T.C.
İNÖNÜ ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

# TANJANT DEMETLER ÜZERİNDE CHEEGER-GROMOLL METRİKLİ BAZI YAPILAR

Ahmet KAZAN

DOKTORA TEZİ
MATEMATİK ANABİLİM DALI

MALATYA
MART 2015

Tezin Başlığı: **Tanjant Demetler Üzerinde Cheeger-Gromoll Metrikli Bazı Yapılar**

Tezi Hazırlayan: **Ahmet KAZAN**

Sınav Tarihi: **27 Mart 2015**

Yukarıda adı geçen tez, Jürimizce değerlendirilerek Matematik Anabilim Dalında Doktora Tezi olarak kabul edilmiştir.

**Sınav Jüri Üyeleri**

**Tez Danışmanı:** **Prof. Dr. H. Bayram KARADAĞ** ...........................
(İnönü Üniversitesi)

**Prof. Dr. Mehmet BEKTAŞ** ...........................
(Fırat Üniversitesi)

**Doç. Dr. Ayhan TUTAR** ...........................
(Ondokuz Mayıs Üniversitesi)

**Doç. Dr. Erol KILIÇ** ...........................
(İnönü Üniversitesi)

**Doç. Dr. M. Kemal ÖZDEMİR** ...........................
(İnönü Üniversitesi)

**Prof. Dr. Alaattin ESEN**
Enstitü Müdürü

*Sevgili eşim Sema'ya ve biricik kızım Elif'e...*

**ONUR SÖZÜ**

Doktora Tezi olarak sunduğum "Tanjant Demetler Üzerinde Cheeger-Gromoll Metrikli Bazı Yapılar" başlıklı bu çalışmanın bilimsel ahlak ve geleneklere aykırı düşecek bir yardıma başvurmaksızın tarafımdan yazıldığını ve yararlandığım bütün kaynakların, hem metin içinde hem de kaynakçada yöntemine uygun biçimde gösterilenlerden oluştuğunu belirtir, bunu onurumla doğrularım.

Ahmet Kazan

# ÖZET

Doktora Tezi

TANJANT DEMETLER ÜZERİNDE CHEEGER-GROMOLL METRİKLİ BAZI YAPILAR

Ahmet KAZAN

İnönü Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Anabilim Dalı

112+v sayfa

2015
Danışman: Prof. Dr. H. Bayram KARADAĞ

Beş bölümden oluşan bu tezin giriş bölümünde konuyla ilgili bazı genel değerlendirmeler yapılmış ve bu konuya temel olan bazı çalışmalara yer verilmiştir.

İkinci bölümde, tezin orijinal bölümlerinde kullanılacak olan bazı temel kavramlar sunulmuştur.

Üçüncü bölümde öncelikle tanjant demetler üzerinde doğal metrik kavramı tanımlanarak bazı sonuçlar verilmiş ve ardından da tanjant demetler üzerinde doğal metrik türlerinden biri olan Cheeger-Gromoll (C-G) metrik tanımlanarak bu metrikle ilgili bazı geometrik sonuçlar verilmiştir.

Tezin dördüncü ve beşinci bölümleri orijinal çalışmalardan oluşmakta olup, dördüncü bölümde ilk olarak C-G metrikli hemen hemen parakontakt tanjant demetler tanımlanmış ve bu tanjant demetlerin normalliğini karakterize eden teorem ifade edilmiştir. Ayrıca, C-G metrikli parakontakt, K-parakontakt ve para-Sasakian tanjant demetler tanımlanarak bu kavramlarla ilgili bazı sonuçlar elde edilmiştir. Bu bölümde son olarak da, C-G metrikli hemen hemen parakontakt tanjant demetlerin eğrilikleri ile ilgili bazı sonuçlar verilmiştir.

Beşinci ve son bölümde ise, ilk önce bir $M$ manifoldu üzerinde metalik yapı kavramı ifade edilerek $TM$ tanjant demeti üzerinde $TM$ metalik yapı kavramı tanımlanmıştır. Daha sonra C-G metrikle donatılmış bir metalik tanjant demetin metalik Riemannian tanjant demet olma şartı elde edilmiştir. Son olarak da, C-G metrikle donatılmış metalik Riemannian tanjant demetlerin bir sınıfı olan Golden Riemannian tanjant demetlerin lokal olarak ayrıştırılabilir olmasıyla ilgili bir teorem verilmiştir.

ANAHTAR KELİMELER: Tanjant Demet, Doğal Metrik, Cheeger-Gromoll Metrik, Parakontakt Manifold, Metalik Yapı.

# ABSTRACT


Ph.D. Thesis

SOME STRUCTURES WITH CHEEGER-GROMOLL METRIC ON TANGENT BUNDLES



Ahmet KAZAN

İnönü University
Graduate School of Natural and Applied Sciences
Department of Mathematics



112+v pages

2015
Supervisor: Prof. Dr. H. Bayram KARADAĞ



In the introduction chapter of this thesis consisting of five chapters, some general evaluations have been done about the subject and some studies which are main into this subject have been given.

In the second chapter, some fundamental notions which will be used in the original chapters of this thesis have been presented.

In the third chapter, firstly the notion of natural metric has been determined on tangent bundles and some results have been given about it. Later, Cheeger-Gromoll (C-G) metric which is a type of the natural metrics on tangent bundles has been determined and some geometric results have been given about this metric.

The fourth and fifth chapters of the thesis consist of the original studies. In the fourth chapter, firstly almost paracontact tangent bundles with C-G metric has been determined and then a theorem which characterizes the normality of these tangent bundles has been expressed. Also, paracontact, K-paracontact and para-Sasakian tangent bundles with C-G metric have been determined and some results have been obtained about these notions. In this chapter, finally some conclusions about the curvatures of almost paracontact tangent bundles with C-G metric have been given.

In the fifth chapter, first the notion of metallic structure on a manifold $M$ has been expressed and the notion of $TM$ metallic structure on a tangent bundle $TM$ have been determined. Later, a condition for a metallic tangent bundle which has been equipped with C-G metric to be a metallic Riemannian tangent bundle has been obtained. Finally, a theorem for a Golden Riemannian tangent bundle which is a class of the metallic Riemannian tangent bundles equipped with C-G metric to be locally decomposable has been given.



KEY WORDS: Tangent Bundle, Natural Metric, Cheeger-Gromoll Metric, Paracontact Manifold, Metallic Structure.

# TEŞEKKÜR

Beni bu konuda çalışmaya teşvik ederek, desteğini esirgemeden bilgi ve tecrübeleriyle yönlendiren tez danışmanı hocam Sayın Prof. Dr. H. Bayram KARADAĞ'a;

lisansüstü öğrenimim boyunca beni yönlendiren bölüm başkanı hocam Sayın Prof. Dr. Sadık KELEŞ'e, seminerlerimizde yaptığımız çalışmaları dinleyerek önerilerde bulunan Sayın hocam Doç. Dr. Erol KILIÇ'a ve tezin yazımı esnasında karşılaştığım problemlerde desteğini esirgemeyen Sayın hocam Doç. Dr. M. Kemal ÖZDEMİR'e;

bu süreçte sabır göstererek bana sürekli destek olan Sevgili eşim Sema'ya, öğrenim hayatım boyunca bana maddi ve manevi desteklerini hiçbir zaman esirgemeyen anneme ve babama;

ayrıca, doktora öğrenimim süresince *2211-Yurt İçi Lisansüstü Burs Programı* kapsamında çalışmamı maddi yönden destekleyen TÜBİTAK'a

teşekkürlerimi sunarım.

# İÇİNDEKİLER

# BÖLÜM 1

# GİRİŞ

$M$ bir $C^\infty$ manifold olsun. $M$ manifoldunun herhangi bir $p$ noktasındaki tanjant uzayı $T_pM$ olmak üzere, $M$'nin tüm $p$ noktalarındaki $T_pM$ tanjant uzaylarının ayrık birleşimi olan

$$TM = \bigcup_{p\in M} T_pM$$

ye $M$'nin *tanjant demeti* denir.

Bir $(M, g)$ Riemann manifoldunun $TM$ tanjant demetinin geometrisi, matematik ve fiziğin birçok alanı için oldukça önemlidir. Son yıllarda literatürde tanjant demetlerin lokal ve global geometrik özellikleri ile ilgili birçok çalışmaya rastlanmaktadır. Bu alanda çalışmalar yapılırken, $\forall X, Y \in C^\infty(TM)$ ve $(p, u) \in TM$ için

***(i)*** $\bar{g}_{(p,u)}(X^h, Y^h) = g_p(X, Y)$

***(ii)*** $\bar{g}_{(p,u)}(X^h, Y^v) = 0$

şartlarını sağlayan ve $g$'ye göre *doğal metrikler* olarak adlandırılan $\bar{g}$ metriklerinin değişik tipleri kullanılmıştır. Tanjant demetlerin geometrisi, ilk olarak 1958 yılında *Sasaki metrik* olarak adlandırılan ve bir M diferensiyellenebilir manifoldu üzerindeki $g$ Riemann metriği yardımıyla

***(i)*** $\hat{g}_{(p,u)}(X^h, Y^h) = g_p(X, Y)$

***(ii)*** $\hat{g}_{(p,u)}(X^h, Y^v) = 0$

***(iii)*** $\hat{g}_{(p,u)}(X^v, Y^v) = g_p(X, Y)$

şeklinde tanımlanan yeni bir $\hat{g}$ metriği kullanılarak Sasaki tarafından çalışılmıştır [1]. Daha sonra tanjant demetler, $(M, g)$ üzerindeki $\nabla$ Levi-Civita konneksiyonuna göre yatay ve dikey altdemetlerine ayrıştırılabilmiştir ve bu durum, Dombrowski tarafından

"Bir $(p,u)$ noktasındaki tanjant demetler,

$$T_{(p,u)}TM = \mathcal{H}_{(p,u)} \oplus \mathcal{V}_{(p,u)}$$

olacak şekilde yatay ve dikey altdemetlerine ayrıştırılabilirler."
şeklindeki önermeyle ifade edilmiştir [2]. Ardından da bir $TM$ tanjant demetinin Lie Braket'i, $TM$ üzerinde $\hat{\nabla}$ Levi-Civita konneksiyonu ve $\hat{R}$ Riemann eğrilik tensörü [2] ve [3]'te elde edilmiştir.

Sasaki metriğinden farklı bir diğer doğal metrik olan *Cheeger-Gromoll metrik*, $M$ üzerindeki $g$ Riemann metriği yardımıyla

***(i)*** $\tilde{g}_{(p,u)}(X^h, Y^h) = g_p(X,Y)$

***(ii)*** $\tilde{g}_{(p,u)}(X^h, Y^v) = 0$

***(iii)*** $\tilde{g}_{(p,u)}(X^v, Y^v) = \frac{1}{1+r^2}\{g_p(X,Y) + g_p(X,u)g_p(Y,u)\}$, $r = \sqrt{g(u,u)}$

şeklinde Musso ve Tricerri tarafından, [4]'teki Cheeger ve Gromoll'un çalışmasından faydalanılarak tanımlanmıştır [5]. Ardından, $(TM, \tilde{g})$'nın $\tilde{\nabla}$ Levi-Civita konneksiyonu ve $\tilde{R}$ Riemann eğrilik tensörü [6] ve [7]'de verilmiştir.

Son zamanlarda Cheeger-Gromoll metrikli tanjant demetlerin geometrisi birçok matematikçi tarafından çalışılmaktadır ( [8–13]...).

Diğer taraftan kontakt geometri, fizik ve matematiğin değişik alanlarında sıkça kullanılan bir konudur. Kontakt geometri ilk olarak Christian Huygens, Barrow ve Isaac Newton'un çalışmalarıyla ortaya çıkmıştır. Kontakt dönüşümler teorisi daha sonraları S. Lie tarafından bazı diferensiyel denklemlerin çözümünü elde etmek için geliştirilmiştir. 1970'lerin başlarında kontakt geometride, topolojik metotlar önemli bir rol almaya başladı. Fakat, global topolojik sonuçların alınması 1980'lerin ortalarını buldu. Bundan sonra, 3-boyutlu kontakt geometri ve topoloji çalışmalarının yararlı faaliyetler olduğu görüldü ve daha yüksek boyutlu kontakt topolojiyi anlamak için önemli adımlar atılmaya başlandı.

20. yüzyılın ilk yarısında E. Cartan ve Darboux'un kontakt geometrinin gelişiminde büyük katkıları olmuştur. Ayrıca kontakt manifoldlarda önemli bir yeri olan Sasakian manifoldların tanımı 1960'lı yıllarda Japon matematikçi S. Sasaki tarafın-

dan verilmiştir. Yine aynı yıllarda yaşayan M. Gray, K. Ogiue ve W. M. Bootby gibi matematikçilerin bu konuyla ilgili çalışmaları dikkat çekmektedir.

Ayrıca kontakt geometri, pür matematiğin diğer alanlarıyla da bağlantılar içerir ve mekanik, optik, termodinamik ve kontrol teorisinin uygulama alanlarında da önemli bir yere sahiptir. Günümüzde de kontakt geometri ve kontakt geometriden esinlenerek ortaya çıkan parakontakt geometri ile ilgili pek çok matematikçi çalışmalar yapmaya devam etmektedir ( [14–23]...).

Diğer taraftan, altın orandan esinlenerek ortaya çıkmış olan $J^2 - J - I = 0$ şartını sağlayan $J$ golden yapısının bir genellemesi olan ve $J^2 - pJ - qI = 0$ şartını sağlayan $J$ yapısı, metalik yapı olarak bilinmekte ve $p$ ve $q$ pozitif tamsayılarının aldığı farklı değerlere göre bu yapı, golden yapı dışında silver yapı, bronze yapı, copper yapı, subtle yapı ve nickel yapı gibi sınıflara ayrılmaktadır. Son yıllarda, çoğu golden yapılarla ilgili olmak üzere, metalik yapılarla ilgili birçok çalışma yapılmaktadır ( [24–28]...).

Doktora tezi olarak hazırlanan bu çalışma beş bölümden oluşmaktadır. İkinci bölüm tezde kullanılacak olan temel kavramlara ayrılmaktadır. Bu bölümün birinci alt bölümünde, Riemann manifoldlar üzerinde bazı önemli kavramlar verilmektedir. İkinci alt bölümde ise, öncelikle tanjant demet kavramı ifade edilerek vektör alanlarının yatay ve dikey liftleri verilmekte ve bu liftler yardımıyla $TM$ tanjant demeti üzerinde Lie braket tanımlanmaktadır. Daha sonra, tanjant demetler üzerinde doğal hemen hemen kompleks yapı tanımlanarak bu yapıyla ilgili bazı karakterizasyonlar verilmektedir.

Üçüncü bölümün birinci alt bölümünde, doğal metrikler tanımlanarak bu metriğe göre tanjant demetin Levi-Civita konneksiyonuyla ilgili bazı sonuçlar verilmektedir. İkinci alt bölümde, doğal metriklerin özel bir sınıfı olan Cheeger-Gromoll metrik tanımlanmakta ve yatay ve dikey liftlere göre Levi-Civita konneksiyonu elde edilmeye çalışılmaktadır. Üçüncü alt bölümde, Cheeger-Gromoll metrikli tanjant demetlerin Riemann eğrilik tensörü elde edilmekte ve son alt bölümde ise Cheeger-Gromoll metrikli tanjant demetlerin kesitsel eğrilikleri ve skalar eğriliği verilmektedir.

Dördüncü bölüm, tezin orijinal kısımlarının başladığı bölüm olup dört alt bölümden oluşmaktadır. Bu bölümde önce, (2n+1)-boyutlu bir $(M, g)$ Riemann manifoldunun parakontakt yapısıyla ilgili bazı kavramlar hatırlatılmaktadır. Daha sonra ilk alt bölümde, Cheeger-Gromoll (C-G) metrikli bir $TM$ tanjant demeti üzerinde hemen hemen parakontakt yapı ve temel 2-form kavramları tanımlanarak bu kavramlarla ilgili bazı hesaplamalar yapılmaktadır. İkinci alt bölümde, uzun hesaplamalar sonunda C-G metrikli hemen hemen parakontakt tanjant demetler için normallik şartı elde edilmektedir. Üçüncü alt bölümde, parakontakt C-G metrik tanjant demet, K-parakontakt C-G metrik tanjant demet, C-G para-Sasakian tanjant demet kavramları tanımlanarak bu kavramlarla ilgili bazı karakterizasyonlar verilmektedir. Dördüncü ve son alt bölümde ise, bir $TM$ hemen hemen parakontakt C-G metrik tanjant demetinin $\tilde{R}$ Riemann eğrilik tensörü ve $\tilde{K}$ kesitsel eğriliği ile ilgili bazı sonuçlar bulunmakta ve son olarak da bir $TM$ tanjant demetinin ortonormal bazları yardımıyla, $TM$ hemen hemen parakontakt C-G metrik tanjant demetinin $\tilde{S}$ Ricci eğriliği ve $\tilde{\sigma}$ skalar eğriliği elde edilmektedir.

Son bölüm olan beşinci bölüm ise üç alt bölümden oluşmaktadır. Birinci alt bölümde, $p$ ve $q$ iki pozitif tamsayı olmak üzere $(p, q)$-metalik sayılar ve bir $M$ manifoldu üzerinde metalik yapı kavramları tanımlanmakta ve $p$ ve $q$'nun çeşitli değerlerine göre metalik Riemannian yapıların bazı sınıflarından bahsedilmektedir. İkinci alt bölümde, tanjant demetler üzerinde $\tilde{J}$ metalik yapısı tanımlanarak $N_{\tilde{J}}$ Nijenhuis tensörü yardımıyla $\tilde{J}$ metalik yapısının integrallenebilirlik şartı elde edilmekte ve ardından Cheeger-Gromoll metriğiyle donatılmış bir metalik tanjant demetin metalik Riemannian tanjant demet olma şartı bulunmaktadır. Üçüncü alt bölümde ise, Cheeger-Gromoll metriğiyle donatılmış metalik Riemannian tanjant demetlerin bir sınıfı olan bir golden Riemannian tanjant demetin lokal olarak ayrıştırılabilir olmasıyla ilgili bir sonuç verilmektedir.

# BÖLÜM 2

# TEMEL KAVRAMLAR

Tezin orijinal kısımlarında kullanılacak olan bazı temel kavramların verildiği bu bölüm iki alt bölümden oluşmaktadır. Birinci alt bölümde, bir diferensiyellenebilir manifold ve bir $g$ iç çarpımı yardımıyla Riemann manifold kavramı tanımlanarak Riemann manifoldlar üzerinde bazı önemli kavramlar verilmektedir. İkinci alt bölümde, öncelikle bir $M$ diferensiyellenebilir manifoldunun $TM$ tanjant demeti ifade edilmekte ve vektör alanlarının yatay ve dikey liftleri verilmektedir. Ayrıca lokal koordinatlarda liftler yardımıyla $TM$ tanjant demeti üzerinde Lie braket tanımlanmaktadır. Son olarak da, tanjant demetler üzerinde doğal hemen hemen kompleks yapı tanımlanarak bu yapıyla ilgili bazı karakterizasyonlar verilmektedir.

## 2.1 Riemann Manifoldları

**Tanım 2.1.1.** *$M$ sayılabilir bir baza sahip topolojik Hausdorff uzayı olsun. $M$'ye* ***topolojik manifold*** *denir, eğer bir $n \in \mathbb{N}$ ve herbir $p \in M$ noktası için $p$'nin bir $U_p$ açık komşuluğu herhangi bir $V_p \subset \mathbb{R}^n$ açık altkümesine homeomorfik olacak şekilde varsa. Buradaki $n$ tamsayısı $M$'nin* ***boyutu****dur ve bundan sonra $n$-boyutlu bir $M$ manifoldu $M^n$ ile gösterilecektir [29].*

**Tanım 2.1.2.** *$M^n$ bir topolojik manifold olsun. $U$, $M$'nin açık ve bağlantılı bir altkümesi ve $\varphi : U \longrightarrow \mathbb{R}^n$ de bir homeomorfizm olsun. Bu taktirde $(U, \varphi)$'ye $M$ üzerinde bir* ***lokal koordinat*** *denir. $M$ üzerindeki lokal koordinatların bir $\mathcal{A} = \{(U_\alpha, \varphi_\alpha) | \alpha \in I\}$ kolleksiyonuna* ***$C^r$-atlas*** *denir, eğer*

***i)*** $M = \bigcup\limits_{\alpha} U_\alpha,$

***ii)*** $\varphi_\beta \circ \varphi_\alpha^{-1}|_{\varphi_\alpha(U_\alpha \cap U_\beta)} : \varphi_\alpha(U_\alpha \cap U_\beta) \longrightarrow \mathbb{R}^n$ *uygun geçiş dönüşümleri $\forall \alpha, \beta \in I$ için $C^r$ iseler.*

*Eğer $\mathcal{A}$, $M$ üzerinde bir $C^r$-atlas ise, bu taktirde $M$ üzerinde bir $(U,\varphi)$ lokal koordinatına $\mathcal{A}$ ile* ***uyumlu*** *denir, eğer $\mathcal{A} \cup \{(U,\varphi)\}$ bir $C^r$-atlas ise. Bir $\hat{\mathcal{A}}$ $C^r$-atlası* ***maksimaldir****, eğer kendisiyle uyumlu tüm lokal koordinatları içeriyorsa. Bu durumda $\hat{\mathcal{A}}$'ya $M$ üzerinde bir* ***$C^r$-yapı*** *ve $(M,\hat{\mathcal{A}})$ ikilisine de bir* ***diferensiyellenebilir $C^r$-manifold*** *denir [29].*

**Tanım 2.1.3.** *$M$ bir $C^\infty$ manifold olsun. $M$ üzerinde, vektör alanlarının uzayı $\chi(M)$ ve reel değerli $C^\infty$ fonksiyonların halkası $C^\infty(M,\mathbb{R})$ olmak üzere,*

$$g : \chi(M) \times \chi(M) \to C^\infty(M,\mathbb{R})$$

*şeklinde bir iç çarpım tanımlı ise $M$'ye bir* ***Riemann manifoldu*** *denir. Buradaki $g$ işlemine $M$ üzerinde iç çarpım, metrik tensör, Riemann metriği veya diferensiyellenebilir metrik denir [30].*

**Tanım 2.1.4.** *$M$ bir $C^\infty$ manifold olsun. $M$ üzerinde vektör alanlarının uzayı $\chi(M)$ olmak üzere,*

$$\begin{aligned} \nabla : \chi(M) \times \chi(M) &\to \chi(M) \\ (X,Y) &\to \nabla(X,Y) = \nabla_X Y \end{aligned}$$

*fonksiyonu $\forall X,Y,Z \in \chi(M)$ ve $\forall f,g \in C^\infty(M,\mathbb{R})$ için,*

1. $\nabla_{fX+gY} Z = f\nabla_X Z + g\nabla_Y Z$,
2. $\nabla_X(fY) = f\nabla_X Y + (Xf)Y$

*özelliklerini sağlıyorsa $\nabla$'ya $M$ manifoldu üzerinde bir* ***afin konneksiyon*** *ve $\nabla_X$'e de $X$'e göre* ***kovaryant türev operatörü*** *denir [30].*

**Tanım 2.1.5.** *$M$ bir Riemann manifoldu ve $\nabla$ da $M$ üzerinde bir afin konneksiyon olsun. Eğer*

1. *$\nabla$, $C^\infty$ sınıfındandır,*
2. *$M$'nin bir $A$ bölgesi üzerinde $C^\infty$ olan $\forall X,Y \in \chi(M)$ için*

$$\nabla_X Y - \nabla_Y X = [X,Y] \quad \text{(Sıfır torsiyon özelliği)},$$

3. $M$'nin bir $A$ bölgesi üzerinde $C^\infty$ olan $\forall X, Y \in \chi(M)$ ve $\forall p \in M$ noktası için

$$X_p g(Y,Z) = g(\nabla_X Y, Z)|_p + g(Y, \nabla_X Z)|_p$$

*(Konneksiyonun metrikle bağdaşabilme özelliği)*

*özellikleri sağlanıyorsa $\nabla$ konneksiyonuna $M$ üzerinde bir **Riemann konneksiyonu** veya $M$'nin **Levi-Civita konneksiyonu** ve $\nabla_X$'e de $X$'e göre **Riemann anlamında kovaryant türev operatörü** denir [30].*

**Teorem 2.1.1.** *Bir Riemann manifoldu üzerinde bir tek Riemann konneksiyonu vardır. Bu konneksiyon, **Kozsul özdeşliği** olarak bilinen*

$$\begin{aligned} 2g(\nabla_X Y, Z) &= Xg(Y,Z) + Yg(Z,X) - Zg(X,Y) \\ &\quad -g(X,[Y,Z]) + g(Y,[Z,X]) + g(Z,[X,Y]) \end{aligned}$$

*eşitliği ile karakterize edilir [31].*

**Tanım 2.1.6.** *$M$ bir $C^\infty$ manifold olsun. $\chi(M)$, $M$ üzerinde vektör alanlarının kümesini ve $\chi^*(M)$ de $\chi(M)$'nin dualini göstersin. Ayrıca $T_s^r$ de*

$$T : \underbrace{\chi(M) \times \chi(M) \times ... \times \chi(M)}_{r\text{-}tane} \times \underbrace{\chi^*(M) \times \chi^*(M) \times ... \times \chi^*(M)}_{s\text{-}tane} \longrightarrow C^\infty(M,\mathbb{R})$$

*şeklindeki bütün lineer dönüşümlerin kümesini göstersin. Bu taktirde, $M$'de $T_s^r$'nin bir $K$ elemanına **(r,s)-tipinde bir tensör alanı** denir. Ayrıca bu $K$ tensör alanına r-yinci dereceden kovaryant, s-yinci dereceden kontravaryant tensör alanı denir. $T_0^r = T^r$, $T_s^0 = T_s$ ve $T_0^0 = C^\infty(M,\mathbb{R})$'dir [32].*

**Tanım 2.1.7.** *$M$ bir $C^\infty$ manifold ve $M$ üzerinde r-formların uzayı $\Lambda^r(M)$ olsun. Bu taktirde*

1. *Eğer $f \in C^\infty(M,\mathbb{R})$ ise $df(X) = X(f)$,*

2. *$\theta, w \in \Lambda^r(M)$ olmak üzere*

$$d(\theta \wedge w) = d\theta \wedge w + (-1)^r \theta \wedge dw,$$

3. *$d^2 = 0$*

*şartlarını sağlayan bir*

$$d : \Lambda^r(M) \longrightarrow \Lambda^{r+1}(M)$$

*şeklindeki d dönüşümüne* ***dış türev*** *denir.*

*$w$ bir r-form olmak üzere*

$$\begin{aligned} dw(X_0, X_1, ..., X_r) &= \frac{1}{r+1}\{\sum_{i=0}^{r}(-1)^i X_i w(X_0, X_1, ..., \hat{X}_i, ..., X_r) \\ &+ \sum_{0\leq i<j\leq r}(-1)^{i+j} w([X_i, X_j], X_1, ..., \hat{X}_i, ..., \hat{X}_j, ..., X_r)\} \end{aligned}$$

*dir. Özel olarak, eğer $w$ bir 1-form ise*

$$dw(X_0, X_1) = \frac{1}{2}\{X_o w(X_1) - X_1 w(X_0) - w([X_0, X_1])\}$$

*ve eğer $w$ bir 2-form ise*

$$\begin{aligned} dw(X_0, X_1, X_2) &= \frac{1}{3}\{X_0(w(X_1, X_2)) - X_1(w(X_0, X_2)) + X_2(w(X_0, X_1)) \\ &-w([X_0, X_1], X_2) + w([X_0, X_2], X_1) - w([X_1, X_2], X_0)\} \end{aligned}$$

*dır [33].*

**Tanım 2.1.8.** *$M$ bir diferensiyellenebilir manifold ve $X$ ile $Y$ de $M$ üzerinde diferensiyellenebilir vektör alanları olsunlar. Bir $f \in C^\infty(M, \mathbb{R})$ için*

$$[,] : \chi(M) \times \chi(M) \longrightarrow \chi(M)$$
$$[X, Y](f) = X(Y(f)) - Y(X(f))$$

*şeklinde tanımlanan $[,]$ fonksiyonuna $X$ ile $Y$'nin* ***Lie (parantez) operatörü*** *denir.*

Lie operatörü $\forall X, Y, Z \in \chi(M)$ ve $\forall f, g \in C^\infty(M, \mathbb{R})$ için aşağıdaki özellikleri sağlar:

***(i)*** $[X, Y] = -[Y, X]$,

***(ii)*** $[aX + bY, Z] = a[X, Z] + b[Y, Z]$,

***(iii)*** $[[X, Y], Z] + [[Y, Z], X] + [[Z, X], Y] = 0$,

***(iv)*** $[fX, gY] = fg\,[X, Y] + fX(g)Y - gY(f)X.$

Buradaki *(iii)* özelliğine **Jakobi Özdeşliği** denir [34].

**Tanım 2.1.9.** *$M$, $n$-boyutlu bir Riemann manifoldu olsun. Bu durumda, $M$ üzerinde*

$$\begin{aligned} R : \chi(M) \times \chi(M) \times \chi(M) &\rightarrow \chi(M) \\ (X, Y, Z) &\rightarrow R(X, Y, Z) = R(X, Y)Z \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} R(X, Y)Z &= \nabla_X \nabla_Y Z - \nabla_Y \nabla_X Z - \nabla_{[X,Y]} Z \\ &= ([\nabla_X, \nabla_Y] - \nabla_{[X,Y]})Z \end{aligned}$$

*şeklinde tanımlı tensöre $\nabla$ konneksiyonunun **Riemann eğrilik tensörü** denir [31].*

**Tanım 2.1.10.** *$M$ bir Riemann manifoldu ve $g$ de $M$'nin Riemann metriği olsun. Bu durumda*

$$\begin{aligned} R : \chi(M) \times \chi(M) \times \chi(M) \times \chi(M) &\rightarrow \chi(M) \\ (X, Y, Z, W) &\rightarrow R(X, Y, Z, W) = g(R(X, Y)Z, W) \end{aligned}$$

*şeklinde tanımlanan 4. mertebeden kovaryant tensöre, $M$ üzerinde **Riemann Christoffel eğrilik tensörü** denir.*

*$M$ üzerinde aşağıdaki bağıntılar geçerlidir:*

***(i)*** $R(X, Y)Z + R(Y, Z)X + R(Z, X)Y = 0,$

***(ii)*** $R(X, Y, Z, W) = -R(Y, X, Z, W),$

***(iii)*** $R(X, Y, Z, W) = -R(X, Y, W, Z),$

***(iv)*** $R(X, Y, Z, W) = R(Z, W, X, Y)$ *[30].*

Buradaki *(i)* özelliği **I. Bianchi özdeşliği** olarak bilinir.

**Tanım 2.1.11.** *$(M, g)$ bir Riemann manifoldu olsun. $T_P M$ tanjant uzayının iki boyutlu bir altuzayı $\pi$ olmak üzere, $V, W \in \pi$ tanjant vektörleri için $Q$ fonksiyonu*

$$Q(V, W) = g(V, V)g(W, W) - g(V, W)^2$$

*şeklinde tanımlansın.* $Q(V,W) \neq 0$ *olmak üzere*

$$K(V,W) = \frac{R(V,W,W,V)}{Q(V,W)} = \frac{g(R(V,W)W,V)}{Q(V,W)}$$

*ifadesine* $\pi$*'nin* ***kesitsel eğriliği*** *denir ve* $K(\pi)$ *ile gösterilir [35].*

*Eğer* $\{V,W\}$*,* $\pi$ *için bir ortonormal baz ise*

$$K(\pi) = g(R(V,W)W,V)$$

*olur. Ayrıca eğer* $K(\pi)$*,* $T_PM$*'deki herbir* $\pi$ *düzlemi ve* $M$*'nin herbir* $p$ *noktası için sabitse, bu taktirde* $M$*'ye* ***sabit eğrilikli uzay*** *denir. Bununla birlikte sabit* $k$ *eğrilikli uzay için*

$$R(X,Y)Z = k\,[g(Y,Z)X - g(X,Z)Y]$$

*eşitliği geçerlidir [32].*

**Tanım 2.1.12.** $(M,g)$ *n-boyutlu bir Riemann manifoldu ve* $\{e_1, e_2, ..., e_n\}$ *de* $M$*'nin lokal ortonormal vektör alanları olsunlar. Bu durumda*

$$\begin{aligned} S : \chi(M) \times \chi(M) &\rightarrow \mathbb{R} \\ (X,Y) &\rightarrow S(X,Y) = \sum_{i=1}^{n} g(R(e_i,X)Y,e_i) \end{aligned}$$

*şeklinde tanımlı (0,2)-tipindeki* $S$ *tensör alanına,* $M$ *üzerinde* ***Ricci eğrilik tensörü*** *denir. Ayrıca,*

$$r = \sum_{i=1}^{n} S(e_i,e_i)$$

*değerine de* $M$*'nin* ***skalar eğriliği*** *denir [32].*

## 2.2 Tanjant Demetler ve Tanjant Demetler Üzerinde Bazı Yapılar

**Tanım 2.2.1.** $M$*, n-boyutlu bir diferensiyellenebilir manifold olsun.* $M$*'nin* $TM$ ***tanjant demeti***

$$TM = \bigcup_{p \in M} T_pM = \{(p,u) |\ p \in M,\ u \in T_pM\}$$

*şeklinde verilir. Ayrıca*

$$\begin{aligned} \pi : TM &\longrightarrow M \\ (p,u) &\longrightarrow p \end{aligned}$$

*şeklindeki demet dönüşümüne $TM$'nin **doğal projeksiyonu** denir [36].*

Bu durumda, $M$'nin herbir $U$ açık kümesi için $\pi^{-1}(U) = TU$'dur.

$(U, \phi)$, $M$ üzerinde $(x_1, x_2, ..., x_n)$ lokal koordinatlarıyla birlikte bir koordinat komşuluğu olsun. Bu taktirde, $a = (a_1, a_2, ..., a_n) \in \mathbb{R}^n$ ve $\phi(p) = (p_1, p_2, ..., p_n)$ olmak üzere

$$\begin{aligned} \Phi : U \times \mathbb{R}^n &\longrightarrow TU \\ (p,a) &\longrightarrow \Phi(p,a) = a_i(\frac{\partial}{\partial x_i})_p \end{aligned}$$

şeklinde bir dönüşüm tanımlanabilir. $\Phi$ birebir bir dönüşümdür. Çünkü, eğer $u \in T_pM$, $p \in U$ ise, bu taktirde

$$u = u_i \left(\frac{\partial}{\partial x_i}\right)_p$$

dir. Sonuç olarak, $\Phi(p_1, ..., p_n, u_1, ..., u_n) = u$'dur. Bu nedenle $\Phi$,

$$\begin{aligned} \Phi' : \phi(U) \times \mathbb{R}^n &\longrightarrow TU \\ (p_1, ..., p_n, a_1, ..., a_n) &\longrightarrow \Phi'(p_1, ..., p_n, a_1, ..., a_n) = \Phi(p,a) \end{aligned}$$

şeklinde verilen birebir örten bir dönüşüm tanımlar. Bu durumda açıktır ki, $TM$ üzerinde bir tek topoloji vardır öyle ki, $M$'nin herbir $(U, \phi)$ koordinat komşuluğu için $TU$ kümesi $TM$'nin bir açık kümesidir ve yukarıdaki gibi tanımlı $\Phi : U \times \mathbb{R}^n \longrightarrow TU$ bir homeomorfizmdir. Böylece, $TU$ üzerinde $(x_i, u_i)$ lokal koordinatına sahip olunur ve $TM$'nin **indirgenmiş koordinatları** olarak adlandırılır [37].

### 2.2.1 Yatay ve Dikey Liftler

**Tanım 2.2.2.** *$(M, g)$, $\nabla$ Levi-Civita konneksiyonuna sahip bir Riemann manifoldu olsun. $TM$, $M$'nin tanjant demetini ve $\pi$ de $TM$'nin $M$ üzerine doğal projeksiyonunu* *belirtsin. Bu taktirde $\pi$'nin $d\pi$ diferensiyeli, $TTM$'den $TM$ üzerine bir $C^\infty$-dönüşümdür. Eğer $(p,u) \in TM$ ise, bu taktirde $(p,u)$'da $d\pi$'nin çekirdeği*

$$\mathcal{V}_{(p,u)} = \text{Çek}(d\pi|_{(p,u)})$$

*ile belirtilir ve $(p,u)$ noktasında $T_{(p,u)}TM$'nin **dikey altuzayı** olarak adlandırılır [9].*

Bizim için çok önemli olan yatay altuzay kavramının tanımlanması için, ilk olarak $(M,g)$ üzerinde Levi-Civita konneksiyonunun sebep olduğu

$$K_{(p,u)} : T_{(p,u)}TM \longrightarrow T_pM$$

konneksiyon dönüşümü oluşturulmalıdır.

**Tanım 2.2.3.** *$V$, $M$'de $p$'nin bir açık komşuluğu olsun, öyle ki*

$$\exp_p : T_pM \longrightarrow M$$

*exponential dönüşümü, $T_pM$'deki $0$'ın bir $V'$ komşuluğunu diffeomorfik olarak $V$ üzerine dönüştürsün. Ayrıca,*

$$\tau : \pi^{-1}(V) \longrightarrow T_pM$$

*de $T_pM$'de bir $C^\infty$-dönüşüm olsun, öyle ki bu dönüşüm $\forall Y \in \pi^{-1}(V)$'yi $q = \pi(Y)$'den $p$'ye, $V$'deki $p$ ve $q$ arasındaki tek geodezik eğri boyunca taşısın.*

*$u \in T_pM$ için $R_{-u}$,*

$$\begin{aligned} R_{-u} : T_pM &\longrightarrow T_pM \\ X &\longrightarrow R_{-u}(X) := X - u \end{aligned}$$

*şeklinde tanımlı bir dönüşüm olsun. Bu durumda, $\nabla$ Levi -Civita konneksiyonunun **konneksiyon dönüşümü**,*

$$\begin{aligned} K_{(p,u)} : T_{(p,u)}TM &\longrightarrow T_pM \\ Z &\longrightarrow K(Z) := d(\exp_p \circ R_{-u} \circ \tau)(Z) \end{aligned}$$

*şeklinde tanımlanır [9].*

Şimdi, $K$ konneksiyon dönüşümü için şu önemli sonucu verelim:

**Lemma 2.2.1.** *$(M,g)$, $\nabla$ Levi-Civita konneksiyonuna sahip bir Riemann manifoldu olsun. Bu taktirde, $Z \in C^{\infty}(TM)$ bir $Z : M \longrightarrow T_pM$ dönüşümü olmak üzere, $\nabla$'nın $K_{(p,u)} : T_{(p,u)}TM \longrightarrow T_pM$ konneksiyon dönüşümü, $X_p \in T_pM$ vektörü için*

$$K(dZ_p(X_p)) = (\nabla_X Z)_p$$

*eşitliğini sağlar [2].*

**İspat.** $Z$, $p \in M$'de $(p,u)$ değerini alan bir vektör alanı olsun. Ayrıca $\gamma$, $\gamma(0) = p$ ve $\dot{\gamma}(0) = X_p$ olacak şekilde bir geodezik eğri olsun. Bu taktirde, konneksiyon dönüşümünün tanımından,

$$\begin{aligned}
K_{(p,u)}(dZ_p(X_p)) &= d(\exp_p \circ R_{-u} \circ \tau)(dZ_p(X_p)) \\
&= d(\exp_p \circ R_{-u} \circ \tau)(dZ_p(\dot{\gamma}(0))) \\
&= d(\exp_p \circ R_{-u} \circ \tau)(dZ_p(d\gamma_0(\frac{d}{dt})_0)) \\
&= d(\exp_p \circ R_{-u} \circ \tau)(d(Z \circ \gamma)_0(\frac{d}{dt})_0) \\
&= \frac{d}{dt}(\exp_p \circ R_{-u} \circ \tau(Z(\gamma(t))))_{t=0} \\
&= \frac{d}{dt}(\exp_p(\tau(Z(\gamma(t))) - u))_{t=0} \\
&= \frac{d}{dt}(\exp_p(\tau(Z(\gamma(t)))) - \exp_p(u))_{t=0} \\
&= \frac{d}{dt}(\exp_p(\tau(Z(\gamma(t)))))_{t=0} - \frac{d}{dt}(\exp_p(u))_{t=0} \\
&= \frac{d}{dt}(\exp_p(\tau(Z(\gamma(t)))))_{t=0} - \frac{d}{dt}(\gamma_u(1))_{t=0} \\
&= \frac{d}{dt}(\exp_p(\tau(Z(\gamma(t)))))_{t=0} \\
&= d(\exp_p)_0(\frac{d}{dt}(\tau(Z(\gamma(t)))))_{t=0} \\
&= \frac{d}{dt}(\tau(Z(\gamma(t))))_{t=0} \\
&= \lim_{t \longrightarrow 0} \frac{\tau(Z(\gamma(t))) - \tau(u)}{t} \\
&= \lim_{t \longrightarrow 0} \frac{\tau(Z(\gamma(t))) - u}{t}
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \lim_{t \longrightarrow 0} \frac{\tau(Z(\gamma(t))) - Z(\gamma(0))}{t} \\
&= (\nabla_{\dot{\gamma}} Z)(0) \\
&= (\nabla_X Z)_p
\end{aligned}
$$

elde edilir ve bu da ispatı tamamlar. □

$\nabla$'nın $K$ konneksiyon dönüşümüyle donatılmasından sonra, artık yatay altuzay tanımı verilebilir.

**Tanım 2.2.4.** *$TM$ tanjant demetinin $(p,u)$ noktasındaki $T_{(p,u)}TM$ tanjant uzayının $\mathcal{H}_{(p,u)}$* ***yatay altuzayı***

$$\mathcal{H}_{(p,u)} = \text{\c{C}}ek(K_{(p,u)})$$

*şeklinde tanımlanır [9].*

**Önerme 2.2.1.** *$(p,u)$ noktasında $TM$ tanjant demetinin $T_{(p,u)}TM$ tanjant uzayı, onun yatay ve dikey altuzaylarının direkt toplamıdır. Yani,*

$$T_{(p,u)}TM = \mathcal{H}_{(p,u)} \oplus \mathcal{V}_{(p,u)}$$

*dur [1, 2].*

Yatay ve dikey altuzaylardan sonra, şimdi $M$ üzerinde tanjant vektörlerin yatay ve dikey liftleri tanımlanabilir.

**Tanım 2.2.5.** *$X \in T_pM$ bir tanjant vektör olsun. Bu taktirde, $(p,u) \in TM$ noktasında $X$'in* ***yatay lifti*** *$d\pi(X^h) = X$ olacak şekildeki tek $X^h \in \mathcal{H}_{(p,u)}$ vektörüdür. $(p,u)$'da $X$'in* ***dikey lifti*** *ise, $M$ üzerindeki her $f$ fonksiyonu için $X^v(df) = X(f)$ olacak şekildeki tek $X^v \in \mathcal{V}_{(p,u)}$ vektörüdür. Burada $df$, $(df)(p,u) = u(f)$ şeklinde tanımlı fonksiyondur [9].*

Şimdi bu yapı, tanjant vektörlerden vektör alanlarına genişletilebilir.

**Tanım 2.2.6.** *$TM$ üzerinde bir $X \in C^\infty(TM)$ vektör alanının yatay lifti, bir $(p,u)$ noktasındaki değeri $(p,u)$'da $X_p$'nin yatay lifti olan $X^h \in C^\infty(TTM)$ vektör alanıdır. Bir vektör alanının dikey lifti de benzer şekilde tanımlanabilir.*

*Daha açık olarak; eğer $X \in C^{\infty}(TM)$ ise, bu taktirde $\forall Z \in TM$ için*

$$d\pi(X^h)_Z = X_{\pi(Z)} \text{ ve } K(X^h)_Z = 0_{\pi(Z)}$$

*olacak şekilde, $X$'in **yatay lifti** denilen $TM$ üzerinde bir tek $X^h \in C^{\infty}(TTM)$ vektör alanı vardır.*

*$X^v$ **dikey lifti** de,*

$$d\pi(X^v)_Z = 0_{\pi(Z)} \text{ ve } K(X^v)_Z = X_{\pi(Z)}$$

*şartlarını sağlayan tek vektör alanıdır [9].*

• Şunu ifade edelim ki; $X \longrightarrow X^h$ ve $X \longrightarrow X^v$ dönüşümleri, $T_pM$ vektör uzayı ile, sırasıyla, $\mathcal{H}_{(p,u)}$ ve $\mathcal{V}_{(p,u)}$ altuzayları arasında izomorfizmlerdir.

• $X, Y \in T_pM$ tanjant vektörleri tek olarak $X = d\pi(\hat{Z})$ ve $Y = K(\hat{Z})$ şeklinde tanımlı olmak üzere, herbir $\hat{Z} \in T_{(p,u)}TM$ tanjant vektörü

$$\hat{Z} = X^h + Y^v$$

şeklinde yazılır.

### 2.2.2 Lokal Koordinatlarda Liftler

Bu alt bölümde, $M$ üzerinde lokal koordinatlara göre vektör alanlarının yatay ve dikey liftleri ifade edilmektedir.

$M$, n-boyutlu bir manifold ve $(x_1, x_2, ..., x_n) : U \subset M \longrightarrow \mathbb{R}$ reel değerli fonksiyonları da $M$ üzerinde lokal koordinatlar olsunlar. $v_1, v_2, ..., v_{2n} : TM \longrightarrow \mathbb{R}$ diferensiyellenebilir fonksiyonları $\forall i = 1, 2, ..., n$ ve $Y \in TM$ için

$$\begin{aligned} v_i &= x_i \circ \pi, \\ v_{n+i}(Y) &= Y(x_i) = dx_i(Y) \end{aligned}$$

şeklinde tanımlansın. Bu taktirde, $(v_1, v_2, ..., v_{2n}) : \pi^{-1}(U) \subset TM \longrightarrow \mathbb{R}^{2n}$'ler $TM$ üzerinde lokal koordinatlardır. Tanım 2.2.6 kullanılarak, $\forall Z \in TM$ ve $i = 1, 2, ..., n$ için

$$d\pi\left(\frac{\partial}{\partial v_i}\right)(f) = \frac{\partial}{\partial v_i}(f \circ \pi) = \frac{\partial}{\partial x_i}(f)$$

ve

$$d\pi\left(\frac{\partial}{\partial v_{n+i}}\right)(f)=\frac{\partial}{\partial v_{n+i}}(f\circ\pi)=\frac{\partial}{\partial v_{n+i}}(f(x))=0$$

olduğundan

$$d\pi\left(\left(\frac{\partial}{\partial v_i}\right)_Z\right)=\left(\frac{\partial}{\partial x_i}\right)_{\pi(Z)} \text{ ve } d\pi\left(\left(\frac{\partial}{\partial v_{n+i}}\right)_Z\right)=0$$

dır. Bu eşitlikler, $X\in C^\infty(TM)$ vektör alanının $X^h$ ve $X^v$ yatay ve dikey liftleri için bize aşağıdaki sonucu verir:

**Lemma 2.2.2.** *$(M,g)$ bir Riemannian manifold ve $X,Z\in C^\infty(TM)$ de $M$ üzerinde lokal olarak*

$$X=\sum_{i=1}^{n}\xi_i\frac{\partial}{\partial x_i} \text{ ve } Z=\sum_{i=1}^{n}\eta_i\frac{\partial}{\partial x_i}$$

*şeklinde ifade edilen vektör alanları olsunlar. Bu taktirde, $Z\in TM$ noktasında $X$'in yatay ve dikey liftleri, sırasıyla,*

$$(X^h)_Z=\sum_{i=1}^{n}\xi_i\frac{\partial}{\partial v_i}-(\sum_{i,j,k=1}^{n}\xi_j\eta_k\Gamma^i_{jk})\frac{\partial}{\partial v_{n+i}}$$

*ve*

$$(X^v)_Z=\sum_{i=1}^{n}\xi_i\frac{\partial}{\partial v_{n+i}}$$

*şeklinde verilir. Burada $\Gamma^i_{jk}$ katsayıları, $(M,g)$ üzerinde $\nabla$ Levi-Civita konneksiyonunun Christoffel sembolleridir [2].*

**İspat.** Dikey kısmı, Tanım 2.2.6'dan ortaya çıkar.

$X^h$ ve $X$'in $\pi$-bağlantılı olmaları gerçeği, yani $d\pi(X^h_Z)=X_{\pi(Z)}$ olması

$$d\pi\left(\left(\frac{\partial}{\partial v_i}\right)_Z\right)=\left(\frac{\partial}{\partial x_i}\right)_{\pi(Z)} \text{ ve } d\pi\left(\left(\frac{\partial}{\partial v_{n+i}}\right)_Z\right)=0$$

şartlarından ortaya çıkar.

Lokal koordinatlarda, $Z:M\longrightarrow TM$ dönüşümü $p=(x_1,...,x_n)\in M$ için

$$\begin{aligned} Z:M &\longrightarrow TM \\ p &\longrightarrow (x_1,...,x_n,\eta_1,...,\eta_n) \end{aligned}$$

şeklinde verilir. Bu nedenle,

$$
\begin{aligned}
dZ(X) &= dZ\left(\sum_{i=1}^{n} \xi_i \frac{\partial}{\partial x_i}\right) \\
&= \sum_{i=1}^{n} \xi_i \frac{\partial}{\partial v_i} + \sum_{i,k=1}^{n} \xi_i \frac{\partial \eta_k}{\partial x_i} \frac{\partial}{\partial v_{n+k}} \\
&= \sum_{i=1}^{n} \xi_i \frac{\partial}{\partial v_i} + \sum_{k=1}^{n} X(\eta_k) \frac{\partial}{\partial v_{n+k}} \\
&= \sum_{i=1}^{n} \xi_i \frac{\partial}{\partial v_i} + \sum_{i=1}^{n} X(\eta_i) \frac{\partial}{\partial v_{n+i}} \qquad (2.2.1)
\end{aligned}
$$

dir. $X_i = \frac{\partial}{\partial x_i}$ şeklinde ve $\nabla$'nın $\Gamma^i_{jn}$ Christoffel sembolleri de

$$
(\nabla_{X_j} X_n) = \sum_{i=1}^{n} \Gamma^i_{jn} X_i
$$

şeklinde ifade edilirse, bu taktirde $\nabla$ Levi-Civita konneksiyonu için aşağıdaki ifadeye ulaşılır:

$$
\begin{aligned}
\nabla_X Z &= \sum_{i=1}^{n} \nabla_X(\eta_i X_i) \\
&= \sum_{i=1}^{n} (X(\eta_i) X_i + \eta_i \nabla_X X_i) \\
&= \sum_{i=1}^{n} X(\eta_i) X_i + \sum_{i,j=1}^{n} \eta_i \xi_j \nabla_{X_j} X_i \\
&= \sum_{i=1}^{n} X(\eta_i) X_i + \sum_{i,j,k=1}^{n} \xi_j \eta_i \Gamma^k_{ji} X_k \\
&= \sum_{i=1}^{n} X(\eta_i) X_i + \sum_{i,j,k=1}^{n} \xi_j \eta_k \Gamma^i_{jk} X_i \\
&= \sum_{i=1}^{n} \{X(\eta_i) + \sum_{j,k=1}^{n} \xi_j \eta_k \Gamma^i_{jk}\} X_i.
\end{aligned}
$$

Tanım 2.2.6 ve Lemma 2.2.1'in bir sonucu olarak

$$
\begin{aligned}
K(dZ(X)) &= \nabla_X Z \\
&= \sum_{i=1}^{n} \left( \sum_{j=1}^{n} \left( \xi_j \left( \frac{\partial \eta_i}{\partial x_j} + \sum_{k=1}^{n} \Gamma^i_{jk} \eta_k \right)\right)\right) \frac{\partial}{\partial x_i}
\end{aligned}
$$

dir. Bu demektir ki, $K(dZ(X)) = 0$ dır ancak ve ancak $X(\eta_i) = -\sum\limits_{j=1}^{n} \xi_j \sum\limits_{k=1}^{n} \eta_k \Gamma^i_{jk}$ dır. Bunun anlamı da, $\nabla_X Z = 0$ dır ancak ve ancak $dZ(X)$, $K$'nın çekirdeğindedir.

Bu da $dZ(X)$'in (2.2.1)'den dolayı

$$\begin{aligned} dZ(X) &= \sum_{i=1}^{n} \xi_i \frac{\partial}{\partial v_i} + \sum_{i=1}^{n} X(\eta_i) \frac{\partial}{\partial v_{n+i}} \\ &= \sum_{i=1}^{n} \xi_i \frac{\partial}{\partial v_i} - \sum_{i=1}^{n} \left( \sum_{j,k=1}^{n} \xi_j \eta_k \Gamma^i_{jk} \right) \frac{\partial}{\partial v_{n+i}} \end{aligned}$$

formunda olması demektir. Bu nedenle

$$X^h = \sum_{i=1}^{n} \xi_i \frac{\partial}{\partial v_i} - \sum_{i=1}^{n} \left( \sum_{j,k=1}^{n} \xi_j \eta_k \Gamma^i_{jk} \right) \frac{\partial}{\partial v_{n+i}}$$

dir ve bu da $X$'in yatay lifti için ispatı tamamlar. □

Bu Lemmanın bir sonucu olarak, vektör alanlarının özel bir seçimi yapılarak şu sonuç verilebilir:

**Sonuç 2.2.1.** $(x_1, x_2, ..., x_n)$ *$M$'nin lokal koordinatları ve* $(v_1, v_2, ..., v_{2n})$ *de $TM$'nin yukarıdaki gibi tanımlı lokal koordinatları olsunlar. Eğer* $X_i = \frac{\partial}{\partial x_i}$ *ve* $U_i = \frac{\partial}{\partial v_i}$ *ise, bu taktirde*

$$(X_i)^v = U_{n+i} = \frac{\partial}{\partial v_{n+i}}$$

*ve*

$$\begin{aligned} (X_i)^h &= U_i - \sum_{j,k=1}^{n} (\Gamma^i_{jk} \circ \pi) v_{n+k} U_{n+j} \\ &= \frac{\partial}{\partial v_i} - \sum_{j,k=1}^{n} (\Gamma^i_{jk} \circ \pi) v_{n+k} \frac{\partial}{\partial v_{n+j}} \end{aligned}$$

*dir [2].*

**Tanım 2.2.7.** $(M, g)$ *bir Riemann manifoldu ve* $F : TM \longrightarrow TM$ *de $TM$ tanjant demetinin bir diferensiyellenebilir demet endomorfizmi olsun. Bu taktirde, $F$'nin* $F^h : TM \longrightarrow TTM$ *ve* $F^v : TM \longrightarrow TTM$ *yatay ve dikey liftleri*

$$F^h(\eta) = \sum_{i=1}^{n} \eta_i F(\partial_i)^h \text{ ve } F^v(\eta) = \sum_{i=1}^{n} \eta_i F(\partial_i)^v$$

*şeklinde tanımlanır. Burada,* $\eta = \sum_{i=1}^{n} \eta_i \partial_i \in \pi^{-1}(V)$, $\eta \in C^\infty(TM)$ *nin bir lokal ifadesidir [9].*

### 2.2.3 Tanjant Demet Üzerinde Lie Braket

Bu alt bölümde, $M$ üzerindeki vektör alanlarının yatay ve dikey liftleri yardımıyla, $M$'nin $TM$ tanjant demeti üzerinde Lie braketinin ifadesi verilmektedir.

**Teorem 2.2.1.** $(M, g)$, $\nabla$ *Levi-Civita konneksiyonu ve* $R$ *Riemann eğrilik tensörü ile birlikte bir Riemann manifoldu olsun. Bu durumda,* $M$*'nin* $TM$ *tanjant demeti üzerinde Lie braket aşağıdaki eşitlikleri sağlar:*

$\forall X, Y \in C^\infty(TM)$ *ve* $TM$*'de bir* $(p, u)$ *noktası için*

***(i)*** $[X^v, Y^v] = 0,$

***(ii)*** $\left[X^h, Y^v\right] = (\nabla_X Y)^v,$

***(iii)*** $\left[X^h, Y^h\right] = [X, Y]^h - (R(X, Y)u)^v$ *dir [2].*

**İspat.** **(i)** $(x_1, x_2, ..., x_n)$, $M$ üzerinde lokal koordinatlar ve $(v_1, v_2, ..., v_{2n})$ de $TM$ üzerinde indirgenmiş lokal koordinatlar olsunlar. Ayrıca, $X_i = \frac{\partial}{\partial x_i}$ ve $U_i = \frac{\partial}{\partial v_i}$ diyelim. Bu durumda, $i, j = 1, 2, ..., 2n$ için $[U_i, U_j] = 0$'dır. $X$ ve $Y$, $M$ üzerinde lokal olarak

$$X = \sum_{i=1}^{n} \xi_i X_i \text{ ve } Y = \sum_{k=1}^{n} \eta_k X_k$$

şeklinde verilen keyfi iki vektör alanı olsunlar. Bu taktirde, $\forall i, j, k = 1, 2, ..., n$ için

$$U_{n+j}(\xi_i \circ \pi) = U_{n+k}(\eta_k \circ \pi) = 0$$

dır. Bu demektir ki, herhangi iki $X^v$ ve $Y^v$ dikey liftinin Lie braketi için

$$\begin{aligned} [X^v, Y^v] &= \sum_{i,k} [(\xi_i \circ \pi)U_{n+i}, (\eta_k \circ \pi)U_{n+k}] \\ &= \sum_{i,k} \xi_i U_{n+i}(\eta_k \circ \pi)U_{n+k} - \eta_k U_{n+k}(\xi_i \circ \pi)U_{n+i} \\ &= 0 \end{aligned}$$

dır.

**(ii)** Tanım 2.2.6'ya göre biliyoruz ki, $d\pi(X^h_Z) = X_{\pi(Z)}$ ve $d\pi(Y^v_Z) = 0$'dır. Dolayısıyla,

$$d\pi\left(\left[X^h, Y^v\right]\right) = \left[d\pi(X^h), d\pi(Y^v)\right] = 0$$

dır ve bu nedenle, Tanım 2.2.6'dan $d\pi((\nabla_X Y)^v) = 0$ olduğundan

$$d\pi\left(\left[X^h, Y^v\right]\right) = d\pi((\nabla_X Y)^v)$$

ve benzer şekilde

$$d\pi\left(\left[X^h, Y^h\right]\right) = \left[d\pi(X^h), d\pi(Y^h)\right] = [X, Y]$$

eşitliklerine ulaşılır. Dolayısıyla Teoremin (ii) ve (iii) ifadeleri ispatlanırken, sadece sağ tarafların $K$ konneksiyon fonksiyonları hesaplanmalıdır. Bu ifadelerin hesaplanabilmesi için $(x_1, x_2, ..., x_n)$'ler $M$ için lokal koordinatlar olmak üzere, yine daha önceki $X_i = \frac{\partial}{\partial x_i}$ kısaltması kullanılacaktır. Tüm fonksiyonlar her elemana göre lineer olduklarından, her iki terimi de sadece $X, Y \in \{X_1, ..., X_n\}$ için hesaplamak yeterlidir.

Sonuç 2.2.1'deki

$$(X_i)^v = \frac{\partial}{\partial v_{n+i}}$$

ve

$$(X_i)^h = \frac{\partial}{\partial v_i} - \sum_{j,k=1}^{n} (\Gamma^i_{jk} \circ \pi) v_{n+k} \frac{\partial}{\partial v_{n+j}}$$

ifadeleri ile $\forall i, j \in \{1, 2, ..., 2n\}$ için $[U_i, U_j] = 0$ ve

$$U_{n+i}(v_{n+j}) = \delta_{ij}, \quad \delta_{ij} = \begin{cases} 1, & i = j \\ 0, & i \neq j \end{cases}$$

eşitlikleri kullanılırsa

$$\begin{aligned}
&\left[X_i^h, X_j^v\right] \\
&= \left[\frac{\partial}{\partial v_i} - \sum_{j,k=1}^{n} (\Gamma^i_{jk} \circ \pi) v_{n+k} \frac{\partial}{\partial v_{n+j}}, \frac{\partial}{\partial v_{n+j}}\right] \\
&= \nabla_{\left(\frac{\partial}{\partial v_i} - \sum\limits_{j,k=1}^{n} (\Gamma^i_{jk} \circ \pi) v_{n+k} \frac{\partial}{\partial v_{n+j}}\right)} \left(\frac{\partial}{\partial v_{n+j}}\right) - \nabla_{\left(\frac{\partial}{\partial v_{n+j}}\right)} \left(\frac{\partial}{\partial v_i} - \sum_{j,k=1}^{n} (\Gamma^i_{jk} \circ \pi) v_{n+k} \frac{\partial}{\partial v_{n+j}}\right) \\
&= \nabla_{\frac{\partial}{\partial v_i}} \frac{\partial}{\partial v_{n+j}} - \sum_{j,k=1}^{n} (\Gamma^i_{jk} \circ \pi) v_{n+k} \nabla_{\frac{\partial}{\partial v_{n+j}}} \frac{\partial}{\partial v_{n+j}} - \nabla_{\frac{\partial}{\partial v_{n+j}}} \frac{\partial}{\partial v_i} \\
&\quad + \sum_{j,k=1}^{n} (\Gamma^i_{jk} \circ \pi) \nabla_{\frac{\partial}{\partial v_{n+j}}} \left(v_{n+k} \frac{\partial}{\partial v_{n+j}}\right)
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \left[\frac{\partial}{\partial v_i}, \frac{\partial}{\partial v_{n+j}}\right] - \sum_{j,k=1}^{n} (\Gamma_{jk}^i \circ \pi) v_{n+k} \nabla_{\frac{\partial}{\partial v_{n+j}}} \frac{\partial}{\partial v_{n+j}} \\
&\quad + \sum_{j,k=1}^{n} (\Gamma_{jk}^i \circ \pi) \left( \left( \nabla_{\frac{\partial}{\partial v_{n+j}}} v_{n+k} \right) \frac{\partial}{\partial v_{n+j}} + v_{n+k} \nabla_{\frac{\partial}{\partial v_{n+j}}} \frac{\partial}{\partial v_{n+j}} \right) \\
&= \left[\frac{\partial}{\partial v_i}, \frac{\partial}{\partial v_{n+j}}\right] - \sum_{j,k=1}^{n} (\Gamma_{jk}^i \circ \pi) v_{n+k} \nabla_{\frac{\partial}{\partial v_{n+j}}} \frac{\partial}{\partial v_{n+j}} \\
&\quad + \sum_{j,k=1}^{n} (\Gamma_{jk}^i \circ \pi) \frac{\partial}{\partial v_{n+j}} (v_{n+k}) \frac{\partial}{\partial v_{n+j}} + \sum_{j,k=1}^{n} (\Gamma_{jk}^i \circ \pi) v_{n+k} \nabla_{\frac{\partial}{\partial v_{n+j}}} \frac{\partial}{\partial v_{n+j}} \\
&= \sum_{j,k=1}^{n} (\Gamma_{jk}^i \circ \pi) \delta_{jk} U_{n+j} \\
&= \sum_{k=1}^{n} (\Gamma_{jk}^i \circ \pi) U_{n+k}
\end{aligned}
$$

bulunur. Lemma 2.2.2'nin ispatındaki $\nabla_X Y$ için verilen formül ve Tanım 2.2.6'dan

$$
\begin{aligned}
K\left(\left[X_i^h, X_j^v\right]\right) &= K\left(\sum_{k=1}^{n} (\Gamma_{jk}^i \circ \pi) U_{n+k}\right) \\
&= \sum_{k=1}^{n} (\Gamma_{jk}^i \circ \pi) K(U_{n+k}) \\
&= \sum_{k=1}^{n} (\Gamma_{jk}^i \circ \pi) X_k \\
&= \sum_{k=1}^{n} (\Gamma_{jk}^i \circ \pi) \frac{\partial}{\partial x_k} \\
&= \nabla_{X_i} X_j
\end{aligned}
$$

ve dolayısıyla

$$
K\left(\left[X_i^h, X_j^v\right]_{(p,u)}\right) = \left(\nabla_{X_i} X_j\right)_p
$$

elde edilir. Diğer taraftan $K(X^v) = X$ olduğundan

$$
\begin{aligned}
& K\left((\nabla_{X_i} X_j)^v\right) = \nabla_{X_i} X_j \\
\Longrightarrow\ & K\left(\left[X_i^h, X_j^v\right]\right) = K\left((\nabla_{X_i} X_j)^v\right) \\
\Longrightarrow\ & \left[X_i^h, X_j^v\right] = \left(\nabla_{X_i} X_j\right)^v
\end{aligned}
$$

dir. Bu ise (ii)'yi ispatlar.

**(iii)** Yukarıdakine benzer yolla, $U_i(v_{n+j}) = 0$, $\forall i, j \in \{1, 2, ..., n\}$ ve $U_i(\Gamma_{kl}^j \circ \pi) = X_i(\Gamma_{kl}^j) \circ \pi$ olduğu göz önüne alınırsa

$$\begin{aligned}\left[X_i^h, X_j^h\right] &= \sum_{k,l,m=1}^{n} \{U_j(\Gamma_{il}^k \circ \pi) - U_i(\Gamma_{jl}^k \circ \pi) + (\Gamma_{il}^m \circ \pi)(\Gamma_{jm}^k \circ \pi) \\ &\qquad - (\Gamma_{jl}^m \circ \pi)(\Gamma_{im}^k \circ \pi)\} v_{n+l} U_{n+k}\end{aligned}$$

olduğu görülür.

Bu nedenle, yine $K(U_{n+i}) = X_i$ kullanılarak, Lemma 2.2.2'deki gibi $Z = (p, u)$ için

$$K\left(\left[X_i^h, X_j^h\right]_Z\right) = -\sum_{k=1}^{n} \eta_k R(X_i, X_j) X_k = -R(X_i, X_j) Z$$

elde edilir. Bu da (iii)'yi ispatlar. □

### 2.2.4 Tanjant Demet Üzerinde Doğal Hemen Hemen Kompleks Yapı

$TM$ tanjant demeti üzerinde doğal hemen hemen kompleks yapılar ilk olarak 1959 yılında Nagano tarafından çalışılmıştır [38].

Burada $TM$ tanjant demetinin, $(M, g)$ manifoldu üzerinde vektör alanlarının yatay ve dikey liftlerinin neden olduğu $J$ doğal hemen hemen kompleks yapısı elde edilmektedir. Ayrıca, $J$'nin integrallenebilir olması için gerek ve yeter şartın $(M, g)$'nin flat olması olduğu da görülmektedir.

**Tanım 2.2.8.** *$M$ bir diferensiyellenebilir manifold ve $TM$ de $M$'nin tanjant demeti olsun. $\forall A \in C^\infty(TTM)$ için $J : TTM \longrightarrow TTM$ lineer endomorfizmi*

$$d\pi(JA) = -K(A) \text{ ve } K(JA) = d\pi(A)$$

*şeklinde karakterize edilsin. Böylece, Tanım 2.2.6'dan*

$$J(X^h) = X^v \text{ ve } J(X^v) = -X^h$$

*olduğu görülür ve dolayısıyla, $J : TTM \longrightarrow TTM$ endomorfizmi $J^2 = -I_{TTM}$ şartını sağlar.*

*Bu nedenle $J$, $TM$ üzerinde bir hemen hemen kompleks yapıdır. Bu $J$ yapısına $TM$ üzerinde **doğal hemen hemen kompleks yapı** denir [29, 39].*

**Tanım 2.2.9.** *Bir $J$ hemen hemen kompleks yapısının $N$ Nijenhuis tensörü,*

$$N(A,B) = [A,B] + J\,[JA,B] + J\,[A,JB] - [JA,JB]$$

*şeklinde tanımlanır [29].*

**Önerme 2.2.2.** *$(M,g)$ bir Riemann manifoldu, $\nabla$ $M$ üzerinde Levi-Civita konneksiyonu ve $R$ de $\nabla$'nın Riemann eğrilik tensörü olsun. Ayrıca $N$ de $TM$ üzerinde $J$ hemen hemen kompleks yapısının Nijenhuis tensör alanı olsun. Bu taktirde, $\forall X,Y,Z \in C^{\infty}(TM)$ için*

$$K(N(X^v,Y^v)_Z) = R(X,Y)Z \text{ ve } d\pi(N(X^v,Y^v)_Z) = 0$$

*eşitlikleri sağlanır [2, 40].*

**İspat.** Tanım 2.2.8 ve Tanım 2.2.9'dan

$$\begin{aligned}
N(X^v,Y^v) &= [X^v,Y^v] + J\,[JX^v,Y^v] + J\,[X^v,JY^v] - [JX^v,JY^v] \\
&= J\left[-X^h,Y^v\right] + J\left[X^v,-Y^h\right] - \left[-X^h,-Y^h\right] \\
&= -J(\left[X^h,Y^v\right] + \left[X^v,Y^h\right]) - \left[X^h,Y^h\right]
\end{aligned}$$

bulunur. Dolayısıyla, Teorem 2.2.1'den

$$\begin{aligned}
K(N(X^v,Y^v)_Z) &= -K(J(\left[X^h,Y^v\right] + \left[X^v,Y^h\right])_Z) - K(\left[X^h,Y^h\right]_Z) \\
&= -d\pi(\left[X^h,Y^v\right]_Z + \left[X^v,Y^h\right]_Z) - K([X,Y]^h - (R(X,Y)Z)^v) \\
&= -d\pi((\nabla_X Y)^v - (\nabla_Y X)^v) - K([X,Y]^h) + K((R(X,Y)Z)^v) \\
&= -d\pi([X,Y]^v) + R(X,Y)Z \\
&= R(X,Y)Z
\end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned}
d\pi(N(X^v,Y^v)_Z) &= -d\pi(J(\left[X^h,Y^v\right] + \left[X^v,Y^h\right])_Z) - d\pi(\left[X^h,Y^h\right]_Z) \\
&= K(\left[X^h,Y^v\right]_Z + \left[X^v,Y^h\right]_Z) - d\pi([X,Y]^h - (R(X,Y)Z)^v) \\
&= K((\nabla_X Y)^v - (\nabla_Y X)^v) - d\pi([X,Y]^h) + d\pi((R(X,Y)Z)^v) \\
&= K([X,Y]^v) - d\pi([X,Y]^h) \\
&= [X,Y] - [X,Y] = 0
\end{aligned}$$

elde edilir ve dolayısıyla ispat tamamlanır. □

**Sonuç 2.2.2.** *$J$ hemen hemen kompleks yapısı integrallenebilirdir ancak ve ancak $M$ flat, yani $R \equiv 0$ dır [2, 40].*

**İspat.** Eğer $J$ integrallenebilir ise, bu taktirde $N \equiv 0$'dır ve dolayısıyla $R \equiv 0$ olduğu Önerme 2.2.2'den ortaya çıkar.

Tersine, eğer $R \equiv 0$ ise, bu taktirde $\forall X, Y \in C^\infty(TM)$ için

$$\begin{aligned}
N(X^v, Y^v) &= -J\left[X^h, Y^v\right] - J\left[X^v, Y^h\right] - \left[X^h, Y^h\right] \\
&= -J(\nabla_X Y)^v + J(\nabla_Y X)^v - [X, Y]^h + (R(X, Y)u)^v \\
&= J([Y, X]^v) - [X, Y]^h + (R(X, Y)u)^v \\
&= -[Y, X]^h - [X, Y]^h + (R(X, Y)u)^v \\
&= (R(X, Y)u)^v \\
&= 0,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
N(X^h, Y^h) &= \left[X^h, Y^h\right] + J\left[JX^h, Y^h\right] + J\left[X^h, JY^h\right] - \left[JX^h, JY^h\right] \\
&= \left[X^h, Y^h\right] + J\left[X^v, Y^h\right] + J\left[X^h, Y^v\right] - \left[X^v, Y^v\right] \\
&= \left[X^h, Y^h\right] + J(\left[X^v, Y^h\right] + \left[X^h, Y^v\right]) \\
&= [X, Y]^h - (R(X, Y)u)^v + J((\nabla_X Y)^v - (\nabla_Y X)^v) \\
&= [X, Y]^h - (R(X, Y)u)^v + J([X, Y]^v) \\
&= [X, Y]^h - (R(X, Y)u)^v - [X, Y]^h \\
&= -(R(X, Y)u)^v \\
&= 0,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
N(X^h, Y^v) &= \left[X^h, Y^v\right] + J\left[JX^h, Y^v\right] + J\left[X^h, JY^v\right] - \left[JX^h, JY^v\right] \\
&= \left[X^h, Y^v\right] + J\left[X^v, Y^v\right] + J\left[X^h, -Y^h\right] - \left[X^v, -Y^h\right] \\
&= \left[X^h, Y^v\right] - J\left[X^h, Y^h\right] + \left[X^v, Y^h\right] \\
&= (\nabla_X Y)^v - J([X, Y]^h - (R(X, Y)u)^v) - (\nabla_Y X)^v \\
&= [X, Y]^v - J([X, Y]^h) + J((R(X, Y)u)^v) \\
&= [X, Y]^v - [X, Y]^v - (R(X, Y)u)^h \\
&= -(R(X, Y)u)^h \\
&= 0
\end{aligned}$$

ve benzer şekilde

$$N(X^v, Y^h) = 0$$

elde edilir. Buradan, $N \equiv 0$ olduğu görülür. Böylece ispat tamamlanır. $\square$

# BÖLÜM 3

# CHEEGER-GROMOLL METRİKLİ TANJANT DEMETLER

Dört alt bölümden oluşan bu bölümün birinci alt bölümünde, bir tanjant demet üzerinde doğal metrik kavramı tanımlanarak bu metriğe göre tanjant demetin Levi-Civita konneksiyonuyla ilgili bazı sonuçlar verilmektedir. İkinci alt bölümde, doğal metriklerin özel bir sınıfı olan Cheeger-Gromoll metrik tanımlanarak yatay ve dikey liftlere göre Levi-Civita konneksiyonu elde edilmeye çalışılmaktadır. Üçüncü alt bölümde de Cheeger-Gromoll metrikli tanjant demetlerin Riemann eğrilik tensörü elde edilmekte ve son alt bölüm olan dördüncü alt bölümde ise Cheeger-Gromoll metrikli tanjant demetlerin kesitsel eğrilikleri ve skalar eğriliği verilmektedir.

## 3.1 Doğal Metrikler

**Tanım 3.1.1.** *$(M,g)$ bir Riemann manifoldu olsun. $TM$ tanjant demeti üzerindeki bir $\bar{g}$ Riemann metriğine $M$ üzerindeki $g$ metriğine göre* ***doğal*** *metrik denir, eğer $\forall X,Y \in C^\infty(TM)$ vektör alanları ve $(p,u) \in TM$ için*

***(i)*** $\bar{g}_{(p,u)}(X^h, Y^h) = g_p(X,Y)$,

***(ii)*** $\bar{g}_{(p,u)}(X^h, Y^v) = 0$

*ise [9].*

Şimdi Kozsul formülü kullanılarak, $M$ üzerinde $g$'ye göre doğal olan bir $\bar{g}$ metriğiyle donatılmış $(TM,\bar{g})$ tanjant demeti için $\bar{\nabla}$ Levi-Civita konneksiyonu hesaplanacaktır.

**Lemma 3.1.1.** *$(M,g)$ bir Riemann manifoldu ve $TM$ de $M$'nin tanjant demeti olsun. Bu durumda, $\forall(p,u) \in TM$, $\forall X,Y,Z \in C^\infty(TM)$ vektör alanları ve $TM$ üzerinde bir $\bar{g}$ doğal metriği için uygun $\bar{\nabla}$ Levi-Civita konneksiyonu aşağıdaki eşitlikleri sağlar [9]:*

***(i)*** $\bar{g}(\bar{\nabla}_{X^h}Y^h, Z^h) = g(\nabla_X Y, Z)$,

***(ii)*** $\bar{g}(\bar{\nabla}_{X^h}Y^h, Z^v) = -\frac{1}{2}\bar{g}((R(X,Y)u)^v, Z^v)$,

***(iii)*** $\bar{g}(\bar{\nabla}_{X^h}Y^v, Z^h) = -\frac{1}{2}\bar{g}(Y^v, (R(Z,X)u)^v)$,

***(iv)*** $\bar{g}(\bar{\nabla}_{X^h}Y^v, Z^v) = \frac{1}{2}(X^h(\bar{g}(Y^v, Z^v)) + \bar{g}(Z^v, (\nabla_X Y)^v) - \bar{g}(Y^v, (\nabla_X Z)^v))$,

***(v)*** $\bar{g}(\bar{\nabla}_{X^v}Y^h, Z^h) = \frac{1}{2}\bar{g}(X^v, (R(Y,Z)u)^v)$,

***(vi)*** $\bar{g}(\bar{\nabla}_{X^v}Y^h, Z^v) = \frac{1}{2}(Y^h(\bar{g}(Z^v, X^v)) - \bar{g}(Z^v, (\nabla_Y X)^v) - \bar{g}(X^v, (\nabla_Y Z)^v))$,

***(vii)*** $\bar{g}(\bar{\nabla}_{X^v}Y^v, Z^h) = \frac{1}{2}(-Z^h(\bar{g}(X^v, Y^v)) + \bar{g}(Y^v, (\nabla_Z X)^v) + \bar{g}(X^v, (\nabla_Z Y)^v))$,

***(viii)*** $\bar{g}(\bar{\nabla}_{X^v}Y^v, Z^v) = \frac{1}{2}(X^v(\bar{g}(Y^v, Z^v)) + Y^v(\bar{g}(Z^v, X^v)) - Z^v(\bar{g}(X^v, Y^v)))$.

**İspat.** $\forall X, Y, Z \in C^\infty(TM)$ vektör alanları için $i, j, k \in \{h, v\}$ olmak üzere

$$\begin{aligned}\bar{g}(\bar{\nabla}_{X^i}Y^j, Z^k) = \frac{1}{2}\{&X^i(\bar{g}(Y^j, Z^k)) + Y^j(\bar{g}(Z^k, X^i)) - Z^k(\bar{g}(X^i, Y^j)) \\ &-\bar{g}(X^i, \left[Y^j, Z^k\right]) + \bar{g}(Y^j, \left[Z^k, X^i\right]) + \bar{g}(Z^k, \left[X^i, Y^j\right])\}\end{aligned} \tag{3.1.1}$$

dir. Buna göre, Teorem 2.2.1, Tanım 3.1.1 ve (3.1.1) kullanılırsa

**(i)**

$$\begin{aligned}
&2\bar{g}(\bar{\nabla}_{X^h}Y^h, Z^h) \\
&\quad = X^h(\bar{g}(Y^h, Z^h)) + Y^h(\bar{g}(Z^h, X^h)) - Z^h(\bar{g}(X^h, Y^h)) \\
&\qquad - \bar{g}(X^h, \left[Y^h, Z^h\right]) + \bar{g}(Y^h, \left[Z^h, X^h\right]) + \bar{g}(Z^h, \left[X^h, Y^h\right]) \\
&\quad = X^h(g(Y,Z)) + Y^h(g(Z,X)) - Z^h(g(X,Y)) - \bar{g}(X^h, [Y,Z]^h - (R(Y,Z)u)^v) \\
&\qquad + \bar{g}(Y^h, [Z,X]^h - (R(Z,X)u)^v) + \bar{g}(Z^h, [X,Y]^h - (R(X,Y)u)^v) \\
&\quad = X(g(Y,Z)) + Y(g(Z,X)) - Z(g(X,Y)) - \bar{g}(X^h, [Y,Z]^h) + \bar{g}(X^h, (R(Y,Z)u)^v) \\
&\qquad + \bar{g}(Y^h, [Z,X]^h) - \bar{g}(Y^h, (R(Z,X)u)^v) + \bar{g}(Z^h, [X,Y]^h) - \bar{g}(Z^h, (R(X,Y)u)^v) \\
&\quad = X(g(Y,Z)) + Y(g(Z,X)) - Z(g(X,Y)) - g(X, [Y,Z]) \\
&\qquad + g(Y, [Z,X]) + g(Z, [X,Y]) \\
&\quad = 2g(\nabla_X Y, Z)
\end{aligned}$$

olur ve buradan da $\bar{g}(\bar{\nabla}_{X^h}Y^h, Z^h) = g(\nabla_X Y, Z)$ elde edilir.

**(ii)**

$$
\begin{aligned}
&2\bar{g}(\bar{\nabla}_{X^h}Y^h, Z^v)\\
&= X^h(\bar{g}(Y^h, Z^v)) + Y^h(\bar{g}(Z^v, X^h)) - Z^v(\bar{g}(X^h, Y^h))\\
&\quad - \bar{g}(X^h, \left[Y^h, Z^v\right]) + \bar{g}(Y^h, \left[Z^v, X^h\right]) + \bar{g}(Z^v, \left[X^h, Y^h\right])\\
&= -Z^v(\bar{g}(X^h, Y^h)) - \bar{g}(X^h, \left[Y^h, Z^v\right]) + \bar{g}(Y^h, \left[Z^v, X^h\right]) + \bar{g}(Z^v, \left[X^h, Y^h\right])\\
&= -Z^v(g(X,Y)) - \bar{g}(X^h, (\nabla_Y Z)^v) - \bar{g}(Y^h, (\nabla_X Z)^v) + \bar{g}(Z^v, [X,Y]^h - (R(X,Y)u)^v)\\
&= -Z^v(g(X,Y)) + \bar{g}(Z^v, [X,Y]^h) - \bar{g}(Z^v, (R(X,Y)u)^v)\\
&= -Z^v(g(X,Y)) - \bar{g}(Z^v, (R(X,Y)u)^v)
\end{aligned}
$$

dir. Diğer taraftan, yatay bir vektör alanının dikey doğrultuda türevi 0, yani $-Z^v(g(X,Y)) = 0$ olduğundan

$$2\bar{g}(\bar{\nabla}_{X^h}Y^h, Z^v) = -\bar{g}(Z^v, (R(X,Y)u)^v)$$

bulunur ve böylece (ii) ispatlanmış olur.

**(iii)**

$$
\begin{aligned}
&2\bar{g}(\bar{\nabla}_{X^h}Y^v, Z^h)\\
&= X^h(\bar{g}(Y^v, Z^h)) + Y^v(\bar{g}(Z^h, X^h)) - Z^h(\bar{g}(X^h, Y^v))\\
&\quad - \bar{g}(X^h, \left[Y^v, Z^h\right]) + \bar{g}(Y^v, \left[Z^h, X^h\right]) + \bar{g}(Z^h, \left[X^h, Y^v\right])\\
&= Y^v(g(Z,X)) + \bar{g}(X^h, (\nabla_Z Y)^v) + \bar{g}(Y^v, [Z,X]^h - (R(Z,X)u)^v) + \bar{g}(Z^h, (\nabla_X Y)^v)\\
&= \bar{g}(Y^v, [Z,X]^h) - \bar{g}(Y^v, (R(Z,X)u)^v)\\
&= -\bar{g}(Y^v, (R(Z,X)u)^v)
\end{aligned}
$$

olur. Böylece (iii) görülür.

**(iv)**

$$
\begin{aligned}
&2\bar{g}(\bar{\nabla}_{X^h}Y^v, Z^v)\\
&= X^h(\bar{g}(Y^v, Z^v)) + Y^v(\bar{g}(Z^v, X^h)) - Z^v(\bar{g}(X^h, Y^v))\\
&\quad - \bar{g}(X^h, [Y^v, Z^v]) + \bar{g}(Y^v, \left[Z^v, X^h\right]) + \bar{g}(Z^v, \left[X^h, Y^v\right])\\
&= X^h(\bar{g}(Y^v, Z^v)) - \bar{g}(Y^v, (\nabla_X Z)^v) + \bar{g}(Z^v, (\nabla_X Y)^v)
\end{aligned}
$$

bulunur. Böylece, $\bar{g}(\bar{\nabla}_{X^h}Y^v, Z^v) = \frac{1}{2}(X^h(\bar{g}(Y^v, Z^v)) + \bar{g}(Z^v, (\nabla_X Y)^v) - \bar{g}(Y^v, (\nabla_X Z)^v))$ elde edilir.

**(v)**

$$\begin{aligned}
&2\bar{g}(\bar{\nabla}_{X^v}Y^h, Z^h)\\
&\quad = X^v(\bar{g}(Y^h, Z^h)) + Y^h(\bar{g}(Z^h, X^v)) - Z^h(\bar{g}(X^v, Y^h))\\
&\qquad - \bar{g}(X^v, \left[Y^h, Z^h\right]) + \bar{g}(Y^h, \left[Z^h, X^v\right]) + \bar{g}(Z^h, \left[X^v, Y^h\right])\\
&\quad = X^v(g(Y, Z)) - \bar{g}(X^v, [Y, Z]^h - (R(Y, Z)u)^v) + \bar{g}(Y^h, (\nabla_Z X)^v) - \bar{g}(Z^h, (\nabla_Y X)^v)\\
&\quad = -\bar{g}(X^v, [Y, Z]^h) + \bar{g}(X^v, (R(Y, Z)u)^v)\\
&\quad = \bar{g}(X^v, (R(Y, Z)u)^v)
\end{aligned}$$

olup (v) ispatlanır.

**(vi)**

$$\begin{aligned}
2\bar{g}(\bar{\nabla}_{X^v}Y^h, Z^v) &= X^v(\bar{g}(Y^h, Z^v)) + Y^h(\bar{g}(Z^v, X^v)) - Z^v(\bar{g}(X^v, Y^h))\\
&\quad -\bar{g}(X^v, \left[Y^h, Z^v\right]) + \bar{g}(Y^h, [Z^v, X^v]) + \bar{g}(Z^v, \left[X^v, Y^h\right])\\
&= Y^h(\bar{g}(Z^v, X^v)) - \bar{g}(X^v, (\nabla_Y Z)^v) - \bar{g}(Z^v, (\nabla_Y X)^v)
\end{aligned}$$

dir ve dolayısıyla $\bar{g}(\bar{\nabla}_{X^v}Y^h, Z^v) = \frac{1}{2}(Y^h(\bar{g}(Z^v, X^v)) - \bar{g}(Z^v, (\nabla_Y X)^v) - \bar{g}(X^v, (\nabla_Y Z)^v))$ bulunur.

**(vii)**

$$\begin{aligned}
2\bar{g}(\bar{\nabla}_{X^v}Y^v, Z^h) &= X^v(\bar{g}(Y^v, Z^h)) + Y^v(\bar{g}(Z^h, X^v)) - Z^h(\bar{g}(X^v, Y^v))\\
&\quad -\bar{g}(X^v, \left[Y^v, Z^h\right]) + \bar{g}(Y^v, \left[Z^h, X^v\right]) + \bar{g}(Z^h, [X^v, Y^v])\\
&= -Z^h(\bar{g}(X^v, Y^v)) + \bar{g}(X^v, (\nabla_Z Y)^v) + \bar{g}(Y^v, (\nabla_Z X)^v)
\end{aligned}$$

dir ve bu eşitlik (vii)'yi ispatlar.

**(viii)**

$$\begin{aligned}
2\bar{g}(\bar{\nabla}_{X^v}Y^v, Z^v) &= X^v(\bar{g}(Y^v, Z^v)) + Y^v(\bar{g}(Z^v, X^v)) - Z^v(\bar{g}(X^v, Y^v))\\
&\quad -\bar{g}(X^v, [Y^v, Z^v]) + \bar{g}(Y^v, [Z^v, X^v]) + \bar{g}(Z^v, [X^v, Y^v])\\
&= X^v(\bar{g}(Y^v, Z^v)) + Y^v(\bar{g}(Z^v, X^v)) - Z^v(\bar{g}(X^v, Y^v))
\end{aligned}$$

olur. Böylece ispat tamamlanır. □

Şimdi, bu Lemma yardımıyla aşağıdaki sonuç kolayca ispatlanabilir:

**Sonuç 3.1.1.** *$(M, g)$ bir Riemann manifoldu ve $\bar{g}$ de $M$'nin $TM$ tanjant demeti üzerinde bir doğal metrik olsun. Bu durumda, $\forall X, Y \in C^\infty(TM)$ vektör alanları ve $(p, u) \in TM$ için $\bar{\nabla}$ Levi-Civita konneksiyonu*

$$(\bar{\nabla}_{X^h} Y^h)_{(p,u)} = (\nabla_X Y)^h_{(p,u)} - \frac{1}{2}(R_p(X, Y)u)^v$$

*eşitliğini sağlar [9].*

**İspat.** Lemma 3.1.1'den

$$\bar{g}(\bar{\nabla}_{X^h} Y^h, Z^h) = g(\nabla_X Y, Z) = \bar{g}((\nabla_X Y)^h, Z^h)$$

ve

$$\bar{g}(\bar{\nabla}_{X^h} Y^h, Z^v) = -\frac{1}{2}\bar{g}((R(X, Y)u)^v, Z^v)$$

olduğunu biliyoruz. O halde,

$$\begin{aligned} \bar{g}(\bar{\nabla}_{X^h} Y^h, Z^h + Z^v) &= \bar{g}((\nabla_X Y)^h, Z^h) - \frac{1}{2}\bar{g}((R(X, Y)u)^v, Z^v) \\ &= \bar{g}((\nabla_X Y)^h - \frac{1}{2}(R(X, Y)u)^v, Z^h + Z^v) \end{aligned}$$

olup, bu eşitlik $\forall \tilde{Z} = Z^h + Z^v \in T_{(p,u)}TM$ için sağlandığından, istenen sonuca ulaşılır. □

**Sonuç 3.1.2.** *$\bar{K}$, bir $\bar{g}$ doğal metriğiyle donatılmış $(TM, \bar{g})$ tanjant demetinin kesitsel eğriliği olsun. Bu taktirde, herhangi iki ortonormal $X, Y \in C^\infty(TM)$ vektör alanı için*

$$\bar{K}(X^h, Y^h) = K(X, Y) - \frac{3}{4}\left\|(R(X, Y)u)^v\right\|^2$$

*eşitliği sağlanır. Burada $K$, $M$'nin kesitsel eğriliğidir [29].*

**İspat.** Kesit eğriliğinin tanımı, Lemma 3.1.1 ve Sonuç 3.1.1 kullanılırsa, herhangi iki ortonormal $X, Y \in C^\infty(TM)$ vektör alanı için,

$$\begin{aligned} \bar{K}(X^h, Y^h) &= \frac{\bar{g}(\bar{R}(X^h, Y^h)Y^h, X^h)}{\bar{g}(X^h, X^h)\bar{g}(Y^h, Y^h) - \bar{g}(X^h, Y^h)^2} \\ &= \frac{\bar{g}(\bar{R}(X^h, Y^h)Y^h, X^h)}{g(X, X)g(Y, Y) - g(X, Y)^2} \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \bar{g}(\bar{R}(X^h,Y^h)Y^h,X^h) \\
&= \bar{g}(\bar{\nabla}_{X^h}\bar{\nabla}_{Y^h}Y^h - \bar{\nabla}_{Y^h}\bar{\nabla}_{X^h}Y^h - \bar{\nabla}_{[X^h,Y^h]}Y^h, X^h) \\
&= \bar{g}(\bar{\nabla}_{X^h}((\nabla_Y Y)^h - \frac{1}{2}(R(Y,Y)u)^v) - \bar{\nabla}_{Y^h}((\nabla_X Y)^h - \frac{1}{2}(R(X,Y)u)^v) \\
&\quad -\bar{\nabla}_{[X,Y]^h-(R(X,Y)u)^v}Y^h, X^h) \\
&= \bar{g}(\bar{\nabla}_{X^h}(\nabla_Y Y)^h - \bar{\nabla}_{Y^h}(\nabla_X Y)^h + \frac{1}{2}\bar{\nabla}_{Y^h}(R(X,Y)u)^v \\
&\quad -\bar{\nabla}_{[X,Y]^h}Y^h + \bar{\nabla}_{(R(X,Y)u)^v}Y^h, X^h) \\
&= \bar{g}((\nabla_X\nabla_Y Y)^h - \frac{1}{2}(R(X,\nabla_Y Y)u)^v - (\nabla_Y\nabla_X Y)^h + \frac{1}{2}(R(Y,\nabla_X Y)u)^v \\
&\quad +\frac{1}{2}\bar{\nabla}_{Y^h}(R(X,Y)u)^v - (\nabla_{[X,Y]}Y)^h + \frac{1}{2}(R([X,Y],Y)u)^v \\
&\quad +\bar{\nabla}_{(R(X,Y)u)^v}Y^h, X^h) \\
&= g(\nabla_X\nabla_Y Y - \nabla_Y\nabla_X Y - \nabla_{[X,Y]}Y, X) + \frac{1}{2}\bar{g}(\bar{\nabla}_{Y^h}(R(X,Y)u)^v, X^h) \\
&\quad +\bar{g}(\bar{\nabla}_{(R(X,Y)u)^v}Y^h, X^h) \\
&= g(R(X,Y)Y,X) + \frac{1}{2}(-\frac{1}{2}\bar{g}((R(X,Y)u)^v,(R(X,Y)u)^v) \\
&\quad +\frac{1}{2}\bar{g}((R(X,Y)u)^v,(R(Y,X)u)^v) \\
&= K(X,Y) - \frac{1}{4}\bar{g}((R(X,Y)u)^v,(R(X,Y)u)^v) \\
&\quad -\frac{1}{2}\bar{g}((R(X,Y)u)^v,(R(X,Y)u)^v) \\
&= K(X,Y) - \frac{3}{4}\bar{g}((R(X,Y)u)^v,(R(X,Y)u)^v) \\
&= K(X,Y) - \frac{3}{4}\left\|(R(X,Y)u)^v\right\|^2
\end{aligned}
$$

olur ve böylece ispat tamamlanır. □

## 3.2 Cheeger-Gromoll Metrik

Bu alt bölümde, 1972 yılında J. Cheeger ve D. Gromoll tarafından ifade edilen [4] ve açık bir ifadesi ise ilk olarak 1988 yılında E. Musso ve F. Tricerri tarafından verilen [5] Cheeger-Gromoll metrik tanımlanarak bazı karakterizasyonları elde edilmektedir. Bir $M$ Riemann manifoldunun $TM$ tanjant demeti üzerinde tanımlı olan bu metrik, son yıllarda birçok matematikçi tarafından yoğun bir şekilde çalışılmaktadır ( [8,10, 11,13]...).

**Tanım 3.2.1.** $(M,g)$ *bir Riemann manifoldu olsun. Bu taktirde* $TM$ *tanjant demeti üzerinde* $\tilde{g}$ *Cheeger-Gromoll metriği,* $\forall X,Y \in C^{\infty}(TM)$ *vektör alanı için*

***(i)*** $\tilde{g}_{(p,u)}(X^h,Y^h) = g_p(X,Y)$,

***(ii)*** $\tilde{g}_{(p,u)}(X^h,Y^v) = 0$,

***(iii)*** $\tilde{g}_{(p,u)}(X^v,Y^v) = \frac{1}{1+r^2}\{g_p(X,Y) + g_p(X,u)g_p(Y,u)\}$

*şeklinde tanımlı bir doğal Riemann metriğidir. Burada,* $r = |u| = \sqrt{g(u,u)}$ *dur [5].*

Bundan sonra, işlemlerin sadeliği için $\alpha = 1 + r^2$ olarak alınacaktır.

**Önerme 3.2.1.** $\tilde{\nabla}$, $\tilde{g}$ *Cheeger-Gromoll metriğiyle donatılmış* $TM$ *tanjant demetinin Levi-Civita konneksiyonu olsun. Eğer* $X,Y \in C^{\infty}(TM)$ *ise, bu taktirde* $\forall (p,u) \in TM$ *için*

***(i)*** $\tilde{\nabla}_{X^h}Y^h = (\nabla_X Y)^h - \frac{1}{2}(R(X,Y)u)^v$,

***(ii)*** $\tilde{\nabla}_{X^h}Y^v = \frac{1}{2\alpha}(R(u,Y)X)^h + (\nabla_X Y)^v$,

***(iii)*** $\tilde{\nabla}_{X^v}Y^h = \frac{1}{2\alpha}(R(u,X)Y)^h$,

***(iv)*** $\tilde{\nabla}_{X^v}Y^v = -\frac{1}{\alpha}(\tilde{g}(X^v,U)Y^v + \tilde{g}(Y^v,U)X^v) + \frac{1+\alpha}{\alpha}\tilde{g}(X^v,Y^v)U - \frac{1}{\alpha}\tilde{g}(X^v,U)\tilde{g}(Y^v,U)U$

*dur. Burada* $U \in C^{\infty}(TM)$, $u = (v_{n+1},...,v_{2n})$ *ile birlikte* $U = \sum_{i=1}^{n} v_{n+i}\left(\frac{\partial}{\partial v_{n+i}}\right)_{(p,u)}$ *şeklinde tanımlı* $(p,u)$*'da kanonik dikey vektördür [6].*

**İspat. (i)** (3.1.1)'den

$$
\begin{aligned}
&2\tilde{g}(\tilde{\nabla}_{X^h}Y^h, Z^h)\\
&\quad = X^h(\tilde{g}(Y^h,Z^h)) + Y^h(\tilde{g}(Z^h,X^h)) - Z^h(\tilde{g}(X^h,Y^h))\\
&\qquad - \tilde{g}(X^h,\left[Y^h,Z^h\right]) + \tilde{g}(Y^h,\left[Z^h,X^h\right]) + \tilde{g}(Z^h,\left[X^h,Y^h\right])\\
&\quad = X^h(g(Y,Z)) + Y^h(g(Z,X)) - Z^h(g(X,Y)) - \bar{g}(X^h,[Y,Z]^h - (R(Y,Z)u)^v)\\
&\qquad + \bar{g}(Y^h,[Z,X]^h - (R(Z,X)u)^v) + \bar{g}(Z^h,[X,Y]^h - (R(X,Y)u)^v)\\
&\quad = X(g(Y,Z)) + Y(g(Z,X)) - Z(g(X,Y)) - \bar{g}(X^h,[Y,Z]^h) + \bar{g}(X^h,(R(Y,Z)u)^v)\\
&\qquad + \bar{g}(Y^h,[Z,X]^h) - \bar{g}(Y^h,(R(Z,X)u)^v) + \bar{g}(Z^h,[X,Y]^h) - \bar{g}(Z^h,(R(X,Y)u)^v)\\
&\quad = X(g(Y,Z)) + Y(g(Z,X)) - Z(g(X,Y)) - g(X,[Y,Z]) + g(Y,[Z,X]) + g(Z,[X,Y])\\
&\quad = 2g(\nabla_X Y, Z)
\end{aligned}
$$

ve

$$
\begin{aligned}
&2\tilde{g}(\tilde{\nabla}_{X^h}Y^h, Z^v)\\
&\quad = X^h(\tilde{g}(Y^h, Z^v)) + Y^h(\tilde{g}(Z^v, X^h)) - Z^v(\tilde{g}(X^h, Y^h))\\
&\qquad - \tilde{g}(X^h, \left[Y^h, Z^v\right]) + \tilde{g}(Y^h, \left[Z^v, X^h\right]) + \tilde{g}(Z^v, \left[X^h, Y^h\right])\\
&\quad = -Z^v(g(X,Y)) - \tilde{g}(X^h, (\nabla_Y Z)^v) - \tilde{g}(Y^h, (\nabla_X Z)^v) + \tilde{g}(Z^v, [X,Y]^h - (R(X,Y)u)^v)\\
&\quad = -Z^v(g(X,Y)) + \bar{g}(Z^v, [X,Y]^h) - \bar{g}(Z^v, (R(X,Y)u)^v)\\
&\quad = -Z^v(g(X,Y)) - \bar{g}(Z^v, (R(X,Y)u)^v)\\
&\quad = -\bar{g}(Z^v, (R(X,Y)u)^v)
\end{aligned}
$$

dir. O halde

$$
\tilde{g}(\tilde{\nabla}_{X^h}Y^h, Z^h + Z^v) = \tilde{g}((\nabla_X Y)^h - \frac{1}{2}(R(X,Y)u)^v, Z^h + Z^v)
$$

olup bu eşitlik $\forall \tilde{Z} = Z^h + Z^v \in T_{(p,u)}TM$ için sağlandığından, istenen sonuca ulaşılır.

**(ii)** Yine (3.1.1)'den

$$
\begin{aligned}
2\tilde{g}(\tilde{\nabla}_{X^h}Y^v, Z^h) &= X^h(\tilde{g}(Y^v, Z^h)) + Y^v(\tilde{g}(Z^h, X^h)) - Z^h(\tilde{g}(X^h, Y^v))\\
&\quad -\tilde{g}(X^h, \left[Y^v, Z^h\right]) + \tilde{g}(Y^v, \left[Z^h, X^h\right]) + \tilde{g}(Z^h, \left[X^h, Y^v\right])\\
&= \tilde{g}(Y^v, [Z,X]^h - (R(Z,X)u)^v)\\
&= -\frac{1}{\alpha}\{g(Y, R(Z,X)u) + g(Y,u)g(R(Z,X)u, u)\}\\
&= -\frac{1}{\alpha}g(Y, R(Z,X)u)\\
&= \frac{1}{\alpha}g(R(u,Y)X, Z)\\
&= \frac{1}{\alpha}\tilde{g}((R(u,Y)X)^h, Z^h)
\end{aligned}
$$

olduğundan

$$
\tilde{g}(\tilde{\nabla}_{X^h}Y^v, Z^h) = \frac{1}{2\alpha}\tilde{g}((R(u,Y)X)^h, Z^h) \tag{3.2.1}
$$

elde edilir. Ayrıca $\tilde{g}(\tilde{\nabla}_{X^h}Y^v, Z^v)$ ifadesinin hesaplanması için şu eşitliklere ihtiyaç duyulacaktır:

Tanım 2.2.6, Lemma 2.2.2 ve Lemma 3.1.1 kullanılırsa,

$$
X^h\left(\frac{1}{\alpha}\right) = 0, \;\; X^h(g(Y,u)\circ\pi) = g(\nabla_X Y, u)\circ\pi
$$

ve

$$X^h(\tilde{g}(Y^v, Z^v)) = \tilde{g}((\nabla_X Y)^v, Z^v) + \tilde{g}(Y^v, (\nabla_X Z)^v) \tag{3.2.2}$$

eşitliklerine ulaşılır. O halde,

$$\begin{aligned}
&2\tilde{g}(\tilde{\nabla}_{X^h} Y^v, Z^v) \\
&= X^h(\tilde{g}(Y^v, Z^v)) + Y^v(\tilde{g}(Z^v, X^h)) - Z^v(\tilde{g}(X^h, Y^v)) \\
&\quad - \tilde{g}(X^h, [Y^v, Z^v]) + \tilde{g}(Y^v, \left[Z^v, X^h\right]) + \tilde{g}(Z^v, \left[X^h, Y^v\right]) \\
&= X^h(\tilde{g}(Y^v, Z^v)) - \tilde{g}(Y^v, (\nabla_X Z)^v) + \tilde{g}(Z^v, (\nabla_X Y)^v) \\
&= \tilde{g}((\nabla_X Y)^v, Z^v) + \tilde{g}(Y^v, (\nabla_X Z)^v) - \tilde{g}(Y^v, (\nabla_X Z)^v) + \tilde{g}(Z^v, (\nabla_X Y)^v) \\
&= 2\tilde{g}((\nabla_X Y)^v, Z^v)
\end{aligned}$$

olup

$$\tilde{g}(\tilde{\nabla}_{X^h} Y^v, Z^v) = \tilde{g}((\nabla_X Y)^v, Z^v) \tag{3.2.3}$$

bulunur. Dolayısıyla, (3.2.1) ve (3.2.3)'ten

$$\tilde{g}(\tilde{\nabla}_{X^h} Y^v, Z^h + Z^v) = \tilde{g}(\frac{1}{2\alpha}(R(u, Y)X)^h + (\nabla_X Y)^v, Z^h + Z^v)$$

dir ve bu eşitlik $\forall \tilde{Z} = Z^h + Z^v \in T_{(p,u)}TM$ için sağlandığından, buradan istenen sonuca ulaşılır.

**(iii)**

$$\begin{aligned}
&2\tilde{g}(\tilde{\nabla}_{X^v} Y^h, Z^h) \\
&= X^v(\tilde{g}(Y^h, Z^h)) + Y^h(\tilde{g}(Z^h, X^v)) - Z^h(\tilde{g}(X^v, Y^h)) \\
&\quad - \tilde{g}(X^v, \left[Y^h, Z^h\right]) + \tilde{g}(Y^h, \left[Z^h, X^v\right]) + \tilde{g}(Z^h, \left[X^v, Y^h\right]) \\
&= -\tilde{g}(X^v, [Y, Z]^h - (R(Y, Z)u)^v) \\
&= \tilde{g}(X^v, (R(Y, Z)u)^v) \\
&= \frac{1}{\alpha}\{g(X, R(Y, Z)u) + g(X, u)g(R(Y, Z)u, u)\} \\
&= \frac{1}{\alpha} g(X, R(Y, Z)u) \\
&= \frac{1}{\alpha} g(R(u, X)Y, Z) \\
&= \frac{1}{\alpha}\tilde{g}((R(u, X)Y)^h, Z^h) 
\end{aligned} \tag{3.2.4}$$

ve

$$
\begin{aligned}
&2\tilde{g}(\tilde{\nabla}_{X^v}Y^h, Z^v)\\
&= X^v(\tilde{g}(Y^h, Z^v)) + Y^h(\tilde{g}(Z^v, X^v)) - Z^v(\tilde{g}(X^v, Y^h))\\
&\quad - \tilde{g}(X^v, \left[Y^h, Z^v\right]) + \tilde{g}(Y^h, [Z^v, X^v]) + \tilde{g}(Z^v, \left[X^v, Y^h\right])\\
&= Y^h(\tilde{g}(Z^v, X^v)) - \tilde{g}(X^v, (\nabla_Y Z)^v) - \tilde{g}(Z^v, (\nabla_Y X)^v)\\
&= \tilde{g}((\nabla_Y Z)^v, X^v) + \tilde{g}(Z^v, (\nabla_Y X)^v) - \tilde{g}(X^v, (\nabla_Y Z)^v) - \tilde{g}(Z^v, (\nabla_Y X)^v)\\
&= 0 \qquad (3.2.5)
\end{aligned}
$$

olup (3.2.4) ve (3.2.5)'ten

$$\tilde{\nabla}_{X^v}Y^h = \frac{1}{2\alpha}(R(u, X)Y)^h$$

eşitliğine ulaşılır.

**(iv)** (3.1.1) denklemi kullanılırsa

$$
\begin{aligned}
&2\tilde{g}(\tilde{\nabla}_{X^v}Y^v, Z^h)\\
&= X^v(\tilde{g}(Y^v, Z^h)) + Y^v(\tilde{g}(Z^h, X^v)) - Z^h(\tilde{g}(X^v, Y^v))\\
&\quad - \tilde{g}(X^v, \left[Y^v, Z^h\right]) + \tilde{g}(Y^v, \left[Z^h, X^v\right]) + \tilde{g}(Z^h, [X^v, Y^v])\\
&= -Z^h(\tilde{g}(X^v, Y^v)) + \tilde{g}(X^v, (\nabla_Z Y)^v) + \tilde{g}(Y^v, (\nabla_Z X)^v)\\
&= -\tilde{g}((\nabla_Z X)^v, Y^v) - \tilde{g}(X^v, (\nabla_Z Y)^v) + \tilde{g}(X^v, (\nabla_Z Y)^v)\\
&\quad + \tilde{g}(Y^v, (\nabla_Z X)^v)\\
&= 0 \qquad (3.2.6)
\end{aligned}
$$

olur. Ayrıca

$$
\begin{aligned}
X^v\left(\frac{1}{\alpha}\right) &= X^v\left(\frac{1}{1+g(u,u)}\right)\\
&= \frac{-X^v(g(u,u))}{(1+g(u,u))^2}\\
&= -\frac{2g(X,u)}{(1+g(u,u))^2}\\
&= -\frac{2g(X,u)}{\alpha^2}
\end{aligned}
$$

ve

$$
\begin{aligned}
&X^v(\tilde{g}(Y^v,Z^v))\\
&= X^v\left(\frac{1}{\alpha}\{g(Y,Z)+g(Y,u)g(Z,u)\}\right)\\
&= X^v\left(\frac{1}{\alpha}\right)\{g(Y,Z)+g(Y,u)g(Z,u)\}\\
&\quad+\frac{1}{\alpha}\{X^v(g(Y,Z))+X^v(g(Y,u))g(Z,u)+g(Y,u)X^v(g(Z,u))\}\\
&= -\frac{2}{\alpha^2}g(X,u)\{g(Y,Z)+g(Y,u)g(Z,u)\}\\
&\quad+\frac{1}{\alpha}\{g(X,Y)g(Z,u)+g(Y,u)g(Z,X)\} \qquad (3.2.7)
\end{aligned}
$$

eşitliklerinden

$$
\begin{aligned}
&2\tilde{g}(\tilde{\nabla}_{X^v}Y^v,Z^v)\\
&= X^v(\tilde{g}(Y^v,Z^v))+Y^v(\tilde{g}(Z^v,X^v))-Z^v(\tilde{g}(X^v,Y^v))\\
&\quad-\tilde{g}(X^v,[Y^v,Z^v])+\tilde{g}(Y^v,[Z^v,X^v])+\tilde{g}(Z^v,[X^v,Y^v])\\
&= X^v(\tilde{g}(Y^v,Z^v))+Y^v(\tilde{g}(Z^v,X^v))-Z^v(\tilde{g}(X^v,Y^v))\\
&= -\frac{2}{\alpha^2}g(X,u)g(Y,Z)-\frac{2}{\alpha^2}g(X,u)g(Y,u)g(Z,u)+\frac{1}{\alpha}g(X,Y)g(Z,u)\\
&\quad+\frac{1}{\alpha}g(Y,u)g(Z,X)-\frac{2}{\alpha^2}g(Y,u)g(Z,X)-\frac{2}{\alpha^2}g(Y,u)g(Z,u)g(X,u)\\
&\quad+\frac{1}{\alpha}g(Y,Z)g(X,u)+\frac{1}{\alpha}g(Z,u)g(X,Y)+\frac{2}{\alpha^2}g(Z,u)g(X,Y)\\
&\quad+\frac{2}{\alpha^2}g(Z,u)g(X,u)g(Y,u)-\frac{1}{\alpha}g(Z,X)g(Y,u)-\frac{1}{\alpha}g(X,u)g(Z,Y)\\
&= (\frac{2}{\alpha}+\frac{2}{\alpha^2})g(X,Y)g(Z,u)-\frac{2}{\alpha^2}\{g(X,u)g(Y,Z)+g(Y,u)g(Z,X)\}\\
&\quad-\frac{2}{\alpha^2}g(X,u)g(Y,u)g(Z,u)\\
&= \frac{2\alpha+2}{\alpha^2}g(X,Y)g(Z,u)-\frac{2}{\alpha^2}\{g(X,u)g(Y,Z)+g(Y,u)g(Z,X)\\
&\quad+g(X,u)g(Y,u)g(Z,u)\}
\end{aligned}
$$

olur ve buradan da

$$
\begin{aligned}
\tilde{g}(\tilde{\nabla}_{X^v}Y^v,Z^v) &= \frac{1}{\alpha^2}\{(1+\alpha)g(X,Y)g(Z,u)-g(X,u)g(Y,Z)\\
&\quad -g(Y,u)g(Z,X)-g(X,u)g(Y,u)g(Z,u)\} \qquad (3.2.8)
\end{aligned}
$$

eşitliğine ulaşılır.

Diğer taraftan $U$'nun bir $(p, u)$ noktasında $u$'ya eşit olmasından ve Cheeger-Gromoll metriğin tanımından

$$\tilde{g}(X^v, U) = \frac{1}{\alpha}\{g(X, u) + g(X, u)g(u, u)\} = \frac{1}{\alpha}g(X, u)\{1 + g(u, u)\} = g(X, u) \quad (3.2.9)$$

olup

$$\tilde{g}(X^v, Y^v) = \frac{1}{\alpha}\{g(X, Y) + g(X, u)g(Y, u)\}$$

eşitliği ve (3.2.9)'dan

$$g(X, Y) = \alpha\tilde{g}(X^v, Y^v) - \tilde{g}(X^v, U)\tilde{g}(Y^v, U) \quad (3.2.10)$$

bulunur. O halde, (3.2.9) ve (3.2.10) denklemleri (3.2.8)'de kullanılırsa

$$\begin{aligned}
&\tilde{g}(\tilde{\nabla}_{X^v}Y^v, Z^v) \\
&= \frac{1}{\alpha^2}\{(1+\alpha)g(X, Y)\tilde{g}(Z^v, U) - g(Y, Z)\tilde{g}(X^v, U) \\
&\quad - g(Z, X)\tilde{g}(Y^v, U) - \tilde{g}(X^v, U)\tilde{g}(Y^v, U)\tilde{g}(Z^v, U)\} \\
&= \frac{1}{\alpha^2}\{(1+\alpha)(\alpha\tilde{g}(X^v, Y^v) - \tilde{g}(X^v, U)\tilde{g}(Y^v, U))\tilde{g}(Z^v, U) \\
&\quad - (\alpha\tilde{g}(Y^v, Z^v) - \tilde{g}(Y^v, U)\tilde{g}(Z^v, U))\tilde{g}(X^v, U) \\
&\quad - (\alpha\tilde{g}(Z^v, X^v) - \tilde{g}(Z^v, U)\tilde{g}(X^v, U))\tilde{g}(Y^v, U) - \tilde{g}(X^v, U)\tilde{g}(Y^v, U)\tilde{g}(Z^v, U)\} \\
&= \frac{1}{\alpha^2}\{\alpha(1+\alpha)\tilde{g}(X^v, Y^v)\tilde{g}(Z^v, U) - (1+\alpha)\tilde{g}(X^v, U)\tilde{g}(Y^v, U)\tilde{g}(Z^v, U) \\
&\quad - \alpha\tilde{g}(Y^v, Z^v)\tilde{g}(X^v, U) + \tilde{g}(Y^v, U)\tilde{g}(Z^v, U)\tilde{g}(X^v, U) \\
&\quad - \alpha\tilde{g}(Z^v, X^v)\tilde{g}(Y^v, U) + \tilde{g}(Z^v, U)\tilde{g}(X^v, U)\tilde{g}(Y^v, U) \\
&\quad - \tilde{g}(X^v, U)\tilde{g}(Y^v, U)\tilde{g}(Z^v, U)\} \\
&= \frac{1+\alpha}{\alpha}\tilde{g}(X^v, Y^v)\tilde{g}(Z^v, U) - \frac{\alpha}{\alpha^2}\tilde{g}(X^v, U)\tilde{g}(Y^v, U)\tilde{g}(Z^v, U) \\
&\quad - \frac{\alpha}{\alpha^2}(\tilde{g}(Y^v, Z^v)\tilde{g}(X^v, U) + \tilde{g}(Z^v, X^v)\tilde{g}(Y^v, U)) \qquad (3.2.11)
\end{aligned}$$

elde edilir. Dolayısıyla, (3.2.6) ve (3.2.11)'den

$$\begin{aligned}
\tilde{\nabla}_{X^v}Y^v &= -\frac{1}{\alpha}(\tilde{g}(X^v, U)Y^v + \tilde{g}(Y^v, U)X^v) \\
&\quad + \frac{1+\alpha}{\alpha}\tilde{g}(X^v, Y^v)U - \frac{1}{\alpha}\tilde{g}(X^v, U)\tilde{g}(Y^v, U)U
\end{aligned}$$

olur ve ispat tamamlanır. □

## 3.3 Cheeger-Gromoll Metrikli Tanjant Demetlerin Eğrilik Tensörü

Bu alt bölümde, Cheeger-Gromoll metrikli bir $TM$ tanjant demetinin Levi-Civita konneksiyonu yardımıyla eğrilik tensörü hesaplanmaktadır.

Bunun için önce Tanım 2.2.7'den faydalanarak elde edilen aşağıdaki sonucu verelim:

**Sonuç 3.3.1.** *$(M,g)$ bir Riemann manifoldu ve $\tilde{\nabla}$ da Cheeger-Gromoll metriğiyle donatılmış $(TM,\tilde{g})$ tanjant demeti üzerinde Levi-Civita konneksiyonu olsun. $F : TM \longrightarrow TM$ de $TM$'nin bir diferensiyellenebilir demet endomorfizmi olsun. Bu taktirde, $\forall \xi = (p,u) \in TM$ ve $X, \eta \in C^{\infty}(TTM)$ için*

$$\begin{aligned}(\tilde{\nabla}_{X^v} F^v(\eta))_\xi &= F(X)^v_\xi - \frac{1}{\alpha}\{\tilde{g}(X^v,U)F(\eta)^v + \tilde{g}(F^v(\eta),U)X^v \\ &\quad -(1+\alpha)\tilde{g}(F(\eta)^v,X^v)U + \tilde{g}(X^v,U)\tilde{g}(F(\eta)^v,U)U\}_\xi\end{aligned}$$

*ve*

$$(\tilde{\nabla}_{X^v} F^h(\eta))_\xi = F(X)^h_\xi + \frac{1}{2\alpha}(R(u,X)F(\eta))^h_\xi$$

*dir [9].*

**Önerme 3.3.1.** *$(M,g)$ bir Riemann manifoldu ve $\tilde{R}$ de indirgenmiş Cheeger-Gromoll metriğiyle donatılmış $(TM,\tilde{g})$ tanjant demetinin Riemann eğrilik tensörü olsun. Bu taktirde, $\forall X,Y,Z \in T_pM$ için*

***(i)*** $\tilde{R}(X^h,Y^h)Z^h = (R(X,Y)Z)^h - \frac{1}{4\alpha}\{R(u,R(Y,Z)u)X - R(u,R(X,Z)u)Y$

$$-2R(u,R(X,Y)u)Z\}^h + \tfrac{1}{2}((\nabla_Z R)(X,Y)u)^v,$$

***(ii)*** $\tilde{R}(X^h,Y^h)Z^v = (R(X,Y)Z)^v + \frac{1}{2\alpha}\{(\nabla_X R)(u,Z)Y - (\nabla_Y R)(u,Z)X\}^h$

$$-\tfrac{1}{4\alpha}\{(R(X,R(u,Z)Y)u - R(Y,R(u,Z)X)u)^v$$

$$+4\tilde{g}(Z^v,U)(R(X,Y)u)^v\} + \tfrac{1+\alpha}{\alpha}\tilde{g}((R(X,Y)u)^v,Z^v)U,$$

***(iii)*** $\tilde{R}(X^h,Y^v)Z^h = \frac{1}{2\alpha}((\nabla_X R)(u,Y)Z)^h + \frac{1}{2}(R(X,Z)Y)^v$

$$-\tfrac{1}{4\alpha}\{(R(X,R(u,Y)Z)u)^v + 2g(Y,u)(R(X,Z)u)^v\}$$

$+\frac{1+\alpha}{2\alpha}\tilde{g}((R(X,Z)u)^v, Y^v)U,$

***(iv)*** $\tilde{R}(X^h, Y^v)Z^v = -\frac{1}{2\alpha}(R(Y,Z)X)^h + \frac{1}{2\alpha^2}\{g(Y,u)(R(u,Z)X)^h$

$-g(Z,u)(R(u,Y)X)^h\} - \frac{1}{4\alpha^2}(R(u,Y)R(u,Z)X)^h,$

***(v)*** $\tilde{R}(X^v, Y^v)Z^h = \frac{1}{\alpha}(R(X,Y)Z)^h + \frac{1}{4\alpha^2}\{R(u,X)R(u,Y)Z - R(u,Y)R(u,X)Z\}^h$

$+\frac{1}{\alpha^2}\{g(Y,u)(R(u,X)Z)^h - g(X,u)(R(u,Y)Z)^h\},$

***(vi)*** $\tilde{R}(X^v, Y^v)Z^v = \frac{\alpha+2}{\alpha^2}\{\tilde{g}(X^v, Z^v)g(Y,u)U - \tilde{g}(Y^v, Z^v)g(X,u)U\}$

$+\frac{1+\alpha+\alpha^2}{\alpha^2}\{\tilde{g}(Y^v, Z^v)X^v - \tilde{g}(X^v, Z^v)Y^v\}$

$+\frac{\alpha+2}{\alpha^2}\{g(X,u)g(Z,u)Y^v - g(Y,u)g(Z,u)X^v\}$

*eşitlikleri sağlanır [6].*

**İspat.** **(i)** Standart hesaplamalarla

$$\begin{aligned}
&\tilde{R}(X^h, Y^h)Z^h \\
&= \tilde{\nabla}_{X^h}\tilde{\nabla}_{Y^h}Z^h - \tilde{\nabla}_{Y^h}\tilde{\nabla}_{X^h}Z^h - \tilde{\nabla}_{[X^h,Y^h]}Z^h \\
&= \tilde{\nabla}_{X^h}((\nabla_Y Z)^h - \frac{1}{2}(R(Y,Z)u)^v) - \tilde{\nabla}_{Y^h}((\nabla_X Z)^h - \frac{1}{2}(R(X,Z)u)^v) \\
&\quad - \tilde{\nabla}_{[X,Y]^h - (R(X,Y)u)^v}Z^h \\
&= \tilde{\nabla}_{X^h}(\nabla_Y Z)^h - \frac{1}{2}\tilde{\nabla}_{X^h}(R(Y,Z)u)^v - \tilde{\nabla}_{Y^h}(\nabla_X Z)^h \\
&\quad + \frac{1}{2}\tilde{\nabla}_{Y^h}(R(X,Z)u)^v - \tilde{\nabla}_{[X,Y]^h}Z^h + \tilde{\nabla}_{(R(X,Y)u)^v}Z^h \\
&= (\nabla_X\nabla_Y Z)^h - \frac{1}{2}(R(X,\nabla_Y Z)u)^v - \frac{1}{4\alpha}(R(u,R(Y,Z)u)X)^h \\
&\quad - \frac{1}{2}(\nabla_X R(Y,Z)u)^v - (\nabla_Y\nabla_X Z)^h + \frac{1}{2}(R(Y,\nabla_X Z)u)^v \\
&\quad + \frac{1}{4\alpha}(R(u,R(X,Z)u)Y)^h + \frac{1}{2}(\nabla_Y R(X,Z)u)^v \\
&\quad - (\nabla_{[X,Y]}Z)^h + \frac{1}{2}(R([X,Y],Z)u)^v + \frac{1}{2\alpha}(R(u,R(X,Y)u)Z)^h \\
&= (R(X,Y)Z)^h - \frac{1}{2}\{\nabla_X R(Y,Z)u - R(\nabla_X Y, Z)u - R(Y,\nabla_X Z)u\}^v \\
&\quad + \frac{1}{2}\{\nabla_Y R(X,Z)u - R(\nabla_Y X, Z)u - R(X,\nabla_Y Z)u\}^v \\
&\quad - \frac{1}{4\alpha}\{R(u,R(Y,Z)u)X - R(u,R(X,Z)u)Y + 2R(u,R(X,Y)u)Z\}^h
\end{aligned}$$

$$= (R(X,Y)Z)^h + \frac{1}{2}\{(\nabla_Y R)(X,Z)u - (\nabla_X R)(Y,Z)u\}^v$$
$$- \frac{1}{4\alpha}\{R(u,R(Y,Z)u)X - R(u,R(X,Z)u)Y + 2R(u,R(X,Y)u)Z\}^h$$

olur. Burada

$$(\nabla_X R)(Y,Z)u + (\nabla_Y R)(Z,X)u + (\nabla_Z R)(X,Y)u = 0$$

şeklindeki 2. Bianchi özdeşliği kullanılırsa

$$\tilde{R}(X^h,Y^h)Z^h = (R(X,Y)Z)^h + \frac{1}{2}((\nabla_Z R)(X,Y)u)^v$$
$$- \frac{1}{4\alpha}\{R(u,R(Y,Z)u)X - R(u,R(X,Z)u)Y + 2R(u,R(X,Y)u)Z\}^h$$

elde edilir.

**(ii)**

$$\tilde{R}(X^h,Y^h)Z^v$$
$$= \tilde{\nabla}_{X^h}\tilde{\nabla}_{Y^h}Z^v - \tilde{\nabla}_{Y^h}\tilde{\nabla}_{X^h}Z^v - \tilde{\nabla}_{[X^h,Y^h]}Z^v$$
$$= \tilde{\nabla}_{X^h}(\frac{1}{2\alpha}(R(u,Z)Y)^h + (\nabla_Y Z)^v) - \tilde{\nabla}_{Y^h}(\frac{1}{2\alpha}(R(u,Z)X)^h + (\nabla_X Z)^v)$$
$$- \tilde{\nabla}_{[X,Y]^h-(R(X,Y)u)^v}Z^v$$
$$= \frac{1}{2\alpha}\tilde{\nabla}_{X^h}(R(u,Z)Y)^h + \tilde{\nabla}_{X^h}(\nabla_Y Z)^v - \frac{1}{2\alpha}\tilde{\nabla}_{Y^h}(R(u,Z)X)^h$$
$$- \tilde{\nabla}_{Y^h}(\nabla_X Z)^v - \tilde{\nabla}_{[X,Y]^h}Z^v + \tilde{\nabla}_{(R(X,Y)u)^v}Z^v$$
$$= \frac{1}{2\alpha}\{(\nabla_X R(u,Z)Y)^h - \frac{1}{2}(R(X,R(u,Z)Y)u)^v\}$$
$$+ \{\frac{1}{2\alpha}(R(u,\nabla_Y Z)X)^h + (\nabla_X\nabla_Y Z)^v\}$$
$$- \frac{1}{2\alpha}\{(\nabla_Y R(u,Z)X)^h - \frac{1}{2}(R(Y,R(u,Z)X)u)^v\}$$
$$- \{\frac{1}{2\alpha}(R(u,\nabla_X Z)Y)^h + (\nabla_Y\nabla_X Z)^v\} - \{\frac{1}{2\alpha}(R(u,Z)\,[X,Y])^h + (\nabla_{[X,Y]}Z)^v\}$$
$$+ \{-\frac{1}{\alpha}\tilde{g}((R(X,Y)u)^v,U)Z^v - \frac{1}{\alpha}\tilde{g}(Z^v,U)(R(X,Y)u)^v$$
$$+ \frac{1+\alpha}{\alpha}\tilde{g}((R(X,Y)u)^v,Z^v)U - \frac{1}{\alpha}\tilde{g}((R(X,Y)u)^v,U)\tilde{g}(Z^v,U)U\}$$
$$= \frac{1}{2\alpha}(\nabla_X R(u,Z)Y)^h - \frac{1}{4\alpha}(R(X,R(u,Z)Y)u)^v + \frac{1}{2\alpha}(R(u,\nabla_Y Z)X)^h$$
$$+ (\nabla_X\nabla_Y Z)^v - \frac{1}{2\alpha}(\nabla_Y R(u,Z)X)^h + \frac{1}{4\alpha}(R(Y,R(u,Z)X)u)^v$$
$$- \frac{1}{2\alpha}(R(u,\nabla_X Z)Y)^h - (\nabla_Y\nabla_X Z)^v - \frac{1}{2\alpha}(R(u,Z)\nabla_X Y)^h$$
$$+ \frac{1}{2\alpha}(R(u,Z)\nabla_Y X)^h - (\nabla_{[X,Y]}Z)^v - \frac{1}{\alpha}g(R(X,Y)u,u)Z^v$$

$$
\begin{aligned}
&-\frac{1}{\alpha}g(Z,u)(R(X,Y)u)^v+\frac{1+\alpha}{\alpha}\tilde{g}((R(X,Y)u)^v,Z^v)U\\
&-\frac{1}{\alpha}g(R(X,Y)u,u)g(Z,u)U\\
= \;&(R(X,Y)Z)^v+\frac{1}{2\alpha}\{\nabla_X R(u,Z)Y-R(u,\nabla_X Z)Y-R(u,Z)\nabla_X Y\}^h\\
&-\frac{1}{2\alpha}\{\nabla_Y R(u,Z)X-R(u,\nabla_Y Z)X-R(u,Z)\nabla_Y X\}^h\\
&-\frac{1}{4\alpha}\{R(X,R(u,Z)Y)u-R(Y,R(u,Z)X)u\}^v\\
&-\frac{1}{\alpha}g(Z,u)(R(X,Y)u)^v+\frac{1+\alpha}{\alpha}\tilde{g}((R(X,Y)u)^v,Z^v)U\\
= \;&(R(X,Y)Z)^v+\frac{1}{2\alpha}\{(\nabla_X R)(u,Z)Y-(\nabla_Y R)(u,Z)X\}^h\\
&-\frac{1}{4\alpha}\{R(X,R(u,Z)Y)u-R(Y,R(u,Z)X)u\}^v\\
&-\frac{1}{\alpha}\tilde{g}(Z^v,U)(R(X,Y)u)^v+\frac{1+\alpha}{\alpha}\tilde{g}((R(X,Y)u)^v,Z^v)U
\end{aligned}
$$

elde edilir.

**(iii)**

$$
\begin{aligned}
&\tilde{R}(X^h,Y^v)Z^h\\
&=\tilde{\nabla}_{X^h}\tilde{\nabla}_{Y^v}Z^h-\tilde{\nabla}_{Y^v}\tilde{\nabla}_{X^h}Z^h-\tilde{\nabla}_{[X^h,Y^v]}Z^h\\
&=\tilde{\nabla}_{X^h}(\frac{1}{2\alpha}(R(u,Y)Z)^h)-\tilde{\nabla}_{Y^v}((\nabla_X Z)^h-\frac{1}{2}(R(X,Z)u)^v)-\tilde{\nabla}_{(\nabla_X Y)^v}Z^h\\
&=\frac{1}{2\alpha}\tilde{\nabla}_{X^h}(R(u,Y)Z)^h-\tilde{\nabla}_{Y^v}(\nabla_X Z)^h+\frac{1}{2}\tilde{\nabla}_{Y^v}(R(X,Z)u)^v-\tilde{\nabla}_{(\nabla_X Y)^v}Z^h\\
&=\frac{1}{2\alpha}((\nabla_X R(u,Y)Z)^h-\frac{1}{2}(R(X,R(u,Y)Z)u)^v)-\frac{1}{2\alpha}(R(u,Y)\nabla_X Z)^h\\
&\quad+\frac{1}{2}(R(X,Z)Y)^v-\frac{1}{2\alpha}\{\tilde{g}(Y^v,U)(R(X,Z)u)^v+\tilde{g}((R(X,Z)u)^v,U)Y^v\\
&\quad-(1+\alpha)\tilde{g}((R(X,Z)u)^v,Y^v)U+\tilde{g}(Y^v,U)\tilde{g}((R(X,Z)u)^v,U)U\}\\
&\quad-\frac{1}{2\alpha}(R(u,\nabla_X Y)Z)^h\\
&=\frac{1}{2\alpha}(\nabla_X R(u,Y)Z)^h-\frac{1}{4\alpha}(R(X,R(u,Y)Z)u)^v-\frac{1}{2\alpha}(R(u,Y)\nabla_X Z)^h\\
&\quad+\frac{1}{2}(R(X,Z)Y)^v-\frac{1}{2\alpha}\tilde{g}(Y^v,U)(R(X,Z)u)^v-\frac{1}{2\alpha}\tilde{g}((R(X,Z)u)^v,U)Y^v\\
&\quad+\frac{1+\alpha}{2\alpha}\tilde{g}((R(X,Z)u)^v,Y^v)U-\frac{1}{2\alpha}\tilde{g}(Y^v,U)\tilde{g}((R(X,Z)u)^v,U)U\\
&\quad-\frac{1}{2\alpha}(R(u,\nabla_X Y)Z)^h
\end{aligned}
$$

$$= \frac{1}{2\alpha}\{\nabla_X R(u,Y)Z - R(u,\nabla_X Y)Z - R(u,Y)\nabla_X Z\}^h - \frac{1}{4\alpha}(R(X,R(u,Y)Z)u)^v$$
$$+ \frac{1}{2}(R(X,Z)Y)^v - \frac{1}{2\alpha}\tilde{g}(Y^v,U)(R(X,Z)u)^v - \frac{1}{2\alpha}g(R(X,Z)u,u)Y^v$$
$$+ \frac{1+\alpha}{2\alpha}\tilde{g}((R(X,Z)u)^v,Y^v)U - \frac{1}{2\alpha}g(Y,u)g(R(X,Z)u,u)U$$
$$= \frac{1}{2\alpha}((\nabla_X R)(u,Y)Z)^h - \frac{1}{4\alpha}(R(X,R(u,Y)Z)u)^v + \frac{1}{2}(R(X,Z)Y)^v$$
$$- \frac{1}{2\alpha}\tilde{g}(Y^v,U)(R(X,Z)u)^v + \frac{1+\alpha}{2\alpha}\tilde{g}((R(X,Z)u)^v,Y^v)U$$

olup (iii) ispatlanmış olur.

**(iv)**

$$\tilde{R}(X^h,Y^v)Z^v$$
$$= \tilde{\nabla}_{X^h}\tilde{\nabla}_{Y^v}Z^v - \tilde{\nabla}_{Y^v}\tilde{\nabla}_{X^h}Z^v - \tilde{\nabla}_{[X^h,Y^v]}Z^v$$
$$= \tilde{\nabla}_{X^h}\{-\frac{1}{\alpha}\tilde{g}(Y^v,U)Z^v - \frac{1}{\alpha}\tilde{g}(Z^v,U)Y^v + \frac{1+\alpha}{\alpha}\tilde{g}(Y^v,Z^v)U$$
$$- \frac{1}{\alpha}\tilde{g}(Y^v,U)\tilde{g}(Z^v,U)U\} - \tilde{\nabla}_{Y^v}\{\frac{1}{2\alpha}(R(u,Z)X)^h + (\nabla_X Z)^v\}$$
$$- \tilde{\nabla}_{(\nabla_X Y)^v}Z^v$$
$$= -\frac{1}{\alpha}\tilde{\nabla}_{X^h}(\tilde{g}(Y^v,U)Z^v) - \frac{1}{\alpha}\tilde{\nabla}_{X^h}(\tilde{g}(Z^v,U)Y^v) + \frac{1+\alpha}{\alpha}\tilde{\nabla}_{X^h}(\tilde{g}(Y^v,Z^v)U)$$
$$- \frac{1}{\alpha}\tilde{\nabla}_{X^h}(\tilde{g}(Y^v,U))\tilde{g}(Z^v,U)U - \frac{1}{\alpha}\tilde{g}(Y^v,U)\tilde{\nabla}_{X^h}(\tilde{g}(Z^v,U))U$$
$$- \frac{1}{\alpha}\tilde{g}(Y^v,U)\tilde{g}(Z^v,U)\tilde{\nabla}_{X^h}U - \tilde{\nabla}_{Y^v}(\frac{1}{2\alpha})(R(u,Z)X)^h$$
$$- \frac{1}{2\alpha}\tilde{\nabla}_{Y^v}((R(u,Z)X)^h) - \tilde{\nabla}_{Y^v}(\nabla_X Z)^v - \tilde{\nabla}_{(\nabla_X Y)^v}Z^v$$
$$= -\frac{1}{\alpha}\tilde{g}(\tilde{\nabla}_{X^h}Y^v,U)Z^v - \frac{1}{\alpha}\tilde{g}(Y^v,U)\tilde{\nabla}_{X^h}Z^v - \frac{1}{\alpha}\tilde{g}(\tilde{\nabla}_{X^h}Z^v,U)Y^v$$
$$- \frac{1}{\alpha}\tilde{g}(Z^v,U)\tilde{\nabla}_{X^h}Y^v + \frac{1+\alpha}{\alpha}\tilde{g}(\tilde{\nabla}_{X^h}Y^v,Z^v)U + \frac{1+\alpha}{\alpha}\tilde{g}(Y^v,\tilde{\nabla}_{X^h}Z^v)U$$
$$- \frac{1}{\alpha}\tilde{g}(\tilde{\nabla}_{X^h}Y^v,U)\tilde{g}(Z^v,U)U - \frac{1}{\alpha}\tilde{g}(Y^v,U)\tilde{g}(\tilde{\nabla}_{X^h}Z^v,U)U$$
$$- \tilde{\nabla}_{Y^v}(\frac{1}{2\alpha})(R(u,Z)X)^h - \frac{1}{2\alpha}(R(Y,Z)X)^h - \frac{1}{4\alpha^2}(R(u,Y)R(u,Z)X)^h$$
$$+ \frac{1}{\alpha}\tilde{g}(Y^v,U)(\nabla_X Z)^v + \frac{1}{\alpha}\tilde{g}((\nabla_X Z)^v,U)Y^v - \frac{1+\alpha}{\alpha}\tilde{g}(Y^v,(\nabla_X Z)^v)U$$
$$+ \frac{1}{\alpha}\tilde{g}(Y^v,U)\tilde{g}((\nabla_X Z)^v,U)U + \frac{1}{\alpha}\tilde{g}((\nabla_X Y)^v,U)Z^v + \frac{1}{\alpha}\tilde{g}(Z^v,U)(\nabla_X Y)^v$$
$$- \frac{1+\alpha}{\alpha}\tilde{g}((\nabla_X Y)^v,Z^v)U + \frac{1}{\alpha}\tilde{g}((\nabla_X Y)^v,U)\tilde{g}(Z^v,U)U$$
$$= -\frac{1}{\alpha}\tilde{g}(\frac{1}{2\alpha}(R(u,Y)X)^h + (\nabla_X Y)^v,U)Z^v$$

$$
\begin{aligned}
& -\frac{1}{\alpha}\tilde{g}(Y^v,U)(\frac{1}{2\alpha}(R(u,Z)X)^h+(\nabla_X Z)^v)-\frac{1}{\alpha}\tilde{g}(\frac{1}{2\alpha}(R(u,Z)X)^h+(\nabla_X Z)^v,U)Y^v \\
& -\frac{1}{\alpha}\tilde{g}(Z^v,U)(\frac{1}{2\alpha}(R(u,Y)X)^h+(\nabla_X Y)^v) \\
& +\frac{1+\alpha}{\alpha}\tilde{g}(\frac{1}{2\alpha}(R(u,Y)X)^h+(\nabla_X Y)^v,Z^v)U \\
& +\frac{1+\alpha}{\alpha}\tilde{g}(Y^v,\frac{1}{2\alpha}(R(u,Z)X)^h+(\nabla_X Z)^v)U \\
& -\frac{1}{\alpha}\tilde{g}(\frac{1}{2\alpha}(R(u,Y)X)^h+(\nabla_X Y)^v,U)\tilde{g}(Z^v,U)U \\
& -\frac{1}{\alpha}\tilde{g}(Y^v,U)\tilde{g}(\frac{1}{2\alpha}(R(u,Z)X)^h+(\nabla_X Z)^v,U)U-\tilde{\nabla}_{Y^v}(\frac{1}{2\alpha})(R(u,Z)X)^h \\
& -\frac{1}{2\alpha}(R(Y,Z)X)^h-\frac{1}{4\alpha^2}(R(u,Y)R(u,Z)X)^h+\frac{1}{\alpha}\tilde{g}(Y^v,U)(\nabla_X Z)^v \\
& +\frac{1}{\alpha}\tilde{g}((\nabla_X Z)^v,U)Y^v-\frac{1+\alpha}{\alpha}\tilde{g}(Y^v,(\nabla_X Z)^v)U+\frac{1}{\alpha}\tilde{g}(Y^v,U)\tilde{g}((\nabla_X Z)^v,U)U \\
& +\frac{1}{\alpha}\tilde{g}((\nabla_X Y)^v,U)Z^v+\frac{1}{\alpha}\tilde{g}(Z^v,U)(\nabla_X Y)^v-\frac{1+\alpha}{\alpha}\tilde{g}((\nabla_X Y)^v,Z^v)U \\
& +\frac{1}{\alpha}\tilde{g}((\nabla_X Y)^v,U)\tilde{g}(Z^v,U)U \\
= & -\frac{1}{2\alpha^2}\tilde{g}(Y^v,U)(R(u,Z)X)^h-\frac{1}{2\alpha^2}\tilde{g}(Z^v,U)(R(u,Y)X)^h-\tilde{\nabla}_{Y^v}(\frac{1}{2\alpha})(R(u,Z)X)^h \\
& -\frac{1}{2\alpha}(R(Y,Z)X)^h-\frac{1}{4\alpha^2}(R(u,Y)R(u,Z)X)^h \\
= & -\frac{1}{2\alpha^2}\tilde{g}(Y^v,U)(R(u,Z)X)^h-\frac{1}{2\alpha^2}\tilde{g}(Z^v,U)(R(u,Y)X)^h \\
& +\frac{1}{\alpha^2}g(Y,u)(R(u,Z)X)^h-\frac{1}{2\alpha}(R(Y,Z)X)^h-\frac{1}{4\alpha^2}(R(u,Y)R(u,Z)X)^h \\
= & \ \frac{1}{2\alpha^2}\tilde{g}(Y^v,U)(R(u,Z)X)^h-\frac{1}{2\alpha^2}\tilde{g}(Z^v,U)(R(u,Y)X)^h-\frac{1}{2\alpha}(R(Y,Z)X)^h \\
& -\frac{1}{4\alpha^2}(R(u,Y)R(u,Z)X)^h
\end{aligned}
$$

olup, bu ifade (iv) eşitliğidir.

**(v)** Riemann eğrilik tensörünün tanımından ve Teorem 2.2.1'den

$$
\begin{aligned}
\tilde{R}(X^v,Y^v)Z^h &= \tilde{\nabla}_{X^v}\tilde{\nabla}_{Y^v}Z^h-\tilde{\nabla}_{Y^v}\tilde{\nabla}_{X^v}Z^h-\tilde{\nabla}_{[X^v,Y^v]}Z^h \\
&= \tilde{\nabla}_{X^v}\tilde{\nabla}_{Y^v}Z^h-\tilde{\nabla}_{Y^v}\tilde{\nabla}_{X^v}Z^h
\end{aligned}
$$

dir. Dolayısıyla, önce $\tilde{\nabla}_{X^v}\tilde{\nabla}_{Y^v}Z^h$ ve $\tilde{\nabla}_{Y^v}\tilde{\nabla}_{X^v}Z^h$ ifadelerini hesaplayalım.

$$
\begin{aligned}
& \tilde{\nabla}_{X^v}\tilde{\nabla}_{Y^v}Z^h \\
& =\tilde{\nabla}_{X^v}(\frac{1}{2\alpha}(R(u,Y)Z)^h) \\
& =X^v(\frac{1}{2\alpha})(R(u,Y)Z)^h+\frac{1}{2\alpha}\tilde{\nabla}_{X^v}(R(u,Y)Z)^h
\end{aligned}
$$

$$= -\frac{1}{\alpha^2}g(X,u)(R(u,Y)Z)^h + \frac{1}{2\alpha}\{(R(X,Y)Z)^h + \frac{1}{2\alpha}(R(u,X)R(u,Y)Z)^h\}$$
$$= -\frac{1}{\alpha^2}g(X,u)(R(u,Y)Z)^h + \frac{1}{2\alpha}(R(X,Y)Z)^h + \frac{1}{4\alpha^2}(R(u,X)R(u,Y)Z)^h$$

ve benzer şekilde

$$\tilde{\nabla}_{Y^v}\tilde{\nabla}_{X^v}Z^h = -\frac{1}{\alpha^2}g(Y,u)(R(u,X)Z)^h + \frac{1}{2\alpha}(R(Y,X)Z)^h + \frac{1}{4\alpha^2}(R(u,Y)R(u,X)Z)^h$$

dir. O halde

$$\begin{aligned}
&\tilde{R}(X^v,Y^v)Z^h \\
&= \tilde{\nabla}_{X^v}\tilde{\nabla}_{Y^v}Z^h - \tilde{\nabla}_{Y^v}\tilde{\nabla}_{X^v}Z^h \\
&= -\frac{1}{\alpha^2}g(X,u)(R(u,Y)Z)^h + \frac{1}{2\alpha}(R(X,Y)Z)^h + \frac{1}{4\alpha^2}(R(u,X)R(u,Y)Z)^h \\
&\quad + \frac{1}{\alpha^2}g(Y,u)(R(u,X)Z)^h - \frac{1}{2\alpha}(R(Y,X)Z)^h - \frac{1}{4\alpha^2}(R(u,Y)R(u,X)Z)^h \\
&= \frac{1}{\alpha}(R(X,Y)Z)^h + \frac{1}{4\alpha^2}\{R(u,X)R(u,Y)Z - R(u,Y)R(u,X)Z\}^h \\
&\quad - \frac{1}{\alpha^2}\{g(X,u)(R(u,Y)Z)^h - g(Y,u)(R(u,X)Z)^h\}
\end{aligned}$$

elde edilir.

**(vi)** $\tilde{R}(X^v,Y^v)Z^v$ ifadesini hesaplayabilmek için, önce aşağıdaki eşitlikleri verelim:

$$\tilde{g}(U,U) = \frac{1}{1+r^2}\{g(u,u) + g(u,u)g(u,u)\} = \frac{1}{1+r^2}\{r^2 + r^4\} = r^2$$

dir ve

$$\tilde{\nabla}_{X^v}U = \frac{1}{\alpha}(X^v + \tilde{g}(X^v,U)U)$$

dur. Gerçekten,

$$\begin{aligned}
\tilde{\nabla}_{X^v}U &= \tilde{\nabla}_{X^v}\sum_{i=1}^{n} v_{n+i}(\frac{\partial}{\partial v_{n+i}}) \\
&= \sum_{i=1}^{n} X^v(v_{n+i})\frac{\partial}{\partial v_{n+i}} + \sum_{i=1}^{n} v_{n+i}\tilde{\nabla}_{X^v}(\frac{\partial}{\partial v_{n+i}})
\end{aligned}$$

dir. İlk toplam Lemma 2.2.2'den $X^v$ ye, son toplam da Önerme 3.2.1'den $\frac{1}{\alpha}((1-\alpha)X^v + \tilde{g}(X^v,U)U)$'ya eşittir. Ayrıca

$$\begin{aligned}
\tilde{R}(X^v,Y^v)Z^v &= \tilde{\nabla}_{X^v}\tilde{\nabla}_{Y^v}Z^v - \tilde{\nabla}_{Y^v}\tilde{\nabla}_{X^v}Z^v - \tilde{\nabla}_{[X^v,Y^v]}Z^v \\
&= \tilde{\nabla}_{X^v}\tilde{\nabla}_{Y^v}Z^v - \tilde{\nabla}_{Y^v}\tilde{\nabla}_{X^v}Z^v
\end{aligned}$$

dir. Şimdi $\tilde{\nabla}_{X^v}\tilde{\nabla}_{Y^v}Z^v$ ve $\tilde{\nabla}_{Y^v}\tilde{\nabla}_{X^v}Z^v$ ifadelerini hesaplayalım.

$$\begin{aligned}
&\tilde{\nabla}_{X^v}\tilde{\nabla}_{Y^v}Z^v\\
&=\tilde{\nabla}_{X^v}\{-\frac{1}{\alpha}\tilde{g}(Y^v,U)Z^v-\frac{1}{\alpha}\tilde{g}(Z^v,U)Y^v+\frac{1+\alpha}{\alpha}\tilde{g}(Y^v,Z^v)U\\
&\quad-\frac{1}{\alpha}\tilde{g}(Y^v,U)\tilde{g}(Z^v,U)U\}\\
&=-X^v(\frac{1}{\alpha})\tilde{g}(Y^v,U)Z^v-\frac{1}{\alpha}\tilde{\nabla}_{X^v}(\tilde{g}(Y^v,U)Z^v)-X^v(\frac{1}{\alpha})\tilde{g}(Z^v,U)Y^v\\
&\quad-\frac{1}{\alpha}\tilde{\nabla}_{X^v}(\tilde{g}(Z^v,U)Y^v)+X^v(\frac{1+\alpha}{\alpha})\tilde{g}(Y^v,Z^v)U+\frac{1+\alpha}{\alpha}\tilde{\nabla}_{X^v}(\tilde{g}(Y^v,Z^v)U)\\
&\quad-X^v(\frac{1}{\alpha})\tilde{g}(Y^v,U)\tilde{g}(Z^v,U)U-\frac{1}{\alpha}\tilde{\nabla}_{X^v}(\tilde{g}(Y^v,U))\tilde{g}(Z^v,U)U\\
&\quad-\frac{1}{\alpha}\tilde{g}(Y^v,U)\tilde{\nabla}_{X^v}(\tilde{g}(Z^v,U))U-\frac{1}{\alpha}\tilde{g}(Y^v,U)\tilde{g}(Z^v,U)\tilde{\nabla}_{X^v}U\\
&=\frac{2}{\alpha^2}g(X,u)\tilde{g}(Y^v,U)Z^v-\frac{1}{\alpha}\tilde{g}(\tilde{\nabla}_{X^v}Y^v,U)Z^v-\frac{1}{\alpha}\tilde{g}(Y^v,\tilde{\nabla}_{X^v}U)Z^v\\
&\quad-\frac{1}{\alpha}\tilde{g}(Y^v,U)\tilde{\nabla}_{X^v}Z^v+\frac{2}{\alpha^2}g(X,u)\tilde{g}(Z^v,U)Y^v-\frac{1}{\alpha}\tilde{g}(\tilde{\nabla}_{X^v}Z^v,U)Y^v\\
&\quad-\frac{1}{\alpha}\tilde{g}(Z^v,\tilde{\nabla}_{X^v}U)Y^v-\frac{1}{\alpha}\tilde{g}(Z^v,U)\tilde{\nabla}_{X^v}Y^v-\frac{2}{\alpha^2}g(X,u)\tilde{g}(Y^v,Z^v)U\\
&\quad+\frac{1+\alpha}{\alpha}\tilde{g}(\tilde{\nabla}_{X^v}Y^v,Z^v)U+\frac{1+\alpha}{\alpha}\tilde{g}(Y^v,\tilde{\nabla}_{X^v}Z^v)U+\frac{1+\alpha}{\alpha}\tilde{g}(Y^v,Z^v)\tilde{\nabla}_{X^v}U\\
&\quad+\frac{2}{\alpha^2}g(X,u)\tilde{g}(Y^v,U)\tilde{g}(Z^v,U)U-\frac{1}{\alpha}\tilde{g}(\tilde{\nabla}_{X^v}Y^v,U)\tilde{g}(Z^v,U)U\\
&\quad-\frac{1}{\alpha}\tilde{g}(Y^v,\tilde{\nabla}_{X^v}U)\tilde{g}(Z^v,U)U-\frac{1}{\alpha}\tilde{g}(Y^v,U)\tilde{g}(\tilde{\nabla}_{X^v}Z^v,U)U\\
&\quad-\frac{1}{\alpha}\tilde{g}(Y^v,U)\tilde{g}(Z^v,\tilde{\nabla}_{X^v}U)U-\frac{1}{\alpha}\tilde{g}(Y^v,U)\tilde{g}(Z^v,U)\tilde{\nabla}_{X^v}U\\
&=\frac{2}{\alpha^2}g(X,u)g(Y,u)Z^v-\frac{1}{\alpha}\tilde{g}(-\frac{1}{\alpha}\tilde{g}(X^v,U)Y^v-\frac{1}{\alpha}\tilde{g}(Y^v,U)X^v\\
&\quad+\frac{1+\alpha}{\alpha}\tilde{g}(X^v,Y^v)U-\frac{1}{\alpha}\tilde{g}(X^v,U)\tilde{g}(Y^v,U)U,U)Z^v\\
&\quad-\frac{1}{\alpha}\tilde{g}(Y^v,\frac{1}{\alpha}X^v+\frac{1}{\alpha}\tilde{g}(X^v,U)U)Z^v\\
&\quad-\frac{1}{\alpha}g(Y,u)(-\frac{1}{\alpha}\tilde{g}(X^v,U)Z^v-\frac{1}{\alpha}\tilde{g}(Z^v,U)X^v+\frac{1+\alpha}{\alpha}\tilde{g}(X^v,Z^v)U\\
&\quad-\frac{1}{\alpha}\tilde{g}(X^v,U)\tilde{g}(Z^v,U)U)+\frac{2}{\alpha^2}g(X,u)g(Z,u)Y^v\\
&\quad-\frac{1}{\alpha}\tilde{g}(-\frac{1}{\alpha}\tilde{g}(X^v,U)Z^v-\frac{1}{\alpha}\tilde{g}(Z^v,U)X^v+\frac{1+\alpha}{\alpha}\tilde{g}(X^v,Z^v)U\\
&\quad-\frac{1}{\alpha}\tilde{g}(X^v,U)\tilde{g}(Z^v,U)U,U)Y^v-\frac{1}{\alpha}\tilde{g}(Z^v,\frac{1}{\alpha}X^v+\frac{1}{\alpha}\tilde{g}(X^v,U)U)Y^v\\
&\quad-\frac{1}{\alpha}\tilde{g}(Z^v,U)(-\frac{1}{\alpha}\tilde{g}(X^v,U)Y^v-\frac{1}{\alpha}\tilde{g}(Y^v,U)X^v+\frac{1+\alpha}{\alpha}\tilde{g}(X^v,Y^v)U\\
&\quad-\frac{1}{\alpha}\tilde{g}(X^v,U)\tilde{g}(Y^v,U)U)-\frac{2}{\alpha^2}g(X,u)\tilde{g}(Y^v,Z^v)U
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
& +\frac{1+\alpha}{\alpha}\tilde{g}(-\frac{1}{\alpha}\tilde{g}(X^v,U)Y^v-\frac{1}{\alpha}\tilde{g}(Y^v,U)X^v \\
& +\frac{1+\alpha}{\alpha}\tilde{g}(X^v,Y^v)U-\frac{1}{\alpha}\tilde{g}(X^v,U)\tilde{g}(Y^v,U)U,Z^v)U \\
& +\frac{1+\alpha}{\alpha}\tilde{g}(Y^v,-\frac{1}{\alpha}\tilde{g}(X^v,U)Z^v-\frac{1}{\alpha}\tilde{g}(Z^v,U)X^v \\
& +\frac{1+\alpha}{\alpha}\tilde{g}(X^v,Z^v)U-\frac{1}{\alpha}\tilde{g}(X^v,U)\tilde{g}(Z^v,U)U)U \\
& +\frac{1+\alpha}{\alpha}\tilde{g}(Y^v,Z^v)(\frac{1}{\alpha}X^v+\frac{1}{\alpha}\tilde{g}(X^v,U)U) \\
& +\frac{2}{\alpha^2}g(X,u)g(Y,u)g(Z,u)U-\frac{1}{\alpha}\tilde{g}(-\frac{1}{\alpha}\tilde{g}(X^v,U)Y^v-\frac{1}{\alpha}\tilde{g}(Y^v,U)X^v \\
& +\frac{1+\alpha}{\alpha}\tilde{g}(X^v,Y^v)U-\frac{1}{\alpha}\tilde{g}(X^v,U)\tilde{g}(Y^v,U)U,U)\tilde{g}(Z^v,U)U \\
& -\frac{1}{\alpha}\tilde{g}(Y^v,\frac{1}{\alpha}X^v+\frac{1}{\alpha}\tilde{g}(X^v,U)U)\tilde{g}(Z^v,U)U \\
& -\frac{1}{\alpha}\tilde{g}(Y^v,U)\tilde{g}(-\frac{1}{\alpha}\tilde{g}(X^v,U)Z^v-\frac{1}{\alpha}\tilde{g}(Z^v,U)X^v \\
& +\frac{1+\alpha}{\alpha}\tilde{g}(X^v,Z^v)U-\frac{1}{\alpha}\tilde{g}(X^v,U)\tilde{g}(Z^v,U)U,U)U \\
& -\frac{1}{\alpha}\tilde{g}(Y^v,U)\tilde{g}(Z^v,\frac{1}{\alpha}X^v+\frac{1}{\alpha}\tilde{g}(X^v,U)U)U \\
& -\frac{1}{\alpha}\tilde{g}(Y^v,U)\tilde{g}(Z^v,U)(\frac{1}{\alpha}X^v+\frac{1}{\alpha}\tilde{g}(X^v,U)U) \\
= \; & g(X,u)g(Y,u)Z^v\{\frac{2}{\alpha^2}+\frac{1}{\alpha^2}+\frac{1}{\alpha^2}+\frac{r^2}{\alpha^2}-\frac{1}{\alpha^2}+\frac{1}{\alpha^2}\} \\
& +g(Y,u)g(Z,u)X^v\{\frac{1}{\alpha^2}+\frac{1}{\alpha^2}-\frac{1}{\alpha^2}\} \\
& +g(X,u)g(Z,u)Y^v\{\frac{2}{\alpha^2}+\frac{1}{\alpha^2}+\frac{1}{\alpha^2}+\frac{r^2}{\alpha^2}-\frac{1}{\alpha^2}+\frac{1}{\alpha^2}\} \\
& +g(X,u)g(Y,u)g(Z,u)U\{\frac{1}{\alpha^2}+\frac{1}{\alpha^2}-\frac{1+\alpha}{\alpha^2}-\frac{1+\alpha}{\alpha^2}+\frac{2}{\alpha^2}+\frac{1}{\alpha^2} \\
& +\frac{1}{\alpha^2}+\frac{r^2}{\alpha^2}-\frac{1}{\alpha^2}+\frac{1}{\alpha^2}+\frac{1}{\alpha^2}+\frac{r^2}{\alpha^2}-\frac{1}{\alpha^2}-\frac{1}{\alpha^2}\} \\
& +g(Y,u)\tilde{g}(X^v,Z^v)U\{-\frac{1+\alpha}{\alpha^2}-\frac{1+\alpha}{\alpha^2}+\frac{(1+\alpha)^2}{\alpha^2}-\frac{(1+\alpha)r^2}{\alpha^2}-\frac{1}{\alpha^2}\} \\
& +g(Z,u)\tilde{g}(X^v,Y^v)U\{-\frac{1+\alpha}{\alpha^2}+\frac{(1+\alpha)^2}{\alpha^2}-\frac{1+\alpha}{\alpha^2}-\frac{(1+\alpha)r^2}{\alpha^2}-\frac{1}{\alpha^2}\} \\
& +g(X,u)\tilde{g}(Y^v,Z^v)U\{-\frac{2}{\alpha^2}-\frac{1+\alpha}{\alpha^2}-\frac{1+\alpha}{\alpha^2}+\frac{1+\alpha}{\alpha^2}\} \\
& -(\frac{(1+\alpha)r^2}{\alpha^2}+\frac{1}{\alpha^2})\tilde{g}(X^v,Y^v)Z^v-(\frac{(1+\alpha)r^2}{\alpha^2}+\frac{1}{\alpha^2})\tilde{g}(X^v,Z^v)Y^v \\
& +\frac{1+\alpha}{\alpha^2}\tilde{g}(Y^v,Z^v)X^v
\end{aligned}
$$

dir, yani

$$\begin{aligned}
&\tilde{\nabla}_{X^v}\tilde{\nabla}_{Y^v}Z^v = (\frac{3+\alpha}{\alpha^2})g(X,u)g(Y,u)Z^v + \frac{1}{\alpha^2}g(Y,u)g(Z,u)X^v \\
&+ (\frac{3+\alpha}{\alpha^2})g(X,u)g(Z,u)Y^v + \frac{1}{\alpha^2}g(X,u)g(Y,u)g(Z,u)U \\
&- \frac{1}{\alpha^2}g(Y,u)\tilde{g}(X^v,Z^v)U - \frac{1}{\alpha^2}g(Z,u)\tilde{g}(X^v,Y^v)U \\
&- (\frac{3+\alpha}{\alpha^2})g(X,u)\tilde{g}(Y^v,Z^v)U - \tilde{g}(X^v,Y^v)Z^v - \tilde{g}(X^v,Z^v)Y^v \\
&+ (\frac{1+\alpha}{\alpha^2})\tilde{g}(Y^v,Z^v)X^v
\end{aligned}$$

bulunur. Benzer şekilde

$$\begin{aligned}
&\tilde{\nabla}_{Y^v}\tilde{\nabla}_{X^v}Z^v = (\frac{3+\alpha}{\alpha^2})g(Y,u)g(X,u)Z^v + \frac{1}{\alpha^2}g(X,u)g(Z,u)Y^v \\
&+ (\frac{3+\alpha}{\alpha^2})g(Y,u)g(Z,u)X^v + \frac{1}{\alpha^2}g(Y,u)g(X,u)g(Z,u)U \\
&- \frac{1}{\alpha^2}g(X,u)\tilde{g}(Y^v,Z^v)U - \frac{1}{\alpha^2}g(Z,u)\tilde{g}(Y^v,X^v)U \\
&- (\frac{3+\alpha}{\alpha^2})g(Y,u)\tilde{g}(X^v,Z^v)U - \tilde{g}(Y^v,X^v)Z^v - \tilde{g}(Y^v,Z^v)X^v \\
&+ (\frac{1+\alpha}{\alpha^2})\tilde{g}(X^v,Z^v)Y^v
\end{aligned}$$

olup, buradan

$$\begin{aligned}
&\tilde{R}(X^v,Y^v)Z^v \\
&= \tilde{\nabla}_{X^v}\tilde{\nabla}_{Y^v}Z^v - \tilde{\nabla}_{Y^v}\tilde{\nabla}_{X^v}Z^v \\
&= g(Y,u)g(Z,u)X^v(\frac{1}{\alpha^2} - \frac{3+\alpha}{\alpha^2}) + g(X,u)g(Z,u)Y^v(\frac{3+\alpha}{\alpha^2} - \frac{1}{\alpha^2}) \\
&\quad + g(Y,u)\tilde{g}(X^v,Z^v)U(-\frac{1}{\alpha^2} + \frac{3+\alpha}{\alpha^2}) + g(X,u)\tilde{g}(Y^v,Z^v)U(-\frac{3+\alpha}{\alpha^2} + \frac{1}{\alpha^2}) \\
&\quad + \tilde{g}(X^v,Z^v)Y^v(-1 - \frac{1+\alpha}{\alpha^2}) + \tilde{g}(Y^v,Z^v)X^v(\frac{1+\alpha}{\alpha^2} + 1) \\
&= (\frac{\alpha+2}{\alpha^2})\{g(X,u)g(Z,u)Y^v - g(Y,u)g(Z,u)X^v\} \\
&\quad + (\frac{\alpha+2}{\alpha^2})\{g(Y,u)\tilde{g}(X^v,Z^v)U - g(X,u)\tilde{g}(Y^v,Z^v)U\} \\
&\quad + (\frac{1+\alpha+\alpha^2}{\alpha^2})\{\tilde{g}(Y^v,Z^v)X^v - \tilde{g}(X^v,Z^v)Y^v\}
\end{aligned}$$

elde edilir ve dolayısıyla ispat tamamlanır. $\square$

## 3.4 Cheeger-Gromoll Metrikli Tanjant Demetler İçin Bazı Geometrik Sonuçlar

Bu alt bölümde, önce bir $(M, g)$ Riemann manifoldunun Cheeger-Gromoll metriğiyle donatılmış $(TM, \tilde{g})$ tanjant demetinin kesitsel eğrilikleri için bir önerme verilerek sonrasında da bu önerme yardımıyla $(M, g)$'nin sabit kesitsel eğrilikli olması durumu için $(TM, \tilde{g})$'nın kesitsel eğrilikleri ile ilgili bir sonuç verilmektedir. Ardından, $(p, u)$ noktasında $TM$ tanjant demetinin $T_{(p,u)}TM$ tanjant uzayı için bir ortonormal baz ifade edilerek bu ortonormal baz yardımıyla $(TM, \tilde{g})$'nın skalar eğriliği elde edilmektedir.

$\|.\|$, $\tilde{g}$'ya göre normu belirtmek üzere $V, W \in C^\infty(TTM)$ için

$$\tilde{Q}(V, W) = \|V\|^2 \|W\|^2 - \tilde{g}(V, W)^2 \tag{3.4.1}$$

$V$ ve $W$ kenarlı paralelkenarın alanının karesi olsun.

**Lemma 3.4.1.** *$X, Y \in T_pM$, $p$ noktasında $M$'nin $T_pM$ tanjant uzayında iki ortonormal vektör alanı olsun. Bu taktirde,*

***(i)*** $\tilde{Q}(X^h, Y^h) = 1,$

***(ii)*** $\tilde{Q}(X^h, Y^v) = \frac{1}{\alpha}(1 + g(Y, u)^2),$

***(iii)*** $\tilde{Q}(X^v, Y^v) = \frac{1}{\alpha^2}(1 + g(Y, u)^2 + g(X, u)^2)$

*dir [6].*

**İspat.** **(i)** (3.4.1) denkleminden

$$\begin{aligned}
\tilde{Q}(X^h, Y^h) &= \left\|X^h\right\|^2 \left\|Y^h\right\|^2 - \tilde{g}(X^h, Y^h)^2 \\
&= \tilde{g}(X^h, X^h)\tilde{g}(Y^h, Y^h) - \tilde{g}(X^h, Y^h)^2 \\
&= g(X, X)g(Y, Y) - g(X, Y)^2 \\
&= 1
\end{aligned}$$

dir.

**(ii)** Benzer şekilde

$$\begin{aligned}
\tilde{Q}(X^h, Y^v) &= \left\|X^h\right\|^2 \|Y^v\|^2 - \tilde{g}(X^h, Y^v)^2 \\
&= \tilde{g}(X^h, X^h)\tilde{g}(Y^v, Y^v) \\
&= g(X, X)\{\frac{1}{\alpha}\{g(Y, Y) + g(Y, u)^2\}\} \\
&= \frac{1}{\alpha}\{1 + g(Y, u)^2\}
\end{aligned}$$

bulunur.

**(iii)** Son olarak da

$$\begin{aligned}
\tilde{Q}(X^v, Y^v) &= \|X^v\|^2 \|Y^v\|^2 - \tilde{g}(X^v, Y^v)^2 \\
&= \tilde{g}(X^v, X^v)\tilde{g}(Y^v, Y^v) - \tilde{g}(X^v, Y^v)^2 \\
&= \frac{1}{\alpha}\{g(X, X) + g(X, u)^2\}\frac{1}{\alpha}\{g(Y, Y) + g(Y, u)^2\} \\
&\quad -\frac{1}{\alpha^2}\{g(X, Y) + g(X, u)g(Y, u)\}^2 \\
&= \frac{1}{\alpha^2}\{(1 + g(X, u)^2)(1 + g(Y, u)^2)\} - \frac{1}{\alpha^2}g(X, u)^2 g(Y, u)^2 \\
&= \frac{1}{\alpha^2}\{1 + g(Y, u)^2 + g(X, u)^2 + g(X, u)^2 g(Y, u)^2 - g(X, u)^2 g(Y, u)^2\} \\
&= \frac{1}{\alpha^2}\{1 + g(X, u)^2 + g(Y, u)^2\}
\end{aligned}$$

elde edilir ve ispat tamamlanır. □

Şimdi $TM$ üzerinde, $V, W \in C^\infty(TTM)$ için

$$\tilde{G} : (V, W) \longrightarrow \tilde{g}(\tilde{R}(V, W)W, V) \tag{3.4.2}$$

şeklinde verilen $\tilde{G}$ tensörünü ele alalım.

**Lemma 3.4.2.** *$X$ ve $Y$, $p$ noktasında $M$'nin $T_pM$ tanjant uzayında iki ortonormal vektör alanı olsun. Bu taktirde,*

***(i)*** $\tilde{G}(X^h, Y^h) = K(X, Y) - \frac{3}{4\alpha}\|R(X, Y)u\|^2$,

***(ii)*** $\tilde{G}(X^h, Y^v) = \frac{1}{4\alpha^2}\|R(u, Y)X\|^2$,

***(iii)*** $\tilde{G}(X^v, Y^v) = \frac{1-\alpha}{\alpha^4}(1 + g(X, u)^2 + g(Y, u)^2) + \frac{\alpha+2}{\alpha^3}$

*dir. Burada $K$, $(M, g)$ manifoldunun kesitsel eğriliğidir. [29].*

**İspat. (i)** Önerme 3.3.1-(i) ve (3.4.2) denkleminden

$$\begin{aligned}
&\tilde{G}(X^h, Y^h)\\
&= \tilde{g}(\tilde{R}(X^h, Y^h)Y^h, X^h)\\
&= \tilde{g}((R(X,Y)Y)^h - \frac{1}{4\alpha}(R(u, R(Y,Y)u)X)^h + \frac{1}{4\alpha}(R(u, R(X,Y)u)Y)^h\\
&\quad + \frac{1}{2\alpha}(R(u, R(X,Y)u)Y)^h + \frac{1}{2}((\nabla_Y R)(X,Y)u)^v, X^h)\\
&= \tilde{g}((R(X,Y)Y)^h, X^h) - \frac{1}{4\alpha}\tilde{g}((R(u, R(Y,Y)u)X)^h, X^h)\\
&\quad + \frac{1}{4\alpha}\tilde{g}((R(u, R(X,Y)u)Y)^h, X^h) + \frac{1}{2\alpha}\tilde{g}((R(u, R(X,Y)u)Y)^h, X^h)\\
&\quad + \frac{1}{2}\tilde{g}(((\nabla_Y R)(X,Y)u)^v, X^h)\\
&= \tilde{g}((R(X,Y)Y)^h, X^h) + \frac{3}{4\alpha}\tilde{g}((R(u, R(X,Y)u)Y)^h, X^h)\\
&= g(R(X,Y)Y, X) + \frac{3}{4\alpha}g(R(u, R(X,Y)u)Y, X)\\
&= g(R(X,Y)Y, X) + \frac{3}{4\alpha}g(R(Y,X)u, R(X,Y)u)\\
&= g(R(X,Y)Y, X) - \frac{3}{4\alpha}g(R(X,Y)u, R(X,Y)u)\\
&= K(X,Y) - \frac{3}{4\alpha}\left\|R(X,Y)u\right\|^2
\end{aligned}$$

bulunur.

**(ii)** Önerme 3.3.1-(iv) ve (3.4.2) denkleminden

$$\begin{aligned}
&\tilde{G}(X^h, Y^v)\\
&= \tilde{g}(\tilde{R}(X^h, Y^v)Y^v, X^h)\\
&= \tilde{g}(-\frac{1}{2\alpha}(R(Y,Y)X)^h + \frac{1}{2\alpha^2}g(Y,u)(R(u,Y)X)^h\\
&\quad - \frac{1}{2\alpha^2}g(Y,u)(R(u,Y)X)^h - \frac{1}{4\alpha^2}(R(u,Y)R(u,Y)X)^h, X^h)\\
&= -\frac{1}{4\alpha^2}\tilde{g}((R(u,Y)R(u,Y)X)^h, X^h)\\
&= -\frac{1}{4\alpha^2}g(R(u,Y)R(u,Y)X, X)\\
&= \frac{1}{4\alpha^2}g(R(u,Y)X, R(u,Y)X)\\
&= \frac{1}{4\alpha^2}\left\|R(u,Y)X\right\|^2
\end{aligned}$$

elde edilir.

**(iii)** Önerme 3.3.1-(vi) ve (3.4.2) denkleminden

$$
\begin{aligned}
&\tilde{G}(X^v, Y^v) \\
&= \tilde{g}(\tilde{R}(X^v, Y^v)Y^v, X^v) \\
&= \tilde{g}(\frac{\alpha+2}{\alpha^2}\tilde{g}(X^v, Y^v)g(Y,u)U - \frac{\alpha+2}{\alpha^2}\tilde{g}(Y^v, Y^v)g(X,u)U \\
&\quad + \frac{1+\alpha+\alpha^2}{\alpha^2}\tilde{g}(Y^v, Y^v)X^v - \frac{1+\alpha+\alpha^2}{\alpha^2}\tilde{g}(X^v, Y^v)Y^v \\
&\quad + \frac{\alpha+2}{\alpha^2}g(X,u)g(Y,u)Y^v - \frac{\alpha+2}{\alpha^2}g(Y,u)g(Y,u)X^v, X^v) \\
&= \frac{\alpha+2}{\alpha^2}\tilde{g}(X^v, Y^v)g(Y,u)g(X,u) - \frac{\alpha+2}{\alpha^2}\tilde{g}(Y^v, Y^v)g(X,u)g(X,u) \\
&\quad + \frac{1+\alpha+\alpha^2}{\alpha^2}\tilde{g}(Y^v, Y^v)\tilde{g}(X^v, X^v) - \frac{1+\alpha+\alpha^2}{\alpha^2}\tilde{g}(X^v, Y^v)\tilde{g}(Y^v, X^v) \\
&\quad + \frac{\alpha+2}{\alpha^2}g(X,u)g(Y,u)\tilde{g}(Y^v, X^v) - \frac{\alpha+2}{\alpha^2}g(Y,u)g(Y,u)\tilde{g}(X^v, X^v) \\
&= \frac{\alpha+2}{\alpha^2}\{\frac{1}{\alpha}\{g(X,Y) + g(X,u)g(Y,u)\}g(Y,u)g(X,u)\} \\
&\quad - \frac{\alpha+2}{\alpha^2}\{\frac{1}{\alpha}\{1 + g(Y,u)^2\}g(X,u)^2\} \\
&\quad + \frac{1+\alpha+\alpha^2}{\alpha^2}\{\frac{1}{\alpha^2}\{1 + g(Y,u)^2\}\{1 + g(X,u)^2\}\} \\
&\quad - \frac{1+\alpha+\alpha^2}{\alpha^2}\{\frac{1}{\alpha^2}\{g(X,Y) + g(X,u)g(Y,u)\}^2\} \\
&\quad + \frac{\alpha+2}{\alpha^2}\{g(X,u)g(Y,u)\frac{1}{\alpha}\{g(X,Y) + g(X,u)g(Y,u)\}\} \\
&\quad - \frac{\alpha+2}{\alpha^2}g(Y,u)^2\frac{1}{\alpha}\{1 + g(X,u)^2\} \\
&= \frac{\alpha+2}{\alpha^3}\{-g(X,u)^2 - g(Y,u)^2\} + \frac{1+\alpha+\alpha^2}{\alpha^4}\{1 + g(X,u)^2 + g(Y,u)^2\} \\
&= -\frac{\alpha+2}{\alpha^3}\{g(X,u)^2 + g(Y,u)^2\} + \frac{1+\alpha+\alpha^2}{\alpha^4} \\
&\quad + \frac{1+\alpha+\alpha^2}{\alpha^4}\{g(X,u)^2 + g(Y,u)^2\} \\
&= \frac{1+\alpha+\alpha^2}{\alpha^4} + \{g(X,u)^2 + g(Y,u)^2\}\{\frac{1+\alpha+\alpha^2}{\alpha^4} - \frac{\alpha+2}{\alpha^3}\} \\
&= \frac{1+\alpha+\alpha^2}{\alpha^4} + \frac{1-\alpha}{\alpha^4}\{g(X,u)^2 + g(Y,u)^2\} \\
&= \frac{1-\alpha}{\alpha^4}(1 + g(X,u)^2 + g(Y,u)^2) + \frac{\alpha+2}{\alpha^3}
\end{aligned}
$$

olur ve böylece ispat tamamlanır. □

Dolayısıyla, $\tilde{g}$ Cheeger-Gromoll metriğiyle donatılmış $TM$ tanjant demetinin kesitsel eğriliği aşağıdaki Önerme ile verilir:

**Önerme 3.4.1.** *$(M, g)$ bir Riemann manifoldu ve $TM$ de onun $\tilde{g}$ Cheeger-Gromoll metriğiyle donatılmış tanjant demeti olsun. Bu taktirde $K$, $(M, g)$ manifoldunun kesitsel eğriliği olmak üzere, $(TM, \tilde{g})$'nın $\tilde{K}$ kesitsel eğriliği aşağıdaki eşitlikleri sağlar [9]:*

***(i)*** $\tilde{K}(X^h, Y^h) = K(X, Y) - \frac{3}{4\alpha} \|R(X, Y)u\|^2$,

***(ii)*** $\tilde{K}(X^h, Y^v) = \frac{1}{4\alpha} \frac{\|R(u,Y)X\|^2}{1+g(Y,u)^2}$,

***(iii)*** $\tilde{K}(X^v, Y^v) = \frac{1-\alpha}{\alpha^2} + \frac{\alpha+2}{\alpha} \frac{1}{1+g(X,u)^2+g(Y,u)^2}$.

**İspat.** Lemma 3.4.1 ve Lemma 3.4.2'den

**(i)**

$$\begin{aligned} \tilde{K}(X^h, Y^h) &= \frac{\tilde{G}(X^h, Y^h)}{\tilde{Q}(X^h, Y^h)} \\ &= K(X, Y) - \frac{3}{4\alpha} \|R(X, Y)u\|^2, \end{aligned}$$

**(ii)**

$$\begin{aligned} \tilde{K}(X^h, Y^v) &= \frac{\tilde{G}(X^h, Y^v)}{\tilde{Q}(X^h, Y^v)} \\ &= \frac{\|R(u, Y)X\|^2}{4\alpha^2} \frac{\alpha}{1 + g(Y, u)^2} \\ &= \frac{\|R(u, Y)X\|^2}{4\alpha(1 + g(Y, u)^2)} \end{aligned}$$

ve

**(iii)**

$$\begin{aligned} \tilde{K}(X^v, Y^v) &= \frac{\tilde{G}(X^v, Y^v)}{\tilde{Q}(X^v, Y^v)} \\ &= \left(\frac{1-\alpha}{\alpha^4}(1 + g(X, u)^2 + g(Y, u)^2) + \frac{\alpha + 2}{\alpha^3}\right) \frac{\alpha^2}{1 + g(X, u)^2 + g(Y, u)^2} \\ &= \frac{1-\alpha}{\alpha^2} + \frac{\alpha + 2}{\alpha} \frac{1}{1 + g(X, u)^2 + g(Y, u)^2} \end{aligned}$$

elde edilir ve böylece ispat tamamlanır. □

**Sonuç 3.4.1.** *$(M,g)$, $k$ sabit kesitsel eğrilikli bir Riemann manifoldu olsun. $TM$ de onun $\tilde{g}$ Cheeger-Gromoll metriğiyle donatılmış tanjant demeti olsun. Bu taktirde, $M$'nin $p$ noktasındaki $X$ ve $Y$ ortonormal vektör alanları için $(TM,\tilde{g})$'nın $\tilde{K}$ kesitsel eğriliği aşağıdaki eşitlikleri sağlar [9]:*

***(i)*** $\tilde{K}(X^h,Y^h) = k - \frac{3k^2}{4\alpha}(g(X,u)^2 + g(Y,u)^2)$,

***(ii)*** $\tilde{K}(X^h,Y^v) = \frac{k^2 g(X,u)^2}{4\alpha(1+g(Y,u)^2)}$,

***(iii)*** $\tilde{K}(X^v,Y^v) = \frac{1-\alpha}{\alpha^2} + \frac{\alpha+2}{\alpha}\frac{1}{1+g(X,u)^2+g(Y,u)^2}$.

**İspat.** $(M,g)$, $k$ sabit kesitsel eğrilikli bir manifold ise $R(X,Y)Z = k(g(Y,Z)X - g(X,Z)Y)$ olduğunu biliyoruz. O halde, Önerme 3.4.1'den

**(i)**

$$\begin{aligned}
&\tilde{K}(X^h,Y^h)\\
&\quad= K(X,Y) - \frac{3}{4\alpha}\|R(X,Y)u\|^2\\
&\quad= g(R(X,Y)Y,X) - \frac{3}{4\alpha}g(R(X,Y)u,R(X,Y)u)\\
&\quad= g(k(g(Y,Y)X - g(X,Y)Y),X)\\
&\qquad - \frac{3}{4\alpha}g(k(g(Y,u)X - g(X,u)Y),k(g(Y,u)X - g(X,u)Y))\\
&\quad= kg(X,X) - \frac{3}{4\alpha}k^2(g(Y,u)^2 g(X,X) - g(Y,u)g(X,u)g(X,Y)\\
&\qquad - g(X,u)g(Y,u)g(Y,X) + g(X,u)^2 g(Y,Y))\\
&\quad= k - \frac{3k^2}{4\alpha}(g(X,u)^2 + g(Y,u)^2),
\end{aligned}$$

**(ii)**

$$\begin{aligned}
&\tilde{K}(X^h,Y^v)\\
&\quad= \frac{1}{4\alpha}\frac{\|R(u,Y)X\|^2}{1+g(Y,u)^2}\\
&\quad= \frac{1}{4\alpha(1+g(Y,u)^2)}g(R(u,Y)X,R(u,Y)X)\\
&\quad= \frac{1}{4\alpha(1+g(Y,u)^2)}g(k(g(Y,X)u - g(u,X)Y),k(g(Y,X)u - g(u,X)Y))\\
&\quad= \frac{1}{4\alpha(1+g(Y,u)^2)}k^2 g(u,X)^2 g(Y,Y)\\
&\quad= \frac{k^2 g(u,X)^2}{4\alpha(1+g(Y,u)^2)},
\end{aligned}$$

**(iii)**

$$\tilde{K}(X^v, Y^v) = \frac{1-\alpha}{\alpha^2} + \frac{\alpha+2}{\alpha}\frac{1}{1+g(X,u)^2+g(Y,u)^2}$$

elde edilir. $\square$

Şimdi, $(p,u)$ noktasında $TM$ tanjant demetinin $T_{(p,u)}TM$ tanjant uzayı için bir ortonormal baz ifade edilecektir.

$\{e_1, e_2, ..., e_n\}$, $p$ noktasında $M$'nin $T_pM$ tanjant uzayı için $e_1 = \frac{u}{r} = \frac{u}{\|u\|}$ olacak şekilde bir ortonormal baz olsun. Bu taktirde, $T_{(p,u)}TM$'nin bir $\{f_1, f_2, ..., f_{2n}\}$ ortonormal bazı $i \in \{1, 2, ..., n\}$, $j \in \{2, ..., n\}$ için

$$f_i = e_i^h,\ f_{n+1} = e_1^v \text{ ve } f_{n+j} = \sqrt{\alpha}e_j^v$$

şeklinde elde edilir [6]. Gerçekten, Tanım 3.2.1'den

$$\tilde{g}(f_i, f_i) = \tilde{g}(e_i^h, e_i^h) = g(e_i, e_i),$$

$$\begin{aligned}
\tilde{g}(f_{n+1}, f_{n+1}) &= \tilde{g}(e_i^v, e_i^v) \\
&= \frac{1}{1+g(u,u)}\{g(e_1, e_1) + g(e_1, u)^2\} \\
&= \frac{1}{1+g(u,u)}\{g(\frac{u}{\|u\|}, \frac{u}{\|u\|}) + g(\frac{u}{\|u\|}, u)^2\} \\
&= \frac{1}{1+g(u,u)}\{\frac{1}{g(u,u)}g(u,u) + (\frac{1}{\sqrt{g(u,u)}}g(u,u))^2\} \\
&= \frac{1}{1+g(u,u)}(1+g(u,u)) = 1
\end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned}
\tilde{g}(f_{n+j}, f_{n+j}) &= \tilde{g}(\sqrt{\alpha}e_j^v, \sqrt{\alpha}e_j^v) = \alpha\tilde{g}(e_j^v, e_j^v) = \alpha\frac{1}{\alpha}\{g(e_j, e_j) + g(e_j, u)^2\} \\
&= g(e_j, e_j) + g(e_j, e_1 r)^2 = g(e_j, e_j)
\end{aligned}$$

ve benzer şekilde $i \neq j$, $i, j \in 1, 2, ..., 2n$ için $\tilde{g}(f_i, f_j) = 0$ olduğu görülür.

Aşağıdaki Lemma, Önerme 3.4.1'in bir sonucudur:

**Lemma 3.4.3.** $\{f_1, f_2, ..., f_{2n}\}$, *$(p,u)$ noktasında $TM$ tanjant demetinin $T_{(p,u)}TM$ tanjant uzayı için*

$$f_i = e_i^h,\ f_{n+1} = e_1^v \textit{ ve } f_{n+j} = \sqrt{\alpha}e_j^v, \quad i \in \{1, 2, ..., n\}, \quad j \in \{2, ..., n\}$$

*şeklinde tanımlı bir ortonormal baz ve $\tilde{K}$ da $TM$'nin kesitsel eğriliği olsun. Bu taktirde, $i,j \in \{1,2,...,n\}$ ve $k,l \in \{2,...,n\}$ için aşağıdaki eşitlikler sağlanır [9]:*

***(i)*** $\tilde{K}(f_i,f_j) = K(e_i,e_j) - \frac{3}{4\alpha}\left\|R(e_i,e_j)u\right\|^2,$

***(ii)*** $\tilde{K}(f_i,f_{n+1}) = 0,$

***(iii)*** $\tilde{K}(f_i,f_{n+k}) = \frac{1}{4}\left\|R(u,e_k)e_i\right\|^2,$

***(iv)*** $\tilde{K}(f_{n+1},f_{n+k}) = \frac{3}{\alpha^2},$

***(v)*** $\tilde{K}(f_{n+k},f_{n+l}) = \frac{\alpha^2+\alpha+1}{\alpha^2}.$

**İspat.** Önerme 3.4.1'den

**(i)**

$$\begin{aligned}\tilde{K}(f_i,f_j) &= \tilde{K}(e_i^h,e_j^h)\\ &= K(e_i,e_j) - \frac{3}{4\alpha}\left\|R(e_i,e_j)u\right\|^2,\end{aligned}$$

**(ii)**

$$\begin{aligned}\tilde{K}(f_i,f_{n+1}) &= \tilde{K}(e_i^h,e_1^v)\\ &= \frac{1}{4\alpha}\frac{\left\|R(u,e_1)e_i\right\|^2}{1+g(e_1,u)^2}\\ &= \frac{1}{4\alpha}\frac{\left\|R(u,\frac{u}{\|u\|})e_i\right\|^2}{1+g(\frac{u}{\|u\|},u)^2} = 0,\end{aligned}$$

**(iii)**

$$\begin{aligned}\tilde{K}(f_i,f_{n+k}) &= \tilde{K}(e_i^h,\sqrt{\alpha}e_k^v)\\ &= \frac{1}{4\alpha}\frac{\left\|R(u,\sqrt{\alpha}e_k)e_i\right\|^2}{1+g(e_k,u)^2}\\ &= \frac{1}{4\alpha}\frac{g(R(u,\sqrt{\alpha}e_k)e_i,R(u,\sqrt{\alpha}e_k)e_i)}{1+0}\\ &= \frac{1}{4}\left\|R(u,e_k)e_i\right\|^2,\end{aligned}$$

**(iv)**

$$\begin{aligned}\tilde{K}(f_{n+1},f_{n+k}) &= \tilde{K}(e_1^v,\sqrt{\alpha}e_k^v)\\ &= \frac{1-\alpha}{\alpha^2} + \frac{\alpha+2}{\alpha}\frac{1}{1+g(e_1,u)^2+g(\sqrt{\alpha}e_k,u)^2}\\ &= \frac{1-\alpha}{\alpha^2} + \frac{\alpha+2}{\alpha}\frac{1}{1+r^2} = \frac{1-\alpha}{\alpha^2} + \frac{\alpha+2}{\alpha^2} = \frac{3}{\alpha^2},\end{aligned}$$

**(v)**

$$\begin{aligned}\tilde{K}(f_{n+k}, f_{n+l}) &= \tilde{K}(\sqrt{\alpha}e_k^v, \sqrt{\alpha}e_l^v) \\ &= \frac{1-\alpha}{\alpha^2} + \frac{\alpha+2}{\alpha}\frac{1}{1+g(\sqrt{\alpha}e_k, u)^2 + g(\sqrt{\alpha}e_l, u)^2} \\ &= \frac{1-\alpha}{\alpha^2} + \frac{\alpha+2}{\alpha} = \frac{\alpha^2+\alpha+1}{\alpha^2}\end{aligned}$$

bulunur. □

**Önerme 3.4.2.** *$\{f_1, f_2, ..., f_{2n}\}$, $(p, u)$ noktasında $TM$ tanjant demetinin $T_{(p,u)}TM$ tanjant uzayı için*

$$f_i = e_i^h, \; f_{n+1} = e_1^v \; ve \; f_{n+j} = \sqrt{\alpha}e_j^v, \quad i \in \{1, 2, ..., n\}, \quad j \in \{2, ..., n\}$$

*şeklinde tanımlı bir ortonormal baz ve $\tilde{\sigma}$ da $TM$'nin skalar eğriliği ise,*

$$\tilde{\sigma} = \sigma + \frac{2\alpha-3}{4\alpha}\sum_{i<j}\|R(e_i, e_j)u\|^2 + \frac{n-1}{\alpha^2}(6 + (n-2)(\alpha^2+\alpha+1))$$

*dir [29].*

**İspat.** Skalar eğriliğin tanımından,

$$\begin{aligned}\tilde{\sigma} &= \sum_{k,l=1}^{2n}\tilde{K}(f_k, f_l) \\ &= \sum_{i,j=1}^{n}\tilde{K}(f_i, f_j) + 2\sum_{i,j=1}^{n}\tilde{K}(f_i, f_{n+j}) + \sum_{i,j=1}^{n}\tilde{K}(f_{n+i}, f_{n+j}) \\ &= \sum_{i,j=1}^{n}(K(e_i, e_j) - \frac{3}{4\alpha}\|R(e_i, e_j)u\|^2) + \frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{n}\|R(u, e_j)e_i\|^2 + 2\sum_{i=2}^{n}\frac{3}{\alpha^2} \\ &\quad + \sum_{\substack{i,j=2 \\ i\neq j}}^{n}\frac{\alpha^2+\alpha+1}{\alpha^2} \\ &= \sigma + \frac{2\alpha-3}{4\alpha}\|R(e_i, e_j)u\|^2 + 2\frac{3}{\alpha^2}(n-1) + \frac{\alpha^2+\alpha+1}{\alpha^2}(n-1)(n-2) \\ &= \sigma + \frac{2\alpha-3}{4\alpha}\sum_{i<j}\|R(e_i, e_j)u\|^2 + \frac{n-1}{\alpha^2}(6 + (n-2)(\alpha^2+\alpha+1))\end{aligned}$$

bulunur. □

# BÖLÜM 4

# CHEEGER-GROMOLL METRİKLİ PARAKONTAKT TANJANT DEMETLER

Dört alt bölümden oluşan bu bölümde önce, (2n+1)-boyutlu bir $(M, g)$ Riemann manifoldunun parakontakt yapısıyla ilgili bazı kavramlar hatırlatılmaktadır. Daha sonra ilk alt bölümde, Cheeger-Gromoll (C-G) metrikli bir $TM$ tanjant demeti üzerinde hemen hemen parakontakt yapı ve temel 2-form kavramları tanımlanarak bu kavramlarla ilgili bazı hesaplamalar yapılmaktadır. İkinci alt bölümde, uzun hesaplamalar sonunda C-G metrikli hemen hemen parakontakt tanjant demetler için normallik şartı elde edilmektedir. Üçüncü alt bölümde, parakontakt C-G metrik tanjant demet, K-parakontakt C-G metrik tanjant demet, C-G para-Sasakian tanjant demet kavramları tanımlanarak bu kavramlarla ilgili bazı karakterizasyonlar verilmektedir. Dördüncü ve son alt bölümde ise, bir $TM$ hemen hemen parakontakt C-G metrik tanjant demetinin $\tilde{R}$ Riemann eğrilik tensörü ve $\tilde{K}$ kesitsel eğriliği ile ilgili bazı sonuçlar ifade edilmekte ve son olarak da bir $TM$ tanjant demetinin ortonormal bazları yardımıyla, $TM$ hemen hemen parakontakt C-G metrik tanjant demetinin $\tilde{S}$ Ricci eğriliği ve $\tilde{\sigma}$ skalar eğriliği elde edilmektedir.

Öncelikle, (2n+1)-boyutlu bir $(M, g)$ Riemann manifoldunun parakontakt yapısıyla ilgili bazı kavramları hatırlayalım:

$M$, (2n+1)-boyutlu bir diferensiyellenebilir manifold olsun. Bu durumda, $\Phi$ (1,1)-tipinde bir tensör alanı, $\xi$ bir vektör alanı, $\eta$ bir 1-form ve $g$ de $M$ üzerinde bir Riemann metriği olmak üzere, $M$ manifolduna bir $(\Phi, \eta, \xi, g)$ hemen hemen parakontakt Riemann yapısına sahiptir denir, eğer $M$ üzerindeki herhangi $X, Y$ vektör alanları için

$$\left.\begin{array}{c} \Phi\xi = 0,\ \eta(\xi) = 1,\ g(\xi, X) = \eta(X), \\ \Phi^2 X = X - \eta(X)\xi, \\ g(\Phi X, \Phi Y) = g(X, Y) - \eta(X)\eta(Y) \end{array}\right\} \tag{4.0.1}$$

şartları sağlanıyorsa. Bu durumda, $(M, \Phi, \eta, \xi, g)$'ye de bir **hemen hemen parakontakt metrik manifold** denir [41].

Ayrıca $\Omega$, $\Omega(X,Y) = g(X, \Phi Y)$ şeklinde tanımlı temel 2-form olmak üzere, eğer $M$ üzerinde

$$2\Omega(X,Y) = (\nabla_X \eta)Y + (\nabla_Y \eta)X$$

şartı sağlanıyorsa, bu taktirde $(M, \Phi, \eta, \xi, g)$ hemen hemen parakontakt metrik manifolduna **parakontakt metrik manifold** denir [22].

Şimdi (2n+1)-boyutlu bir $(M,g)$ Riemann manifoldunun, $\tilde{g}$ Cheeger Gromoll metriğiyle donatılmış $TM$ tanjant demeti üzerinde parakontakt yapılarla ilgili kavramlardan bahsedilebilir.

## 4.1 Cheeger-Gromoll Metrikli Hemen Hemen Parakontakt Tanjant Demetler

$TM^{4n+2}$'nin $\mathcal{H}^{2n+1}$ yatay altuzayı üzerinde $\xi^h$ bir vektör alanı ve $\tilde{\eta}^h$ bir 1-form; $TM^{4n+2}$'nin $\mathcal{V}^{2n+1}$ dikey altuzayı üzerinde $\xi^v$ bir vektör alanı ve $\tilde{\eta}^v$ bir 1-form olsun. $TM$ üzerinde $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ tipindeki $\tilde{\Phi}$ tensör alanı (detaylı bilgi için [42]'ye bakınız)

$$\tilde{\Phi}^2 = I - \tilde{\eta}^h \otimes \xi^h - \tilde{\eta}^v \otimes \xi^v \tag{4.1.1}$$

şeklinde tanımlansın. (4.1.1) şartıyla birlikte

$$\left.\begin{array}{ll} \tilde{\Phi}\xi^h = 0, & \left( \begin{array}{c} \tilde{\Phi}\xi^v = 0, \\ \tilde{\eta}^v(\xi^v) = 1, \\ \tilde{\eta}^v \circ \tilde{\Phi} = 0 \end{array} \right) \\ \tilde{\eta}^h(\xi^h) = 1, & \\ \tilde{\eta}^h \circ \tilde{\Phi} = 0 & \end{array}\right\} \tag{4.1.2}$$

şartlarını sağlayan $TM$ tanjant demetine bir $(\tilde{\Phi}, \tilde{\eta}^h, \xi^h)$ $((\tilde{\Phi}, \tilde{\eta}^v, \xi^v))$ **yatay (dikey) hemen hemen parakontakt yapısına sahiptir** denir.

Eğer bir $TM$ tanjant demeti yatay ve dikey hemen hemen parakontakt yapılarına sahip ve ek olarak da

$$\tilde{\eta}^h(\xi^v) = \tilde{\eta}^v(\xi^h) = 0 \tag{4.1.3}$$

şartını sağlıyorsa, bu taktirde $TM$ tanjant demetine $(\tilde{\Phi}, \tilde{\eta}, \tilde{\xi})$ hemen hemen parakontakt yapısına sahip bir **hemen hemen parakontakt tanjant demet** denir.

Eğer bir $TM$ hemen hemen parakontakt tanjant demeti üzerinde

$$\tilde{g}(\tilde{\Phi}X^h, \tilde{\Phi}Y^h) = \tilde{g}(X^v, Y^v) - \tilde{\eta}^v(X^v)\tilde{\eta}^v(Y^v), \tag{4.1.4}$$

$$\tilde{g}(\tilde{\Phi}X^v, \tilde{\Phi}Y^v) = \tilde{g}(X^h, Y^h) - \tilde{\eta}^h(X^h)\tilde{\eta}^h(Y^h), \tag{4.1.5}$$

$$\tilde{g}(\tilde{\Phi}X^h, \tilde{\Phi}Y^v) = \tilde{g}(X^v, Y^h) - \tilde{\eta}^h(X^v)\tilde{\eta}^h(Y^h) - \tilde{\eta}^v(X^v)\tilde{\eta}^v(Y^h), \tag{4.1.6}$$

$$\tilde{g}(\tilde{\Phi}X^v, \tilde{\Phi}Y^h) = \tilde{g}(X^h, Y^v) - \tilde{\eta}^h(X^h)\tilde{\eta}^h(Y^v) - \tilde{\eta}^v(X^h)\tilde{\eta}^v(Y^v) \tag{4.1.7}$$

olacak şekilde bir $\tilde{g}$ Cheeger-Gromoll (C-G) metriği mevcutsa, bu taktirde $TM$'ye bir $(\tilde{\Phi}, \tilde{\eta}, \tilde{\xi}, \tilde{g})$ **hemen hemen parakontakt C-G metrik yapısına sahiptir** denir.

$M^{(2n+1)}$, $(\Phi, \eta, \xi, g)$ hemen hemen parakontakt metrik yapısıyla birlikte bir hemen hemen parakontakt metrik manifold olsun. (4.1.4), (4.1.5), (4.1.6), (4.1.7) ifadelerinde $Y = \xi$ alınıp (4.0.1), (4.1.2) ve (4.1.3) kullanılırsa, sırasıyla,

$$\tilde{\eta}^v(X^v) = \tilde{g}(X^v, \xi^v) = \frac{1}{1+r^2}\{\eta(X) + \eta(u)g(X, u)\}, \tag{4.1.8}$$

$$\tilde{\eta}^h(X^h) = \tilde{g}(X^h, \xi^h) = \eta(X), \tag{4.1.9}$$

$$\tilde{\eta}^h(X^v) = \tilde{g}(X^v, \xi^h) = 0, \tag{4.1.10}$$

$$\tilde{\eta}^v(X^h) = \tilde{g}(X^h, \xi^v) = 0 \tag{4.1.11}$$

bulunur. (4.1.2) ve (4.1.8)'den,

$$1 = \tilde{\eta}^v(\xi^v) = \frac{1}{1+r^2}\{1 + \eta(u)^2\}$$

ifadesine, yani $g(u, u) = g(u, \xi)^2$ eşitliğine ulaşılır ve $u = \mp\xi$ bu denklemin çözümlerinden biridir. Bu nedenle, bundan sonra bir $TM$ hemen hemen parakontakt C-G metrik tanjant demeti üzerinde $u = \mp\xi$ olarak alınacaktır.

Dolayısıyla, eğer (4.1.8)'de $u = \mp\xi$ alınırsa, bu taktirde (4.0.1)'den,

$$\tilde{\eta}^v(X^v) = \eta(X) \tag{4.1.12}$$

eşitliğine ulaşılır.

Yukarıdaki $\tilde{\Phi} : TTM \longrightarrow TTM$ tensör alanı, $TM$ tanjant demetinin

$$\left.\begin{aligned} \tilde{\Phi}X^h &= X^v - \tilde{\eta}^v(X^v)\xi^v - \tilde{\eta}^h(X^v)\xi^h, \\ \tilde{\Phi}X^v &= X^h - \tilde{\eta}^h(X^h)\xi^h - \tilde{\eta}^v(X^h)\xi^v \end{aligned}\right\} \tag{4.1.13}$$

şeklinde tanımlı lineer endomorfizmi olsun. Bu durumda, bu dönüşümün gerçekten (4.1.1) ve (4.1.2) şartlarını sağladığı görülebilir.

Eğer (4.1.10) ve (4.1.11) kullanılırsa, bu taktirde (4.1.1) ve (4.1.13) denklemleri, sırasıyla

$$\left.\begin{aligned}\tilde{\Phi}^2 X^h &= X^h - \tilde{\eta}^h(X^h)\xi^h,\\ \tilde{\Phi}^2 X^v &= X^v - \tilde{\eta}^v(X^v)\xi^v\end{aligned}\right\} \tag{4.1.14}$$

ve

$$\left.\begin{aligned}\tilde{\Phi} X^h &= X^v - \tilde{\eta}^v(X^v)\xi^v,\\ \tilde{\Phi} X^v &= X^h - \tilde{\eta}^h(X^h)\xi^h\end{aligned}\right\} \tag{4.1.15}$$

eşitliklerine indirgenir.

Bu eşitlikler ve C-G metriğinin tanımı kullanılırsa, görülebilir ki (4.1.4)-(4.1.7) şartlarını sağlayan bir $\tilde{g}$ C-G metriği vardır.

Ayrıca, (4.0.1) ve (4.1.4)-(4.1.12) ile birlikte C-G metriğinin tanımı kullanılırsa

$$\left.\begin{aligned}&\tilde{g}(\tilde{\Phi}X^h, \tilde{\Phi}Y^h) = \tfrac{1}{2}g(\Phi X, \Phi Y),\\ &\tilde{g}(\tilde{\Phi}X^h, \tilde{\Phi}Y^v) = 0,\\ &\tilde{g}(\tilde{\Phi}X^v, \tilde{\Phi}Y^v) = g(\Phi X, \Phi Y),\\ &\tilde{g}(\tilde{\Phi}X^v, \tilde{\Phi}Y^h) = 0\end{aligned}\right\} \tag{4.1.16}$$

eşitliklerine ulaşılır. (4.0.1) ve (4.1.15)'ten,

$$\left.\begin{aligned}&\tilde{g}(\tilde{\Phi}X^h, Y^h) = \tilde{g}(X^h, \tilde{\Phi}Y^h) = 0,\\ &\tilde{g}(\tilde{\Phi}X^v, Y^v) = \tilde{g}(X^v, \tilde{\Phi}Y^v) = 0,\\ &\tilde{g}(X^h, \tilde{\Phi}Y^v) = 2\tilde{g}(\tilde{\Phi}X^h, Y^v) = g(\Phi X, \Phi Y),\\ &\tilde{g}(\tilde{\Phi}X^v, Y^h) = 2\tilde{g}(X^v, \tilde{\Phi}Y^h) = g(\Phi X, \Phi Y)\end{aligned}\right\} \tag{4.1.17}$$

bulunur. (4.0.1), (4.1.2), (4.1.4)-(4.1.7) ve (4.1.14)'ten de

$$\left.\begin{aligned}&\tilde{g}(\tilde{\Phi}^2X^h, Y^h) = \tilde{g}(X^h, \tilde{\Phi}^2Y^h) = g(\Phi X, \Phi Y),\\ &\tilde{g}(\tilde{\Phi}^2X^h, Y^v) = \tilde{g}(X^h, \tilde{\Phi}^2Y^v) = 0,\\ &\tilde{g}(\tilde{\Phi}^2X^v, Y^v) = \tilde{g}(X^v, \tilde{\Phi}^2Y^v) = \tfrac{1}{2}g(\Phi X, \Phi Y),\\ &\tilde{g}(\tilde{\Phi}^2X^v, Y^h) = \tilde{g}(X^v, \tilde{\Phi}^2Y^h) = 0\end{aligned}\right\} \tag{4.1.18}$$

eşitlikleri elde edilir.

Şimdi, bir $TM$ hemen hemen parakontakt C-G metrik tanjant demeti üzerinde

$$\tilde{\Omega}(\tilde{X}, \tilde{Y}) = \tilde{g}(\tilde{X}, \tilde{\Phi}\tilde{Y}) \tag{4.1.19}$$

dönüşümünü tanımlayalım ve bu dönüşümü **temel 2-form** diye adlandıralım. Bu taktirde, (4.1.17)'den

$$\tilde{\Omega}(\tilde{X},\tilde{Y}) = \tilde{g}(\tilde{X},\tilde{\Phi}\tilde{Y}) = \sum_{i,j\in\{h,v\}} \tilde{g}(X^i,\tilde{\Phi}Y^j) = \frac{3}{2}g(\Phi X,\Phi Y) \tag{4.1.20}$$

ve

$$\tilde{\Omega}(\tilde{Y},\tilde{X}) = \tilde{g}(\tilde{Y},\tilde{\Phi}\tilde{X}) = \sum_{i,j\in\{h,v\}} \tilde{g}(Y^i,\tilde{\Phi}X^j) = \frac{3}{2}g(\Phi X,\Phi Y) \tag{4.1.21}$$

bulunur. Böylece, (4.1.20) ve (4.1.21)'den, bir $TM$ hemen hemen parakontakt C-G metrik tanjant demeti üzerinde temel 2-formun simetrik olduğu görülür.

## 4.2 Cheeger-Gromoll Metrikli Normal Hemen Hemen Parakontakt Tanjant Demetler

İyi bilinir ki [32], bir $M$ manifoldu üzerinde (1,1)-tipindeki bir $J$ tensör alanının $N_j$ Nijenhuis tensörü

$$N_J(X,Y) = J^2\,[X,Y] + [JX,JY] - J\,[JX,Y] - J\,[X,JY]$$

şeklinde tanımlı (1,2)-tipinde bir tensör alanıdır ve bir $\Phi$ tensör alanının $N_\Phi$ Nijenhuis tensörü de

$$N_\Phi(X,Y) = \Phi^2\,[X,Y] + [\Phi X,\Phi Y] - \Phi\,[\Phi X,Y] - \Phi\,[X,\Phi Y]\,.$$

şeklindedir. Biz de burada bir $TM$ manifoldu üzerinde $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$-tipindeki bir $\tilde{J}$ tensör alanının $\tilde{N}_{\tilde{J}}$ Nijenhuis tensör alanını

$$\tilde{N}_{\tilde{J}}(\tilde{X},\tilde{Y}) = \tilde{J}^2[\tilde{X},\tilde{Y}] + [\tilde{J}\tilde{X},\tilde{J}\tilde{Y}] - \tilde{J}[\tilde{J}\tilde{X},\tilde{Y}] - \tilde{J}[\tilde{X},\tilde{J}\tilde{Y}]$$

şeklinde ve $\tilde{\Phi}$ tensör alanının $\tilde{N}_{\tilde{\Phi}}$ Nijenhuis tensör alanını da

$$\tilde{N}_{\tilde{\Phi}}(\tilde{X},\tilde{Y}) = \tilde{\Phi}^2[\tilde{X},\tilde{Y}] + [\tilde{\Phi}\tilde{X},\tilde{\Phi}\tilde{Y}] - \tilde{\Phi}[\tilde{\Phi}\tilde{X},\tilde{Y}] - \tilde{\Phi}[\tilde{X},\tilde{\Phi}\tilde{Y}]$$

şeklinde tanımlayacağız.

$TM$ bir hemen hemen parakontakt C-G metrik tanjant demet olsun ve $TM^{4n+2}\times\mathbb{R}^2$ manifoldunu gözönüne alalım. $TM^{4n+2}\times\mathbb{R}^2$ üzerindeki vektör alanları $(X^h, f(\frac{\tilde{d}}{dt}))$

ve $(X^v, g(\frac{\tilde{d}}{dt}))$ ile ifade edilir, burada $X^h, X^v \in TM^{4n+2}$ ve $(\frac{\tilde{d}}{d_t}) \in \mathbb{R}^2$'dir. Bundan sonra $\frac{\tilde{d}}{dt}$ yerine $\tilde{d}_t$ yazılacaktır.

$(X^i, f\tilde{d}_t)$ ve $(Y^j, g\tilde{d}_t)$, $i, j \in \{h, v\}$, şeklinde herhangi iki vektör olmak üzere

$$[(X^i, f\tilde{d}_t), (Y^j, g\tilde{d}_t)] = ([X^i, Y^j], (X^i(g) - Y^j(f))\tilde{d}_t) \tag{4.2.1}$$

dir. Ayrıca, $TM^{4n+2} \times \mathbb{R}^2$ manifoldu üzerinde $\tilde{J}$ hemen hemen çarpım yapısını

$$\left.\begin{array}{l} \tilde{J}(X^h, f\tilde{d}_t) = (\tilde{\Phi}X^h + f\xi^v, \tilde{\eta}^h(X^h)\tilde{d}_t) \\ \tilde{J}(X^v, f\tilde{d}_t) = (\tilde{\Phi}X^v + f\xi^h, \tilde{\eta}^v(X^v)\tilde{d}_t) \end{array}\right\} \tag{4.2.2}$$

şeklinde tanımlayalım. Bu durumda,

$$\begin{aligned}
\tilde{J}^2(X^h, f\tilde{d}_t) &= \tilde{J}(\tilde{J}(X^h, f\tilde{d}_t)) \\
&= \tilde{J}(\tilde{\Phi}X^h + f\xi^v, \tilde{\eta}^h(X^h)\tilde{d}_t) \\
&= \tilde{J}(X^v - \tilde{\eta}^v(X^v)\xi^v + f\xi^v, \tilde{\eta}^h(X^h)\tilde{d}_t) \\
&= \tilde{J}((X - \tilde{\eta}^v(X^v)\xi + f\xi)^v, \tilde{\eta}^h(X^h)\tilde{d}_t) \\
&= (\tilde{\Phi}(X - \tilde{\eta}^v(X^v)\xi + f\xi)^v + \tilde{\eta}^h(X^h)\xi^h, \\
&\quad \tilde{\eta}^v(X - \tilde{\eta}^v(X^v)\xi + f\xi)^v\tilde{d}_t) \\
&= (\tilde{\Phi}(X^v - \tilde{\eta}^v(X^v)\xi^v + f\xi^v) + \tilde{\eta}^h(X^h)\xi^h, \\
&\quad \tilde{\eta}^v(X^v - \tilde{\eta}^v(X^v)\xi^v + f\xi^v)\tilde{d}_t) \\
&= (\tilde{\Phi}X^v + \tilde{\eta}^h(X^h)\xi^h, (\tilde{\eta}^v(X^v) - \tilde{\eta}^v(X^v) + f)\tilde{d}_t) \\
&= (X^h - \tilde{\eta}^h(X^h)\xi^h + \tilde{\eta}^h(X^h)\xi^h, f\tilde{d}_t) \\
&= (X^h, f\tilde{d}_t)
\end{aligned}$$

ve benzer şekilde

$$\begin{aligned}
\tilde{J}^2(X^v, f\tilde{d}_t) &= \tilde{J}(\tilde{J}(X^v, f\tilde{d}_t)) \\
&= \tilde{J}(\tilde{\Phi}X^v + f\xi^h, \tilde{\eta}^v(X^v)\tilde{d}_t) \\
&= \tilde{J}(X^h - \tilde{\eta}^h(X^h)\xi^h + f\xi^h, \tilde{\eta}^v(X^v)\tilde{d}_t) \\
&= \tilde{J}((X - \tilde{\eta}^h(X^h)\xi + f\xi)^h, \tilde{\eta}^v(X^v)\tilde{d}_t)
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= (\tilde{\Phi}(X - \tilde{\eta}^h(X^h)\xi + f\xi)^h + \tilde{\eta}^v(X^v)\xi^v, \\
&\quad \tilde{\eta}^h(X - \tilde{\eta}^h(X^h)\xi + f\xi)^h \tilde{d}_t) \\
&= (\tilde{\Phi}(X^h - \tilde{\eta}^h(X^h)\xi^h + f\xi^h) + \tilde{\eta}^v(X^v)\xi^v, \\
&\quad \tilde{\eta}^h(X^h - \tilde{\eta}^h(X^h)\xi^h + f\xi^h)\tilde{d}_t) \\
&= (\tilde{\Phi}X^h + \tilde{\eta}^v(X^v)\xi^v, (\tilde{\eta}^h(X^h) - \tilde{\eta}^h(X^h) + f)\tilde{d}_t) \\
&= (X^v - \tilde{\eta}^v(X^v)\xi^v + \tilde{\eta}^v(X^v)\xi^v, f\tilde{d}_t) \\
&= (X^v, f\tilde{d}_t)
\end{aligned}
$$

olur. O halde, buradan $\tilde{J}^2 = I$ olduğu görülür.

$\tilde{J}$'nın Nijenhuis tensörünün sıfır olması integrallenebilirlik için gerek ve yeter şart olduğundan, $\tilde{\Phi}$'nın $\tilde{N}_{\tilde{\Phi}}$ Nijenhuis tensörüne göre normallik şartını ifade edeceğiz. Şimdi, $\tilde{N}_{\tilde{J}}((\tilde{X}, 0), (\tilde{Y}, 0))$ ve $\tilde{N}_{\tilde{J}}((\tilde{X}, 0), (\tilde{0}, \tilde{d}_t))$ ifadelerini hesaplayalım.

$$
\begin{aligned}
&\tilde{N}_{\tilde{J}}((\tilde{X}, 0), (\tilde{Y}, 0)) \\
&= \tilde{J}^2 \left[(\tilde{X}, 0), (\tilde{Y}, 0)\right] + \left[\tilde{J}(\tilde{X}, 0), \tilde{J}(\tilde{Y}, 0)\right] - \tilde{J}\left[\tilde{J}(\tilde{X}, 0), (\tilde{Y}, 0)\right] \\
&\quad - \tilde{J}\left[(\tilde{X}, 0), \tilde{J}(\tilde{Y}, 0)\right] \\
&= \tilde{J}^2[(X^h + X^v, 0), (Y^h + Y^v, 0)] + [\tilde{J}(X^h + X^v, 0), \tilde{J}(Y^h + Y^v, 0)] \\
&\quad - \tilde{J}[\tilde{J}(X^h + X^v, 0), (Y^h + Y^v, 0)] - \tilde{J}[(X^h + X^v, 0), \tilde{J}(Y^h + Y^v, 0)] \\
&= \tilde{J}^2[(X^h, 0), (Y^h, 0)] + \tilde{J}^2[(X^h, 0), (Y^v, 0)] + \tilde{J}^2[(X^v, 0), (Y^h, 0)] \\
&\quad + \tilde{J}^2[(X^v, 0), (Y^v, 0)] + [\tilde{J}(X^h, 0), \tilde{J}(Y^h, 0)] + [\tilde{J}(X^h, 0), \tilde{J}(Y^v, 0)] \\
&\quad + [\tilde{J}(X^v, 0), \tilde{J}(Y^h, 0)] + [\tilde{J}(X^v, 0), \tilde{J}(Y^v, 0)] - \tilde{J}[\tilde{J}(X^h, 0), (Y^h, 0)] \\
&\quad - \tilde{J}[\tilde{J}(X^h, 0), (Y^v, 0)] - \tilde{J}[\tilde{J}(X^v, 0), (Y^h, 0)] - \tilde{J}[\tilde{J}(X^v, 0), (Y^v, 0)] \\
&\quad - \tilde{J}[(X^h, 0), \tilde{J}(Y^h, 0)] - \tilde{J}[(X^h, 0), \tilde{J}(Y^v, 0)] - \tilde{J}[(X^v, 0), \tilde{J}(Y^h, 0)] \\
&\quad - \tilde{J}[(X^v, 0), \tilde{J}(Y^v, 0)] \\
&= \tilde{N}_{\tilde{J}}((X^h, 0), (Y^h, 0)) + \tilde{N}_{\tilde{J}}((X^h, 0), (Y^v, 0)) + \tilde{N}_{\tilde{J}}((X^v, 0), (Y^h, 0)) \\
&\quad + \tilde{N}_{\tilde{J}}((X^v, 0), (Y^v, 0)) \qquad (4.2.3)
\end{aligned}
$$

dır. Bu nedenle şimdi, (4.2.3)'ın $\tilde{N}_{\tilde{J}}\left((X^i, 0), (Y^j, 0)\right),\ i, j \in \{h, v\}$ bileşenlerini hesaplamalıyız.

(4.1.1), (4.1.2), (4.1.13), (4.2.1) ve (4.2.2)'den,

$$
\begin{aligned}
&\tilde{N}_{\tilde{J}}((X^h,0),(Y^h,0)) \\
&= \tilde{J}^2\left[(X^h,0),(Y^h,0)\right] + [\tilde{J}(X^h,0),\tilde{J}(Y^h,0)] - \tilde{J}[\tilde{J}(X^h,0),(Y^h,0)] \\
&\quad - \tilde{J}[(X^h,0),\tilde{J}(Y^h,0)] \\
&= [(X^h,0),(Y^h,0)] + [(\tilde{\Phi}X^h,\tilde{\eta}^h(X^h)\tilde{d}_t),(\tilde{\Phi}Y^h,\tilde{\eta}^h(Y^h)\tilde{d}_t)] \\
&\quad - \tilde{J}[(\tilde{\Phi}X^h,\tilde{\eta}^h(X^h)\tilde{d}_t),(Y^h,0)] - \tilde{J}[(X^h,0),(\tilde{\Phi}Y^h,\tilde{\eta}^h(Y^h)\tilde{d}_t)] \\
&= ([X^h,Y^h],0) + ([\tilde{\Phi}X^h,\tilde{\Phi}Y^h],(\tilde{\Phi}X^h(\tilde{\eta}^h(Y^h)) - \tilde{\Phi}Y^h(\tilde{\eta}^h(X^h)))\tilde{d}_t) \\
&\quad - \tilde{J}([\tilde{\Phi}X^h,Y^h],-Y^h(\tilde{\eta}^h(X^h))\tilde{d}_t) - \tilde{J}([X^h,\tilde{\Phi}Y^h],X^h(\tilde{\eta}^h(Y^h))\tilde{d}_t) \\
&= (\tilde{\Phi}^2[X^h,Y^h] + \tilde{\eta}^h([X^h,Y^h])\xi^h + \tilde{\eta}^v([X^h,Y^h])\xi^v,0) \\
&\quad + ([\tilde{\Phi}X^h,\tilde{\Phi}Y^h],(\tilde{\Phi}X^h(\tilde{\eta}^h(Y^h)) - \tilde{\Phi}Y^h(\tilde{\eta}^h(X^h)))\tilde{d}_t) \\
&\quad - \tilde{J}(-(\nabla_Y X)^v,-Y^h(\tilde{\eta}^h(X^h))\tilde{d}_t) - \tilde{J}(\tilde{\eta}^v(X^v)(\nabla_Y\xi)^v,-Y^h(\tilde{\eta}^h(X^h))\tilde{d}_t) \\
&\quad - \tilde{J}(Y^h(\tilde{\eta}^v(X^v))\xi^v,-Y^h(\tilde{\eta}^h(X^h))\tilde{d}_t) - \tilde{J}((\nabla_X Y)^v,X^h(\tilde{\eta}^h(Y^h))\tilde{d}_t) \\
&\quad - \tilde{J}(-\tilde{\eta}^v(Y^v)(\nabla_X\xi)^v,X^h(\tilde{\eta}^h(Y^h))\tilde{d}_t) - \tilde{J}(-X^h(\tilde{\eta}^v(Y^v))\xi^v,X^h(\tilde{\eta}^h(Y^h))\tilde{d}_t) \\
&= (\tilde{\Phi}^2[X^h,Y^h] + \tilde{\eta}^h([X^h,Y^h])\xi^h + \tilde{\eta}^v([X^h,Y^h])\xi^v,0) \\
&\quad + ([\tilde{\Phi}X^h,\tilde{\Phi}Y^h],(\tilde{\Phi}X^h(\tilde{\eta}^h(Y^h)) - \tilde{\Phi}Y^h(\tilde{\eta}^h(X^h)))\tilde{d}_t) \\
&\quad - (-\tilde{\Phi}(\nabla_Y X)^v - Y^h(\tilde{\eta}^h(X^h))\xi^h,-\tilde{\eta}^v((\nabla_Y X)^v)\tilde{d}_t) \\
&\quad - (\tilde{\eta}^v(X^v)\tilde{\Phi}(\nabla_Y\xi)^v - Y^h(\tilde{\eta}^h(X^h))\xi^h,\tilde{\eta}^v(X^v)\tilde{\eta}^v((\nabla_Y\xi)^v)\tilde{d}_t) \\
&\quad - (-Y^h(\tilde{\eta}^h(X^h))\xi^h,Y^h(\tilde{\eta}^v(X^v))\tilde{d}_t) \\
&\quad - (\tilde{\Phi}(\nabla_X Y)^v + X^h(\tilde{\eta}^h(Y^h))\xi^h,\tilde{\eta}^v((\nabla_X Y)^v)\tilde{d}_t) \\
&\quad - (-\tilde{\eta}^v(Y^v)\tilde{\Phi}(\nabla_X\xi)^v + X^h(\tilde{\eta}^h(Y^h))\xi^h,-\tilde{\eta}^v(Y^v)\tilde{\eta}^v((\nabla_X\xi)^v)\tilde{d}_t) \\
&\quad - (X^h(\tilde{\eta}^h(Y^h))\xi^h,-X^h(\tilde{\eta}^v(Y^v))\tilde{d}_t) \\
&= (\tilde{\Phi}^2[X^h,Y^h] + [\tilde{\Phi}X^h,\tilde{\Phi}Y^h] - \tilde{\Phi}[\tilde{\Phi}X^h,Y^h] - \tilde{\Phi}[X^h,\tilde{\Phi}Y^h] \\
&\quad - 2d\tilde{\eta}^h(X^h,Y^h)\xi^h - 2d\tilde{\eta}^v(X^h,Y^h)\xi^v - 2X^h(\tilde{\eta}^h(Y^h))\xi^h + 2Y^h(\tilde{\eta}^h(X^h))\xi^h, \\
&\quad ((L_{\tilde{\Phi}X^h}\tilde{\eta}^h)Y^h + (L_{\tilde{\Phi}X^h}\tilde{\eta}^v)Y^h - (L_{\tilde{\Phi}Y^h}\tilde{\eta}^h)X^h - (L_{\tilde{\Phi}Y^h}\tilde{\eta}^v)X^h)\tilde{d}_t) \\
&= (\tilde{N}_{\tilde{\Phi}}(X^h,Y^h) - 2d\tilde{\eta}^h(X^h,Y^h)\xi^h - 2d\tilde{\eta}^v(X^h,Y^h)\xi^v \\
&\quad - 2X^h(\tilde{\eta}^h\left(Y^h\right))\xi^h + 2Y^h(\tilde{\eta}^h\left(X^h\right))\xi^h, \\
&\quad ((L_{\tilde{\Phi}X^h}\tilde{\eta}^h)Y^h + (L_{\tilde{\Phi}X^h}\tilde{\eta}^v)Y^h - (L_{\tilde{\Phi}Y^h}\tilde{\eta}^h)X^h - (L_{\tilde{\Phi}Y^h}\tilde{\eta}^v)X^h)\tilde{d}_t) \qquad (4.2.4)
\end{aligned}
$$

eşitliği elde edilir.

Uzun hesaplamalardan sonra diğer bileşenler de

$$
\begin{aligned}
\tilde{N}_{\tilde{J}}((X^h,0),(Y^v,0)) = (&\tilde{N}_{\tilde{\Phi}}(X^h,Y^v) - 2d\tilde{\eta}^h(X^h,Y^v)\xi^h - 2d\tilde{\eta}^v(X^h,Y^v)\xi^v \\
&- 2X^h(\tilde{\eta}^v\,(Y^v))\xi^h - 2X^h(\tilde{\eta}^v\,(Y^v))\xi^v, \\
&((L_{\tilde{\Phi}X^h}\tilde{\eta}^v)\,Y^v - \left(L_{\tilde{\Phi}Y^v}\tilde{\eta}^h\right)X^h - (L_{\tilde{\Phi}Y^v}\tilde{\eta}^v)\,X^h)\tilde{d}_t), \quad (4.2.5)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\tilde{N}_{\tilde{J}}((X^v,0),(Y^h,0)) = (&\tilde{N}_{\tilde{\Phi}}(X^v,Y^h) - 2d\tilde{\eta}^h(X^v,Y^h)\xi^h - 2d\tilde{\eta}^v(X^v,Y^h)\xi^v \\
&+ 2Y^h(\tilde{\eta}^v\,(X^v))\xi^v + 2Y^h(\tilde{\eta}^v\,(X^v))\xi^h, \\
&(\left(L_{\tilde{\Phi}X^v}\tilde{\eta}^h\right)Y^h + (L_{\tilde{\Phi}X^v}\tilde{\eta}^v)\,Y^h - (L_{\tilde{\Phi}Y^h}\tilde{\eta}^v)\,X^v)\tilde{d}_t) \quad (4.2.6)
\end{aligned}
$$

ve

$$
\begin{aligned}
\tilde{N}_{\tilde{J}}((X^v,0),(Y^v,0)) = (&\tilde{N}_{\tilde{\Phi}}(X^v,Y^v) - 2d\tilde{\eta}^h(X^v,Y^v)\xi^h - 2d\tilde{\eta}^v(X^v,Y^v)\xi^v \\
&+ 2Y^v(\tilde{\eta}^v\,(X^v))\xi^h - 2X^v(\tilde{\eta}^v\,(Y^v))\xi^h, \\
&((L_{\tilde{\Phi}X^v}\tilde{\eta}^v)\,Y^v + \left(L_{\tilde{\Phi}X^v}\tilde{\eta}^h\right)Y^v - (L_{\tilde{\Phi}Y^v}\tilde{\eta}^v)\,X^v \\
&- \left(L_{\tilde{\Phi}Y^v}\tilde{\eta}^h\right)X^v)\tilde{d}_t) \quad (4.2.7)
\end{aligned}
$$

olarak elde edilir.

Yukarıdaki eşitliklerin elde edilebilmesi için, aşağıdaki ifadeler kullanılmıştır:

$$
\left.
\begin{aligned}
2d\tilde{\eta}^h(X^h,Y^h) &= X^h(\tilde{\eta}^h(Y^h)) - Y^h(\tilde{\eta}^h(X^h)) - \tilde{\eta}^h([X^h,Y^h]), \\
2d\tilde{\eta}^h(X^h,Y^v) &= -Y^v(\tilde{\eta}^h(X^h)) - \tilde{\eta}^h([X^h,Y^v]), \\
2d\tilde{\eta}^h(X^v,Y^h) &= X^v(\tilde{\eta}^h(Y^h)) - \tilde{\eta}^h([X^v,Y^h]), \\
2d\tilde{\eta}^h(X^v,Y^v) &= -\tilde{\eta}^h([X^v,Y^v]), \\
2d\tilde{\eta}^v(X^v,Y^v) &= X^v(\tilde{\eta}^v(Y^v)) - Y^v(\tilde{\eta}^v(X^v)) - \tilde{\eta}^v([X^v,Y^v]), \\
2d\tilde{\eta}^v(X^v,Y^h) &= -Y^h(\tilde{\eta}^v(X^v)) - \tilde{\eta}^v([X^v,Y^h]), \\
2d\tilde{\eta}^v(X^h,Y^v) &= X^h(\tilde{\eta}^v(Y^v)) - \tilde{\eta}^v([X^h,Y^v]), \\
2d\tilde{\eta}^v(X^h,Y^h) &= -\tilde{\eta}^v([X^h,Y^h]);
\end{aligned}
\right\} \quad (4.2.8)
$$

$$\left.\begin{aligned}
&\left(L_{\tilde{\Phi}X^h}\tilde{\eta}^h\right)Y^h=\tilde{\Phi}X^h(\tilde{\eta}^h(Y^h)),\\
&\left(L_{\tilde{\Phi}X^h}\tilde{\eta}^h\right)Y^v=0,\\
&\left(L_{\tilde{\Phi}X^h}\tilde{\eta}^v\right)Y^h=\tilde{\eta}^v\left((\nabla_Y X)^v\right)-Y^h(\tilde{\eta}^v\left(X^v\right))-\tilde{\eta}^v(X^v)\tilde{\eta}^v\left((\nabla_Y \xi)^v\right),\\
&\left(L_{\tilde{\Phi}X^h}\tilde{\eta}^v\right)Y^v=\tilde{\Phi}X^h(\tilde{\eta}^v(Y^v))-Y^v(\tilde{\eta}^v\left(X^v\right)),\\
&\left(L_{\tilde{\Phi}X^v}\tilde{\eta}^h\right)Y^h=\tilde{\Phi}X^v(\tilde{\eta}^h(Y^h))-\tilde{\eta}^h([X,Y]^h)-Y^h(\tilde{\eta}^h(X^h))\\
&\qquad\qquad\qquad+\tilde{\eta}^h(X^h)\tilde{\eta}^h([\xi,Y]^h),\\
&\left(L_{\tilde{\Phi}X^v}\tilde{\eta}^h\right)Y^v=-Y^v(\tilde{\eta}^h\left(X^h\right)),\\
&\left(L_{\tilde{\Phi}X^v}\tilde{\eta}^v\right)Y^h=\tilde{\eta}^v\left((R(X,Y)u)^v\right)-\tilde{\eta}^h(X^h)\tilde{\eta}^v\left((R(\xi,Y)u)^v\right),\\
&\left(L_{\tilde{\Phi}X^v}\tilde{\eta}^v\right)Y^v=\tilde{\Phi}X^v(\tilde{\eta}^v(Y^v))-\tilde{\eta}^v((\nabla_X Y)^v)+\tilde{\eta}^h(X^h)\tilde{\eta}^v((\nabla_\xi Y)^v)
\end{aligned}\right\}\qquad(4.2.9)$$

ve

$$\left.\begin{aligned}
\tilde{\Phi}[\tilde{\Phi}X^h,Y^h]&=-\left(\nabla_Y X\right)^h+\tilde{\eta}^h((\nabla_Y X)^h)\xi^h+\tilde{\eta}^v\left(X^v\right)\left(\nabla_Y\xi\right)^h\\
&\quad-\tilde{\eta}^v\left(X^v\right)\tilde{\eta}^h((\nabla_Y\xi)^h)\xi^h,\\
\tilde{\Phi}[X^h,\tilde{\Phi}Y^h]&=\left(\nabla_X Y\right)^h-\tilde{\eta}^h((\nabla_X Y)^h)\xi^h-\tilde{\eta}^v\left(Y^v\right)\left(\nabla_X\xi\right)^h\\
&\quad+\tilde{\eta}^v\left(Y^v\right)\tilde{\eta}^h((\nabla_X\xi)^h)\xi^h,\\
\tilde{\Phi}[\tilde{\Phi}X^v,Y^v]&=\left(\nabla_X Y\right)^h-\tilde{\eta}^h((\nabla_X Y)^h)\xi^h-\tilde{\eta}^h(X^h)\left(\nabla_\xi Y\right)^h\\
&\quad+\tilde{\eta}^h(X^h)\tilde{\eta}^h((\nabla_\xi Y)^h)\xi^h,\\
\tilde{\Phi}[X^v,\tilde{\Phi}Y^v]&=-\left(\nabla_Y X\right)^h+\tilde{\eta}^h((\nabla_Y X)^h)\xi^h+\tilde{\eta}^h(Y^h)(\nabla_\xi X)^h\\
&\quad-\tilde{\eta}^h(Y^h)\tilde{\eta}^h((\nabla_\xi X)^h)\xi^h,\\
\tilde{\Phi}[\tilde{\Phi}X^h,Y^v]&=0,\\
\tilde{\Phi}[X^h,\tilde{\Phi}Y^v]&=[X,Y]^v-\tilde{\eta}^v\left([X,Y]^v\right)\xi^v-(R(X,Y)u)^h\\
&\quad+\tilde{\eta}^h((R(X,Y)u)^h)\xi^h-\tilde{\eta}^h\left(Y^h\right)[X,\xi]^v\\
&\quad+\tilde{\eta}^h\left(Y^h\right)\tilde{\eta}^v\left([X,\xi]^v\right)\xi^v+\tilde{\eta}^h\left(Y^h\right)(R(X,\xi)u)^h\\
&\quad-\tilde{\eta}^h(Y^h)\tilde{\eta}^h\left((R(X,\xi)u)^h\right)\xi^h,\\
\tilde{\Phi}[\tilde{\Phi}X^v,Y^h]&=[X,Y]^v-\tilde{\eta}^v\left([X,Y]^v\right)\xi^v-(R(X,Y)u)^h\\
&\quad+\tilde{\eta}^h\left((R(X,Y)u)^h\right)\xi^h\\
&\quad-\tilde{\eta}^h\left(X^h\right)[\xi,Y]^v+\tilde{\eta}^h(X^h)\tilde{\eta}^v\left([\xi,Y]^v\right)\xi^v\\
&\quad+\tilde{\eta}^h\left(X^h\right)(R(\xi,Y)u)^h-\tilde{\eta}^h\left(X^h\right)\tilde{\eta}^h((R(\xi,Y)u)^h)\xi^h,\\
\tilde{\Phi}[X^v,\tilde{\Phi}Y^h]&=0.
\end{aligned}\right\}\qquad(4.2.10)$$

Böylece, eğer (4.2.4)-(4.2.7) ifadeleri (4.2.3)'te kullanılırsa,

$$
\begin{aligned}
&\tilde{N}_{\tilde{J}}((\tilde{X},0),(\tilde{Y},0)) \\
&= (\tilde{N}_{\tilde{\Phi}}(X^h,Y^h) + \tilde{N}_{\tilde{\Phi}}(X^h,Y^v) + \tilde{N}_{\tilde{\Phi}}(X^v,Y^h) + \tilde{N}_{\tilde{\Phi}}(X^v,Y^v) \\
&\quad - 2d\tilde{\eta}^h(X^h,Y^h)\xi^h - 2d\tilde{\eta}^h(X^h,Y^v)\xi^h - 2d\tilde{\eta}^h(X^v,Y^h)\xi^h - 2d\tilde{\eta}^h(X^v,Y^v)\xi^h \\
&\quad - 2d\tilde{\eta}^v(X^h,Y^h)\xi^v - 2d\tilde{\eta}^v(X^h,Y^v)\xi^v - 2d\tilde{\eta}^v(X^v,Y^h)\xi^v - 2d\tilde{\eta}^v(X^v,Y^v)\xi^v \\
&\quad - 2X^h(\tilde{\eta}^h\left(Y^h\right))\xi^h - 2X^h(\tilde{\eta}^v\left(Y^v\right))\xi^v - 2X^h(\tilde{\eta}^v\left(Y^v\right))\xi^h - 2X^v(\tilde{\eta}^v\left(Y^v\right))\xi^h \\
&\quad + 2Y^h(\tilde{\eta}^h\left(X^h\right))\xi^h + 2Y^h(\tilde{\eta}^v\left(X^v\right))\xi^v + 2Y^h(\tilde{\eta}^v\left(X^v\right))\xi^h + 2Y^v(\tilde{\eta}^v\left(X^v\right))\xi^h, \\
&\quad \{(L_{\tilde{\Phi}X^h}\tilde{\eta}^h)Y^h + (L_{\tilde{\Phi}X^h}\tilde{\eta}^v)\,Y^h + (L_{\tilde{\Phi}X^h}\tilde{\eta}^v)\,Y^v + (L_{\tilde{\Phi}X^v}\tilde{\eta}^h)Y^h + (L_{\tilde{\Phi}X^v}\tilde{\eta}^v)\,Y^h \\
&\quad + (L_{\tilde{\Phi}X^v}\tilde{\eta}^h)Y^v + (L_{\tilde{\Phi}X^v}\tilde{\eta}^v)\,Y^v - (L_{\tilde{\Phi}Y^h}\tilde{\eta}^h)X^h - (L_{\tilde{\Phi}Y^h}\tilde{\eta}^v)\,X^h - (L_{\tilde{\Phi}Y^h}\tilde{\eta}^v)\,X^v \\
&\quad - (L_{\tilde{\Phi}Y^v}\tilde{\eta}^h)X^h - (L_{\tilde{\Phi}Y^v}\tilde{\eta}^v)\,X^h - (L_{\tilde{\Phi}Y^v}\tilde{\eta}^h)X^v - (L_{\tilde{\Phi}Y^v}\tilde{\eta}^v)\,X^v\}\tilde{d}_t)
\end{aligned}
\tag{4.2.11}
$$

ifadesine ulaşılır. Şimdi, (4.2.11)'in tam sonucunu elde etmek için, (4.2.8), (4.2.9) ve (4.2.10) yardımıyla $\tilde{N}_{\tilde{\Phi}}(X^i,Y^j)$, $2d\tilde{\eta}^k(X^l,Y^m)$, $(L_{\tilde{\Phi}X^n}\tilde{\eta}^p)\,Y^s$, $i,j,k,l,m,n,p,s \in \{h,v\}$ terimleri hesaplanmalıdır.

(4.1.1), (4.1.2), (4.1.3), (4.1.9)-(4.1.13)'ten,

$$
\begin{aligned}
&\tilde{N}_{\tilde{\Phi}}(X^h,Y^h) \\
&= \tilde{\Phi}^2[X^h,Y^h] + [\tilde{\Phi}X^h,\tilde{\Phi}Y^h] - \tilde{\Phi}[\tilde{\Phi}X^h,Y^h] - \tilde{\Phi}[X^h,\tilde{\Phi}Y^h] \\
&= \tilde{\Phi}^2([X,Y]^h - (R(X,Y)u)^v) + [X^v - \tilde{\eta}^v(X^v)\xi^v, Y^v - \tilde{\eta}^v(Y^v)\xi^v] \\
&\quad - \tilde{\Phi}[X^v - \tilde{\eta}^v(X^v)\xi^v, Y^h] - \tilde{\Phi}[X^h, Y^v - \tilde{\eta}^v(Y^v)\xi^v] \\
&= \tilde{\Phi}^2\,[X,Y]^h - \tilde{\Phi}^2(R(X,Y)u)^v \\
&\quad + ([X^v,Y^v] + [X^v,-\tilde{\eta}^v(Y^v)\xi^v] + [-\tilde{\eta}^v(X^v)\xi^v,Y^v] + [-\tilde{\eta}^v(X^v)\xi^v,-\tilde{\eta}^v(Y^v)\xi^v]) \\
&\quad - \tilde{\Phi}(\left[X^v,Y^h\right] + [-\tilde{\eta}^v(X^v)\xi^v,Y^h\left.\right]) - \tilde{\Phi}(\left[X^h,Y^v\right] + [X^h,-\tilde{\eta}^v(Y^v)\xi^v\left.\right]) \\
&= \tilde{\Phi}^2\,[X,Y]^h - \tilde{\Phi}^2(R(X,Y)u)^v + (-X^v(\tilde{\eta}^v(Y^v))\xi^v + Y^v(\tilde{\eta}^v(X^v))\xi^v \\
&\quad + \tilde{\eta}^v(X^v)\xi^v(\tilde{\eta}^v(Y^v))\xi^v - \tilde{\eta}^v(Y^v)\xi^v(\tilde{\eta}^v(X^v))\xi^v) \\
&\quad - \tilde{\Phi}(\left[X^v,Y^h\right] + Y^h(\tilde{\eta}^v(X^v))\xi^v - \tilde{\eta}^v(X^v)[\xi^v,Y^h\left.\right]) \\
&\quad - \tilde{\Phi}(\left[X^h,Y^v\right] - X^h(\tilde{\eta}^v(Y^v))\xi^v - \tilde{\eta}^v(Y^v)[X^h,\xi^v\left.\right]) \\
&= [X,Y]^h - \tilde{\eta}^h([X,Y]^h)\xi^h - (R(X,Y)u)^v + \tilde{\eta}^v((R(X,Y)u)^v)\xi^v
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&- X^v(\tilde{\eta}^v(Y^v))\xi^v + Y^v(\tilde{\eta}^v(X^v))\xi^v + \tilde{\eta}^v(X^v)\xi^v(\tilde{\eta}^v(Y^v))\xi^v \\
&- \tilde{\eta}^v(Y^v)\xi^v(\tilde{\eta}^v(X^v))\xi^v + \tilde{\Phi}(\nabla_Y X)^v - \tilde{\eta}^v(X^v)\tilde{\Phi}(\nabla_Y \xi)^v \\
&- \tilde{\Phi}(\nabla_X Y)^v + \tilde{\eta}^v(Y^v)\tilde{\Phi}(\nabla_X \xi)^v \\
={}& (\nabla_X Y)^h - (\nabla_Y X)^h - \tilde{\eta}^h((\nabla_X Y)^h)\xi^h + \tilde{\eta}^h((\nabla_Y X)^h)\xi^h - (R(X,Y)u)^v \\
&+ \tilde{\eta}^v((R(X,Y)u)^v)\xi^v - X^v(\tilde{\eta}^v(Y^v))\xi^v + Y^v(\tilde{\eta}^v(X^v))\xi^v + \tilde{\eta}^v(X^v)\xi^v(\tilde{\eta}^v(Y^v))\xi^v \\
&- \tilde{\eta}^v(Y^v)\xi^v(\tilde{\eta}^v(X^v))\xi^v + (\nabla_Y X)^h - \tilde{\eta}^h((\nabla_Y X)^h)\xi^h - \tilde{\eta}^v(X^v)(\nabla_Y \xi)^h \\
&+ \tilde{\eta}^v(X^v)\tilde{\eta}^h((\nabla_Y \xi)^h)\xi^h - (\nabla_X Y)^h + \tilde{\eta}^h((\nabla_X Y)^h)\xi^h + \tilde{\eta}^v(Y^v)(\nabla_X \xi)^h \\
&- \tilde{\eta}^v(Y^v)\tilde{\eta}^h((\nabla_X \xi)^h)\xi^h
\end{aligned} \tag{4.2.12}
$$

bulunur. (4.2.12) ifadesinde $u = \mp\xi$ olması durumu göz önüne alınırsa,

$$
\left.
\begin{aligned}
&\tilde{N}_{\tilde{\Phi}}(X^h, Y^h) = \pm(R(X,Y)\xi)^v - \eta(X)(\nabla_Y \xi)^h + \eta(Y)(\nabla_X \xi)^h \\
&\text{ifadesine ve benzer şekilde,} \\
&\tilde{N}_{\tilde{\Phi}}(X^h, Y^v) = \mp(R(X,Y)\xi)^h \pm \eta(Y)(R(X,\xi)\xi)^h \\
&\qquad + \eta(X)(\nabla_Y \xi)^v + \eta(Y)(\nabla_X \xi)^v - \eta(X)\eta(Y)(\nabla_\xi \xi)^v \\
&\qquad + \tfrac{1}{2} g(X, \nabla_Y \xi)\xi^v - \tfrac{1}{2}\eta(Y) g(X, \nabla_\xi \xi)\xi^v, \\
&\tilde{N}_{\tilde{\Phi}}(X^v, Y^h) = \mp(R(X,Y)\xi)^h \pm \eta(X)(R(\xi,Y)\xi)^h \\
&\qquad - \eta(X)(\nabla_Y \xi)^v - \eta(Y)(\nabla_X \xi)^v + \eta(X)\eta(Y)(\nabla_\xi \xi)^v \\
&\qquad - \tfrac{1}{2} g(Y, \nabla_X \xi)\xi^v + \tfrac{1}{2}\eta(X) g(Y, \nabla_\xi \xi)\xi^v, \\
&\tilde{N}_{\tilde{\Phi}}(X^v, Y^v) = \pm(R(X,Y)\xi)^v \mp \eta(X)(R(\xi,Y)\xi)^v \\
&\qquad \mp \eta(Y)(R(X,\xi)\xi)^v + g(X, \nabla_Y \xi)\xi^h - g(Y, \nabla_X \xi)\xi^h \\
&\qquad + \eta(X)(\nabla_Y \xi)^h - \eta(Y)(\nabla_X \xi)^h + \eta(X) g(Y, \nabla_\xi \xi)\xi^h \\
&\qquad - \eta(Y) g(X, \nabla_\xi \xi)\xi^h
\end{aligned}
\right\} \tag{4.2.13}
$$

ifadelerine;

$$
\left.
\begin{aligned}
2d\tilde{\eta}^h(X^h, Y^h) &= X^h(\tilde{\eta}^h(Y^h)) - Y^h(\tilde{\eta}^h(X^h)) - \tilde{\eta}^h([X^h, Y^h]) \\
&= X(\eta(Y)) - Y(\eta(X)) - \tilde{\eta}^h([X,Y]^h - (R(X,Y)u)^v) \\
&= X(\eta(Y)) - Y(\eta(X)) - \eta([X,Y]) = 2d\eta(X,Y) \\
&\text{ve benzer şekilde,} \\
2d\tilde{\eta}^v(X^v, Y^v) &= 2d\tilde{\eta}^h(X^h, Y^v) = 2d\tilde{\eta}^h(X^v, Y^h) \\
&= 2d\tilde{\eta}^h(X^v, Y^v) = 2d\tilde{\eta}^v(X^h, Y^h) = 0, \\
2d\tilde{\eta}^v(X^h, Y^v) &= \tfrac{1}{2} g(Y, \nabla_X \xi),\ 2d\tilde{\eta}^v(X^v, Y^h) = -\tfrac{1}{2} g(X, \nabla_Y \xi)
\end{aligned}
\right\} \tag{4.2.14}
$$

ifadelerine ve

$$\left.\begin{aligned}
&\left(L_{\tilde{\Phi}X^h}\tilde{\eta}^h\right)Y^h = \tilde{\Phi}X^h(\tilde{\eta}^h(Y^h)) - \tilde{\eta}^h([\tilde{\Phi}X^h, Y^h]) \\
&\qquad\qquad\qquad = (X^v - \tilde{\eta}^v(X^v)\xi^v)(\tilde{\eta}^h(Y^h)) - \tilde{\eta}^h([X^v, Y^h] \\
&\qquad\qquad\qquad\quad + Y^h(\tilde{\eta}^v(X^v))\xi^v - \tilde{\eta}^v(X^v)[\xi^v, Y^h]) \\
&\qquad\qquad\qquad = X^v(\tilde{\eta}^h(Y^h)) - \tilde{\eta}^v(X^v)\xi^v(\tilde{\eta}^h(Y^h)) - \tilde{\eta}^h([X^v, Y^h]) \\
&\qquad\qquad\qquad\quad + \tilde{\eta}^v(X^v)\tilde{\eta}^h([\xi^v, Y^h]) \\
&\qquad\qquad\qquad = 0 \\
&\text{ve benzer şekilde,} \\
&\left(L_{\tilde{\Phi}X^h}\tilde{\eta}^h\right)Y^v = \left(L_{\tilde{\Phi}X^v}\tilde{\eta}^h\right)Y^v = \left(L_{\tilde{\Phi}X^v}\tilde{\eta}^v\right)Y^h = \left(L_{\tilde{\Phi}X^h}\tilde{\eta}^v\right)Y^v = 0, \\
&\left(L_{\tilde{\Phi}X^v}\tilde{\eta}^v\right)Y^v = \tfrac{1}{2}g(Y, \nabla_X\xi) - \tfrac{1}{2}\eta(X)g(Y, \nabla_\xi\xi), \\
&\left(L_{\tilde{\Phi}X^h}\tilde{\eta}^v\right)Y^h = -\tfrac{1}{2}g(X, \nabla_Y\xi) \\
&\left(L_{\tilde{\Phi}X^v}\tilde{\eta}^h\right)Y^h = g(Y, \nabla_X\xi) - g(X, \nabla_Y\xi) - \eta(X)g(Y, \nabla_\xi\xi)
\end{aligned}\right\} \quad (4.2.15)$$

ifadelerine ulaşılır.

Yukarıdaki hesaplamalarda, 3. Bölüm'de de geçen şu eşitlikler kullanılmıştır:

$$\left.\begin{aligned}
&X^h(\tilde{g}(Y^h, Z^h)) = X(g(Y, Z)), \\
&X^v(\tilde{g}(Y^h, Z^h)) = 0, \\
&X^h(\tilde{g}(Y^v, Z^v)) = \tilde{g}((\nabla_X Y)^v, Z^v) + \tilde{g}(Y^v, (\nabla_X Z)^v), \\
&X^v(\tilde{g}(Y^v, Z^v)) = -\tfrac{2}{\alpha^2}g(X, u)\{g(Y, Z) + g(Y, u)g(Z, u)\} \\
&\qquad\qquad\qquad\quad + \tfrac{1}{\alpha}\{g(X, Y)g(Z, u) + g(X, Z)g(Y, u)\}
\end{aligned}\right\} \quad (4.2.16)$$

(detay için, [9]'a bakılabilir).

O halde, (4.2.13), (4.2.14) ve (4.2.15) eşitlikleri (4.2.11)'de kullanılırsa,

$$\begin{aligned}
&\tilde{N}_J((\tilde{X}, 0), (\tilde{Y}, 0)) \\
&= (\mp 2(R(X, Y)\xi)^h \pm 2(R(X, Y)\xi)^v \pm \eta(Y)(R(X, \xi)\xi)^h \mp \eta(Y)(R(X, \xi)\xi)^v \\
&\pm \eta(X)(R(\xi, Y)\xi)^h \mp \eta(X)(R(\xi, Y)\xi)^v + 2g(X, \nabla_Y\xi)\xi^v + 5g(X, \nabla_Y\xi)\xi^h \\
&- 2g(Y, \nabla_X\xi)\xi^v - 5g(Y, \nabla_X\xi)\xi^h - 4\eta(\nabla_X Y)\xi^h - 2\eta(\nabla_X Y)\xi^v + 4\eta(\nabla_Y X)\xi^h \\
&+ 2\eta(\nabla_Y X)\xi^v + \frac{1}{2}\eta(X)g(Y, \nabla_\xi\xi)\xi^v + \eta(X)g(Y, \nabla_\xi\xi)\xi^h - \frac{1}{2}\eta(Y)g(X, \nabla_\xi\xi)\xi^v \\
&- \eta(Y)g(X, \nabla_\xi\xi)\xi^h, \\
&\frac{1}{2}\{6g(Y, \nabla_X\xi) - 6g(X, \nabla_Y\xi) - 3\eta(X)g(Y, \nabla_\xi\xi) + 3\eta(Y)g(X, \nabla_\xi\xi)\}\tilde{d}_t) \quad (4.2.17)
\end{aligned}$$

sonucu elde edilir.

Yukarıdakine benzer yolla,

$$\tilde{N}_{\tilde{J}}((\tilde{X},0),(\tilde{0},\tilde{d}_t)) = \tilde{N}_{\tilde{J}}((X^h,0),(0,\tilde{d}_t)) + \tilde{N}_{\tilde{J}}((X^v,0),(0,\tilde{d}_t)) \tag{4.2.18}$$

olduğu görülür. Dolayısıyla şimdi, $\tilde{N}_{\tilde{J}}((X^i,0),(0,\tilde{d}_t))$ $i \in \{h,v\}$ bileşenleri hesaplanmalıdır. Bu bileşenleri hesaplamak için, aşağıdaki eşitlikler kullanılacaktır:

$$\left.\begin{aligned}
(L_{\xi^h}\tilde{\Phi})X^h &= [\xi^h,\tilde{\Phi}X^h] - [\xi,X]^v + \tilde{\eta}^v([\xi,X]^v)\xi^v \\
&\qquad + (R(\xi,X)u)^h - \tilde{\eta}^h((R(\xi,X)u)^h)\xi^h, \\
(L_{\xi^h}\tilde{\Phi})X^v &= [\xi^h,\tilde{\Phi}X^v] - (\nabla_\xi X)^h + \tilde{\eta}^h((\nabla_\xi X)^h)\xi^h, \\
(L_{\xi^v}\tilde{\Phi})X^h &= [\xi^v,\tilde{\Phi}X^h] + (\nabla_X \xi)^h - \tilde{\eta}^h((\nabla_X \xi)^h)\xi^h, \\
(L_{\xi^v}\tilde{\Phi})X^v &= [\xi^v,\tilde{\Phi}X^v]
\end{aligned}\right\} \tag{4.2.19}$$

ve

$$\left.\begin{aligned}
(L_{\xi^h}\tilde{\eta}^h)X^h &= \xi^h(\tilde{\eta}^h(X^h)) - \tilde{\eta}^h([\xi,X]^h), \\
(L_{\xi^v}\tilde{\eta}^h)X^h &= \xi^v(\tilde{\eta}^h(X^h)), \\
(L_{\xi^h}\tilde{\eta}^h)X^v &= 0, \\
(L_{\xi^v}\tilde{\eta}^h)X^v &= 0, \\
(L_{\xi^h}\tilde{\eta}^v)X^h &= \tilde{\eta}^v((R(\xi,X)u)^v), \\
(L_{\xi^v}\tilde{\eta}^v)X^h &= \tilde{\eta}^v((\nabla_X \xi)^v)), \\
(L_{\xi^h}\tilde{\eta}^v)X^v &= \xi^h(\tilde{\eta}^v(X^v)) - \tilde{\eta}^v((\nabla_\xi X)^v)), \\
(L_{\xi^v}\tilde{\eta}^v)X^v &= \xi^v(\tilde{\eta}^v(X^v)).
\end{aligned}\right\} \tag{4.2.20}$$

Böylece, (4.1.2), (4.1.13), (4.2.1), (4.2.2), (4.2.19) ve (4.2.20)'den,

$$\begin{aligned}
&\tilde{N}_{\tilde{J}}((X^h,0),(0,\tilde{d}_t)) \\
&\quad = \tilde{J}^2[(X^h,0),(0,\tilde{d}_t)] + [\tilde{J}(X^h,0),\tilde{J}(0,\tilde{d}_t)] - \tilde{J}[\tilde{J}(X^h,0),(0,\tilde{d}_t)] \\
&\qquad - \tilde{J}[(X^h,0),\tilde{J}(0,\tilde{d}_t)] \\
&\quad = [(X^h,0),(0,\tilde{d}_t)] + [(\tilde{\Phi}X^h,\tilde{\eta}^h(X^h)\tilde{d}_t),(\tilde{\xi},0)] \\
&\qquad - \tilde{J}[(\tilde{\Phi}X^h,\tilde{\eta}^h(X^h)\tilde{d}_t),(0,\tilde{d}_t)] - \tilde{J}[(X^h,0),(\tilde{\xi},0)] \\
&\quad = ([X^h,0],0) + ([\tilde{\Phi}X^h,\tilde{\xi}],-\tilde{\xi}(\tilde{\eta}^h(X^h))\tilde{d}_t) - \tilde{J}([\tilde{\Phi}X^h,0],0) - \tilde{J}([X^h,\tilde{\xi}],0) \\
&\quad = ([\tilde{\Phi}X^h,\tilde{\xi}],-\tilde{\xi}(\tilde{\eta}^h(X^h))\tilde{d}_t) - \tilde{J}([X^h,\tilde{\xi}],0)
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= ([\tilde{\Phi}X^h, \xi^h] + [\tilde{\Phi}X^h, \xi^v], (-\xi^h(\tilde{\eta}^h(X^h)) - \xi^v(\tilde{\eta}^h(X^h)))\tilde{d}_t) \\
&\quad - \tilde{J}([X^h, \xi^h] + [X^h, \xi^v], 0) \\
&= ([\tilde{\Phi}X^h, \xi^h] + [\tilde{\Phi}X^h, \xi^v], (-\xi^h(\tilde{\eta}^h(X^h)) - \xi^v(\tilde{\eta}^h(X^h)))\tilde{d}_t) - \tilde{J}([X, \xi]^h, 0) \\
&\quad - \tilde{J}(-(R(X, \xi)u)^v, 0) - \tilde{J}((\nabla_X \xi)^v, 0) \\
&= ([\tilde{\Phi}X^h, \xi^h] + [\tilde{\Phi}X^h, \xi^v] - [X, \xi]^v + \tilde{\eta}^v([X, \xi]^v)\xi^v + (R(X, \xi)u)^h \\
&\quad - \tilde{\eta}^h((R(X, \xi)u)^h)\xi^h - (\nabla_X \xi)^h + \tilde{\eta}^h((\nabla_X \xi)^h)\xi^h, \\
&\quad \{-\xi^h(\tilde{\eta}^h(X^h)) - \xi^v(\tilde{\eta}^h(X^h)) - \tilde{\eta}^h([X, \xi]^h) + \tilde{\eta}^v((R(X, \xi)u)^v) \\
&\quad - \tilde{\eta}^v((\nabla_X \xi)^v)\}\tilde{d}_t) \\
&= -((L_{\xi^h}\tilde{\Phi})X^h + (L_{\xi^v}\tilde{\Phi})X^h, \\
&\quad \{(L_{\xi^h}\tilde{\eta}^h)X^h + (L_{\xi^h}\tilde{\eta}^v)X^h + (L_{\xi^v}\tilde{\eta}^h)X^h + (L_{\xi^v}\tilde{\eta}^v)X^h\}\tilde{d}_t) \qquad (4.2.21)
\end{aligned}
$$

ve benzer şekilde

$$
\begin{aligned}
\tilde{N}_{\tilde{J}}((X^v, 0), (0, \tilde{d}_t)) &= -((L_{\xi^h}\tilde{\Phi})X^v + (L_{\xi^v}\tilde{\Phi})X^v, \\
&\quad \{(L_{\xi^h}\tilde{\eta}^v)X^v + (L_{\xi^v}\tilde{\eta}^v)X^v\}\tilde{d}_t) \qquad (4.2.22)
\end{aligned}
$$

ifadelerine ulaşılır.

Eğer (4.2.21) ve (4.2.22) ifadeleri (4.2.18) eşitliğinde kullanılırsa,

$$
\begin{aligned}
&\tilde{N}_{\tilde{J}}((\tilde{X}, 0), (\tilde{0}, \tilde{d}_t)) \\
&= -((L_{\xi^h}\tilde{\Phi})X^h + (L_{\xi^h}\tilde{\Phi})X^v + (L_{\xi^v}\tilde{\Phi})X^h + (L_{\xi^v}\tilde{\Phi})X^v, \\
&\quad \{(L_{\xi^h}\tilde{\eta}^h)X^h + (L_{\xi^h}\tilde{\eta}^v)X^h + (L_{\xi^h}\tilde{\eta}^v)X^v + (L_{\xi^v}\tilde{\eta}^h)X^h \\
&\quad + (L_{\xi^v}\tilde{\eta}^v)X^h + (L_{\xi^v}\tilde{\eta}^v)X^v\}\tilde{d}_t) \qquad (4.2.23)
\end{aligned}
$$

elde edilir.

Şimdi (4.2.23) ifadesinin tam sonucuna ulaşmak için, (4.2.16), (4.2.19) ve (4.2.20) eşitlikleri yardımıyla $(L_{\xi^i}\tilde{\Phi})X^j$ ve $(L_{\xi^k}\tilde{\eta}^l)X^m$, $i, j, k, l, m \in \{h, v\}$ terimleri hesaplanmalıdır.

$$
\left.\begin{aligned}
(L_{\xi^h}\tilde{\Phi})X^h &= [\xi^h, \tilde{\Phi}X^h] - \tilde{\Phi}[\xi^h, X^h] \\
&= [\xi^h, X^v - \tilde{\eta}^v(X^v)\xi^v] - \tilde{\Phi}([\xi, X]^h - (R(\xi, X)u)^v) \\
&= [\xi^h, X^v] - \xi^h(\tilde{\eta}^v(X^v))\xi^v - \tilde{\eta}^v(X^v)[\xi^h, \xi^v] \\
&\quad - \tilde{\Phi}\,[\xi, X]^h + \tilde{\Phi}(R(\xi, X)u)^v \\
&= (\nabla_\xi X)^v - \eta(\nabla_\xi X)\xi^v - \tfrac{1}{2}g(X, \nabla_\xi \xi)\xi^v \\
&\quad - \eta(X)(\nabla_\xi \xi)^v - [\xi, X]^v + \tilde{\eta}^v([\xi, X]^v)\xi^v \\
&\quad + (R(\xi, X)u)^h - \tilde{\eta}^h((R(\xi, X)u)^h)\xi^h \\
&= -\tfrac{1}{2}g(X, \nabla_\xi \xi)\xi^v - \eta(X)(\nabla_\xi \xi)^v + (\nabla_X \xi)^v \\
&\quad \mp (R(\xi, X)\xi)^h \\
&\text{ve benzer şekilde,} \\
(L_{\xi^h}\tilde{\Phi})X^v &= -(\nabla_X \xi)^h \pm (R(\xi, X)\xi)^v - g(X, \nabla_\xi \xi)\xi^h, \\
(L_{\xi^v}\tilde{\Phi})X^h &= (\nabla_X \xi)^h, \\
(L_{\xi^v}\tilde{\Phi})X^v &= -(\nabla_X \xi)^v + \eta(X)(\nabla_\xi \xi)^v
\end{aligned}\right\} \qquad (4.2.24)
$$

dir ve

$$
\left.\begin{aligned}
(L_{\xi^h}\tilde{\eta}^h)X^h &= \xi^h(\tilde{\eta}^h(X^h)) - \tilde{\eta}^h([\xi^h, X^h]) \\
&= \xi(\eta(X)) - \tilde{\eta}^h([\xi, X]^h - (R(\xi, X)u)^v) \\
&= \xi(\eta(X)) - \eta([\xi, X]) = (L_\xi \eta)X \\
&\text{ve benzer şekilde,} \\
(L_{\xi^h}\tilde{\eta}^h)X^v &= (L_{\xi^h}\tilde{\eta}^v)X^h = (L_{\xi^v}\tilde{\eta}^h)X^h = (L_{\xi^v}\tilde{\eta}^v)X^h \\
&= (L_{\xi^v}\tilde{\eta}^h)X^v = (L_{\xi^v}\tilde{\eta}^v)X^v = 0, \\
(L_{\xi^h}\tilde{\eta}^v)X^v &= \tfrac{1}{2}g(X, \nabla_\xi \xi)
\end{aligned}\right\} \qquad (4.2.25)
$$

dir. Böylece,

$$
\begin{aligned}
&\tilde{N}_{\tilde{J}}((\tilde{X}, 0), (\tilde{0}, \tilde{d}_t)) \\
&= (\frac{1}{2}g(X, \nabla_\xi \xi)\xi^v + g(X, \nabla_\xi \xi)\xi^h \pm (R(\xi, X)\xi)^h \mp (R(\xi, X)\xi)^v), \\
&\quad - \frac{3}{2}g(X, \nabla_\xi \xi)\tilde{d}_t)
\end{aligned} \qquad (4.2.26)
$$

sonucuna ulaşılır.

Dolayısıyla, (4.2.17) ve (4.2.26) denklemlerinden,

$$\begin{aligned}
\tilde{N}^{(1)}(\tilde{X}, \tilde{Y}) = & \mp 2(R(X,Y)\xi)^h \pm 2(R(X,Y)\xi)^v \pm \eta(Y)(R(X,\xi)\xi)^h \\
& \mp \eta(Y)(R(X,\xi)\xi)^v \pm \eta(X)(R(\xi,Y)\xi)^h \mp \eta(X)(R(\xi,Y)\xi)^v \\
& + 2g(X, \nabla_Y \xi)\xi^v + 5g(X, \nabla_Y \xi)\xi^h - 2g(Y, \nabla_X \xi)\xi^v \\
& - 5g(Y, \nabla_X \xi)\xi^h - 4\eta(\nabla_X Y)\xi^h - 2\eta(\nabla_X Y)\xi^v + 4\eta(\nabla_Y X)\xi^h \\
& + 2\eta(\nabla_Y X)\xi^v + \frac{1}{2}\eta(X)g(Y, \nabla_\xi \xi)\xi^v + \eta(X)g(Y, \nabla_\xi \xi)\xi^h \\
& - \frac{1}{2}\eta(Y)g(X, \nabla_\xi \xi)\xi^v - \eta(Y)g(X, \nabla_\xi \xi)\xi^h, \qquad (4.2.27)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\tilde{N}^{(2)}(\tilde{X}, \tilde{Y}) = & \frac{1}{2}\{-6g(X, \nabla_Y \xi) + 6g(Y, \nabla_X \xi) \\
& - 3\eta(X)g(Y, \nabla_\xi \xi) + 3\eta(Y)g(X, \nabla_\xi \xi)\}, \qquad (4.2.28)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\tilde{N}^{(3)}(\tilde{X}) = & \frac{1}{2}g(X, \nabla_\xi \xi)\xi^v + g(X, \nabla_\xi \xi)\xi^h \pm (R(\xi, X)\xi)^h \\
& \mp (R(\xi, X)\xi)^v, \qquad (4.2.29)
\end{aligned}$$

$$\tilde{N}^{(4)}(\tilde{X}) = -\frac{3}{2}g(X, \nabla_\xi \xi) \qquad (4.2.30)$$

yazılabilir. Dolayısıyla bu hesaplamalardan sonra, aşağıdaki teorem verilebilir:

**Teorem 4.2.1.** *$M^{(2n+1)}$, $(\Phi, \eta, \xi, g)$ hemen hemen parakontakt metrik yapısıyla birlikte bir hemen hemen parakontakt metrik manifold olsun. Eğer $(TM, \tilde{\Phi}, \tilde{\eta}, \tilde{\xi}, \tilde{g})$ hemen hemen parakontakt C-G metrik tanjant demeti üzerinde $\tilde{N}^{(1)} = 0$ ise, bu taktirde $\tilde{N}^{(2)} = \tilde{N}^{(3)} = \tilde{N}^{(4)} = 0$ dır.*

**İspat.** $\tilde{N}^{(1)} = 0$ olsun. Bu taktirde, eğer (4.2.27) ifadesine $\tilde{\eta}^h$, $\tilde{\eta}^v$ ve $\tilde{\Phi}$ uygulanırsa, sırasıyla

$$\begin{aligned}
& 5g(X, \nabla_Y \xi) - 5g(Y, \nabla_X \xi) - 4\eta(\nabla_X Y) + 4\eta(\nabla_Y X) \\
& + \eta(X)g(Y, \nabla_\xi \xi) - \eta(Y)g(X, \nabla_\xi \xi) = 0, \qquad (4.2.31)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& 4g(X, \nabla_Y \xi) - 4g(Y, \nabla_X \xi) - 4\eta(\nabla_X Y) + 4\eta(\nabla_Y X) \\
& + \eta(X)g(Y, \nabla_\xi \xi) - \eta(Y)g(X, \nabla_\xi \xi) = 0, \qquad (4.2.32)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \pm 2(R(X,Y)\xi)^h \mp 2(R(X,Y)\xi)^v \pm \eta(Y)(R(X,\xi)\xi)^v \mp \eta(Y)(R(X,\xi)\xi)^h \\
& \pm \eta(X)(R(\xi,Y)\xi)^v \mp \eta(X)(R(\xi,Y)\xi)^h = 0 \qquad (4.2.33)
\end{aligned}$$

olur. (4.2.31) ve (4.2.32) ifadelerinde $Y = \xi$ alınırsa, sırasıyla

$$4g(X, \nabla_\xi \xi) + 4\eta(\nabla_\xi X) = 0$$

ve

$$3g(X, \nabla_\xi \xi) + 4\eta(\nabla_\xi X) = 0$$

bulunur ve dolayısıyla

$$g(X, \nabla_\xi \xi) = \eta(\nabla_\xi X) = 0 \tag{4.2.34}$$

eşitliklerine ulaşılır. Benzer şekilde (4.2.31) ve (4.2.32) ifadelerinde $X = \xi$ alınırsa da

$$g(Y, \nabla_\xi \xi) = \eta(\nabla_\xi Y) = 0 \tag{4.2.35}$$

bulunur. (4.2.34) ve (4.2.35) ifadeleri (4.2.31) ve (4.2.32)'de kullanılırsa,

$$g(X, \nabla_Y \xi) = g(Y, \nabla_X \xi) \tag{4.2.36}$$

elde edilir. Böylece, (4.2.34), (4.2.35) ve (4.2.36)'dan, $\tilde{N}^{(2)}(\tilde{X}, \tilde{Y}) = \tilde{N}^{(4)}(\tilde{X}) = 0$ olduğu görülür.

Şimdi, eğer (4.2.33)'te $Y = \xi$ alınırsa

$$\begin{aligned} \pm 2(R(X,\xi)\xi)^h \mp 2(R(X,\xi)\xi)^v \pm (R(X,\xi)\xi)^v \mp (R(X,\xi)\xi)^h &= 0 \\ \mp (R(X,\xi)\xi)^v \pm (R(X,\xi)\xi)^h &= 0 \quad (4.2.37) \end{aligned}$$

bulunur ve dolayısıyla (4.2.34) ve (4.2.37)'den de $\tilde{N}^{(3)}(\tilde{X}) = 0$ olduğu görülür ve böylece ispat tamamlanır. □

Böylece, bir hemen hemen parakontakt C-G metrik tanjant demetin normalliğini karakterize eden aşağıdaki teorem ifade edilebilir:

**Teorem 4.2.2.** $M^{(2n+1)}$, $(\Phi, \eta, \xi, g)$ *hemen hemen parakontakt metrik yapısıyla birlikte bir hemen hemen parakontakt metrik manifold olsun. Bu taktirde, M'nin* $(TM, \tilde{\Phi}, \tilde{\eta}, \tilde{\xi}, \tilde{g})$ *hemen hemen parakontakt C-G metrik tanjant demeti normaldir ancak ve ancak* $\tilde{N}^{(1)} = 0$*'dır.*

## 4.3 Cheeger-Gromoll Metrikli Parakontakt Tanjant Demetler

Bu alt bölümde, parakontakt C-G metrik tanjant demet, K-parakontakt C-G metrik tanjant demet, C-G para-Sasakian tanjant demet kavramları tanımlanarak bu kavramlarla ilgili bazı karakterizasyonlar verilmektedir.

**Tanım 4.3.1.** *$M^{(2n+1)}$, $(\Phi, \eta, \xi, g)$ hemen hemen parakontakt metrik yapısıyla birlikte bir hemen hemen parakontakt metrik manifold ve $TM$ de $(\tilde{\Phi}, \tilde{\eta}, \tilde{\xi}, \tilde{g})$ hemen hemen parakontakt C-G metrik yapısıyla birlikte bir hemen hemen parakontakt C-G metrik tanjant demet olsun. Eğer $TM$ üzerinde*

$$2\tilde{\Omega}(\tilde{X}, \tilde{Y}) = (\tilde{\nabla}_{\tilde{X}}\tilde{\eta})\tilde{Y} + (\tilde{\nabla}_{\tilde{Y}}\tilde{\eta})\tilde{X}$$

*şartı sağlanıyorsa, bu taktirde $TM$'ye bir **parakontakt C-G metrik tanjant demet** denir.*

O halde, (4.1.20) ve Önerme 3.2.1'den,

$$2\tilde{\Omega}(\tilde{X}, \tilde{Y}) = 3g(\Phi X, \Phi Y)$$

ve

$$\begin{aligned}
(\tilde{\nabla}_{\tilde{X}}\tilde{\eta})\tilde{Y} &= \tilde{\nabla}_{\tilde{X}}\tilde{\eta}(\tilde{Y}) - \tilde{\eta}(\tilde{\nabla}_{\tilde{X}}\tilde{Y}) \\
&= \tilde{\nabla}_{X^h}(\tilde{\eta}^h(Y^h)) + \tilde{\nabla}_{X^h}(\tilde{\eta}^v(Y^v)) + \tilde{\nabla}_{X^v}(\tilde{\eta}^h(Y^h)) + \tilde{\nabla}_{X^v}(\tilde{\eta}^v(Y^v)) \\
&\quad - \tilde{\eta}^h(\tilde{\nabla}_{X^h}Y^h) - \tilde{\eta}^h(\tilde{\nabla}_{X^h}Y^v) - \tilde{\eta}^h(\tilde{\nabla}_{X^v}Y^h) - \tilde{\eta}^h(\tilde{\nabla}_{X^v}Y^v) \\
&\quad - \tilde{\eta}^v(\tilde{\nabla}_{X^h}Y^h) - \tilde{\eta}^v(\tilde{\nabla}_{X^h}Y^v) - \tilde{\eta}^v(\tilde{\nabla}_{X^v}Y^h) - \tilde{\eta}^v(\tilde{\nabla}_{X^v}Y^v) \\
&= \tilde{g}(\tilde{\nabla}_{X^h}Y^h, \xi^h) + \tilde{g}(Y^h, \tilde{\nabla}_{X^h}\xi^h) + \tilde{g}(\tilde{\nabla}_{X^h}Y^v, \xi^v) + \tilde{g}(Y^v, \tilde{\nabla}_{X^h}\xi^v) \\
&\quad + \tilde{g}(\tilde{\nabla}_{X^v}Y^h, \xi^h) + \tilde{g}(Y^h, \tilde{\nabla}_{X^v}\xi^h) + \tilde{g}(\tilde{\nabla}_{X^v}Y^v, \xi^v) + \tilde{g}(Y^v, \tilde{\nabla}_{X^v}\xi^v) \\
&\quad - \tilde{\eta}^h(\tilde{\nabla}_{X^h}Y^h) - \tilde{\eta}^h(\tilde{\nabla}_{X^h}Y^v) - \tilde{\eta}^h(\tilde{\nabla}_{X^v}Y^h) - \tilde{\eta}^h(\tilde{\nabla}_{X^v}Y^v) \\
&\quad - \tilde{\eta}^v(\tilde{\nabla}_{X^h}Y^h) - \tilde{\eta}^v(\tilde{\nabla}_{X^h}Y^v) - \tilde{\eta}^v(\tilde{\nabla}_{X^v}Y^h) - \tilde{\eta}^v(\tilde{\nabla}_{X^v}Y^v) \\
&= \tilde{g}(Y^h, \tilde{\nabla}_{X^h}\xi^h) + \tilde{g}(Y^v, \tilde{\nabla}_{X^h}\xi^v) + \tilde{g}(Y^h, \tilde{\nabla}_{X^v}\xi^h) + \tilde{g}(Y^v, \tilde{\nabla}_{X^v}\xi^v) \\
&\quad - \tilde{\eta}^h(\tilde{\nabla}_{X^h}Y^v) - \tilde{\eta}^h(\tilde{\nabla}_{X^v}Y^v) - \tilde{\eta}^v(\tilde{\nabla}_{X^h}Y^h) - \tilde{\eta}^v(\tilde{\nabla}_{X^v}Y^h)
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \tilde{g}(Y^h, (\nabla_X \xi)^h) + \tilde{g}(Y^v, (\nabla_X \xi)^v) + \frac{1}{2\alpha}\tilde{g}(Y^h, (R(u,X)\xi)^h) \\
&\quad - \frac{1}{\alpha}\tilde{g}(X^v, U)\tilde{g}(Y^v, \xi^v) - \frac{1}{\alpha}\tilde{g}(\xi^v, U)\tilde{g}(Y^v, X^v) \\
&\quad + \frac{1+\alpha}{\alpha}\tilde{g}(X^v, \xi^v)\tilde{g}(Y^v, U) - \frac{1}{\alpha}\tilde{g}(X^v, U)\tilde{g}(\xi^v, U)\tilde{g}(Y^v, U) \\
&\quad - \frac{1}{2\alpha}\tilde{\eta}^h((R(u,Y)X)^h) + \frac{1}{2}\tilde{\eta}^v((R(X,Y)u)^v) \\
&= g(Y, \nabla_X \xi) + \frac{1}{2}g(Y, \nabla_X \xi) \mp \frac{1}{4}g(Y, R(\xi, X)\xi) \pm \frac{1}{2}\eta(X)\eta(Y) \\
&\quad \pm \frac{1}{4}g(X,Y) \pm \frac{1}{4}\eta(X)\eta(Y) \mp \frac{3}{2}\eta(X)\eta(Y) \pm \frac{1}{2}\eta(X)\eta(Y) \\
&\quad \pm \frac{1}{4}\eta(R(\xi,Y)X) \mp \frac{1}{2}\eta(R(X,Y)\xi) \\
&= \frac{3}{2}g(Y, \nabla_X \xi) \mp \frac{1}{4}g(Y, R(\xi,X)\xi) \pm \frac{1}{4}\eta(R(\xi,Y)X) \pm \frac{1}{4}g(X,Y) \\
&\quad \mp \eta(X)\eta(Y)\{-\frac{1}{2} - \frac{1}{4} + \frac{3}{2} - \frac{1}{2}\} \\
&= \frac{3}{2}g(Y, \nabla_X \xi) \mp \frac{1}{4}g(Y, R(\xi,X)\xi) \pm \frac{1}{4}\eta(R(\xi,Y)X) \pm \frac{1}{4}g(X,Y) \\
&\quad \mp \frac{1}{4}\eta(X)\eta(Y) \\
&= \frac{1}{4}\{6g(Y, \nabla_X \xi) \mp g(Y, R(\xi,X)\xi) \pm \eta(R(\xi,Y)X) \pm g(X,Y) \mp \eta(X)\eta(Y)\}
\end{aligned}
$$

ve benzer şekilde

$$
(\tilde{\nabla}_{\tilde{Y}}\tilde{\eta})\tilde{X} = \frac{1}{4}\{6g(X, \nabla_Y \xi) \mp g(X, R(\xi,Y)\xi) \pm \eta(R(\xi,X)Y) \pm g(X,Y) \mp \eta(X)\eta(Y)\}
$$

ifadelerine ulaşılır. Böylece, eğer $TM$ bir $(\tilde{\Phi}, \tilde{\eta}, \tilde{\xi}, \tilde{g})$ parakontakt C-G metrik yapısıyla birlikte bir parakontakt C-G metrik tanjant demet ise, bu taktirde

$$
2\tilde{\Omega}(\tilde{X}, \tilde{Y}) = (\tilde{\nabla}_{\tilde{X}}\tilde{\eta})\tilde{Y} + (\tilde{\nabla}_{\tilde{Y}}\tilde{\eta})\tilde{X}
$$

eşitliğinden

$$
\begin{aligned}
3g(\Phi X, \Phi Y) &= \frac{1}{4}\{6g(X, \nabla_Y \xi) + 6g(Y, \nabla_X \xi) \mp g(X, R(\xi,Y)\xi) \mp g(Y, R(\xi,X)\xi) \\
&\quad \pm \eta(R(\xi,X)Y) \pm \eta(R(\xi,Y)X) \pm 2g(X,Y) \mp 2\eta(X)\eta(Y)\} \quad (4.3.1)
\end{aligned}
$$

bulunur. Bu nedenle, (4.3.1) eşitliğinde $u = \xi$ ve $u = -\xi$ alınırsa, sırasıyla,

$$
\begin{aligned}
3g(\Phi X, \Phi Y) &= \frac{1}{4}\{6g(X, \nabla_Y \xi) + 6g(Y, \nabla_X \xi) + g(X, R(\xi,Y)\xi) + g(Y, R(\xi,X)\xi) \\
&\quad - \eta(R(\xi,X)Y) - \eta(R(\xi,Y)X) - 2g(X,Y) + 2\eta(X)\eta(Y)\} \quad (4.3.2)
\end{aligned}
$$

ve

$$3g(\Phi X, \Phi Y) = \frac{1}{4}\{6g(X, \nabla_Y \xi) + 6g(Y, \nabla_X \xi) - g(X, R(\xi, Y)\xi) - g(Y, R(\xi, X)\xi)$$
$$+\eta(R(\xi, X)Y) + \eta(R(\xi, Y)X) + 2g(X, Y) - 2\eta(X)\eta(Y)\}, \quad (4.3.3)$$

olur. (4.3.2) ve (4.3.3) eşitlikleri taraf tarafa toplanırsa

$$2g(\Phi X, \Phi Y) = g(X, \nabla_Y \xi) + g(Y, \nabla_X \xi). \quad (4.3.4)$$

elde edilir. (4.3.4) ifadesinde $Y = \xi$ alınırsa, $g(X, \nabla_\xi \xi) = 0$ bulunur. Bu nedenle, eğer $TM$ bir parakontakt C-G metrik tanjant demet ise, bu taktirde $M$ üzerinde

$$g(X, \nabla_\xi \xi) = 0 \quad (4.3.5)$$

olur.

**Sonuç 4.3.1.** *$M^{(2n+1)}$, $(\Phi, \eta, \xi, g)$ hemen hemen parakontakt metrik yapısıyla birlikte bir hemen hemen parakontakt metrik manifold ve $TM$ de $(\tilde{\Phi}, \tilde{\eta}, \tilde{\xi}, \tilde{g})$ parakontakt C-G metrik yapısıyla birlikte bir parakontakt C-G metrik tanjant demet olsun. Bu taktirde, $\forall \tilde{X} \in T_{(p,u)}TM$ için, $\tilde{N}^{(2)}(\tilde{X}, \tilde{\xi}) = 0$ ve $\tilde{N}^{(4)}(\tilde{X}) = 0$ dır. Burada $\tilde{\xi} \in T_{(p,u)}TM$ dir.*

**Tanım 4.3.2.** *Bir $(TM, \tilde{g})$ hemen hemen parakontakt C-G metrik tanjant demeti üzerindeki bir $\tilde{X}$ vektör alanına bir **Killing vektör alanı denir**, eğer $L_{\tilde{X}}\tilde{g} = 0$ şartı sağlanıyorsa.*

**Tanım 4.3.3.** *Eğer $\tilde{\xi}$, bir $TM$ parakontakt C-G metrik tanjant demeti üzerinde bir Killing vektör alanı ise, bu taktirde $TM$'ye bir **K-parakontakt C-G metrik tanjant demet** denir.*

Dolayısıyla, bu tanımlara göre aşağıdaki teorem ve sonuç ifade edilebilir:

**Teorem 4.3.1.** *$M^{(2n+1)}$, $(\Phi, \eta, \xi, g)$ parakontakt metrik yapısıyla birlikte bir parakontakt metrik manifold ve $TM$ de $(\tilde{\Phi}, \tilde{\eta}, \tilde{\xi}, \tilde{g})$ parakontakt C-G metrik yapısıyla birlikte bir parakontakt C-G metrik tanjant demet olsun. Bu taktirde $\tilde{\xi}$, $TM$ üzerinde bir Killing vektör alanı olamaz.*

**İspat.** $\forall \tilde{X}, \tilde{Y} \in T_{(p,u)}TM$ ve $\tilde{\xi} \in T_{(p,u)}TM$ için

$$\begin{aligned}
&(L_{\tilde{\xi}}\tilde{g})(\tilde{X},\tilde{Y}) \\
&= \tilde{\xi}(\tilde{g}(\tilde{X},\tilde{Y})) - \tilde{g}([\tilde{\xi},\tilde{X}],\tilde{Y}) - \tilde{g}(\tilde{X},[\tilde{\xi},\tilde{Y}]) \\
&= (L_{\xi^h}\tilde{g})(X^h,Y^h) + (L_{\xi^h}\tilde{g})(X^h,Y^v) + (L_{\xi^h}\tilde{g})(X^v,Y^h) \\
&\ + (L_{\xi^h}\tilde{g})(X^v,Y^v) + (L_{\xi^v}\tilde{g})(X^h,Y^h) + (L_{\xi^v}\tilde{g})(X^h,Y^v) \\
&\ + (L_{\xi^v}\tilde{g})(X^v,Y^h) + (L_{\xi^v}\tilde{g})(X^v,Y^v)
\end{aligned} \tag{4.3.6}$$

dir. Dolayısıyla, $(L_{\xi^i}\tilde{g})(X^j,Y^k)$, $i,j,k \in \{h,v\}$ terimleri hesaplanmalıdır.

$$\left.\begin{aligned}
&(L_{\xi^h}\tilde{g})(X^h,Y^h) \\
&= \xi^h(\tilde{g}(X^h,Y^h)) - \tilde{g}([\xi^h,X^h],Y^h) - \tilde{g}(X^h,[\xi^h,Y^h]) \\
&= \xi(g(X,Y)) - \tilde{g}([\xi,X]^h - (R(\xi,X)u)^v, Y^h) - \tilde{g}(X^h,[\xi,Y]^h - (R(\xi,Y)u)^v) \\
&= \xi(g(X,Y)) - g([\xi,X]\,,Y) - g(X,[\xi,Y] \\
&= (L_\xi g)(X,Y) \\
&\text{ve benzer şekilde,} \\
&(L_{\xi^h}\tilde{g})(X^h,Y^v) = \mp\tfrac{1}{2}g(R(\xi,X)\xi,Y), \\
&(L_{\xi^h}\tilde{g})(X^v,Y^h) = \mp\tfrac{1}{2}g(X,R(\xi,Y)\xi), \\
&(L_{\xi^h}\tilde{g})(X^v,Y^v) = \ (L_{\xi^v}\tilde{g})(X^h,Y^h) = 0, \\
&(L_{\xi^v}\tilde{g})(X^h,Y^v) = \tfrac{1}{2}g(\nabla_X\xi,Y), \\
&(L_{\xi^v}\tilde{g})(X^v,Y^h) = \tfrac{1}{2}g(X,\nabla_Y\xi), \\
&(L_{\xi^v}\tilde{g})(X^v,Y^v) = \pm\tfrac{1}{2}g(\Phi X,\Phi Y)
\end{aligned}\right\} \tag{4.3.7}$$

dir. (4.3.4) ve (4.3.7) ifadeleri (4.3.6)'da kullanılırsa,

$$\begin{aligned}
(L_{\tilde{\xi}}\tilde{g})(\tilde{X},\tilde{Y}) \ &= \ \frac{3}{2}g(X,\nabla_Y\xi) + \frac{3}{2}g(Y,\nabla_X\xi) \mp \frac{1}{2}g(R(\xi,X)\xi,Y) \\
&\mp\frac{1}{2}g(R(\xi,Y)\xi,X) \pm \frac{3}{4}\{g(X,\nabla_Y\xi) + g(Y,\nabla_X\xi)\}
\end{aligned} \tag{4.3.8}$$

ifadesine ulaşılır. Eğer $L_{\tilde{\xi}}\tilde{g} = 0$ ise, bu taktirde

$$5g(X,\nabla_Y\xi) + 5g(Y,\nabla_X\xi) + 2g(R(\xi,X)\xi,Y) + 2g(R(\xi,Y)\xi,X) = 0 \tag{4.3.9}$$

ve

$$7g(X,\nabla_Y\xi) + 7g(Y,\nabla_X\xi) - 2g(R(\xi,X)\xi,Y) - 2g(R(\xi,Y)\xi,X) = 0 \tag{4.3.10}$$

eşitliklerine sahip olunur. Böylece, (4.3.9) ve (4.3.10)'dan,

$$g(X, \nabla_Y \xi) + g(Y, \nabla_X \xi) = 0$$

elde edilir. O halde,

$$2g(\Phi X, \Phi Y) = g(X, \nabla_Y \xi) + g(Y, \nabla_X \xi)$$

şeklindeki (4.3.4) eşitliğinden dolayı bu bir çelişkidir. Bu nedenle $\tilde{\xi}$, $TM$ üzerinde bir Killing vektör alanı olamaz. □

**Sonuç 4.3.2.** *$M^{(2n+1)}$, $(\Phi, \eta, \xi, g)$ parakontakt metrik yapısıyla birlikte bir parakontakt metrik manifold ve $TM$ de $(\tilde{\Phi}, \tilde{\eta}, \tilde{\xi}, \tilde{g})$ parakontakt C-G metrik yapısıyla birlikte bir parakontakt C-G metrik tanjant demet olsun. Bu taktirde, $TM$ bir K-parakontakt C-G metrik tanjant demet olamaz.*

**Tanım 4.3.4.** *Eğer bir $TM$ parakontakt C-G metrik tanjant demeti normal ise, bu taktirde $TM$'ye bir **C-G para-Sasakian tanjant demet** denir.*

Dolayısıyla şu teoreme ulaşılır:

**Teorem 4.3.2.** *$(M^{(2n+1)}, \Phi, \eta, \xi, g)$ bir flat hemen hemen parakontakt metrik manifold ve $TM$ de $(\tilde{\Phi}, \tilde{\eta}, \tilde{\xi}, \tilde{g})$ parakontakt C-G metrik yapısıyla birlikte bir parakontakt C-G metrik tanjant demet olsun. Eğer*

$$d\tilde{\eta}^h(X^h, Y^h)\{5\xi^h + 2\xi^v\} = \eta([Y, X])\{2\xi^h + \xi^v\} \tag{4.3.11}$$

*şartı sağlanıyorsa, bu taktirde $TM$ bir C-G para-Sasakian tanjant demettir.*

**İspat.** (4.2.27)'den

$$\begin{aligned}
\tilde{N}^{(1)}(\tilde{X}, \tilde{Y}) &= \mp 2(R(X,Y)\xi)^h \pm 2(R(X,Y)\xi)^v \pm \eta(Y)(R(X,\xi)\xi)^h \\
&\mp \eta(Y)(R(X,\xi)\xi)^v \pm \eta(X)(R(\xi,Y)\xi)^h \mp \eta(X)(R(\xi,Y)\xi)^v + 2g(X, \nabla_Y \xi)\xi^v \\
&+ 5g(X, \nabla_Y \xi)\xi^h - 2g(Y, \nabla_X \xi)\xi^v - 5g(Y, \nabla_X \xi)\xi^h - 4\eta(\nabla_X Y)\xi^h \\
&- 2\eta(\nabla_X Y)\xi^v + 4\eta(\nabla_Y X)\xi^h + 2\eta(\nabla_Y X)\xi^v + \frac{1}{2}\eta(X)g(Y, \nabla_\xi \xi)\xi^v \\
&+ \eta(X)g(Y, \nabla_\xi \xi)\xi^h - \frac{1}{2}\eta(Y)g(X, \nabla_\xi \xi)\xi^v - \eta(Y)g(X, \nabla_\xi \xi)\xi^h
\end{aligned}$$

olduğunu biliyoruz. O halde, hipotez gereğince $M^{2n+1}$'in flat olması, $(TM, \tilde{\Phi}, \tilde{\eta}, \tilde{\xi}, \tilde{g})$ parakontakt C-G metrik tanjant demeti üzerinde her $X$ vektör alanı için

$$g(X, \nabla_\xi \xi) = 0$$

olması ve (4.2.14) eşitlikleri kullanılırsa

$$\begin{aligned}
\tilde{N}^{(1)}(\tilde{X}, \tilde{Y}) &= 2g(X, \nabla_Y \xi)\xi^v + 5g(X, \nabla_Y \xi)\xi^h - 2g(Y, \nabla_X \xi)\xi^v \\
&\quad - 5g(Y, \nabla_X \xi)\xi^h - 4\eta(\nabla_X Y)\xi^h - 2\eta(\nabla_X Y)\xi^v + 4\eta(\nabla_Y X)\xi^h \\
&\quad + 2\eta(\nabla_Y X)\xi^v \\
&= -2\{g(Y, \nabla_X \xi) - g(X, \nabla_Y \xi)\}\xi^v - 5\{g(Y, \nabla_X \xi) - g(X, \nabla_Y \xi)\}\xi^h \\
&\quad - 4\eta([X, Y])\xi^h - 2\eta([X, Y])\xi^v \\
&= -4d\tilde{\eta}^h(X^h, Y^h)\xi^v - 10d\tilde{\eta}^h(X^h, Y^h)\xi^h - 4\eta([X, Y])\xi^h - 2\eta([X, Y])\xi^v
\end{aligned}$$

elde edilir. Dolayısıyla, (4.3.11) kullanılırsa her $\tilde{X}, \tilde{Y}$ vektör alanı için

$$\tilde{N}^{(1)}(\tilde{X}, \tilde{Y}) = 0$$

olur ve Teorem 4.2.2'den ispat tamamlanır. □

## 4.4 Cheeger-Gromoll Metrikli Hemen Hemen Parakontakt Tanjant Demetlerin Eğrilikleri

Bu alt bölümde, bir $TM$ hemen hemen parakontakt C-G metrik tanjant demetinin eğrilikleri çalışılmaktadır. Bu nedenle, öncelikle $\tilde{g}$ C-G metriğiyle donatılmış bir $TM$ tanjant demetinin Riemann eğrilikleri verilmektedir. Ardından bir $TM$ hemen hemen parakontakt C-G metrik tanjant demetinin $\tilde{R}$ Riemann eğrilik tensörü ve $\tilde{K}$ kesitsel eğriliği ile ilgili bazı sonuçlar ifade edilmektedir. Son olarak da bir $TM$ tanjant demetinin ortonormal bazları ifade edilerek bu bazlar yardımıyla, $TM$ hemen hemen parakontakt C-G metrik tanjant demetinin $\tilde{S}$ Ricci eğriliği ve $\tilde{\sigma}$ skalar eğriliği elde edilmektedir.

**Önerme 4.4.1.** *[6]. $\tilde{R}$, $\tilde{g}$ C-G metriğiyle donatılmış bir $TM$ tanjant demetinin Riemann eğrilik tensörü olsun.*

*Eğer $X, Y, Z$ $M$'nin $p$ noktasındaki tanjant vektörler ise, bu taktirde*

$$\left.\begin{aligned}
\tilde{R}(X^h,Y^h)Z^h &= (R(X,Y)Z)^h - \tfrac{1}{4\alpha}\{R(u,R(Y,Z)u)X \\
&\quad - R(u,R(X,Z)u)Y - 2R(u,R(X,Y)u)Z\}^h \\
&\quad + \tfrac{1}{2}((\nabla_Z R)(X,Y)u)^v, \\
\tilde{R}(X^h,Y^h)Z^v &= (R(X,Y)Z)^v + \tfrac{1}{2\alpha}\{(\nabla_X R)(u,Z)Y - (\nabla_Y R)(u,Z)X\}^h \\
&\quad - \tfrac{1}{4\alpha}\{(R(X,R(u,Z)Y)u - R(Y,R(u,Z)X)u)^v \\
&\quad + 4\tilde{g}(Z^v,U)(R(X,Y)u)^v\} + \tfrac{1+\alpha}{\alpha}\tilde{g}((R(X,Y)u)^v,Z^v)U, \\
\tilde{R}(X^h,Y^v)Z^h &= \tfrac{1}{2\alpha}((\nabla_X R)(u,Y)Z)^h + \tfrac{1}{2}(R(X,Z)Y)^v \\
&\quad - \tfrac{1}{4\alpha}\{(R(X,R(u,Y)Z)u)^v + 2g(Y,u)(R(X,Z)u)^v\} \\
&\quad + \tfrac{1+\alpha}{2\alpha}\tilde{g}((R(X,Z)u)^v,Y^v)U, \\
\tilde{R}(X^h,Y^v)Z^v &= -\tfrac{1}{2\alpha}(R(Y,Z)X)^h + \tfrac{1}{2\alpha^2}\{g(Y,u)(R(u,Z)X)^h \\
&\quad - g(Z,u)(R(u,Y)X)^h\} - \tfrac{1}{4\alpha^2}(R(u,Y)R(u,Z)X)^h, \\
\tilde{R}(X^v,Y^v)Z^h &= \tfrac{1}{\alpha}(R(X,Y)Z)^h \\
&\quad + \tfrac{1}{4\alpha^2}\{R(u,X)R(u,Y)Z - R(u,Y)R(u,X)Z\}^h \\
&\quad + \tfrac{1}{\alpha^2}\{g(Y,u)(R(u,X)Z)^h - g(X,u)(R(u,Y)Z)^h\}, \\
\tilde{R}(X^v,Y^v)Z^v &= \tfrac{\alpha+2}{\alpha^2}\{\tilde{g}(X^v,Z^v)g(Y,u)U - \tilde{g}(Y^v,Z^v)g(X,u)U\} \\
&\quad + \tfrac{1+\alpha+\alpha^2}{\alpha^2}\{\tilde{g}(Y^v,Z^v)X^v - \tilde{g}(X^v,Z^v)Y^v\} \\
&\quad + \tfrac{\alpha+2}{\alpha^2}\{g(X,u)g(Z,u)Y^v - g(Y,u)g(Z,u)X^v\}
\end{aligned}\right\} \tag{4.4.1}$$

*dir. Burada $R$, $M$'nin Riemann eğrilik tensörüdür.*

**Teorem 4.4.1.** *$(M^{(2n+1)}, \Phi, \eta, \xi, g)$ bir para-Sasakian manifold olsun. Bu taktirde, $(TM, \tilde{\Phi}, \tilde{\eta}, \tilde{\xi}, \tilde{g})$ hemen hemen parakontakt C-G metrik tanjant demeti üzerinde*

$$\left.\begin{aligned}
\tilde{R}(X^h,Y^h)\xi^h &= \tfrac{11}{8}\{\eta(X)Y - \eta(Y)X\}^h, \\
\tilde{R}(X^h,Y^h)\xi^v &= \tfrac{1}{2}\{\eta(X)Y - \eta(Y)X\}^v, \\
\tilde{R}(X^h,Y^v)\xi^h &= \tfrac{1}{8}\{4g(X,Y)\xi^v - 2\eta(Y)X^v - \eta(X)Y^v \\
&\quad - \eta(X)\eta(Y)\xi^v \mp 3\eta(X)\eta(Y)U \pm 3g(X,Y)U\}, \\
\tilde{R}(X^h,Y^v)\xi^v &= \tfrac{1}{8}\{\eta(X)Y - g(X,Y)\xi\}^h, \\
\tilde{R}(X^v,Y^v)\xi^h &= \tfrac{1}{4}\{\eta(X)Y - \eta(Y)X\}^h, \\
\tilde{R}(X^v,Y^v)\xi^v &= \tfrac{3}{4}\{\eta(Y)X - \eta(X)Y\}^v
\end{aligned}\right\} \tag{4.4.2}$$

*dir.*

**İspat.** Eğer $TM$ bir hemen hemen parakontakt C-G metrik tanjant demet ise, bu taktirde (4.4.1)'den

$$\left.\begin{aligned}
\tilde{R}(X^h,Y^h)\xi^h &= (R(X,Y)\xi)^h - \tfrac{1}{8}\{R(\xi,R(Y,\xi)\xi)X \\
&\quad - R(\xi,R(X,\xi)\xi)Y - 2R(\xi,R(X,Y)\xi)\xi\}^h \\
&\quad \mp \tfrac{1}{2}((\nabla_\xi R)(X,Y)\xi)^v, \\
\tilde{R}(X^h,Y^h)\xi^v &= \tfrac{1}{2}(R(X,Y)\xi)^v, \\
\tilde{R}(X^h,Y^v)\xi^h &= \mp\tfrac{1}{4}((\nabla_X R)(\xi,Y)\xi)^h + \tfrac{1}{2}(R(X,\xi)Y)^v \\
&\quad - \tfrac{1}{8}\{(R(X,R(\xi,Y)\xi)\xi)^v + 2\eta(Y)(R(X,\xi)\xi)^v\} \\
&\quad \mp \tfrac{3}{8}g(R(X,\xi)\xi,Y)U, \\
\tilde{R}(X^h,Y^v)\xi^v &= -\tfrac{1}{8}(R(Y,\xi)X)^h, \\
\tilde{R}(X^v,Y^v)\xi^h &= \tfrac{1}{2}(R(X,Y)\xi)^h \\
&\quad + \tfrac{1}{16}\{R(\xi,X)R(\xi,Y)\xi - R(\xi,Y)R(\xi,X)\xi\}^h \\
&\quad + \tfrac{1}{4}\{\eta(Y)(R(\xi,X)\xi)^h - \eta(X)(R(\xi,Y)\xi)^h\}, \\
\tilde{R}(X^v,Y^v)\xi^v &= \tfrac{3}{4}\{\eta(Y)X^v - \eta(X)Y^v\}
\end{aligned}\right\} \tag{4.4.3}$$

olur. İyi bilinir ki [41], bir $M$ para-Sasakian manifoldu üzerinde

$$\nabla_X\xi = \Phi X, \tag{4.4.4}$$

$$R(X,Y)\xi = \eta(X)Y - \eta(Y)X \tag{4.4.5}$$

ve

$$R(\xi,X)Y = \eta(Y)X - g(X,Y)\xi \tag{4.4.6}$$

dir. Dolayısıyla, (4.4.4), (4.4.5) ve (4.4.6) eşitlikleri (4.4.3)'te kullanılırsa, (4.4.2) eşitliklerine ulaşılır. □

Şimdi, bir $TM$ hemen hemen parakontakt C-G metrik tanjant demetinin $\tilde{K}$ kesitsel eğriliğini hesaplayalım:

$X$ ve $Y$, $C^\infty(TM)$'de iki ortonormal vektör alanı ve $K$ da bir $M$ hemen hemen parakontakt metrik manifoldun kesitsel eğriliği olsun.

Bu taktirde, (4.4.1)'den

$$\begin{aligned}
\tilde{K}(X^h, Y^h) &= \frac{\tilde{g}(\tilde{R}(X^h, Y^h)Y^h, X^h)}{\tilde{g}(X^h, X^h)\tilde{g}(Y^h, Y^h) - \tilde{g}(X^h, Y^h)^2} \\
&= \frac{\tilde{g}((R(X,Y)Y)^h + \frac{3}{8}(R(\xi, R(X,Y)\xi)Y)^h \mp \frac{1}{2}((\nabla_Y R)(X,Y)\xi)^v, X^h)}{g(X,X)g(Y,Y) - g(X,Y)^2} \\
&= K(X,Y) - \frac{3}{8}\|R(X,Y)\xi\|^2,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\tilde{K}(X^h, Y^v) &= \frac{\tilde{g}(\tilde{R}(X^h, Y^v)Y^v, X^h)}{\tilde{g}(X^h, X^h)\tilde{g}(Y^v, Y^v) - \tilde{g}(X^h, Y^v)^2} \\
&= \frac{\tilde{g}(-\frac{1}{16}(R(\xi, Y)R(\xi, Y)X)^h, X^h)}{g(X,X)\frac{1}{2}\{g(Y,Y) + \eta(Y)^2\}} \qquad (4.4.7) \\
&= \frac{1}{8}\frac{\|R(\xi, Y)X\|^2}{1 + \eta(Y)^2},
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\tilde{K}(X^v, Y^v) &= \frac{\tilde{g}(\tilde{R}(X^v, Y^v)Y^v, X^v)}{\tilde{g}(X^v, X^v)\tilde{g}(Y^v, Y^v) - \tilde{g}(X^v, Y^v)^2} \\
&= \frac{\tilde{g}(\pm\frac{1}{2}\eta(X)U + \frac{7}{8}X^v - \frac{1}{8}\eta(Y)^2X^v + \frac{1}{8}\eta(X)\eta(Y)Y^v, X^v)}{\frac{1}{4}\{1 + \eta(X)^2 + \eta(Y)^2\}} \\
&= \frac{1}{4}\left(\frac{7 - \eta(X)^2 - \eta(Y)^2}{1 + \eta(X)^2 + \eta(Y)^2}\right)
\end{aligned}$$

eşitliklerine ulaşılır.

Dolayısıyla şu sonuç ifade edilebilir:

**Sonuç 4.4.1.** *$(M^{(2n+1)}, \Phi, \eta, \xi, g)$ bir para-Sasakian manifold, $(TM, \tilde{\Phi}, \tilde{\eta}, \tilde{\xi}, \tilde{g})$ $M$'nin bir hemen hemen parakontakt C-G metrik tanjant demeti ve $K(X, \xi)$ de $M$'nin $\xi$'yi ihtiva eden bir $\Pi = Sp\{X, \xi\}$ düzleminin kesitsel eğriliği olsun. Bu taktirde, $TM$ üzerinde*

$$\tilde{K}(X^h, \xi^h) = -\frac{11}{8}, \ \tilde{K}(X^h, \xi^v) = 0, \ \tilde{K}(X^v, \xi^v) = \frac{3}{4}$$

*dir.*

Şimdi de, bir $TM$ hemen hemen parakontakt C-G metrik tanjant demetinin Ricci eğriliği ve skalar eğriliği elde edilecektir.

Bunun için öncelikle, $(p, u)$ noktasında $TM$ tanjant demetinin $T_{(p,u)}TM$ tanjant uzayı için ortonormal bazı hatırlayalım:

$\{e_1, ..., e_n\}$ $p$ noktasında $M$'nin $T_pM$ tanjant uzayı için $e_1 = \frac{u}{r}$ olacak şekilde bir ortonormal baz olsun. Bu taktirde, $T_{(p,u)}TM$'nin

$$f_i = e_i^h,\ f_{n+1} = e_1^v,\ f_{n+j} = \sqrt{\alpha} e_j^v$$

olacak şekilde bir $\{f_1, ..., f_{2n}\}$ ortonormal bazı vardır ki burada $i \in \{1, ..., n\}$ ve $j \in \{2, ..., n\}$ dir [9].

$M$ hemen hemen parakontakt metrik manifoldunun boyutunu (2n+1) olarak aldığımızdan, $(p, u)$ noktasında $TM$ hemen hemen parakontakt C-G metrik tanjant demetinin $T_{(p,u)}TM$ tanjant uzayı için $\{f_1, ..., f_{4n+2}\}$ ortonormal bazı

$$f_i = e_i^h,\ f_{2n+2} = e_1^v,\ f_{2n+j} = \sqrt{\alpha} e_{j-1}^v, i \in \{1, ..., 2n+1\},\ j \in \{3, ..., 2n+2\}$$

ve dolayısıyla

$$f_1 = e_1^h = \mp\xi^h,\ f_i = e_i^h,\ i \in \{2, ..., 2n+1\}$$

ve

$$f_{2n+2} = e_1^v = \mp\xi^v,\ f_{2n+j} = \sqrt{2} e_{j-1}^v,\ j \in \{3, ..., 2n+2\}$$

şeklindedir.

Bu hazırlıklardan sonra, bir $TM$ hemen hemen parakontakt C-G metrik tanjant demetinin Ricci eğriliği ve skalar eğriliği bulunabilir.

**Önerme 4.4.2.** *$(M^{(2n+1)}, \Phi, \eta, \xi, g)$ bir para-Sasakian manifold olsun. Bu taktirde, bir $TM$ hemen hemen parakontakt C-G metrik tanjant demetinin $\tilde{S}$ Ricci eğriliği için*

$$\begin{aligned}
\tilde{S}(X^h, Y^h) &= S(X, Y) - \frac{1}{4} g(\Phi X, \Phi Y) - \frac{n}{2}\eta(X)\eta(Y), && (4.4.8)\\
\tilde{S}(X^h, Y^v) &= \mp\frac{1}{4}\sum_{i=2}^{2n+1}\{g(X, \Phi e_i)g(e_i, Y) + \eta(\nabla_{e_i} e_i)g(X, Y) \\
&\quad - g(R(X, e_i)\Phi e_i, Y)\}, && (4.4.9)\\
\tilde{S}(X^v, Y^h) &= \mp\frac{1}{4}\sum_{i=2}^{2n+1}\{g(Y, \Phi e_i)g(e_i, X) + \eta(\nabla_{e_i} e_i)g(X, Y) \\
&\quad - g(R(Y, e_i)\Phi e_i, X)\}, && (4.4.10)\\
\tilde{S}(X^v, Y^v) &= (\frac{14n-3}{8})g(X, Y) + (\frac{3-2n}{8})\eta(X)\eta(Y) && (4.4.11)
\end{aligned}$$

*dir. Burada $S$, $M$'nin Ricci eğriliğidir.*

**İspat.** Ricci eğriliğinin tanımından ve (4.4.1)'den,

$$
\begin{aligned}
&\tilde{S}(X^h,Y^h)\\
&=\sum_{k=1}^{4n+2}\tilde{g}(\tilde{R}(X^h,f_k)f_k,Y^h)\\
&=\tilde{g}(\tilde{R}(X^h,f_1)f_1,Y^h)+\sum_{i=2}^{2n+1}\tilde{g}(\tilde{R}(X^h,f_i)f_i,Y^h)+\tilde{g}(\tilde{R}(X^h,f_{2n+2})f_{2n+2},Y^h)\\
&\quad+\sum_{j=3}^{2n+2}\tilde{g}(\tilde{R}(X^h,f_{2n+j})f_{2n+j},Y^h)\\
&=\tilde{g}(\tilde{R}(X^h,\xi^h)\xi^h,Y^h)+\sum_{i=2}^{2n+1}\tilde{g}(\tilde{R}(X^h,e_i^h)e_i^h,Y^h)+\tilde{g}(\tilde{R}(X^h,\xi^v)\xi^v,Y^h)\\
&\quad+\sum_{j=3}^{2n+2}\tilde{g}(\tilde{R}(X^h,\sqrt{2}e_{j-1}^v)\sqrt{2}e_{j-1}^v,Y^h)\\
&=\tilde{g}((R(X,\xi)\xi)^h+\frac{3}{8}(R(\xi,R(X,\xi)\xi)\xi)^h\mp\frac{1}{2}((\nabla_\xi R)(X,\xi)\xi)^v,Y^h)\\
&\quad+\sum_{i=2}^{2n+1}\tilde{g}((R(X,e_i)e_i)^h+\frac{3}{8}(R(\xi,R(X,e_i)\xi)e_i)^h\\
&\quad\mp\frac{1}{2}((\nabla_{e_i}R)(X,e_i)\xi)^v,Y^h)+\tilde{g}(0,Y^h)\\
&\quad+2\sum_{j=3}^{2n+2}\tilde{g}(-\frac{1}{16}(R(\xi,e_{j-1})R(\xi,e_{j-1})X)^h,Y^h)\\
&=g(R(X,\xi)\xi,Y)+\sum_{i=2}^{2n+1}g(R(X,e_i)e_i,Y)-\frac{3}{8}g(R(Y,\xi)\xi,R(X,\xi)\xi)\\
&\quad-\frac{3}{8}\sum_{i=2}^{2n+1}g(R(Y,e_i)\xi,R(X,e_i)\xi)+\frac{1}{8}\sum_{j=3}^{2n+2}g(R(\xi,e_{j-1})Y,R(\xi,e_{j-1})X)
\end{aligned}
\tag{4.4.12}
$$

eşitliğine ulaşılır. (4.4.5) ve (4.4.6), (4.4.12)'de kullanılırsa,

$$
\begin{aligned}
\tilde{S}(X^h,Y^h) &= S(X,Y)-\frac{3}{8}g(\eta(Y)\xi-Y,\eta(X)\xi-X)\\
&\quad-\frac{3}{8}\sum_{i=2}^{2n+1}g(\eta(Y)e_i-\eta(e_i)Y,\eta(X)e_i-\eta(e_i)X)\\
&\quad+\frac{1}{8}\sum_{j=3}^{2n+2}g(\eta(Y)e_{j-1}-g(e_{j-1},Y)\xi,\eta(X)e_{j-1}-g(e_{j-1},X)\xi)
\end{aligned}
$$

bulunur ve bu eşitlik düzenlenirse (4.4.8) elde edilir.

Benzer şekilde, (4.4.4), (4.4.5) ve (4.4.6)'dan

$$
\begin{aligned}
&\tilde{S}(X^h, Y^v) \\
&= \sum_{k=1}^{4n+2} \tilde{g}(\tilde{R}(X^h, f_k)f_k, Y^v) \\
&= \tilde{g}(\tilde{R}(X^h, \xi^h)\xi^h, Y^v) + \sum_{i=2}^{2n+1} \tilde{g}(\tilde{R}(X^h, e_i^h)e_i^h, Y^v) + \tilde{g}(\tilde{R}(X^h, \xi^v)\xi^v, Y^v) \\
&\quad + \sum_{j=3}^{2n+2} \tilde{g}(\tilde{R}(X^h, \sqrt{2}e_{j-1}^v)\sqrt{2}e_{j-1}^v, Y^v) \\
&= \tilde{g}(\mp\frac{1}{2}((\nabla_\xi R)(X,\xi)\xi)^v, Y^v) + \sum_{i=2}^{2n+1} \tilde{g}(\mp\frac{1}{2}((\nabla_{e_i} R)(X,e_i)\xi)^v, Y^v) \\
&= \mp\frac{1}{4}\{g((\nabla_\xi R)(X,\xi)\xi), Y) + \eta((\nabla_\xi R)(X,\xi)\xi)\eta(Y) \\
&\quad + \sum_{i=2}^{2n+1} g((\nabla_{e_i} R)(X,e_i)\xi, Y) + \sum_{i=2}^{2n+1} \eta((\nabla_{e_i} R)(X,e_i)\xi)\eta(Y)\}
\end{aligned}
$$

olduğu görülür ve bu eşitlik düzenlenirse (4.4.9)'a ulaşılır.

Benzer hesaplamalarla

$$
\begin{aligned}
&\tilde{S}(X^v, Y^h) \\
&= \sum_{k=1}^{4n+2} \tilde{g}(\tilde{R}(X^v, f_k)f_k, Y^h) \\
&= \tilde{g}(\tilde{R}(X^v, \xi^h)\xi^h, Y^h) + \sum_{i=2}^{2n+1} \tilde{g}(\tilde{R}(X^v, e_i^h)e_i^h, Y^h) + \tilde{g}(\tilde{R}(X^v, \xi^v)\xi^v, Y^h) \\
&\quad + \sum_{j=3}^{2n+2} \tilde{g}(\tilde{R}(X^v, \sqrt{2}e_{j-1}^v)\sqrt{2}e_{j-1}^v, Y^h) \\
&= \tilde{g}(\pm\frac{1}{4}((\nabla_\xi R)(\xi,X)\xi)^h, Y^h) + \sum_{i=2}^{2n+1} \tilde{g}(\pm\frac{1}{4}((\nabla_{e_i} R)(\xi,X)e_i)^h, Y^h)
\end{aligned}
$$

olup bu eşitlik düzenlenirse (4.4.10) ve son olarak da

$$
\begin{aligned}
\tilde{S}(X^v, Y^v) &= \sum_{k=1}^{4n+2} \tilde{g}(\tilde{R}(X^v, f_k)f_k, Y^v) \\
&= \tilde{g}(\tilde{R}(X^v, \xi^h)\xi^h, Y^v) + \sum_{i=2}^{2n+1} \tilde{g}(\tilde{R}(X^v, e_i^h)e_i^h, Y^v) \\
&\quad + \tilde{g}(\tilde{R}(X^v, \xi^v)\xi^v, Y^v) + \sum_{j=3}^{2n+2} \tilde{g}(\tilde{R}(X^v, \sqrt{2}e_{j-1}^v)\sqrt{2}e_{j-1}^v, Y^v)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
= \;& \tilde{g}(\frac{1}{8}(R(\xi,R(\xi,X)\xi)\xi)^v,Y^v) + \sum_{i=2}^{2n+1}\tilde{g}(\frac{1}{8}(R(e_i,R(\xi,X)e_i)\xi)^v,Y^v) \\
& + \tilde{g}(\frac{3}{4}X^v - \frac{3}{4}\eta(X)\xi^v,Y^v) + 2\sum_{j=3}^{2n+2}\tilde{g}(\mp\frac{1}{2}g(X,e_{j-1})\eta(e_{j-1})U \\
& \pm\frac{1}{2}g(e_{j-1},e_{j-1})\eta(X)U + \frac{7}{8}g(e_{j-1},e_{j-1})X^v - \frac{7}{8}g(X,e_{j-1})e^v_{j-1} \\
& - \frac{1}{8}\eta(e_{j-1})\eta(e_{j-1})X^v + \frac{1}{8}\eta(X)\eta(e_{j-1})e^v_{j-1},Y^v)
\end{aligned}
$$

olup bu eşitlik düzenlenirse (4.4.11) elde edilir. Yukarıdaki hesaplamalarda, $\eta(e_i) = 0$, $i \in \{2,...,2n+1\}$ dır. Çünkü $\{e_i\}$, $M$ için $e_1 = \xi$ olacak şekilde bir ortonormal bazdır. □

Dolayısıyla bu önermeden aşağıdaki teorem verilebilir:

**Teorem 4.4.2.** *$(M^{(2n+1)},\Phi,\eta,\xi,g)$ bir para-Sasakian manifold olsun. Bu taktirde, bir $TM$ hemen hemen parakontakt C-G metrik tanjant demetinin $\tilde{S}$ Ricci eğriliği*

$$
\begin{aligned}
& \tilde{S}(\tilde{X},\tilde{Y}) = S(X,Y) + \left(\frac{6n-5}{8}\right)g(\Phi X,\Phi Y) + ng(X,Y) \\
& \mp\frac{1}{4}\sum_{i=2}^{2n+1}\{g(X,\Phi e_i)g(Y,e_i) + g(Y,\Phi e_i)g(X,e_i) - g(R(X,e_i)\Phi e_i,Y) \\
& \qquad - g(R(Y,e_i)\Phi e_i,X) + 2\eta(\nabla_{e_i}e_i)g(X,Y)\} \qquad (4.4.13)
\end{aligned}
$$

*dir.*

**İspat.** Ricci eğriliğinin tanımından,

$$
\begin{aligned}
\tilde{S}(\tilde{X},\tilde{Y}) &= \sum_{k=1}^{4n+2}\tilde{g}(\tilde{R}(\tilde{X},f_k)f_k,\tilde{Y}) \\
&= \sum_{k=1}^{4n+2}\tilde{g}(\tilde{R}(X^h,f_k)f_k,Y^h) + \sum_{k=1}^{4n+2}\tilde{g}(\tilde{R}(X^h,f_k)f_k,Y^v) \\
&\quad + \sum_{k=1}^{4n+2}\tilde{g}(\tilde{R}(X^v,f_k)f_k,Y^h) + \sum_{k=1}^{4n+2}\tilde{g}(\tilde{R}(X^v,f_k)f_k,Y^v) \\
&= \tilde{S}(X^h,Y^h) + \tilde{S}(X^h,Y^v) + \tilde{S}(X^v,Y^h) + \tilde{S}(X^v,Y^v) \qquad (4.4.14)
\end{aligned}
$$

dir. Böylece, (4.4.8)-(4.4.11) eşitlikleri (4.4.14)'te kullanılırsa, (4.4.13) ifadesine ulaşılır. □

**Teorem 4.4.3.** *$(M^{(2n+1)}, \Phi, \eta, \xi, g)$ bir para-Sasakian manifold olsun. Bu taktirde, bir $TM$ hemen hemen parakontakt C-G metrik tanjant demetinin $\tilde{\sigma}$ skalar eğriliği*

$$\tilde{\sigma} = \sigma - n + 7n^2$$

*dir. Burada $\sigma$, $M$'nin skalar eğriliğidir.*

**İspat.** Skalar eğriliğinin tanımından ve Önerme 4.4.2'den

$$\begin{aligned}
\tilde{\sigma} = \sum_{k=1}^{4n+2} \tilde{S}(f_k, f_k) &= \tilde{S}(f_1, f_1) + \sum_{i=2}^{2n+1} \tilde{S}(f_i, f_i) + \tilde{S}(f_{2n+2}, f_{2n+2}) \\
&\quad + \sum_{j=3}^{2n+2} \tilde{S}(f_{2n+j}, f_{2n+j}) \\
&= \tilde{S}(\xi^h, \xi^h) + \sum_{i=2}^{2n+1} \tilde{S}(e_i^h, e_i^h) + \tilde{S}(\xi^v, \xi^v) \\
&\quad + 2\sum_{j=3}^{2n+2} \tilde{S}(e_{j-1}^v, e_{j-1}^v) \\
&= S(\xi, \xi) + \sum_{i=2}^{2n+1} S(e_i, e_i) - \frac{n}{2} - \frac{n}{2} + \frac{3n}{2} + 4n(\frac{14n-3}{8}) \\
&= \sigma - n + 7n^2
\end{aligned}$$

olduğu görülür. □

# BÖLÜM 5

# CHEEGER-GROMOLL METRİKLİ METALİK TANJANT DEMETLER

Bu bölüm üç alt bölümden oluşmaktadır. Birinci alt bölümde, $p$ ve $q$ iki pozitif tamsayı olmak üzere $(p, q)$-metalik sayılar ve bir $M$ manifoldu üzerinde metalik yapı kavramları tanımlanarak $p$ ve $q$'nun çeşitli değerlerine göre metalik Riemannian yapıların bazı sınıflarından (golden, silver, bronze, subtle, cooper ve nickel Riemannian yapılar) bahsedilmektedir. İkinci alt bölümde, tanjant demetler üzerinde $\tilde{J}$ metalik yapısı tanımlanarak $N_{\tilde{J}}$ Nijenhuis tensörü yardımıyla $\tilde{J}$ metalik yapısının integrallenebilirlik şartı elde edilmekte ve ardından Cheeger-Gromoll metriğiyle donatılmış bir metalik tanjant demetin metalik Riemannian tanjant demet olma şartını veren teorem ispatlanmaktadır. Üçüncü alt bölümde ise, Cheeger-Gromoll metriğiyle donatılmış metalik Riemannian tanjant demetlerin bir sınıfı olan bir golden Riemannian tanjant demetin lokal olarak ayrıştırılabilir olmasıyla ilgili bir teorem verilmektedir.

## 5.1 Metalik Riemannian Yapılar

**Tanım 5.1.1.** *[43]. $p$ ve $q$ iki pozitif tamsayı olsun. Bu durumda,*

$$x^2 - px - q = 0$$

*denkleminin pozitif çözümüne* ***metalik ailenin bir üyesidir*** *denir.*

$$\sigma_{p,q} = \frac{p + \sqrt{p^2 + 4q}}{2}$$

*şeklinde ifade edilen bu sayılara $(p, q)$**-metalik sayılar** denir.*

**Tanım 5.1.2.** *[43]. Bir $M$ manifoldu üzerinde*

$$J^2 = pJ + qI, \tag{5.1.1}$$

*şartını sağlayan* $(1,1)$*-tipindeki bir* $J$ *polinomal yapısına* ***metalik yapı*** *denir. Burada* $p$ *ve* $q$ *pozitif tamsayılar ve* $I$ *da* $M$ *üzerindeki vektör alanlarının* $\chi(M)$ *Lie cebiri üzerinde özdeşlik operatörüdür.*

Riemann geometri, diferensiyel geometrinin iskeletini oluşturduğundan, şimdi bu yapı üzerine bir metrik ilave edelim.

**Tanım 5.1.3.** *[43].* $\chi(M)$*,* $M$ *üzerinde vektör alanlarının uzayı olsun. Eğer* $\forall X, Y \in \chi(M)$ *için*

$$g(JX, Y) = g(X, JY) \tag{5.1.2}$$

*şartı sağlanıyorsa, yani* $J$ *yapısı* $g$ *metriğine göre bir self-adjoint operatör ise,* $g$ *Riemann metriğine* $J$***-bağdaşabilir*** *denir.*

Metalik yapı için yukarıdaki şart,

$$g(JX, JY) = p.g(X, JY) + q.g(X, Y)$$

şartına denktir. Gerçekten,

$$\begin{aligned} g(JX, JY) &= g(X, J^2Y) = g(X, p.JY + q.Y) \\ &= p.g(X, JY) + q.g(X, Y) \end{aligned}$$

olduğu görülür.

**Tanım 5.1.4.** *[43].* $g$*,* $J$*-bağdaşabilir bir Riemannian metrik olmak üzere,* $J^2 = pJ + qI$ *şartını sağlayan bir* $J$ *metalik yapısıyla donatılmış* $(M, g)$ *Riemannian manifolduna bir* ***metalik Riemannian manifold*** *ve* $(g, J)$ *ye de* $M$ *üzerinde* ***metalik Riemannian yapı*** *denir.*

**Tanım 5.1.5.** *Eğer yukarıdaki tanımda* $p = q = 1$ *olarak alınırsa, bu taktirde* $(g, J)$ *yapısına* $M$ *üzerinde bir* ***golden Riemannian yapı*** *denir.*
*Benzer şekilde*

*eğer* $p = 2$ *ve* $q = 1$ *ise, bu taktirde* $(g, J)$ *yapısına* $M$ *üzerinde bir* ***silver Riemannian yapı;***

*eğer* $p = 3$ *ve* $q = 1$ *ise, bu taktirde* $(g, J)$ *yapısına* $M$ *üzerinde bir* ***bronze Riemannian yapı;***

*eğer $p = 4$ ve $q = 1$ ise, bu taktirde $(g, J)$ yapısına $M$ üzerinde bir* ***subtle Riemannian yapı****;*

*eğer $p = 1$ ve $q = 2$ ise, bu taktirde $(g, J)$ yapısına $M$ üzerinde bir* ***copper Riemannian yapı*** *ve*

*eğer $p = 1$ ve $q = 3$ ise, bu taktirde $(g, J)$ yapısına $M$ üzerinde bir* ***nickel Riemannian yapı*** *denir ( [43]).*

$J$, $M$ üzerinde $(1,1)$-tipinde bir tensör alanı, yani $J \in \mathfrak{F}_1^1(M)$ olsun. $(r, s)$-tipindeki bir $t$ tensör alanına $J$'ye göre bir **pür tensör alanı** denir, eğer $\forall X_1, X_2, ..., X_r \in \mathfrak{F}_0^1(M)$ ve $\forall \xi^1, \xi^2, ..., \xi^r \in \mathfrak{F}_1^0(M)$ için

$$\begin{aligned} t(JX_1, X_2, ..., X_s; \xi^1, \xi^2, ..., \xi^r) &= t(X_1, JX_2, ..., X_s; \xi^1, \xi^2, ..., \xi^r) \\ &\vdots \\ &= t(X_1, X_2, ..., JX_s; \xi^1, \xi^2, ..., \xi^r) \\ &= t(X_1, X_2, ..., X_s; J'\xi^1, \xi^2, ..., \xi^r) \\ &\vdots \\ &= t(X_1, X_2, ..., X_s; \xi^1, \xi^2, ..., J'\xi^r) \quad (5.1.3) \end{aligned}$$

ise, burada $J'$

$$(J'\xi)(X) = \xi(JX) = (\xi \circ J)(X), \ X \in \mathfrak{F}_0^1(M), \xi \in \mathfrak{F}_1^0(M).$$

şeklinde tanımlı $J$'nin adjoint operatörüdür.

Dolayısıyla bu tanıma göre, eğer $g$ Riemann metriği $J$-bağdaşabilir ise, bir pür tensör alanıdır.

Şimdi, ileride kullanılacak olan

$$\Phi_J : \mathfrak{F}_s^0(M) \to \mathfrak{F}_{s+1}^0(M)$$

şeklindeki $\Phi_J$ operatörünü tanımlayalım. $\Phi_J$ operatörü, $J$'ye göre bir pür tensör alanı olan $(0, s)$-tipindeki $t$ tensörüne uygulanırsa, $\forall X, Y_1, ..., Y_s \in \mathfrak{F}_0^1(M)$ için

$$(\Phi_J t)(X, Y_1, ..., Y_s) = (JX)t(Y_1, ..., Y_s) - Xt(JY_1, ..., Y_s) + \sum_{\lambda=1}^{s} t(Y_1, ..., (L_{Y_\lambda} J)X, ..., Y_s) \quad (5.1.4)$$

olur, burada $L_Y$, $Y$'ye göre Lie türevini belirtir [44].

**Önerme 5.1.1.** *[43]. Herbir $F$ hemen hemen çarpım yapısı, $M$ üzerinde*

$$J_1 = \frac{p}{2}I + \left(\frac{2\sigma_{p,q} - p}{2}\right)F, \quad J_2 = \frac{p}{2}I - \left(\frac{2\sigma_{p,q} - p}{2}\right)F$$

*şeklinde iki tane metalik yapı doğurur. Tersine, $M$ üzerindeki herbir $J$ metalik yapısı, bu manifold üzerinde*

$$F = \mp\left(\frac{2}{2\sigma_{p,q} - p}J - \frac{p}{2\sigma_{p,q} - p}I\right)$$

*şeklinde iki hemen hemen çarpım yapı doğurur.*

*Özel olarak, eğer $F$ hemen hemen çarpım yapısı Riemannian ise, bu taktirde $J_1$ ve $J_2$ de metalik Riemannian yapı olurlar.*

**İspat.** $F$ bir hemen hemen çarpım yapı, yani $F^2 = I$ olsun. Bu durumda, $J_1$'in bir metalik yapı olduğunu görelim:

$J_1 = \frac{p}{2}I + \left(\frac{2\sigma_{p,q}-p}{2}\right)F$ olduğundan, $J_1(X) = \frac{p}{2}X + \left(\frac{2\sigma_{p,q}-p}{2}\right)F(X)$ olur. O halde, $\sigma_{p,q}^2 = p.\sigma_{p,q} + q$ olduğu kullanılırsa

$$\begin{aligned}
&J_1^2(X)\\
&= J_1(J_1(X))\\
&= \frac{p}{2}J_1(X) + \left(\frac{2\sigma_{p,q} - p}{2}\right)F(J_1(X))\\
&= \frac{p}{2}\left(\frac{p}{2}X + \left(\frac{2\sigma_{p,q} - p}{2}\right)F(X)\right) + \left(\frac{2\sigma_{p,q} - p}{2}\right)\left(\frac{p}{2}F(X) + \left(\frac{2\sigma_{p,q} - p}{2}\right)F^2(X)\right)\\
&= \frac{p^2}{4}X + \left(\frac{2\sigma_{p,q}.p - p^2}{4}\right)F(X) + \left(\frac{2\sigma_{p,q}.p - p^2}{4}\right)F(X) + \left(\frac{2\sigma_{p,q} - p}{2}\right)^2 X\\
&= \frac{p^2}{4}X + \left(\frac{2\sigma_{p,q}.p - p^2}{2}\right)F(X) + \frac{4\sigma_{p,q}^2 - 4\sigma_{p,q}.p + p^2}{4}X\\
&= \frac{p^2}{4}X + \left(\frac{2\sigma_{p,q}.p - p^2}{2}\right)F(X) + \sigma_{p,q}^2.X - \sigma_{p,q}.p.X + \frac{p^2}{4}X\\
&= \frac{p^2}{2}X + \left(\frac{2\sigma_{p,q}.p - p^2}{2}\right)F(X) + \sigma_{p,q}^2.X - \sigma_{p,q}.p.X\\
&= p\left(\frac{p}{2}X + \left(\frac{2\sigma_{p,q} - p}{2}\right)F(X)\right) + \sigma_{p,q}^2.X - \sigma_{p,q}.p.X\\
&= p.J_1(X) + q.X
\end{aligned}$$

olduğu görülür. Dolayısıyla $F$ bir hemen hemen çarpım yapı iken $J_1$ bir metalik yapıdır. Benzer şekilde $J_2$'nin de bir metalik yapı olduğu görülebilir.

Tersine, $J$ bir metalik yapı, yani $J^2 = pJ+qI$ olsun. Bu durumda $F = \frac{2}{2\sigma_{p,q}-p}J - \frac{p}{2\sigma_{p,q}-p}I$ nin bir hemen hemen çarpım yapı olduğunu görelim:

$F(X) = \left(\frac{2}{2\sigma_{p,q}-p}\right) J(X) - \left(\frac{p}{2\sigma_{p,q}-p}\right) X$ ve $\sigma_{p,q} = \frac{p+\sqrt{p^2+4q}}{2}$ olduğundan

$$\begin{aligned}
F^2(X) &= \left(\frac{2}{2\sigma_{p,q}-p}\right) J(F(X)) - \left(\frac{p}{2\sigma_{p,q}-p}\right) F(X) \\
&= \left(\frac{2}{2\sigma_{p,q}-p}\right) \left(\left(\frac{2}{2\sigma_{p,q}-p}\right) J^2(X) - \left(\frac{p}{2\sigma_{p,q}-p}\right) J(X)\right) \\
&\quad - \left(\frac{p}{2\sigma_{p,q}-p}\right) \left(\left(\frac{2}{2\sigma_{p,q}-p}\right) J(X) - \left(\frac{p}{2\sigma_{p,q}-p}\right) X\right) \\
&= \frac{4}{(2\sigma_{p,q}-p)^2}(p.J(X)+q.X) - \frac{2p}{(2\sigma_{p,q}-p)^2}J(X) \\
&\quad - \frac{2p}{(2\sigma_{p,q}-p)^2}J(X) + \frac{p^2}{(2\sigma_{p,q}-p)^2}X \\
&= \frac{1}{(2\sigma_{p,q}-p)^2}\left(4p.J(X)+4q.X-2p.J(X)-2p.J(X)+p^2.X\right) \\
&= \frac{1}{4\sigma_{p,q}^2 - 4\sigma_{p,q}.p + p^2}\left(4q+p^2\right) X \\
&= X
\end{aligned}$$

elde edilir. Dolayısıyla $F = \frac{2}{2\sigma_{p,q}-p}J - \frac{p}{2\sigma_{p,q}-p}I$ bir hemen hemen çarpım yapısıdır. Benzer şekilde $F = -\left(\frac{2}{2\sigma_{p,q}-p}J - \frac{p}{2\sigma_{p,q}-p}I\right)$'nin de bir hemen hemen çarpım yapı olduğu görülebilir. □

$J^2 = pJ+qI$ şartını sağlayan $J$ metalik yapısı için ifade edilen bu Önerme, $p$ ve $q$'nun farklı durumlarına göre (Tanım 5.1.5'teki anlamda) aşağıdaki gibi ifade edilir:

**Uyarı 5.1.1.** ***i)*** *Herbir $F$ hemen hemen çarpım yapısı, $M$ üzerinde*

$$J_{1,2} = \frac{1}{2}(I \mp \sqrt{5}F)$$

*şeklinde iki tane golden yapı doğurur ve tersine, $M$ üzerindeki herbir $J$ golden yapısı, bu manifold üzerinde*

$$F = \mp\frac{1}{\sqrt{5}}\left(2J - I\right).$$

*şeklinde iki hemen hemen çarpım yapı doğurur.*

*Benzer şekilde,*

***ii)*** *herbir $F$ hemen hemen çarpım yapısı, $M$ üzerinde*

$$J_{1,2} = I \mp \sqrt{2}F$$

*şeklinde iki tane silver yapı doğurur ve tersine, $M$ üzerindeki herbir $J$ silver yapısı, bu manifold üzerinde*

$$F = \mp\frac{1}{\sqrt{2}}\left(J - I\right);$$

*şeklinde iki hemen hemen çarpım yapı doğurur;*

***iii)*** *herbir $F$ hemen hemen çarpım yapısı, $M$ üzerinde*

$$J_{1,2} = \frac{1}{2}(3I \mp \sqrt{13}F)$$

*şeklinde iki tane bronze yapı doğurur ve tersine, $M$ üzerindeki herbir $J$ bronze yapısı, bu manifold üzerinde*

$$F = \mp\frac{1}{\sqrt{13}}\left(2J - 3I\right);$$

*şeklinde iki hemen hemen çarpım yapı doğurur;*

***iv)*** *herbir $F$ hemen hemen çarpım yapısı, $M$ üzerinde*

$$J_{1,2} = 2I \mp \sqrt{5}F$$

*şeklinde iki tane subtle yapı doğurur ve tersine, $M$ üzerindeki herbir $J$ subtle yapısı, bu manifold üzerinde*

$$F = \mp\frac{1}{\sqrt{5}}\left(J - 2I\right);$$

*şeklinde iki hemen hemen çarpım yapı doğurur;*

***v)*** *herbir $F$ hemen hemen çarpım yapısı, $M$ üzerinde*

$$J_{1,2} = \frac{1}{2}(I \mp 3F)$$

*şeklinde iki tane copper yapı doğurur ve tersine, $M$ üzerindeki herbir $J$ copper yapısı, bu manifold üzerinde*

$$F = \mp\frac{1}{3}\left(2J - I\right)$$

*şeklinde iki hemen hemen çarpım yapı doğurur;*

***vi)*** *herbir $F$ hemen hemen çarpım yapısı, $M$ üzerinde*

$$J_{1,2} = \frac{1}{2}(I \mp \sqrt{13}F)$$

*şeklinde iki tane nickel yapı doğurur ve tersine, $M$ üzerindeki herbir $J$ nickel yapısı, bu manifold üzerinde*

$$F = \mp\frac{1}{\sqrt{13}}\left(2J - I\right).$$

*şeklinde iki hemen hemen çarpım yapı doğurur.*

## 5.2 Cheeger-Gromoll Metrikli Metalik Riemannian Tanjant Demetler

Bu alt bölümde, önce bir $TM$ tanjant demeti üzerinde bir $\tilde{J}$ metalik yapısı tanımlanarak $N_{\tilde{J}}$ Nijenhuis tensörü yardımıyla $\tilde{J}$ metalik yapısının integrallenebilirlik şartı elde edilmektedir. Ardından Cheeger-Gromoll metriğiyle donatılmış bir metalik tanjant demetin metalik Riemannian tanjant demet olma şartı bulunmaktadır.

**Tanım 5.2.1.** *$TM$ bir tanjant demet olsun. Bu durumda, her $X$ vektör alanı için*

$$\left.\begin{aligned} \tilde{J}X^h &= \tfrac{1}{2}\{pX^h + (2\sigma_{p,q} - p)X^v\} \\ \tilde{J}X^v &= \tfrac{1}{2}\{pX^v + (2\sigma_{p,q} - p)X^h\}, \end{aligned}\right\} \tag{5.2.1}$$

*şartını sağlayan $\tilde{J}$ yapısına **TM metalik yapı** denir.*

Burada,

$$\begin{aligned} &\tilde{J}^2X^h - p.\tilde{J}X^h - q.X^h \\ &= \frac{1}{2}\{p.\tilde{J}X^h + (2\sigma_{p,q} - p).\tilde{J}X^v\} - \frac{p}{2}\{p.X^h + (2\sigma_{p,q} - p).X^v\} - q.X^h \\ &= \frac{1}{2}\left\{\frac{p}{2}\{p.X^h + (2\sigma_{p,q} - p).X^v\} + \frac{2\sigma_{p,q} - p}{2}\{p.X^v + (2\sigma_{p,q} - p).X^h\}\right\} \\ &\quad - \frac{p}{2}\{p.X^h + (2\sigma_{p,q} - p).X^v\} - q.X^h \\ &= \frac{1}{4}\left\{p\{p.X^h + (2\sigma_{p,q} - p).X^v\} + (2\sigma_{p,q} - p)\left\{p.X^v + (2\sigma_{p,q} - p).X^h\right\}\right\} \\ &\qquad - 2p\{p.X^h + (2\sigma_{p,q} - p).X^v\} - 4q.X^h\} \\ &= \frac{1}{4}\{p^2.X^h + 2\sigma_{p,q}.p.X^v - p^2.X^v + 2\sigma_{p,q}.p.X^v - p^2.X^v \\ &\qquad + (2\sigma_{p,q} - p)^2.X^h - 2p^2.X^h - 4\sigma_{p,q}.p.X^v + 2p^2.X^v - 4q.X^h\} \\ &= (\sigma_{p,q}^2 - p.\sigma_{p,q} - q)X^h = 0 \end{aligned}$$

ve benzer şekilde

$$
\begin{aligned}
&\tilde{J}^2X^v - p.\tilde{J}X^v - q.X^v \\
&= \frac{1}{2}\{p.\tilde{J}X^v + (2\sigma_{p,q} - p).\tilde{J}X^h\} - \frac{p}{2}\{p.X^v + (2\sigma_{p,q} - p).X^h\} - q.X^v \\
&= \frac{1}{2}\left\{\frac{p}{2}\{p.X^v + (2\sigma_{p,q} - p).X^h\} + \frac{2\sigma_{p,q} - p}{2}\{p.X^h + (2\sigma_{p,q} - p).X^v\}\right\} \\
&\quad - \frac{p}{2}\{p.X^v + (2\sigma_{p,q} - p).X^h\} - q.X^v \\
&= \frac{1}{4}\left\{p\{p.X^v + (2\sigma_{p,q} - p).X^h\} + (2\sigma_{p,q} - p)\left\{p.X^h + (2\sigma_{p,q} - p).X^v\right\}\right\} \\
&\qquad - 2p\{p.X^v + (2\sigma_{p,q} - p).X^h\} - 4q.X^v\} \\
&= \frac{1}{4}\{p^2.X^v + 2\sigma_{p,q}.p.X^h - p^2.X^h + 2\sigma_{p,q}.p.X^h - p^2.X^h \\
&\qquad + (2\sigma_{p,q} - p)^2.X^v - 2p^2.X^v - 4\sigma_{p,q}.p.X^h + 2p^2.X^h - 4q.X^v\} \\
&= (\sigma_{p,q}^2 - p.\sigma_{p,q} - q)X^v \\
&= 0
\end{aligned}
$$

olup, (5.2.1) ile verilen $TM$ metalik yapısının $\tilde{J}^2 - p\tilde{J} - qI = 0$ şartını sağladığı, yani $TM$ tanjant demeti üzerinde bir metalik yapı olduğu görülebilir.

Dolayısıyla, $p$ ve $q$'nun farklı durumlarına göre $\tilde{J}$ golden, silver, bronze, subtle, copper ve nickel yapıları (Tanım 5.1.5'teki anlamda) aşağıda verilen uyarıdaki gibi ifade edilir:

**Uyarı 5.2.1.** *$TM$ tanjant demeti üzerinde $\tilde{J}$ golden yapısı*

$$
\left.\begin{aligned}
\tilde{J}X^h &= \tfrac{1}{2}\{X^h + \sqrt{5}X^v\} \\
\tilde{J}X^v &= \tfrac{1}{2}\{X^v + \sqrt{5}X^h\},
\end{aligned}\right\} \tag{5.2.2}
$$

*şeklinde; $\tilde{J}$ silver yapısı*

$$
\left.\begin{aligned}
\tilde{J}X^h &= X^h + \sqrt{2}X^v \\
\tilde{J}X^v &= X^v + \sqrt{2}X^h,
\end{aligned}\right\} \tag{5.2.3}
$$

*şeklinde; $\tilde{J}$ bronze yapısı*

$$
\left.\begin{aligned}
\tilde{J}X^h &= \tfrac{1}{2}\{3X^h + \sqrt{13}X^v\} \\
\tilde{J}X^v &= \tfrac{1}{2}\{3X^v + \sqrt{13}X^h\},
\end{aligned}\right\} \tag{5.2.4}
$$

*şeklinde;*

*$\tilde{J}$ subtle yapısı*

$$\left.\begin{aligned}\tilde{J}X^h &= 2X^h + \sqrt{5}X^v\\ \tilde{J}X^v &= 2X^v + \sqrt{5}X^h,\end{aligned}\right\} \tag{5.2.5}$$

*şeklinde; $\tilde{J}$ copper yapısı*

$$\left.\begin{aligned}\tilde{J}X^h &= \tfrac{1}{2}\{X^h + 3X^v\}\\ \tilde{J}X^v &= \tfrac{1}{2}\{X^v + 3X^h\}\end{aligned}\right\} \tag{5.2.6}$$

*şeklinde ve son olarak $\tilde{J}$ nickel yapısı ise*

$$\left.\begin{aligned}\tilde{J}X^h &= \tfrac{1}{2}\{X^h + \sqrt{13}X^v\}\\ \tilde{J}X^v &= \tfrac{1}{2}\{X^v + \sqrt{13}X^h\}.\end{aligned}\right\} \tag{5.2.7}$$

*şeklinde tanımlanır.*

$N_{\tilde{J}}(\tilde{X},\tilde{Y})$, $\forall \tilde{X},\tilde{Y} \in T_{(p,u)}TM$ için $TM$ tanjant demeti üzerindeki $\tilde{J}$ metalik yapısının

$$N_{\tilde{J}}(\tilde{X},\tilde{Y}) = [\tilde{J}\tilde{X},\tilde{J}\tilde{Y}] + \tilde{J}^2[\tilde{X},\tilde{Y}] - \tilde{J}[\tilde{J}\tilde{X},\tilde{Y}] - \tilde{J}[\tilde{X},\tilde{J}\tilde{Y}] \tag{5.2.8}$$

şeklinde tanımlı Nijenhuis tensör alanı olsun.

(5.1.1), (5.2.1), (5.2.8) ve Teorem (2.2.1)'den

$$\begin{aligned}
&N_{\tilde{J}}(X^h,Y^h)\\
&= [\tilde{J}X^h,\tilde{J}Y^h] + \tilde{J}^2[X^h,Y^h] - \tilde{J}[\tilde{J}X^h,Y^h] - \tilde{J}[X^h,\tilde{J}Y^h]\\
&= [\frac{p}{2}X^h + (\frac{2\sigma_{p,q}-p}{2})X^v, \frac{p}{2}Y^h + (\frac{2\sigma_{p,q}-p}{2})Y^v] + \tilde{J}^2[X^h,Y^h]\\
&\quad - \tilde{J}[\frac{p}{2}X^h + (\frac{2\sigma_{p,q}-p}{2})X^v, Y^h] - \tilde{J}[X^h, \frac{p}{2}Y^h + (\frac{2\sigma_{p,q}-p}{2})Y^v]\\
&= \frac{p^2}{4}[X^h,Y^h] + \frac{p}{2}(\frac{2\sigma_{p,q}-p}{2})(\nabla_X Y)^v - \frac{p}{2}(\frac{2\sigma_{p,q}-p}{2})(\nabla_Y X)^v\\
&\quad + p\tilde{J}[X,Y]^h - p\tilde{J}(R(X,Y)u)^v + q[X,Y]^h - q(R(X,Y)u)^v - \frac{p}{2}\tilde{J}[X,Y]^h\\
&\quad + \frac{p}{2}\tilde{J}(R(X,Y)u)^v + (\frac{2\sigma_{p,q}-p}{2})\tilde{J}(\nabla_Y X)^v - \frac{p}{2}\tilde{J}[X,Y]^h\\
&\quad + \frac{p}{2}\tilde{J}(R(X,Y)u)^v - (\frac{2\sigma_{p,q}-p}{2})\tilde{J}(\nabla_X Y)^v\\
&= \left(\frac{p^2}{4} + q - (\frac{2\sigma_{p,q}-p}{2})^2\right)[X,Y]^h - \left(\frac{p^2}{4} + q\right)(R(X,Y)u)^v\\
&= -\left(\frac{p^2+4q}{4}\right)(R(X,Y)u)^v
\end{aligned} \tag{5.2.9}$$

ifadesine ve benzer şekilde

$$
\begin{aligned}
& N_{\tilde{J}}(X^h, Y^v) \\
& = [\tilde{J}X^h, \tilde{J}Y^v] + \tilde{J}^2[X^h, Y^v] - \tilde{J}[\tilde{J}X^h, Y^v] - \tilde{J}[X^h, \tilde{J}Y^v] \\
& = [\frac{p}{2}X^h + (\frac{2\sigma_{p,q} - p}{2})X^v, \frac{p}{2}Y^v + (\frac{2\sigma_{p,q} - p}{2})Y^h] + \tilde{J}^2(\nabla_X Y)^v \\
& \quad - \tilde{J}[\frac{p}{2}X^h + (\frac{2\sigma_{p,q} - p}{2})X^v, Y^v] - \tilde{J}[X^h, \frac{p}{2}Y^v + (\frac{2\sigma_{p,q} - p}{2})Y^h] \\
& = (\frac{2\sigma_{p,q} - p}{2})^2(R(X,Y)u)^h \\
& = \left(\frac{p^2 + 4q}{4}\right)(R(X,Y)u)^h, \qquad (5.2.10)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
& N_{\tilde{J}}(X^v, Y^h) \\
& = [\tilde{J}X^v, \tilde{J}Y^h] + \tilde{J}^2[X^v, Y^h] - \tilde{J}[\tilde{J}X^v, Y^h] - \tilde{J}[X^v, \tilde{J}Y^h] \\
& = [\frac{p}{2}X^v + (\frac{2\sigma_{p,q} - p}{2})X^h, \frac{p}{2}Y^h + (\frac{2\sigma_{p,q} - p}{2})Y^v] - \tilde{J}^2(\nabla_Y X)^v \\
& \quad - \tilde{J}[\frac{p}{2}X^v + (\frac{2\sigma_{p,q} - p}{2})X^h, Y^h] - \tilde{J}[X^v, \frac{p}{2}Y^h + (\frac{2\sigma_{p,q} - p}{2})Y^v] \\
& = (\frac{2\sigma_{p,q} - p}{2})^2(R(X,Y)u)^h \\
& = \left(\frac{p^2 + 4q}{4}\right)(R(X,Y)u)^h \qquad (5.2.11)
\end{aligned}
$$

ve

$$
\begin{aligned}
& N_{\tilde{J}}(X^v, Y^v) \\
& = [\tilde{J}X^v, \tilde{J}Y^v] + \tilde{J}^2[X^v, Y^v] - \tilde{J}[\tilde{J}X^v, Y^v] - \tilde{J}[X^v, \tilde{J}Y^v] \\
& = [\frac{p}{2}X^v + (\frac{2\sigma_{p,q} - p}{2})X^h, \frac{p}{2}Y^v + (\frac{2\sigma_{p,q} - p}{2})Y^h] \\
& \quad - \tilde{J}[\frac{p}{2}X^v + (\frac{2\sigma_{p,q} - p}{2})X^h, Y^v] - \tilde{J}[X^v, \frac{p}{2}Y^v + (\frac{2\sigma_{p,q} - p}{2})Y^h] \\
& = -(\frac{2\sigma_{p,q} - p}{2})^2(R(X,Y)u)^v \\
& = -\left(\frac{p^2 + 4q}{4}\right)(R(X,Y)u)^v. \qquad (5.2.12)
\end{aligned}
$$

ifadelerine ulaşılır. Bu nedenle, (5.2.9)-(5.2.12)'den aşağıdaki Teorem elde edilir:

**Teorem 5.2.1.** *$TM$ tanjant demeti üzerindeki $\tilde{J}$ metalik yapısının integrallenebilir olması için gerek ve yeter şart $M$'nin flat olması, yani $R \equiv 0$ olmasıdır.*

**İspat.** Eğer $\tilde{J}$ integrallenebilir ise, bu taktirde $N \equiv 0$ dır. Dolayısıyla, (5.2.9)-(5.2.12) ifadelerinden $R \equiv 0$ olur. Tersine eğer $M$ flat, yani $R \equiv 0$ ise, bu taktirde (5.2.9)-(5.2.12)'den $N \equiv 0$ olur. Bu nedenle, ispat tamamlanır. □

Şimdi, $\forall \tilde{X}, \tilde{Y} \in T_{(p,u)}TM$ için

$$\tilde{G}(\tilde{X}, \tilde{Y}) = \tilde{g}(\tilde{J}\tilde{X}, \tilde{Y}) - \tilde{g}(\tilde{X}, \tilde{J}\tilde{Y}), \tag{5.2.13}$$

tensörünü tanımlayalım. Cheeger-Gromoll metriğinin tanımından ve (5.2.1)'den

$$\begin{aligned}
&\tilde{G}(X^h, Y^h) \\
&= \tilde{g}(\tilde{J}X^h, Y^h) - \tilde{g}(X^h, \tilde{J}Y^h) \\
&= \tilde{g}(\frac{1}{2}\{pX^h + (2\sigma_{p,q} - p)X^v\}, Y^h) - \tilde{g}(X^h, \frac{1}{2}\{pY^h + (2\sigma_{p,q} - p)Y^v\}) \\
&= \frac{1}{2}\{p\tilde{g}(X^h, Y^h) + (2\sigma_{p,q} - p)\tilde{g}(X^v, Y^h) - p\tilde{g}(X^h, Y^h) - (2\sigma_{p,q} - p)\tilde{g}(X^h, Y^v)\} \\
&= 0,
\end{aligned} \tag{5.2.14}$$

$$\begin{aligned}
&\tilde{G}(X^h, Y^v) \\
&= \tilde{g}(\tilde{J}X^h, Y^v) - \tilde{g}(X^h, \tilde{J}Y^v) \\
&= \tilde{g}(\frac{1}{2}\{pX^h + (2\sigma_{p,q} - p)X^v\}, Y^v) - \tilde{g}(X^h, \frac{1}{2}\{pY^v + (2\sigma_{p,q} - p)Y^h\}) \\
&= \left(\frac{2\sigma_{p,q} - p}{2}\right)\{\tilde{g}(X^v, Y^v) - \tilde{g}(X^h, Y^h)\} \\
&= \left(\frac{2\sigma_{p,q} - p}{2}\right)\left\{\frac{g(X,u)g(Y,u) - g(X,Y)g(u,u)}{1 + g(u,u)}\right\},
\end{aligned} \tag{5.2.15}$$

$$\begin{aligned}
&\tilde{G}(X^v, Y^h) \\
&= \tilde{g}(\tilde{J}X^v, Y^h) - \tilde{g}(X^v, \tilde{J}Y^h) \\
&= \tilde{g}(\frac{1}{2}\{pX^v + (2\sigma_{p,q} - p)X^h\}, Y^h) - \tilde{g}(X^v, \frac{1}{2}\{pY^h + (2\sigma_{p,q} - p)Y^v\}) \\
&= \left(\frac{2\sigma_{p,q} - p}{2}\right)\{\tilde{g}(X^h, Y^h) - \tilde{g}(X^v, Y^v)\} \\
&= \left(\frac{2\sigma_{p,q} - p}{2}\right)\left\{\frac{g(X,Y)g(u,u) - g(X,u)g(Y,u)}{1 + g(u,u)}\right\}
\end{aligned} \tag{5.2.16}$$

ve

$$
\begin{aligned}
&\tilde{G}(X^v, Y^v) \\
&= \tilde{g}(\tilde{J}X^v, Y^v) - \tilde{g}(X^v, \tilde{J}Y^v) \\
&= \tilde{g}(\frac{1}{2}\{pX^v + (2\sigma_{p,q} - p)X^h\}, Y^v) - \tilde{g}(X^v, \frac{1}{2}\{pY^v + (2\sigma_{p,q} - p)Y^h\}) \\
&= \frac{1}{2}\{p\tilde{g}(X^v, Y^v) + (2\sigma_{p,q} - p)\tilde{g}(X^h, Y^v) - p\tilde{g}(X^v, Y^v) - (2\sigma_{p,q} - p)\tilde{g}(X^v, Y^h)\} \\
&= 0 \qquad (5.2.17)
\end{aligned}
$$

elde edilir. Böylece, aşağıdaki teorem verilebilir:

**Teorem 5.2.2.** *$(M, g)$, $n$-boyutlu bir Riemannian manifold ve $TM$ de $(M, g)$'nin $\tilde{g}$ Cheeger-Gromoll metriği ve (5.2.1) ile tanımlı $\tilde{J}$ metalik yapısıyla donatılmış tanjant demeti olsun. Eğer $M$ üzerinde herbir $X$ vektör alanı için $g(X, u)u = g(u, u)X$ şartı sağlanıyorsa, bu durumda $TM$ bir metalik Riemannian tanjant demettir.*

**İspat.** İspat, Tanım (5.1.3), Tanım (5.1.4) ve (5.2.13)-(5.2.17)'den açıktır. □

**Sonuç 5.2.1.** *$(M, g)$, $n$-boyutlu bir Riemannian manifold ve $TM$ de $(M, g)$'nin $\tilde{g}$ Cheeger-Gromoll metriği ve (5.2.1) ile tanımlı $\tilde{J}$ metalik yapısıyla donatılmış tanjant demeti olsun. Eğer $TM$ bir metalik Riemannian tanjant demet ise $n = 1$ olup $M$ bir eğridir.*

**İspat.** Eğer $TM$ bir metalik Riemannian tanjant demet ise, bu durumda Teorem 5.2.2'den $M$ üzerinde herbir $X$ vektör alanı için $g(X, u)u = g(u, u)X$'tir. Ayrıca, $M$ manifoldu üzerinde $g(X, u)u = g(u, u)X$ şartını sağlayan bütün $X$ vektör alanları $u$ ile lineer bağımlıdır ve dolayısıyla $M$ manifoldu 1-boyutlu olur. Böylece ispat tamamlanır. □

**Sonuç 5.2.2.** *$(M, g)$ bir Riemannian manifold ve $TM$ de $(M, g)$'nin $\tilde{g}$ Cheeger-Gromoll metriği ve (5.2.1) ile tanımlı $\tilde{J}$ metalik yapısıyla donatılmış tanjant demeti olsun. Eğer $M$ üzerinde $g(X, u)u = g(u, u)X$ şartı sağlanıyorsa, bu durumda $\tilde{g}$, $\tilde{J}$ metalik yapısına göre bir pür tensör alanıdır.*

**İspat.** İspat, pür tensör alanının tanımı ve (5.2.13)-(5.2.17) eşitliklerinden açıktır. □

## 5.3 Cheeger-Gromoll Metrikli Lokal Olarak Ayrıştırılabilir Golden Riemannian Tanjant Demetler

Bu alt bölümde, $TM$ tanjant demeti üzerindeki $\tilde{J}$ golden yapısı yardımıyla, $M$'nin Cheeger-Gromoll metriğiyle donatılmış ve metalik Riemannian tanjant demetlerin bir sınıfı olan $TM$ golden Riemannian tanjant demetinin lokal olarak ayrıştırılabilir olmasıyla ilgili bir karakterizasyon verilmektedir.

$TM$ tanjant demeti üzerindeki $\tilde{J}$ golden yapısı, herbir $X$ vektör alanı için

$$\left.\begin{array}{l}\tilde{J}X^h = \frac{1}{2}\{X^h + \sqrt{5}X^v\} \\ \tilde{J}X^v = \frac{1}{2}\{X^v + \sqrt{5}X^h\}\end{array}\right\} \tag{5.3.1}$$

şeklinde tanımlanır ve bu şekilde tanımlı $\tilde{J}$ yapısının gerçekten, $\tilde{J}^2 - \tilde{J} - I = 0$ şartını sağladığı görülebilir [44].

İntegrallenebilir bir $J$ golden yapısıyla birlikte bir $(M, J, g)$ golden Riemannian yapısına **lokal olarak golden Riemannian manifold** denir. Eğer lokal olarak golden Riemannian manifoldun $g$ metriği

$$ds^2 = g_{ab}(x^c)dx^a dx^b + g_{\bar{a}\bar{b}}(x^{\bar{c}})dx^{\bar{a}}dx^{\bar{b}}, \ a, b, c = 1, ..., m, \ \bar{a}, \bar{b}, \bar{c} = m+1, ..., n$$

formunda ise, yani $g_{ab}$'ler sadece $x^c$'nin fonksiyonları, $g_{a\bar{b}} = 0$ ve $g_{\bar{a}\bar{b}}$'ler de sadece $x^{\bar{c}}$'nin fonksiyonları iseler, bu taktirde $M$ manifolduna bir **lokal olarak ayrıştırılabilir golden Riemannian manifold** denir [44].

[44]'de Gezer ve arkadaşları gördüler ki; bir $(M, J, g)$ golden Riemannian manifoldunun lokal olarak ayrıştırılabilir golden Riemannian manifold olması için gerek ve yeter şart $F$ hemen hemen çarpım yapısı olmak üzere $\Phi_F g = 0$ olmasıdır. Ayrıca, hemen hemen çarpım yapı $F$ ve golden yapı $J$ arasında

$$\Phi_F g = \frac{2}{\sqrt{5}}\Phi_J g$$

şeklinde bir ilişki elde ettiler. Böylece, aşağıdaki Teorem ispatlanabilir:

**Teorem 5.3.1.** *$(M, g)$ bir Riemannian manifold ve $TM$ de $M$'nin $\tilde{g}$ Cheeger-Gromoll metriği ve (5.3.1) ile tanımlı $\tilde{J}$ golden yapısıyla donatılmış golden Riemannian tanjant demeti olsun. Bu durumda $(TM, \tilde{J}, \tilde{g})$ lokal olarak ayrıştırılabilir golden Riemannian tanjant demettir.*

**İspat.** Cheeger-Gromoll metriğin tanımı, (4.1.13), (5.1.4) ve (5.3.1) eşitlikleri kullanılarak

$$
\begin{aligned}
&(\Phi_{\tilde{J}}\tilde{g})(X^h, Y^h, Z^h)\\
&= (\tilde{J}X^h)(\tilde{g}(Y^h, Z^h)) - X^h(\tilde{g}(\tilde{J}Y^h, Z^h))\\
&\quad + \tilde{g}([Y^h, \tilde{J}X^h] - \tilde{J}[Y^h, X^h], Z^h) + \tilde{g}(Y^h, [Z^h, \tilde{J}X^h] - \tilde{J}[Z^h, X^h])\\
&= (\frac{1}{2}X^h + \frac{\sqrt{5}}{2}X^v)(\tilde{g}(Y^h, Z^h)) - X^h(\tilde{g}(\frac{1}{2}Y^h + \frac{\sqrt{5}}{2}Y^v, Z^h))\\
&\quad + \tilde{g}([Y^h, \frac{1}{2}X^h + \frac{\sqrt{5}}{2}X^v] - \tilde{J}[Y^h, X^h], Z^h)\\
&\quad + \tilde{g}(Y^h, [Z^h, \frac{1}{2}X^h + \frac{\sqrt{5}}{2}X^v] - \tilde{J}[Z^h, X^h])\\
&= \tilde{g}(\frac{1}{2}[Y, X]^h - \frac{1}{2}(R(Y, X)u)^v + \frac{\sqrt{5}}{2}(\nabla_Y X)^v - \tilde{J}[Y, X]^h + \tilde{J}(R(Y, X)u)^v, Z^h)\\
&\quad + \tilde{g}(Y^h, \frac{1}{2}[Z, X]^h - \frac{1}{2}(R(Z, X)u)^v + \frac{\sqrt{5}}{2}(\nabla_Z X)^v - \tilde{J}[Z, X]^h + \tilde{J}(R(Z, X)u)^v\\
&= \tilde{g}(\frac{\sqrt{5}}{2}(R(Y, X)u)^h, Z^h) + \tilde{g}(Y^h, \frac{\sqrt{5}}{2}(R(Z, X)u)^h)\\
&= \frac{\sqrt{5}}{2}g(R(Y, X)u - R(u, Y)X, Z)
\end{aligned}
$$

eşitliği,

$$
\begin{aligned}
&(\Phi_{\tilde{J}}\tilde{g})(X^h, Y^h, Z^v)\\
&= (\tilde{J}X^h)(\tilde{g}(Y^h, Z^v)) - X^h(\tilde{g}(\tilde{J}Y^h, Z^v))\\
&\quad + \tilde{g}([Y^h, \tilde{J}X^h] - \tilde{J}[Y^h, X^h], Z^v) + \tilde{g}(Y^h, [Z^v, \tilde{J}X^h] - \tilde{J}[Z^v, X^h])\\
&= -X^h(\tilde{g}(\frac{1}{2}Y^h + \frac{\sqrt{5}}{2}Y^v, Z^v)) + \tilde{g}([Y^h, \frac{1}{2}X^h + \frac{\sqrt{5}}{2}X^v] - \tilde{J}[Y, X]^h\\
&\quad + \tilde{J}(R(Y, X)u)^v, Z^v) + \tilde{g}(Y^h, [Z^v, \frac{1}{2}X^h + \frac{\sqrt{5}}{2}X^v] + \tilde{J}(\nabla_X Z)^v)\\
&= -\frac{\sqrt{5}}{2}X^h(\tilde{g}(Y^v, Z^v)) + \tilde{g}(\frac{1}{2}[Y^h, X^h] + \frac{\sqrt{5}}{2}[Y^h, X^v] - \tilde{J}[Y, X]^h\\
&\quad + \tilde{J}(R(Y, X)u)^v, Z^v) + \tilde{g}(Y^h, \frac{1}{2}[Z^v, X^h] + \frac{\sqrt{5}}{2}[Z^v, X^v] + \tilde{J}(\nabla_X Z)^v)\\
&= -\frac{\sqrt{5}}{2}\{\tilde{g}((\nabla_X Y)^v, Z^v) + \tilde{g}(Y^v, (\nabla_X Z)^v)\} + \tilde{g}(\frac{1}{2}[Y, X]^h - \frac{1}{2}(R(Y, X)u)^v\\
&\quad + \frac{\sqrt{5}}{2}(\nabla_Y X)^v - \frac{1}{2}[Y, X]^h - \frac{\sqrt{5}}{2}[Y, X]^v + \frac{1}{2}(R(Y, X)u)^v\\
&\quad + \frac{\sqrt{5}}{2}(R(Y, X)u)^h, Z^v) + \tilde{g}(Y^h, -\frac{1}{2}(\nabla_X Z)^v + \frac{1}{2}(\nabla_X Z)^v + \frac{\sqrt{5}}{2}(\nabla_X Z)^h)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&= -\frac{\sqrt{5}}{2}\tilde{g}((\nabla_X Y)^v, Z^v) - \frac{\sqrt{5}}{2}\tilde{g}(Y^v, (\nabla_X Z)^v) - \frac{1}{2}\tilde{g}((R(Y,X)u)^v, Z^v) \\
&\quad + \frac{\sqrt{5}}{2}\tilde{g}((\nabla_Y X)^v, Z^v) - \frac{\sqrt{5}}{2}\tilde{g}([Y,X]^v, Z^v) + \frac{1}{2}\tilde{g}((R(Y,X)u)^v, Z^v) \\
&\quad + \frac{\sqrt{5}}{2}\tilde{g}(Y^h, (\nabla_X Z)^h) \\
&= -\frac{\sqrt{5}}{2}\tilde{g}(Y^v, (\nabla_X Z)^v) + \frac{\sqrt{5}}{2}\tilde{g}(Y^h, (\nabla_X Z)^h) \\
&= \frac{\sqrt{5}}{2(1+g(u,u))}\{g(Y, \nabla_X Z)g(u,u) - g(Y,u)g(\nabla_X Z, u)\}
\end{aligned}
$$

eşitliği, son eşitliktekine benzer adımlar takip edilirse

$$
(\Phi_{\tilde{J}}\tilde{g})(X^h, Y^v, Z^h) = \frac{\sqrt{5}}{2(1+g(u,u))}\{g(Y,u)g(\nabla_X Z, u) - g(Y, \nabla_X Z)g(u,u)\}
$$

eşitliği,

$$
\begin{aligned}
&(\Phi_{\tilde{J}}\tilde{g})(X^v, Y^h, Z^h) \\
&= (\tilde{J}X^v)(\tilde{g}(Y^h, Z^h)) - X^v(\tilde{g}(\tilde{J}Y^h, Z^h)) \\
&\quad + \tilde{g}([Y^h, \tilde{J}X^v] - \tilde{J}[Y^h, X^v], Z^h) + \tilde{g}(Y^h, [Z^h, \tilde{J}X^v] - \tilde{J}[Z^h, X^v]) \\
&= (\frac{1}{2}X^v + \frac{\sqrt{5}}{2}X^h)(\tilde{g}(Y^h, Z^h)) - X^v(\tilde{g}(\frac{1}{2}Y^h + \frac{\sqrt{5}}{2}Y^v, Z^h)) \\
&\quad + \tilde{g}([Y^h, \frac{1}{2}X^v + \frac{\sqrt{5}}{2}X^h] - \tilde{J}(\nabla_Y X)^v, Z^h) \\
&\quad + \tilde{g}(Y^h, [Z^h, \frac{1}{2}X^v + \frac{\sqrt{5}}{2}X^h] - \tilde{J}(\nabla_Z X)^v) \\
&= \frac{1}{2}X^v(\tilde{g}(Y^h, Z^h)) + \frac{\sqrt{5}}{2}X^h(\tilde{g}(Y^h, Z^h)) - \frac{1}{2}X^v(\tilde{g}(Y^h, Z^h)) \\
&\quad + \tilde{g}(\frac{1}{2}[Y^h, X^v] + \frac{\sqrt{5}}{2}[Y^h, X^h] - \frac{1}{2}(\nabla_Y X)^v - \frac{\sqrt{5}}{2}(\nabla_Y X)^h, Z^h) \\
&\quad + \tilde{g}(Y^h, \frac{1}{2}[Z^h, X^v] + \frac{\sqrt{5}}{2}[Z^h, X^h] - \frac{1}{2}(\nabla_Z X)^v - \frac{\sqrt{5}}{2}(\nabla_Z X)^h) \\
&= \frac{\sqrt{5}}{2}g(\nabla_X Y, Z) + \frac{\sqrt{5}}{2}g(Y, \nabla_X Z) \\
&\quad + \tilde{g}(\frac{\sqrt{5}}{2}(\nabla_Y X)^h - \frac{\sqrt{5}}{2}(\nabla_X Y)^h - \frac{\sqrt{5}}{2}(\nabla_Y X)^h, Z^h) \\
&\quad + \tilde{g}(Y^h, \frac{\sqrt{5}}{2}(\nabla_Z X)^h - \frac{\sqrt{5}}{2}(\nabla_X Z)^h - \frac{\sqrt{5}}{2}(\nabla_Z X)^h) \\
&= 0
\end{aligned}
$$

eşitliği,

$$
\begin{aligned}
&(\Phi_{\tilde{J}}\tilde{g})(X^h, Y^v, Z^v) \\
&= (\tilde{J}X^h)(\tilde{g}(Y^v, Z^v)) - X^h(\tilde{g}(\tilde{J}Y^v, Z^v)) \\
&\quad + \tilde{g}([Y^v, \tilde{J}X^h] - \tilde{J}[Y^v, X^h], Z^v) + \tilde{g}(Y^v, [Z^v, \tilde{J}X^h] - \tilde{J}[Z^v, X^h]) \\
&= (\frac{1}{2}X^h + \frac{\sqrt{5}}{2}X^v)(\tilde{g}(Y^v, Z^v)) - X^h(\tilde{g}(\frac{1}{2}Y^v + \frac{\sqrt{5}}{2}Y^h, Z^v)) \\
&\quad + \tilde{g}([Y^v, \frac{1}{2}X^h + \frac{\sqrt{5}}{2}X^v] + \tilde{J}(\nabla_X Y)^v, Z^v) \\
&\quad + \tilde{g}(Y^v, [Z^v, \frac{1}{2}X^h + \frac{\sqrt{5}}{2}X^v] + \tilde{J}(\nabla_X Z)^v) \\
&= \frac{1}{2}X^h(\tilde{g}(Y^v, Z^v)) + \frac{\sqrt{5}}{2}X^v(\tilde{g}(Y^v, Z^v)) - \frac{1}{2}X^h(\tilde{g}(Y^v, Z^v)) \\
&\quad + \tilde{g}(\frac{1}{2}[Y^v, X^h] + \frac{\sqrt{5}}{2}[Y^v, X^v] + \frac{1}{2}(\nabla_X Y)^v + \frac{\sqrt{5}}{2}(\nabla_X Y)^h, Z^v) \\
&\quad + \tilde{g}(Y^v, \frac{1}{2}[Z^v, X^h] + \frac{\sqrt{5}}{2}[Z^v, X^v] + \frac{1}{2}(\nabla_X Z)^v + \frac{\sqrt{5}}{2}(\nabla_X Z)^h) \\
&= \frac{\sqrt{5}}{2}X^v(\tilde{g}(Y^v, Z^v)) - \frac{1}{2}\tilde{g}((\nabla_X Y)^v, Z^v) + \frac{1}{2}\tilde{g}((\nabla_X Y)^v, Z^v) \\
&\quad - \frac{1}{2}\tilde{g}(Y^v, (\nabla_X Z)^v) + \frac{1}{2}\tilde{g}(Y^v, (\nabla_X Z)^v) \\
&= \frac{\sqrt{5}}{2}X^v(\tilde{g}(Y^v, Z^v))
\end{aligned}
$$

eşitliği,

$$
\begin{aligned}
&(\Phi_{\tilde{J}}\tilde{g})(X^v, Y^h, Z^v) \\
&= (\tilde{J}X^v)(\tilde{g}(Y^h, Z^v)) - X^v(\tilde{g}(\tilde{J}Y^h, Z^v)) \\
&\quad + \tilde{g}([Y^h, \tilde{J}X^v] - \tilde{J}[Y^h, X^v], Z^v) + \tilde{g}(Y^h, [Z^v, \tilde{J}X^v] - \tilde{J}[Z^v, X^v]) \\
&= -X^v(\tilde{g}(\frac{1}{2}Y^h + \frac{\sqrt{5}}{2}Y^v, Z^v)) \\
&\quad + \tilde{g}([Y^h, \frac{1}{2}X^v + \frac{\sqrt{5}}{2}X^h] - \tilde{J}(\nabla_Y X)^v, Z^v) + \tilde{g}(Y^h, [Z^v, \frac{1}{2}X^v + \frac{\sqrt{5}}{2}X^h]) \\
&= -\frac{\sqrt{5}}{2}X^v(\tilde{g}(Y^v, Z^v)) \\
&\quad + \tilde{g}(\frac{1}{2}[Y^h, X^v] + \frac{\sqrt{5}}{2}[Y^h, X^h] - \frac{1}{2}(\nabla_Y X)^v - \frac{\sqrt{5}}{2}(\nabla_Y X)^h, Z^v) \\
&\quad + \tilde{g}(Y^h, \frac{1}{2}[Z^v, X^v] + \frac{\sqrt{5}}{2}[Z^v, X^h])
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&= -\frac{\sqrt{5}}{2}X^v(\tilde{g}(Y^v, Z^v)) \\
&\quad + \tilde{g}(\frac{1}{2}(\nabla_Y X)^v + \frac{\sqrt{5}}{2}[Y, X]^h - \frac{\sqrt{5}}{2}(R(Y, X)u)^v - \frac{1}{2}(\nabla_Y X)^v - \frac{\sqrt{5}}{2}(\nabla_Y X)^h, Z^v) \\
&\quad + \tilde{g}(Y^h, -\frac{\sqrt{5}}{2}(\nabla_X Z)^v) \\
&= -\frac{\sqrt{5}}{2}\{X^v(\tilde{g}(Y^v, Z^v)) + \tilde{g}((R(Y, X)u)^v, Z^v)\}
\end{aligned}
$$

eşitliği,

$$
\begin{aligned}
&(\Phi_{\tilde{J}}\tilde{g})(X^v, Y^v, Z^h) \\
&= (\tilde{J}X^v)(\tilde{g}(Y^v, Z^h)) - X^v(\tilde{g}(\tilde{J}Y^v, Z^h)) \\
&\quad + \tilde{g}([Y^v, \tilde{J}X^v] - \tilde{J}[Y^v, X^v], Z^h) + \tilde{g}(Y^v, [Z^h, \tilde{J}X^v] - \tilde{J}[Z^h, X^v]) \\
&= -X^v(\tilde{g}(\frac{1}{2}Y^v + \frac{\sqrt{5}}{2}Y^h, Z^h)) + \tilde{g}([Y^v, \frac{1}{2}X^v + \frac{\sqrt{5}}{2}X^h], Z^h) \\
&\quad + \tilde{g}(Y^v, [Z^h, \frac{1}{2}X^v + \frac{\sqrt{5}}{2}X^h] - \tilde{J}(\nabla_Z X)^v) \\
&= -\frac{\sqrt{5}}{2}X^v(\tilde{g}Y^h, Z^h)) + \tilde{g}(\frac{1}{2}[Y^v, X^v] + \frac{\sqrt{5}}{2}[Y^v, X^h], Z^h) \\
&\quad + \tilde{g}(Y^v, \frac{1}{2}[Z^h, X^v] + \frac{\sqrt{5}}{2}[Z^h, X^h] - \frac{1}{2}(\nabla_Z X)^v - \frac{\sqrt{5}}{2}(\nabla_Z X)^h) \\
&= \frac{1}{2}\tilde{g}(Y^v, (\nabla_Z X)^v) - \frac{\sqrt{5}}{2}\tilde{g}(Y^v, (R(Z, X)u)^v) - \frac{1}{2}\tilde{g}(Y^v, (\nabla_Z X)^v) \\
&= -\frac{\sqrt{5}}{2}\tilde{g}(Y^v, (R(Z, X)u)^v) \\
&= -\frac{\sqrt{5}}{2(1 + g(u, u))}g(Y, R(Z, X)u)
\end{aligned}
$$

eşitliği ve son olarak da

$$
\begin{aligned}
&(\Phi_{\tilde{J}}\tilde{g})(X^v, Y^v, Z^v) \\
&= (\tilde{J}X^v)(\tilde{g}(Y^v, Z^v)) - X^v(\tilde{g}(\tilde{J}Y^v, Z^v)) \\
&\quad + \tilde{g}([Y^v, \tilde{J}X^v] - \tilde{J}[Y^v, X^v], Z^v) + \tilde{g}(Y^v, [Z^v, \tilde{J}X^v] - \tilde{J}[Z^v, X^v]) \\
&= (\frac{1}{2}X^v + \frac{\sqrt{5}}{2}X^h)(\tilde{g}(Y^v, Z^v)) - X^v(\tilde{g}(\frac{1}{2}Y^v + \frac{\sqrt{5}}{2}Y^h, Z^v)) \\
&\quad + \tilde{g}([Y^v, \frac{1}{2}X^v + \frac{\sqrt{5}}{2}X^h], Z^v) + \tilde{g}(Y^v, [Z^v, \frac{1}{2}X^v + \frac{\sqrt{5}}{2}X^h]) \\
&= \frac{1}{2}X^v(\tilde{g}(Y^v, Z^v)) + \frac{\sqrt{5}}{2}X^h(\tilde{g}(Y^v, Z^v)) - \frac{1}{2}X^v(\tilde{g}(Y^v, Z^v)) \\
&\quad + \tilde{g}(\frac{1}{2}[Y^v, X^v] + \frac{\sqrt{5}}{2}[Y^v, X^h], Z^v) + \tilde{g}(Y^v, \frac{1}{2}[Z^v, X^v] + \frac{\sqrt{5}}{2}[Z^v, X^h])
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{\sqrt{5}}{2}\tilde{g}((\nabla_X Y)^v, Z^v) + \frac{\sqrt{5}}{2}\tilde{g}(Y^v, (\nabla_X Z)^v) - \frac{\sqrt{5}}{2}\tilde{g}((\nabla_X Y)^v, Z^v) \\
&\quad - \frac{\sqrt{5}}{2}\tilde{g}(Y^v, (\nabla_X Z)^v) \\
&= 0
\end{aligned}
$$

eşitliği elde edilir.

Teorem 5.2.2'deki metalik Riemannian tanjant demet olma şartı $g(X,u)u = g(u,u)X$ kullanılırsa, (4.2.16)'dan

$$
\begin{aligned}
&X^v(\tilde{g}(Y^v, Z^v)) \\
&= -\frac{2}{(1+g(u,u))^2}\{g(X,u)g(Y,Z) + g(X,u)g(Y,u)g(Y,u)\} \\
&\quad + \frac{1}{1+g(u,u)}\{g(X,Y)g(Z,u) + g(X,Z)g(Y,u)\} \\
&= \frac{1}{(1+g(u,u))^2}\{-2g(X,u)g(Y,Z) - 2g(X,u)g(Y,u)g(Y,u) + g(X,Y)g(Z,u) \\
&\qquad + g(X,Z)g(Y,u) + g(X,Y)g(Z,u)g(u,u) + g(X,Z)g(Y,u)g(u,u)\} \\
&= \frac{1}{(1+g(u,u))^2}\{-2g(X,u)g(Y,Z) - 2g(X,u)g(Y,u)g(Y,u) + g(X,Y)g(Z,u) \\
&\qquad + g(X,Z)g(Y,u) + g(X,u)g(Y,u)g(Y,u) + g(X,u)g(Y,u)g(Y,u)\} \\
&= \frac{1}{(1+g(u,u))^2}\{-2g(X,u)g(Y,Z) + g(X,Y)g(Z,u) + g(X,Z)g(Y,u)\}
\end{aligned}
$$

bulunur. Dolayısıyla, bu eşitlik $(\Phi_{\tilde{J}}\tilde{g})(X^h, Y^v, Z^v)$ ve $(\Phi_{\tilde{J}}\tilde{g})(X^v, Y^h, Z^v)$ ifadelerinde yerine yazılırsa

$$
\begin{aligned}
(\Phi_{\tilde{J}}\tilde{g})(X^h, Y^v, Z^v) &= \frac{\sqrt{5}}{2(1+g(u,u))^2}\{-2g(X,u)g(Y,Z) + g(X,Y)g(Z,u) \\
&\qquad + g(X,Z)g(Y,u)\}
\end{aligned}
$$

ve

$$
\begin{aligned}
(\Phi_{\tilde{J}}\tilde{g})(X^v, Y^h, Z^v) &= -\frac{\sqrt{5}}{2(1+g(u,u))^2}\{-2g(Y,Z)g(X,u) + g(X,Y)g(Z,u) \\
&\qquad + g(X,Z)g(Y,u) + g(R(Y,X)u, Z) \\
&\qquad + g(R(Y,X)u, Z)g(u,u)\}
\end{aligned}
$$

olarak bulunur.

Böylece, bulduğumuz bütün bu ifadeler kısaca

$$
\begin{aligned}
(\Phi_{\tilde{J}}\tilde{g})(X^h, Y^h, Z^h) &= \frac{\sqrt{5}}{2} g(R(Y,X)u - R(u,Y)X, Z) \\
(\Phi_{\tilde{J}}\tilde{g})(X^h, Y^h, Z^v) &= \frac{\sqrt{5}}{2(1+g(u,u))}\{g(Y, \nabla_X Z)g(u,u) - g(Y,u)g(\nabla_X Z, u)\}, \\
(\Phi_{\tilde{J}}\tilde{g})(X^h, Y^v, Z^h) &= \frac{\sqrt{5}}{2(1+g(u,u))}\{g(Y,u)g(\nabla_X Z, u) - g(Y, \nabla_X Z)g(u,u)\}, \\
(\Phi_{\tilde{J}}\tilde{g})(X^v, Y^h, Z^h) &= 0, \\
(\Phi_{\tilde{J}}\tilde{g})(X^h, Y^v, Z^v) &= \frac{\sqrt{5}}{2(1+g(u,u))^2}\{-2g(Y,Z)g(X,u) + g(X,Y)g(Z,u) \\
&\quad + g(X,Z)g(Y,u)\}, \\
(\Phi_{\tilde{J}}\tilde{g})(X^v, Y^h, Z^v) &= -\frac{\sqrt{5}}{2(1+g(u,u))^2}\{-2g(Y,Z)g(X,u) + g(X,Y)g(Z,u) \\
&\quad + g(X,Z)g(Y,u) + g(R(Y,X)u, Z) + g(R(Y,X)u, Z)g(u,u)\}, \\
(\Phi_{\tilde{J}}\tilde{g})(X^v, Y^v, Z^h) &= -\frac{\sqrt{5}}{2(1+g(u,u))} g(Y, R(Z,X)u), \\
(\Phi_{\tilde{J}}\tilde{g})(X^v, Y^v, Z^v) &= 0
\end{aligned}
$$

şeklinde yazılabilir.

Ayrıca, Sonuç 5.2.1'den $TM$ bir metalik Riemannian tanjant demet iken $M$'nin bir eğri olduğunu biliyoruz. Dolayısıyla, $M$ eğrisi üzerindeki herbir tanjant vektör $u$'nun doğrultusunda olup

$$g(X,Y)g(Z,u) + g(X,Z)g(Y,u) = 2g(Y,Z)g(X,u)$$

eşitliği sağlanır ve bu nedenle herbir $i, j, k \in \{h, v\}$ için

$$(\Phi_{\tilde{J}}\tilde{g})(X^i, Y^j, Z^k) = 0$$

olur. Böylece Teorem 5.2.1 ve Teorem 5.2.2'den ispat tamamlanır. $\square$

# KAYNAKLAR


[1] Sasaki, S. (1958). On the differential geometry of tangent bundles of Riemannian manifolds I. *Tohoku Math. J.* **10**(3), 338-354.

[2] Dombrowski, P. (1962). On the Geometry of the Tangent Bundle. *J. Reine Angew. Math.* **210**, 73-88.

[3] Kowalski, O. (1971). Curvature of the induced Riemannian metric of the tangent bundle of a Riemannian manifold. *J. Reine Angew. Math.* **250**, 124-129.

[4] Cheeger, J., Gromoll, D. (1972). On the structure of complete manifolds of non-negative curvature. *Ann. of Math.* **96**, 413-443.

[5] Musso, E., Tricerri, F. (1988). Riemannian metrics on tangent bundles. *Ann. Mat. Pura Appl.* **150**(4), 1-19.

[6] Sekizawa, M. (1991). Curvatures of tangent bundles with Cheeger–Gromoll metric. *Tokyo J. Math.* **14**(2), 407-417.

[7] Gudmundsson, S., Kappos, E. (2002). On the geometry of the tangent bundle with the Cheeger-Gromoll metric. *Tokyo J. Math.* **25**(1), 75-83.

[8] Abbassi, M.T.K., Sarih, M. (2003). Killing vector fields on tangent bundles with Cheeger-Gromoll Metric. *Tsukuba J. Math.* Vol. **27** No. 2, 295-306.

[9] Gudmundsson, S., Kappos, E. (2002). On the Geometry of Tangent Bundles. *Expo. Math.* **20**, 1-41.

[10] Hou, H.Z., Sun, L. (2013). Geometry of tangent bundle with Cheeger-Gromoll type metric. *J. Math. Anal. Appl.* **402**, 493-504.

[11] Munteanu, M.I. (2006). Cheeger–Gromoll type metrics on the tangent bundle. *Sci. Ann. Univ. Agric. Sci. Vet. Med.* **49**(2), 257-268.

[12] Munteanu, M.I. (2008). Some aspects on the geometry of the tangent bundles and tangent sphere bundles of a Riemannian manifold. *Mediterr. J. Math.* **5**, 43-59.

[13] Salimov, A.A., Akbulut, K. (2009). A note on a paraholomorphic Cheeger–Gromoll metric. *Proc. Indian Acad. Sci. (Math. Sci.)* **119**(2), 187-195.

[14] Blair, D.E. (1976). *Contact Manifolds in Riemannian Geometry.* Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg-New York.

[15] Zamkovoy, S. (2009). Canonical connections on paracontact manifolds. *Ann. Glob. Anal. Geom.* **36**, 37-60.

[16] Alegre, P., Carriazo A. (2008). Structures on generalized Sasakian-space-forms. *Differential Geometry and its Applications* **26**, 656-666.

[17] Calvaruso, G., Perrone D. (2010). Contact pseudo-metric manifolds. *Differential Geometry and its Applications* **28**, 615-634.

[18] De, U.C., Yıldız, A., Yalınız, A.F. (2009). Locally $\varphi-$symmetric normal almost contact metric manifolds of dimension 3. *Applied Mathematics Letters* **22**, 723-727.

[19] Gündüzalp, Y., Şahin, B. (2013). Paracontact semi-Riemannian submersions. *Turk J Math* **37**, 114-128.

[20] Perrone, B. (2004). Contact metric manifolds whose characteristic vector field is a harmonic vector field. *Differential Geometry and its Applications* **20**, 367-378.

[21] Iglesias-Ponte, D., Wade, A. (2005). Contact manifolds and generalized complex structures. *Journal of Geometry and Physics* **53**, 249-258.

[22] Tripathi, M. M., Kılıç, E., Perktaş, S. Y., Keleş, S. (2010). Indefinite Almost Paracontact Metric Manifolds. *Int J of Math and Mathematical Sciences*, doi:10.1155/2010/846195.

[23] Welyczko, J. (2013). Slant Curves in 3-Dimensional Normal Almost Paracontact Metric Manifolds. *Mediterr. J. Math.*, DOI 10.1007/s00009-013-0361-2.

[24] Crasmareanu, M., Hretcanu, C.E. (2009). Golden differential geometry. *Chaos Solitons & Fractals* **38**(5), 1229-1238.

[25] Hretcanu, C.E., Crasmareanu, M. (2007). On some invariant submanifolds in a Riemannian manifold with golden structure. *An. Stiint. Univ. Al. I. Cuza Iasi Mat. (N.S.)* **53** (Suppl.), 199-211.

[26] Hretcanu, C.E., Crasmareanu, M. (2009). Applications of the Golden Ratio on Riemannian Manifolds. *Turkish J. Math.* **33**(2), 179-191, doi:10.3906/mat-0711-29.

[27] de Spinadel, V.W. (1999). The metallic means family and multifractal spectra. *Nonlinear Anal. Ser. B: Real World Appl.* **36**(6), 721-745.

[28] Stakhov, A.P., Rozin, B. (2006). The "golden" algebraic equations. *Chaos, Solitons & Fractals* **27**(5), 1415-1421.

[29] Kappos, E. (2001). *Natural Metrics on Tangent Bundles.* Lund University, Master's Thesis, E10.

[30] Hacısalihoğlu, H.H. (1983). *Diferensiyel Geometri.* İ.Ü. Fen-Edeb. Fak. Yayınları, Mat., No:2, Malatya.

[31] Bootby, W.M. (1975). *An Introduction to Differentiable Manifolds and Riemannian Geometry.* Academic Press, New York.

[32] Yano, K., Kon, M. (1984). *Structures on Manifolds.* World Scientific.

[33] Lee, J.M. (1950). *Introduction to Smooth Manifolds.* Library of Congrees Cataloging in Pub. Data.

[34] Do Carmo, M. P. (1992). *Riemannian Geometry.* Birkhauser Boston.

[35] O'Neill, B. (1983). *Semi-Riemannian Geometry with Applications to Relativity.* Academic Press, New York.

[36] Yano, K., Ishihara, S. (1973). Tangent and Cotangent Bundles. *Differential Geometry, Pure and Applied Mathematics* **16**, Marcel Dekker.

[37] de Leon, M., Rodrigues P.R. (1989). *Methods of Differential Geometry in Analytical Mechanics.* North-Holland, Mathematics Studies 158.

[38] Nagano, T. (1959). Isometries on complex-product spaces. *Tensor 9*, 47-61.

[39] Al-Shaman, T. (2005). *Geometry of Tangent Bundle.* King Saud University, Master's Thesis.

[40] Tachabani, S., Okumura, M. (1962). On the almost-complex structure of tangent bundles of Riemannian spaces. *Tohoku Math. J.* **14**, 152-161.

[41] Shukla, S.S., Shukla, M.K. (2010). On $\varphi-$symmetric para-Sasakian manifolds. *Int. Journal of Math. Analysis* **4**(16), 761-769.

[42] Sinha, B.B., Yadav, R.K. (1988). On Almost Contact Finsler Structures on Vector Bundle. *Indian J. Pure Appl. Math.* **19**(1), 27-35.

[43] Hretcanu, C.E., Crasmareanu, M. (2013). Metallic structures on Riemannian Manifolds. *Revista De La Union Matematica Argentina* **54** 2, 15-27.

[44] Gezer, A., Cengiz, N., Salimov, A. (2013). On integrability of Golden Riemannian structures. *Turk J Math* **37**, 693-703.

# ÖZGEÇMİŞ

**Ad Soyad:** Ahmet KAZAN

**Doğum Yeri ve Tarihi:** Malatya / 27.06.1985

**Medeni Hali:** Evli ve 1 çocuğu var

**Adres:** Adıyaman Üniversitesi Besni Meslek Yüksekokulu BESNİ/ADIYAMAN

**E-Posta:** ahmet.kazan@inonu.edu.tr , akazan@adiyaman.edu.tr

**Lisans:** Uludağ Üniversitesi Fen-Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümü, 2004-2008

**Yüksek Lisans:** İnönü Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalı, 2008-2011

**Mesleki Deneyim ve Ödüller**:

* İnönü Üniversitesi Fen-Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümü (Araştırma Görevlisi) {Eylül 2009-Şubat 2014}

* Adıyaman Üniversitesi Besni MYO Mekatronik Bölümü (Öğretim Görevlisi) {Şubat 2014-Halen}

* *2211-Yurt İçi Lisansüstü Burs Programı* kapsamında TÜBİTAK'tan Doktora Bursu

**Yayın Listesi:**

**MAKALELER**

**1. Kazan, A.** and Karadağ, H.B. (2011). A classification of surfaces of revolution in Lorentz-Minkowski space. *Int. J. Contemp. Math. Sciences* Vol. **6** no. 39, 1915-1928.

**2.** Karadağ, H.B. and **Kazan, A.** (2013). Rotation surfaces generated by planar profile curves with constant curvature in $E_1^3$. *Theoretical Mathematics & Applications* Vol.**3** no.1, 47-68.

**3. Kazan, A.** and Karadağ, H.B. (2013). Surfaces of Revolution in Minkowski 3-Space Satisfying $\tilde{\Gamma}^1_{11}(G) = k(G+C)$. *Journal of Mathematics and System Science* **3**, 567-572.

**4. Kazan, A.** and Karadağ, H.B. (2014). Rotation Surfaces in 4-Dimensional Pseudo-Euclidean Spaces. *International Journal of Innovation in Science and Mathematics* Volume **2** Issue 2, 264-269.

**5. Kazan, A.** and Karadağ, H.B. (2014). Paracontact Finsler Structures on Vector Bundles. *British Journal of Mathematics & Computer Science* **4**(24), 3403-3426.

**6. Kazan, A.** and Karadağ, H.B. (2014). Paracontact Tangent Bundles with Cheeger-Gromoll Metric. *Mediterr. J. Math.*, DOI 10.1007/s00009-014-0414-1.

**7. Kazan, A.** and Karadağ, H.B. (2015). Locally Decomposable Golden Riemannian Tangent Bundles with Cheeger-Gromoll Metric. *Submitted.*

**BİLDİRİLER**

**1. Kazan, A.** and Karadağ, H.B. (2010). A classification of surface of revolution about spacelike and timelike axis by means of Christoffel Component. *VIII. Geometri Sempozyumu*, Antalya.

**2.** Karadağ, H.B. and **Kazan, A.** (2011). Rotation surfaces whose Profile Curves are Planar and with constant curvature in $E_1^3$. *IX. Geometri Sempozyumu*, Samsun.

**3.** Karadağ, H.B. and **Kazan, A.** (2013). CMC and CGC Surfaces of Revolution in Minkowski 3-Space. *XI. Geometri Sempozyumu*, Ordu.

**4. Kazan, A.** and Karadağ, H.B. (2013). Surfaces of Revolution in Minkowski 3-Space Satisfying $\tilde{\Gamma}^1_{11}(G) = k(G + C)$. *XXVI. Ulusal Matematik Sempozyumu*, Diyarbakır.

**5. Kazan, A.** and Karadağ, H.B. (2014). Rotation Surfaces in 4-Dimensional Pseudo-Euclidean Spaces. *XII. Geometri Sempozyumu*, Bilecik.

**TEZDEN TÜRETİLEN YAYINLAR**

**1. Kazan, A.** and Karadağ, H.B. (2014). Paracontact Tangent Bundles with Cheeger-Gromoll Metric. *Mediterr. J. Math.*, DOI 10.1007/s00009-014-0414-1.

**2. Kazan, A.** and Karadağ, H.B. (2015). Locally Decomposable Golden Riemannian Tangent Bundles with Cheeger-Gromoll Metric. *Submitted.*