{(2)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 12/h^2 \\ -12/h^2 \\ -12/h^2 \\ 12/h^2 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \tag{2.1.47}$$

$N-2$ tane denklem sistemi elde edilir. Bu sistemlerin Thomas algoritması ile çözümünden $N-2$ tane düğüm noktasına ait ikinci türev ağırlık katsayıları elde edilir.

Son düğüm noktası olan x_N noktasına ait ikinci türev ağırlık katsayıları olan $w_{N,j}^{(2)}$ 'lerin bulunması için de

$$\frac{d^2\phi_m\left(x_N\right)}{dx^2} = \sum_{j=m-1}^{m+2} w_{N,j}^{(2)} \phi_m\left(x_j\right), \quad m = -1, 0, \ldots, N+1 \tag{2.1.48}$$

kullanılır. (2.1.48) eşitliğinde $\{\phi_{-1}(x), \phi_0(x), \ldots, \phi_N(x), \phi_{N+1}(x)\}$ baz fonksiyonlarının her biri sırasıyla test fonksiyonu olarak kullanılırsa

$$
\begin{aligned}
w^{(2)}_{N,-2} + 11w^{(2)}_{N,-1} + 11w^{(2)}_{N,0} + w^{(2)}_{N,1} &= 0,\\
w^{(2)}_{N,-1} + 11w^{(2)}_{N,0} + 11w^{(2)}_{N,1} + w^{(2)}_{N,2} &= 0,\\
&\vdots\\
w^{(2)}_{N,N-4} + 11w^{(2)}_{N,N-3} + 11w^{(2)}_{N,N-2} + w^{(2)}_{N,N-1} &= 0,\\
w^{(2)}_{N,N-3} + 11w^{(2)}_{N,N-2} + 11w^{(2)}_{N,N-1} + w^{(2)}_{N,N} &= 12/h^2,\\
w^{(2)}_{N,N-2} + 11w^{(2)}_{N,N-1} + 11w^{(2)}_{N,N} + w^{(2)}_{N,N+1} &= -12/h^2,\\
w^{(2)}_{N,N-1} + 11w^{(2)}_{N,N} + 11w^{(2)}_{N,N+1} + w^{(2)}_{N,N+2} &= -12/h^2,\\
w^{(2)}_{N,N} + 11w^{(2)}_{N,N+1} + 11w^{(2)}_{N,N+2} + w^{(2)}_{N,N+3} &= 12/h^2 \qquad (2.1.49)
\end{aligned}
$$

denklem sistemi elde edilir. Bu denklem sistemi matris formunda

$$
\begin{bmatrix}
1 & 11 & 11 & 1 & & & & \\
 & 1 & 11 & 11 & 1 & & & \\
 & & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & & \\
 & & & & & & & \\
 & & & 1 & 11 & 11 & 1 & \\
 & & & & 1 & 11 & 11 & 1
\end{bmatrix}
\begin{bmatrix}
w^{(2)}_{N,-2}\\
w^{(2)}_{N,-1}\\
\vdots\\
\\
w^{(2)}_{N,N}\\
w^{(2)}_{N,N+1}\\
w^{(2)}_{N,N+2}\\
w^{(2)}_{N,N+3}
\end{bmatrix}
=
\begin{bmatrix}
0\\
0\\
\vdots\\
\\
0\\
12/h^2\\
-12/h^2\\
-12/h^2\\
12/h^2
\end{bmatrix}
\qquad (2.1.50)
$$

şeklinde ifade edilir. Benzer metodoloji kullanılarak yapılan elemeler ile (2.1.50) denklem sistemi

$$
\begin{bmatrix}
8 & 14 & 2 & & & & & \\
1 & 11 & 11 & 1 & & & & \\
 & 1 & 11 & 11 & 1 & & & \\
 & & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & & \\
 & & & & & & & \\
 & & & & & & & \\
 & & & & 1 & 11 & 11 & 1 \\
 & & & & & 2 & 14 & 8 \\
 & & & & & & 30 & 42
\end{bmatrix}
\begin{bmatrix}
w^{(2)}_{N,-1} \\ w^{(2)}_{N,0} \\ \vdots \\ \\ \\ w^{(2)}_{N,N-2} \\ w^{(2)}_{N,N-1} \\ w^{(2)}_{N,N} \\ w^{(2)}_{N,N+1}
\end{bmatrix}
=
\begin{bmatrix}
0 \\ 0 \\ \vdots \\ \\ 0 \\ 12/h^2 \\ -12/h^2 \\ -30/h^2 \\ 6/h^2
\end{bmatrix}
\tag{2.1.51}
$$

şeklinde Thomas algoritması ile çözülebilir bir denklem sistemine dönüşür.

2.2 Kuintik B-spline DQM

Kuintik B-spline fonksiyonlar beşinci dereceden polinomlardır ve düğüm noktaları haricinde beşinci mertebeye kadar türevleri mevcuttur. Düğüm noktalarında sağdan ve soldan beşinci mertebe türevleri birbirine eşit olmadığından bu noktalarda beşinci mertebe türevleri yoktur. Kuintik B-spline fonksiyonlar

$$
\varphi_m(x) = \frac{1}{h^5}\begin{cases}
(x-x_{m-3})^5, & [x_{m-3}, x_{m-2}] \\
(x-x_{m-3})^5 - 6(x-x_{m-2})^5, & [x_{m-2}, x_{m-1}] \\
(x-x_{m-3})^5 - 6(x-x_{m-2})^5 + 15(x-x_{m-1})^5, & [x_{m-1}, x_m] \\
(x-x_{m-3})^5 - 6(x-x_{m-2})^5 + 15(x-x_{m-1})^5 & \\
-20(x-x_m)^5, & [x_m, x_{m+1}] \\
(x-x_{m-3})^5 - 6(x-x_{m-2})^5 + 15(x-x_{m-1})^5 & \\
-20(x-x_m)^5 + 15(x-x_{m+1})^5 & [x_{m+1}, x_{m+2}] \\
(x-x_{m-3})^5 - 6(x-x_{m-2})^5 + 15(x-x_{m-1})^5 & \\
-20(x-x_m)^5 + 15(x-x_{m+1})^5 - 6(x-x_{m+2})^5 & [x_{m+2}, x_{m+3}] \\
0 & di\breve{g}er\ durumlar
\end{cases}
$$

eşitliği ile verilmektedir. N düğüm noktalı bir problem aralığında $N+4$ tane $\{\varphi_{-1}(x), \varphi_0(x), \ldots, \varphi_{N+1}(x), \varphi_{N+2}(x)\}$ kuintik B-spline fonksiyon bir baz oluşturur. $\varphi_m(x)$ ve dördüncü mertebeye kadar olan $\varphi_i'(x), \varphi_i''(x), \varphi_i'''(x)$ ve $\varphi_i^{iv}(x)$ türevlerinin düğüm noktalarındaki değerleri Tablo 2.2 'de verildi.

Tablo 2.2. $\varphi_m(x)$, $\varphi_i'(x)$, $\varphi_i''(x)$, $\varphi_i'''(x)$ ve $\varphi_i^{iv}(x)$ 'in düğüm noktalarındaki değerleri

x	x_{m-3}	x_{m-2}	x_{m-1}	x_m	x_{m+1}	x_{m+2}	x_{m+3}
φ_m	0	1	26	66	26	1	0
$h\varphi_m'$	0	5	50	0	-50	-5	0
$h^2\varphi_m''$	0	20	40	-120	40	20	0
$h^3\varphi_m'''$	0	60	-120	0	120	-60	0
$h^4\varphi_m^{iv}$	0	120	-480	720	-480	120	0

2.2.1 Birinci Türev Ağırlık Katsayılarının Tespit Edilmesi

(1.1.1) eşitliği ile verilen temel diferensiyel quadrature yaklaşımında kuintik B-spline fonksiyonların test fonksiyonlar olarak kullanılması ile ağırlık katsayıları elde edilecektir. (1.1.1) eşitliğinde $r = 1$ olarak seçildiğinde birinci türev ağırlık katsayılarının elde edilebilmesi için diferensiyel quadrature metodolojisi kullanılacaktır. (1.1.1) eşitliğinde $r = 1$ olarak seçildiğinde

$$\frac{d\varphi_m(x_i)}{dx} = \sum_{j=m-2}^{m+2} w_{i,j}^{(1)} \varphi_m(x_j), \quad m = -1, 0, \ldots, N+2,\ i = 1, 2, ..., N. \tag{2.2.1}$$

elde edilir. İlk olarak, birinci düğüm noktası x_1 'deki ağırlık katsayılarının $w_{1,j}^{(1)}$, $(j = -3, -2, \ldots, N+4)$ 'nin elde edilebilmesi için sırasıyla test fonksiyonları φ_m , $m = -1, 0, \ldots, N+2$ kullanılır. $i = 1$ ve $m = -1$ için

$$\frac{d\varphi_{-1}(x_1)}{dx} = \sum_{j=-3}^{1} w_{1,j}^{(1)} \varphi_{-1}(x_j) \tag{2.2.2}$$

eşitliği elde edilir. Tablo 2.2' de verilen fonksiyon ve türevleri (2.2.2) eşitliğinde yerine yazılırsa

$$w_{1,-3}^{(1)} + 26w_{1,-2}^{(1)} + 66w_{1,-1}^{(1)} + 26w_{1,0}^{(1)} + w_{1,1}^{(1)} = -\frac{5}{h} \tag{2.2.3}$$

bulunur. Ardından bir sonraki test fonksiyonu φ_0 kullanılırsa

$$\frac{d\varphi_0(x_1)}{dx} = \sum_{j=-2}^{2} w_{1,j}^{(1)} \varphi_0(x_j) \tag{2.2.4}$$

eşitliği elde edilir. (2.2.4) eşitliğinde fonksiyon ve türev değerleri yerine yazılırsa

$$w_{1,-2}^{(1)} + 26w_{1,-1}^{(1)} + 66w_{1,0}^{(1)} + 26w_{1,1}^{(1)} + w_{1,2}^{(1)} = -\frac{50}{h} \tag{2.2.5}$$

bulunur. Benzer şekilde problem aralığını geren tüm test fonksiyonları sırasıyla kullanılır. Son iki B-spline fonksiyonunun φ_{N+1} ve φ_{N+2} kullanılması ile sırasıyla

$$\frac{d\varphi_{N+1}(x_1)}{dx} = \sum_{j=N-1}^{N+3} w_{1,j}^{(1)} \varphi_{N+1}(x_j) \tag{2.2.6}$$

eşitliği elde edilir. (2.2.6) eşitliğinde fonksiyon ve türev değerleri yerine yazılırsa

$$w_{1,N-1}^{(1)} + 26w_{1,N}^{(1)} + 66w_{1,N+1}^{(1)} + 26w_{1,N+2}^{(1)} + w_{1,N+3}^{(1)} = 0 \tag{2.2.7}$$

bulunur ve

$$\frac{d\varphi_{N+2}(x_1)}{dx} = \sum_{j=N}^{N+4} w_{1,j}^{(1)} \varphi_{N+2}(x_j) \tag{2.2.8}$$

eşitliği elde edilir. (2.2.8) eşitliğinde fonksiyon ve türev değerleri yerine yazılırsa

$$w_{1,N}^{(1)} + 26w_{1,N+1}^{(1)} + 66w_{1,N+2}^{(1)} + 26w_{1,N+3}^{(1)} + w_{1,N+4}^{(1)} = 0 \tag{2.2.9}$$

bulunur. Elde edilen eşitlikler matris formunda yazılırsa

$$\begin{bmatrix} 1 & 26 & 66 & 26 & 1 & & & & \\ & 1 & 26 & 66 & 26 & 1 & & & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & & \\ & & & & & & & & \\ & & & 1 & 26 & 66 & 26 & 1 & \\ & & & & 1 & 26 & 66 & 26 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w_{1,-3}^{(1)} \\ w_{1,-2}^{(1)} \\ w_{1,-1}^{(1)} \\ w_{1,0}^{(1)} \\ \vdots \\ \\ w_{1,N+3}^{(1)} \\ w_{1,N+4}^{(1)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -5/h \\ -50/h \\ 0 \\ 50/h \\ 5/h \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \tag{2.2.10}$$

cebirsel sistemi elde edilir. (2.2.10) sisteminde $N+8$ tane bilinmeyen ve $N+4$ tane denklem mevcut olduğundan sistemin çözülebilmesi için katsayı matrisinde soldan iki sütun ve sağdan iki sütun ile bilinmeyenler vektöründen de $w_{1,-3}^{(1)}$, $w_{1,-2}^{(1)}$, $w_{1,N+3}^{(1)}$ ve $w_{1,N+4}^{(1)}$ terimlerinin elenmesi gerekmektedir. Bu eleme ile denklem sayısı bilinmeyen sayısına eşitlenerek (2.2.10) sistemi 5-bant Thomas algoritması ile çözülebilir bir denklem sistemi biçimini alır. (2.2.2) eşitliğinin türevlenmesi ve türev değerlerinin yerine yazılması ile

$$\frac{d^2\varphi_{-1}(x_1)}{dx^2} = \sum_{j=-3}^{1} w_{1,j}^{(1)} \varphi_{-1}^{'}(x_j),$$

$$\frac{20}{h^2} = w_{1,-3}^{(1)} \varphi_{-1}^{'}(x_{-3}) + w_{1,-2}^{(1)} \varphi_{-1}^{'}(x_{-2}) + w_{1,-1}^{(1)} \varphi_{-1}^{'}(x_{-1}) + w_{1,0}^{(1)} \varphi_{-1}^{'}(x_0) + w_{1,1}^{(1)} \varphi_{-1}^{'}(x_1),$$

$$\frac{20}{h^2} = w_{1,-3}^{(1)} \frac{5}{h} + w_{1,-2}^{(1)} \frac{50}{h} - w_{1,0}^{(1)} \frac{50}{h} - w_{1,1}^{(1)} \frac{5}{h} \tag{2.2.11}$$

elde edilir. (2.2.11) eşitliğinin düzenlenmesi ile

$$w_{1,-3}^{(1)} = \frac{4}{h} - 10 w_{1,-2}^{(1)} + 10 w_{1,0}^{(1)} + w_{1,1}^{(1)} \tag{2.2.12}$$

elde edilir. (2.2.4) eşitliğinin türevlenmesi ve türev değerlerinin yerine yazılması ile

$$\frac{d^2\varphi_0(x_1)}{dx^2} = \sum_{j=-2}^{2} w_{1,j}^{(1)} \varphi_0^{'}(x_j),$$

$$\frac{40}{h^2} = w_{1,-2}^{(1)} \varphi_{-1}^{'}(x_{-2}) + w_{1,-1}^{(1)} \varphi_{-1}^{'}(x_{-1}) + w_{1,0}^{(1)} \varphi_{-1}^{'}(x_0) + w_{1,1}^{(1)} \varphi_{-1}^{'}(x_1) + w_{1,2}^{(1)} \varphi_{-1}^{'}(x_2),$$

$$\frac{40}{h^2} = w_{1,-2}^{(1)} \frac{5}{h} + w_{1,-1}^{(1)} \frac{50}{h} - w_{1,1}^{(1)} \frac{50}{h} - w_{1,2}^{(1)} \frac{5}{h} \tag{2.2.13}$$

elde edilir. (2.2.13) eşitliğinin düzenlenmesi ile

$$w_{1,-2}^{(1)} = \frac{8}{h} - 10 w_{1,-1}^{(1)} + 10 w_{1,1}^{(1)} + w_{1,2}^{(1)} \tag{2.2.14}$$

elde edilir.(2.2.12) ve (2.2.14) eşitlikleri (2.2.3) 'de yerine yazılırsa

$$-\frac{137}{2h} = -47w_{1,-1}^{(1)} + 18w_{1,0}^{(1)} + 81w_{1,1}^{(1)} + 8w_{1,2}^{(1)} \tag{2.2.15}$$

bulunur. (2.2.14) eşitliği (2.2.5) 'de yerine yazılırsa

$$-\frac{29}{h} = 8w_{1,-1}^{(1)} + 33w_{1,0}^{(1)} + 18w_{1,1}^{(1)} + w_{1,2}^{(1)} \tag{2.2.16}$$

bulunur.(2.2.6) eşitliğinin türevlenmesi ve türev değerlerinin yerine yazılması ile

$$\frac{d^2\varphi_{N+1}(x_1)}{dx^2} = \sum_{j=N-1}^{N+3} w_{1,j}^{(1)}\varphi_{N+1}^{'}(x_j),$$

$$\begin{aligned} 0 = {} & w_{1,N-1}^{(1)}\varphi_{N+1}^{'}(x_{N-1}) + w_{1,N}^{(1)}\varphi_{N+1}^{'}(x_N) + w_{1,N+1}^{(1)}\varphi_{N+1}^{'}(x_{N+1}) \\ & + w_{1,N+2}^{(1)}\varphi_{N+1}^{'}(x_{N+2}) + w_{1,N+3}^{(1)}\varphi_{N+1}^{'}(x_{N+3}), \end{aligned}$$

$$0 = w_{1,N-1}^{(1)}\frac{5}{h} + w_{1,N}^{(1)}\frac{50}{h} - w_{1,N+2}^{(1)}\frac{50}{h} - w_{1,N+3}^{(1)}\frac{5}{h} \tag{2.2.17}$$

elde edilir. (2.2.17) eşitliğinin düzenlenmesi ile

$$w_{1,N+3}^{(1)} = w_{1,N-1}^{(1)} + 10w_{1,N}^{(1)} - 10w_{1,N+2}^{(1)} \tag{2.2.18}$$

elde edilir. (2.2.8) eşitliğinin türevlenmesi ve türev değerlerinin yerine yazılması ile

$$\frac{d^2\varphi_{N+2}(x_1)}{dx^2} = \sum_{j=N}^{N+4} w_{1,j}^{(1)}\varphi_{N+2}^{'}(x_j),$$

$$\begin{aligned} 0 = {} & w_{1,N}^{(1)}\varphi_{N+2}^{'}(x_N) + w_{1,N+1}^{(1)}\varphi_{N+2}^{'}(x_{N+1}) + w_{1,N+2}^{(1)}\varphi_{N+2}^{'}(x_{N+2}) \\ & + w_{1,N+3}^{(1)}\varphi_{N+2}^{'}(x_{N+3}) + w_{1,N+4}^{(1)}\varphi_{N+2}^{'}(x_{N+4}), \end{aligned}$$

$$0 = w^{(1)}_{1,N}\frac{5}{h} + w^{(1)}_{1,N+1}\frac{50}{h} - w^{(1)}_{1,N+3}\frac{50}{h} - w^{(1)}_{1,N+4}\frac{5}{h} \tag{2.2.19}$$

elde edilir. (2.2.19) eşitliğinin düzenlenmesi ile

$$w^{(1)}_{1,N+4} = w^{(1)}_{1,N} + 10w^{(1)}_{1,N+1} - 10w^{(1)}_{1,N+3} \tag{2.2.20}$$

elde edilir. (2.2.18) ve (2.2.20) eşitlikleri (2.2.9) 'da yerine yazılırsa

$$0 = 8w^{(1)}_{1,N-1} + 81w^{(1)}_{1,N} + 18w^{(1)}_{1,N+1} - 47w^{(1)}_{1,N+2} \tag{2.2.21}$$

bulunur. (2.2.18) eşitliği (2.2.7) 'de yerine yazılırsa

$$0 = w^{(1)}_{1,N-1} + 18w^{(1)}_{1,N} + 33w^{(1)}_{1,N+1} + 8w^{(1)}_{1,N+2} \tag{2.2.22}$$

bulunur. Elde edilen (2.2.15), (2.2.16), (2.2.21) ve (2.2.22) eşitliklerinin kullanılması ve sistemin düzenlenmesiyle

$$\begin{bmatrix} 37 & 82 & 21 & & & & & & \\ 8 & 33 & 18 & 1 & & & & & \\ 1 & 26 & 66 & 26 & 1 & & & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & & & \\ & & & & 1 & 26 & 66 & 26 & 1 \\ & & & & & 1 & 18 & 33 & 8 \\ & & & & & & 21 & 82 & 37 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w^{(1)}_{1,-1} \\ w^{(1)}_{1,0} \\ w^{(1)}_{1,1} \\ w^{(1)}_{1,2} \\ \vdots \\ w^{(1)}_{1,N+1} \\ w^{(1)}_{1,N+2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -109/2h \\ -29/h \\ 0 \\ 50/h \\ 5/h \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \tag{2.2.23}$$

cebirsel sistemi elde edilir. (2.2.23) sisteminin 5-bant Thomas algoritması ile çözülmesiyle x_1 noktasına ait birinci türev ağırlık katsayıları elde edilir.

$2 \leq k \leq N-1$ olmak üzere k. düğüm noktası ile ilgili birinci türev ağırlık katsayıları olan $w_{k,j}^{(1)}$ 'lerin elde edilmesi için de aynı metodoloji kullanılır. $\{\varphi_{-1}(x), \varphi_0(x), \ldots, \varphi_{N+1}(x), \varphi_{N+2}(x)\}$ baz fonksiyonlarının her birinin test fonksiyonu olarak kullanılması ve elde edilen denklemlerin düzenlenmesi ile

$$\begin{bmatrix} 37 & 82 & 21 & & & & & & \\ 8 & 33 & 18 & 1 & & & & & \\ 1 & 26 & 66 & 26 & 1 & & & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & & & \\ & & & & & & & & \\ & & & & 1 & 26 & 66 & 26 & 1 \\ & & & & & 1 & 18 & 33 & 8 \\ & & & & & & 21 & 82 & 37 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w_{k,-1}^{(1)} \\ \vdots \\ w_{k,k-2}^{(1)} \\ w_{k,k-1}^{(1)} \\ w_{k,k}^{(1)} \\ w_{k,k+1}^{(1)} \\ w_{k,k+2}^{(1)} \\ \vdots \\ w_{k,N+1}^{(1)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ -5/h \\ -50/h \\ 0 \\ 50/h \\ 5/h \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \tag{2.2.24}$$

$N-2$ tane denklem sistemi elde edilir. Bu sistemlerin Thomas algoritması ile çözümünden $N-2$ tane düğüm noktasına ait birinci türev ağırlık katsayıları elde edilir.

Son düğüm noktası olan x_N noktasına ait birinci türev ağırlık katsayıları olan $w_{N,j}^{(1)}$ 'lerin bulunması için de

$$\frac{d\varphi_m(x_N)}{dx} = \sum_{j=m-2}^{m+2} w_{N,j}^{(1)} \varphi_m(x_j), \quad m = -1, 0, \ldots, N+2 \tag{2.2.25}$$

kullanılır. (2.2.25) eşitliğinde $\{\varphi_{-1}(x), \varphi_0(x), \ldots, \varphi_{N+1}(x), \varphi_{N+2}(x)\}$ baz fonksiyonlarının her biri sırasıyla test fonksiyonu olarak kullanılırsa

$$
\begin{aligned}
w^{(1)}_{N,-3}+26w^{(1)}_{N,-2}+66w^{(1)}_{N,-1}+26w^{(1)}_{N,0}+w^{(1)}_{N,1}&=0,\\
w^{(1)}_{N,-2}+26w^{(1)}_{N,-1}+66w^{(1)}_{N,0}+26w^{(1)}_{N,1}+w^{(1)}_{N,2}&=0,\\
&\vdots\\
w^{(1)}_{N,N-5}+26w^{(1)}_{N,N-4}+66w^{(1)}_{N,N-3}+26w^{(1)}_{N,N-2}+w^{(1)}_{N,N-1}&=0,\\
w^{(1)}_{N,N-4}+26w^{(1)}_{N,N-3}+66w^{(1)}_{N,N-2}+26w^{(1)}_{N,N-1}+w^{(1)}_{N,N}&=5/h,\\
w^{(1)}_{N,N-3}+26w^{(1)}_{N,N-2}+66w^{(1)}_{N,N-1}+26w^{(1)}_{N,N}+w^{(1)}_{N,N+1}&=-50/h,\\
w^{(1)}_{N,N-2}+26w^{(1)}_{N,N-1}+66w^{(1)}_{N,N}+26w^{(1)}_{N,N+1}+w^{(1)}_{N,N+2}&=0,\\
w^{(1)}_{N,N-1}+26w^{(1)}_{N,N}+66w^{(1)}_{N,N+1}+26w^{(1)}_{N,N+2}+w^{(1)}_{N,N+3}&=50/h,\\
w^{(1)}_{N,N}+26w^{(1)}_{N,N+1}+66w^{(1)}_{N,N+2}+26w^{(1)}_{N,N+3}+w^{(1)}_{N,N+4}&=5/h
\end{aligned}
\tag{2.2.26}
$$

denklem sistemi elde edilir. Bu denklem sistemi matris formunda

$$
\begin{bmatrix}
1 & 26 & 66 & 26 & 1 & & & & \\
 & 1 & 26 & 66 & 26 & 1 & & & \\
 & & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & & \\
 & & & & & & & & \\
 & & & 1 & 26 & 66 & 26 & 1 & \\
 & & & & 1 & 26 & 66 & 26 & 1
\end{bmatrix}
\begin{bmatrix}
w^{(1)}_{N,-3}\\ w^{(1)}_{N,-2}\\ \vdots \\ \\ w^{(1)}_{N,N+1}\\ w^{(1)}_{N,N+2}\\ w^{(1)}_{N,N+3}\\ w^{(1)}_{N,N+4}
\end{bmatrix}
=
\begin{bmatrix}
0\\ 0\\ \vdots\\ \\ 0\\ -5/h\\ -50/h\\ 0\\ 50/h\\ 5/h
\end{bmatrix}
\tag{2.2.27}
$$

şeklinde ifade edilir. Benzer metodoloji kullanılarak yapılan elemeler ile (2.2.27)

denklem sistemi

$$\begin{bmatrix} 37 & 82 & 21 & & & & & & \\ 8 & 33 & 18 & 1 & & & & & \\ 1 & 26 & 66 & 26 & 1 & & & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & & & \\ & & & & & & & & \\ & & & & & & & & \\ & & & & 1 & 26 & 66 & 26 & 1 \\ & & & & & 1 & 18 & 33 & 8 \\ & & & & & & 21 & 82 & 37 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w_{N,-1}^{(1)} \\ w_{N,0}^{(1)} \\ \vdots \\ \\ w_{N,N}^{(1)} \\ w_{N,N-1}^{(1)} \\ w_{N,N}^{(1)} \\ w_{N,N+1}^{(1)} \\ w_{N,N+2}^{(1)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ \\ 0 \\ -5/h \\ -50/h \\ 0 \\ 29/h \\ 109/2h \end{bmatrix} \qquad (2.2.28)$$

şeklinde Thomas algoritması ile çözülebilir bir denklem sistemine dönüşür.

2.2.2 İkinci Türev Ağırlık Katsayılarının Tespit Edilmesi

(1.1.1) eşitliği ile verilen temel diferensiyel quadrature yaklaşımında kuintik B-spline fonksiyonların test fonksiyonlar olarak kullanılması ile ağırlık katsayıları elde edilecektir. (1.1.1) eşitliğinde $r = 2$ olarak seçildiğinde ikinci türev ağırlık katsayılarının elde edilebilmesi için diferensiyel quadrature metodolojisi kullanılacaktır. (1.1.1) eşitliğinde $r = 2$ olarak seçildiğinde

$$\frac{d^2\varphi_m(x_i)}{dx^2} = \sum_{j=m-2}^{m+2} w_{i,j}^{(2)} \varphi_m(x_j), \quad m = -1, 0, \ldots, N+2, \ i = 1, 2, ..., N. \qquad (2.2.29)$$

elde edilir. İlk olarak, birinci düğüm noktası x_1 'deki ağırlık katsayılarının $w_{1,j}^{(2)}$, $(j = -3, -2, \ldots, N+4)$ 'nin elde edilebilmesi için sırasıyla test fonksiyonları φ_m , $m = -1, 0, \ldots, N+2$ kullanılır. $i = 1$ ve $m = -1$ için

$$\frac{d^2\varphi_{-1}(x_1)}{dx^2} = \sum_{j=-3}^{1} w_{1,j}^{(2)} \varphi_{-1}(x_j) \qquad (2.2.30)$$

eşitliği elde edilir. Tablo 2.2 'de verilen fonksiyon ve türevleri (2.2.30) eşitliğinde yerine yazılırsa

$$w_{1,-3}^{(2)} + 26w_{1,-2}^{(2)} + 66w_{1,-1}^{(2)} + 26w_{1,0}^{(2)} + w_{1,1}^{(2)} = \frac{20}{h^2} \tag{2.2.31}$$

bulunur. Ardından bir sonraki test fonksiyonu φ_0 kullanılırsa

$$\frac{d^2\varphi_0\left(x_1\right)}{dx^2} = \sum_{j=-2}^{2} w_{1,j}^{(2)} \varphi_0\left(x_j\right) \tag{2.2.32}$$

eşitliği elde edilir. (2.2.32) eşitliğinde fonksiyon ve türev değerleri yerine yazılırsa

$$w_{1,-2}^{(2)} + 26w_{1,-1}^{(2)} + 66w_{1,0}^{(2)} + 26w_{1,1}^{(2)} + w_{1,2}^{(2)} = \frac{40}{h^2} \tag{2.2.33}$$

bulunur. Benzer şekilde problem aralığını geren tüm test fonksiyonları sırasıyla kullanılır. Son iki B-spline fonksiyonunun φ_{N+1} ve φ_{N+2} kullanılması ile sırasıyla

$$\frac{d^2\varphi_{N+1}\left(x_1\right)}{dx^2} = \sum_{j=N-1}^{N+3} w_{1,j}^{(2)} \varphi_{N+1}\left(x_j\right) \tag{2.2.34}$$

eşitliği elde edilir. (2.2.34) eşitliğinde fonksiyon ve türev değerleri yerine yazılırsa

$$w_{1,N-1}^{(2)} + 26w_{1,N}^{(2)} + 66w_{1,N+1}^{(2)} + 26w_{1,N+2}^{(2)} + w_{1,N+3}^{(2)} = 0 \tag{2.2.35}$$

bulunur ve

$$\frac{d^2\varphi_{N+2}\left(x_1\right)}{dx^2} = \sum_{j=N}^{N+4} w_{1,j}^{(2)} \varphi_{N+2}\left(x_j\right) \tag{2.2.36}$$

eşitliği elde edilir. (2.2.36) eşitliğinde fonksiyon ve türev değerleri yerine yazılırsa

$$w_{1,N}^{(2)} + 26w_{1,N+1}^{(2)} + 66w_{1,N+2}^{(2)} + 26w_{1,N+3}^{(2)} + w_{1,N+4}^{(2)} = 0 \tag{2.2.37}$$

bulunur. Elde edilen eşitlikler matris formunda yazılırsa

$$\begin{bmatrix} 1 & 26 & 66 & 26 & 1 & & & & \\ & 1 & 26 & 66 & 26 & 1 & & & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & & \\ & & & & & & & & \\ & & & 1 & 26 & 66 & 26 & 1 & \\ & & & & 1 & 26 & 66 & 26 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w_{1,-3}^{(2)} \\ w_{1,-2}^{(2)} \\ w_{1,-1}^{(2)} \\ w_{1,0}^{(2)} \\ \vdots \\ \\ w_{1,N+3}^{(2)} \\ w_{1,N+4}^{(2)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 20/h^2 \\ 40/h^2 \\ -120/h^2 \\ 40/h^2 \\ 20/h^2 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \tag{2.2.38}$$

cebirsel sistemi elde edilir. (2.2.38) sisteminde $N+8$ tane bilinmeyen ve $N+4$ tane denklem mevcut olduğundan sistemin çözülebilmesi için katsayı matrisinde soldan iki sütun ve sağdan iki sütun ile bilinmeyenler vektöründen de $w_{1,-3}^{(2)}$, $w_{1,-2}^{(2)}$, $w_{1,N+3}^{(2)}$ ve $w_{1,N+4}^{(2)}$ terimlerinin elenmesi gerekmektedir. Bu eleme ile denklem sayısı bilinmeyen sayısına eşitlenerek (2.2.38) sistemi 5-bant Thomas algoritması ile çözülebilir bir denklem sistemi biçimini alır. (2.2.30) eşitliğinin türevlenmesi ve türev değerlerinin yerine yazılması ile

$$\frac{d^3\varphi_{-1}(x_1)}{dx^3} = \sum_{j=-3}^{1} w_{1,j}^{(2)} \varphi_{-1}^{'}(x_j),$$

$$\begin{aligned} -\frac{60}{h^3} &= w_{1,-3}^{(2)} \varphi_{-1}^{'}(x_{-3}) + w_{1,-2}^{(2)} \varphi_{-1}^{'}(x_{-2}) + w_{1,-1}^{(2)} \varphi_{-1}^{'}(x_{-1}) \\ &+ w_{1,0}^{(2)} \varphi_{-1}^{'}(x_0) + w_{1,1}^{(2)} \varphi_{-1}^{'}(x_1), \end{aligned}$$

$$-\frac{60}{h^3} = w_{1,-3}^{(2)} \frac{5}{h} + w_{1,-2}^{(2)} \frac{50}{h} - w_{1,0}^{(2)} \frac{50}{h} - w_{1,1}^{(2)} \frac{5}{h} \tag{2.2.39}$$

elde edilir. (2.2.39) eşitliğinin düzenlenmesi ile

$$w_{1,-3}^{(2)} = -\frac{12}{h^2} - 10w_{1,-2}^{(2)} + 10w_{1,0}^{(2)} + w_{1,1}^{(2)} \tag{2.2.40}$$

elde edilir. (2.2.32) eşitliğinin türevlenmesi ve türev değerlerinin yerine yazılması ile

$$\frac{d^3\varphi_0\left(x_1\right)}{dx^3} = \sum_{j=-2}^{2} w_{1,j}^{(2)}\varphi_0^{'}\left(x_j\right),$$

$$\frac{120}{h^3} = w_{1,-2}^{(2)}\varphi_{-1}^{'}\left(x_{-2}\right) + w_{1,-1}^{(2)}\varphi_{-1}^{'}\left(x_{-1}\right) + w_{1,0}^{(2)}\varphi_{-1}^{'}\left(x_0\right) + w_{1,1}^{(2)}\varphi_{-1}^{'}\left(x_1\right) + w_{1,2}^{(2)}\varphi_{-1}^{'}\left(x_2\right),$$

$$\frac{120}{h^3} = w_{1,-2}^{(2)}\frac{5}{h} + w_{1,-1}^{(2)}\frac{50}{h} - w_{1,1}^{(2)}\frac{50}{h} - w_{1,2}^{(2)}\frac{5}{h} \tag{2.2.41}$$

elde edilir. (2.2.41) eşitliğinin düzenlenmesi ile

$$w_{1,-2}^{(2)} = \frac{24}{h^2} - 10w_{1,-1}^{(2)} + 10w_{1,1}^{(2)} + w_{1,2}^{(2)} \tag{2.2.42}$$

elde edilir. (2.2.40) ve (2.2.42) eşitlikleri (2.2.31) 'de yerine yazılırsa

$$-\frac{176}{h^2} = -47w_{1,-1}^{(2)} + 18w_{1,0}^{(2)} + 81w_{1,1}^{(2)} + 8w_{1,2}^{(2)} \tag{2.2.43}$$

bulunur. (2.2.42) eşitliği (2.2.33) 'de yerine yazılırsa

$$\frac{8}{h^2} = 8w_{1,-1}^{(2)} + 33w_{1,0}^{(2)} + 18w_{1,1}^{(2)} + w_{1,2}^{(2)} \tag{2.2.44}$$

bulunur.(2.2.34) eşitliğinin türevlenmesi ve türev değerlerinin yerine yazılması ile

$$\frac{d^3\varphi_{N+1}\left(x_1\right)}{dx^3} = \sum_{j=N-1}^{N+3} w_{1,j}^{(2)}\varphi_{N+1}^{'}\left(x_j\right),$$

$$0 = w^{(2)}_{1,N-1}\varphi^{'}_{N+1}(x_{N-1}) + w^{(2)}_{1,N}\varphi^{'}_{N+1}(x_N) + w^{(2)}_{1,N+1}\varphi^{'}_{N+1}(x_{N+1})$$
$$+ w^{(2)}_{1,N+2}\varphi^{'}_{N+1}(x_{N+2}) + w^{(2)}_{1,N+3}\varphi^{'}_{N+1}(x_{N+3}),$$

$$0 = w^{(2)}_{1,N-1}\frac{5}{h} + w^{(2)}_{1,N}\frac{50}{h} - w^{(2)}_{1,N+2}\frac{50}{h} - w^{(2)}_{1,N+3}\frac{5}{h} \tag{2.2.45}$$

elde edilir. (2.2.45) eşitliğinin düzenlenmesi ile

$$w^{(2)}_{1,N+3} = w^{(2)}_{1,N-1} + 10w^{(2)}_{1,N} - 10w^{(2)}_{1,N+2} \tag{2.2.46}$$

elde edilir. (2.2.36) eşitliğinin türevlenmesi ve türev değerlerinin yerine yazılması ile

$$\frac{d^3\varphi_{N+2}(x_1)}{dx^3} = \sum_{j=N}^{N+4} w^{(2)}_{1,j}\varphi^{'}_{N+2}(x_j),$$

$$0 = w^{(2)}_{1,N}\varphi^{'}_{N+2}(x_N) + w^{(2)}_{1,N+1}\varphi^{'}_{N+2}(x_{N+1}) + w^{(2)}_{1,N+2}\varphi^{'}_{N+2}(x_{N+2})$$
$$+ w^{(2)}_{1,N+3}\varphi^{'}_{N+2}(x_{N+3}) + w^{(2)}_{1,N+4}\varphi^{'}_{N+2}(x_{N+4}),$$

$$0 = w^{(2)}_{1,N}\frac{5}{h} + w^{(2)}_{1,N+1}\frac{50}{h} - w^{(2)}_{1,N+3}\frac{50}{h} - w^{(2)}_{1,N+4}\frac{5}{h} \tag{2.2.47}$$

elde edilir. (2.2.47) eşitliğinin düzenlenmesi ile

$$w^{(2)}_{1,N+4} = w^{(2)}_{1,N} + 10w^{(2)}_{1,N+1} - 10w^{(2)}_{1,N+3} \tag{2.2.48}$$

elde edilir. (2.2.46) ve (2.2.48) eşitlikleri (2.2.37) 'de yerine yazılırsa

$$0 = 8w^{(2)}_{1,N-1} + 81w^{(2)}_{1,N} + 18w^{(2)}_{1,N+1} - 47w^{(2)}_{1,N+2} \tag{2.2.49}$$

bulunur. (2.2.46) eşitliği (2.2.35) 'de yerine yazılırsa

$$0 = w_{1,N-1}^{(2)} + 18w_{1,N}^{(2)} + 33w_{1,N+1}^{(2)} + 8w_{1,N+2}^{(2)} \tag{2.2.50}$$

bulunur. Elde edilen (2.2.43), (2.2.44), (2.2.49) ve (2.2.50) eşitliklerinin kullanılması ve sistemin düzenlenmesiyle

$$\begin{bmatrix} 37 & 82 & 21 & & & & & & \\ 8 & 33 & 18 & 1 & & & & & \\ 1 & 26 & 66 & 26 & 1 & & & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & & & \\ & & & & & & & & \\ & & & & 1 & 26 & 66 & 26 & 1 \\ & & & & & 1 & 18 & 33 & 8 \\ & & & & & & 21 & 82 & 37 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w_{1,-1}^{(2)} \\ w_{1,0}^{(2)} \\ w_{1,1}^{(2)} \\ w_{1,2}^{(2)} \\ \vdots \\ \\ w_{1,N+1}^{(2)} \\ w_{1,N+2}^{(2)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 80/h^2 \\ 8/h^2 \\ -120/h^2 \\ 40/h^2 \\ 20/h^2 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \tag{2.2.51}$$

cebirsel sistemi elde edilir. (2.2.51) sisteminin 5-bant Thomas algoritması ile çözülmesiyle x_1 noktasına ait ikinci türev ağırlık katsayıları elde edilir.

$2 \leq k \leq N-1$ olmak üzere k. düğüm noktası ile ilgili ikinci türev ağırlık katsayıları olan $w_{k,j}^{(2)}$ 'lerin elde edilmesi için de aynı metodoloji kullanılır. $\{\varphi_{-1}(x),\ \varphi_0(x),\ \ldots,\ \varphi_{N+1}(x),\ \varphi_{N+2}(x)\}$ baz fonksiyonlarının her birinin test fonksiyonu olarak kullanılması ve elde edilen denklemlerin düzenlenmesi ile

$$\begin{bmatrix} 37 & 82 & 21 & & & & & & \\ 8 & 33 & 18 & 1 & & & & & \\ 1 & 26 & 66 & 26 & 1 & & & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & & & \\ & & & & 1 & 26 & 66 & 26 & 1 \\ & & & & & 1 & 18 & 33 & 8 \\ & & & & & & 21 & 82 & 37 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w_{k,-1}^{(2)} \\ \vdots \\ w_{k,k-2}^{(2)} \\ w_{k,k-1}^{(2)} \\ w_{k,k}^{(2)} \\ w_{k,k+1}^{(2)} \\ w_{k,k+2}^{(2)} \\ \vdots \\ w_{k,N+1}^{(2)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 20/h^2 \\ 40/h^2 \\ -120/h^2 \\ 40/h^2 \\ 20/h^2 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \quad (2.2.52)$$

$N-2$ tane denklem sistemi elde edilir. Bu sistemlerin Thomas algoritması ile çözümünden $N-2$ tane düğüm noktasına ait ikinci türev ağırlık katsayıları elde edilir.

Son düğüm noktası olan x_N noktasına ait ikinci türev ağırlık katsayıları olan $w_{N,j}^{(2)}$ 'lerin bulunması için de

$$\frac{d^2\varphi_m(x_N)}{dx^2} = \sum_{j=m-2}^{m+2} w_{N,j}^{(2)} \varphi_m(x_j), \quad m = -1, 0, \ldots, N+2 \quad (2.2.53)$$

kullanılır. (2.2.53) eşitliğinde $\{\varphi_{-1}(x), \varphi_0(x), \ldots, \varphi_{N+1}(x), \varphi_{N+2}(x)\}$ baz fonksiyonlarının her biri sırasıyla test fonksiyonu olarak kullanılırsa

$$
\begin{aligned}
w^{(2)}_{N,-3} + 26w^{(2)}_{N,-2} + 66w^{(2)}_{N,-1} + 26w^{(2)}_{N,0} + w^{(2)}_{N,1} &= 0,\\
w^{(2)}_{N,-2} + 26w^{(2)}_{N,-1} + 66w^{(2)}_{N,0} + 26w^{(2)}_{N,1} + w^{(2)}_{N,2} &= 0,\\
&\vdots\\
w^{(2)}_{N,N-5} + 26w^{(2)}_{N,N-4} + 66w^{(2)}_{N,N-3} + 26w^{(2)}_{N,N-2} + w^{(2)}_{N,N-1} &= 0,\\
w^{(2)}_{N,N-4} + 26w^{(2)}_{N,N-3} + 66w^{(2)}_{N,N-2} + 26w^{(2)}_{N,N-1} + w^{(2)}_{N,N} &= 20/h^2,\\
w^{(2)}_{N,N-3} + 26w^{(2)}_{N,N-2} + 66w^{(2)}_{N,N-1} + 26w^{(2)}_{N,N} + w^{(2)}_{N,N+1} &= 40/h^2,\\
w^{(2)}_{N,N-2} + 26w^{(2)}_{N,N-1} + 66w^{(2)}_{N,N} + 26w^{(2)}_{N,N+1} + w^{(2)}_{N,N+2} &= -120/h^2,\\
w^{(2)}_{N,N-1} + 26w^{(2)}_{N,N} + 66w^{(2)}_{N,N+1} + 26w^{(2)}_{N,N+2} + w^{(2)}_{N,N+3} &= 40/h^2,\\
w^{(2)}_{N,N} + 26w^{(2)}_{N,N+1} + 66w^{(2)}_{N,N+2} + 26w^{(2)}_{N,N+3} + w^{(2)}_{N,N+4} &= 20/h^2
\end{aligned}
\tag{2.2.54}
$$

denklem sistemi elde edilir. Bu denklem sistemi matris formunda

$$
\begin{bmatrix}
1 & 26 & 66 & 26 & 1 & & & & \\
 & 1 & 26 & 66 & 26 & 1 & & & \\
 & & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & & \\
 & & & & & & & & \\
 & & & & & & & & \\
 & & & & & & & & \\
 & & & & & & & & \\
 & & & & & & & & \\
 & & & 1 & 26 & 66 & 26 & 1 & \\
 & & & & 1 & 26 & 66 & 26 & 1
\end{bmatrix}
\begin{bmatrix}
w^{(2)}_{N,-3}\\
w^{(1)}_{N,-2}\\
\vdots\\
\\
\\
w^{(2)}_{N,N+1}\\
w^{(2)}_{N,N+2}\\
w^{(2)}_{N,N+3}\\
w^{(2)}_{N,N+4}
\end{bmatrix}
=
\begin{bmatrix}
0\\
0\\
\vdots\\
\\
0\\
20/h^2\\
40/h^2\\
-120/h^2\\
40/h^2\\
20/h^2
\end{bmatrix}
\tag{2.2.55}
$$

şeklinde ifade edilir. Benzer metodoloji kullanılarak yapılan elemeler ile (2.2.55)

denklem sistemi

$$\begin{bmatrix} 37 & 82 & 21 & & & & & & \\ 8 & 33 & 18 & 1 & & & & & \\ 1 & 26 & 66 & 26 & 1 & & & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & & & \\ & & & & & & & & \\ & & & & 1 & 26 & 66 & 26 & 1 \\ & & & & & 1 & 18 & 33 & 8 \\ & & & & & & 21 & 82 & 37 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w_{N,-1}^{(2)} \\ w_{N,0}^{(2)} \\ \vdots \\ w_{N,N}^{(2)} \\ w_{N,N-1}^{(2)} \\ w_{N,N}^{(2)} \\ w_{N,N+1}^{(2)} \\ w_{N,N+2}^{(2)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 20/h^2 \\ 40/h^2 \\ -120/h^2 \\ 8/h^2 \\ 80/h^2 \end{bmatrix} \quad (2.2.56)$$

şeklinde Thomas algoritması ile çözülebilir bir denklem sistemine dönüşür.

2.2.3 Üçüncü Türev Ağırlık Katsayılarının Tespit Edilmesi

(1.1.1) eşitliği ile verilen temel diferensiyel quadrature yaklaşımında kuintik B-spline fonksiyonların test fonksiyonlar olarak kullanılması ile ağırlık katsayıları elde edilecektir. (1.1.1) eşitliğinde $r = 3$ olarak seçildiğinde üçüncü türev ağırlık katsayılarının elde edilebilmesi için diferensiyel quadrature metodolojisi kullanılacaktır. (1.1.1) eşitliğinde $r = 3$ olarak seçildiğinde

$$\frac{d^3\varphi_m(x_i)}{dx^3} = \sum_{j=m-2}^{m+2} w_{i,j}^{(3)}\varphi_m(x_j), \quad m = -1, 0, \ldots, N+2,\ i = 1, 2, ..., N. \quad (2.2.57)$$

elde edilir. İlk olarak, birinci düğüm noktası x_1 'deki ağırlık katsayılarının $w_{1,j}^{(3)}$, $(j = -3, -2, \ldots, N+4)$ 'nin elde edilebilmesi için sırasıyla test fonksiyonları φ_m , $m = -1, 0, \ldots, N+2$ kullanılır. $i = 1$ ve $m = -1$ için

$$\frac{d^3\varphi_{-1}(x_1)}{dx^3} = \sum_{j=-3}^{1} w_{1,j}^{(3)}\varphi_{-1}(x_j) \quad (2.2.58)$$

eşitliği elde edilir. Tablo 2.2 'de verilen fonksiyon ve türevleri (2.2.58) eşitliğinde yerine yazılırsa

$$w_{1,-3}^{(3)} + 26w_{1,-2}^{(3)} + 66w_{1,-1}^{(3)} + 26w_{1,0}^{(3)} + w_{1,1}^{(3)} = -\frac{60}{h^3} \tag{2.2.59}$$

bulunur. Ardından bir sonraki test fonksiyonu φ_0 kullanılırsa

$$\frac{d^3\varphi_0(x_1)}{dx^3} = \sum_{j=-2}^{2} w_{1,j}^{(3)}\varphi_0(x_j) \tag{2.2.60}$$

eşitliği elde edilir. (2.2.60) eşitliğinde fonksiyon ve türev değerleri yerine yazılırsa

$$w_{1,-2}^{(3)} + 26w_{1,-1}^{(3)} + 66w_{1,0}^{(3)} + 26w_{1,1}^{(3)} + w_{1,2}^{(3)} = \frac{120}{h^3} \tag{2.2.61}$$

bulunur. Aynı şekilde problem aralığını geren tüm test fonksiyonları sırasıyla kullanılır. Son iki B-spline fonksiyonunun φ_{N+1} ve φ_{N+2} kullanılması ile sırasıyla

$$\frac{d^3\varphi_{N+1}(x_1)}{dx^3} = \sum_{j=N-1}^{N+3} w_{1,j}^{(3)}\varphi_{N+1}(x_j) \tag{2.2.62}$$

eşitliği elde edilir. (2.2.62) eşitliğinde fonksiyon ve türev değerleri yerine yazılırsa

$$w_{1,N-1}^{(3)} + 26w_{1,N}^{(3)} + 66w_{1,N+1}^{(3)} + 26w_{1,N+2}^{(3)} + w_{1,N+3}^{(3)} = 0 \tag{2.2.63}$$

bulunur ve

$$\frac{d^3\varphi_{N+2}(x_1)}{dx^3} = \sum_{j=N}^{N+4} w_{1,j}^{(3)}\varphi_{N+2}(x_j) \tag{2.2.64}$$

eşitliği elde edilir. (2.2.64) eşitliğinde fonksiyon ve türev değerleri yerine yazılırsa

$$w_{1,N}^{(3)} + 26w_{1,N+1}^{(3)} + 66w_{1,N+2}^{(3)} + 26w_{1,N+3}^{(3)} + w_{1,N+4}^{(3)} = 0 \tag{2.2.65}$$

bulunur. Elde edilen eşitlikler matris formunda yazılırsa

$$
\begin{bmatrix}
1 & 26 & 66 & 26 & 1 & & & & \\
 & 1 & 26 & 66 & 26 & 1 & & & \\
 & & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & & \\
 & & & & & & & & \\
 & & & 1 & 26 & 66 & 26 & 1 & \\
 & & & & 1 & 26 & 66 & 26 & 1
\end{bmatrix}
\begin{bmatrix}
w_{1,-3}^{(3)} \\ w_{1,-2}^{(3)} \\ w_{1,-1}^{(3)} \\ w_{1,0}^{(3)} \\ \vdots \\ \\ w_{1,N+3}^{(3)} \\ w_{1,N+4}^{(3)}
\end{bmatrix}
=
\begin{bmatrix}
-60/h^3 \\ 120/h^3 \\ 0 \\ -120/h^3 \\ 60/h^3 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 0
\end{bmatrix}
\tag{2.2.66}
$$

cebirsel sistemi elde edilir. (2.2.66) sisteminde $N+8$ tane bilinmeyen ve $N+4$ tane denklem mevcut olduğundan sistemin çözülebilmesi için katsayı matrisinde soldan iki sütun ve sağdan iki sütun ile bilinmeyenler vektöründen de $w_{1,-3}^{(3)}$, $w_{1,-2}^{(3)}$, $w_{1,N+3}^{(3)}$ ve $w_{1,N+4}^{(3)}$ terimlerinin elenmesi gerekmektedir. Bu eleme ile denklem sayısı bilinmeyen sayısına eşitlenerek (2.2.66) sistemi 5-bant Thomas algoritması ile çözülebilir bir denklem sistemi biçimini alır. (2.2.58) eşitliğinin türevlenmesi ve türev değerlerinin yerine yazılması ile

$$
\frac{d^4\varphi_{-1}(x_1)}{dx^4} = \sum_{j=-3}^{1} w_{1,j}^{(3)}\varphi_{-1}^{'}(x_j),
$$

$$
\begin{aligned}
\frac{120}{h^4} &= w_{1,-3}^{(3)}\varphi_{-1}^{'}(x_{-3}) + w_{1,-2}^{(3)}\varphi_{-1}^{'}(x_{-2}) + w_{1,-1}^{(3)}\varphi_{-1}^{'}(x_{-1}) \\
&\quad + w_{1,0}^{(3)}\varphi_{-1}^{'}(x_0) + w_{1,1}^{(3)}\varphi_{-1}^{'}(x_1),
\end{aligned}
$$

$$
\frac{120}{h^4} = w_{1,-3}^{(3)}\frac{5}{h} + w_{1,-2}^{(3)}\frac{50}{h} - w_{1,0}^{(3)}\frac{50}{h} - w_{1,1}^{(3)}\frac{5}{h} \tag{2.2.67}
$$

elde edilir. (2.2.67) eşitliğinin düzenlenmesi ile

$$w^{(3)}_{1,-3} = \frac{24}{h^3} - 10w^{(3)}_{1,-2} + 10w^{(3)}_{1,0} + w^{(3)}_{1,1} \qquad (2.2.68)$$

elde edilir. (2.2.60) eşitliğinin türevlenmesi ve türev değerlerinin yerine yazılması ile

$$\frac{d^4\varphi_0\left(x_1\right)}{dx^4} = \sum_{j=-2}^{2} w^{(3)}_{1,j}\varphi'_0\left(x_j\right),$$

$$\begin{aligned} -\frac{480}{h^4} &= w^{(3)}_{1,-2}\varphi'_{-1}\left(x_{-2}\right) + w^{(3)}_{1,-1}\varphi'_{-1}\left(x_{-1}\right) + w^{(3)}_{1,0}\varphi'_{-1}\left(x_0\right) \\ &\quad + w^{(3)}_{1,1}\varphi'_{-1}\left(x_1\right) + w^{(3)}_{1,2}\varphi'_{-1}\left(x_2\right), \end{aligned}$$

$$-\frac{480}{h^4} = w^{(3)}_{1,-2}\frac{5}{h} + w^{(3)}_{1,-1}\frac{50}{h} - w^{(3)}_{1,1}\frac{50}{h} - w^{(3)}_{1,2}\frac{5}{h} \qquad (2.2.69)$$

elde edilir. (2.2.69) eşitliğinin düzenlenmesi ile

$$w^{(3)}_{1,-2} = -\frac{96}{h^3} - 10w^{(3)}_{1,-1} + 10w^{(3)}_{1,1} + w^{(3)}_{1,2} \qquad (2.2.70)$$

elde edilir. (2.2.68) ve (2.2.70) eşitlikleri (2.2.59) 'da yerine yazılırsa

$$\frac{726}{h^3} = -47w^{(3)}_{1,-1} + 18w^{(3)}_{1,0} + 81w^{(3)}_{1,1} + 8w^{(3)}_{1,2} \qquad (2.2.71)$$

bulunur. (2.2.70) eşitliği (2.2.61) 'de yerine yazılırsa

$$\frac{108}{h^3} = 8w^{(3)}_{1,-1} + 33w^{(3)}_{1,0} + 18w^{(3)}_{1,1} + w^{(3)}_{1,2} \qquad (2.2.72)$$

bulunur.(2.2.62) eşitliğinin türevlenmesi ve türev değerlerinin yerine yazılması ile

$$\frac{d^4\varphi_{N+1}\left(x_1\right)}{dx^4} = \sum_{j=N-1}^{N+3} w^{(3)}_{1,j}\varphi'_{N+1}\left(x_j\right),$$

$$0 = w^{(3)}_{1,N-1}\varphi^{'}_{N+1}\left(x_{N-1}\right) + w^{(3)}_{1,N}\varphi^{'}_{N+1}\left(x_{N}\right) + w^{(3)}_{1,N+1}\varphi^{'}_{N+1}\left(x_{N+1}\right)$$
$$+ w^{(3)}_{1,N+2}\varphi^{'}_{N+1}\left(x_{N+2}\right) + w^{(3)}_{1,N+3}\varphi^{'}_{N+1}\left(x_{N+3}\right),$$

$$0 = w^{(3)}_{1,N-1}\frac{5}{h} + w^{(3)}_{1,N}\frac{50}{h} - w^{(3)}_{1,N+2}\frac{50}{h} - w^{(3)}_{1,N+3}\frac{5}{h} \tag{2.2.73}$$

elde edilir. (2.2.73) eşitliğinin düzenlenmesi ile

$$w^{(3)}_{1,N+3} = w^{(3)}_{1,N-1} + 10w^{(3)}_{1,N} - 10w^{(3)}_{1,N+2} \tag{2.2.74}$$

elde edilir. (2.2.64) eşitliğinin türevlenmesi ve türev değerlerinin yerine yazılması ile

$$\frac{d^4\varphi_{N+2}\left(x_1\right)}{dx^4} = \sum_{j=N}^{N+4} w^{(3)}_{1,j}\varphi^{'}_{N+2}\left(x_j\right),$$

$$0 = w^{(3)}_{1,N}\varphi^{'}_{N+2}\left(x_{N}\right) + w^{(3)}_{1,N+1}\varphi^{'}_{N+2}\left(x_{N+1}\right) + w^{(3)}_{1,N+2}\varphi^{'}_{N+2}\left(x_{N+2}\right)$$
$$+ w^{(3)}_{1,N+3}\varphi^{'}_{N+2}\left(x_{N+3}\right) + w^{(3)}_{1,N+4}\varphi^{'}_{N+2}\left(x_{N+4}\right),$$

$$0 = w^{(3)}_{1,N}\frac{5}{h} + w^{(3)}_{1,N+1}\frac{50}{h} - w^{(3)}_{1,N+3}\frac{50}{h} - w^{(3)}_{1,N+4}\frac{5}{h} \tag{2.2.75}$$

elde edilir. (2.2.75) eşitliğinin düzenlenmesi ile

$$w^{(3)}_{1,N+4} = w^{(3)}_{1,N} + 10w^{(3)}_{1,N+1} - 10w^{(3)}_{1,N+3} \tag{2.2.76}$$

elde edilir. (2.2.74) ve (2.2.76) eşitlikleri (2.2.65) 'de yerine yazılırsa

$$0 = 8w^{(3)}_{1,N-1} + 81w^{(3)}_{1,N} + 18w^{(3)}_{1,N+1} - 47w^{(3)}_{1,N+2} \tag{2.2.77}$$

bulunur. (2.2.74) eşitliği (2.2.63) 'de yerine yazılırsa

$$0 = w^{(3)}_{1,N-1} + 18w^{(3)}_{1,N} + 33w^{(3)}_{1,N+1} + 8w^{(3)}_{1,N+2} \tag{2.2.78}$$

bulunur. Elde edilen (2.2.71), (2.2.72), (2.2.77) ve (2.2.78) eşitliklerinin kullanılması ve sistemin düzenlenmesiyle

$$\begin{bmatrix} 37 & 82 & 21 & & & & & & \\ 8 & 33 & 18 & 1 & & & & & \\ 1 & 26 & 66 & 26 & 1 & & & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & & & \\ & & & & & & & & \\ & & & & 1 & 26 & 66 & 26 & 1 \\ & & & & & 1 & 18 & 33 & 8 \\ & & & & & & 21 & 82 & 37 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w^{(3)}_{1,-1} \\ w^{(3)}_{1,0} \\ w^{(3)}_{1,1} \\ w^{(3)}_{1,2} \\ \vdots \\ \\ w^{(3)}_{1,N+1} \\ w^{(3)}_{1,N+2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 46/h^3 \\ 108/h^3 \\ 0 \\ -120/h^3 \\ 60/h^3 \\ 0 \\ \vdots \\ \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \tag{2.2.79}$$

cebirsel sistemi elde edilir. (2.2.79) sisteminin 5-bant Thomas algoritması ile çözülmesiyle x_1 noktasına ait üçüncü türev ağırlık katsayıları elde edilir.

$2 \leq k \leq N-1$ olmak üzere k. düğüm noktası ile ilgili üçüncü türev ağırlık katsayıları olan $w^{(3)}_{k,j}$ 'lerin elde edilmesi için de aynı metodoloji kullanılır. $\{\varphi_{-1}(x), \varphi_0(x), \ldots, \varphi_{N+1}(x), \varphi_{N+2}(x)\}$ baz fonksiyonlarının her birinin test fonksiyonu olarak kullanılması ve elde edilen denklemlerin düzenlenmesi ile

$$\begin{bmatrix} 37 & 82 & 21 & & & & & & \\ 8 & 33 & 18 & 1 & & & & & \\ 1 & 26 & 66 & 26 & 1 & & & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & & & \\ & & & & 1 & 26 & 66 & 26 & 1 \\ & & & & & 1 & 18 & 33 & 8 \\ & & & & & & 21 & 82 & 37 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w_{k,-1}^{(3)} \\ \vdots \\ w_{k,k-2}^{(3)} \\ w_{k,k-1}^{(3)} \\ w_{k,k}^{(3)} \\ w_{k,k+1}^{(3)} \\ w_{k,k+2}^{(3)} \\ \vdots \\ w_{k,N+1}^{(3)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ -60/h^3 \\ 120/h^3 \\ 0 \\ -120/h^3 \\ 60/h^3 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \qquad (2.2.80)$$

$N-2$ tane denklem sistemi elde edilir. Bu sistemlerin Thomas algoritması ile çözümünden $N-2$ tane düğüm noktasına ait üçüncü türev ağırlık katsayıları elde edilir.

Son düğüm noktası olan x_N noktasına ait ikinci türev ağırlık katsayıları olan $w_{N,j}^{(3)}$ 'lerin bulunması için de

$$\frac{d^3\varphi_m(x_N)}{dx^3} = \sum_{j=m-2}^{m+2} w_{N,j}^{(3)}\varphi_m(x_j), \quad m = -1, 0, \ldots, N+2 \qquad (2.2.81)$$

kullanılır. (2.2.81) eşitliğinde $\{\varphi_{-1}(x), \varphi_0(x), \ldots, \varphi_{N+1}(x), \varphi_{N+2}(x)\}$ baz fonksiyonlarının her biri sırasıyla test fonksiyonu olarak kullanılırsa

$$
\begin{aligned}
w^{(3)}_{N,-3} + 26w^{(3)}_{N,-2} + 66w^{(3)}_{N,-1} + 26w^{(3)}_{N,0} + w^{(3)}_{N,1} &= 0,\\
w^{(3)}_{N,-2} + 26w^{(3)}_{N,-1} + 66w^{(3)}_{N,0} + 26w^{(3)}_{N,1} + w^{(3)}_{N,2} &= 0,\\
&\vdots\\
w^{(3)}_{N,N-5} + 26w^{(3)}_{N,N-4} + 66w^{(3)}_{N,N-3} + 26w^{(3)}_{N,N-2} + w^{(3)}_{N,N-1} &= 0,\\
w^{(3)}_{N,N-4} + 26w^{(3)}_{N,N-3} + 66w^{(3)}_{N,N-2} + 26w^{(3)}_{N,N-1} + w^{(3)}_{N,N} &= -60/h^3,\\
w^{(3)}_{N,N-3} + 26w^{(3)}_{N,N-2} + 66w^{(3)}_{N,N-1} + 26w^{(3)}_{N,N} + w^{(3)}_{N,N+1} &= 120/h^3,\\
w^{(3)}_{N,N-2} + 26w^{(3)}_{N,N-1} + 66w^{(3)}_{N,N} + 26w^{(3)}_{N,N+1} + w^{(3)}_{N,N+2} &= 0,\\
w^{(3)}_{N,N-1} + 26w^{(3)}_{N,N} + 66w^{(3)}_{N,N+1} + 26w^{(3)}_{N,N+2} + w^{(3)}_{N,N+3} &= -120/h^3,\\
w^{(3)}_{N,N} + 26w^{(3)}_{N,N+1} + 66w^{(3)}_{N,N+2} + 26w^{(3)}_{N,N+3} + w^{(3)}_{N,N+4} &= 60/h^3 \qquad (2.2.82)
\end{aligned}
$$

denklem sistemi elde edilir. Bu denklem sistemi matris formunda

$$
\begin{bmatrix}
1 & 26 & 66 & 26 & 1 & & & & \\
 & 1 & 26 & 66 & 26 & 1 & & & \\
 & & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & & \\
 & & & & & & & & \\
 & & & 1 & 26 & 66 & 26 & 1 & \\
 & & & & 1 & 26 & 66 & 26 & 1
\end{bmatrix}
\begin{bmatrix}
w^{(2)}_{N,-3} \\ w^{(1)}_{N,-2} \\ \vdots \\ \\ w^{(2)}_{N,N+1} \\ w^{(2)}_{N,N+2} \\ w^{(2)}_{N,N+3} \\ w^{(2)}_{N,N+4}
\end{bmatrix}
=
\begin{bmatrix}
0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ -60/h^3 \\ 120/h^3 \\ 0 \\ -120/h^3 \\ 60/h^3
\end{bmatrix}
\qquad (2.2.83)
$$

şeklinde ifade edilir. Benzer metodoloji kullanılarak yapılan elemeler ile (2.2.83)

denklem sistemi

$$
\begin{bmatrix}
37 & 82 & 21 & & & & & & \\
8 & 33 & 18 & 1 & & & & & \\
1 & 26 & 66 & 26 & 1 & & & & \\
 & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & & & \\
 & & & & & & & & \\
 & & & & & & & & \\
 & & & & 1 & 26 & 66 & 26 & 1 \\
 & & & & & 1 & 18 & 33 & 8 \\
 & & & & & & 21 & 82 & 37
\end{bmatrix}
\begin{bmatrix}
w^{(3)}_{N,-1} \\
w^{(3)}_{N,0} \\
\vdots \\
 \\
w^{(3)}_{N,N} \\
w^{(3)}_{N,N-1} \\
w^{(3)}_{N,N} \\
w^{(3)}_{N,N+1} \\
w^{(3)}_{N,N+2}
\end{bmatrix}
=
\begin{bmatrix}
0 \\
0 \\
\vdots \\
 \\
0 \\
-60/h^3 \\
120/h^3 \\
0 \\
-108/h^3 \\
-46/h^3
\end{bmatrix}
\qquad (2.2.84)
$$

şeklinde Thomas algoritması ile çözülebilir bir denklem sistemine dönüşür.

3. mKdV DENKLEMİNİN NÜMERİK ÇÖZÜMLERİ

Bu bölümde mKdV denkleminin kuintik B-spline DQM ile nümerik çözümleri incelenecektir.

3.1 mKdV Denkleminin Ayrıştırılması

$[a, b]$ çözüm aralığının düzgün bir parçalanışı $a = x_1 < x_2 < ... < x_N = b$ ve $x_{i+1} = x_i + h$, $i = 1, ..., N-1$ olsun. mKdV denkleminin sınır şartları

$$U(a,t) = g_1(t), \qquad U(b,t) = g_2(t), \quad t \in (0, T], \tag{3.1.1}$$

ve başlangıç şartı

$$U(x,0) = f(x), \qquad a \leq x \leq b, \tag{3.1.2}$$

olmak üzere

$$U_t + \varepsilon U^2 U_x + \mu U_{xxx} = 0, \tag{3.1.3}$$

şeklindedir. Burada $U = U(x,t)$ konum değişkeni x ve zaman değişkeni t'nin bir fonksiyonudur. ε ve μ ise pozitif parametrelerdir. (3.1.3) denkleminde U_t yalnız bırakılırsa

$$U_t = -\varepsilon U^2 U_x - \mu U_{xxx} \tag{3.1.4}$$

elde edilir. (3.1.4) denkleminde konum ayrıştırmaları için temel diferensiyel quadrature yaklaşımı kullanıldığında

$$S_1(U) = -\varepsilon U^2(x_i,t)\left[w_{i,1}^{(1)} g_1(t) + w_{i,N}^{(1)} g_2(t)\right] - \mu\left[w_{i,1}^{(3)} g_1(t) + w_{i,N}^{(3)} g_2(t)\right]$$

olmak üzere

$$\frac{dU(x_i,t)}{dt} = -\varepsilon U^2(x_i,t)\sum_{j=2}^{N-1} w_{i,j}^{(1)} U(x_j,t) - \mu\sum_{j=2}^{N-1} w_{i,j}^{(3)} U(x_j,t) + S_1(U),$$
$$i = 2,3,...,N-1 \tag{3.1.5}$$

şeklinde adi diferensiyel denklem sistemi elde edilir. (3.1.5) denklem sisteminin zaman integrasyonu dördüncü mertebe Runge-Kutta metodu ile yapılarak nümerik çözüm elde edilir. mKdV denklemine ait test problemlerde I_1, I_2 ve I_3 ile ifade edilen sırasıyla kütle, momentum ve enerjinin korunum sabitleri U_j^n, j. düğüm noktasındaki nümerik çözüm olmak üzere

$$\begin{aligned} I_1 &= \int_a^b U dx \cong h\sum_{j=1}^N U_j^n, \\ I_2 &= \int_a^b U^2 dx \cong h\sum_{j=1}^N \left(U_j^n\right)^2, \\ I_3 &= \int_a^b \left[U^4 - \tfrac{6\mu}{\varepsilon}\left(U'\right)^2\right] dx \cong h\sum_{j=1}^N \left[\left(U_j^n\right)^4 - \tfrac{6\mu}{\varepsilon}\left(\left(U'\right)_j^n\right)^2\right] \end{aligned} \tag{3.1.6}$$

şeklinde hesaplanır. İntegrallerin değeri, dikdörtgenler yönteminin uygulanmasına karşılık gelen (3.1.6) 'daki yaklaşık toplamdır.

3.2 Kararlılık Analizi

B-spline diferensiyel quadrature metodunun mKdV denklemi için nümerik çözüm algoritmasının kararlılık analizi, diferensiyel quadrature ile konum ayrıştırması yapılmış adi diferensiyel denklemin katsayı matrisinde lineer olmayan terimin lineerleştirilmesinin ardından özdeğerlerinin tespit edilmesi esasına dayanmaktadır. (3.1.5) eşitliğinde yer alan $U(x_i) = \alpha_i$ (α_i sabit) olarak alındığında A_1 katsayı matrisi

$$A_1 = \begin{bmatrix} -\varepsilon\alpha_2^2 w_{2,2}^{(1)} - \mu w_{2,2}^{(3)} & \cdots & -\varepsilon\alpha_2^2 w_{2,N-1}^{(1)} - \mu w_{2,N-1}^{(3)} \\ -\varepsilon\alpha_3^2 w_{3,2}^{(1)} - \mu w_{3,2}^{(3)} & \cdots & -\varepsilon\alpha_3^2 w_{3,N-1}^{(1)} - \mu w_{3,N-1}^{(3)} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ -\varepsilon\alpha_{N-1}^2 w_{N-1,2}^{(1)} - \mu w_{N-1,2}^{(3)} & \cdots & -\varepsilon\alpha_{N-1}^2 w_{N-1,N-1}^{(1)} - \mu w_{N-1,N-1}^{(3)} \end{bmatrix} \tag{3.2.1}$$

olmak üzere

$$\begin{bmatrix} \frac{dU(x_2,t)}{dt} \\ \frac{dU(x_3,t)}{dt} \\ \vdots \\ \frac{dU(x_{N-1},t)}{dt} \end{bmatrix} = A_1 \begin{bmatrix} U(x_j,t) \\ U(x_j,t) \\ \vdots \\ U(x_j,t) \end{bmatrix} + S_1(U) \tag{3.2.2}$$

şeklinde bir matris formuna sahiptir. Sınır şartları ve denklemin homojen olmayan bölümünden gelen $S_1(U)$ vektörünün kararlılığa herhangi bir etkisi bulunmamaktadır. A_1 matrisinin özdeğerlerinin durumuna göre metodun kararlılığı değerlendirilir.

3.3 Test Problemler

Bu bölümde, mKdV denkleminin dört farklı test probleminin nümerik çözümü yapılacaktır. İleri sürülen metodun doğruluğunu test etmek için kararlılık analizi, yakınsama oran analizi ve daha önce yapılan çalışmalar ile karşılaştırmalar yapılacaktır.

3.3.1 Soliton Dalga Çözümü

Soliton dalgaya ait mKdV denkleminin analitik çözümü

$$p = \left[\frac{6\mu}{\varepsilon}\right]^{1/2}, \tag{3.3.1}$$

olmak üzere

$$U(x,t) = kp\sec h\left(kx - kx_0 - k^3\mu t\right) \tag{3.3.2}$$

şeklindedir. (3.3.2) denklemi x_0 başlangıç konumundaki sağa doğru $k^2\mu$ hızıyla hareket eden soliton dalgayı ifade eder. Soliton dalgalar k 'nın işaretine bağlı olarak pozitif veya negatif genliğe sahip olabilir ancak hepsi pozitif hıza sahiptirler. Başlangıç şartı olarak (3.3.2) denkleminde $t = 0$ alınmasıyla

$$U(x,0) = kp \sec h\,(kx - kx_0) \tag{3.3.3}$$

elde edilen (3.3.3) denklemi kullanıldı. Ayrıca önceki çalışmalar ile karşılaştırma yapma imkanına sahip olmak için de $\varepsilon = 3$, $\mu = 1$, $kp = c = 1.3$, $x_0 = 15$ ve $0 \leq x \leq 200$ değerleri kullanılarak nümerik çözümler elde edildi.

Elde edilen soliton dalga çözümünde soliton dalganın sağa doğru sabit hız ve değişmez genlikle hareket ettiği gözlendi. Soliton dalga için tasarlanan program, $t = 0$ 'dan $t = 10$ 'a ve $t = 0$ 'dan $t = 100$ 'e kadar çalıştırıldı. $t = 0$ 'dan $t = 10$ 'a kadar elde edilen çözüm grafiği Şekil 3.1 'de verildi. Tablo 3.1 'de $t = 0$ 'dan $t = 10$ 'a kadar elde edilen I_1, I_2 ve I_3 korunum sabitleri verildi. Tablo 3.2 'de ise, $t = 0$ 'dan $t = 10$ 'a kadar elde edilen L_2 ve L_∞ hata normu değerleri verilerek daha önceki çalışmalardan [30, 85] numaralı referanslar ile karşılaştırma yapıldı.

Soliton dalganın $t = 10$ 'daki hata normunun grafiği Şekil 3.2 'de verildi.

Önerilen metodun nümerik olarak yakınsama oranı, farklı düğüm nokta sayıları için hesaplanarak Tablo 3.3 'de verildi. $\Delta t = 0.0001$ zaman adımı ile yapılan test çözümlerinde yakınsama oranları genel olarak $[4.43, 13.60]$ aralığında oluştuğu gözlendi.

Tablo 3.4 'de soliton dalganın $t = 0$ 'dan $t = 100$ 'e kadar süren bu uzun çalışmanın sonucunda elde edilen nümerik çözümüne ait I_1, I_2 ve I_3 korunum sabitleri verilerek daha önceki referanslardan [85] ile karşılaştırma yapıldı.

Tablo 3.1: Soliton dalganın $\Delta t = 0.0001$ ve $N = 601$ değerleri için Kuintik B-spline DQM ile elde edilen korunum sabitleri

t	I_1	I_2	I_3
0	4.4429	3.6770	2.0714
1	4.4428	3.6768	2.0711
2	4.4428	3.6767	2.0709
3	4.4427	3.6765	2.0706
4	4.4426	3.6763	2.0703
5	4.4426	3.6762	2.0701
6	4.4426	3.6760	2.0698
7	4.4425	3.6759	2.0696
8	4.4423	3.6757	2.0693
9	4.4422	3.6756	2.0690
10	4.4421	3.6754	2.0688

Kararlılık analizi için özdeğerler farklı düğüm nokta sayıları için araştırıldı. $N = 51$, $N = 101$, $N = 201$, $N = 301$, $N = 401$, $N = 501$ ve $N = 601$ için elde edilen özdeğerlerin reel ve sanal kısımlarını gösteren grafikler Şekil 3.3−3.9 'da verildi. Farklı düğüm nokta sayısına göre elde edilen özdeğerler içerisinde sadece reel kısımdan oluşan özdeğerler olduğu gibi reel ve sanal bileşenlere sahip özdeğerlerin de mevcut olduğu görüldü. Elde edilen özdeğerlerin birinci bölümde anlatılan kararlılık kriterleri ile uyumlu olduğu görüldü.

Tablo 3.5 'de farklı düğüm nokta sayılarında mutlak değeri en büyük özdeğerlerin reel ve sanal bileşenleri verildi. $N = 51$ için $| Re(\lambda_{\max}) |= 0.1712$, $N = 301$ için $| Re(\lambda_{\max}) |= 35.4047$ ve $N = 601$ için $| Re(\lambda_{\max}) |= 283.2373$ olarak bulundu. $N = 51$ için $| Sa(\lambda_{\max}) |= 0.0522$, $N = 301$ için $| Sa(\lambda_{\max}) |= 14.8419$ ve $N = 601$ için $| Sa(\lambda_{\max}) |= 144.8805$ olarak bulundu. B-spline diferensiyel quadrature metotta düğüm noktalarının sayısı arttıkça özdeğerlerin mutlak değerlerinin de büyüdüğü

Tablo 3.2: Soliton dalganın $\Delta t = 0.0001$ ve $N = 601$ değerleri için Kuintik B-spline DQM ile elde edilen çözümlerin L_2 ve L_∞ hata normları

	Kuintik B-spline DQM		$\Delta t = 0.025$ ve $N = 1000$			
			Kuad. Galerkin[30]		Kuin.Koll. [85]	
t	$L_2 \times 10^3$	$L_\infty \times 10^3$	$L_2 \times 10^3$	$L_\infty \times 10^3$	$L_2 \times 10^3$	$L_\infty \times 10^3$
0	-	-	-	-	-	-
1	0.73	0.48	3.38	2.03	0.25	0.10
2	0.85	0.54	4.88	3.23	0.35	0.17
3	0.93	0.65	6.32	4.15	0.39	0.25
4	0.95	0.69	7.65	5.00	0.51	0.36
5	0.95	0.67	8.84	5.75	0.75	0.51
6	0.92	0.61	9.83	6.34	1.02	0.67
7	0.80	0.59	10.57	6.71	1.32	0.85
8	0.66	0.44	11.21	7.20	1.66	1.07
9	0.63	0.36	11.34	6.99	2.03	1.03
10	0.79	0.64	11.61	7.33	2.45	1.55

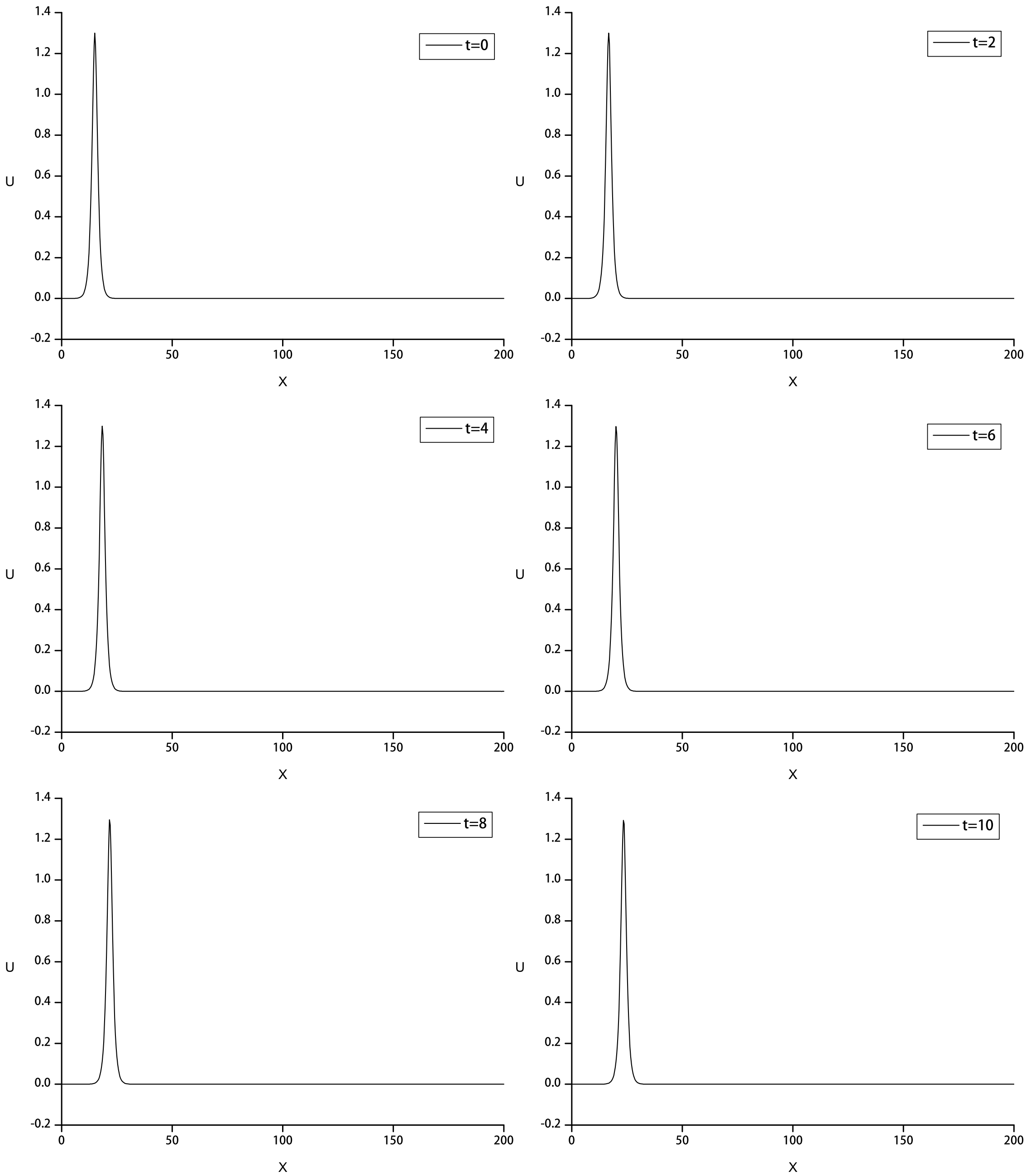
görüldü. Bu durum, özdeğerlerin kararlılık aralığına taşınması için zaman adımı uzunluğunun azaltılması gerektiğini göstermektedir.

Tablo 3.3: Soliton dalganın $t = 10$ zamanında farklı düğüm nokta sayıları için elde edilen hata normları ve yakınsama oranları.

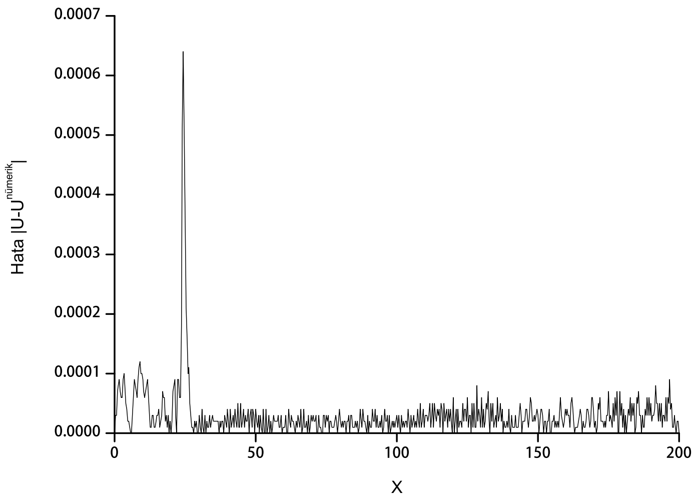
N	$L_2 \times 10^3$	$YO\,(L_2)$	$L_\infty \times 10^3$	$YO\,(L_\infty)$
301	425.02	-	212.26	-
351	64.30	12.29	26.26	13.60
401	19.41	8.99	9.01	8.03
451	7.74	7.82	4.35	6.20
501	3.41	7.80	2.27	6.19
551	1.30	10.14	0.94	9.27
601	0.79	5.73	0.64	4.43

Tablo 3.4: Soliton dalganın $\Delta t = 0.0001$ ve $N = 419$ değerleri için Kuintik B-spline DQM ile elde edilen korunum sabitleri

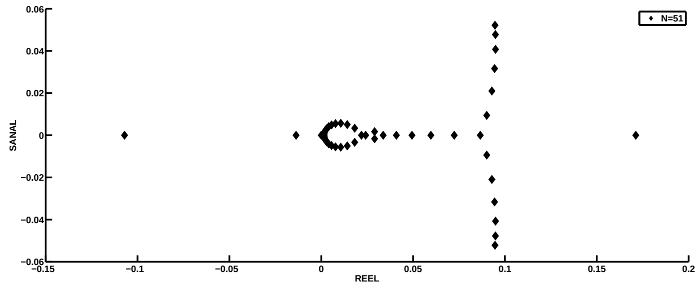
	Kuintik B-spline DQM			Kuin.Koll. [85] $\Delta t = 0.25$ ve $N = 1000$		
t	I_1	I_2	I_3	I_1	I_2	I_3
0	4.443	3.677	2.072	4.443	3.677	2.071
10	4.443	3.676	2.070	4.442	3.676	2.070
20	4.442	3.675	2.067	4.442	3.675	2.068
30	4.440	3.675	2.066	4.442	3.674	2.067
40	4.440	3.675	2.065	4.441	3.674	2.066
50	4.440	3.676	2.065	4.441	3.673	2.064
60	4.441	3.677	2.065	4.440	3.672	2.063
70	4.443	3.678	2.065	4.440	3.671	2.061
80	4.444	3.680	2.066	4.440	3.670	2.060
90	4.445	3.682	2.067	4.439	3.669	2.058
100	4.443	3.686	2.069	4.439	3.668	2.057



Şekil 3.1: Soliton dalganın $0 \leq x \leq 200$ aralığında $t = 0 - 10$, $\varepsilon = 3$, $\mu = 1$, $\Delta t = 0.0001$ ve $N = 601$ için elde edilen çözüm grafikleri



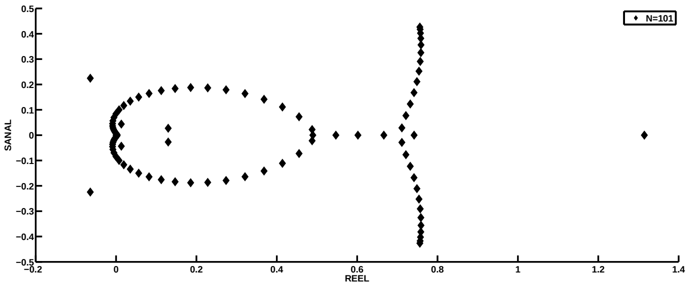
Şekil 3.2. Soliton dalganın $t = 10$ zamanında elde edilen hata normunun grafiği



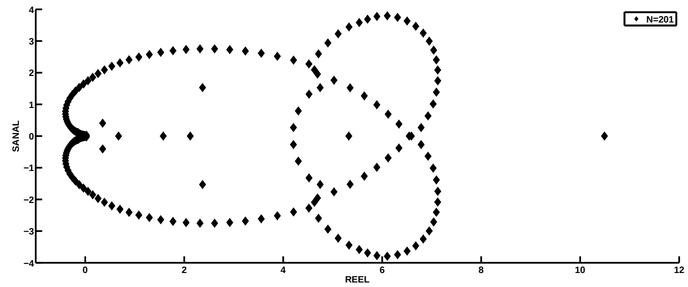
Şekil 3.3: Soliton dalganın $N = 51$ için Kuintik B-spline DQM ile elde edilen özdeğerlerin grafikleri

Tablo 3.5: Soliton dalganın düğüm noktalarının sayılarına göre mutlak değeri en büyük özdeğerler

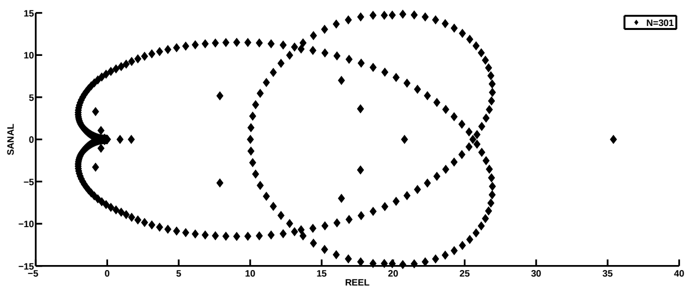
	Kuintik B-spline DQM						
Düğüm nokta sayısı	51	101	201	301	401	501	601
$\mid Re\,(\lambda_{\max}) \mid$	0.1712	1.3147	10.4915	35.4047	83.9222	163.9105	283.2373
$\mid Sa\,(\lambda_{\max}) \mid$	0.0522	0.4264	3.7949	14.8419	38.9727	80.4487	144.8805



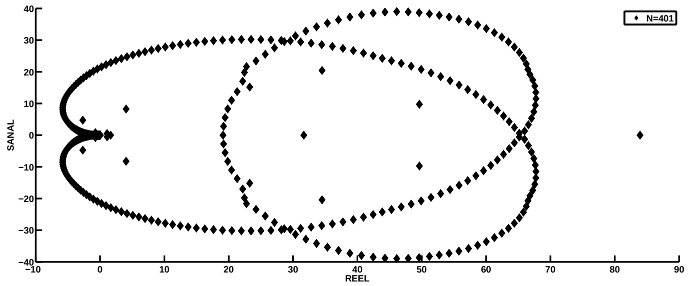
Şekil 3.4: Soliton dalganın $N = 101$ için Kuintik B-spline DQM ile elde edilen özdeğerlerin grafikleri



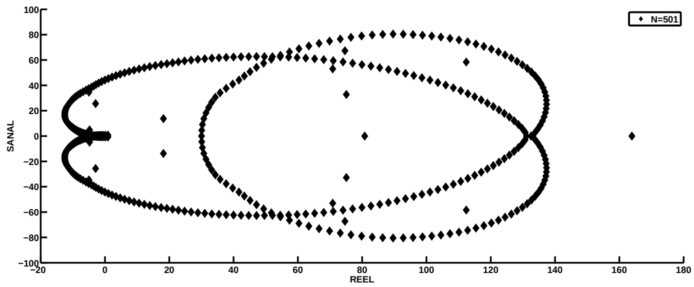
Şekil 3.5: Soliton dalganın $N = 201$ için Kuintik B-spline DQM ile elde edilen özdeğerlerin grafikleri



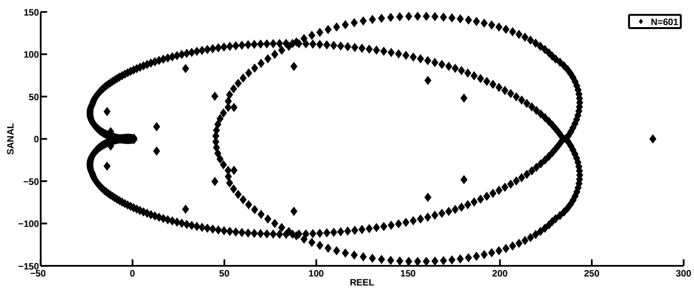
Şekil 3.6: Soliton dalganın $N = 301$ için Kuintik B-spline DQM ile elde edilen özdeğerlerin grafikleri



Şekil 3.7: Soliton dalganın $N = 401$ için Kuintik B-spline DQM ile elde edilen özdeğerlerin grafikleri



Şekil 3.8: Soliton dalganın $N = 501$ için Kuintik B-spline DQM ile elde edilen özdeğerlerin grafikleri



Şekil 3.9: Soliton dalganın $N = 601$ için Kuintik B-spline DQM ile elde edilen özdeğerlerin grafikleri

3.3.2 İki Soliton Dalganın Girişimi

Nümerik çözümünü araştıracağımız mKdV denklemine ait ikinci test problem iki Soliton dalganın girişimini içeren ve başlangıç şartı

$$p = \left[\frac{6\mu}{\varepsilon}\right]^{1/2}, \tag{3.3.4}$$

olmak üzere

$$U(x,t) = k_1 p \sec h\left(k_1 x - k_1 x_1 - k_1^3 \mu t\right) + k_2 p \sec h\left(k_2 x - k_2 x_2 - k_2^3 \mu t\right), \tag{3.3.5}$$

denkleminde $t = 0$ alınmasıyla

$$U(x,0) = k_1 p \sec h\left(k_1 x - k_1 x_1\right) + k_2 p \sec h\left(k_2 x - k_2 x_2\right), \tag{3.3.6}$$

bulunacak olan denklem olacaktır. Bu başlangıç şartı sağa doğru genliklerine bağlı olarak $k_i^2 \mu$ $(i = 1, 2)$ hızlarıyla hareket eden iki Soliton dalgayı ifade eder. Zaman içinde çarpışmayı gözlemleyebilmek için büyük genliğe dolayısıyla büyük hıza sahip olan dalga, nisbeten daha küçük genlikli yani daha yavaş olan dalganın solunda olacak şekilde konumlandırıldı. Bu sebeple $k_1 p = c_1 = 1.3$ genlikli dalga $x_1 = 15$ konumunda ve $k_2 p = c_2 = 0.9$ genlikli dalga $x_2 = 35$ konumunda alınıp $0 \leq x \leq 200$ aralığında, $\varepsilon = 3$, $\mu = 1$ ve $p = \sqrt{2}$ değerleri ile çözümler araştırıldı.

Tablo 3.6 'da üç korunum sabiti değeri hesaplandı ve daha önceki çalışmalardan [85] ile karşılaştırıldı. [85] 'de düğüm nokta sayısı $N = 1000$ iken Kuintik B-spline DQM 'da $N = 391$ gibi daha az sayıda düğüm nokta sayısı kullanılarak elde edilen I_1, I_2 ve I_3 korunum sabitleri sırasıyla 0.028 %, 0.18 % ve 0.029 % oranından daha az değişim gösterdiği görüldü. Uzun süre çalışan bu programdan elde edilen sonuçların orijinal değerlerine göre hemen hemen sabit olarak kaldığı düşünülebilir.

Tablo 3.6: İki Soliton dalganın girişiminin $c_1 = 1.3$, $c_2 = 0.9$, $\Delta t = 0.0001$ ve $N = 391$ değerleri için Kuintik B-spline DQM ile elde edilen korunum sabitleri

	Kuintik B-spline DQM			Kuin.Koll. [85] $\Delta t = 0.25$ ve $N = 1000$		
t	I_1	I_2	I_3	I_1	I_2	I_3
0	8.8858	6.2226	2.7592	8.8858	6.2226	2.7588
20	8.8823	6.2234	2.7578	8.8852	6.2212	2.7562
40	8.8873	6.2237	2.7575	8.8854	6.2212	2.7559
60	8.8826	6.2281	2.7595	8.8851	6.2203	2.7540
80	8.8826	6.2404	2.7697	8.8846	6.2188	2.7513
100	8.8830	6.2484	2.7756	8.8840	6.2174	2.7487
120	8.8882	6.2337	2.7584	8.8834	6.2161	2.7461

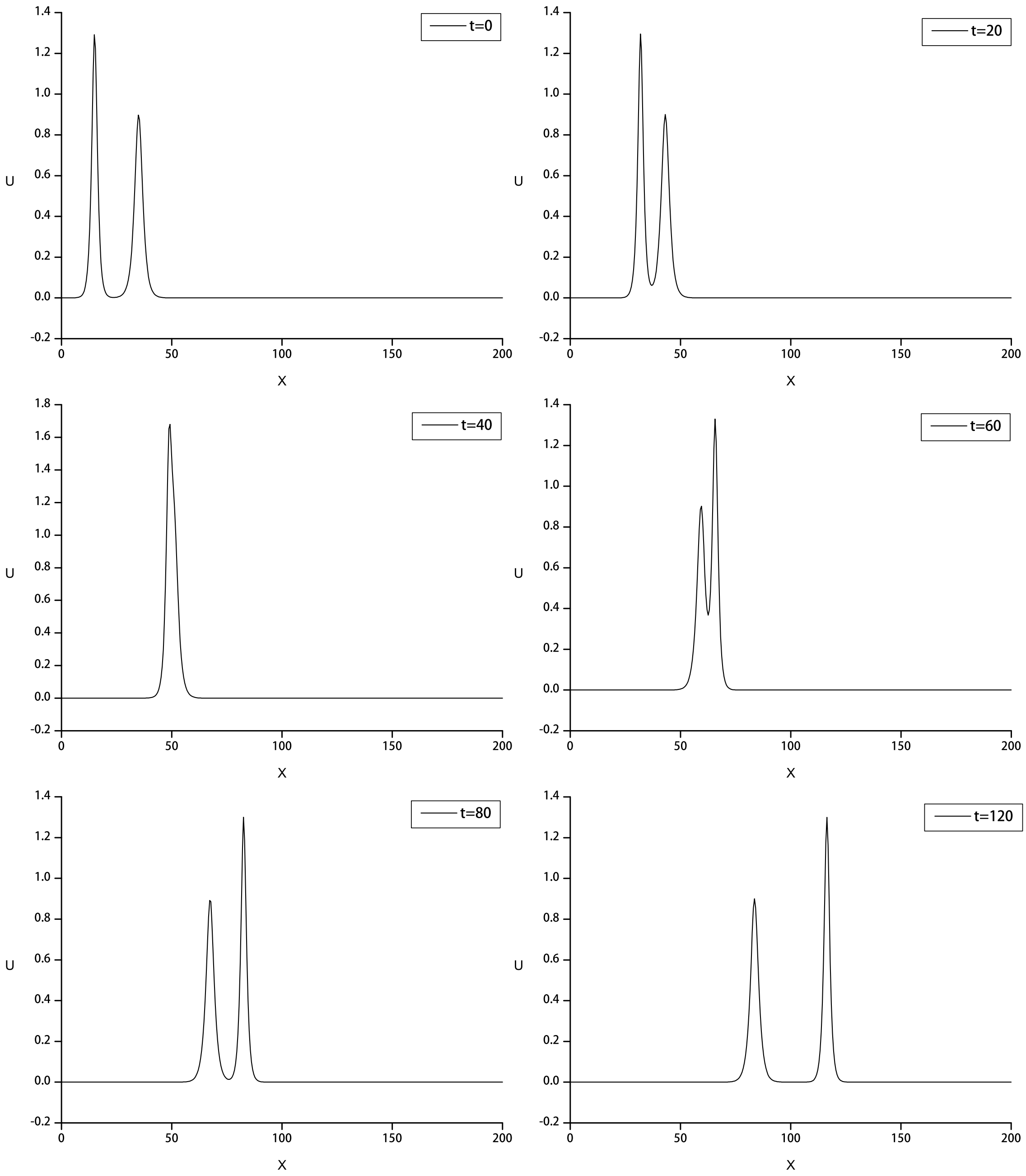
Şekil 3.10 'da görüldüğü üzere, başlangıçta iki Soliton dalgadan büyük genliğe sahip olan dalga küçük genliğe sahip dalganın solunda yer aldığı ve genliğin büyük olması dolayısıyla yüksek hıza sahip bir şekilde zaman ilerledikçe öndeki dalgayı yakaladığı ve $t = 40$ zamanında öndeki dalgayı absorbe ettiği görüldü. $t = 60$ zamanında ayrılmaya başlayan dalgaların $t = 100$ zamanında etkileşimlerini tamamladığı ve $t = 120$ zamanında iki dalganın ayrıldığı ve yer değiştirdiği gözlendi.

Kararlılık analizi için özdeğerler farklı düğüm nokta sayıları için araştırıldı. $N = 51$, $N = 101$, $N = 201$, $N = 301$, $N = 401$ ve $N = 501$ için elde edilen özdeğerlerin reel ve sanal kısımlarını gösteren grafikler Şekil 3.11−3.16 'da verildi. Farklı düğüm nokta sayılarına göre elde edilen özdeğerler içinde sadece reel kısımdan oluşan özdeğerler olduğu gibi reel ve sanal bileşenlere sahip özdeğerlerin de mevcut olduğu görüldü. Elde edilen özdeğerlerin birinci bölümde anlatılan kararlılık kriterleri ile uyumlu olduğu görüldü.

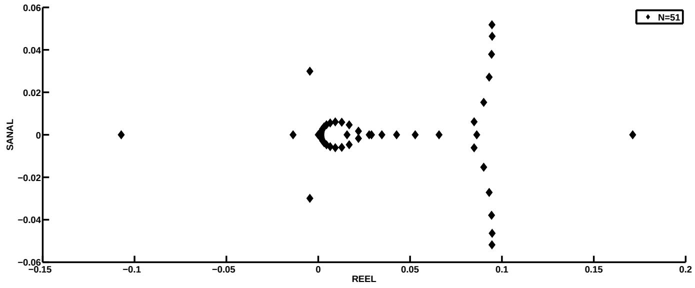
Tablo 3.7 'de farklı düğüm nokta sayılarında mutlak değeri en büyük özdeğerlerin reel ve sanal bileşenleri verildi. $N = 51$ için $\mid Re(\lambda_{\max}) \mid = 0.1712$, $N = 301$ için $\mid Re(\lambda_{\max}) \mid = 35.4047$ ve $N = 501$ için $\mid Re(\lambda_{\max}) \mid = 163.9105$ olarak bulundu. $N = 51$ için $\mid Sa(\lambda_{\max}) \mid = 0.0518$, $N = 301$ için $\mid Sa(\lambda_{\max}) \mid = 15.0130$ ve $N = 501$ için $\mid Sa(\lambda_{\max}) \mid = 80.6206$ olarak bulundu. B-spline diferensiyel quadrature metotlarda düğüm noktalarının sayısı arttıkça özdeğerlerin mutlak değerlerinin de büyüdüğü görüldü. Bu durum, özdeğerlerin kararlılık aralığına taşınması için zaman adımı uzunluğunun azaltılması gerektiğini göstermektedir.

Tablo 3.7: İki Soliton dalganın girişiminde düğüm noktalarının sayılarına göre mutlak değeri en büyük özdeğerler

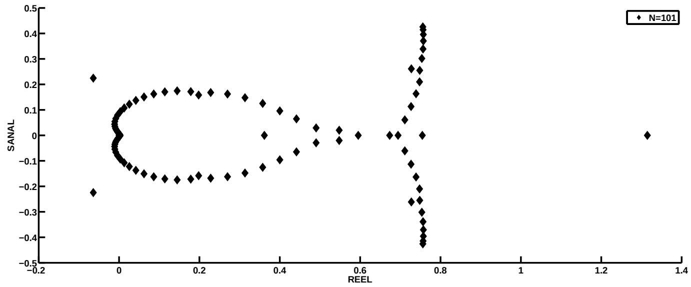
	Kuintik B-spline DQM					
Düğüm nokta sayısı	51	101	201	301	401	501
$\mid Re(\lambda_{\max}) \mid$	0.1712	1.3147	10.4915	35.4047	83.9222	163.9105
$\mid Sa(\lambda_{\max}) \mid$	0.0518	0.4257	3.7956	15.0130	38.8427	80.6206



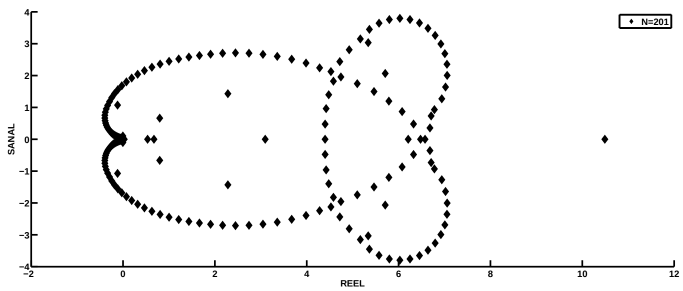
Şekil 3.10: İki Soliton dalganın girişiminin $0 \leq x \leq 200$ aralığında $t = 0 - 120$, $\varepsilon = 3$, $\mu = 1$, $\Delta t = 0.0001$ ve $N = 391$ değerleri için elde edilen çözüm grafikleri



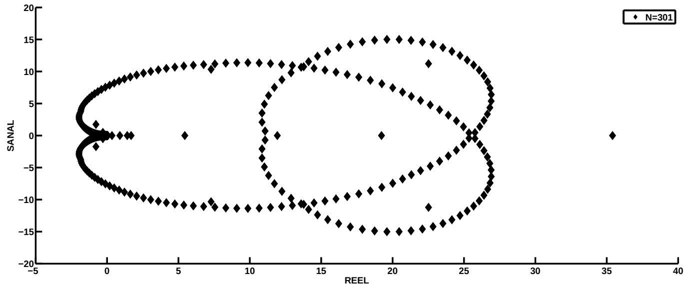
Şekil 3.11: İki Soliton dalganın girişiminin $N = 51$ için Kuintik B-spline DQM ile elde edilen özdeğerlerin grafikleri



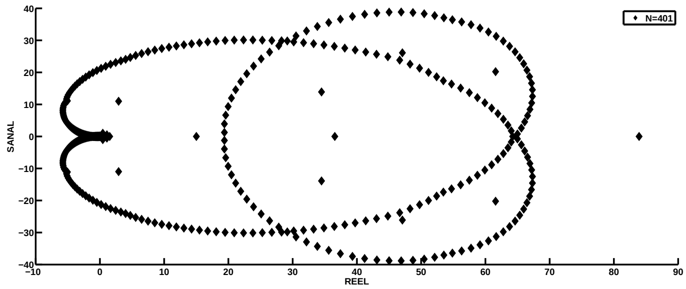
Şekil 3.12: İki Soliton dalganın girişiminin $N = 101$ için Kuintik B-spline DQM ile elde edilen özdeğerlerin grafikleri



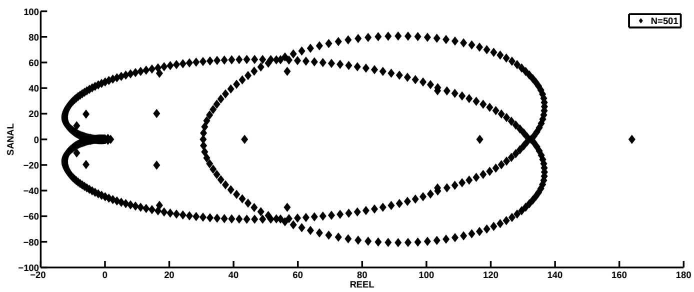
Şekil 3.13: İki Soliton dalganın girişiminin $N = 201$ için Kuintik B-spline DQM ile elde edilen özdeğerlerin grafikleri



Şekil 3.14: İki Soliton dalganın girişiminin $N = 301$ için Kuintik B-spline DQM ile elde edilen özdeğerlerin grafikleri



Şekil 3.15: İki Soliton dalganın girişiminin $N = 401$ için Kuintik B-spline DQM ile elde edilen özdeğerlerin grafikleri



Şekil 3.16: İki Soliton dalganın girişiminin $N = 501$ için Kuintik B-spline DQM ile elde edilen özdeğerlerin grafikleri

3.3.3 Ardışık Dalgaların Gelişimi

Üçüncü test problem olarak

$$U(x,0) = \exp\left(-x^2\right),$$

şeklinde bilinen Maxwellian başlangıç şartı ele alınacaktır. Nümerik çözüm araştırılırken μ 'nün çeşitli değerleri kullanılıp ε 'un değeri sabit olarak 1 alınacaktır. İlk olarak, daha önceki çalışmalar ile karşılaştırma yapabilmek için $-50 \leq x \leq 50$ bölgesinde $\mu = 0.04$, $\Delta t = 0.001$ ve $N = 501$ değerleri ile nümerik çözüm elde edildi ve $t = 0$ 'dan $t = 12.5$ 'e kadar farklı zamanlara ait grafikler Şekil 3.17 'de verildi.

Ayrıca, simülasyon boyunca $\mu = 0.04$ için elde edilen I_1, I_2 ve I_3 korunum sabitleri daha önceki çalışmalardan [30] ile karşılaştırılarak Tablo 3.8 'de verildi.

Tablo 3.8: Ardışık dalgaların gelişiminin $\mu = 0.04$, $\Delta t = 0.001$ ve $N = 501$ değerleri için elde edilen korunum sabitleri

	Kuintik B-spline DQM			Kuad. Galerkin[30] $\Delta t = 0.01$ ve $N = 1000$		
t	I_1	I_2	I_3	I_1	I_2	I_3
0.0	1.7725	1.2533	0.5854	1.7725	1.2533	0.5839
2.5	1.7720	1.2530	0.5846	1.7719	1.2511	0.5756
5.0	1.7725	1.2526	0.5838	1.7716	1.2504	0.5734
7.5	1.7707	1.2522	0.5830	1.7716	1.2501	0.5726
10.0	1.7724	1.2518	0.5822	1.7715	1.2501	0.5723
12.5	1.7701	1.2514	0.5813	1.7716	1.2500	0.5721

Ardından, $-15 \leq x \leq 15$ bölgesinde $\mu = 0.01$, $\Delta t = 0.00025$ ve $N = 431$ değerleri ile nümerik çözüm elde edildi ve $t = 0$ 'dan $t = 12.5$ 'e kadar farklı zamanlara ait grafikler Şekil 3.18 'de verildi.

Bunun yanında, simülasyon boyunca $\mu = 0.01$ için elde edilen I_1, I_2 ve I_3 korunum sabitleri daha önceki çalışmalardan [30] ile karşılaştırılarak Tablo 3.9 'da verildi.

Tablo 3.9: Ardışık dalgaların gelişiminin $\mu = 0.01$, $\Delta t = 0.00025$ ve $N = 360$ değerleri için elde edilen korunum sabitleri

Kuintik B-spline DQM				Kuad. Galerkin [30] $\Delta t = 0.005$ ve $N = 600$		
t	I_1	I_2	I_3	I_1	I_2	I_3
0.0	1.7725	1.2533	0.8110	1.7725	1.2533	0.8109
2.5	1.7724	1.2526	0.8089	1.7713	1.2485	0.7889
5.0	1.7701	1.2533	0.8059	1.7708	1.2463	0.7778
7.5	1.7709	1.2558	0.8051	1.7707	1.2460	0.7767
10.0	1.7720	1.2588	0.8038	1.7706	1.2459	0.7764
12.5	1.7725	1.2685	0.8140	1.7706	1.2458	0.7762

Sonra, $-15 \leq x \leq 15$ bölgesinde $\mu = 0.005$, $\Delta t = 0.0001$ ve $N = 601$ değerleri ile nümerik çözüm elde edildi ve $t = 0$ 'dan $t = 12.5$ 'e kadar farklı zamanlara ait grafikler Şekil 3.19 'da verildi.

Yine, simülasyon boyunca $\mu = 0.005$ için elde edilen I_1, I_2 ve I_3 korunum sabitleri daha önceki çalışmalardan [30] ile karşılaştırılarak Tablo 3.10 'da verildi.

Son olarak, $-15 \leq x \leq 15$ bölgesinde $\mu = 0.0025$, $\Delta t = 0.0001$ ve $N = 901$ değerleri ile nümerik çözüm elde edildi ve $t = 0$ 'dan $t = 12.5$ 'e kadar farklı zamanlara ait grafikler Şekil 3.20 'de verildi.

Benzer şekilde, simülasyon boyunca $\mu = 0.0025$ için elde edilen I_1, I_2 ve I_3 korunum sabitleri daha önceki çalışmalardan [30] ile karşılaştırılarak Tablo 3.11 'de verildi.

Kararlılık analizi için özdeğerler farklı düğüm nokta sayıları için araştırıldı. $N = 51$, $N = 101$, $N = 201$, $N = 301$, $N = 401$ ve $N = 501$ için elde edilen

Tablo 3.10: Ardışık dalgaların gelişiminin $\mu = 0.005$, $\Delta t = 0.0001$ ve $N = 544$ değerleri için elde edilen korunum sabitleri

	Kuintik B-spline DQM			Kuad. Galerkin [30] $\Delta t = 0.005$ ve $N = 3000$		
t	I_1	I_2	I_3	I_1	I_2	I_3
0.0	1.7725	1.2533	0.8486	1.7725	1.2533	0.8486
2.5	1.7718	1.2529	0.8467	1.7724	1.2529	0.8464
5.0	1.7728	1.2560	0.8473	1.7722	1.2522	0.8438
7.5	1.7720	1.2615	0.8506	1.7720	1.2516	0.8418
10.0	1.7715	1.2640	0.8488	1.7719	1.2510	0.8399
12.5	1.7693	1.2650	0.8450	1.7717	1.2504	0.8380

Tablo 3.11: Ardışık dalgaların gelişiminin $\mu = 0.0025$, $\Delta t = 0.0001$ ve $N = 793$ değerleri için elde edilen korunum sabitleri

	Kuintik B-spline DQM			Kuad. Galerkin [30] $\Delta t = 0.005$ ve $N = 3000$		
t	I_1	I_2	I_3	I_1	I_2	I_3
0.0	1.7725	1.2533	0.8674	1.7725	1.2533	0.8674
2.5	1.7721	1.2523	0.8629	1.7722	1.2520	0.8614
5.0	1.7697	1.2549	0.8572	1.7710	1.2488	0.8504
7.5	1.7698	1.2591	0.8525	1.7699	1.2458	0.8410
10.0	1.7665	1.2611	0.8409	1.7689	1.2431	0.8325
12.5	1.7668	1.2753	0.8517	1.7680	1.2406	0.8247

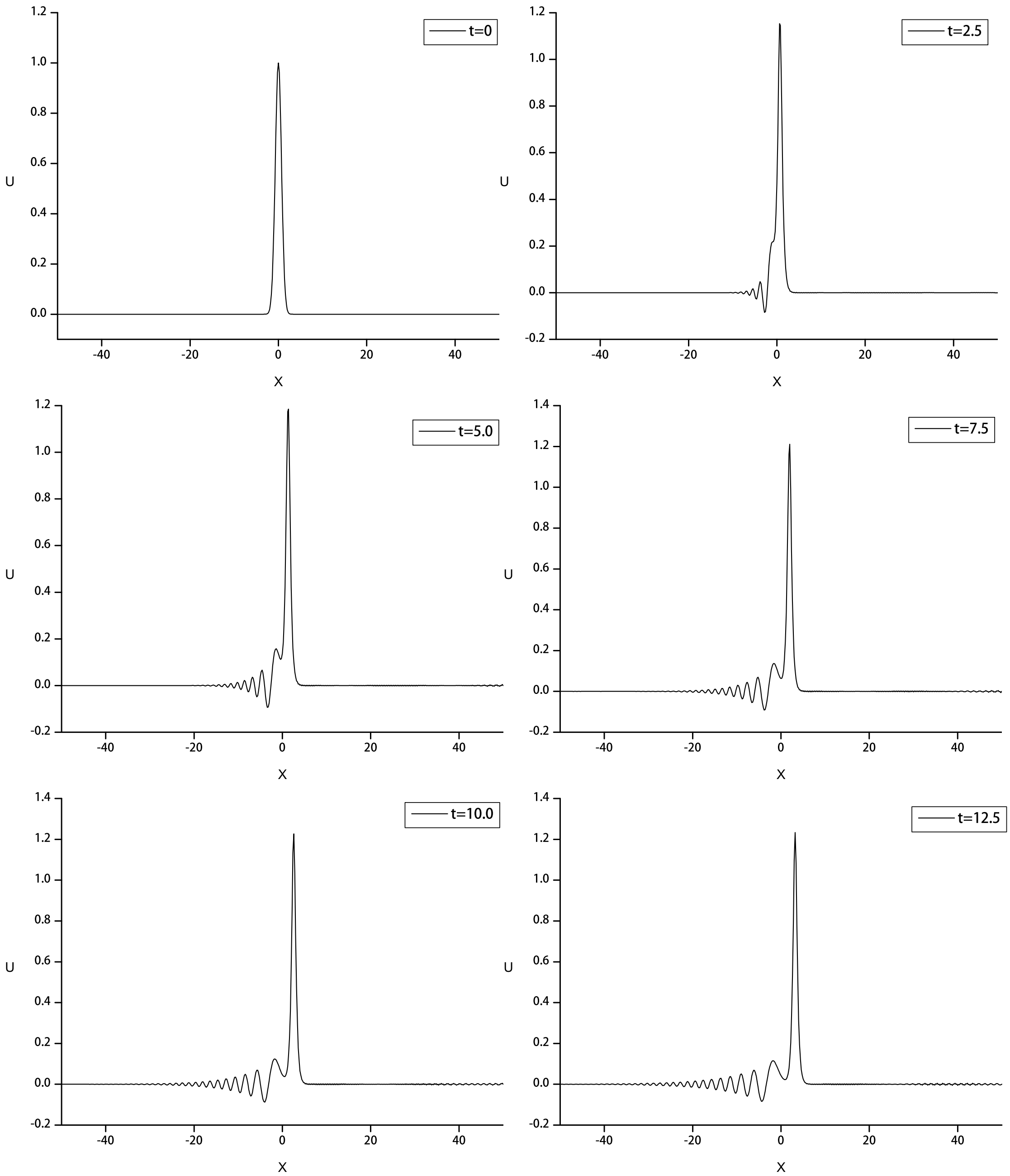
özdeğerlerin reel ve sanal kısımlarını gösteren grafikler Şekil 3.21−3.26 'da verildi. Farklı düğüm nokta sayısına göre elde edilen özdeğerler içerisinde sadece reel kısımdan oluşan özdeğerler olduğu gibi reel ve sanal bileşenlere sahip özdeğerlerin de mevcut olduğu görüldü. Elde edilen özdeğerlerin birinci bölümde anlatılan kararlılık kriterleri ile uyumlu olduğu görüldü.

Tablo 3.12 'de farklı düğüm nokta sayılarında mutlak değeri en büyük özdeğerlerin reel ve sanal bileşenleri verildi. $N = 51$ için $|\, Re\,(\lambda_{\max})\, | = 0.1375$, $N = 301$ için

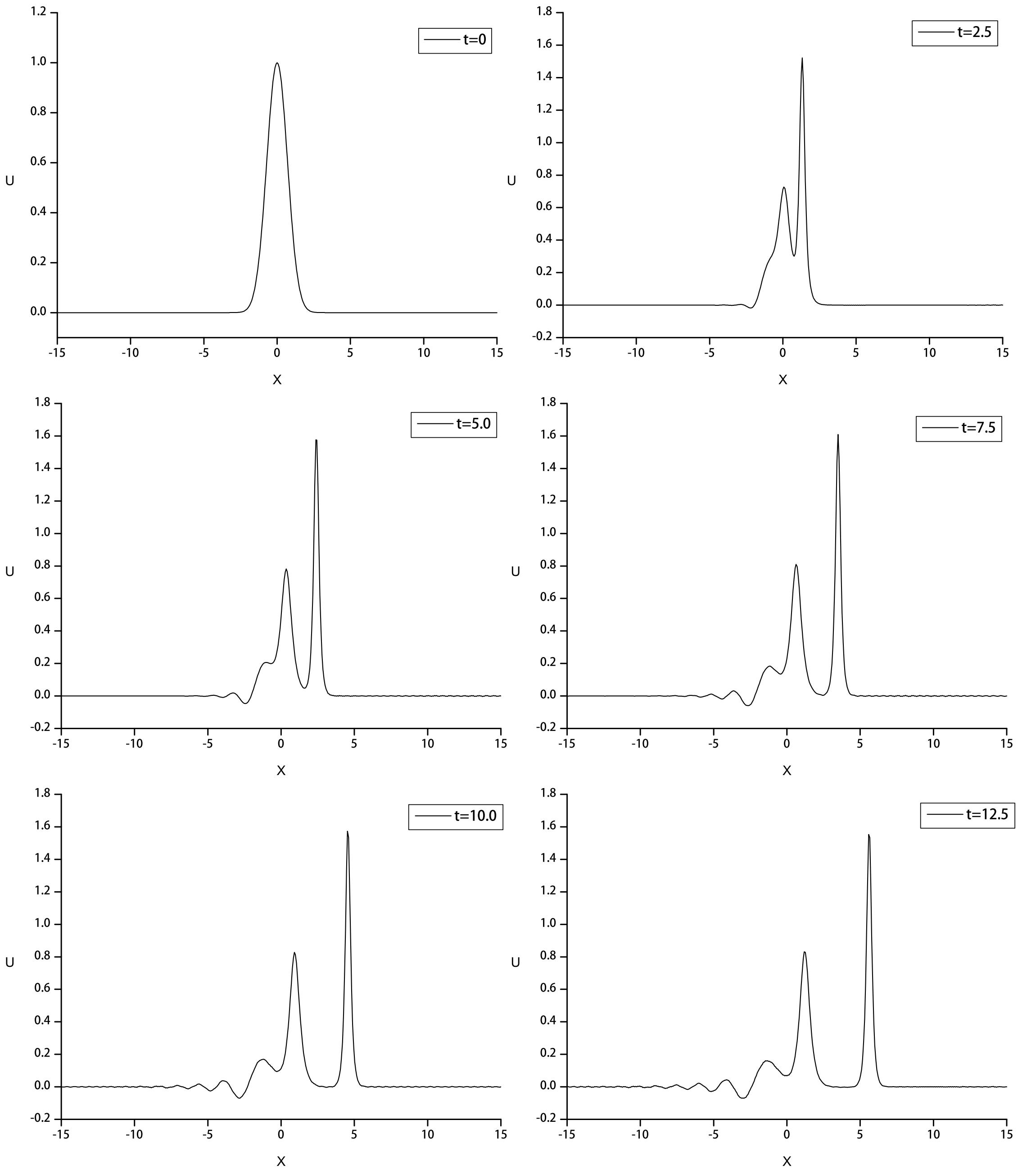
$| Re(\lambda_{\max}) | = 11.3295$ ve $N = 501$ için $| Re(\lambda_{\max}) | = 52.4514$ olarak bulundu. $N = 51$ için $| Sa(\lambda_{\max}) | = 0.0156$, $N = 301$ için $| Sa(\lambda_{\max}) | = 4.7774$ ve $N = 501$ için $| Sa(\lambda_{\max}) | = 25.7452$ olarak bulundu. B-spline diferensiyel quadrature metotlarda düğüm nokta sayısı arttıkça özdeğerlerin mutlak değerlerinin de büyüdüğü görüldü. Bu durum, özdeğerlerin kararlılık aralığına taşınması için zaman adımı uzunluğunun azaltılması gerektiğini göstermektedir.

Tablo 3.12: Ardışık dalgaların gelişiminde düğüm noktalarının sayılarına göre mutlak değeri en büyük özdeğerler

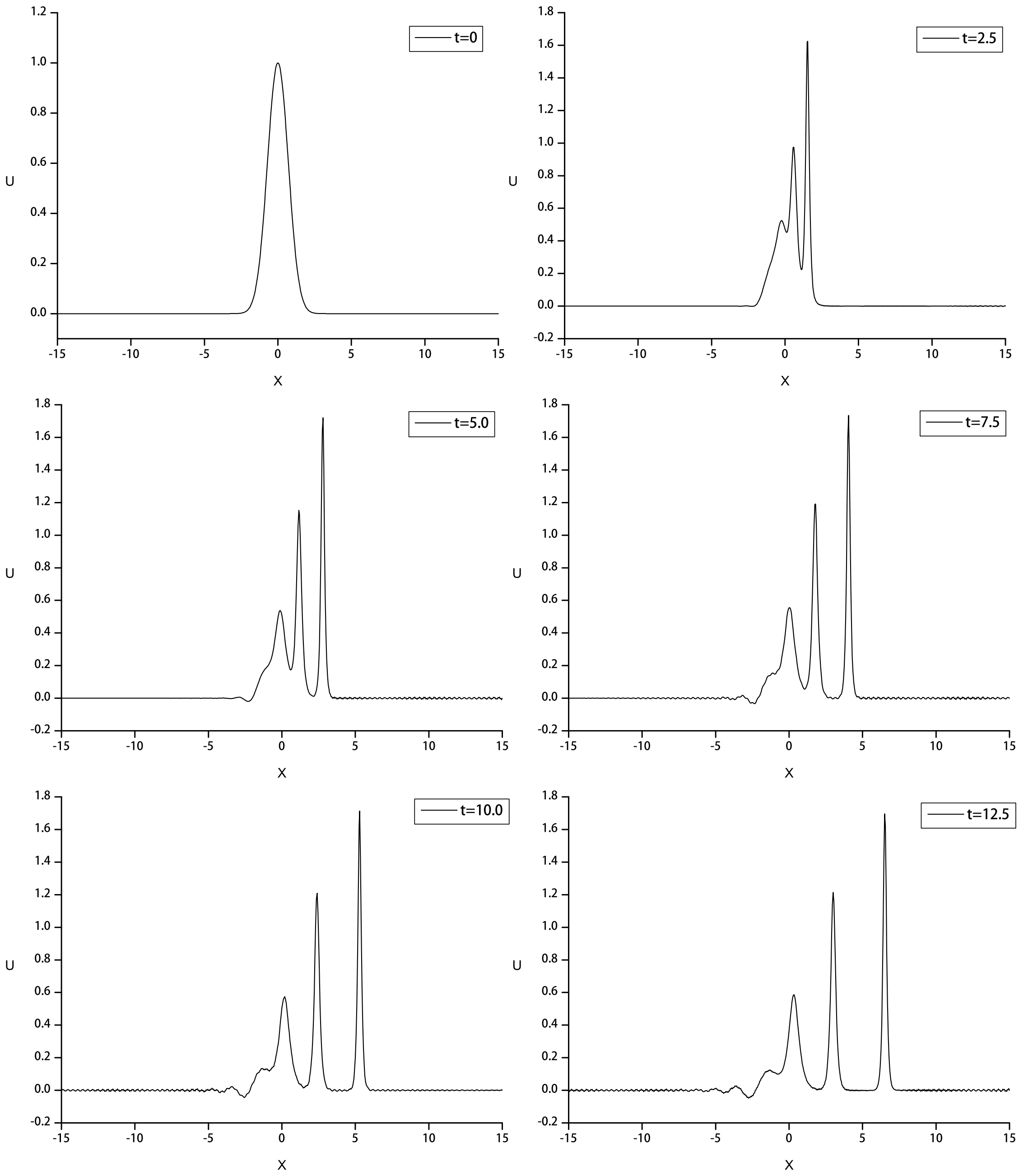
	Kuintik B-spline DQM					
Düğüm nokta sayısı	51	101	201	301	401	501
$\| Re(\lambda_{\max}) \|$	0.1375	0.4196	3.3569	11.3295	26.8551	52.4514
$\| Sa(\lambda_{\max}) \|$	0.0156	0.1342	1.2225	4.7774	12.4894	25.7452



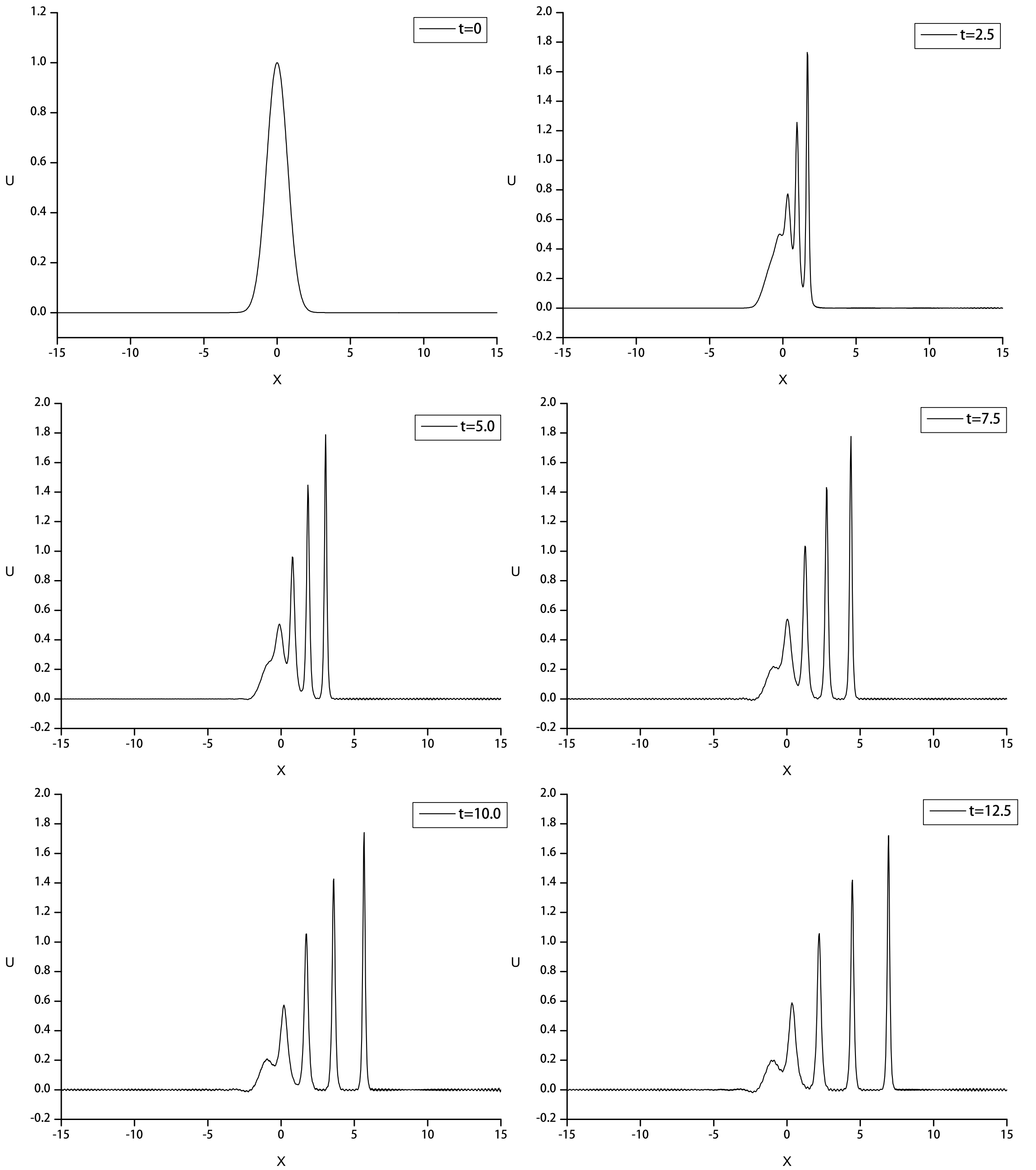
Şekil 3.17: Ardışık dalgaların gelişiminin $-50 \leq x \leq 50$ aralığında $t = 0-12.5$, $\varepsilon = 1$, $\mu = 0.04$, $\Delta t = 0.001$ ve $N = 501$ değerleri için elde edilen çözümlerin grafikleri



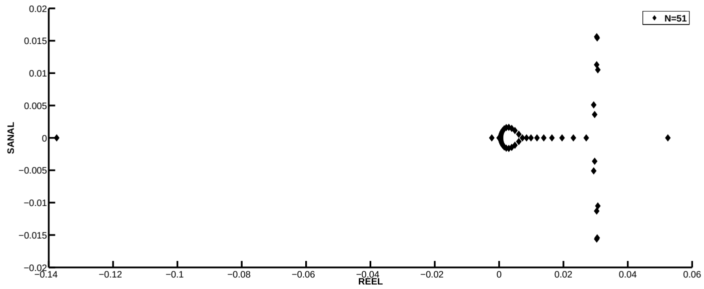
Şekil 3.18: Ardışık dalgaların gelişiminin $-15 \leq x \leq 15$ aralığında $t = 0-12.5$, $\varepsilon = 1$, $\mu = 0.01$, $\Delta t = 0.0005$ ve $N = 431$ değerleri için elde edilen çözümlerin grafikleri



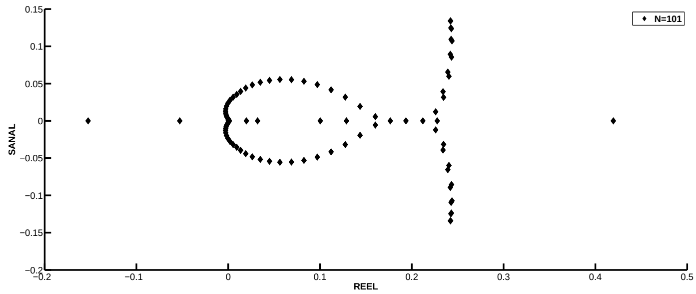
Şekil 3.19: Ardışık dalgaların gelişiminin $-15 \leq x \leq 15$ aralığında $t = 0 - 12.5$, $\varepsilon = 1$, $\mu = 0.005$, $\Delta t = 0.0001$ ve $N = 601$ değerleri için elde edilen çözümlerin grafikleri



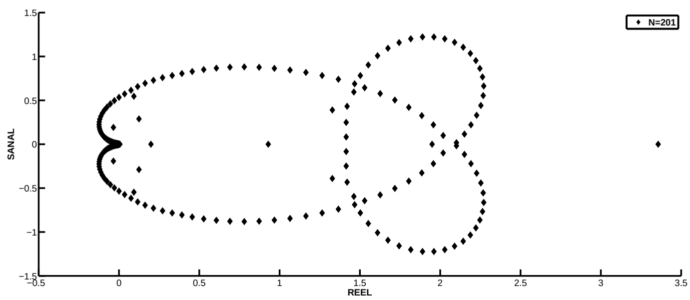
Şekil 3.20: Ardışık dalgaların gelişiminin $-15 \leq x \leq 15$ aralığında $t = 0-12.5$, $\varepsilon = 1$, $\mu = 0.0025$, $\Delta t = 0.0001$ ve $N = 901$ değerleri için elde edilen çözümlerin grafikleri



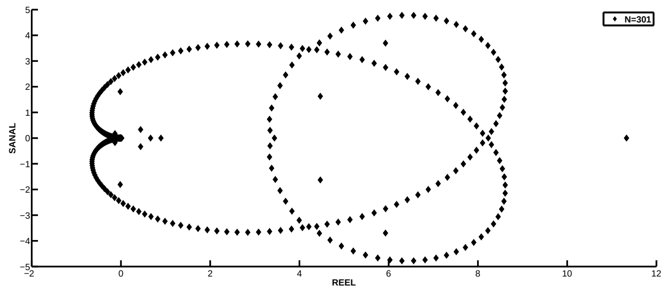
Şekil 3.21: Ardışık dalgaların gelişiminde $N = 51$ için Kuintik B-spline DQM yöntemi ile elde edilen özdeğerlerin grafikleri



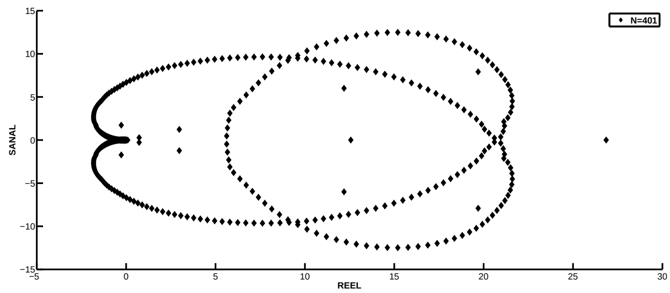
Şekil 3.22: Ardışık dalgaların gelişiminde $N = 101$ için Kuintik B-spline DQM yöntemi ile elde edilen özdeğerlerin grafikleri



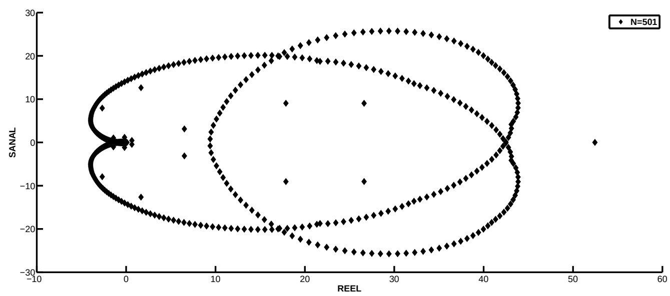
Şekil 3.23: Ardışık dalgaların gelişiminde $N = 201$ için Kuintik B-spline DQM yöntemi ile elde edilen özdeğerlerin grafikleri



Şekil 3.24: Ardışık dalgaların gelişiminde $N = 301$ için Kuintik B-spline DQM yöntemi ile elde edilen özdeğerlerin grafikleri



Şekil 3.25: Ardışık dalgaların gelişiminde $N = 401$ için Kuintik B-spline DQM yöntemi ile elde edilen özdeğerlerin grafikleri



Şekil 3.26: Ardışık dalgaların gelişiminde $N = 501$ için Kuintik B-spline DQM yöntemi ile elde edilen özdeğerlerin grafikleri

3.3.4 Dalga Oluşumu

Dördüncü ve son test problem olarak

$$U(x,0) = 0.5\left[1 - \tanh\frac{|x| - x_0}{d}\right],$$

başlangıç şartı ve

$$U(-150,t) = U(150,t) = 0, \qquad t > 0$$

sınır şartlarına sahip problem ele alınacaktır. Burada incelenecek olan tüm simülasyonlarda daha önceki çalışmalar ile karşılaştırma yapmaya olanak sağlamak amacıyla $-150 \leq x \leq 150$ bölgesinde çalışma yapıldı ve $d = 5$ ve $x_0 = 25$ seçildi. d 'nin pozitif değerli olması dalganın hareket yönünün sağa doğru olmasını sağlamaktadır. $t = 0$ 'dan $t = 800$ 'e süren uzun bir simülasyonda $\varepsilon = 0.2$, $\mu = 0.1$, $\Delta t = 0.001$ ve $N = 801$ alındı ve farklı zamanlarda elde edilen grafikler Şekil 3.27 'de verildi.

Farklı zamanlarda $\mu = 0.1$ için elde edilen korunum sabitleri sonlu elemanlar metodu [30] ile Tablo 3.13 'de karşılaştırıldı. Daha az sayıda düğüm nokta sayısı kullanıldığı ve çok uzun bir simülasyon olduğu halde I_1, I_2 ve I_3 korunum sabitleri orijinal değerlerine oranla sırasıyla % 0.056 , % 0.51 ve % 0.04 den daha az değişim gösterdiği görüldü. Bu sebeple korunum sabitlerinin hemen hemen sabit olarak kaldığı düşünülebilir.

mKdV denkleminde, a solitonun genliğini ifade etmek üzere, solitona ait analitik hız;

$$C_a = \frac{a^2\varepsilon}{6}$$

şeklinde tanımlanır. Bu kısımda $a = 1.9884$, $\varepsilon = 0.2$ olduğundan

Tablo 3.13: Dalga oluşumunun $\varepsilon = 0.2$, $\mu = 0.1$, $\Delta t = 0.001$ ve $N = 651$ değerleri için elde edilen korunum sabitleri

	Kuintik B-spline DQM			Kuad. Galerkin [30] $\Delta t = 0.05$ ve $N = 750$		
t	I_1	I_2	I_3	I_1	I_2	I_3
0	50.000228	45.000455	40.434244	50.000244	45.000481	40.433926
100	49.999891	44.999054	40.426110	49.983517	44.910309	39.909645
200	49.996586	44.994325	40.377992	49.935287	44.674023	38.445984
300	49.991177	45.014520	40.360638	49.913094	44.565525	37.815990
400	49.999902	45.080120	40.436991	49.905308	44.536327	37.681885
500	49.968979	45.198319	40.626554	49.903107	44.530098	37.638954
600	49.964522	45.194658	40.540294	49.902920	44.530876	37.612217
700	50.007102	45.361513	40.843402	49.908508	44.535641	37.582287
800	49.972604	45.228045	40.418431	49.920536	44.540688	37.587090

$$C_a \simeq 0.1318$$

olmaktadır. Bununla beraber nümerik çözümden elde edilen hız

$$C_n \simeq 0.1346$$

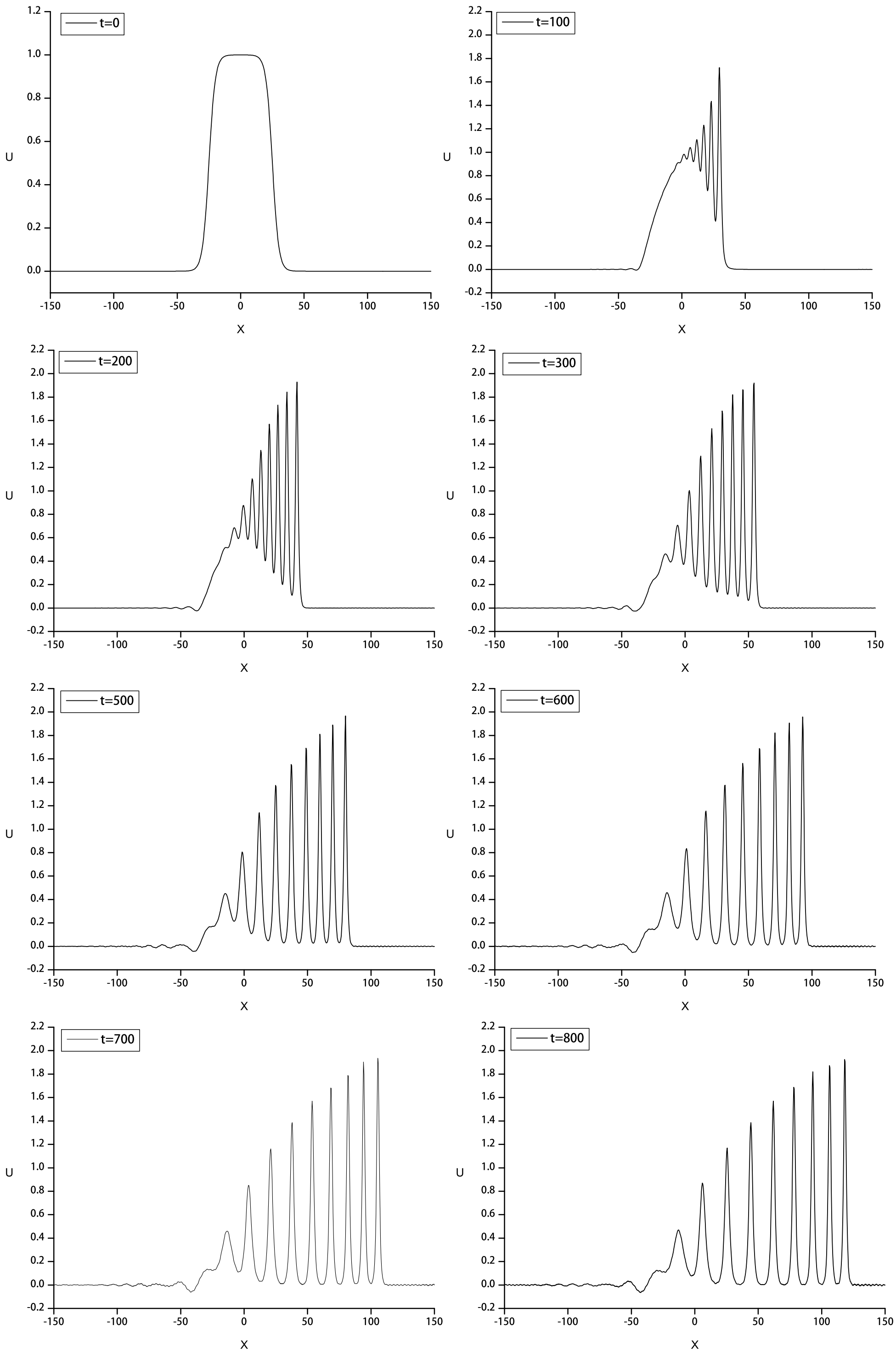
olarak tespit edildi. Bu sebeple analitik hız ile nümerik hızın tutarlı olduğu söylenebilir.

Kararlılık analizi için özdeğerler farklı düğüm nokta sayıları için araştırıldı. $N = 101$, $N = 201$, $N = 301$, $N = 401$, $N = 501$ ve $N = 601$ için elde edilen özdeğerlerin reel ve sanal kısımlarını gösteren grafikler Şekil 3.28$-$3.33 'de verildi. Farklı düğüm nokta sayısına göre elde edilen özdeğerler içerisinde sadece reel kısımdan oluşan özdeğerler olduğu gibi reel ve sanal bileşenlere sahip özdeğerlerin de mevcut olduğu görüldü. Elde edilen özdeğerler birinci bölümde anlatılan kararlılık kriterleri ile uyumlu olduğu görüldü.

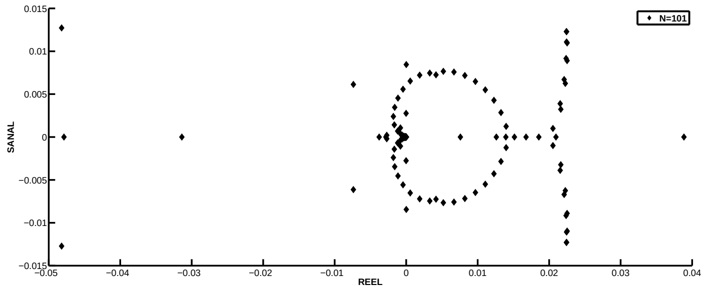
Tablo 3.14 'de farklı düğüm nokta sayılarında mutlak değeri en büyük özdeğerlerin reel ve sanal bileşenleri verildi. $N = 101$ için $| Re(\lambda_{\max}) |= 0.0482$, $N = 301$ için $| Re(\lambda_{\max}) |= 1.0490$ ve $N = 601$ için $| Re(\lambda_{\max}) |= 8.3922$ olarak bulundu. $N = 101$ için $| Sa(\lambda_{\max}) |= 0.0127$, $N = 301$ için $| Sa(\lambda_{\max}) |= 0.4134$ ve $N = 601$ için $| Sa(\lambda_{\max}) |= 4.2400$ olarak bulundu. B-spline diferensiyel quadrature metotlarda düğüm nokta sayısı arttıkça özdeğerlerin mutlak değerlerinin de büyüdüğü görüldü. Bu durum, özdeğerlerin kararlılık aralığına taşınması için zaman adımı uzunluğunun azaltılması gerektiğini göstermektedir.

Tablo 3.14: Dalga oluşumunda düğüm noktalarının sayılarına göre mutlak değeri en büyük özdeğerler

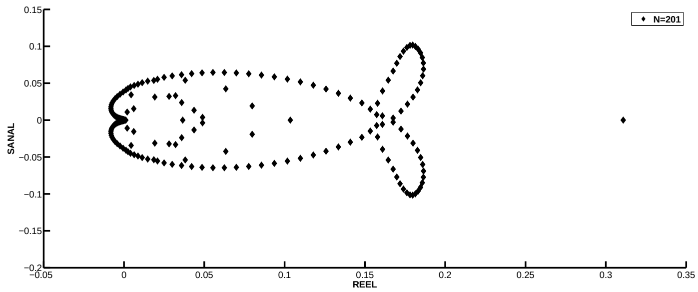
	Kuintik B-spline DQM					
Düğüm nokta sayısı	101	201	301	401	501	601
$\| Re(\lambda_{\max}) \|$	0.0482	0.3108	1.0490	2.4866	4.8566	8.3922
$\| Sa(\lambda_{\max}) \|$	0.0127	0.1017	0.4134	1.1174	2.3441	4.2400



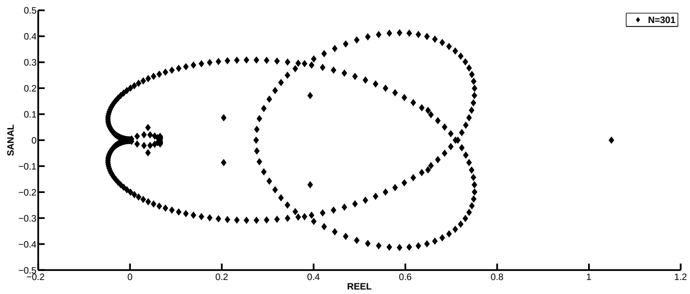
Şekil 3.27: Dalga oluşumunda $-150 \leq x \leq 150$ aralığında $t = 0 - 800$, $\mu = 0.1$, $\varepsilon = 0.2$, $\Delta t = 0.001$ ve $N = 801$ değerleri için elde edilen çözümlerin grafikleri



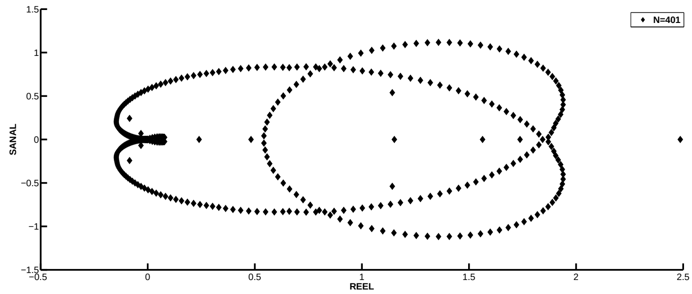
Şekil 3.28: Dalga oluşumunda $N = 101$ için Kuintik B-spline DQM yöntemi ile elde edilen özdeğerlerin grafikleri



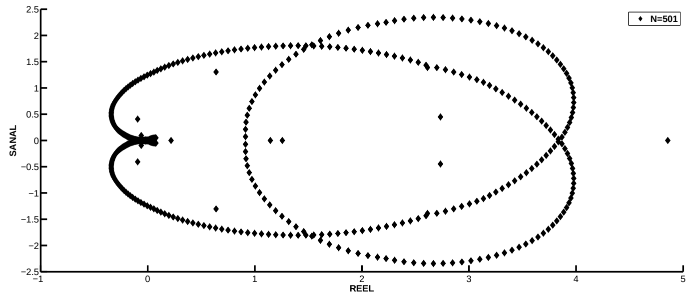
Şekil 3.29: Dalga oluşumunda $N = 201$ için Kuintik B-spline DQM yöntemi ile elde edilen özdeğerlerin grafikleri



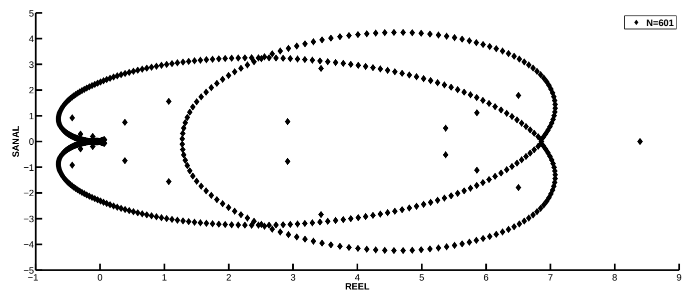
Şekil 3.30: Dalga oluşumunda $N = 301$ için Kuintik B-spline DQM yöntemi ile elde edilen özdeğerlerin grafikleri



Şekil 3.31: Dalga oluşumunda $N = 401$ için Kuintik B-spline DQM yöntemi ile elde edilen özdeğerlerin grafikleri



Şekil 3.32: Dalga oluşumunda $N = 501$ için Kuintik B-spline DQM yöntemi ile elde edilen özdeğerlerin grafikleri



Şekil 3.33: Dalga oluşumunda $N = 601$ için Kuintik B-spline DQM yöntemi ile elde edilen özdeğerlerin grafikleri

3.3.5 Sonuç

Bu bölümde, mKdV denklemi Kuintik B-spline DQM yöntemi ile çözüldü. Kuintik B-spline DQM yöntemi ile farklı başlangıç ve sınır şartları ile verilen dört test probleme ait nümerik çözümler elde edildi. Elde edilen L_2 ve L_∞ hata normları ile I_1, I_2 ve I_3 korunum sabitlerine ait sonuçlar literatürdeki bazı sonuçlarla karşılaştırılarak tablolar halinde verildi. Analitik çözümü bulunan test problemde yakınsama oran analizi yapıldı ve elde edilen sonuçlar tablo halinde verildi. Kuintik B-spline DQM 'un kararlılık analizi matris kararlılık analizi ile her dört test probleme ait özdeğerler elde edilerek ve tablolar halinde verilerek yapıldı. Elde edilen özdeğerlerin grafikleri verildi ve sonuçların kararlılık kriterleri ile uyumlu olduğu görüldü. DQM ile çözüm elde edilirken daha az düğüm nokta sayısı kullanılarak çözüm elde etmek gibi bir avantaja sahip olmasına karşın küçük zaman adımı kullanılması gibi bir zorunluluk ortaya çıkmaktadır. Bu durum sebebiyle sonlu elemanlar, sonlu farklar vb. metotlar ile elde edilen çözümlerle karşılaştırma yapılırken farklı düğüm nokta sayısı ve zaman adımı ile karşılaştırma yapma ihtiyacı doğdu. Tablolar incelendiğinde Soliton dalga çözümü için Kuintik B-spline DQM yöntemi ile seçtiğimiz değerlerle elde edilen sonuçların literatürdeki bazı sonuçlara göre daha iyi olduğu, iki Soliton dalganın girişimi probleminde elde edilen sonuçların karşılaştırıldığı sonuçlar ile uyumlu olduğu, ardışık dalgaların gelişimi probleminde elde edilen sonuçların karşılaştırılan sonuçlar ile uyumlu olduğu ve dalga oluşumu probleminde elde edilen sonuçların karşılaştırılan sonuçlardan daha iyi olduğu görüldü. Her bir probleme ait Kuintik B-spline DQM yöntemi ile elde edilen çözümlerin grafikleri verildi.

4. KdVB DENKLEMİNİN NÜMERİK ÇÖZÜMLERİ

Bu bölümde sırasıyla KdVB denkleminde mevcut olan KdV ve Burgers' denklemleri ile ana denklem olan KdVB denklemi incelenecektir.

4.1 KdV Denkleminin Ayrıştırılması

Bölüm 1 'de belirtildiği üzere, $\upsilon = 0$ alınırsa, (1.7.5) ile verilen KdVB denklemi

$$U_t + \varepsilon U U_x + \mu U_{xxx} = 0, \tag{4.1.1}$$

formuna sahip KdV denklemine dönüşür. Burada $U = U\left(x, t\right)$ konum değişkeni, x ve zaman değişkeni olan t 'nin bir fonksiyonudur. ε ve μ ise pozitif parametrelerdir. $[a, b]$ çözüm aralığının düzgün bir parçalanışı $a = x_1 < x_2 < ... < x_N = b$ ve $x_{i+1} = x_i + h$, $i = 1, ..., N-1$ olsun. KdV denklemi sınır şartları

$$U(a,t) = g_1\left(t\right), \qquad U(b,t) = g_2\left(t\right), \quad t \in (0, T], \tag{4.1.2}$$

ve başlangıç şartı

$$U(x,0) = f(x), \qquad a \le x \le b, \tag{4.1.3}$$

olmak üzere, (4.1.1) ile verilen KdV denkleminde U_t yalnız bırakılırsa

$$U_t = -\varepsilon U U_x - \mu U_{xxx}, \tag{4.1.4}$$

elde edilir. (4.1.4) denkleminde konum ayrıştırmaları için temel diferensiyel quadrature yaklaşımı kullanıldığında

$$S_2(U) = -\varepsilon U(x_i,t)\left[w_{i,1}^{(1)}g_1(t) + w_{i,N}^{(1)}g_2(t)\right] - \mu\left[w_{i,1}^{(3)}g_1(t) + w_{i,N}^{(3)}g_2(t)\right] \tag{4.1.5}$$

olmak üzere

$$\frac{dU(x_i,t)}{dt} = -\varepsilon U(x_i,t)\sum_{j=2}^{N-1} w_{i,j}^{(1)}U(x_j,t) - \mu\sum_{j=2}^{N-1} w_{i,j}^{(3)}U(x_j,t) + S_2(U),$$
$$i = 2,3,...,N-1 \tag{4.1.6}$$

şeklinde adi diferensiyel denklem sistemi elde edilir. (4.1.6) denklem sisteminin zaman integrasyonu dördüncü mertebe Runge-Kutta metodu ile yapılarak nümerik çözüm elde edilir.

4.2 Burgers' Denkleminin Ayrıştırılması

Yine bölüm 1 'de belirtildiği üzere, eğer $\mu = 0$ alınırsa, (1.7.5) ile verilen KdVB denklemi

$$U_t + \varepsilon UU_x - \upsilon U_{xx} = 0, \tag{4.2.1}$$

formuna sahip Burgers' denklemine dönüşür. Burada $U = U(x,t)$ konum değişkeni, x ve zaman değişkeni olan t 'nin bir fonksiyonudur. ε ve υ ise pozitif parametrelerdir. $[a,b]$ çözüm aralığının düzgün bir parçalanışı $a = x_1 < x_2 < ... < x_N = b$ ve $x_{i+1} = x_i + h$, $i = 1,...,N-1$ olsun. Burgers' denkleminin sınır şartları

$$U(a,t) = g_1(t), \qquad U(b,t) = g_2(t), \quad t \in (0,T], \tag{4.2.2}$$

ve başlangıç şartı

$$U(x,0) = f(x), \qquad a \le x \le b, \tag{4.2.3}$$

olmak üzere, (4.2.1) ile verilen Burgers' denkleminde U_t yalnız bırakılırsa

$$U_t = -\varepsilon U U_x + \upsilon U_{xx}, \tag{4.2.4}$$

elde edilir. (4.2.4) denkleminde konum ayrıştırmaları için temel diferensiyel quadrature yaklaşımı kullanıldığında

$$S_3(U) = -\varepsilon U(x_i,t)\left[w_{i,1}^{(1)} g_1(t) + w_{i,N}^{(1)} g_2(t)\right] + \upsilon\left[w_{i,1}^{(2)} g_1(t) + w_{i,N}^{(2)} g_2(t)\right] \tag{4.2.5}$$

olmak üzere

$$\frac{dU(x_i,t)}{dt} = -\varepsilon U(x_i,t)\sum_{j=2}^{N-1} w_{i,j}^{(1)} U(x_j,t) + \upsilon\sum_{j=2}^{N-1} w_{i,j}^{(2)} U(x_j,t) + S_3(U),$$
$$i = 2,3,...,N-1 \tag{4.2.6}$$

şeklinde adi diferensiyel denklem sistemi elde edilir. (4.2.6) denklem sisteminin zaman integrasyonu dördüncü mertebe Runge-Kutta metodu ile yapılarak nümerik çözüm elde edilir.

4.3 KdVB Denkleminin Ayrıştırılması

$[a,b]$ çözüm aralığının düzgün bir parçalanışı $a = x_1 < x_2 < ... < x_N = b$ ve $x_{i+1} = x_i + h$, $i = 1,...,N-1$ olsun. KdVB denkleminin sınır şartları

$$U(a,t) = g_1(t), \qquad U(b,t) = g_2(t), \quad t \in (0,T], \tag{4.3.1}$$

ve başlangıç şartı

$$U(x,0) = f(x), \qquad a \le x \le b, \tag{4.3.2}$$

olmak üzere

$$U_t + \varepsilon U U_x - \upsilon U_{xx} + \mu U_{xxx} = 0, \tag{4.3.3}$$

şeklindedir. Burada $U = U(x,t)$ konum değişkeni, x ve zaman değişkeni olan t 'nin bir fonksiyonudur. ε, υ ve μ ise pozitif parametrelerdir. (4.3.3) denkleminde U_t yalnız bırakılırsa

$$U_t = -\varepsilon U U_x + \upsilon U_{xx} - \mu U_{xxx} \tag{4.3.4}$$

elde edilir. (4.3.4) denkleminde konum ayrıştırmaları için temel diferensiyel quadrature yaklaşımı kullanıldığında

$$\begin{aligned} S_4(U) = &-\varepsilon U(x_i,t)\left[w_{i,1}^{(1)} g_1(t) + w_{i,N}^{(1)} g_2(t)\right] + \upsilon\left[w_{i,1}^{(2)} g_1(t) + w_{i,N}^{(2)} g_2(t)\right] \\ &- \mu\left[w_{i,1}^{(3)} g_1(t) + w_{i,N}^{(3)} g_2(t)\right] \end{aligned} \tag{4.3.5}$$

olmak üzere

$$\begin{aligned} \frac{dU(x_i,t)}{dt} = &-\varepsilon U(x_i,t)\sum_{j=2}^{N-1} w_{i,j}^{(1)} U(x_j,t) + \upsilon \sum_{j=2}^{N-1} w_{i,j}^{(2)} U(x_j,t) \\ &- \mu \sum_{j=2}^{N-1} w_{i,j}^{(3)} U(x_j,t) + S_4(U), \qquad i = 2,3,...,N-1 \end{aligned} \tag{4.3.6}$$

şeklinde adi diferensiyel denklem sistemi elde edilir. (4.3.6) denklem sisteminin zaman integrasyonu dördüncü mertebe Runge-Kutta metodu ile yapılarak nümerik çözüm elde edilir. KdVB denklemine ait I_1, I_2 ve I_3 korunum sabitleri sırasıyla

$$I_1 = \int_a^b U dx, \quad I_2 = \int_a^b U^2 dx, \quad I_3 = \int_a^b \left[U^3 - \tfrac{3\mu}{\varepsilon}\left(U'\right)^2\right] dx$$

şeklinde hesaplanır.

4.4 Kararlılık Analizi

Bu kısımda KdV, Burgers' ve KdVB denklemlerinin kararlılık analizine değinilecektir. B-spline diferensiyel quadrature metodu KdV, Burgers' ve KdVB denklemleri nümerik çözüm algoritmasının kararlılık analizi, diferensiyel quadrature ile konum ayrıştırması yapılmış adi diferensiyel denklemlerin katsayı matrisinde lineer olmayan terimin lineerleştirilmesinin ardından özdeğerlerinin tespit edilmesi esasına dayanmaktadır.

4.4.1 KdV denkleminin Kararlılık Analizi

(4.1.6) eşitliğinde yer alan $U(x_i) = \alpha_i$ (α_i sabit) olarak alındığında A_2 katsayı matrisi

$$A_2 = \begin{bmatrix} -\varepsilon\alpha_2 w_{2,2}^{(1)} - \mu w_{2,2}^{(3)} & \cdots & -\varepsilon\alpha_2 w_{2,N-1}^{(1)} - \mu w_{2,N-1}^{(3)} \\ -\varepsilon\alpha_3 w_{3,2}^{(1)} - \mu w_{3,2}^{(3)} & \cdots & -\varepsilon\alpha_3 w_{3,N-1}^{(1)} - \mu w_{3,N-1}^{(3)} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ -\varepsilon\alpha_{N-1} w_{N-1,2}^{(1)} - \mu w_{N-1,2}^{(3)} & \cdots & -\varepsilon\alpha_{N-1} w_{N-1,N-1}^{(1)} - \mu w_{N-1,N-1}^{(3)} \end{bmatrix} \tag{4.4.1}$$

olmak üzere

$$\begin{bmatrix} \frac{dU(x_2,t)}{dt} \\ \frac{dU(x_3,t)}{dt} \\ \vdots \\ \frac{dU(x_{N-1},t)}{dt} \end{bmatrix} = A_2 \begin{bmatrix} U(x_j,t) \\ U(x_j,t) \\ \vdots \\ U(x_j,t) \end{bmatrix} + S_2(U) \tag{4.4.2}$$

şeklinde bir matris formuna sahiptir. Sınır şartları ve denklemin homojen olmayan bölümünden gelen $S_2(U)$ vektörünün kararlılığa herhangi bir etkisi bulunmamaktadır. A_2 matrisinin özdeğerlerinin durumuna göre metodun kararlılığı değerlendirilir.

4.4.2 Burgers' denkleminin Kararlılık Analizi

(4.2.6) eşitliğinde yer alan $U(x_i) = \alpha_i$ (α_i sabit) olarak alındığında A_3 katsayı matrisi

$$A_3 = \begin{bmatrix} -\varepsilon\alpha_2 w^{(1)}_{2,2} + \upsilon w^{(2)}_{2,2} & \cdots & -\varepsilon\alpha_2 w^{(1)}_{2,N-1} + \upsilon w^{(2)}_{2,N-1} \\ -\varepsilon\alpha_3 w^{(1)}_{3,2} + \upsilon w^{(2)}_{3,2} & \cdots & -\varepsilon\alpha_3 w^{(1)}_{3,N-1} + \upsilon w^{(2)}_{3,N-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ -\varepsilon\alpha_{N-1} w^{(1)}_{N-1,2} + \upsilon w^{(2)}_{N-1,2} & \cdots & -\varepsilon\alpha_{N-1} w^{(1)}_{N-1,N-1} + \upsilon w^{(2)}_{N-1,N-1} \end{bmatrix} \tag{4.4.3}$$

olmak üzere

$$\begin{bmatrix} \frac{dU(x_2,t)}{dt} \\ \frac{dU(x_3,t)}{dt} \\ \vdots \\ \frac{dU(x_{N-1},t)}{dt} \end{bmatrix} = A_3 \begin{bmatrix} U(x_j,t) \\ U(x_j,t) \\ \vdots \\ U(x_j,t) \end{bmatrix} + S_3(U) \tag{4.4.4}$$

şeklinde bir matris formuna sahiptir. Sınır şartları ve denklemin homojen olmayan bölümünden gelen $S_3(U)$ vektörünün kararlılığa herhangi bir etkisi bulunmamaktadır. A_3 matrisinin özdeğerlerinin durumuna göre metodun kararlılığı değerlendirilir.

4.4.3 KdVB denkleminin Kararlılık Analizi

(4.3.6) eşitliğinde yer alan $U(x_i) = \alpha_i$ (α_i sabit) olarak alındığında A_4 katsayı matrisi

$$
\begin{aligned}
k_{1,1} &= -\varepsilon\alpha_2 w_{2,2}^{(1)} + \upsilon w_{2,2}^{(2)} - \mu w_{2,2}^{(3)}, \\
k_{2,1} &= -\varepsilon\alpha_3 w_{3,2}^{(1)} + \upsilon w_{3,2}^{(2)} - \mu w_{3,2}^{(3)}, \\
k_{N-2,1} &= -\varepsilon\alpha_{N-1} w_{N-1,2}^{(1)} + \upsilon w_{N-1,2}^{(2)} - \mu w_{N-1,2}^{(3)}, \\
k_{1,2} &= -\varepsilon\alpha_2 w_{2,3}^{(1)} + \upsilon w_{2,3}^{(2)} - \mu w_{2,3}^{(3)}, \\
k_{2,2} &= -\varepsilon\alpha_3 w_{3,3}^{(1)} + \upsilon w_{3,3}^{(2)} - \mu w_{3,3}^{(3)}, \\
k_{N-2,2} &= -\varepsilon\alpha_{N-1} w_{N-1,3}^{(1)} + \upsilon w_{N-1,3}^{(2)} - \mu w_{N-1,3}^{(3)}, \\
k_{1,N-2} &= -\varepsilon\alpha_2 w_{2,N-1}^{(1)} + \upsilon w_{2,N-1}^{(2)} - \mu w_{2,N-1}^{(3)}, \\
k_{2,N-2} &= -\varepsilon\alpha_3 w_{3,N-1}^{(1)} + \upsilon w_{3,N-1}^{(2)} - \mu w_{3,N-1}^{(3)}, \\
k_{N-2,N-2} &= -\varepsilon\alpha_{N-1} w_{N-1,N-1}^{(1)} + \upsilon w_{N-1,N-1}^{(2)} - \mu w_{N-1,N-1}^{(3)},
\end{aligned}
$$

olmak üzere

$$
A_4 = \begin{bmatrix} k_{1,1} & k_{1,2} & \cdots & k_{1,N-2} \\ k_{2,1} & k_{2,2} & \cdots & k_{2,N-2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ k_{N-2,1} & k_{N-2,2} & \cdots & k_{N-2,N-2} \end{bmatrix} \tag{4.4.5}
$$

matrisi ile

$$
\begin{bmatrix} \frac{dU(x_2,t)}{dt} \\ \frac{dU(x_3,t)}{dt} \\ \vdots \\ \frac{dU(x_{N-1},t)}{dt} \end{bmatrix} = A_4 \begin{bmatrix} U(x_j,t) \\ U(x_j,t) \\ \vdots \\ U(x_j,t) \end{bmatrix} + S_4(U) \tag{4.4.6}
$$

şeklinde bir matris formuna sahiptir. Sınır şartları ve denklemin homojen olmayan bölümünden gelen $S_4(U)$ vektörünün kararlılığa herhangi bir etkisi bulunmamaktadır. A_4 matrisinin özdeğerlerinin durumuna göre metodun kararlılığı değerlendirilir.

4.5 Test Problemler

Bu bölümde, KdVB KdV denkleminin 2, Burgers' denkleminin 1 ve ana denklem olan KdVB denkleminin 1 olmak üzere toplam 4 test problemi için nümerik çözümler araştırılacaktır. Mevcut metodun doğruluğunu test etmek için kararlılık analizi, yakınsama oran analizi ve daha önce yapılan çalışmalar ile karşılaştırmalar yapılacaktır.

4.5.1 Solitary Dalga Çözümü

KdV denklemine ait ilk test problem olarak, A, C ve D reel sabitler olmak üzere,

$$U(x,0) = 3C \sec h^2 \left(AX + D\right),$$

şeklinde başlangıç şartı ve

$$U(0,t) = U(2,t) = 0$$

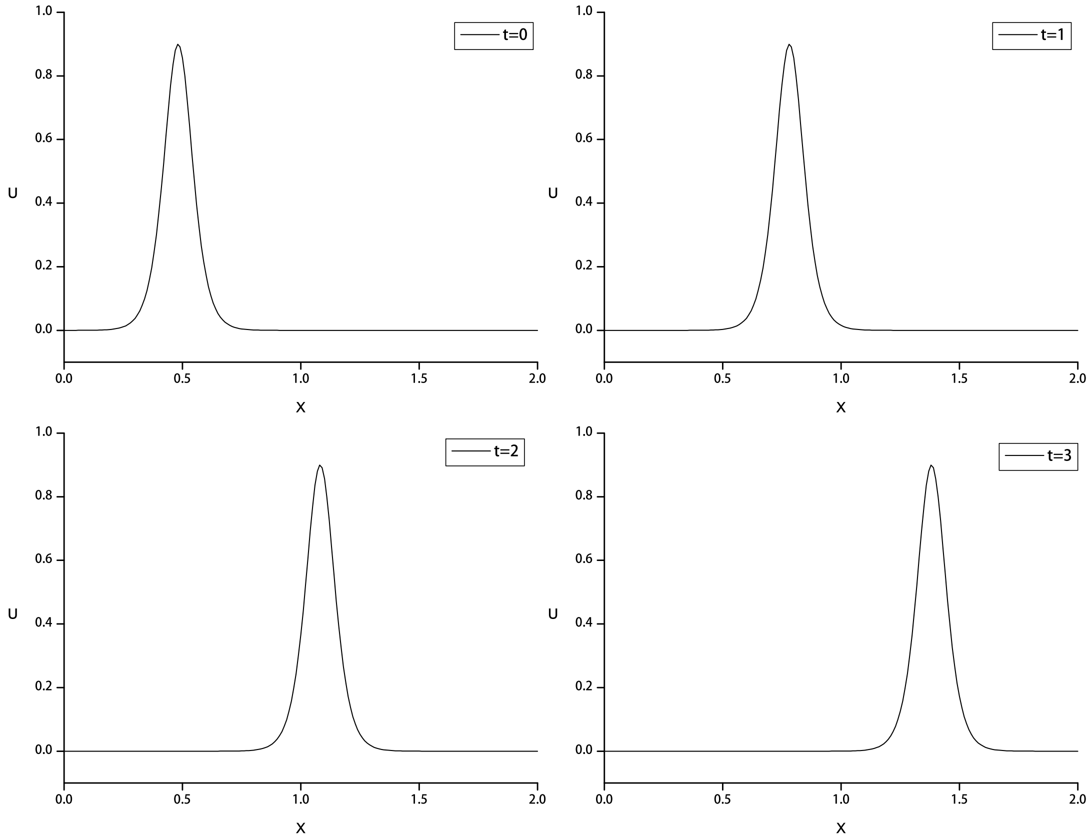
sınır şartları ile ele alındı. Bu problemin analitik çözümü

$$A = \frac{1}{2}\left(\varepsilon C/\mu\right)^{1/2} \quad \text{ve} \quad B = \frac{1}{2}\varepsilon C\left(\varepsilon C/\mu\right)^{1/2},$$

olmak üzere

$$U(x,t) = 3C \sec h^2 \left(AX - Bt + D\right)$$

şeklindedir. Bu başlangıç şartı ile elde edilen simülasyonda εC hızıyla sağa doğru hareket eden bir tek dalga görülmektedir. Daha önceki çalışmalar ile karşılaştırma yapabilmek için $\upsilon = 0$, $\varepsilon = 1$, $\mu = 4.84 \times 10^{-4}$, $C = 0.3$, $D = -6$, $\Delta t = 0.001$ ve $N = 201$ seçildi. $\Delta t = 0.001$ ve $N = 101$ kullanılarak $t = 0$ 'dan $t = 3$ 'e kadar elde edilen grafikler Şekil 4.1 'de verildi. Ayrıca simülasyon boyunca elde edilen L_2 ve L_∞ hata normları Tablo 4.1 'de daha önceki çalışmalar ile karşılaştırılarak verildi. Elde edilen I_1, I_2 ve I_3 korunum sabitleri ise, önceki çalışmalardan [15] numaralı referans ile karşılaştırılarak Tablo 4.2 'de verildi. Tablo 4.2 'deki verilere bakılarak I_1, I_2 ve I_3 korunum sabitlerinin istenilen doğrulukta sabitler olduğu söylenebilir. Tablo 4.1 'de görüldüğü üzere $t = 1$ zamanında L_2 hata normu 2.3×10^{-4} 'den daha az iken L_∞ hata normu ise, 7.4×10^{-4} 'den daha az olduğu anlaşılmaktadır. Dolayısıyla, hata normlarının istenilen küçüklükte olduğu söylenebilir.



Şekil 4.1: Solitary dalganın $0 \leq x \leq 2$ aralığında farklı zamanlarda, $\mu = 4.84 \times 10^{-4}$, $\varepsilon = 1$, $\Delta t = 0.001$ ve $N = 101$ değerleri için elde edilen çözümlerin grafikleri

$\Delta t = 0.0005$ ve $N = 201$ kullanılarak $t = 0$ 'dan $t = 3$ 'e kadar elde edilen I_1, I_2 ve I_3 korunum sabitleri ile L_2 ve L_∞ hata normları Tablo 4.3 'de verildi. Tablo 4.3 'deki verilerden anlaşıldığı üzere I_1, I_2 ve I_3 korunum sabitleri, başlangıçtaki orijinal değerlerine oranla sırasıyla % 0.00097, % 0.000093 ve % 0.00015 den daha az değişim gösterdiği görüldü. Elde edilen sonuçların istenilen seviyede olduğu düşünülebilir.

Tablo 4.1: Solitary dalganın $\varepsilon = 1$ ve $\mu = 4.84 \times 10^{-4}$ değerleri için elde edilen L_2 ve L_∞ hata normları

			t		
$L_2 \times 10^6$ hata normu	N	Δt	1.0	2.0	3.0
Kuintik B-spline DQM	101	0.001	227.1	354.5	485.2
LPDQ[15]	100	0.001	1185.0	1290.0	1381.0
Galerkin Kuad-spline[39]	200	0.005	600.0	860.0	107.0
RBF Coll IMQ[65]	200	0.005			2751.0
RBF Coll IQ[65]	200	0.005			1013.0
RBF Coll TPS[65]	200	0.005			2606.0
Septik spline Koll.[66]	200	0.005	22100.0		
			t		
$L_\infty \times 10^5$ hata normu	N	Δt	1.0	2.0	3.0
Kuintik B-spline DQM	101	0.001	73.8	108.6	142.8
LPDQ[15]	100	0.001	274.5	224.0	242.2
RBF Coll IMQ[65]	200	0.005			501.8
RBF Coll IQ[65]	200	0.005			200.0
RBF Coll TPS[65]	200	0.005			634.5

Tablo 4.3 'de görüldüğü üzere $t = 3$ zamanında L_2 hata normu 3.3×10^{-5} 'den daha az iken L_∞ hata normu ise, 9.5×10^{-5} 'den daha az olmuştur. Bu sebeple, hata normları kabul edilebilir küçüklüktedir, denilebilir.

$\Delta t = 0.0001$ ve $N = 351$ kullanılarak $t = 0$ 'dan $t = 3$ 'e kadar elde edilen I_1, I_2 ve I_3 korunum sabitleri ile L_2 ve L_∞ hata normları Tablo 4.4 'de verildi. Tablo 4.4 'deki verilere bakılarak I_1, I_2 ve I_3 korunum sabitleri,başlangıçtaki orijinal değerlerine oranla sırasıyla % 0.00056, % 0.000024 ve % 0.000022 'den daha az değişim gösterdiği görüldü. Tablo 4.4 'de görüldüğü üzere $t = 3$ zamanında L_2 hata normu 3.3×10^{-6} 'dan daha az iken L_∞ hata normu ise, 9.2×10^{-6} 'dan daha az olduğu görüldü. Bu sebeple, hata normları kabul edilebilir küçüklüktedir, denilebilir.

Önerilen metodun nümerik olarak yakınsama oranı farklı düğüm nokta sayıları

Tablo 4.2: Solitary dalganın $\Delta t = 0.001$ ve $N = 101$ değerleri için elde edilen korunum sabitleri

	Kuintik B-spline DQM			LPDQ[15]		
t	$I_1 \times 10^1$	$I_2 \times 10^2$	$I_3 \times 10^2$	$I_1 \times 10^1$	$I_2 \times 10^2$	$I_3 \times 10^2$
0	1.44598100	8.67592700	4.68502700	1.44597627	8.67592530	4.68499446
1	1.44591200	8.67592400	4.68502400	1.44229897	8.67613393	4.68501205
2	1.44600600	8.67592600	4.68502600	1.44245451	8.67615517	4.68501312
3	1.44609700	8.67592900	4.68502800	1.44461700	8.67617981	4.68501755

Tablo 4.3: Solitary dalganın $\Delta t = 0.0005$ ve $N = 201$ değerleri için elde edilen korunum sabitleri ve hata normları

	Kuintik B-spline DQM				
t	I_1	I_2	I_3	$L_2 \times 10^3$	$L_\infty \times 10^3$
0	0.14459800	0.08675924	0.04685002	0.00000	0.00000
1	0.14459870	0.08675927	0.04685003	0.01419	0.04496
2	0.14459930	0.08675931	0.04685005	0.02284	0.07074
3	0.14459940	0.08675932	0.04685009	0.03219	0.09493

için hesaplanarak Tablo 4.5 'de gösterildi. $\Delta t = 0.0001$ zaman adımı ile yapılan test çözümlerinde yakınsama oranları genel olarak $[3.85, 4.26]$ aralığında oluştuğu görüldü.

KdV denkleminin $t = 3$ 'deki hata normu grafiği Şekil 4.2 'de verildi.

Kararlılık analizi için özdeğerler farklı düğüm nokta sayıları için araştırıldı. $N = 101$, $N = 151$, $N = 201$, $N = 251$, $N = 301$ ve $N = 351$ için elde edilen özdeğerlerin reel ve sanal kısımlarını gösteren grafikler Şekil 4.3$-$4.8 'de verildi. Farklı düğüm nokta sayısına göre elde edilen özdeğerler içerisinde sadece reel kısımdan oluşan özdeğerler olduğu gibi reel ve sanal bileşenlere sahip özdeğerlerin de mevcut olduğu görüldü. Elde edilen özdeğerlerin birinci bölümde anlatılan kararlılık kriterleri

Tablo 4.4: Solitary dalganın $\Delta t = 0.0001$ ve $N = 351$ değerleri için elde edilen korunum sabitleri ve hata normları

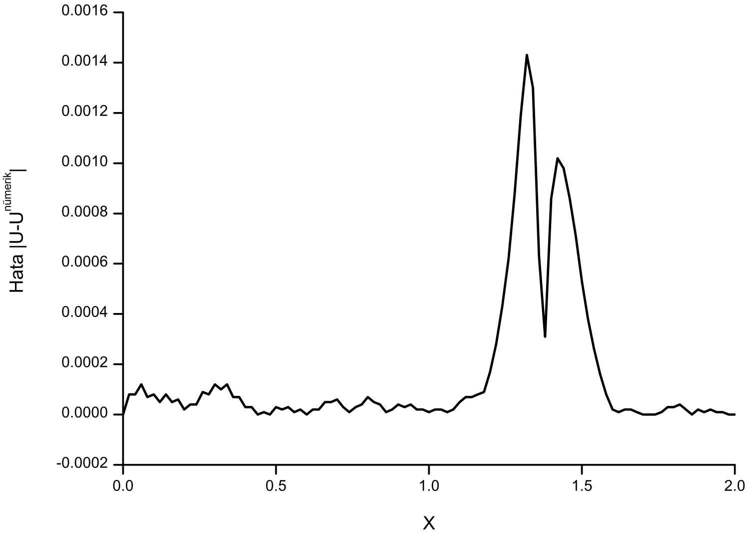
		Kuintik B-spline DQM			
t	I_1	I_2	I_3	$L_2 \times 10^3$	$L_\infty \times 10^3$
0	0.14459790	0.08675925	0.04685000	0.00000	0.00000
1	0.14459880	0.08675923	0.04685000	0.00268	0.00540
2	0.14459870	0.08675924	0.04684998	0.00278	0.00694
3	0.14459870	0.08675927	0.04685001	0.00327	0.00918

Tablo 4.5: Solitary dalganın $t = 3$ zamanında farklı düğüm nokta sayıları için elde edilen hata normları ve yakınsama oranları

N	$L_2 \times 10^3$	$YO\,(L_2)$	$L_\infty \times 10^3$	$YO\,(L_\infty)$
101	0.48596	-	1.39790	-
121	0.23534	4.01	0.66996	4.07
151	0.09729	3.99	0.27583	4.01
201	0.03172	3.92	0.09179	3.85
251	0.01271	4.12	0.03794	3.98
301	0.00594	4.19	0.01751	4.26
351	0.00327	3.88	0.00918	4.20

ile uyumlu olduğu görüldü.

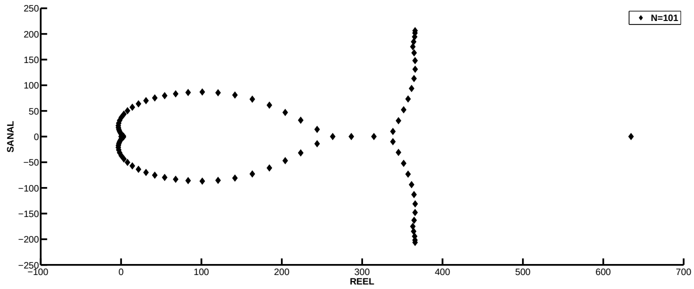
Tablo 4.6 'da farklı düğüm nokta sayılarında mutlak değeri en büyük özdeğerlerin reel ve sanal bileşenleri verildi. $N = 101$ için $\mid Re\,(\lambda_{\max}) \mid= 634.5736$, $N = 201$ için $\mid Re\,(\lambda_{\max}) \mid= 5077.2885$ ve $N = 351$ için $\mid Re\,(\lambda_{\max}) \mid= 27211.1013$ olarak bulundu. $N = 101$ için $\mid Sa\,(\lambda_{\max}) \mid= 206.3092$, $N = 201$ için $\mid Sa\,(\lambda_{\max}) \mid= 1888.4385$ ve $N = 351$ için $\mid Sa\,(\lambda_{\max}) \mid= 12200.1025$ olarak bulundu. B-spline diferensiyel quadrature metotlarda düğüm noktalarının sayısı arttıkça özdeğerlerinin mutlak değerlerinin de büyüdüğü görüldü. Bu durum, özdeğerlerin kararlılık aralığına taşınması için zaman adımı uzunluğunun azaltılması gerektiğini göstermektedir.



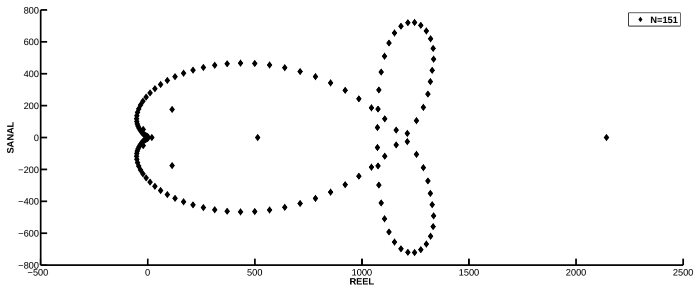
Şekil 4.2. Solitary dalganın $t = 3$ zamanında elde edilen hata normunun grafiği

Tablo 4.6: Solitary dalganın düğüm noktalarının sayılarına göre mutlak değeri en büyük özdeğerler

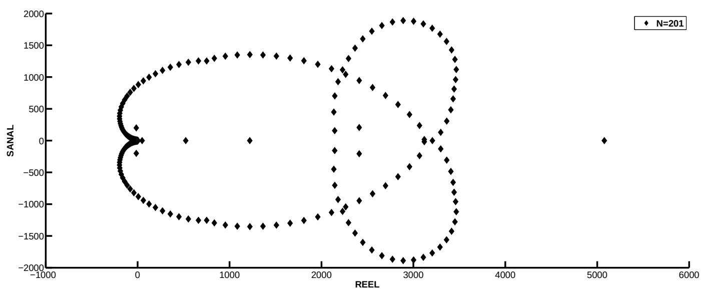
	Kuintik B-spline DQM					
Düğüm nokta sayısı	101	151	201	251	301	351
$\mid Re\,(\lambda_{\max})\mid$	634.5736	2141.9815	5077.2885	9916.5806	17135.8529	27211.1013
$\mid Sa\,(\lambda_{\max})\mid$	206.3092	721.3852	1888.4385	3984.7064	7298.2175	12200.1025



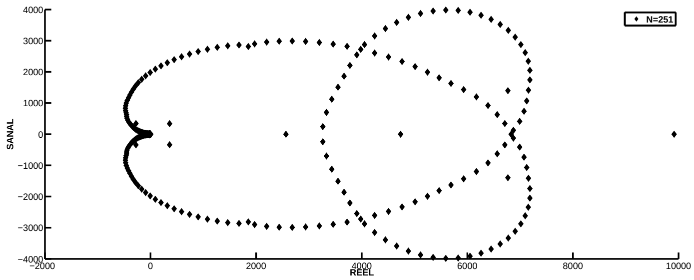
Şekil 4.3: Solitary dalganın $N = 101$ için Kuintik B-spline DQM yöntemi ile elde edilen özdeğerlerin grafikleri



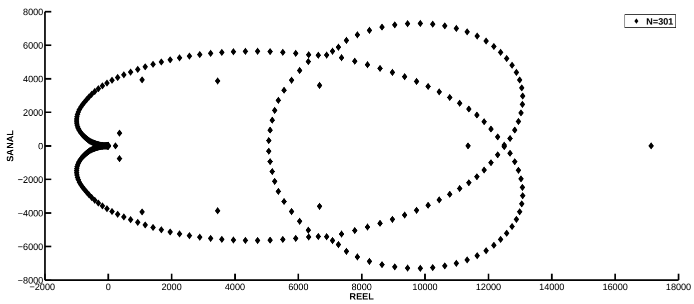
Şekil 4.4: Solitary dalganın $N = 151$ için Kuintik B-spline DQM yöntemi ile elde edilen özdeğerlerin grafikleri



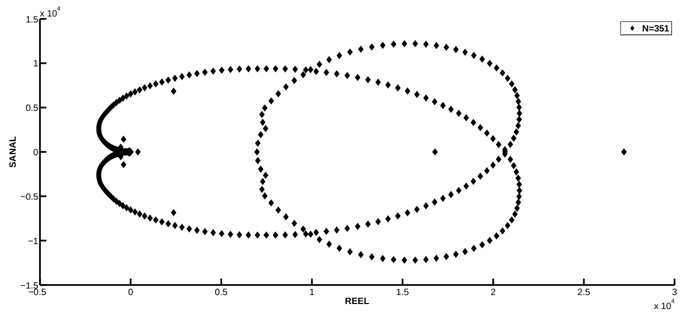
Şekil 4.5: Solitary dalganın $N = 201$ için Kuintik B-spline DQM yöntemi ile elde edilen özdeğerlerin grafikleri



Şekil 4.6: Solitary dalganın $N = 251$ için Kuintik B-spline DQM yöntemi ile elde edilen özdeğerlerin grafikleri



Şekil 4.7: Solitary dalganın $N = 301$ için Kuintik B-spline DQM yöntemi ile elde edilen özdeğerlerin grafikleri



Şekil 4.8: Solitary dalganın $N = 351$ için Kuintik B-spline DQM yöntemi ile elde edilen özdeğerlerin grafikleri

4.5.2 Dalga Oluşumu

KdV denklemine ait ikinci test problem olarak

$$U(x,0) = \exp\left(-x^2\right), \tag{4.5.1}$$

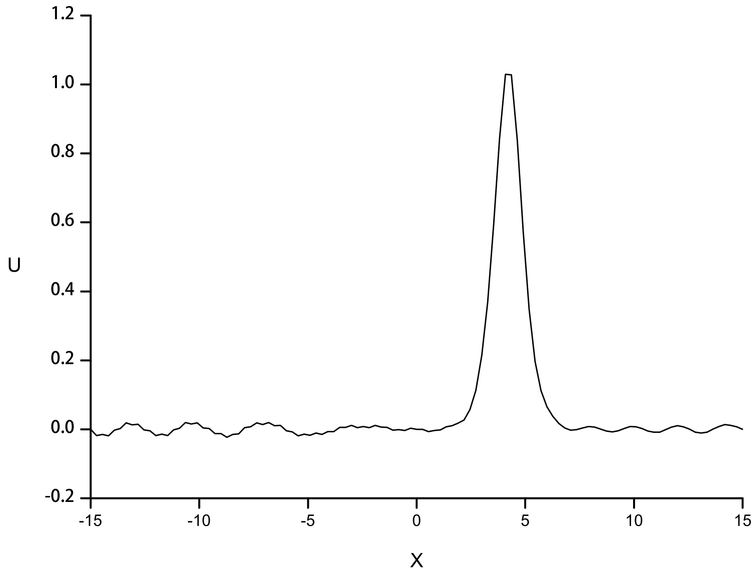
Maxwellian başlangıç şartı ve

$$U(-15,t) = U(15,t) = 0, \qquad t > 0$$

sınır şartları ile ele alındı. (4.5.1) ile verilen Maxwellian başlangıç şartı göz önüne alındığında çözüm vektörünün μ'nün kritik değerine bağlı olduğu ifade edilir ki; bu değer μ_c ile gösterilir [90]. Eğer $\mu \ll \mu_c$ alınırsa başlangıçtaki dalga, teorik formülü $N = 1/[(13\mu)^{1/2}]$ şeklinde olan N tane solitona ayrılır. Eğer $\mu \gg \mu_c$ alınırsa, başlangıçta herhangi bir solitona ayrılma görülmez ancak hızlı bir şekilde salınım yapan dalga grubu oluşur. Eğer $\mu \approx \mu_c$ alınırsa, çözümlerin bir karışımını andıran öncü soliton ve salınım yapan bir kuyruk oluşur. (4.5.1) denklemi için kritik μ değeri $\mu_c = 0.0625$ olarak elde edilmiştir [91]. Yapacağımız nümerik çözüm araştırmasında μ 'nün değeri μ_c 'den başlayıp azalan şekilde olacaktır. Simülasyonlarda hesaplamalar $\varepsilon = 1$ için μ 'nün 0.0625, 0.04, 0.03, 0.01, 0.006 değerleri alınarak $t = 12$ zamanına kadar yapıldı.

$\mu = 0.0625$ alındığında, Maxwellian başlangıç şartına ait sonuçta ardında kuyruk bulunmayan tek bir soliton dalga oluştu ve ilgili grafik Şekil 4.9 'da verildi. Bu durum μ'nün özel bir değerinden dolayı lineer olmama ve dispersif etkiler arası dengenin bir sonucudur [91]. $\mu = 0.04$ alındığında, bir solitary dalgaya ek olarak bir kuyruk oluştuğu görüldü ve ilgili grafik Şekil 4.10 'da verildi. $\mu = 0.03$ değerini seçtiğimizde ise, iki solitonun ortaya çıktığı görüldü ve ilgili grafik Şekil 4.11 'de verildi. $\mu = 0.01$

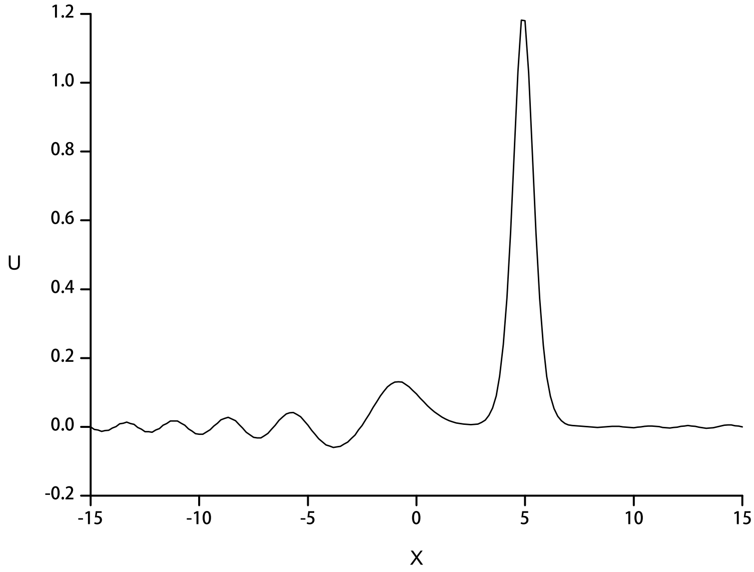
değerini kullandığımızda üç solitonun ortaya çıktığı görüldü ve ilgili grafik Şekil 4.12 'de verildi. Son olarak, $\mu = 0.006$ seçildiğinde dört soliton gözlendi ve ilgili grafik Şekil 4.13 'de verildi.



Şekil 4.9. Dalga oluşumunun $\mu = 0.0625$ değeri için elde edilen grafiği

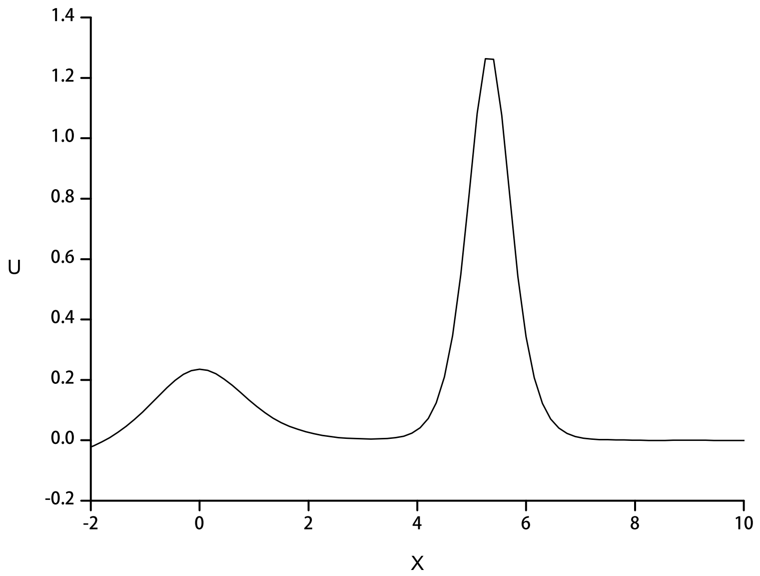
μ 'nün 0.0625, 0.04, 0.03, 0.01, 0.006 değerleri için hesaplanan I_1, I_2 ve I_3 korunum sabitleri Tablo 4.7 ve Tablo 4.8 'de verildi.

Kararlılık analizi için özdeğerler farklı düğüm nokta sayıları için araştırıldı. $N = 51$, $N = 101$, $N = 121$, $N = 151$, $N = 181$ ve $N = 201$ için elde edilen özdeğerlerin reel ve sanal kısımlarını gösteren grafikler Şekil 4.14−4.19 'da verildi. Farklı düğüm nokta sayısına göre elde edilen özdeğerler, sadece reel kısımdan oluşan özdeğerler olduğu gibi reel ve sanal bileşenlere sahip özdeğerlerin de mevcut olduğu görüldü. Elde edilen özdeğerlerin birinci bölümde anlatılan kararlılık kriterleri ile uyumlu olduğu görüldü.

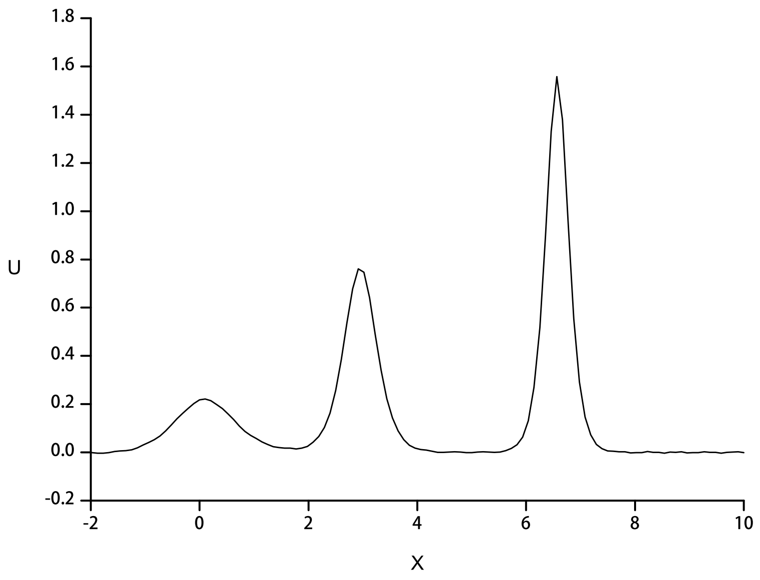


Şekil 4.10. Dalga oluşumunun $\mu = 0.04$ değeri için elde edilen grafiği

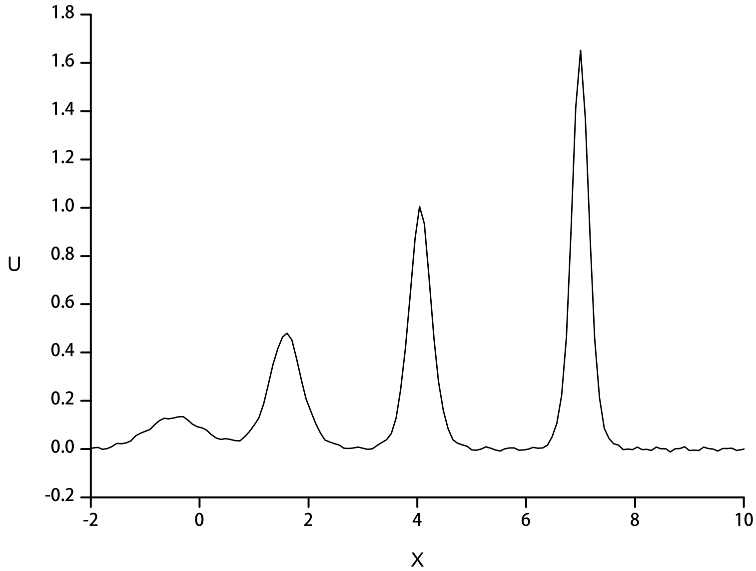
Tablo 4.9 'da farklı düğüm nokta sayılarında mutlak değeri en büyük özdeğerlerin reel ve sanal bileşenleri verildi. $N = 51$ için $\mid Re\,(\lambda_{\max}) \mid= 1.9426$, $N = 121$ için $\mid Re\,(\lambda_{\max}) \mid= 26.8551$ ve $N = 201$ için $\mid Re\,(\lambda_{\max}) \mid= 124.3291$ olarak bulundu. $N = 51$ için $\mid Sa\,(\lambda_{\max}) \mid= 0.5752$, $N = 121$ için $\mid Sa\,(\lambda_{\max}) \mid= 8.6413$ ve $N = 201$ için $\mid Sa\,(\lambda_{\max}) \mid= 45.7704$ olarak bulundu. B-spline diferensiyel quadrature metotlarda düğüm noktalarının sayısı arttıkça özdeğerlerinin mutlak değerlerinin de büyüdüğü görüldü. Bu durum, özdeğerlerin kararlılık aralığına taşınması için zaman adımı uzunluğunun azaltılması gerektiğini göstermektedir.



Şekil 4.11. Dalga oluşumunun $\mu = 0.03$ değeri için elde edilen grafiği



Şekil 4.12. Dalga oluşumunun $\mu = 0.01$ değeri için elde edilen grafiği



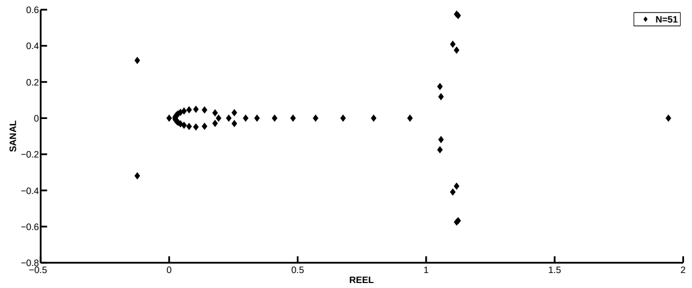
Şekil 4.13. Dalga oluşumunun $\mu = 0.006$ değeri için elde edilen grafiği

Tablo 4.7: Dalga oluşumunun $\upsilon = 0$, $\varepsilon = 1$ ile $\mu = 0.0625$, $\mu = 0.04$ ve $\mu = 0.03$ değerleri için elde edilen korunum sabitleri

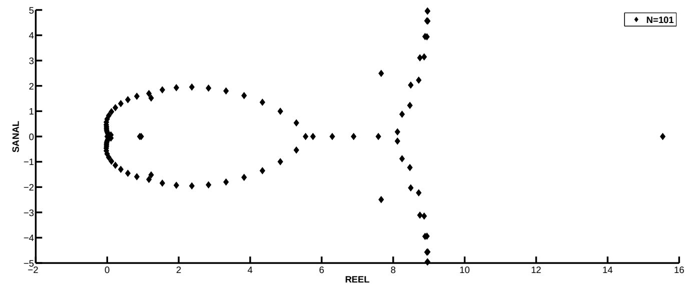
	$\mu = 0.0625$ ve $N = 111$			$\mu = 0.04$ ve $N = 181$			$\mu = 0.03$ ve $N = 201$		
t	I_1	I_2	I_3	I_1	I_2	I_3	I_1	I_2	I_3
0	1.77245	1.25331	0.78834	1.77245	1.25331	0.87293	1.77245	1.25331	0.91053
3	1.77228	1.25332	0.78823	1.77250	1.25332	0.87286	1.77245	1.25332	0.91044
6	1.77647	1.25338	0.78853	1.77219	1.25332	0.87286	1.77255	1.25332	0.91042
9	1.77771	1.25347	0.78903	1.77251	1.25332	0.87289	1.77248	1.25332	0.91043
12	1.76933	1.25316	0.78904	1.76887	1.25323	0.87303	1.77246	1.25331	0.91043

Tablo 4.8: Dalga oluşumunun $\upsilon = 0$, $\varepsilon = 1$ ile $\mu = 0.01$ ve $\mu = 0.006$ değerleri için elde edilen korunum sabitleri

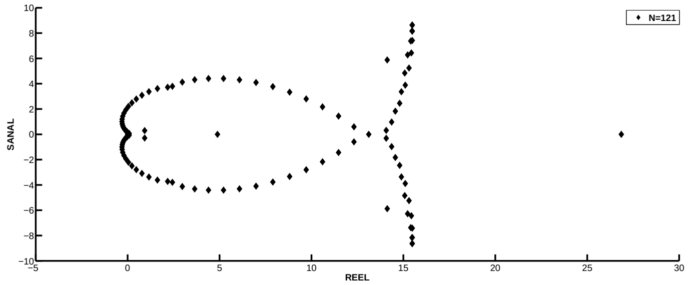
	$\mu = 0.01$ ve $N = 289$			$\mu = 0.006$ ve $N = 346$		
t	I_1	I_2	I_3	I_1	I_2	I_3
0	1.77245	1.25331	0.98573	1.77245	1.25331	1.00077
3	1.77236	1.25334	0.98552	1.77229	1.25345	1.00058
6	1.77259	1.25340	0.98549	1.77291	1.25410	1.00077
9	1.77243	1.25347	0.98550	1.77238	1.25475	1.00101
12	1.77259	1.25353	0.98555	1.77277	1.25530	1.00141



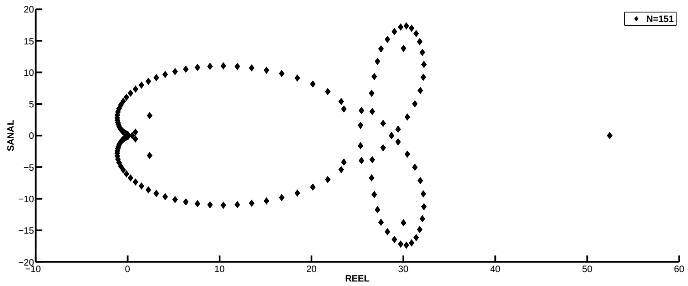
Şekil 4.14: Dalga oluşumunun $N = 51$ için Kuintik B-spline DQM yöntemi ile elde edilen özdeğerlerin grafikleri



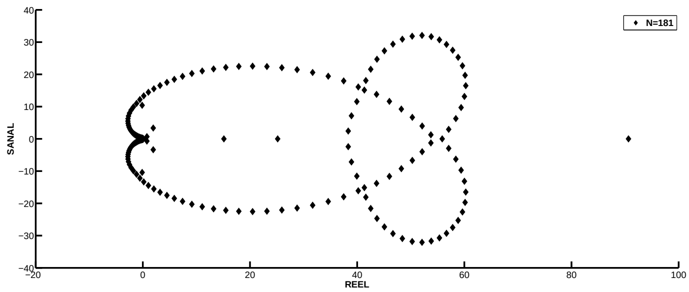
Şekil 4.15: Dalga oluşumunun $N = 101$ için Kuintik B-spline DQM yöntemi ile elde edilen özdeğerlerin grafikleri



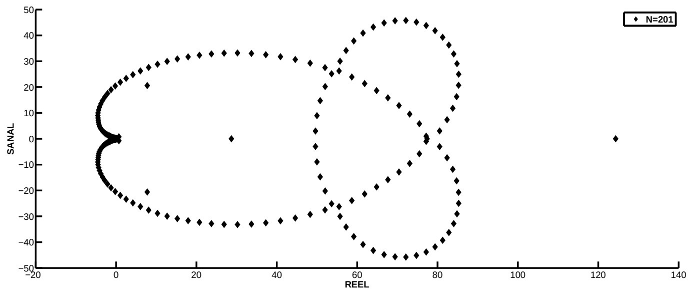
Şekil 4.16: Dalga oluşumunun $N = 121$ için Kuintik B-spline DQM yöntemi ile elde edilen özdeğerlerin grafikleri



Şekil 4.17: Dalga oluşumunun $N = 151$ için Kuintik B-spline DQM yöntemi ile elde edilen özdeğerlerin grafikleri



Şekil 4.18: Dalga oluşumunun $N = 181$ için Kuintik B-spline DQM yöntemi ile elde edilen özdeğerlerin grafikleri



Şekil 4.19: Dalga oluşumunun $N = 201$ için Kuintik B-spline DQM yöntemi ile elde edilen özdeğerlerin grafikleri

Tablo 4.9: Dalga oluşumunda düğüm noktalarının sayılarına göre mutlak değeri en büyük özdeğerler.

	Kuintik B-spline DQM					
Düğüm nokta sayısı	51	101	121	151	181	201
$\mid Re\,(\lambda_{\max})\mid$	1.9426	15.5411	26.8551	52.4514	90.6359	124.3291
$\mid Sa\,(\lambda_{\max})\mid$	0.5752	4.9581	8.6413	17.3597	32.0840	45.7704

4.5.3 Şok Benzeri Dalga

KdVB denkleminde (1.7.5) $\mu = 0$ alınarak elde edilen Burgers' denkleminin şok benzeri dalga çözümü analitik olarak $t_0 = exp(\frac{1}{8\upsilon})$ olmak üzere;

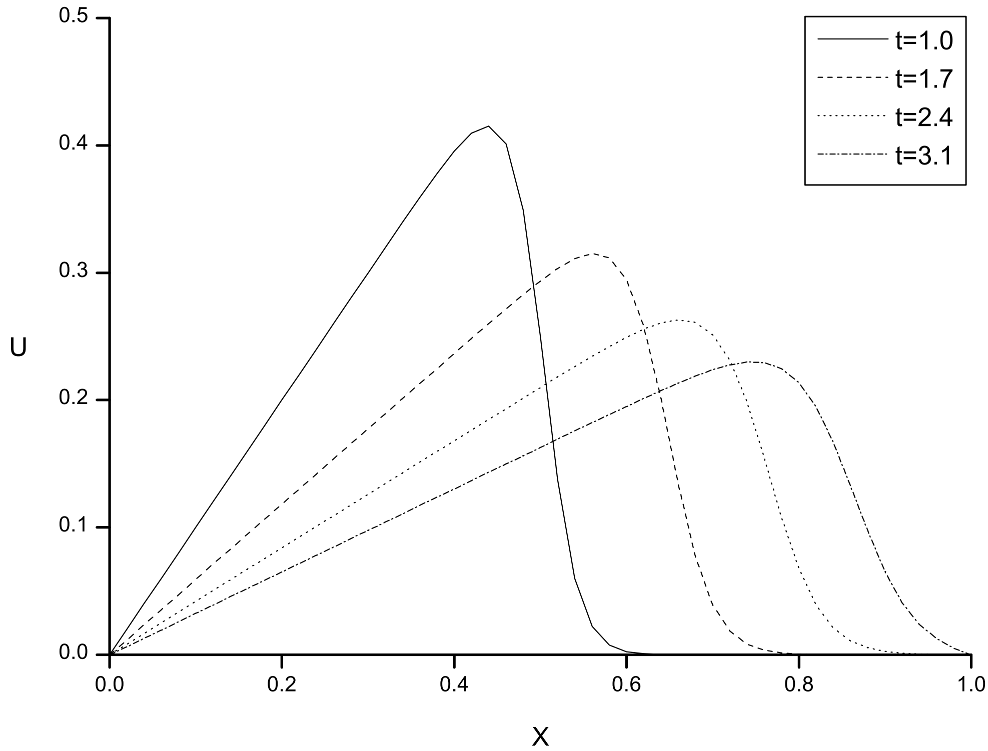
$$U(x,t) = \frac{x/t}{1 + \sqrt{t/t_0}\exp\left(x^2/4\upsilon t\right)}, \tag{4.5.2}$$

eşitliği ile verilmektedir. (4.5.2) denkleminin $t = 1$ değeri başlangıç şartı ve $a \leq x \leq b$ olmak üzere sınır şartları

$$U(a,t) = U(b,t) = 0, \qquad \forall t \geq 1 \tag{4.5.3}$$

olarak alınacaktır. (4.5.2) denkleminin tercih edilmesinin sebeplerinden biri analitik çözümün kolay hesaplanması bir diğeri ise, farklı υ değerleri için L_2 ve L_∞ hata normlarının hesaplanıp önceki çalışmalar ile karşılaştırılmasının mümkün olmasıdır. İlk olarak $0 \leq x \leq 1$ bölgesinde $\upsilon = 0.005$, $\varepsilon = 1$, $\mu = 0$, $\Delta t = 0.01$ ve $N = 51$ değerleri alınarak $t = 3.1$ 'e kadar program çalıştırıldı ve elde edilen grafik Şekil 4.20 'de verildi. Şok dalgaya ait en büyük genlik $t = 1$ zamanında ve en küçük genlik $t = 3.1$ zamanında ölçüldü. Elde edilen L_2 ve L_∞ hata normları daha önceki çalışmalar ile karşılaştırılarak Tablo 4.10 'da verildi. Kuintik B-spline diferensiyel quadrature metot ile kübik B-spline diferensiyel quadrature metotlarının sonuçlarını karşılaştırmak için, $0 \leq x \leq 1.2$ bölgesinde $\nu = 0.005$, $\varepsilon = 1$, $\mu = 0$ ve $\Delta t = 0.001$ değerleri kullanıldı. Ardından herbir yaklaşım için L_2 ve L_∞ hata normları karşılaştırılarak Tablo 4.11 'de verildi. Tablo 4.11 'deki karşılaştırmadan mevcut L_2 ve L_∞ hata normlarının önceki bazı çalışmalardan daha iyi olduğu söylenebilir.

$0 \leq x \leq 1$ aralığında $\nu = 0.005$, $\varepsilon = 1$, $\mu = 0$, $\Delta t = 0.01$ ve $N = 51$ değerleri için



Şekil 4.20: Şok benzeri dalganın $\upsilon = 0.005$, $\varepsilon = 1$, $\Delta t = 0.01$ ve $\Delta x = 0.02$ değerleri için elde edilen grafikleri

$t = 3.1$ zamanındaki mutlak hata ile $0 \leq x \leq 1.2$ bölgesinde $\nu = 0.005$, $\varepsilon = 1$, $\mu = 0$, $\Delta t = 0.001$ ve $N = 201$ değerleri için $t = 3.6$ zamanında elde edilen mutlak hatalar sırasıyla grafik Şekil 4.21 ve Şekil 4.22 'de verildi.

Kararlılık analizi için özdeğerler farklı düğüm nokta sayıları için araştırıldı. $N = 21$, $N = 31$, $N = 41$, $N = 51$, $N = 61$ ve $N = 81$ için elde edilen özdeğerlerin reel ve sanal kısımlarını gösteren grafikler Şekil $4.23 - 4.28$ 'de verildi. Farklı düğüm nokta sayısına göre elde edilen özdeğerler içerisinde sadece reel kısımdan oluşan özdeğerler olduğu gibi reel ve sanal bileşenlere sahip özdeğerlerin de mevcut olduğu görüldü. Elde edilen özdeğerlerin birinci bölümde anlatılan kararlılık kriterleri ile uyumlu olduğu

Tablo 4.10: Şok benzeri dalganın $0 \leq x \leq 1$ aralığında $\varepsilon = 1$, $\mu = 0$ ve $\upsilon = 0.005$ değerleri için elde edilen hata normları

$L_2 \times 10^3$ hata normu	N	Δt	t: 1.7	2.4	3.1
Kuintik B-spline DQM	51	0.01	0.069	0.056	0.430
Kübik. Koll [62]	50	0.01	0.857	0.423	0.230
Kuartik. Koll. direkt [92]	200	0.01	0.017	0.012	0.601
Kuartik. Koll. split [92]	200	0.01	0.358	0.251	0.630
			t		
$L_\infty \times 10^3$ hata normu	N	Δt	1.7	2.4	3.1
Kuintik B-spline DQM	51	0.01	0.433	0.312	2.635
Kübik. Koll [62]	50	0.01	2.576	1.242	0.688
Kuartik. Koll. direkt [92]	200	0.01	0.061	0.058	4.434
Kuartik. Koll. split [92]	200	0.01	1.211	0.807	4.790

görüldü.

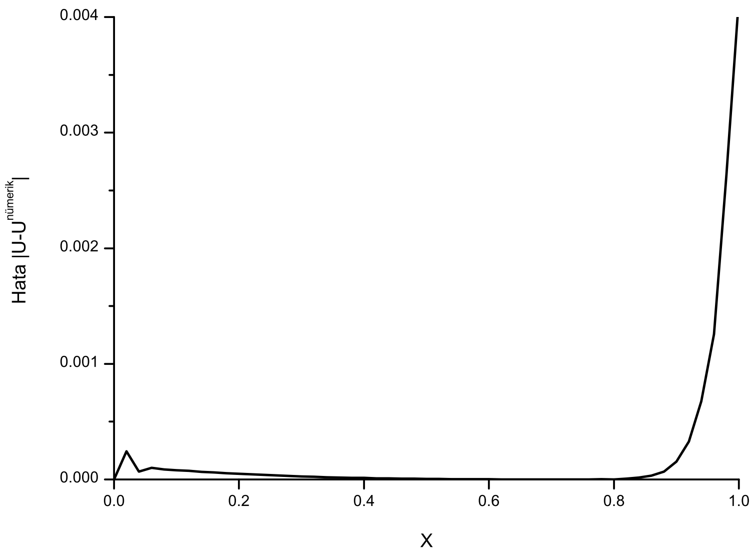
Tablo 4.12 'de farklı düğüm nokta sayılarında mutlak değeri en büyük özdeğerlerin reel ve sanal bileşenleri verildi. $N = 21$ için $\mid Re\,(\lambda_{\max}) \mid = 26.2145$, $N = 51$ için $\mid Re\,(\lambda_{\max}) \mid = 112.7876$ ve $N = 81$ için $\mid Re\,(\lambda_{\max}) \mid = 250.0014$ olarak bulundu. $N = 21$ için $\mid Sa\,(\lambda_{\max}) \mid = 1.1409$, $N = 51$ için $\mid Sa\,(\lambda_{\max}) \mid = 14.2103$ ve $N = 81$ için $\mid Sa\,(\lambda_{\max}) \mid = 66.0763$ olarak bulundu. B-spline diferensiyel quadrature metotlarda düğüm noktalarının sayısı arttıkça özdeğerlerin mutlak değerlerinin de büyüdüğü görüldü. Bu durum, özdeğerlerin kararlılık aralığına taşınması için zaman adımı uzunluğunun azaltılması gerektiğini göstermektedir.

Tablo 4.11: Şok benzeri dalganın $0 \leq x \leq 1.2$ aralığında $\upsilon = 0.005$, $\varepsilon = 1$, $\mu = 0$ ve $\Delta t = 0.001$ için elde edilen hata normları

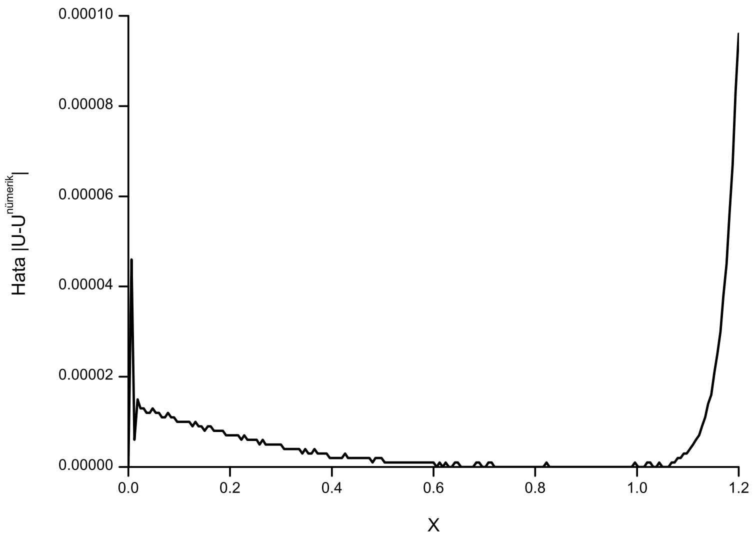
	Kuintik B-spline DQM		Kübik B-spline DQM [13]					
			Metot1		Metot2		Metot3	
N	$L_2 \times 10^3$	$L_\infty \times 10^3$	$L_2 \times 10^3$	$L_\infty \times 10^3$	$L_2 \times 10^3$	$L_\infty \times 10^3$	$L_2 \times 10^3$	$L_\infty \times 10^3$
21	0.71	2.00	1.64	3.10	1.41	3.29	7.05	11.6
31	0.42	1.31	1.00	2.13	0.79	2.22	0.94	1.73
41	0.30	0.97	0.70	1.61	0.57	1.68	0.92	1.48
61	0.19	0.62	0.44	1.07	0.37	1.12	0.26	0.95
81	0.13	0.44	0.31	0.77	0.27	0.83	0.20	0.76
101	0.09	0.33	0.23	0.59	0.21	0.64	0.16	0.63
121	0.07	0.25	0.18	0.46	0.16	0.52	0.14	0.54
151	0.04	0.15	0.12	0.32	0.12	0.39	0.11	0.45
161	0.03	0.13	0.11	0.28	0.11	0.35	0.10	0.43
201	0.01	0.08	0.06	0.16	0.07	0.24	0.09	0.36

Tablo 4.12: Şok benzeri dalgada düğüm noktalarının sayılarına göre mutlak değeri en büyük özdeğerler

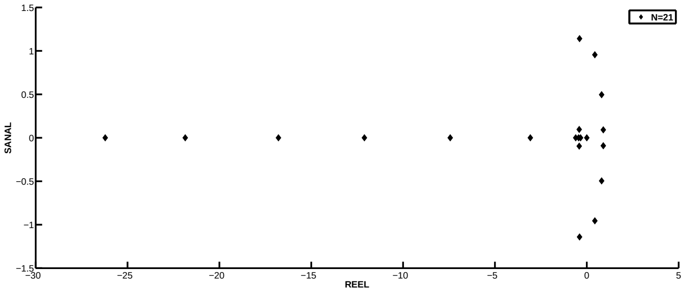
	Kuintik B-spline DQM					
Düğüm nokta sayısı	21	31	41	51	61	81
$\mid Re\,(\lambda_{\max}) \mid$	26.2145	49.1349	78.0907	112.7876	153.0618	250.0014
$\mid Sa\,(\lambda_{\max}) \mid$	1.1409	2.3961	6.6587	14.2103	26.5071	66.0763



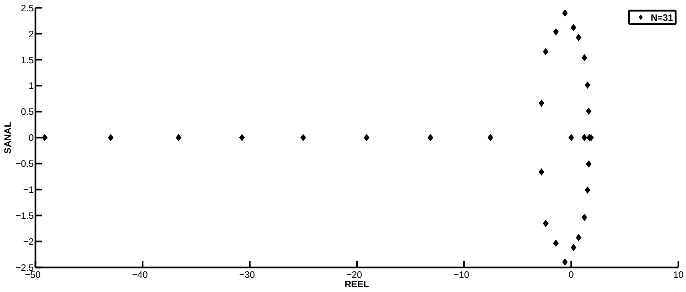
Şekil 4.21: Şok benzeri dalganın $t = 3.1$, $\upsilon = 0.005$, $\varepsilon = 1$, $\Delta t = 0.01$ ve $N = 51$ değerleri ile elde edilen mutlak hatanın grafiği



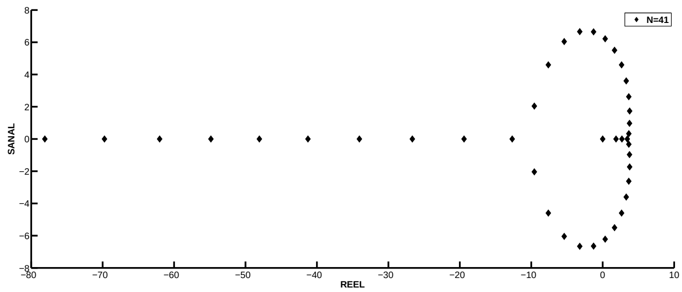
Şekil 4.22: Şok benzeri dalganın $t = 3.6$, $\upsilon = 0.005$, $\varepsilon = 1$, $\Delta t = 0.001$ ve $N = 201$ değerleri ile elde edilen mutlak hatanın grafiği



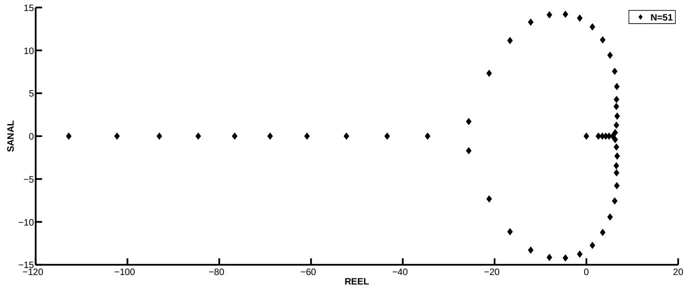
Şekil 4.23: Şok benzeri dalganın $N = 21$ için Kuintik B-spline DQM yöntemi ile elde edilen özdeğerlerinin grafikleri



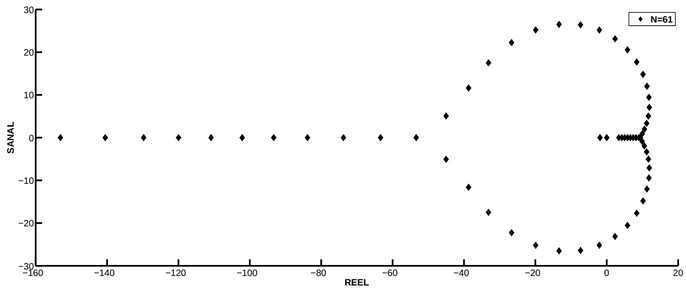
Şekil 4.24: Şok benzeri dalganın $N = 31$ için Kuintik B-spline DQM yöntemi ile elde edilen özdeğerlerinin grafikleri



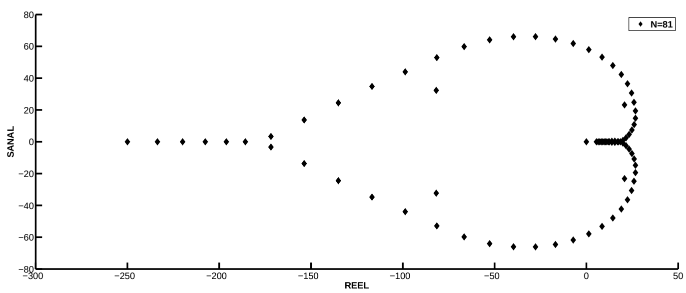
Şekil 4.25: Şok benzeri dalganın $N = 41$ için Kuintik B-spline DQM yöntemi ile elde edilen özdeğerlerinin grafikleri



Şekil 4.26: Şok benzeri dalganın $N = 51$ için Kuintik B-spline DQM yöntemi ile elde edilen özdeğerlerinin grafikleri



Şekil 4.27: Şok benzeri dalganın $N = 61$ için Kuintik B-spline DQM yöntemi ile elde edilen özdeğerlerinin grafikleri



Şekil 4.28: Şok benzeri dalganın $N = 81$ için Kuintik B-spline DQM yöntemi ile elde edilen özdeğerlerinin grafikleri

4.5.4 KdVB Tipi Dalga Çözümü

Son olarak, incelenecek olan denklem $\upsilon, \mu \neq 0$ olmak üzere

$$U_t + \varepsilon U U_x - \upsilon U_{xx} + \mu U_{xxx} = 0 \tag{4.5.4}$$

formuna sahip olan KdVB denklemidir. Burada, μ ve υ'nin farklı değerleri kullanılarak çözüm üzerindeki etkileri araştırılacaktır. Tüm simülasyonlarda $-50 \leq x \leq 150$, $d = 5$ ve $x_0 = 25$ değerleri kullanılacak olup

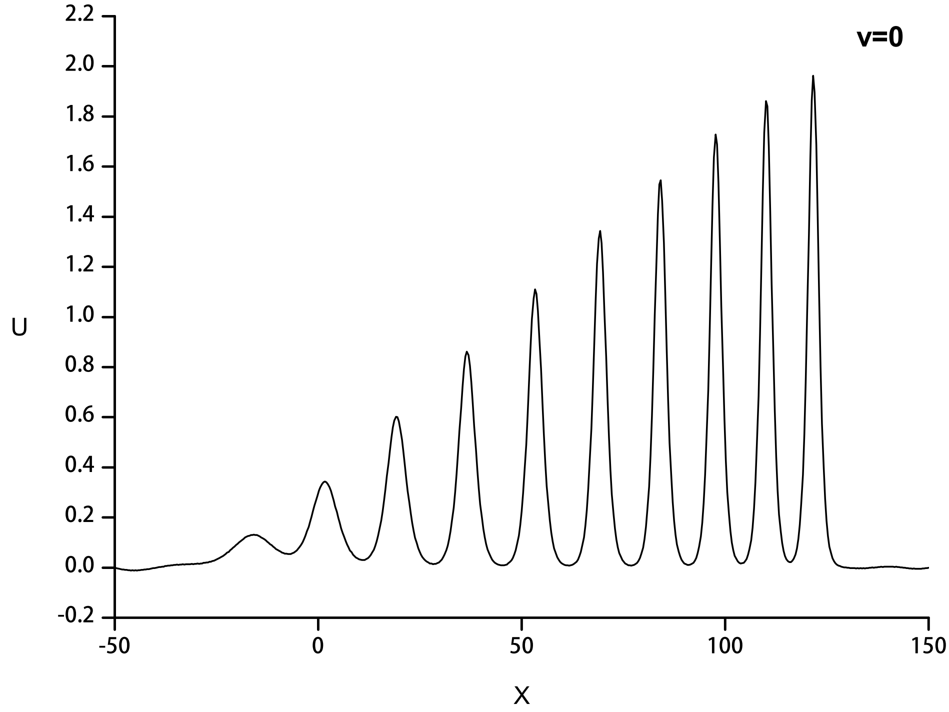
$$U(x,0) = 0.5 \left[1 - \tanh \frac{|x| - x_0}{d}\right],$$

başlangıç şartı [38]

$$U(-50,t) = U(150,t) = 0,$$

ve sınır şartları ile nümerik çözümler elde edilecektir. $\nu = 0$, $\varepsilon = 0.2$, $\mu = 0.1$, $\Delta t = 0.4$ ve $N = 373$ değerleri ile $t = 800$ gibi çok uzun süren çalışmanın grafiği Şekil 4.29 'da verildi. Bu durumda, (4.5.4) denklemi $\nu = 0$ alındığında KdV tipi bir denklem olur ve 10 'lu soliton zinciri formuna sahip olduğu görüldü. Korunum sabitleri I_1, I_2 ve I_3 hesaplandı ve [40] numaralı referans ile karşılaştırılarak Tablo 4.13 'de verildi. Tablo 4.13 'de görüldüğü üzere, bu uzun çalışma sonucu daha az sayıda düğüm nokta sayısı kullanılarak elde edilen I_1, I_2 ve I_3 korunum sabitlerinin başlangıçtaki orijinal değerlerine oranla sırasıyla % 0.072, % 0.00027 ve % 0.013 'den daha az değişim gösterdiği tespit edildi. Bu sebeple I_1, I_2 ve I_3 'ün hemen hemen sabit olduğu, söylenebilir.

Daha önceki çalışmalardan [38] ve [41] numaralı referanslar ile karşılaştırma yapabilmek için $h = 0.4$ dışındaki tüm değerler aynı alındı ve elde edilen sonuçlar Tablo 4.14 'de verildi. Mevcut yöntemde korunum sabitleri başlangıçtaki orijinal



Şekil 4.29: KdVB tipi dalganın $t = 800$, $\upsilon = 0$, $\varepsilon = 0.2$, $\mu = 0.1$, $\Delta t = 0.4$ ve $N = 373$ değerleri için elde edilen grafiği

değerlerine oranla sırasıyla % 0.082, % 0.00018 ve % 0.0042 'den daha az değişim gösterdiği görüldü. Bu yüzden I_1, I_2 ve I_3 'ün çalışma süresince hemen hemen sabit olduğu, söylenebilir.

Şekil 4.30 'da görüldüğü üzere, viskozite değeri çok küçük olduğu zaman ($\upsilon = 0.0001$) KdVB denkleminin çözümü KdV denkleminin çözümüne ($\upsilon = 0$) benzer karakterde olduğu görüldü. Aslında, elde edilen çözüme ait grafikler Şekil 4.30 'da verilen KdVB denkleminin çözümleri ile aynı değerlerin kullanıldığı KdV denkleminin çözümlerinin ayırt edilemez derecede benzer olduğu görüldü. Yine $t = 800$ zamanında 10 'lu dalga zinciri (dizisi) elde edildiği görüldü ve Şekil 4.30 'de verildi.

Burada, υ haricinde tüm değerler aynı alınarak çözümler elde edildi ve artan

Tablo 4.13: KdVB tipi dalganın $\nu = 0$, $\varepsilon = 0.2$, $\mu = 0.1$, $\Delta t = 0.4$ ve $N = 373$ değerleri için elde edilen korunum sabitleri

	Kuintik B-spline DQM			Kuin.Koll.[40] $\Delta t = 0.05$ ve $N = 500$		
t	I_1	I_2	I_3	I_1	I_2	I_3
0	50.00013	45.00046	42.30068	50.00021	45.00055	42.30074
100	50.00031	45.00048	42.29989	50.00034	45.00003	42.30028
200	50.00072	45.00054	42.29736	50.00058	44.99962	42.30098
300	50.00568	45.00058	42.29604	50.00612	44.99999	42.30227
400	50.00259	45.00057	42.29560	50.00237	44.99921	42.30135
500	49.99523	45.00054	42.29548	49.99435	44.99850	42.30030
600	49.97926	45.00049	42.29546	49.97857	44.99820	42.29995
700	49.96699	45.00054	42.29548	49.96607	44.99815	42.29979
800	49.96415	45.00052	42.29552	49.96331	44.99803	42.29974

bir şekilde değişen viskozitenin ve bunun bir sonucu olarak dispersiyon teriminin çözüme etkisi gözlendi. υ değeri artan bir şekilde 0, 0.0001, 0.001, 0.005, 0.01, 0.03, 0.05, 0.1 ve 0.2 olarak alındı. Şekil 4.31 sırasıyla $t = 800$ zamanındaki çözümleri göstermektedir. υ değerinin arttırılması ile KdVB denkleminin çözümü, gittikçe daha fazla Burgers' denkleminin ($\mu = 0$) çözümüne benzeme eğilimi gösterdiği görüldü. Bu durum, Şekil 4.32 'de daha net görünmektedir. υ değerinin artmasıyla beraber, hareket eden dalganın genliğinde düşme gerçekleştiği Şekil 4.31 'de görüldü.

Kararlılık analizi için özdeğerler farklı düğüm nokta sayıları için araştırıldı. $N = 301$, $N = 351$, $N = 401$, $N = 451$, $N = 501$ ve $N = 551$ için elde edilen özdeğerlerin reel ve sanal kısımlarını gösteren grafikler Şekil 4.33−4.38 'da verildi. Farklı düğüm nokta sayısına göre elde edilen özdeğerler içerisinde sadece reel kısımdan oluşan özdeğerler olduğu gibi reel ve sanal bileşenlere sahip özdeğerlerin de mevcut olduğu görüldü. Elde edilen özdeğerlerin birinci bölümde anlatılan kararlılık kriterleri ile uyumlu olduğu görüldü.

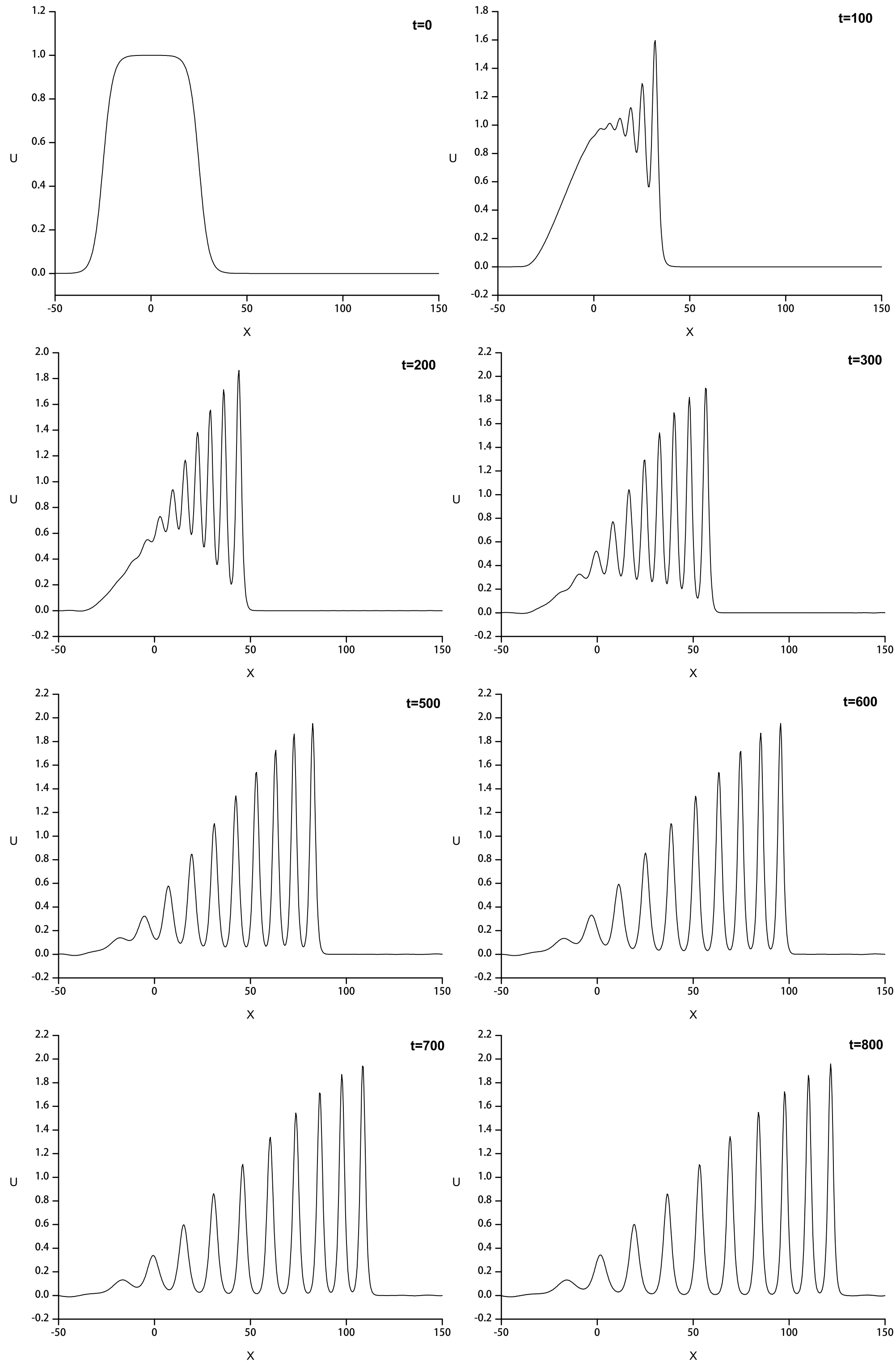
Tablo 4.14: KdVB tipi dalganın $\nu = 0$, $\varepsilon = 0.2$, $\mu = 0.1$, $\Delta t = 0.05$ ve $N = 501$ değerleri için elde edilen korunum sabitleri

	Kuintik B-spline DQM			Kuad.Gal.[38] $N = 500$			Küb.Bubn.-Gal.[41] $N = 1000$		
t	I_1	I_2	I_3	I_1	I_2	I_3	I_1	I_2	I_3
0	50.00012	45.00045	42.30068	50.00	45.000	42.301	50.00000	45.00041	42.30065
100	50.00042	45.00046	42.30042	50.00	45.008	42.257	50.00301	45.00242	42.30354
200	49.99980	45.00047	42.29957	50.01	45.014	42.110	49.99166	45.00441	42.30647
300	50.00722	45.00049	42.29913	50.01	45.021	42.041	50.01634	45.00672	42.30942
400	50.00568	45.00047	42.29897	50.00	45.028	42.033	50.06452	45.00995	42.31197
500	50.00089	45.00046	42.29895	49.99	45.035	42.038	50.12650	45.01577	42.31489
600	49.98500	45.00037	42.29891	49.98	45.042	42.049	50.15105	45.01577	42.31489
700	49.96844	45.00045	42.29895	49.99	45.049	42.057	50.09130	45.02153	42.31489
800	49.95939	45.00053	42.29900	50.02	45.056	42.064	49.97169	45.02899	42.32111

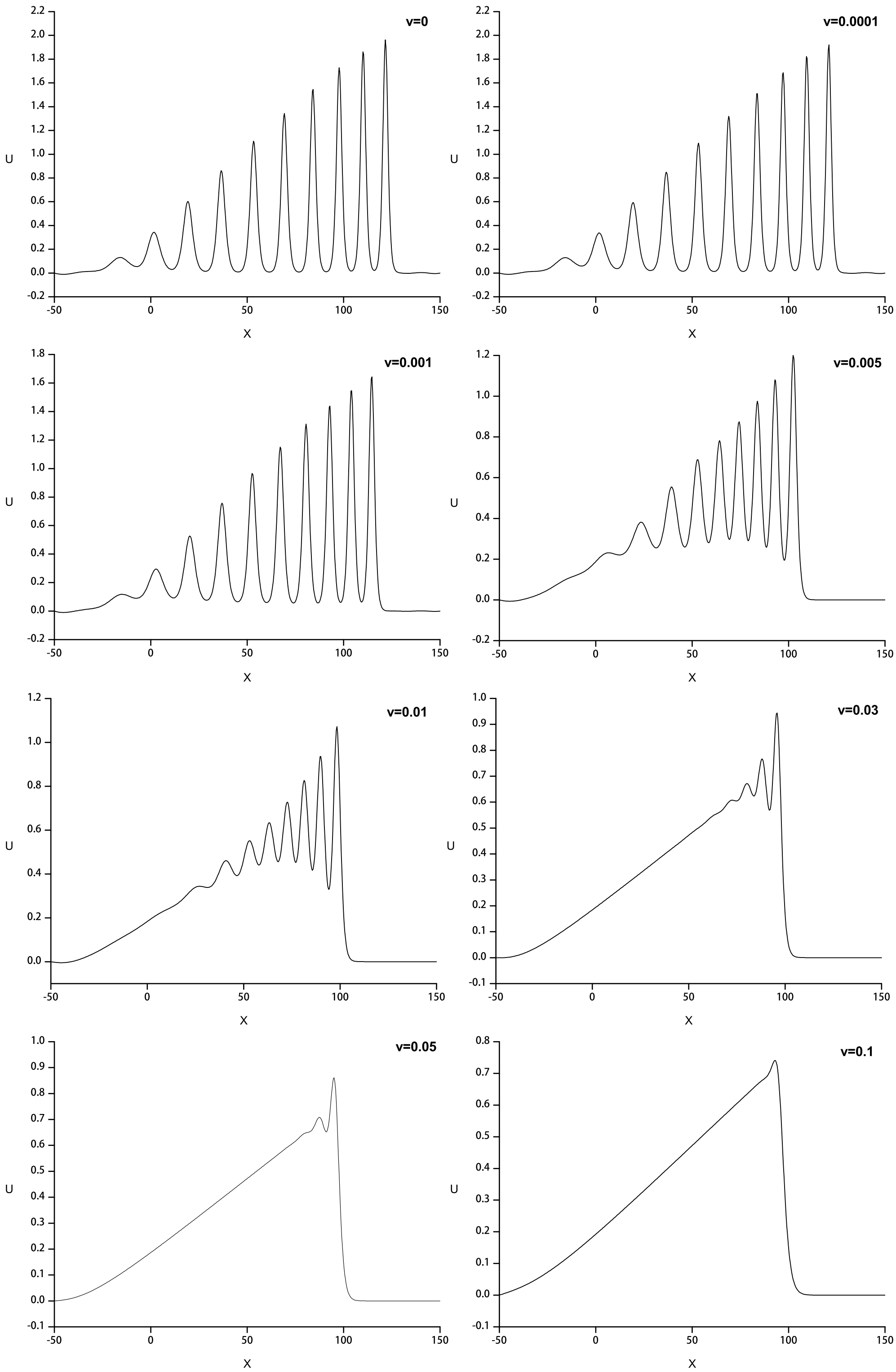
Tablo 4.15 'de farklı düğüm nokta sayılarında mutlak değeri en büyük özdeğerlerin reel ve sanal bileşenleri verildi. $N = 301$ için $\mid Re\,(\lambda_{\max}) \mid = 3.4311$, $N = 451$ için $\mid Re\,(\lambda_{\max}) \mid = 11.7845$ ve $N = 551$ için $\mid Re\,(\lambda_{\max}) \mid = 21.6149$ olarak bulundu. $N = 301$ için $\mid Sa\,(\lambda_{\max}) \mid = 1.4123$, $N = 451$ için $\mid Sa\,(\lambda_{\max}) \mid = 5.5668$ ve $N = 551$ için $\mid Sa\,(\lambda_{\max}) \mid = 10.8014$ olarak bulundu. B-spline diferensiyel quadrature metotlarda düğüm noktalarının sayısı arttıkça özdeğerlerin mutlak değerlerinin de büyüdüğü görüldü. Bu durum, özdeğerlerin kararlılık aralığına taşınması için zaman adımı uzunluğunun azaltılması gerektiğini göstermektedir.

Tablo 4.15: KdVB tipi dalgada düğüm noktalarının sayılarına göre mutlak değeri en büyük özdeğerler

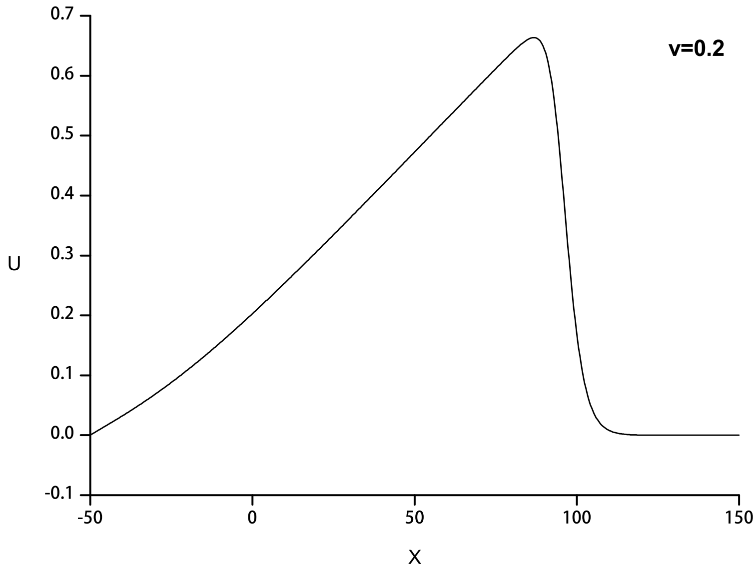
	Kuintik B-spline DQM					
Düğüm nokta sayısı	301	351	401	451	501	551
$\mid Re\,(\lambda_{\max}) \mid$	3.4311	5.4944	8.2461	11.7845	16.2080	21.6149
$\mid Sa\,(\lambda_{\max}) \mid$	1.4123	2.3996	3.7654	5.5668	7.8953	10.8014



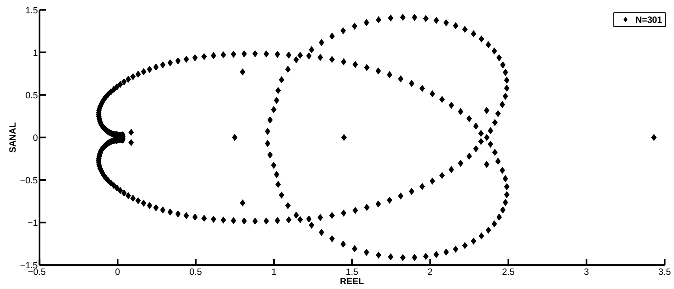
Şekil 4.30: KdVB tipi dalganın $t = 0 - 800$, $\upsilon = 0.0001$, $\varepsilon = 0.2$, $\mu = 0.1$, $\Delta t = 0.05$ ve $N = 501$ değerleri için elde edilen grafikleri



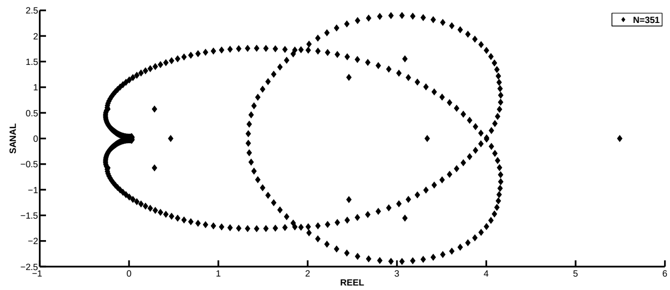
Şekil 4.31: KdVB tipi dalganın $t = 800$, $\varepsilon = 0.2$, $\mu = 0.1$, $\Delta t = 0.1$ ve $N = 551$ değerleri için elde edilen grafikleri



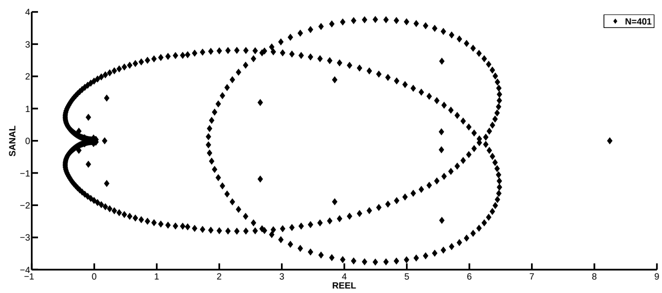
Şekil 4.32: KdVB tipi dalganın $t = 800$, $\upsilon = 0.2$, $\varepsilon = 0.2$, $\mu = 0.1$, $\Delta t = 0.1$ ve $N = 551$ değerleri için elde edilen grafiği



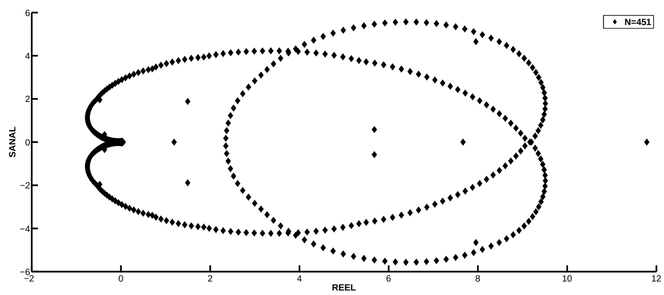
Şekil 4.33: KdVB tipi dalganın $N = 301$ için Kuintik B-spline DQM yöntemi ile elde edilen özdeğerlerinin grafikleri



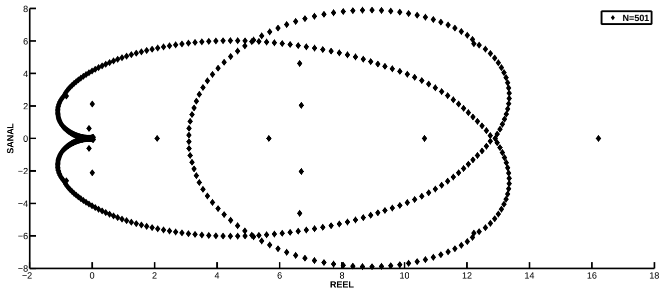
Şekil 4.34: KdVB tipi dalganın $N = 351$ için Kuintik B-spline DQM yöntemi ile elde edilen özdeğerlerinin grafikleri



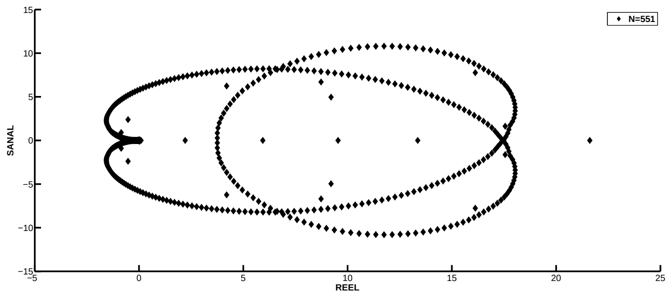
Şekil 4.35: KdVB tipi dalganın $N = 401$ için Kuintik B-spline DQM yöntemi ile elde edilen özdeğerlerinin grafikleri



Şekil 4.36: KdVB tipi dalganın $N = 451$ için Kuintik B-spline DQM yöntemi ile elde edilen özdeğerlerinin grafikleri



Şekil 4.37: KdVB tipi dalganın $N = 501$ için Kuintik B-spline DQM yöntemi ile elde edilen özdeğerlerinin grafikleri



Şekil 4.38: KdVB tipi dalganın $N = 551$ için Kuintik B-spline DQM yöntemi ile elde edilen özdeğerlerinin grafikleri

4.5.5 Sonuç

Bu bölümde, KdV, Burgers' ve ana denklem olan KdVB denklemi Kuintik B-spline DQM yöntemi ile çözüldü. Kuintik B-spline DQM yöntemi ile farklı başlangıç ve sınır şartları ile verilen dört test probleme ait nümerik çözümler elde edildi. Elde edilen L_2 ve L_∞ hata normları ile I_1, I_2 ve I_3 korunum sabitlerine ait sonuçlar literatürdeki bazı sonuçlarla karşılaştırılarak tablolar halinde verildi. Analitik çözümü bulunan test problemde yakınsama oran analizi yapıldı ve elde edilen sonuçlar tablo halinde verildi. Kuintik B-spline DQM 'un kararlılık analizi matris kararlılık analizi ile her dört test probleme ait özdeğerler elde edilerek ve tablolar halinde verilerek yapıldı. Elde edilen özdeğerlerin grafikleri verildi ve sonuçların kararlılık kriterleri ile uyumlu olduğu görüldü. Tablolar incelendiğinde KdV denklemi Solitary dalga çözümü için Kuintik B-spline DQM yöntemi ile elde edilen sonuçların literatürdeki bazı sonuçlara göre daha iyi olduğu, KdV denklemi dalga oluşumu probleminde sonuçların kabul edilebilir olduğu, Burgers' denklemi şok benzeri dalga probleminde elde edilen sonuçların karşılaştırılan sonuçlara göre daha iyi olduğu ve KdVB tipi dalga çözümünde elde edilen sonuçların karşılaştırılan sonuçlara göre daha iyi olduğu görüldü. Her bir probleme ait Kuintik B-spline DQM yöntemi ile elde edilen çözümlerin grafikleri verildi.

5. mBURGERS' DENKLEMİNİN NÜMERİK ÇÖZÜMLERİ

Bu bölümde mBurgers' denklemi kuintik ve kuartik B-spline diferensiyel quadrature metotlar ile nümerik çözümler elde edilecektir.

5.1 mBurgers' Denkleminin Ayrıştırılması

$[a,b]$ çözüm aralığının düzgün bir parçalanışı $a = x_1 < x_2 < ... < x_n = b$ ve $x_{i+1} = x_i + h$, $i = 1, ..., n-1$ olsun. mBurgers' denkleminin sınır şartları

$$U(a,t) = g_1(t), \qquad U(b,t) = g_2(t), \quad t \in (0,T], \tag{5.1.1}$$

ve başlangıç şartı

$$U(x,0) = f(x), \qquad a \leq x \leq b, \tag{5.1.2}$$

olmak üzere

$$U_t + \varepsilon U^2 U_x - vU_{xx} = 0 \tag{5.1.3}$$

şeklindedir. Burada $U = U(x,t)$ konum değişkeni, x ve zaman değişkeni t'nin bir fonksiyonudur. ε ve v ise pozitif parametrelerdir. (5.1.3) denkleminde U_t yalnız bırakılırsa

$$U_t = -\varepsilon U^2 U_x + vU_{xx} \tag{5.1.4}$$

elde edilir. (5.1.4) denkleminde konum ayrıştırmaları için temel diferensiyel quadrature yaklaşımı kullanıldığında

$$S_5(U) = -\varepsilon U^2(x_i,t)\left[w_{i,1}^{(1)}g_1(t) + w_{i,N}^{(1)}g_2(t)\right] + v\left[w_{i,1}^{(2)}g_1(t) + w_{i,N}^{(2)}g_2(t)\right]$$

olmak üzere,

$$\frac{dU(x_i,t)}{dt} = -\varepsilon U^2(x_i,t)\sum_{j=2}^{N-1} w_{i,j}^{(1)}U(x_j,t) + v\sum_{j=2}^{N-1} w_{i,j}^{(2)}U(x_j,t) + S_5(U),$$
$$i = 2,3,...,N-1 \qquad (5.1.5)$$

şeklinde adi diferensiyel denklem elde edilir. (5.1.5) denkleminin zaman integrasyonu dördüncü mertebe Runge-Kutta metodu ile yapılarak nümerik çözüm elde edilir.

5.2 Kararlılık Analizi

B-spline diferensiyel quadrature metodu mBurgers' denklemi nümerik çözüm algoritmasının kararlılık analizi, diferensiyel quadrature ile konum ayrıştırması yapılmış adi diferensiyel denklem sistemi katsayı matrisinde lineer olmayan terimin lineerleştirilmesinin ardından özdeğerlerinin tespit edilmesi esasına dayanmaktadır.

(5.1.5) eşitliğinde yer alan $U(x_i) = \alpha_i$ (α_i sabit) olarak alındığında A_5 katsayı matrisi

$$A_5 = \begin{bmatrix} -\varepsilon\alpha_2^2 w_{2,2}^{(1)} + v w_{2,2}^{(2)} & \cdots & -\varepsilon\alpha_2^2 w_{2,N-1}^{(1)} + v w_{2,N-1}^{(2)} \\ -\varepsilon\alpha_3^2 w_{3,2}^{(1)} + v w_{3,2}^{(2)} & \cdots & -\varepsilon\alpha_3^2 w_{3,N-1}^{(1)} + v w_{3,N-1}^{(2)} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ -\varepsilon\alpha_{N-1}^2 w_{N-1,2}^{(1)} + v w_{N-1,2}^{(2)} & \cdots & -\varepsilon\alpha_{N-1}^2 w_{N-1,N-1}^{(1)} + v w_{N-1,N-1}^{(2)} \end{bmatrix} \qquad (5.2.1)$$

olmak üzere

$$\begin{bmatrix} \frac{dU(x_2,t)}{dt} \\ \frac{dU(x_3,t)}{dt} \\ \vdots \\ \frac{dU(x_{N-1},t)}{dt} \end{bmatrix} = A_5 \begin{bmatrix} U(x_j,t) \\ U(x_j,t) \\ \vdots \\ U(x_j,t) \end{bmatrix} + S_5(U) \tag{5.2.2}$$

şeklinde bir matris forma sahiptir. Sınır şartları ve denklemin homojen olmayan bölümünden gelen $S_5(U)$ vektörünün kararlılığa herhangi bir etkisi bulunmamaktadır. A_5 matrisinin özdeğerlerinin durumuna göre metodun kararlılığı değerlendirilir.

5.3 Şok Benzeri Dalga

Bu bölümde, mBurgers' denkleminin kuintik ve kuartik B-spline diferensiyel quadrature metotlar ile mevcut test problem için nümerik çözümler elde edilecektir. Mevcut metotların doğruluğunu test etmek için kararlılık analizi, yakınsama oran analizi ve daha önce yapılan çalışmalar ile karşılaştırmalar yapılacaktır.

Analitik çözümü [93] numaralı referansta

$$U(x,t) = \frac{(x/t)}{1 + (\sqrt{t}/c_0)\exp(x^2/4vt)} \tag{5.3.1}$$

şeklinde verilen mBurgers' denkleminde c_0 bir sabit olup $0 < c_0 < 1$ şeklindedir. Mevcut metotlar ile nümerik çözümler elde edilirken $c_0 = 0.5$ alınacaktır.

Başlangıç şartı olarak (5.3.1) denkleminin $t = 1$ için değeri kullanılacak ve sınır şartları olarak da

$$U(0,t) = U(1,t) = 0, \qquad t > 0$$

alınacaktır.

$0 \leq x \leq 1$ aralığında $v = 0.01$, $\Delta t = 0.01$ ve $h = 0.02$ değerleri alınarak Kuintik ve Kuartik B-spline DQM 'lar ile elde edilen simülasyona ait L_2 ve L_∞ hata

Tablo 5.1: Şok benzeri dalganın $0 \leq x \leq 1$ aralığında $v = 0.01$, $\Delta t = 0.01$ ve $N = 51$ değerleri için elde edilen hata normları

	Kuintik B-spline DQM		Kuartik B-spline DQM		Septik Kollokasyon [63]	
t	$L_2 \times 10^3$	$L_\infty \times 10^3$	$L_2 \times 10^3$	$L_\infty \times 10^3$	$L_2 \times 10^3$	$L_\infty \times 10^3$
2	0.6883159313	1.4061155014	0.7955855586	1.3795978925	0.7904296620	1.7030921188
3	0.6111942976	1.2284699151	0.6690533313	1.1943543646	0.6551928290	1.1832698216
4	0.5518907404	1.0470408075	0.5250528343	0.9764154381	0.5576794264	0.9964523368
5	0.5243679591	0.9114703246	0.4048512821	0.7849457015	0.5105617536	0.8561342445
6	0.5360036465	0.8147368174	0.3452210304	0.6374950443	0.5167229575	0.7610530060
7	0.5837932334	1.0140945729	0.3638648688	0.6705419608	0.5677438614	1.0654548090
8	0.6527370179	1.3014950978	0.4337013450	0.9863405006	0.6427542266	1.3581113635
9	0.7279265681	1.5456068136	0.5197862999	1.2551335234	0.7236430257	1.6048306653
10	0.8001311820	1.7425840423	0.6042925888	1.4747885309	0.8002564201	1.8023938553

normları önceki çalışmalardan [63] ile karşılaştırılarak Tablo 5.1 'de verildi. Tablo 5.1 'de görüldüğü üzere mevcut metotlar ile elde edilen hata normlarının istenilen şekilde olduğu ve Kuartik B-spline DQM ile elde edilen hata normlarının gerek önceki çalışmalardan referans [63] 'ye oranla gerekse Kuintik B-spline DQM 'a oranla daha iyi olduğu söylenebilir. Çözüm aralığının $0 \leq x \leq 1$ 'den $0 \leq x \leq 1.3$ 'e genişletilmesi ve $v = 0.01$, $\Delta t = 0.01$ ve $h = 0.02$ değerlerinin aynı alınmasıyla elde edilen hata normları ise Tablo 5.2 'de verildi. Tablo 5.2 'de görüldüğü üzere çözüm aralığının $0 \leq x \leq 1.3$ 'e genişletilmesi ile hata normlarının $0 \leq x \leq 1$ aralığına oranla daha küçük olduğu söylenebilir. Kuintik ve Kuartik B-spline DQM 'lar ile $0 \leq x \leq 1$ aralığında elde edilen grafikler sırasıyla Şekil 5.1 ve Şekil 5.2 'de verildi. Şekil 5.1 ve Şekil 5.2 'den dalganın $0 \leq x \leq 1$ aralığına sığmadığı görüldü ve aralık $0 \leq x \leq 1.3$ 'e genişletilerek elde edilen dalganın grafikleri Şekil 5.3 ve Şekil 5.4 'de verildi.

$0 \leq x \leq 1$ aralığında $v = 0.001$ ve $\Delta t = 0.01$ değerleri alınarak Kuintik ve Kuartik B-spline DQM 'lar ile elde edilen simülasyona ait L_2 ve L_∞ hata normları önceki çalışmalardan [63] numaralı referans ile karşılaştırılarak Tablo 5.3 'de verildi. Tablo 5.3 'de görüldüğü üzere mevcut metotlar ile elde edilen hata normlarının istenilen

Tablo 5.2: Şok benzeri dalganın $0 \leq x \leq 1.3$ aralığında $v = 0.01$, $\Delta t = 0.01$ ve $N = 51$ için elde edilen hata normları

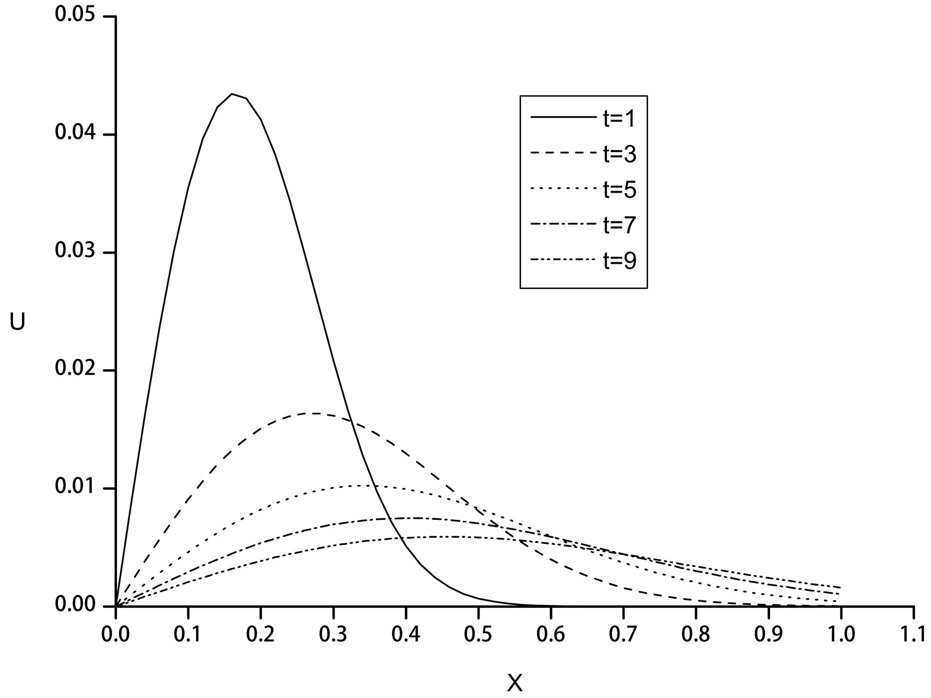
	Kuintik B-spline DQM		Kuartik B-spline DQM	
t	$L_2 \times 10^3$	$L_\infty \times 10^3$	$L_2 \times 10^3$	$L_\infty \times 10^3$
2	0.6475135665	1.4186922574	0.8886356218	1.8426861300
3	0.6038312099	1.2481612622	0.7839801828	1.2737334739
4	0.5597368097	1.0744317361	0.6849989487	1.0400820954
5	0.5248818857	0.9393940240	0.5940348727	0.8973844970
6	0.4962790307	0.8341732147	0.5073314693	0.7724074011
7	0.4729494376	0.7511005752	0.4274853585	0.6624131760
8	0.4556226380	0.6853562194	0.3578233882	0.5679762835
9	0.4457470777	0.6313503003	0.3018989951	0.4898501971
10	0.4443904541	0.5873008192	0.2638222569	0.4245088370

şekilde olduğu söylenebilir.

Tablo 5.3: Şok benzeri dalganın $0 \leq x \leq 1$ aralığında $v = 0.001$, $\Delta t = 0.01$ değerleri alınarak elde edilen hata normları

	Kuintik B-spline DQM $N = 166$		Kuartik B-spline DQM $N = 201$		Septik Koll. [63] $N = 200$	
t	$L_2 \times 10^3$	$L_\infty \times 10^3$	$L_2 \times 10^3$	$L_\infty \times 10^3$	$L_2 \times 10^3$	$L_\infty \times 10^3$
2	0.1272271131	0.4571371972	0.1370706949	0.4453892504	0.1835491190	0.8185211112
3	0.1108493122	0.3892325088	0.1168507335	0.3842839811	0.1441424335	0.5234833346
4	0.0985692037	0.3332002275	0.1019761971	0.3258391192	0.1144110783	0.3563537207
5	0.0902342480	0.2885116847	0.0920706001	0.2816616769	0.0947865272	0.2549790058
6	0.0840729951	0.2546793589	0.0849484881	0.2484289381	0.0814174677	0.2134847835
7	0.0791869199	0.2283464335	0.0794570772	0.2225471690	0.0718977757	0.1880048432
8	0.0751261273	0.2071234782	0.0750035859	0.2019577762	0.0648368942	0.1682601770
9	0.0716455900	0.1900234319	0.0712618898	0.1851510002	0.0594114970	0.1524074966
10	0.0685991848	0.1759277031	0.0680382860	0.1711033543	0.0551151456	0.1394312127

$0 \leq x \leq 1$ aralığında $v = 0.001$ ve $\Delta t = 0.01$ değerleri alınarak Kuintik ve Kuartik B-spline DQM 'lar kullanılarak farklı düğüm nokta sayıları için $t = 10$ zamanında elde edilen hata normları ve yakınsama oranları Tablo 5.4 'de verildi. L_2 ve L_∞ hata normlarının düğüm nokta sayısı arttıkça hem Kuintik B-spline DQM 'unda hem de Kuartik B-spline DQM 'unda hata normlarının azaldığı gözlendi. Yakınsama

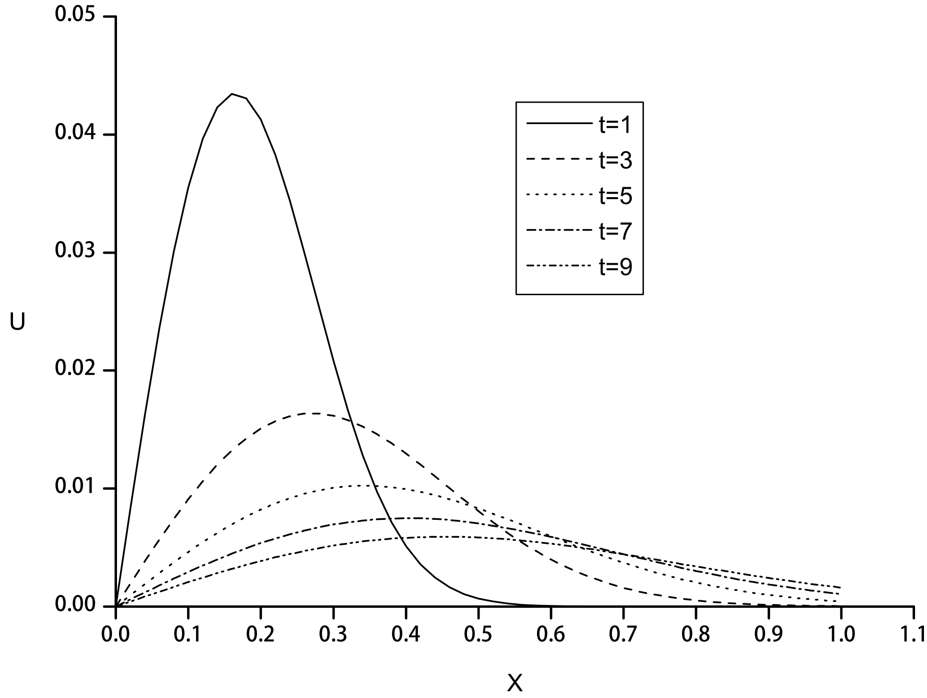


Şekil 5.1: Şok benzeri dalganın $0 \leq x \leq 1$ aralığında $t = 1 - 9$, $v = 0.01$, $\Delta t = 0.01$ ve $N = 51$ değerleri için Kuintik B-spline DQM ile elde edilen grafikleri

oranlarının ise, $[0.16, 1.35]$ aralığında değiştiği görüldü.

Kuintik ve Kuartik B-spline DQM 'lar kullanılarak $v = 0.01$ ve $v = 0.001$ değerleri ile elde edilen nümerik çözümlerde $t = 10$ zamanındaki mutlak hatalara ait grafikler sırasıyla Şekil 5.7−5.9 'da verildi. Şekil 5.7−5.9 'da görüldüğü üzere $v = 0.01$ iken mevcut metotlar benzer grafiklere sahip olup mutlak hatanın sağ sınır değere doğru yaklaştıkça arttığı ve Şekil 5.8−5.9 'da görüldüğü üzere, $v = 0.001$ olduğunda, mevcut metotların yine benzer grafiklere sahip olduğu ancak mutlak hatanın $x = 0.21$ civarında maksimum değerde olduğu görüldü.

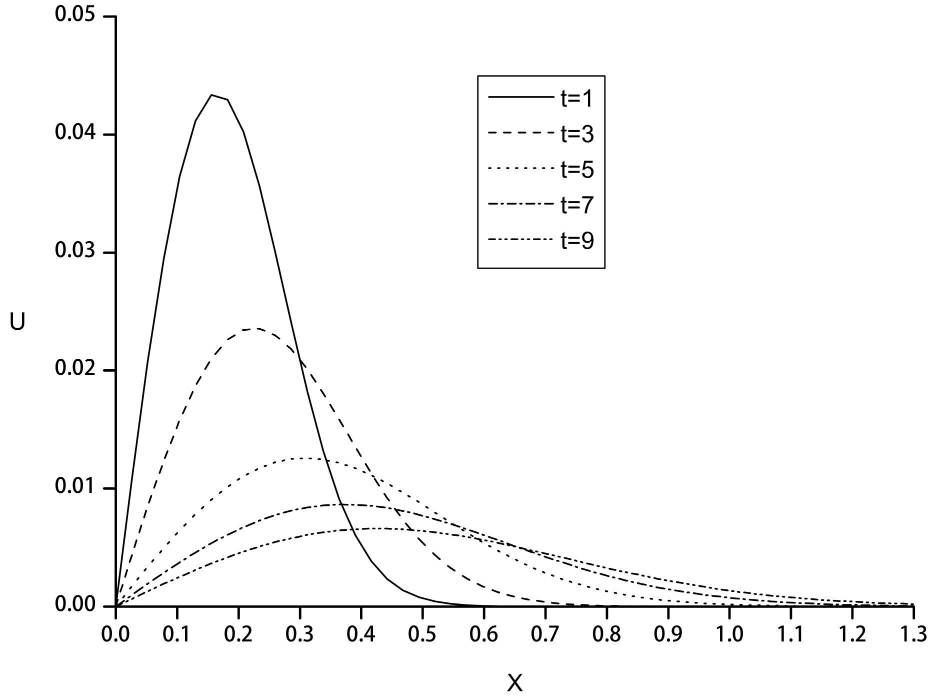
Kararlılık analizi için özdeğerler farklı düğüm nokta sayıları için araştırıldı.



Şekil 5.2: Şok benzeri dalganın $0 \leq x \leq 1$ aralığında $t = 1 - 9$, $v = 0.01$, $\Delta t = 0.01$ ve $N = 51$ değerleri için Kuartik B-spline DQM ile elde edilen grafikleri

$N = 21$, $N = 41$, $N = 61$, $N = 81$, $N = 101$ ve $N = 121$ için Kuintik B-spline DQM ile elde edilen özdeğerlerin reel ve sanal kısımlarını gösteren grafikler Şekil 5.10−5.15 'de verildi. Farklı düğüm nokta sayısına göre elde edilen özdeğerler içerisinde sadece reel kısımdan oluşan özdeğerler olduğu gibi reel ve sanal bileşenlere sahip özdeğerlerin de mevcut olduğu görüldü. Elde edilen özdeğerlerin birinci bölümde verilen kararlılık kriterleri ile uyumlu olduğu görüldü.

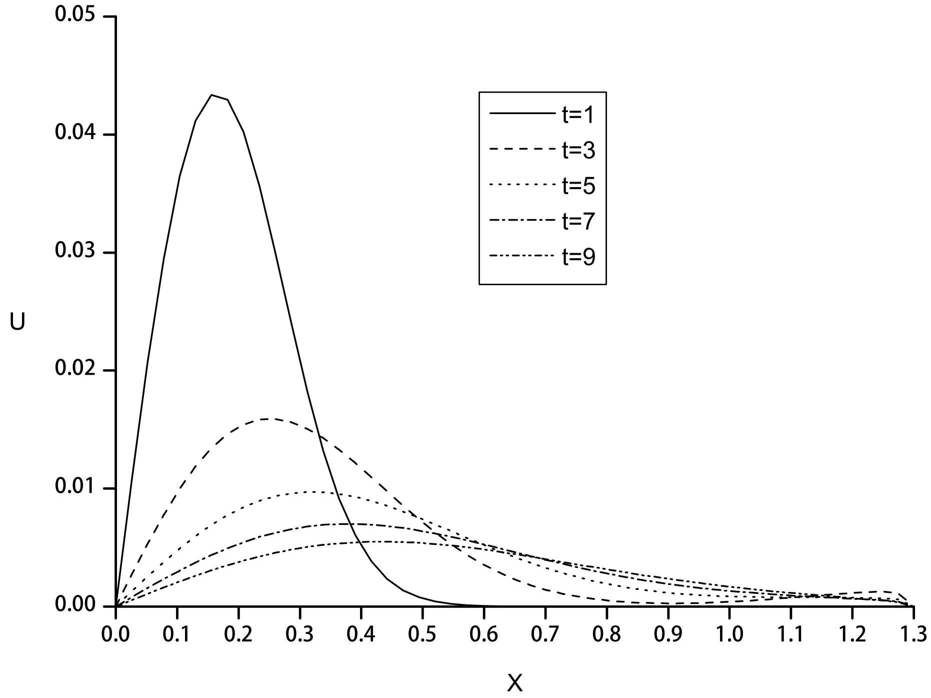
Kuartik B-spline DQM 'un kararlılık analizi için de özdeğerler, Kuintik B-spline DQM için incelenen düğüm nokta sayıları olan $N = 21$, $N = 41$, $N = 61$, $N = 81$, $N = 101$ ve $N = 121$ için incelendi. Kuartik B-spline DQM ile elde edilen özdeğerlerin



Şekil 5.3: Şok benzeri dalganın $0 \leq x \leq 1.3$ aralığında $t = 1 - 9$, $v = 0.01$, $\Delta t = 0.01$ ve $N = 51$ değerleri için Kuintik B-spline DQM ile elde edilen grafikleri

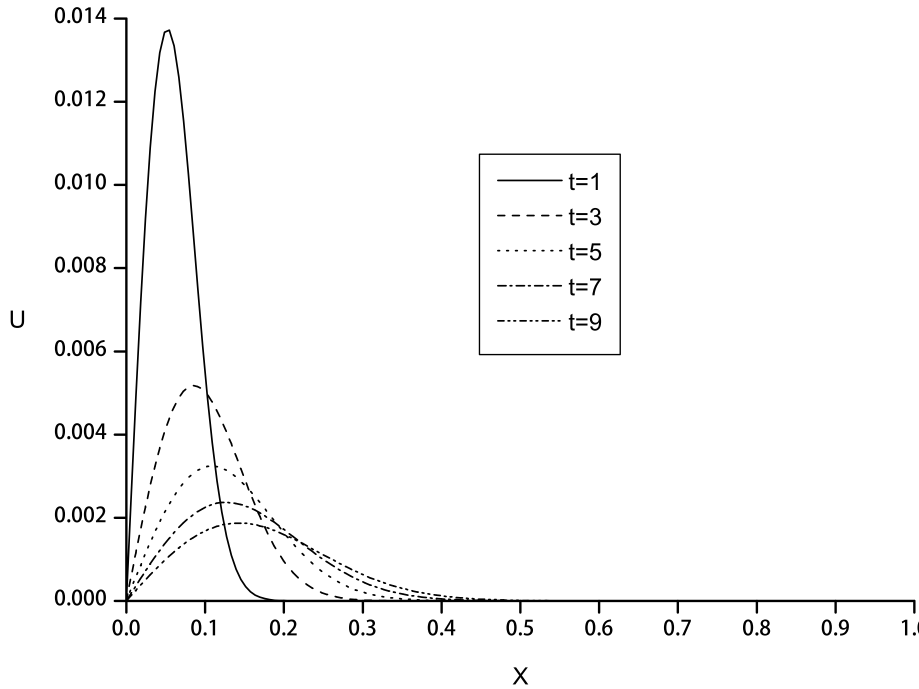
reel ve sanal kısımlarını gösteren grafikler Şekil 5.16−5.21 'de verildi. Farklı düğüm nokta sayısına göre elde edilen özdeğerler içerisinde sadece reel kısımdan oluşan özdeğerler olduğu gibi reel ve sanal bileşenlere sahip özdeğerlerin de mevcut olduğu görüldü. Elde edilen özdeğerlerin birinci bölümde anlatılan kararlılık kriterleri ile uyumlu olduğu görüldü.

Tablo 5.5 'de Kuintik ve Kuartik B-spline DQM 'lar ile farklı düğüm nokta sayılarında elde edilen mutlak değeri en büyük özdeğerlerin reel ve sanal bileşenleri verildi. Kuintik B-spline DQM 'unda $N = 21$ için $\mid Re\left(\lambda_{\max}\right) \mid = 20.5417$, $N = 61$ için $\mid Re\left(\lambda_{\max}\right) \mid = 189.3202$ ve $N = 121$ için $\mid Re\left(\lambda_{\max}\right) \mid = 829.5248$ olarak bulundu.



Şekil 5.4: Şok benzeri dalganın $0 \leq x \leq 1.3$ aralığında $t = 1 - 9$, $v = 0.01$, $\Delta t = 0.01$ ve $N = 51$ değerleri için Kuartik B-spline DQM ile elde edilen grafikleri

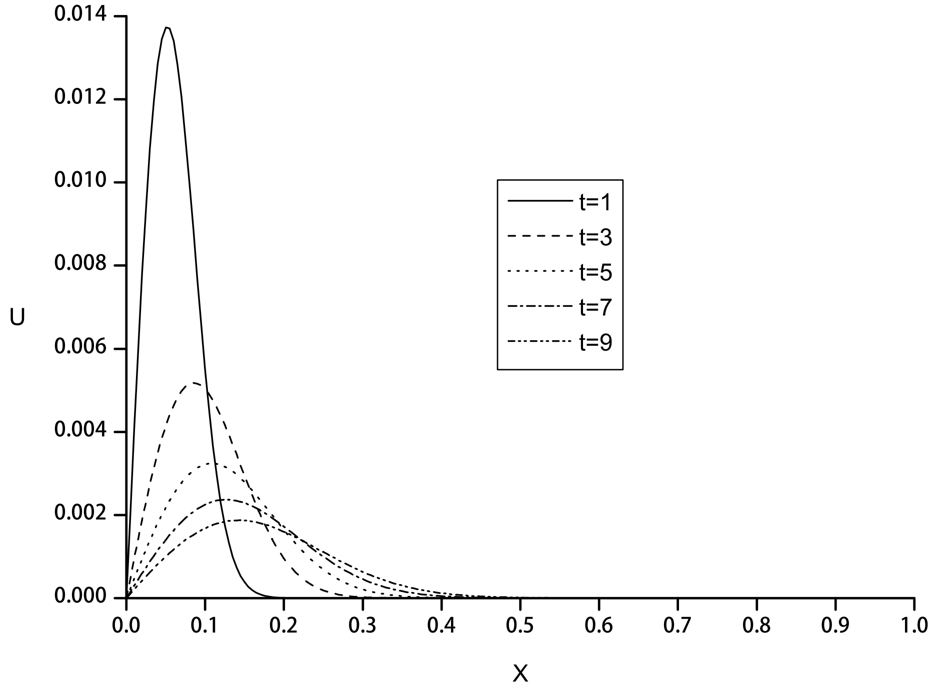
$N = 21$ için $\mid Sa\left(\lambda_{\max}\right) \mid = 1.6568$, $N = 61$ için $\mid Sa\left(\lambda_{\max}\right) \mid = 39.1720$ ve $N = 121$ için $\mid Sa\left(\lambda_{\max}\right) \mid = 412.9202$ olarak bulundu. Kuartik B-spline DQM 'unda ise, $N = 21$ için $\mid Re\left(\lambda_{\max}\right) \mid = 45.9508$, $N = 61$ için $\mid Re\left(\lambda_{\max}\right) \mid = 351.4984$ ve $N = 121$ için $\mid Re\left(\lambda_{\max}\right) \mid = 1271.8797$ olarak bulundu. $N = 21$ için $\mid Sa\left(\lambda_{\max}\right) \mid = 15.7014$, $N = 61$ için $\mid Sa\left(\lambda_{\max}\right) \mid = 160.8740$ ve $N = 121$ için $\mid Sa\left(\lambda_{\max}\right) \mid = 675.8866$ olarak bulundu. B-spline diferensiyel quadrature metotlarda düğüm noktalarının sayısı arttıkça özdeğerlerin mutlak değerlerinin de büyüdüğü görüldü. Bu durum, özdeğerlerin kararlılık aralığına taşınması için zaman adımı uzunluğunun azaltılması gerektiğini göstermektedir.



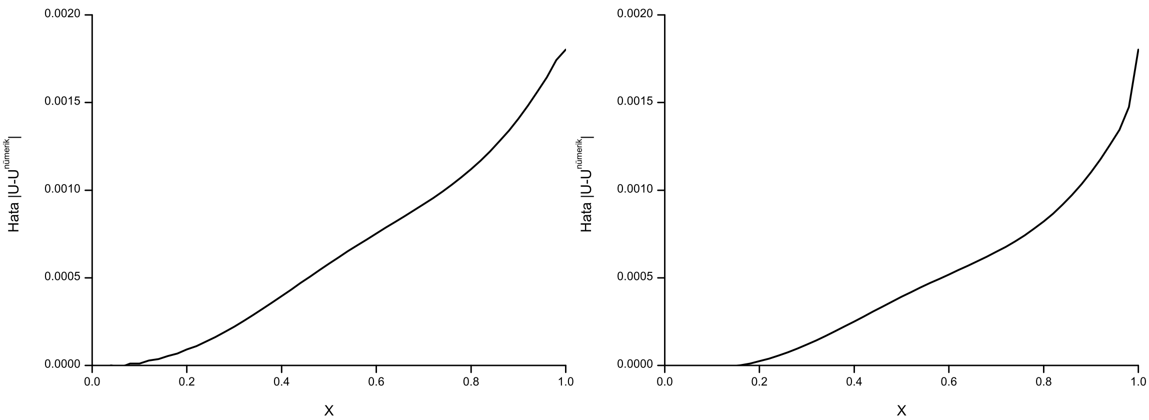
Şekil 5.5: Şok benzeri dalganın $0 \leq x \leq 1$ aralığında $t = 1 - 9$, $v = 0.001$, $\Delta t = 0.01$ ve $N = 166$ değerleri için Kuintik B-spline DQM ile elde edilen grafikleri

Tablo 5.4: Şok benzeri dalganın $v = 0.001$ ve $\Delta t = 0.01$ değerleri alınarak $t = 10$ zamanında elde edilen hata normları ve yakınsama oranları

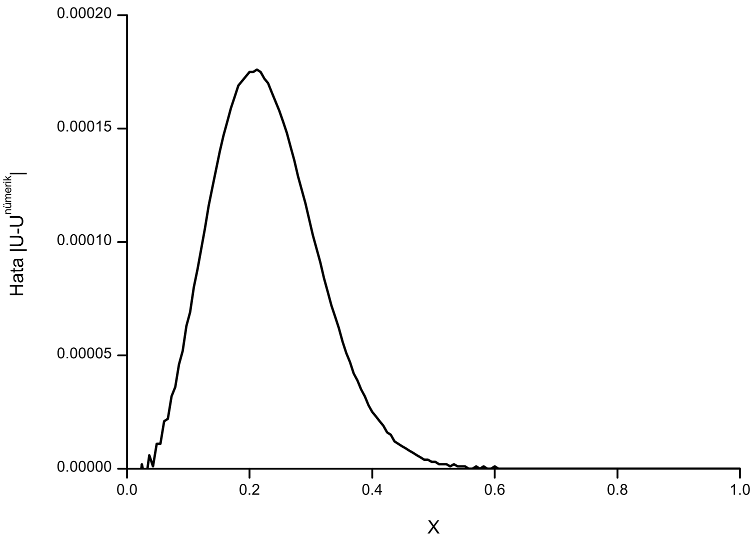
	Kuintik B-spline DQM				Kuartik B-spline DQM			
N	$L_2 \times 10^3$	$YO\,(L_2)$	$L_\infty \times 10^3$	$YO\,(L_\infty)$	$L_2 \times 10^3$	$YO\,(L_2)$	$L_\infty \times 10^3$	$YO\,(L_\infty)$
11	0.26	-	0.64	-	0.43	-	0.98	-
21	0.13	1.07	0.30	1.17	0.35	0.31	0.88	0.16
31	0.11	0.43	0.25	0.47	0.22	1.19	0.52	1.35
41	0.10	0.34	0.23	0.30	0.17	0.92	0.39	1.02
61	0.09	0.27	0.21	0.23	0.14	0.88	0.30	1.20
81	0.08	0.42	0.20	0.17	0.10	0.72	0.19	0.98



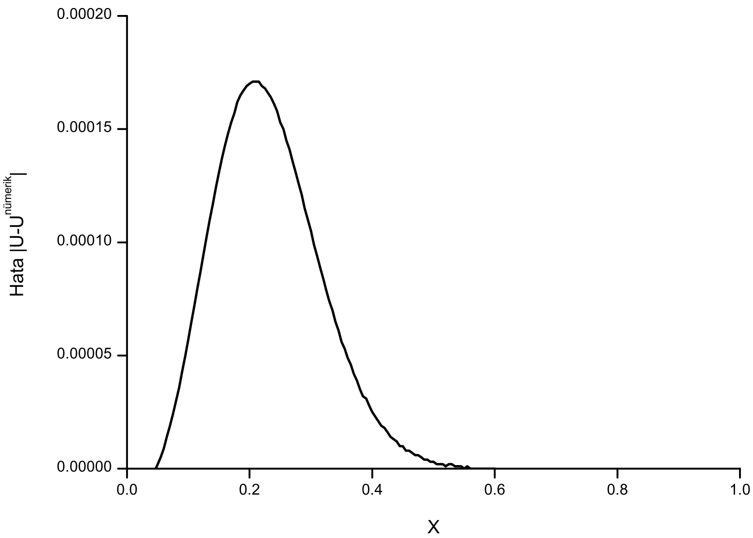
Şekil 5.6: Şok benzeri dalganın $0 \leq x \leq 1$ aralığında $t = 1 - 9$, $v = 0.001$, $\Delta t = 0.01$ ve $N = 201$ değerleri için Kuartik B-spline DQM ile elde edilen grafikleri



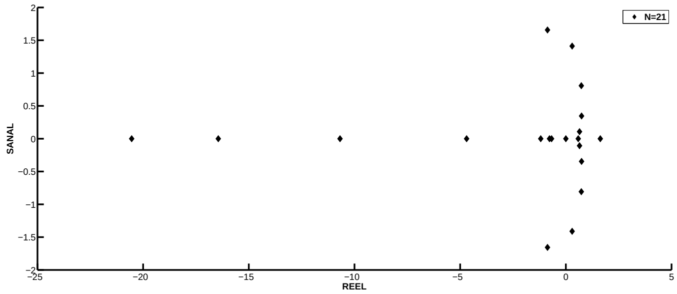
Şekil 5.7: Şok benzeri dalganın $0 \leq x \leq 1$ aralığında $t = 10$, $v = 0.01$, $\Delta t = 0.01$ ve $N = 51$ değerleri için sırasıyla Kuintik ve Kuartik B-spline DQM ile elde edilen mutlak hatalar



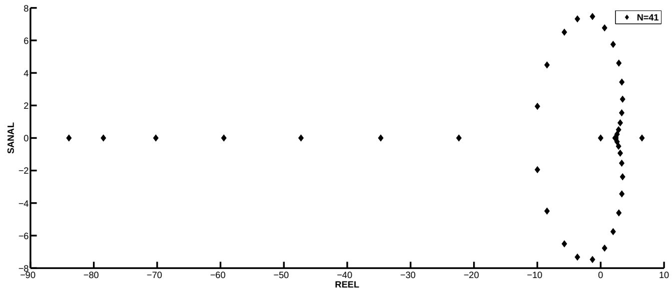
Şekil 5.8: Şok benzeri dalganın $0 \leq x \leq 1$ aralığında $t = 10$, $v = 0.001$, $\Delta t = 0.01$ ve $N = 166$ değerleri için Kuintik B-spline DQM ile elde edilen mutlak hata



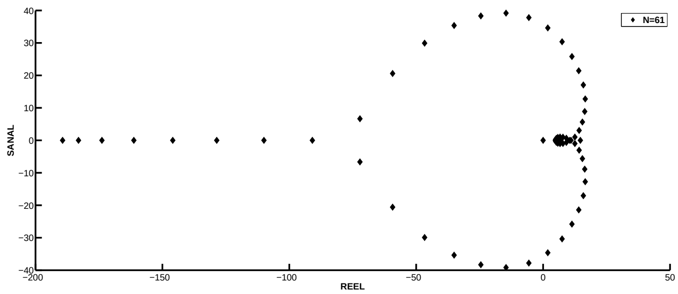
Şekil 5.9: Şok benzeri dalganın $0 \leq x \leq 1$ aralığında $t = 10$, $v = 0.001$, $\Delta t = 0.01$ ve $N = 201$ değerleri için Kuartik B-spline DQM ile elde edilen mutlak hata



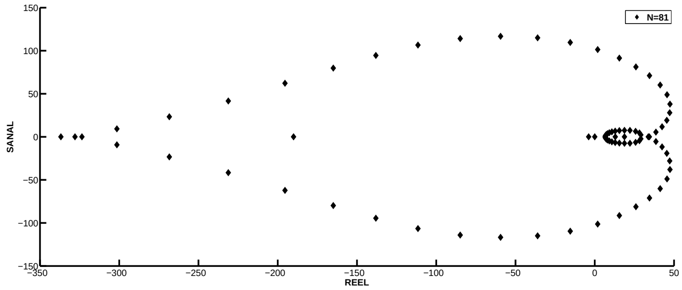
Şekil 5.10: Şok benzeri dalganın $N = 21$ için Kuintik B-spline DQM yöntemi ile elde edilen özdeğerlerinin grafikleri



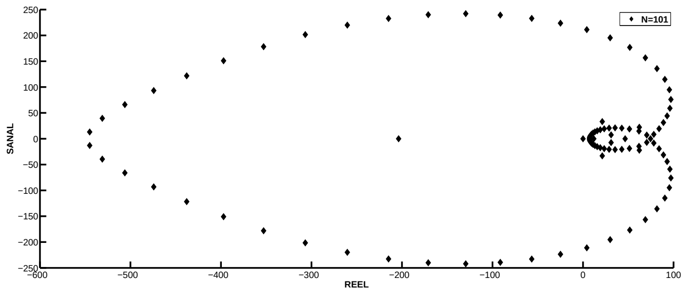
Şekil 5.11: Şok benzeri dalganın $N = 41$ için Kuintik B-spline DQM yöntemi ile elde edilen özdeğerlerinin grafikleri



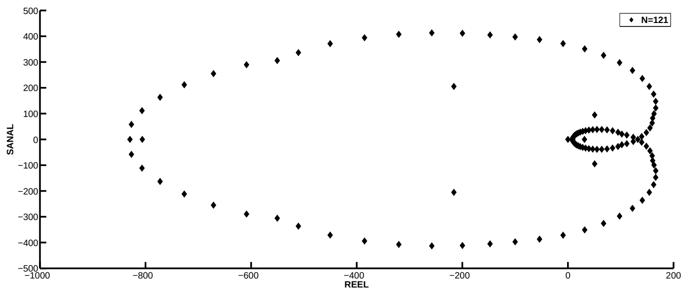
Şekil 5.12: Şok benzeri dalganın $N = 61$ için Kuintik B-spline DQM yöntemi ile elde edilen özdeğerlerinin grafikleri



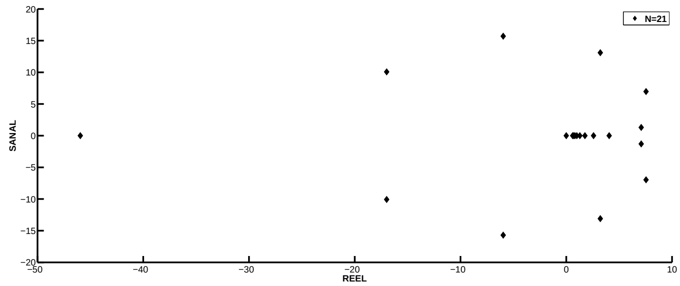
Şekil 5.13: Şok benzeri dalganın $N = 81$ için Kuintik B-spline DQM yöntemi ile elde edilen özdeğerlerinin grafikleri



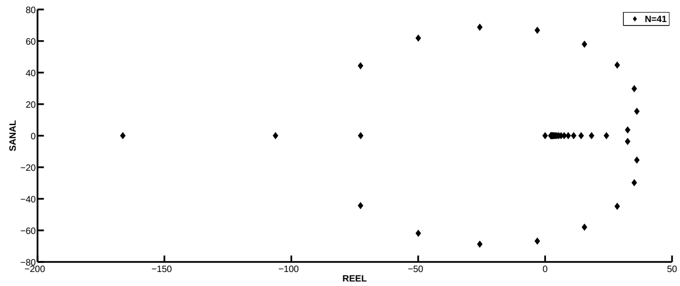
Şekil 5.14: Şok benzeri dalganın $N = 101$ için Kuintik B-spline DQM yöntemi ile elde edilen özdeğerlerinin grafikleri



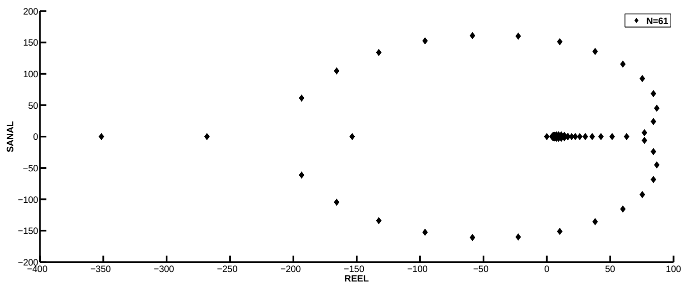
Şekil 5.15: Şok benzeri dalganın $N = 121$ için Kuintik B-spline DQM yöntemi ile elde edilen özdeğerlerinin grafikleri



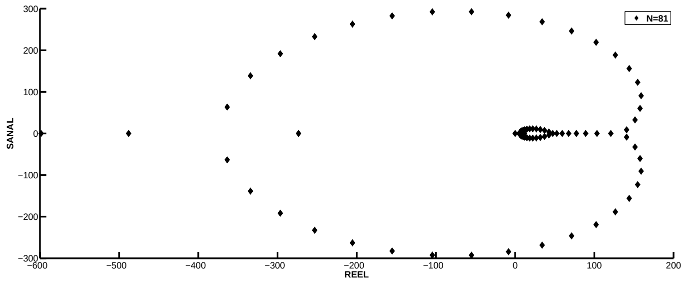
Şekil 5.16: Şok benzeri dalganın $N = 21$ için Kuartik B-spline DQM yöntemi ile elde edilen özdeğerlerinin grafikleri



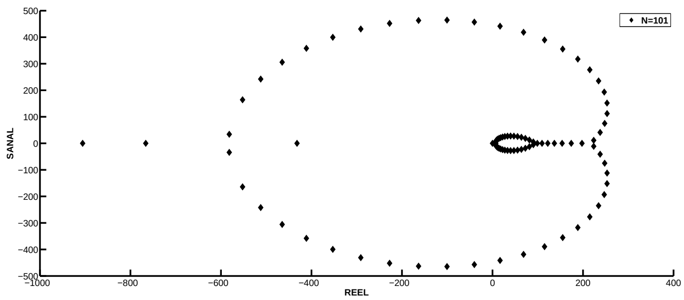
Şekil 5.17: Şok benzeri dalganın $N = 41$ için Kuartik B-spline DQM yöntemi ile elde edilen özdeğerlerinin grafikleri



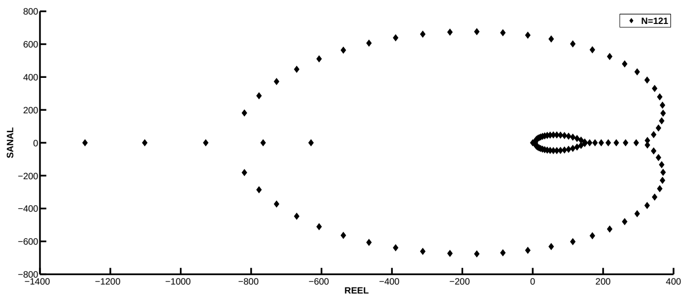
Şekil 5.18: Şok benzeri dalganın $N = 61$ için Kuartik B-spline DQM yöntemi ile elde edilen özdeğerlerinin grafikleri



Şekil 5.19: Şok benzeri dalganın $N = 81$ için Kuartik B-spline DQM yöntemi ile elde edilen özdeğerlerinin grafikleri



Şekil 5.20: Şok benzeri dalganın $N = 101$ için Kuartik B-spline DQM yöntemi ile elde edilen özdeğerlerinin grafikleri



Şekil 5.21: Şok benzeri dalganın $N = 121$ için Kuartik B-spline DQM yöntemi ile elde edilen özdeğerlerinin grafikleri

Tablo 5.5: Şok benzeri dalgada düğüm noktalarının sayılarına göre mutlak değeri en büyük özdeğerler.

	Kuintik B-spline DQM					
Düğüm nokta sayısı	21	41	61	81	101	121
$\mid Re\,(\lambda_{\max})\mid$	20.5417	83.9200	189.3202	336.7929	545.0097	829.5248
$\mid Sa\,(\lambda_{\max})\mid$	1.6568	7.4688	39.1720	116.7320	242.0811	412.9202
	Kuartik B-spline DQM					
Düğüm nokta sayısı	21	41	61	81	101	121
$\mid Re\,(\lambda_{\max})\mid$	45.9508	166.3706	351.4984	598.4487	905.5934	1271.8797
$\mid Sa\,(\lambda_{\max})\mid$	15.7014	68.7637	160.8740	292.5904	464.5428	675.8866

5.3.1 Sonuç

Bu bölümde, mBurgers' denklemi Kuintik B-spline DQM ve Kuartik B-spline DQM yöntemleri ile şok benzeri dalga probleminin nümerik çözümleri elde edildi. Elde edilen L_2 ve L_∞ hata normlarına ait sonuçlar literatürde mevcut olan bazı sonuçlarla karşılaştırılarak tablolar halinde verildi. Analitik çözümü bulunan test problemde yakınsama oran analizi yapıldı ve elde edilen sonuçlar tablo halinde verildi. Kuintik B-spline DQM ve Kuartik B-spline DQM yöntemlerinin kararlılık analizi matris kararlılık analizi ile mevcut test probleme ait özdeğerler elde edilerek ve tablolar halinde verilerek yapıldı. Elde edilen özdeğerlerin grafikleri verildi ve sonuçların kararlılık kriterleri ile uyumlu olduğu görüldü. Tablolar incelendiğinde şok benzeri dalga çözümü için Kuintik B-spline DQM ve Kuartik B-spline DQM yöntemler ile seçtiğimiz değerler için elde edilen sonuçların literatürdeki bazı sonuçlara göre zaman zaman daha iyi olduğu, zaman zaman da karşılaştırılan sonuçlarla uyumlu olduğu görüldü. Test probleme ait Kuintik B-spline DQM ve Kuartik B-spline DQM ile elde edilen çözümlerin grafikleri verildi.

KAYNAKLAR

[1] J. N. Reddy, *An introduction to Nonlinear Finite Element Analysis*, Oxford University Press Inc., New York, 2004.

[2] R. Bellman, B. Kashef, J. Casti, *Differential quadrature: a tecnique for the rapid solution of nonlinear differential equations*, **Journal of Computational Physics**, 10:(1972) 40-52.

[3] R. Bellman, B. Kashef, E. S. Lee, R. Vasudevan, *Differential Quadrature and Splines*, Computers and Mathematics with Applications, **Pergamon**, Oxford, 1: (1976) 371-376.

[4] J. R. Quan, C. T. Chang, *New sightings in involving distributed system equations by the quadrature methods-I*, **Comput. Chem. Eng.**, 13: (1989) 779-788.

[5] J. R. Quan, C. T. Chang, *New sightings in involving distributed system equations by the quadrature methods-II*, **Comput. Chem. Eng.**, 13: (1989) 717-724.

[6] I. Bonzani, *Solution of non-linear evolution problems by parallelized collocation-interpolation methods*, **Computers & Mathematics and Applications,** 34:(1997) 71-79.

[7] J. Cheng, W. D. Biao, Shan-Yi, *A theoretical analysis of piezoelectric/composite laminate with larger-amplitude deflection effect, Part II: Hermite differential quadrature method and application*, **International Journal of Solids and Structures** 42 (2005) 6181–6201.

[8] D. C. O'Mahoney, *A Differential Quadrature solution of the two-dimensional inverse heat conduction problem,* **Int. Comm. Heat Mass Transfer**, Vol. 30, No. 8 (2003) 1061-1070.

[9] C. Shu, Y.L. Wu, *Development of RBF-DQ method for derivative approximation and its application to simulate natural convection in concentric annuli*, **Computational Mechanics** 29 (2002) 477–485.

[10] H. Zhong, *Spline-based differential quadrature for fourth order equations and its application to Kirchhoff plates*, **Applied Mathematical Modelling,** 28 (2004) 353–366.

[11] Alper Korkmaz, *Bazı tek boyut kısmi diferensiyel denklemlerin B-spline diferensiyel quadrature metotlar ile sayısal çözümleri*, Doktora Tezi, Osmangazi Üniversitesi, Eskisehir, 2010.

[12] A. Korkmaz, I. Dağ, *Cubic B-spline differential quadrature methods for the advection-diffusion equation,* **International Journal of Numerical Methods for Heat & Fluid Flow,** 22: (2012) 1021-1036.

[13] A. Korkmaz, I. Dağ, *Cubic B-spline differential quadrature methods and stability for Burgers' equation,* **Engineering Computations: International Journal for Computer-Aided Engineering and Software,** Vol. 30 No. 3 (2013) 320-344.

[14] A. Korkmaz, I. Dağ, *Numerical Simulations of Boundary-Forced RLW Equation with Cubic B-Spline-based Differential Quadrature Methods*, **Arab J Sci Eng.**, (2012) DOI 10.1007/s13369-012-0353-8.

[15] A. Korkmaz, I. Dağ, *Numerical algorithms for solutions of Korteweg-de Vries Equation,* **Wiley Periodicals, Inc. Numer Methods Partial Differential Eq 26**:(2010) 1504–1521.

[16] A. Korkmaz, I. Dağ, *A differential quadrature algorithm for simulations of nonlinear Schrödinger equation*, **Computers and Mathematics with Applications** 56 (2008) 2222–2234.

[17] A. Korkmaz, I. Dağ, *A differential quadrature algorithm for nonlinear Schrödinger equation*, **Nonlinear Dyn** (2009) 56: 69–83, DOI 10.1007/s11071-008-9380-0.

[18] A. Korkmaz, I. Dağ, *Solitary wave simulations of Complex Modified Korteweg–de Vries Equation using differential quadrature method*, **Computer Physics Communications** 180 (2009) 1516–1523.

[19] A. Korkmaz, I. Dağ, *Crank-Nicolson – Differential quadrature algorithms for the Kawahara equation*, **Chaos, Solitons and Fractals** 42 (2009) 65–73.

[20] A. Korkmaz, I. Dağ, *Polynomial based differential quadrature method for numerical solution of nonlinear Burgers equation*, **Journal of Franklin Institute** 348 (2011) 2863-2875.

[21] A. Korkmaz, I. Dağ, *Numerical simulations of complex modified KdV equation using polynomial differential quadrature method*, **International Journal of Mathematics and Statistics,** (2011) v:10.

[22] A. Korkmaz, I. Dağ, *Shock wave simulations using Sinc Differential Quadrature Method*, **Engineering Computations:International Journal for Computer-Aided Engineering and Software** Vol. 28 No. 6, (2011) pp. 654-674.

[23] I. Dağ, A. Korkmaz, B. Saka, *Cosine Expansion-Based Differential Quadrature Algorithm for Numerical Solution of the RLW Equation*, **Wiley Periodicals, Inc. Numer Methods Partial Differential Eq 26**:(2010) 544–560.

[24] A. Korkmaz, A. M. Aksoy, I. Dağ, *Quartic B-spline Differential Quadrature Method,* **International Journal of Nonlinear Science** Vol.11 (2011) No.4,pp.403-411.

[25] B. Saka, I. Dağ, Y. Dereli, A. Korkmaz, *Three different methods for numerical solution of the EW equation*, **Engineering Analysis with Boundary Elements** 32 (2008) 556–566.

[26] G. Arora, B. K. Singh, *Numerical solution of Burgers equation with modified cubic B-spline differential quadrature method*, **Appl. Math. Comput.**(2013) 224: 166–177.

[27] C. Shu, *Differential Quadrature and its Application in Engineering*, Springer-Verlag London Ltd., 2000.

[28] M. K. Jain, *Numerical Solution of Differential Equations*, John Wiley & Sons (Asia) Pte. Ltd. 1984.

[29] S. Tomasiello, *Numerical stability of DQ solutions of wave problems*, **Numer. Algor.**, Vol. 57 No. 3,(2011) pp. 289-312.

[30] Turabi Geyikli, *Finite element studies of the modified KdV equation*, Ph. D. Thesis, University College of North Wales, Bangor, (U.K.), 1994.

[31] İdris Dağ, *Studies of B-spline Finite Elements*, Ph. D. Thesis, University College of North Wales, Bangor, Gwynedd (U.K.),1994.

[32] P. M. Prenter, *Splines and variational methods*, Wiles, New York, 1975.

[33] C. H. Su, C.S. Gardner, *Derivation of the Korteweg–de Vries and Burgers equation*, **J. Math. Phys.** 10, (1969), 536–539.

[34] H. Grad, P. N. Hu, *Unified shock profile in a plasma*, **Phys. Fluids** 10 (1967) 2596–2601.

[35] R. S. Johnson, *A non-linear equation incorporating damping and dispersion*, **J. Fluid Mech.** 42 (1970) 49.

[36] R. S. Johnson, *Shallow water waves in a viscous fluid, the undular bore*, **Phys. Fluids** 15 (1972) 1693.

[37] J. Canosa, J. Gazdag, *The Korteweg–de Vries–Burgers' equation*, **J. Comp. Phys**. 23 (1977) 393.

[38] A. H. A. Ali, L.R.T. Gardner, G.A. Gardner, *Numerical study of the KdVB equation using B-spline finite elements*, **J. Math.Phys. Sci.** 27 (1) (1993) 37.

[39] L. R. T. Gardner, G. A. Gardner, A. H. A. Ali, *Simulations of solitons using quadratic spline finite elements*, **Comput. Methods Appl. Mech. Engrg**. 92 (1991) 231.

[40] S. I. Zaki, *A quintic B-spline finite elements scheme for the KdVB equation*, **Comput. Meth. Appl. Mech. Engrg.** 188 (2000) 121–134.

[41] S. I. Zaki, *Solitary waves of the Korteweg-de Vries–Burgers' equation*, **Comput. Phys. Commun**. 126 (2000) 207–218.

[42] B. Saka, I. Dağ, *Quartic B-spline Galerkin approach to the numerical solution of the KdVB equation*, **Appl. Math. Comput**. 215 (2009) 746–758.

[43] B. Sahu, R. Roychoudhury, *Travelling wave solution of Korteweg-de Vries–Burger's equation*, **Czech. J. Phys.** 53 (2003) 517–527.

[44] H. Demiray, *A travelling wave solution to the KdV–Burgers equation*, **Appl. Math. Comput.** 154 (2004) 665–670.

[45] M. A. Helal, M. S. Mehanna, *A comparison between two different methods for solving KdV–Burgers equation*, **Chaos Soliton. Fract.** 28 (2006) 320–326.

[46] D. Kaya, *On the solution of a Korteweg–de Vries like equation by the decomposition method*, **Int. J. Comput. Math.** 72 (1999) 531–539.

[47] D. Kaya, *An application of the decomposition method for the KdVB equation*, **Appl. Math. Comput.** 152 (2004) 279–288.

[48] H. Bateman, *Some recent researches on the motion of fluids*, **Montly Weather Rev.** 43 (1915) 163-170.

[49] J. M. Burgers, *A mathematical model illustrating the theory of turbulance*, **Adv. Appl. Mech.**, 1 (1948) 171-190.

[50] J. D. Cole, *On a quasi-linear parabolic equations occuring in aerodynamics*, **Quart. Appl. Math**. 9 (1951) 225-236.

[51] J. Caldwell, P. Smith, *Solution of Burgers' equation with a large Reynolds number*, **Appl. Math. Modelling** 6 (1982) 381-385.

[52] S. Kutluay, A. R. Bahadır, A. Özdeş, *Numerical solution of one dimensional Burgers' equation explicit and exact-explicit finite difference method*, **J. Comput. Appl. Math.**103 (1999) 251-261

[53] R. C. Mittal, P. Singhal, Numerical solution of Burgers' equation, **Comm. Numer. Methods Engrg.** 9 (1993) 397-406.

[54] R. C. Mittal, P. Singhal, T. V. Singh, *Numerical solution of periodic Burger equation,* **Indian J. Pure Appl. Math.** 27 (7) (1996) 689-700.

[55] M. B. Abd-el-Malek, S. M. A. El Mansi, *Group theoretic methods applied to Burgers' equation*, **J. Comput. Appl. Math.** 115 (2000) 1-12.

[56] A. Dogan, *A Galerkin finite element approach to Burgers' equation*, **Appl. Math. Comput.** 157 (2004) 331-346.

[57] T. Öziş, E. N. Aksan, A. Özdeş, *A finite element approach for solution of Burgers' equation*, **Appl. Math. Comput.** 139 (2003) 417-428.

[58] L. R. T. Gardner, G. A. Gardner, A. Dogan, *A Petrov-Galerkin finite element scheme for Burgers' equation*, **Arab. J. Sci. Engrg**. 22 (1997) 99-109.

[59] L. R. T. Gardner, G. A. Gardner, A. Dogan, *A least-squares finite element scheme for Burgers' equation*, University of Wales, Bangor, **Mathematics, Preprint** 96.01,1996.

[60] S. Kutluay, A. Esen, I. Dağ, *Numerical solutions of the Burgers' equation by the least-squares quadratic B-spline finite element method*, **J. Comput. Appl. Math.**167 (2004) 21-33.

[61] H. Nguyen, J. Reynen, *A space-time finite element approach to Burgers' equation* , in:C. Taylor, E. Hinton, D. R. J. Owen, E. Onate (Eds.), **Numerical methods for non-linear Problems**, Vol. 2, Pineridge Publisher, Swansea, (1982) 718-728.

[62] A. H. A. Ali, G. A. Gardner, L. R. T. Gardner, *A collocation solution for Burgers' equation using cubic B-spline finite elements*, **Comput. Methods. Appl. Mech. Engrg.** 100 (1992) 325-337.

[63] M. A. Ramadan, T. S. El-Danaf, Abd. Alaal E.l., *A Numerical solution of Burgers' equation using septic B-splines*, **Chaos Solitons and Fractals**, 26 (2005) 1249-1258.

[64] I. Dağ, D. Irk, B. Saka, *Numerical solution of Burgers' equation using cubic B-splines*, **Appl. Math. Comput.** 163 (2005) 199-211.

[65] I. Dağ, Y. Dereli, *Numerical solutions of KdV equation usingradial basis functions*, **Appl. Math. Modelling**, 32:(2008) 535-546.

[66] A. A. Soliman, *Collocation solution of the Korteweg-de Vries Equation using septic splines,* **Int. J. Comput. Math.**, Vol. 81 No. 3,(2004) pp. 325-331.

[67] M. A. Ramadan, T. S. El-Danaf, *Numerical treatment for the modified burgers equation*, **Math. Comput. in Simul.**, 70 (2005) 90-98.

[68] Y. Duan , R. Liu, Y. Jiang, *Lattice Boltzmann model for the modified Burgers' equation*, **Appl. Math. and Comput.** 202 (2008) 489–497.

[69] B. Saka, I. Dağ, D. Irk, *Numerical Solution of the Modified Burgers Equation by the Quintic B-spline Galerkin Finite Element Method*, **Int. J. Math. Statis**. 1 (2007).

[70] D. Irk, *Sextic B-spline collocation method for the modified Burgers' equation*, **Kybernetes**, 38 (9), (2009) 1599-1620.

[71] T. Roshan, K. S. Bhamra, *Numerical solutions of the modified Burgers' equation by Petrov-Galerkin method*, **Appl. Math. Comput.** 218 (2011) 3673-3679.

[72] R. P. Zhang, X. J. Yu, G. Z. Zhao, *Modified Burgers' equation by the local discontinuous Galerkin method*, **Chin. Phys. B**, *22(3)* (2013) *030210-1 030210-5.*

[73] A. G. Bratsos, *A fourth-order numerical scheme for solving the modified Burgers equation*, **Computers and Mathematics with Applications** 60 (2010) 1393-1400.

[74] D. J. Korteweg, G. De Veries, *On the change of form of long waves advancing in a rectangular canal and on a new type of long stationary waves*, **Phil. Mag.**,39(5): 422-443 (1895).

[75] M. J. Ablowitz, P.A. Clarkson, *Solitons, Nonlinear Evolution Equations and Inverse Scattering*, Cambridge University Press, Cambridge, 1991.

[76] M. J. Ablowitz, H.Segur, *Solitons and Inverse Scattering Transform*, SIAM, Philadelphia, 1981.

[77] R. Bullough, P.Caudrey, *Solitons vol 17 in "Topics in Current Physics"*, Springer, Berlin, 1980.

[78] P. G. Drazin, R. S. Johnson, *Solitons: an Introduction*, Cambridge University Press, Cambridge, 1996.

[79] R. M. Miura, *Korteweg-de Vries equation and generalizations. I. A remarkable explicit nonlinear transformation*, **J. Math. Phys.** 9 (1968) 1202–1204.

[80] T. Nagatani, *TDGL and MKdV equations for jamming transition in the lattice models of traffic*, **Physica A** 264 (1999) 581-592.

[81] J. Zhou, Z.-K.Shi, J.-L. Cao, *Nonlinear analysis of the optimal velocity difference model with reaction-time delay*, **Physica A** 396 (2014) 77–87.

[82] C. S. Gardner, J. M. Greene, M. D. Kruskal, M. R. Miura, *Method for solving the Korteweg–de Vries equation*, **Phys. Lett.** A 19 (1967) 1095–1097.

[83] C. H. Su, C. S. Gardner, *Korteweg–de Vries equation and generalizations, III –Derivation of the Korteweg–de Vries equation and Burgers equation*, **J. Math.Phys.** 10 (3) (1969) 536–539.

[84] M. Salahuddin, *Ion temperature effect on the propagation of ion acoustic solitary waves in a relativistic magnetoplasma*, **Plasma Phys. Control. Fusion** 32 (1990) 33–41.

[85] G. A. Gardner, A. H. A. Ali, L. R. T. Gardner, *Solutions for the modified Korteweg–de Vries equation*, in: G.N. Pande, J. Middleton (Eds.), **Numerical Methods in Engineering**, vol. 1, Elsevier Applied Science, London, (1990) pp. 590–597.

[86] A. Wazwaz, *New sets of solitary wave solutions to the KdV, mKdV, and the generalized KdV equations*, **Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation** 13 (2008) 331–339.

[87] A. H. Salas, *Exact solutions to mKdV equation with variable coefficients*, **Applied Mathematics and Computation** 216 (2010) 2792–2798.

[88] D. Kaya, *An application for the higher order modified KdV equation by decomposition method*, **Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation** 10 (2005) 693–702.

[89] L. R. T. Gardner, G. A. Gardner, T. Geyikli, *Solitary wave solutions of the MKdV- equation*, **Comput. Methods Appl. Mech. Eng.** 124 (1995) 321-333.

[90] A. Jeffrey, T. Kakutani, *Weak nonlinear dispersive waves: a discussion centered around the KdV equation*, **SIAM Rev.** 14 (1972) 522.

[91] YU.A. Berezin, V.I. Karpman, *Nonlinear evolution of disturbances in plasmas and other dispersive media*, **Soviet Phys.** JETP 24 (1967) 1049-1056.

[92] B. Saka, I. Dağ, *Quartic B-spline collocation method to the numerical solutions of the Burgers equation*, **Chaos Soliton. Fract.** (2007) Vol. 32 pp. 1125–37.

[93] S. L. Harris, *Sonic shocks governed by the modified Burgers' equation*, **Eur. J. Appl. Math.** 6 (1996) 75-107.

[94] R. Bellman, B. Kashef, E. S. Lee, R. Vasudevan, *Differential Quadrature and Splines*, **Computers and Mathematics with Applications***, Pergamon, Oxford*, (1976) pp. 371-6.

[95] I. J. Schoenberg, *Contributions to the problem of approximation of equidistant data by analytic functions*, Quart. Appl. Math. 4 (1946) 45-99

[96] W. Cheney, D. Kincaid, *Numerical Mathematics and Computing* (Sixth Edition), Thomson, 2008.

[97] S. B. Gazi Karakoç, *Sonlu elemanlar yöntemi ile modifiye edilmiş eşit genişlikli dalga denkleminin sayısal çözümleri*, Doktora Tezi, İnönü Üniversitesi, Malatya, 2011.

ÖZGEÇMİŞ

Ad Soyad	**:**	Ali BAŞHAN
Doğum Yeri ve Tarihi	**:**	Batman / 1980
Adres	**:**	Niyazi Mısri Sosyal Bilimler Lisesi, Malatya
E-posta	**:**	alibashan@gmail.com
Lisans	**:**	Marmara Üniversitesi, Atatürk Eğitim Fakültesi, Matematik Öğretmenliği
Yüksek Lisans	**:**	Fırat Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, Matematik Anabilim Dalı, Uygulamalı Matematik
Mesleki Deneyim	**:**	2003- MEB

Yayın Listesi

1.) S.Battal Gazi Karakoç, Turabi Geyikli and **Ali Başhan**, "A numerical solution of the Modified Regularized Long Wave (MRLW) equation using quartic B-splines", TWMS Journal of Appl. Eng. Math.,Vol.3, No.2, 231-244, 2013.

Tezden Türetilen Yayınlar / Sunumlar

1.) **Ali Başhan**, S.Battal Gazi Karakoç, Turabi Geyikli, "Approximation of the KdVB equation by the quintic B-spline differential quadrature method", Kuwait Journal of Science, in press.

2.) S.Battal Gazi Karakoç, **Ali Başhan** and Turabi Geyikli, "Two different methods for numerical solution of the modifed Burgers' equation" The Scientific World Journal Vol. 2014, 13 pages, Doi.10.1155/2014/780269

3.) **Ali Başhan**, S.Battal Gazi Karakoç, Turabi Geyikli, "A Numerical solution of the mKdV equation via the quintic B-Spline differential quadrature method", Karatekin Mathematics Days, June11-13, 2014, Çankırı-TURKEY.

4.) Turabi Geyikli, **Ali Başhan**, S.Battal Gazi Karakoç, "A Solution of KdVB Equation by using Quintic B-spline Differential Quadrature Method" Second International Eurasian Conference on Mathematical Sciences and Applications, August 26-29, 2013, Bosnia and Herzegovina.

5.) S.Battal Gazi Karakoç, Turabi Geyikli and **Ali Başhan,** "A Numerical solution of the Modified Regularized Long Wave (MRLW) Equation Using Quartic B-Splines", Second International Eurasian Conference on Mathematical Sciences and Applications, August 26-29, 2013, Bosnia and Herzegovina.