T.C.
İNÖNÜ ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

MUTLAK OLMAYAN TİPTEN BAZI DİZİ UZAYLARININ BELİRLİ CEBİRSEL VE TOPOLOJİK ÖZELLİKLERİ

Pınar SALMAN

YÜKSEK LİSANS TEZİ

MATEMATİK ANABİLİM DALI

MALATYA
Haziran 2016

Tezin Başlığı	:	MUTLAK OLMAYAN TİPTEN BAZI DİZİ UZAYLARININ BELİRLİ CEBİRSEL VE TOPOLOJİK ÖZELLİKLERİ
Tezi Hazırlayan	:	Pınar SALMAN
Sınav Tarihi	:	01.06.2016

Yukarıda adı geçen tez jürimizce değerlendirilerek Matematik Ana Bilim Dalında Yüksek Lisans Tezi olarak kabul edilmiştir.

Sınav Jürisi Üyeleri (ilk isim jüri başkanı, ikinci isim tez danışmanı)

Prof.Dr.Çiğdem A.BEKTAŞ ____________________

Yrd.Doç.Dr Murat CANDAN ____________________

Doç.Dr.Emrah Evren KARA ____________________

İnönü Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Onayı

____

Prof.Dr. Alaattin ESEN

Enstitü Müdürü

ONUR SÖZÜ

Yüksek Lisans Tezi olarak sunduğum "Mutlak Olmayan Tipten Bazı Dizi Uzaylarının Belirli Cebirsel ve Topolojik Özellikleri" başlıklı bu çalışmanın bilimsel ahlâk ve geleneklere aykırı düşecek bir yardıma başvurmaksızın tarafımdan yazıldığını ve yararlandığım bütün kaynakların, hem metin içinde hem de kaynakçada yöntemine uygun biçimde gösterilenlerden oluştuğunu belirtir, bunu onurumla doğrularım.

Pınar SALMAN

ÖZET

Yüksek Lisans Tezi

MUTLAK OLMAYAN TİPTEN BAZI DİZİ UZAYLARININ BELİRLİ CEBİRSEL VE TOPOLOJİK ÖZELLİKLERİ

Pınar SALMAN

İnönü Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Anabilim Dalı

60+iv sayfa

2016

Danışman: Yrd.Doç.Dr Murat CANDAN

Bu tezde göze çarpan ilk şey öncelikle $\lambda-$yakınsak ve $\lambda-$sınırlı dizileri tanımlamak ve aynı zamanda mutlak olmayan tipten c_0^λ, c^λ, ℓ_∞^λ ve ℓ_p^λ $(0 < p < \infty)$ dizi uzaylarını sunmaktır. Bunlara ilaveten c_0^λ, c^λ, ℓ_∞^λ ve ℓ_p^λ uzayları arasında bazı kapsama ilişkileri kurulmuş ve bu uzaylar için bazlar inşa edilmiştir. Son olarak da bazı matris dönüşümleri karakterize edilmiştir.

ANAHTAR KELİMELER: Dizi Uzayları, BK Uzayları, Schauder Bazı, Matris Dönüşümleri.

ABSTRACT

M.Sc. Thesis

CERTAIN ALGEBRAIC AND TOPOLOGICAL PROPERTIES OF SOME SEQUENCE SPACES OF NON-ABSOLUTE TYPE

Pınar SALMAN

İnönü University
Graduate School of Natural and Applied Sciences
Department of Mathematics

60+iv pages

2016

Supervisor: Yrd.Doç.Dr. Murat CANDAN

In this thesis, the first thing to be noticed is to define $\lambda-$convergent and $\lambda-$bounded sequences and also to define non-absolute type c_0^λ, c^λ, ℓ_∞^λ and ℓ_p^λ sequence spaces for $0 < p < \infty$. Moreover, some inclusion relations have been established between c_0^λ, c^λ, ℓ_∞^λ and ℓ_p^λ spaces and the bases of these spaces have been constructed. Finally, some matrix transformations have been characterized.

KEY WORDS: Sequence spaces, BK spaces, Schauder basis, Matrix mappings.

TEŞEKKÜR

Tez konumu veren ve bu çalışmanın her aşamasında bilgi ve görüşlerini esirgemeyen, tecrübeleriyle beni yönlendiren tez danışmanım Sayın Yrd. Doç.Dr. Murat CANDAN'a, bölümde iyi çalışma ortamı hazırladığından ve teşviklerinden dolayı Matematik Bölüm Başkanı Sayın Prof. Dr. Sadık KELEŞ' e, tez yazımında kullandığım latex programının kullanımında ve diğer konularda yardımını esirgemeyen Doç. Dr. M. Kemal ÖZDEMİR' e, ayrıca maddi ve manevi desteklerini esirgemeyen aileme ve sevgili Ayşe TATAR'a teşekkür ederim.

İÇİNDEKİLER

1. GİRİŞ

Dizi uzayı inşa etmenin bir çok yolu olmasına rağmen bir özel matrisin etki alanı vasıtasıyla yeni dizi uzayı inşa etmek bir çok matematikçi tarafından kullanılan bir yöntem olmuştur. Son yıllarda bir çok araştırmacı mutlak olmayan tipten bazı yeni dizi uzaylarının cebirsel ve topolojik özelliklerini incelemiş ve bu dizi uzaylarına ait çeşitli problemler üzerinde araştırma yapmışlardır. Bu yazarlardan bazıları; Altay ve Başar [1], Malkowsky ve Savaş [2], Aydın ve Başar [3], Ng ve Lee [4] dir.

M. Mursalleen ve A.K. Noman'ın [5] ve [6] nolu referanslardaki makaleleri esas alınarak hazırlanıp sunulan bu yüksek lisans tezi toplamda yedi bölümden oluşmaktadır. Birinci bölüm giriş bölümüdür. İkinci bölümde ileride kullanılacak olan temel niteliğinde bazı tanım, teorem, sonuç, lemma ve eşitsizlikler üzerinde durulmuştur. Çalışmanın üçüncü bölümünde; $\lambda-$yakınsak, $\lambda-$sınırlı ve $\lambda-$tipinde $p-$mutlak yakınsak dizilerin tanımı verilerek bunların çeşitli cebirsel ve topolojik özellikleri incelenmiştir. Ayrıca $\lambda-$yakınsak bir x dizisinin bildiğimiz manada yakınsak olması için gerek ve yeter şartlar elde edilmiştir. Dördüncü bölümde ℓ_∞, c, c_0, ℓ_p uzayları sırası ile sınırlı, yakınsak, sıfıra yakınsak ve p-mutlak yakınsak dizilerin uzaylarını göstermek üzere ℓ_∞^λ, c^λ, c_0^λ ve ℓ_p^λ dizi uzaylarının tanımı ve özellikleri verilmiştir. Ayrıca ℓ_∞^λ, c^λ , c_0^λ ve ℓ_p^λ uzaylarının mutlak olmayan tipten oldukları gösterilmiştir. Beşinci bölümde ℓ_∞^λ, c^λ, c_0^λ ve ℓ_p^λ uzaylarına ilişkin çeşitli kapsama bağıntıları oluşturulmuştur. Altıncı bölümde ℓ_∞^λ, c^λ ve c_0^λ uzaylarının $\alpha-$, $\beta-$ ve $\gamma-$duallerinin tanımı verilmiş ve çeşitli özellikleri ifade edilmiştir. Tezin son bölümünde ise ℓ_∞^λ, c^λ ve c_0^λ dizi uzayları ve bu uzaylar arasındaki bazı matris dönüşümleri ifade ve ispat edilmiştir.

2. Temel Tanım ve Kavramlar

İlk olarak ileride kullanılacak kavramlar için referans olması amacı ile temel tanımlar, teoremler, eşitsizlikler ve sonuçlar hatırlatılacaktır.

2.1 Bazı Temel Tanımlar Teoremler ve Eşitizlikler

Cebir, Analiz ve Geometri başta olmak üzere matematiğin hemen hemen tüm dallarında ve mühendislikte bir çok uygulamaları bulunan vektör uzayı tanımı ile bu bölüme başlanılıp temel bilinen kavramlar özetlenmiştir.

Tanım 2.1.1. *X boş olmayan bir cümle ve $\mathcal{F}$ reel ya da kompleks sayıların bir cismi olsun. Her $\lambda,\mu \in \mathcal{F}$ ve $x, y, z \in X$ için*

$$+ : X \times X \to X$$

$$. : \mathcal{F} \times X \to X$$

işlemleri,

L1) $x + y = y + x,$

L2) $(x + y) + z = x + (y + z),$

L3) $x + \theta = x$ *olacak şekilde bir* $\theta \in X$ *mevcut,*

L4) $x + (-x) = \theta$ *olacak şekilde bir* $-x \in X$ *mevcut,*

L5) $1.x = x,$

L6) $\lambda (x + y) = \lambda x + \lambda y,$

L7) $(\lambda + \mu) x = \lambda x + \mu x,$

L8) $\lambda (\mu x) = (\lambda\mu) x$

şartlarını sağlarsa, X cümlesine $\mathcal{F}$ cismi üzerinde bir ***lineer(vektör) uzayı*** *denir [7].*

Tanım 2.1.2. *X bir vektör uzayı ve $Y \subset X$ olsun. X deki işlemlere göre Y alt cümlesi de bir vektör uzayı ise Y cümlesi bir* ***alt uzay*** *adını alır. Alt uzaylar bazen lineer katman olarak da adlandırılırlar [7].*

Lemma 2.1.1. *Bir $Y \subset X$ alt cümlesinin bir alt uzay olabilmesi için gerek ve yeter koşullar,*

i) Her $x, y \in Y$ için $x + y \in Y$

ii) Her $\alpha \in \mathcal{F}$ ve her $x \in Y$ için $\alpha x \in Y$

olmasıdır. Bu koşullar her $\alpha, \beta \in \mathcal{F}$ ve her $x, y \in Y$ için $\alpha x + \beta y \in Y$ olmasına denktir [7].

Tanım 2.1.3. *Her n pozitif tamsayısına bir $a_n \in \mathbb{R}$ sayısını karşılık getirilerek elde edilen $a_1, a_2, ..., a_n, ...$ sonsuz kümesi $\mathbb{R}$ de bir (a_n) dizisi oluşturur. Dizi genel terimi ya da $n-$inci terimi olarak bilinen bir kural yardımıyla verilir. Daha genel bir yaklaşımla her hangi bir X cümlesi içindeki bir diziyi formal olarak şu şekilde tanımlayabiliriz. Bir $s : \mathbb{N} \to X$ fonksiyonu bir* ***dizi*** *adını alır. Böyle bir fonksiyon X cümlesinin sayılabilir çokluktaki üyelerinin belirli bir sırada dizilmesini sağlar. n pozitif tamsayılarına karşı gelen cümle üyesi $a_n = s(n) \in X$ olur. Doğal olarak diziler X'e göre adlandırılır. Eğer $X = \mathbb{R}$ ise diziye* ***gerçel sayı dizisi****, X cümlesi karmaşık sayıların cümlesi ise diziye* ***karmaşık sayılar dizisi*** *adı verilir [7].*

Diziler bir noktaya yakınsadığında dizinin terimleri de belirli bir yerden sonra birbirlerine son derece yakın olurlar. Bu özelliği ölçmek için ilk sistematik yaklaşım Fransız matematikçi A.L. Cauchy olduğundan bu özelliğe sahip olan diziler Cauchy dizisi olarak adlandırılırlar.

Tanım 2.1.4. *Bir $(a_n) \subset \mathbb{R}$ dizisi her $\varepsilon > 0$ sayısına karşı gelen bir $N(\varepsilon)$ pozitif tamsayısı için $n, m \geq N$ alındığında $|a_n - a_m| < \varepsilon$ olacak şekilde bulunabiliyorsa (a_n) dizisine* ***Cauchy dizisi*** *denir [7].*

Açıkça görülebileceği gibi yakınsak her dizi bir Cauchy dizisidir. Bu önermenin tersi genelde doğru değildir.

Tanım 2.1.5. *Her $n \in \mathbb{N}$ için $a_{n+1} > a_n$ ise (a_n) dizisine* ***monoton artan****, $a_{n+1} < a_n$ ise diziye* ***monoton azalan*** *dizi denir [7].*

Tanım 2.1.6. *Her n için $a_n \leq b$ olacak şekilde bir $b \in \mathbb{R}$ sayısı mevcutsa (a_n) dizisine* ***üstten sınırlı bir dizi****, $a \leq a_n$ olacak biçimde bir $a \in \mathbb{R}$ mevcut ise (a_n) dizisine* ***alttan sınırlı bir dizi*** *denir. Hem alttan hem de üstten sınırlı bir dizi* ***sınırlı dizi*** *adını alır [7].*

Tanım 2.1.7. *Bir (a_n) dizisi verildiğinde her $k \in \mathbb{N}$ için $n_k < n_{k+1}$ olacak şekilde doğal sayıların (n_k) dizisi düşünüldüğünde (a_{n_k}) dizisine (a_n) dizisinin bir* ***alt dizisi*** *denir. Burada $(n_k) \subseteq \mathbb{N}$ olduğundan $(a_{n_k}) \subset (a_n)$ olduğu açıktır [7].*

Tanım 2.1.8. *$(a_n) \subset \mathbb{R}$ dizisi üstten sınırlı olmak üzere böyle bir dizinin üst limiti en büyük yığılma noktası yani yığılma noktaları cümlesinin supremumu olarak tanımlanır. Üst limit noktası $\limsup a_n$, $\limsup\limits_{n\to\infty}$ veya $\overline{\lim} a_n$ ile gösterilir. Benzer şekilde (a_n) dizisi alttan sınırlı ise dizinin alt limiti en küçük yığılma noktası yani yığılma noktaları cümlesinin infimumu olarak tanımlanır. Alt limit noktaları $\liminf a_n$, $\liminf\limits_{n\to\infty} a_n$ veya $\underline{\lim} a_n$ ile gösterilir [7].*

Tanım 2.1.9. *Bütün dizilerin cümlesini w ile gösterirsek; her $x = (x_k)$, $y = (y_k) \in w$ ve $\alpha \in \mathcal{F}$ olmak üzere,*

$$x + y = (x_k + y_k)$$

$$\alpha x = (\alpha x_k)$$

olarak tanımlanan işlemler altında w bir lineer uzaydır. $\lambda \subset w$ olmak üzere λ, w üzerinde tanımlı lineer uzay işlemleri ile birlikte bir vektör uzayı ise başka bir ifade ile eğer λ; w'nın bir alt uzayı ise λ uzayına bir ***dizi uzayı*** *denir [8].*

Tanım 2.1.10. ℓ_∞ *sınırlı,* c *yakınsak,* c_0 *sıfıra yakınsak ve* ℓ_p *de* p*-mutlak yakınsak dizilerin uzayını göstermek üzere;*

$$\ell_\infty = \left\{ x = (x_k) \in w : \sup_{k\in N} |x_k| < \infty \right\},$$
$$c = \left\{ x = (x_k) \in w : \lim_{k\to\infty} x_k \ mevcut \right\},$$
$$c_0 = \left\{ x = (x_k) \in w : \lim_{k\to\infty} x_k = 0 \right\},$$
$$\ell_p = \left\{ x = (x_k) \in w : \sum_k |x_k|^p < \infty \right\}, \quad (1 \le p < \infty)$$

şeklinde tanımlanır.

ℓ_p dizi uzayında $p = 1$ alırsak,

$$\ell_1 = \left\{ x = (x_k) \in w : \sum_k |x_k| < \infty \right\}$$

mutlak yakınsak seri teşkil eden dizilerin uzayı elde edilir. Ayrıca,

$$cs = \left\{ x = (x_k) \in w : \lim_{n\to\infty} \left| \sum_{k=0}^{n} x_k - \ell \right| = 0, \exists \ell \in \mathbb{C} \right\}$$
$$bs = \left\{ x = (x_k) \in w : \sup_{n\in\mathbb{N}} \left| \sum_{k=0}^{n} x_k \right| < \infty \right\}$$

cümleleri de bir lineer uzay olup sırası ile **yakınsak seri teşkil eden dizilerin uzayı** ve **sınırlı seri teşkil eden dizilerin uzayı** ya da kısaca yakınsak serilerin ve sınırlı serilerin uzayı olarak adlandırılırlar [8, 9].

Tanım 2.1.11. λ *bir dizi uzayı,* A *da sonsuz bir matris olmak üzere,*

$$\lambda_A = \{ x = (x_k) \in w : Ax \in \lambda \} \tag{2.1.1}$$

olarak tanımlanan cümleye A *matrisinin* $\lambda-$***etki alanı*** *denir. Burada* λ_A *da bir dizi uzayıdır [9].*

Bir λ dizi uzayında bir sonsuz A matrisinin λ_A etki alanı ile ilgili olarak yapılmış olan çalışmalarla ilgili olarak Feyzi Başar'ın "Summability Theory and Its Applications" [8] kitabındaki 50 nolu sayfadaki tabloya ilaveten literatürdeki [10–19] çalışmaları incelemek faydalı olacaktır.

Tanım 2.1.12. *ℓ_∞^λ; $\lambda-$sınırlı, c^λ; $\lambda-$yakınsak, c_0^λ; $\lambda-$sıfır ve ℓ_p^λ; $\lambda-$tipinde $p-$mutlak yakınsak dizilerin uzayını göstermek üzere;*

$$\ell_\infty^\lambda = \left\{ x = (x_k) \in w : \sup_n \left| \frac{1}{\lambda_n} \sum_{k=0}^{n} (\lambda_k - \lambda_{k-1}) x_k \right| < \infty \right\},$$

$$c^\lambda = \left\{ x = (x_k) \in w : \lim_{n \longrightarrow \infty} \left(\frac{1}{\lambda_n} \sum_{k=0}^{n} (\lambda_k - \lambda_{k-1}) x_k \right) \text{ limiti mevcut} \right\},$$

$$c_0^\lambda = \left\{ x = (x_k) \in w : \lim_{n \longrightarrow \infty} \left(\frac{1}{\lambda_n} \sum_{k=0}^{n} (\lambda_k - \lambda_{k-1}) x_k \right) = 0 \right\},$$

$$\ell_p^\lambda = \left\{ x = (x_k) \in w : \sum_{n=0}^{\infty} \left| \frac{1}{\lambda_n} \sum_{k=0}^{n} (\lambda_k - \lambda_{k-1}) x_k \right|^p < \infty \right\}$$

olarak tanımlanır [5, 6].

Cesàro yakınsaklık kavramı İtalyan matematikçi E. Cesàro $(1859 - 1906)$ tarafından verilmiştir.

Tanım 2.1.13. *λ klasik dizi uzaylarından ℓ_∞, c, c_0 ve ℓ_p yi göstermek üzere λ_{C_1} dizi uzaylarından her birine, bir **Cesàro dizi uzayı** denir.*

Bir $x = (x_k)$ dizisinin C_1 dönüşümü olan $y = (y_k)$ dizisi her $k \in \mathbb{N}$ için,

$$x_k = (C_1 x)_k = \frac{1}{k+1} \sum_{j=0}^{k} x_j$$

şeklinde tanımlanır.

[4] nolu çalışmada Ng ve Lee, mutlak olmayan tipten X_p ve X_∞ Cesàro dizi uzaylarını; C_1-dönüşümleri sırası ile ℓ_p ve ℓ_∞ da olan tüm dizilerin cümlesi olarak tanımladılar ve $1 < p < \infty$ olmak üzere X_p ve X_∞ 'un $\beta-$duallerini elde ettiler. Ng ve Lee [4] den sonra [20] nolu çalışmada Şengönül ve Başar mutlak olmayan tipten $\tilde{c}_0$ ve $\tilde{c}$ Cesàro dizi uzaylarını; C_1-dönüşümleri sırası ile c_0 ve c de olan tüm dizilerin cümlesi olarak tanımladılar. Daha açık olarak yazılacak olursa,

$$\tilde{c}_0 = \left\{ x = (x_k) \in w : \lim_{n \longrightarrow \infty} \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^{n} x_k = 0 \right\},$$

$$\tilde{c} = \left\{ x = (x_k) \in w : \lim_{n \longrightarrow \infty} \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^{n} x_k \text{ mevcut} \right\}.$$

(2.1.1) de verilen matris etki alanı gösterimini kullanacak olursa X_∞, X_p, $\tilde{c}_0$ ve $\tilde{c}$ dizi uzayları

$$X_\infty = (\ell_\infty)_{C_1},\ X_p = (\ell_p)_{C_1},\ \tilde{c}_0 = (c_0)_{C_1} \text{ ve } \tilde{c} = (c)_{C_1}$$

şeklinde yazılabilir.

Açık olarak,

$$X_p \subset \tilde{c}_0 \subset \tilde{c} \subset X_\infty$$

kapsaması geçerlidir [8].

Tanım 2.1.14. $q = (q_k)$; $q_0 > 0$ *olmak üzere terimleri negatif olmayan reel sayıların bir dizisi ve her* $n \in \mathbb{N}$ *için*

$$Q_n = \sum_{k=0}^{n} q_k$$

olmak üzere bir $q = (q_k)$ *dizisinin* ***Nörlund ortalamaları****; her* $k, n \in \mathbb{N}$ *için* $\left(\bar{N}_q\right)_{n,k} = (q^t_{nk})$ *matrisi ile aşağıdaki gibi tanımlanır:*

$$q^t_{nk} = \begin{cases} \frac{q_{n-k}}{Q_n} & ; \quad 0 \le k \le n, \\ 0 & ; \quad k > n. \end{cases}$$

(2.1.1) gösterimi ile

$$\left(\bar{N}, q\right)_0 = (c_0)_{\bar{N}_q}, \left(\bar{N}, q\right) = (c)_{\bar{N}_q} \ \text{ ve } \left(\bar{N}, q\right)_\infty = (\ell_\infty)_{\bar{N}_q}$$

şeklinde yazılabilir [8, 21].

Tanım 2.1.15. x, y *iki dizi ve* X *de* w*'nın keyfi bir alt cümlesi olmak üzere ,*

$$xy = (x_k y_k)_{k=0}^{\infty}$$

ve

$$y^{-1} * X = \{a \in w : ya \in X\}$$

olarak tanımlanır [2, 8].

Tanım 2.1.16. *$E = (e_{nk})_{n,k=0}^{\infty}$ matrisi her $n, k \in \mathbb{N}$ için*

$$e_{nk} = \begin{cases} 1 & ; \quad 0 \leq k \leq n \\ 0 & ; \quad k > n \end{cases}$$

olmak üzere; her $u, \upsilon \in \mathcal{U}$ için

$$\begin{aligned} Z &= Z(u, \upsilon; X) \\ &= \upsilon^{-1} * \left(u^{-1} * X\right)_E \\ &= \left\{ z \in w : x = \left(u_n \sum_{k=0}^{n} \upsilon_k z_k \right)_{n=0}^{\infty} \in X \right\} \end{aligned}$$

cümlesi tanımlanır. Eğer

i) Z uzayında $u = \upsilon = e$ ve $X = c$ alınırsa; yakınsak seri teşkil eden dizilerin uzayı cs elde edilir yani, $Z = cs$ olur.

ii) Z uzayında $u = \upsilon = e$ ve $X = \ell_\infty$ alınırsa; sınırlı seri teşkil eden dizilerin uzayı bs elde edilir yani, $Z = bs$ olur.

iii) Z uzayında eğer $\upsilon = q$ bir pozitif dizi, her $n = 0, 1, ...$ için $Q_n = \sum_{k=0}^{n} q_k$ olmak üzere $u = \frac{1}{Q}$ ve $X = c_0$, $X = c$ ve $X = \ell_\infty$ alınırsa, $Z = \left(\bar{N}, q\right)_0$, $Z = \left(\bar{N}, q\right)$ ve $Z = \left(\bar{N}, q\right)_\infty$ uzayları elde edilir ki bu uzaylar sırası ile sıfıra yakınsayan ağırlıklı ortalamaların, yakınsak ağırlıklı ortalamaların ve sınırlı ağırlıklı ortalamaların cümlesidir.

iv) Z uzayında eğer $\upsilon = e$, $u = \left(\frac{1}{n+1}\right)_{n=0}^{\infty}$ ve $X = \ell_p$ $(1 \leq p \leq \infty)$ alınırsa mutlak olmayan tipten Cesàro dizi uzayları elde edilir [2, 8].

Tanım 2.1.17. *$U^+ = \{x = (x_n) \in w : x_n > 0 \text{ her } n \in \mathbb{N}\}$ cümlesi ve daha önce verdiğimiz ℓ_p cümlesi gözönüne alındığında Wilansky'nin gösterimi ile verilen herhangi bir $\alpha = (\alpha_n) \in U^+$ ve $p \geq 1$ için $\ell_p(\alpha)$ cümlesi*

$$\begin{aligned} \ell_p(\alpha) &= \left(\frac{1}{\alpha}\right)^{-1} * \ell_p \\ &= \left\{ x = (x_n) \in w : \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{|x_n|}{\alpha_n}\right)^p < \infty \right\} \end{aligned}$$

şeklinde tanımlanır. Açık olarak burada $p = 1$ *alınırsa*

$$\begin{aligned}\ell_1(\alpha) &= \left(\frac{1}{\alpha}\right)^{-1} * \ell_1 \\ &= \left\{x = (x_n) \in w : \sum_{n=1}^{\infty} \frac{|x_n|}{\alpha_n} < \infty\right\}\end{aligned}$$

elde edilir [2].

Tanım 2.1.18. $0 < r < 1$ *ve her* $k, n \in \mathbb{N}$ *için* $\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!.(n-k)!}$ *olmak üzere* $r-$*inci sıradan* E^r-*Euler ortalamaları her* $k, n \in \mathbb{N}$ *için* $E^r = (e_{nk}^r)$ *matrisi ile*

$$e_{nk}^r = \begin{cases} \binom{n}{k}.(1-r)^{n-k}.r^k & ; \quad 0 \le k \le n \\ 0 & ; \quad k > n \end{cases}$$

şeklinde tanımlanır.

$1-$inci sıradan orijinal E_1- Euler ortalamaları her $k, n \in \mathbb{N}$ için $E_1 = (a_{nk})$ matrisi ile

$$a_{nk} = \begin{cases} \binom{n}{k}.2^{-n} & ; \quad 0 \le k \le n \\ 0 & ; \quad k > n \end{cases}$$

olarak tanımlanır ki E_1'in $q-$uncu sıradan E_q genelleştirmesi her $k, n \in \mathbb{N}$ için $E_q = (e_{nk}^q)$ matrisi

$$e_{nk}^q = \begin{cases} \binom{n}{q}.(q+1)^{-n}.q^{n-k} & ; \quad 0 \le k \le n \\ 0 & ; \quad k > n \end{cases}$$

şeklindedir.

Açık olarak E^r matrisinde $r = (q+1)^{-1}$ alınırsa E_q elde edilir. $r-$inci sıradan Euler ortalamaları üzerine ilk çalışmalar $1922 - 1923$ yıllarında Knopp tarafından [22, 23] yapılmış olduğundan dolayı bazı yazarlar E^r matrisini Euler-Knopp matrisi olarak refere etmişlerdir. Orijinal Euler ortalamaları 1755 de L. Euler tarafından verilmiştir.

$$E^r.E^s = (e_{nk}^r).(e_{nk}^s) = (e_{nk}^{rs}) = E^{rs}$$

olduğu, $r \neq 0$ olmak üzere E^r nin invertible olduğu ve $(E^r)^{-1}$ olduğu bilinir [8].

Tanım 2.1.19. *λ dizi uzayı ℓ_∞, c, c_0 ve ℓ_p klasik dizi uzaylarından herhangi birini göstermek üzere λ_{E^r} etki alanına **Euler dizi uzayı** denir. Euler dizi uzayları Altay-Başar [1], Altay et al.[24] ve Mursaleen et.al.[25] başta olmak üzere birçok yazar tarafından incelenmiştir.*

Bir $x = (x_k) \in w$ dizisinin E^r-dönüşümü $y = (y_k)$ dizisi her $k, n \in \mathbb{N}$ için

$$y_k = (E^r x)_k = \sum_{j=0}^{k} \binom{k}{j} (1-r)^{k-j} r^j x_j$$

dir.

Mutlak olmayan tipten e_p^r, e_0^r, e_c^r ve e_∞^r Euler dizi uzayları; E^r-dönüşümleri sırası ile ℓ_p, c_0, c ve ℓ_∞ uzaylarında olan bütün dizilerin kümesidir:

$$\begin{aligned}
e_p^r &= \left\{ x = (x_k) \in w : \sum_n \left| \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (1-r)^{n-k} r^k x_k \right|^p < \infty \right\}, \\
e_0^r &= \left\{ x = (x_k) \in w : \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (1-r)^{n-k} r^k x_k = 0 \right\}, \\
e_c^r &= \left\{ x = (x_k) \in w : \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (1-r)^{n-k} r^k x_k \text{ mevcut } \right\}, \\
e_\infty^r &= \left\{ x = (x_k) \in w : \sup_{n\in\mathbb{N}} \left| \binom{n}{k} (1-r)^{n-k} r^k x_k \right| < \infty \right\}.
\end{aligned}$$

tekrar (2.1.1) gösterimi ile birlikte e_p^r, e_0^r, e_c^r ve e_∞^r dizi uzayları

$$e_p^r = (\ell_p)_{E^r}\,,\ e_0^r = (c_0)_{E^r}\,,\ e_c^r = (c)_{E^r} \text{ ve } e_\infty^r = (\ell_\infty)_{E^r}$$

olarak da gösterilebilir [8].

Tanım 2.1.20. *λ ve μ dizi uzayları için $S(\lambda : \mu)$ çarpım uzayı,*

$$S(\lambda : \mu) = \{z = (z_k) \in w : x.z = (x_k.z_k) \in \mu \textit{ her } x = (x_k) \in \lambda\}$$

şeklinde tanımlanır. Bir ν dizi uzayı için,

$$\nu \subset \lambda \textit{ ise } S(\lambda, \mu) \subset S(\nu, \mu)$$

$$\mu \subset \nu \textit{ ise } S(\lambda, \mu) \subset S(\lambda, \nu)$$

olduğu kolayca gösterilebilir [8].

Tanım 2.1.21. *Bir x dizi uzayının $\alpha-$, $\beta-$ ve $\gamma-$ duallari sırası ile X^{α}, X^{β} ve X^{γ} olarak gösterilir ve*

$$X^{\alpha} = \left\{ a = (a_k) \in w : \sum_{k=0}^{\infty} |a_k x_k| < \infty \text{ her } x = (x_k) \in X \right\},$$

$$X^{\beta} = \left\{ a = (a_k) \in w : \sum_{k=0}^{\infty} a_k x_k \text{ yakınsak her } x = (x_k) \in X \right\},$$

$$X^{\gamma} = \left\{ a = (a_k) \in w : \sum_{k=0}^{\infty} a_k x_k \text{ sınırlı her } x = (x_k) \in X \right\},$$

şeklinde tanımlanır [6].

Tanım 2.1.20 de verilen çarpım uzayı tanımı kullanıldığında bir X dizi uzayının $\alpha-$, $\beta-$ ve $\gamma-$ duallari,

$$X^{\alpha} = S(\lambda : \ell_1), \; X^{\beta} = S(\lambda : cs) \text{ ve } X^{\gamma} = S(\lambda : bs)$$

olarak yazılabilir.

$\alpha-$, $\beta-$ ve $\gamma-$ duallerine sırası ile **Köthe-Toeplitz duali, genelleştirilmiş Köthe-Toeplitz duali** ve **Garling duali de** denir [8].

Tanım 2.1.22. *X ve Y bir dizi uzayı ve A bir sonsuz matris olmak üzere, $A \in (X, Y)$ olması için gerek ve yeter şart her $x \in X$ için $Ax \in Y$ olmasıdır. Yani, her $x \in X$ için x'in $A-$dönüşümü vardır ve Y uzayının içindedir [8].*

Tanım 2.1.23. *Yakınsak bir diziyi, limiti koruyarak yakınsak bir diziye dönüştüren bir A matrisine regülerdir denir ve $A \in (c,\ c,\ p)$ ile gösterilir [26].*

$(c,\ c,\ p)$ sınıfını karakterize eden sonuç ünlü Silverman-Toeplitz teoremidir. Şartların gerekliliğini Alman matematikçi Otto Toeplitz $(1881 - 1940)$ şartların yeterliliğini Silverman ispatlamıştır.

Teorem 2.1.1. *Bir $A = (a_{nk})$ matrisinin regüler olması için gerek ve yeter şartlar*

i) Her n için $\sum\limits_{k=1}^{\infty} |a_{nk}| < K$ olacak şekilde bir K sabiti vardır,

ii) Her k için $\lim\limits_{n\to\infty} a_{nk} = 0$ dır,

iii) $\lim\limits_{n\to\infty} \sum\limits_{k=1}^{\infty} a_{nk} = 1$

olmasıdır [26].

Tanım 2.1.24. *X boş olmayan bir cümle ve $d : X \times X \to \mathbb{R}$ bir fonksiyon olsun. Her $x, y, z \in X$ için,*

M1) $d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$,

M2) $d(x, y) = d(y, x)$,

M3) $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$

*şartlarını sağlayan d fonksiyonuna X üzerinde bir **metrik** ve (X, d) ikilisine de bir **metrik uzay** denir [27].*

1906 da Fréchet tarafından metrik uzay kavramı verilmiş olmasına rağmen ilk olarak bu deyimi kullanan Hausdorff olmuştur.

Tanım 2.1.25. *(X, d) bir metrik uzay olmak üzere bu uzaydaki her Cauchy dizisi yakınsak ise X'e bir **tam metrik uzay** denir [7].*

Tanım 2.1.26. *X bir lineer uzay ve $\| \,.\, \|: X \to \mathbb{R}$ olsun. Eğer $x, y \in X$ vektörü ve her α skaleri için;*

N1) $\|\theta\| = 0$,

N2) $\|\alpha x\| = |\alpha| \,.\, \|x\|$,

N3) $\|x + y\| = \|x\| + \|y\|$

*şartlarını sağlıyorsa, $\| \,.\, \|$ fonksyonuna X üzerinde bir yarı-norm ve $(X, \| \,.\, \|)$ ikilisine de bir **yarı-normlu uzay** denir. Eğer X lineer uzayı N2) ve N3) şartlarıyla beraber $\|x\| = 0 \Rightarrow x = 0$ şartını sağlıyorsa o zaman $\| \,.\, \|$ fonksiyonuna bir norm ve $(X, \| \,.\, \|)$ ikilisine de bir **normlu uzay** denir [27].*

Tanım 2.1.27. *$d(x, y) = \|x - y\|$ ile tanımlanan $d : X \times X \to \mathbb{R}$ fonksiyonu X vektör uzayı üzerinde bir metriktir. Normdan üretilen bu metriğe X normlu uzayı üzerinde **doğal metrik** denir [7].*

Tanım 2.1.28. *Doğal metriğe göre tam olan bir normlu uzaya* ***Banach uzayı*** *denir [7].*

Fréchet tarafından ilk olarak Banach uzayı adı kullanılmıştır.

Tanım 2.1.29. *H bir vektör uzayı olmak üzere $\langle .,. \rangle : H \times H \to \mathbb{C}$ fonksiyonu, daha doğru bir deyişle fonksiyoneli aşağıdaki kuralları sağladığı takdirde bir* ***iç çarpım*** *adını alır:*

(i) Her $u, \upsilon \in H$ için $\langle u, \upsilon \rangle = \overline{\langle \upsilon, u \rangle}$.

(ii) Her $u, \upsilon \in H$ ve $\alpha \in \mathbb{C}$ için $\langle \alpha u, \upsilon \rangle = \alpha \langle u, \upsilon \rangle$.

(iii) Her $u, \upsilon, \omega \in H$ için $\langle u + \upsilon, \omega \rangle = \langle u, \omega \rangle + \langle \upsilon, \omega \rangle$.

(iv) Her $u \in H$, $u \neq 0$ için $\langle u, u \rangle > 0$.

Buradaki üst çizgi kompleks eşleniği göstermektedir [7].

Teorem 2.1.2. *Herhangi bir H iç çarpım uzayında her $x, y \in H$ için,*

$$\|x + y\|^2 + \|x - y\|^2 = 2\left(\|x\|^2 + \|y\|^2\right)$$

eşitliği paralelkenar kuralı olarak verilir [7].

Sonuç 2.1.1. *Bir norm paralel kenar kuralını sağlamıyor ise bu norm iç çarpım normu olamaz [7].*

Tanım 2.1.30. *Doğal metriğe göre iç çarpımdan üretilen doğal norm da X vektör uzayı üzerinde bir doğal metriği*

$$d(x, y) = \|x - y\| = \sqrt{\langle x - y, x - y \rangle}$$

fonksiyonu ile üretilir [7].

Tanım 2.1.31. *Doğal metriğe göre tam olan bir iç çarpım uzayına* ***Hilbert uzayı*** *denir [7].*

Tanım 2.1.32. *$0 < p \leq 1$ ve X bir lineer uzay olmak üzere $\| \ . \ \| : X \to \mathbb{R}$ dönüşümü her $x, y \in X$ için,* *i)* $\|x\| \geq 0$,

ii) $\|x\| = 0 \Leftrightarrow x = \theta$,

iii) $\|\alpha x\| = |\alpha|^p . \|x\|$,

iv) $\|x + y\| = \|x\| + \|y\|$,

şartlarını sağlarsa $(X, \| \, . \, \|)$ *ikilisine bir* p***-normlu uzay*** *denir [27].*

Tanım 2.1.33. *Lineer uzaylar arasındaki dönüşümlere operatör denir.* X *ve* Y *aynı* $\mathcal{F}$ *cismi üzerinde iki lineer uzay olsun.* $T : X \to Y$ *operatörü, her* $x, y \in X$ *ve* $\alpha \in \mathcal{F}$ *için,*

$$T(x + y) = T(x) + T(y) \quad ve \quad T(\alpha x) = \alpha T(x)$$

şartlarını sağlıyorsa T*' ye* ***lineer operatör*** *denir [27].*

Tanım 2.1.34. X *ve* Y *aynı bir* $\mathcal{F}$ *cismi üzerinde tanımlanan iki vektör uzayı olmak üzere* $T : X \to Y$ *lineer dönüşümü birebir ve örten ise bu dönüşüme* ***lineer izomorfizm*** *adı verilir [7].*

Tanım 2.1.35. *Üzerindeki lineer topoloji ile birlikte herhangi bir* λ *dizi uzayına, eğer* $p_i : \lambda \to K$, $p_i(x) = x_i$, $i \geq 1$ *dönüşümlerinin herbiri sürekli ise,* K***-uzayı*** *denir [28].*

Tanım 2.1.36. *Eğer* λ *bir Banach uzayı ise* λ K*-uzayına bir* BK***-uzayı*** *denir [28].*

Bilindiği gibi $0 < p < 1$ ve $1 \leq p < \infty$ olması durumlarında ℓ_p bir tam p-normlu uzay ve bir BK-uzayıdır. Burada ℓ_p üzerindeki norm,

$$\|x\|_{\ell_p} = \sum_k |x_k|^p \;\; ; \;\; (0 < p < 1)$$

ve

$$\|x\|_{\ell_p} = \left(\sum_k |x_k|^p \right)^{\frac{1}{p}} \; ; \;\; (1 \leq p < \infty)$$

dur [27].

Tanım 2.1.37. *$n \geq 1$ olmak olmak üzere, e^n ve e dizileri*

$$e_m^n = \begin{cases} 0 & , \quad eğer\ m \neq n \\ 1 & , \quad eğer\ m = n \end{cases},$$

e^n nin m-inci koordinatını göstermek üzere,

$$e^n = (e_1^n, e_2^n, e_3^n, ..., e_m^n, ...) = (0, 0, 0, ..., 1, 0, 0, ...)$$

ve

$$e = (1, 1, 1, ...)$$

olarak tanımlanır [28].

Şimdi 1927'de J.Schauder tarafından verilen baz kavramını ifade edelim.

Tanım 2.1.38. *(X, p) bir paranormlu lineer uzay olsun. Eğer X, $\forall x \in X$ için bir tek (α_n) skaler dizisi var olmak üzere $\left\| x - \sum_{n=1}^{k} a_n x_n \right\| \to 0$ $(k \to \infty)$ olacak şekilde bir (x_n) dizisi içeriyorsa bu (x_n) dizisine X in bir* ***Schauder bazı*** *denir [27].*

Teorem 2.1.3. *w daki vektörlerin $(e_k) = (e_1, e_2, ...)$ dizisi; $\ell(p)$, c_0 ve ω uzaylarının her biri için bilinen paranorm veya normları altında bir Schauder bazıdır ki buradaki paranormlar ve norm aşağıdaki gibidir.*

$$\ell(p) \text{ üzerinde paranorm } g(x) = \left(\sum_k |x_k|^{p_k} \right)^{\frac{1}{M}}$$

burada $M = \max\left(1,\ 2^{\sup_k p_k - 1}\right)$ dir.

$$c_0 \text{ üzerinde norm } g(x) = \sup_k |x_k|$$

$$w \text{ üzerinde paranorm } g(x) = \sum_k \frac{1}{2^k} \frac{|x_k|}{1 + |x_k|}.$$

Bununla birlikte $(e, e_1, e_2, ...)$ dizisi de c'nin üzerindeki bilinen

$$\|x\| = \sup_k |x_k|$$

normu altında bir Schauder bazıdır [29].

Teorem 2.1.4. *Eğer $\{b(n)\}_{n\in\mathbb{N}}$; (X,d) lineer metrik uzayının bir Schauder bazı ise bu taktirde her $z,\tilde{z}\in Z$ için $d_U(z,\tilde{z})=d(Uz,U\tilde{z})$ olarak tanımlanan d_U metriği ile $\{Vb^{(n)}\}_{n\in\mathbb{N}}$; $Z=X_U$ nun bir bazıdır. Burada U bir üçgen matris ve V; U'nun ters matrisini göstermektedir [8].*

Uyarı 2.1.1. *Bir X lineer metrik uzayının X_U matris etki alanının bir baza sahip olması için gerek ve yeter şart X in bir baza sahip olmasıdır [8].*

Tanım 2.1.39. *Bir X metrik uzayının bir M alt cümlesi verildiğinde eğer $\bar{M}=X$ ise, M cümlesi X de **yoğun'** dur denir [7].*

Tanım 2.1.40. *Bir (X,d) metrik uzayı sayılabilir ve yoğun bir alt cümle içerirse X'e **ayrılabilir** denir [7].*

Teorem 2.1.5. *Bir Schauder bazına sahip olan bir normlu X uzayı ayrılabilirdir [7].*

Tanım 2.1.41. *Sonlu sayıda hepsi sıfır olmayan x_i,y_i, $i=1,2,...,n$ reel ya da kompleks sayılar, $|x_i|\geq 0$ ile bir reel sayının mutlak değeri ya da bir kompleks sayının modülü ve p,q >1 sayıları $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$ olmak üzere,*

$$\left|\sum_{i=1}^{n}x_iy_i\right|\leq\sum_{i=1}^{n}|x_iy_i|\leq\left(\sum_{i=1}^{n}|x_i|^p\right)^{\frac{1}{p}}\cdot\left(\sum_{i=1}^{n}|y_i|^q\right)^{\frac{1}{q}}$$

*eşitsizliğine **Hölder eşitsizliği** adı verilir [7].*

Geniş uygulama alanlarına sahip faydalı bir eşitsizliği Alman matematikçi Herman Minkowski $(1864-1909)$ elde etmiştir. Şimdi bu eşitsizliği ifade edelim.

Tanım 2.1.42. *Sonlu sayıda hepsi sıfır olmayan x_i,y_i, $i=1,2,...,n$ reel ya da kompleks sayılar ve $1<p<\infty$ sayısı gözönüne alındığında,*

$$\left(\sum_{i=1}^{n}|x_i+y_i|^p\right)^{\frac{1}{p}}\leq\left(\sum_{i=1}^{n}|x_i|^p\right)^{\frac{1}{p}}+\left(\sum_{i=1}^{n}|y_i|^p\right)^{\frac{1}{p}}$$

*eşitsizliği **Minkowski eşitsizliği** adını alır [7].*

Tanım 2.1.43. *Eğer* $p > 1$ *ve* $(a_k)_{k=0}^{\infty}$ *negatif olmayan sayıların bir dizisi ise* ***Hardy-discrete eşitsizliği,***

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}a_k\right)\leq\left(\frac{p}{p-1}\right)^{p}\sum_{k=1}^{n}a_k^{p}$$

şeklinde tanımlanır [5].

Tanım 2.1.44. $f(x)$ *ve* $g(x)$ *fonksyonları verilmiş olsun. Sabit bir* x_0 *noktası için kabul edelim ki* $g(x)$, x_0*'ın açık bir komşuluğunda pozitif ve sürekli olsun. Bu durumda* x_0*'ın açık komşuluğunda* $|f(x)| \leq K.g(x)$ *olacak şekilde bir* K *sabiti varsa*

$$f(x) = O(g(x)) \quad (x \to x_0)$$

dır [30].

3. $\lambda-$Yakınsaklık ve $\lambda-$Sınırlılık

Bu bölümde pozitif reel sayıların kesin artan ve sonsuza ıraksayan bir dizisi kullanılarak $\lambda-$yakınsaklık ve $\lambda-$sınırlılık kavramları verildikten sonra yakınsaklık ile $\lambda-$yakınsaklık ve sınırlılık ile $\lambda-$sınırlılık başta olmak üzere ileride kullanacağımız ilgili teoremler ve lemmalar sunulmuştur.

3.1 $\lambda-$Yakınsak ve $\lambda-$Sınırlı Diziler

Bu çalışma boyunca $\lambda = (\lambda_k)_{k=0}^{\infty}$ pozitif reel sayıların kesin artan ve sonsuza giden bir dizisi yani;

$$0 < \lambda_0 < \lambda_1 < ... \text{ ve } k \longrightarrow \infty \text{ iken } \lambda_k \longrightarrow \infty \tag{3.1.1}$$

olsun.

Eğer $n \to \infty$ iken $\Lambda(x) \to l$ ise $x = (x_k) \in w$ dizisine $\lambda-$yakınsaktır ve $l \in \mathbb{C}$ sayısına x'in $\lambda-$limiti denir. Burada her $n \in \mathbb{N}$ için,

$$\Lambda_n(x) = \frac{1}{\lambda_n}\sum_{k=0}^{n}(\lambda_k - \lambda_{k-1})\,x_k \tag{3.1.2}$$

dır.

Özel olarak, eğer $n \to \infty$ iken $\Lambda(x) \to 0$ ise x dizisine $\lambda-$sıfır dizisi denir. Ayrıca eğer $\sup|\Lambda_n(x)| < \infty$ ise x dizisine $\lambda-$sınırlıdır denir. Burada her negatif alt indisli terimin sıfıra eşit olduğunu kabul edilir. Yani $\lambda_{-1} = 0$ ve $x_{-1} = 0$ dır. Eğer $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$ ise,

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{\lambda_n}\sum_{k=0}^{n}(\lambda_k - \lambda_{k-1})\,|x_k - a|\right) = 0$$

dır. Bu durumda,

$$\lim_{n\to\infty}|\Lambda_n(x) - a| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{1}{\lambda_n}\sum_{k=0}^{n}(\lambda_k - \lambda_{k-1})\,(x_k - a)\right| = 0$$

olduğundan $\lim \Lambda_n(x) = a$ olur ve böylece x dizisi a'ya $\lambda-$yakınsaktır. Böylece bildiğimiz manadaki yakınsaklık aynı limit değerine $\lambda-$yakınsaklığı gerektirir. Bu bizi aşağıdaki temel sonuca götürür.

Lemma 3.1.1. *Her yakınsak dizi aynı limit değerine $\lambda-$yakınsaktır [6].*

Lemma 3.1.2. *Eğer bir $\lambda-$yakınsak dizi bildiğimiz manada yakınsak ise bu taktirde aynı $\lambda-$limitine yakınsamak zorundadır [6].*

Şimdi $x = (x_k) \in w$ ve $n \geq 1$ olsun. Bu taktirde (3.1.2) kullanılarak,

$$\begin{aligned}
x_n - \Lambda_n(x) &= \frac{1}{\lambda_n}\sum_{i=0}^{n}(\lambda_i - \lambda_{i-1})(x_n - x_i) \\
&= \frac{1}{\lambda_n}\sum_{i=0}^{n-1}(\lambda_i - \lambda_{i-1})(x_n - x_i) \\
&= \frac{1}{\lambda_n}\sum_{i=0}^{n-1}(\lambda_i - \lambda_{i-1})\sum_{k=i+1}^{n}(x_k - x_{k-1}) \\
&= \frac{1}{\lambda_n}(\lambda_0 - \lambda_{-1})\sum_{k=1}^{n}(x_k - x_{k-1}) + \frac{1}{\lambda_n}(\lambda_1 - \lambda_0)\sum_{k=2}^{n}(x_k - x_{k-1}) \\
&\quad + \frac{1}{\lambda_n}(\lambda_2 - \lambda_1)\sum_{k=3}^{n}(x_k - x_{k-1}) + ... + \frac{1}{\lambda_n}(\lambda_{n-1} - \lambda_{n-2})\sum_{k=n}^{n}(x_k - x_{k-1}) \\
&= \frac{1}{\lambda_n}(\lambda_0 - \lambda_{-1})(x_n - x_0) + \frac{1}{\lambda_n}(\lambda_1 - \lambda_0)(x_n - x_1) \\
&\quad + \frac{1}{\lambda_n}(\lambda_2 - \lambda_1)(x_n - x_2) + ... + \frac{1}{\lambda_n}(\lambda_{n-1} - \lambda_{n-2})(x_n - x_{n-1}) \\
&= \frac{1}{\lambda_n}\left[\lambda_0(x_1 - x_0) + \lambda_1(x_2 - x_1) + \lambda_2(x_3 - x_2) + ... + \lambda_{n-1}(x_n - x_{n-1})\right] \\
&= \frac{1}{\lambda_n}\sum_{k=1}^{n}(x_k - x_{k-1})\sum_{i=0}^{k-1}(\lambda_i - \lambda_{i-1}) \\
&= \frac{1}{\lambda_n}\sum_{k=1}^{n}\lambda_{k-1}(x_k - x_{k-1})
\end{aligned}$$

elde edilir. Böylece her $x = (x_k) \in w$ için,

$$x_n - \Lambda_n(x) = S_n(x) \quad ; \quad (n \in \mathbb{N}), \tag{3.1.3}$$

olur. Burada $S(x) = (S_n(x))_{n=0}^{\infty}$ dizisi,

$$S_0(x) = 0 \text{ ve } S_n(x) = \frac{1}{\lambda_n}\sum_{k=1}^{n}\lambda_{k-1}(x_k - x_{k-1}) \;\; ; \;\; (n \geq 1) \tag{3.1.4}$$

olarak tanımlanır. Şimdi aşağıdaki sonuç, (3.1.3) kullanılarak Lemma 3.1.2 den elde edilir.

Lemma 3.1.3. *$\lambda-$yakınsak bir x dizisinin bildiğimiz manada yakınsak olması için gerek ve yeter şart $S(x) \in c_0$ olmasıdır [6].*

Lemma 3.1.4. *Her sınırlı dizi $\lambda-$sınırlıdır [6].*

İspat. Şimdi $x = (x_k)$ sınırlı bir dizi, yani $x \in \ell_\infty$ olsun. Bu taktirde her $k \in \mathbb{N}$ için $|x_k| \leq M$ olacak şekilde bir $M > 0$ sabiti vardır. Böylece her $n \in \mathbb{N}$ için,

$$\begin{aligned}
|\Lambda_n(x)| &= \left| \frac{1}{\lambda_n} \sum_{k=0}^{n} (\lambda_k - \lambda_{k-1}) x_k \right| \\
&\leq \frac{1}{|\lambda_n|} \sum_{k=0}^{n} (\lambda_k - \lambda_{k-1}) |x_k| \\
&\leq \frac{1}{\lambda_n} \sum_{k=0}^{n} (\lambda_k - \lambda_{k-1}) \sup_k |x_k| \\
&= \frac{M}{\lambda_n} \sum_{k=0}^{n} (\lambda_k - \lambda_{k-1}) \\
&= \frac{M}{\lambda_n} \left[(\lambda_0 - \lambda_{-1}) + (\lambda_1 - \lambda_0) + ... + (\lambda_n - \lambda_{n-1}) \right] \\
&= \frac{M}{\lambda_n} \lambda_n \\
&= M
\end{aligned}$$

elde edilir ki bu da x'in $\lambda-$sınırlı olduğunu gösterir. □

İleride bu koşullu önermenin tersinin doğru olmadığını göstereceğiz. Ayrıca her $0 < p < \infty$ için (3.1.1) ifadesini sağlayan bir $\lambda = (\lambda_k)$ dizisi vardır öyle ki; $\sum_n |x_n|^p$ serisinin yakınsaklığı $\sum_n |\Lambda_n(x)|^p$ serisinin yakınsaklığını gerektirmez ve terside geçerlidir.

Bundan önce her $n, k \in \mathbb{N}$ için $\Lambda = (\lambda_{nk})_{n,k=0}^{\infty}$ sonsuz matrisini,

$$\lambda_{nk} = \begin{cases} \frac{\lambda_k - \lambda_{k-1}}{\lambda_n} & ; \quad (0 \leq k \leq n) \\ 0 & ; \quad (k > n) \end{cases} \tag{3.1.5}$$

şeklinde tanımlansın. Bu taktirde herhangi bir $x = (x_k) \in w$ dizisi için, (3.1.2) ile ifade edilen $\Lambda_n(x)$ verildiğinde x'in $\Lambda-$ dönüşümü $\Lambda(x) = (\Lambda_n(x))$ dizisidir. Bu yüzden bir x dizisinin $\lambda-$sınırlı olması için gerek ve yeter şart $\Lambda(x) \in \ell_\infty$ olmasıdır. Böylece x dizisinin $\lambda-$yakınsak olması için gerek ve yeter şart x'in $\lambda-$toplanabilir olmasıdır. Ayrıca eğer x dizisi $\lambda-$yakınsak ise o zaman x'in

$\lambda-$limiti, x'in $\Lambda-$limitinden başka birşey değildir. Aynı zamanda $0 < p < \infty$ olmak üzere bir x dizisinin $\lambda-$ tipinde $p-$mutlak yakınsaklığı $\Lambda(x) \in \ell_p$ olmasına denktir.

Ayrıca (3.1.5) de ifade edilen matrisin üçgensel olduğu açıktır. Yani her $k > n$ için $\lambda_{nk} = 0$ ve $k = n$ için $\lambda_{nn} \neq 0$ dır. Yani,

$$c_0^\lambda = \left\{ x = (x_k) \in w : \lim_{n \longrightarrow \infty} \left(\frac{1}{\lambda_n} \sum_{k=0}^{n} (\lambda_k - \lambda_{k-1}) x_k \right) = 0 \right\}$$

ve

$$c^\lambda = \left\{ x = (x_k) \in w : \lim_{n \longrightarrow \infty} \left(\frac{1}{\lambda_n} \sum_{k=0}^{n} (\lambda_k - \lambda_{k-1}) x_k \right) \text{ limiti mevcut} \right\}$$

dir.

Ayrıca $c_0 \subset c_0^\lambda$ ve $c \subset c^\lambda$ kapsama bağıntıları sağlanır ve $c_0^\lambda \subset c_0$ kapsaması kesindir.

Son olarak sıkça kullanacağımız $y(\lambda) = (y_k(\lambda))$ dizisini $x = (x_k)$ dizisinin $\Lambda-$dönüşümü olarak tanımlarız. Yani $y(\lambda) = \Lambda(x)$ olur ve

$$y_k(\lambda) = \sum_{j=0}^{k} \left(\frac{\lambda_j - \lambda_{j-1}}{\lambda_k} \right) x_j \qquad ; (k \in \mathbb{N}) \tag{3.1.6}$$

ifadesini elde ederiz. Aynı zamanda Lemma 3.1.1 ile Λ metodu regülerdir.

Lemma 3.1.5. *$\lambda-$sınırlı bir x dizisinin bildiğimiz manada sınırlı olması için gerek ve yeter şart $S(x) \in \ell_\infty$ olmasıdır [6].*

Uyarı 3.1.1. *Eğer her k için $q_k = \lambda_k - \lambda_{k-1}$ olarak alınırsa, Λ matrisi [21] nolu çalışmadaki ağırlıklı ortalamanın $\bar{N}_q$ matrisinin $Q_n \to \infty$ $(n \to \infty)$ özel halidir. Burada her n için $Q_n = \sum_{k=0}^{n} q_k = \lambda_n$ dir. Diğer bir deyişle Λ matrisi, $\lambda_k = k + 1$, $(k \in \mathbb{N})$ özel durumunda Cesàro ortalamasının C_1 matrisidir [6].*

Gerçekten $\lambda_k = k + 1$ olarak alınırsa,

$$\Lambda = \begin{bmatrix} \frac{\lambda_0 - \lambda_{-1}}{\lambda_0} & 0 & 0 & 0 & \ldots \\ \frac{\lambda_0 - \lambda_{-1}}{\lambda_1} & \frac{\lambda_1 - \lambda_0}{\lambda_1} & 0 & 0 & \ldots \\ \frac{\lambda_0 - \lambda_{-1}}{\lambda_2} & \frac{\lambda_1 - \lambda_0}{\lambda_2} & \frac{\lambda_2 - \lambda_1}{\lambda_2} & 0 & \ldots \\ \frac{\lambda_0 - \lambda_{-1}}{\lambda_3} & \frac{\lambda_1 - \lambda_0}{\lambda_3} & \frac{\lambda_2 - \lambda_1}{\lambda_3} & \frac{\lambda_3 - \lambda_2}{\lambda_3} & \ldots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix}$$

matrisi,

$$\Lambda = \begin{bmatrix} \frac{1-0}{1} & 0 & 0 & 0 & ... \\ \frac{1-0}{2} & \frac{2-1}{2} & 0 & 0 & ... \\ \frac{1-0}{3} & \frac{2-1}{3} & \frac{3-2}{3} & 0 & ... \\ \frac{1-0}{4} & \frac{2-1}{4} & \frac{3-2}{4} & \frac{4-3}{4} & ... \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & ... \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 & ... \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 0 & ... \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & ... \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix}$$

olur. Bu taktirde,

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & ... \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 & ... \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 0 & ... \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & ... \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \vdots \\ x_n \\ \vdots \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 \\ \frac{x_1+x_2}{2} \\ \frac{x_1+x_2+x_3}{x_3} \\ \vdots \\ \frac{x_1+x_2+x_3+...+x_n}{n} \\ \vdots \end{bmatrix}$$

Cesàro ortalamasının C_1 matrisi elde edilir.

4. $\lambda-$Yakınsak, $\lambda-$Sınırlı ve $\lambda-$Tipinde $p-$Mutlak Yakınsak Dizilerin Uzayları

Sınırlı dizileri sınırlı dizilere dönüştüren lineer dönüşümlere limitleme metodu [26] denildiğini biliyoruz. Bir özel limitleme metodunun matris etki alanı vasıtasıyla bir yeni dizi uzayı inşa etme yaklaşımı bir çok matematikçi tarafından kullanılan bir tekniktir. Bu bölümde (3.1.5) ile verilen $\Lambda = (\lambda_{nk})_{k=0}^{\infty}$ matrisinin sırası ile ℓ_∞, c, c_0 ve ℓ_p klasik dizi uzaylarındaki matris etki alanı tanımlanarak bazı cebirsel ve topolojik özellikleri incelenmiştir.

4.1 $\lambda-$Dizi Uzaylarının Tanımlanması

Bu bölümde $\lambda-$sınırlı, $\lambda-$yakınsak, $\lambda-$sıfır ve $\lambda-$tipinde $p-$mutlak yakınsak dizilerinin kümesi olarak sırasıyla ℓ_∞^λ, c^λ, c_0^λ ve ℓ_p^λ dizi uzaylarını aşağıdaki gibi tanımlanır.

$$\ell_\infty^\lambda = \left\{x \in w : \sup_n |\Lambda_n(x)| < \infty\right\},$$

$$c^\lambda = \left\{x \in w : \lim_{n\to\infty} \Lambda_n(x) \ \text{ mevcut}\right\},$$

$$c_0^\lambda = \left\{x \in w : \lim_{n\to\infty} \Lambda_n(x) = 0\right\},$$

$$\ell_p^\lambda = \left\{x = (x_k) \in w : \sum_{n=0}^{\infty} \left| \frac{1}{\lambda_n} \sum_{k=0}^{n} (\lambda_k - \lambda_{k-1}) x_k \right|^p < \infty\right\},$$

(2.1.1) notasyonu ile sırasıyla ℓ_∞^λ, c^λ, c_0^λ ve ℓ_p^λ uzayları ℓ_∞, c, c_0 ve ℓ_p uzaylarındaki Λ üçgensel matrisinin etki alanı olarak aşağıdaki şekilde yeniden tanımlanır.

$$\ell_\infty^\lambda = (\ell_\infty)_\Lambda\,,\ c^\lambda = (c)_\Lambda\,,\ c_0^\lambda = (c_0)_\Lambda \text{ ve } \ell_p^\lambda = (\ell_p)_\Lambda \quad (0 < p < \infty) \tag{4.1.1}$$

Burada ℓ_∞^λ ve ℓ_p^λ dizi uzayları sırasıyla $\lambda-$sınırlı ve $\lambda-$tipinde $p-$mutlak yakınsak tüm dizilerden oluşur.

Şimdi çalışmada gerekli olacak aşağıdaki sonuç ile başlayalım.

Teorem 4.1.1. *ℓ_∞^λ, c^λ ve c_0^λ dizi uzayları,*

$$\|x\|_{\ell_\infty^\lambda} = \|\Lambda_n(x)\|_{\ell_\infty} = \sup_n |\Lambda_n(x)| \tag{4.1.2}$$

olarak verilen aynı norm ile BK-uzaylarıdır [6].

İspat. Bu sonuç (4.1.1) kullanılarak [31] nolu çalışmadaki Lemma 2.1 den elde edilir. □

Uyarı 4.1.1. *ℓ_∞^λ, c^λ ve c_0^λ uzaylarının mutlak olmayan tipten oldukları kolayca gösterilebilir. Yani bu uzaylarda bulunan en az bir x dizisi için,*

$$\|x\|_{\ell_\infty^\lambda} \neq \||x|\|_{\ell_\infty^\lambda}$$

olur.

Burada $|x| = (|x_k|)$ dır. Bu nedenle ℓ_∞^λ, c^λ ve c_0^λ dizi uzayları mutlak olmayan tipten BK-uzaylarıdır [6].

$x_k = (-1)^k \frac{\lambda_k}{\lambda_k - \lambda_{k-1}}$ dizisi ele alındığında,

$$\begin{aligned}
\Lambda_n(x) &= \frac{1}{\lambda_n}\sum_{k=0}^{n}(\lambda_k - \lambda_{k-1})\,x_k \\
&= \frac{1}{\lambda_n}\sum_{k=0}^{n}(\lambda_k - \lambda_{k-1})(-1)^k \frac{\lambda_k}{\lambda_k - \lambda_{k-1}} \\
&= \frac{1}{\lambda_n}\sum_{k=0}^{n}(-1)^k \lambda_k
\end{aligned}$$

olur ve buradan,

$$|\Lambda_n(x)| = \frac{1}{\lambda_n}\left|\sum_{k=0}^{n}(-1)^k \lambda_k\right| \leq \frac{1}{\lambda_n}\sum_{k=0}^{n}|\lambda_k - \lambda_{k-1}| = 1$$

elde edilir ki buna göre $\sup_n |\Lambda_n(x)| = 1$ olur ki bu $\Lambda_n(x) \in \ell_\infty$ ve $x \in \ell_\infty^\lambda$ demektir.

Şimdi $x = (x_k)$ dizisinin mutlak değerini ele alalım.

$$|x| = |(x_k)| = \frac{\lambda_k}{\lambda_k - \lambda_{k-1}}$$

olur. Böylece,

$$\begin{aligned}\Lambda_n(|x|) &= \frac{1}{\lambda_n}\sum_{k=0}^{n}(\lambda_k - \lambda_{k-1})\frac{\lambda_k}{\lambda_k - \lambda_{k-1}} \\ &= \frac{1}{\lambda_n}\sum_{k=0}^{n}\lambda_k\end{aligned}$$

elde edilir. Bu durumda $\Lambda_n(x) \notin \ell_\infty$ ve $x \notin \ell_\infty^\lambda$ olur. Yani,

$$\sup_n |\Lambda_n(x)| \neq \sup_n |\Lambda_n(|x|)|$$

olur. Bu da $\|x\|_{\ell_\infty^\lambda} \neq \||x|\|_{\ell_\infty^\lambda}$ olması demektir. Bu nedenle ℓ_∞^λ dizi uzayı mutlak olmayan tipten dizi uzayıdır.

Teorem 4.1.2. *ℓ_∞^λ, c^λ ve c_0^λ dizi uzayları sırasıyla ℓ_∞, c ve c_0 uzaylarına norm izomorftur. Yani $\ell_\infty^\lambda \cong \ell_\infty$, $c^\lambda \cong c$ ve $c_0^\lambda \cong c_0$ dır [6].*

İspat. Kabul edelim ki X; ℓ_∞, c ve c_0 uzaylarını, X^λ ise ℓ_∞^λ, c^λ ve c_0^λ uzaylarını göstersin. Λ matrisi üçgensel olduğundan [32, Proposition 1.1] gereğince üçgensel olan bir tek tersi vardır. Bu nedenle her $x \in X^\lambda$ için $L_\Lambda(x) = \Lambda(x)$ olarak tanımlanan $L_\Lambda : X^\lambda \to X$ lineer operatörü, Teorem 4.1.1 deki (4.1.2) ifadesinden birebirdir ve normu korur. Böylece $X^\lambda \cong X$ olur. □

Son olarak bu bölüm Teorem 4.1.1 ve Teorem 4.1.2'nin sonuçları ile sonlanmaktadır.

Sonuç 4.1.1. *Her sabit $n \in \mathbb{N}$ için $e_\lambda^{(n)} \in c_0^\lambda$ dizisi,*

$$\left(e_\lambda^{(n)}\right)_k = \begin{cases} (-1)^{k-n}\frac{\lambda_n}{\lambda_k - \lambda_{k-1}} & ; \quad (n \leq k \leq n+1)\ , \\ 0 & ; \quad - \end{cases} \qquad (k \in \mathbb{N})$$

olarak tanımlanır. Bu taktirde,

(a) $\left(e_\lambda^{(0)}, e_\lambda^{(1)}, ...\right)$ dizisi c_0^λ uzayı için bir Schauder bazıdır ve her $x \in c_0^\lambda$ için, $x = \sum_{n=0}^{\infty}\Lambda_n(x)\, e_\lambda^{(n)}$ şeklinde bir tek gösterime sahiptir.

(b) $\left(e, e_\lambda^{(0)}, e_\lambda^{(1)}, ...\right)$ dizisi c^λ uzayı için bir Schauder bazıdır ve her $x \in c^\lambda$ için, $x = le + \sum_{n=0}^{\infty} (\Lambda_n(x) - l)\, e_\lambda^{(n)}$ şeklinde bir tek gösterime sahiptir.

Burada $l = \lim_{n\to\infty} \Lambda_n(x)$ dir [6].

İspat. Her $n \in \mathbb{N}$ için $\Lambda(e) = e$ ve $\Lambda\left(e_\lambda^{(n)}\right) = e^{(n)}$ olduğundan bu sonuç [32] nolu çalışmadaki Sonuç 2.3 den hemen görülür. $\square$

Teorem 4.1.3. $1 \leq p < \infty$ *olsun ve her sabit* $k \in N$ *için* $e_\lambda^{(k)} \in \ell_p^\lambda$ *dizisi,*

$$(e_\lambda^{(k)})_n = \begin{cases} (-1)^{n-k} \frac{\lambda_k}{\lambda_n - \lambda_{n-1}} & ; \quad (k \leq n \leq k+1) \\ 0 & ; \quad - \end{cases} \qquad (n \in \mathbb{N}) \tag{4.1.3}$$

olarak tanımlansın. Bu taktirde $(e_\lambda^{(k)})_n$ *dizisi* ℓ_p^λ *uzayının bir bazıdır ve her* $x \in \ell_p^\lambda$ *için;*

$$x = \sum_k \Lambda_k(x)\, e_\lambda^{(k)} \tag{4.1.4}$$

biçiminde tek bir gösterime sahiptir [5].

İspat. $1 \leq p < \infty$ olmak üzere (4.1.3) den $\Lambda(e_\lambda^{(k)}) = e^{(k)} \in \ell_p$ olduğu açıktır ve böylece her $k \in \mathbb{N}$ için $e_\lambda^{(k)} \in \ell_p^\lambda$ dır. Ayrıca $x \in \ell_p^\lambda$ verilsin. Negatif olmayan her m tamsayısı için

$$x^{(m)} = \sum_{k=0}^{m} \Lambda_k(x)\, e_\lambda^{(k)}$$

yazalım. Bu taktirde,

$$\Lambda_n(x^m) = \sum_{k=0}^{m} \Lambda_k(x)\, \Lambda\left(e_\lambda^{(k)}\right)$$

ve böylece,

$$\Lambda_n\left(x - x^{(m)}\right) = \begin{cases} 0 & ; \quad (0 \leq n \leq m) \\ \Lambda_n(x) & ; \quad (n > m) \end{cases}$$

elde edilir.

Herhangi bir $\varepsilon > 0$ için negatif olmayan bir m_0 tamsayısı vardır öyle ki;

$$\sum_{n=m+1}^{\infty} |\Lambda_n(x)|^p \leq \left(\frac{\varepsilon}{2}\right)^p$$

dir. Bu yüzden her $m \geq m_0$ için,

$$\begin{aligned}\left\|x - x^{(m)}\right\|_{\ell_p^\lambda} &= \left(\sum_{n=m+1}^{\infty} |\Lambda_n(x)|^p\right)^{\frac{1}{p}} \\ &\leq \left(\sum_{n=m_{0+1}}^{\infty} |\Lambda_n(x)|^p\right)^{\frac{1}{p}} \\ &\leq \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon\end{aligned}$$

elde edilir. Bu $\lim\limits_{n\to\infty} \| x - x^{(m)} \|_{\ell_p^\lambda} = 0$ olduğunu gösterir ve x, (4.1.4) deki şekilde temsil edilir.

Son olarak $x \in \ell_p$ nın (4.1.4) deki temsilinin tek olduğunu gösterelim. Bunun için $x = \sum\limits_k \alpha_k(x)\, e_\lambda^{(k)}$ olduğunu kabul edelim. Böylece,

$$\Lambda_n(x) = \sum_k \alpha_k(x)\, \Lambda_n\left(e_\lambda^{(k)}\right) = \sum_k \alpha_k(x)\, \delta_{nk} = \alpha_n(x)\,; \quad (n \in \mathbb{N})$$

elde edilir. Böylece $x \in \ell_p^\lambda$ nın (4.1.4) deki gösterimi tektir. Bu da ispatı tamamlar.

$\square$

Sonuç 4.1.2. *$1 \leq p < \infty$ olmak üzere mutlak olmayan tipten ℓ_p^λ dizi uzayı ayrılabilirdir [5].*

Uyarı 4.1.2. *Uyarı 3.1.1 de aşikar olduğu gibi ℓ_∞^λ, c^λ ve c_0^λ dizi uzayları [32] nolu çalışmadaki ağırlıklı ortalamanın $\left(\bar{N}, q\right)_\infty$, $\left(\bar{N}, q\right)$ ve $\left(\bar{N}, q\right)_0$ uzaylarının $q = \Delta\lambda$ özel durumudur. Yani $\ell_\infty^\lambda = \left(\bar{N}, \Delta\lambda\right)_\infty$, $c^\lambda = \left(\bar{N}, \Delta\lambda\right)$ ve $c_0^\lambda = \left(\bar{N}, \Delta\lambda\right)_0$ olur. Diğer taraftan $\lambda_k = k+1$ $(k \in \mathbb{N})$ özel durumunda ℓ_∞^λ, c^λ ve c_0^λ dizi uzayları sırasıyla [4] ve [20] deki mutlak olmayan tipten X_∞, $\tilde{c}$ ve $\tilde{c}_0$ Cesàro dizi uzaylarına indirgenir [6].*

Teorem 4.1.4. ***a)*** *Eğer $0 < p < 1$ ve ℓ_p^λ uzayı $\|x\|_{\ell_p^\lambda} = \|\Lambda(x)\|_{\ell_p}$ ile bir tam $p-$normlu uzaydır, yani*

$$\|x\|_{\ell_p^\lambda} = \sum_n |\Lambda(x)|^p \quad ; \qquad (0 < p < 1) \tag{4.1.5}$$

dir.

b) Eğer $1 \leq p \leq \infty$ ise ℓ_p^λ uzayı $\|x\|_{\ell_p^\lambda} = \|\Lambda(x)\|_{\ell_p}$ normu ile bir $BK-$uzayıdır yani,

$$\|x\|_{\ell_p^\lambda} = \left(\sum_n |\Lambda_n(x)|^p\right)^{\frac{1}{p}} \qquad (1 \leq p < \infty) \tag{4.1.6}$$

ve

$$\|x\|_{\ell_p^\lambda} = \sup_n |\Lambda(x)| \tag{4.1.7}$$

dir [5].

İspat. Λ bir üçgen matris olduğundan dolayı, Wilansky'nin [33] nolu çalışmasındaki Teorem 4.3.12 ve (4.1.1) den bu sonuç direkt elde edilir. □

Uyarı 4.1.3. *ℓ_p^λ uzayının mutlak olmayan tipten olduğu kolayca gösterilebilir yani ℓ_p^λ uzayında bulunan en az bir dizi için,*

$$\|x\|_{\ell_p^\lambda} \neq \||x|\|_{\ell_p^\lambda}$$

dir [5].

Bu bize $0 < p < \infty$ için ℓ_p^λ nın mutlak olmayan tipten bir uzay olduğunu gösterir. Burada $|x| = (|x_k|)$ dir.

Bunun için $(x_k) = \left(1, 1, \frac{-\lambda_1}{\lambda_2 - \lambda_1}, 0, 0, ...\right)$ dizisini ele alalım. Bu taktirde,

$$\begin{aligned}
\Lambda_n(x) &= \frac{1}{\lambda_n}\sum_{k=0}^{n}(\lambda_k - \lambda_{k-1})x_k \\
&= \frac{1}{\lambda_n}\left[(\lambda_0 - \lambda_{-1})1 + (\lambda_1 - \lambda_0)1 + (\lambda_2 - \lambda_1)\left(\frac{-\lambda_1}{\lambda_2 - \lambda_1}\right)\right] \\
&= \frac{1}{\lambda_n}0 \\
&= 0
\end{aligned}$$

elde edilir. Böylece,

$$\|x\|_{\ell_p^\lambda} = \left(\sum_n |\Lambda_n(x)|^p\right)^{\frac{1}{p}} = \left(\sum_n 0\right)^{\frac{1}{p}}$$

elde edilir.

Şimdi $x = (x_k)$ dizisinin mutlak değerini alalım.

$$|x| = |(x_k)| = \left(1, 1, \frac{\lambda_1}{\lambda_2 - \lambda_1}, 0, 0, ...\right)$$

olur. Bu taktirde,

$$\begin{aligned}\Lambda_n(|x|) &= \frac{1}{\lambda_n}\sum_{k=0}^{n}(\lambda_k-\lambda_{k-1})|x_k| \\ &= \frac{1}{\lambda_n}\left[(\lambda_0-\lambda_{-1})1+(\lambda_1-\lambda_0)1+(\lambda_2-\lambda_1)\frac{\lambda_1}{\lambda_2-\lambda_1}\right] \\ &= \frac{2\lambda_1}{\lambda_n}\end{aligned}$$

elde edilir. Bu durumda $\|x\|_{\ell_p^\lambda} \neq \||x|\|_{\ell_p^\lambda}$ olur. Bu nedenle ℓ_p^λ dizi uzayı mutlak olmayan tipten dizi uzayıdır.

Teorem 4.1.5. *Mutlak olmayan tipte ℓ_p^λ dizi uzayı ℓ_p uzayına izometrik izomorftur. Yani $0 < p \leq \infty$ için $\ell_p^\lambda \cong \ell_p$ dir [5].*

İspat. Teoremi ispatlamak için $0 < p \leq \infty$ iken ℓ_p^λ ve ℓ_p uzayları arasında "izometrik izomorfluğun" varlığını göstermeliyiz. Bunun için $0 < p \leq \infty$ olsun ve (3.1.6) nolu notasyon ile T adı verilen ℓ_p^λ dan ℓ_p ye, $x \longrightarrow y(\lambda) = T_x$ biçiminde tanımlanmış T dönüşümünü düşünelim. Bu taktirde her $x \in \ell_p^\lambda$ için $T_x = y(\lambda) = \wedge(x) \in \ell_p$ dir. Ayrıca T dönüşümünün lineer olduğu açıktır. Kolayca görülebilir ki $T_x = 0$ iken $x = 0$ dır ve T dönüşümü birebir fonksiyondur.

Ayrıca $y = (y_k) \in \ell_p$ olsun ve $x = (x_k(\lambda))$ dizisi şu şekilde tanımlansın.

$$x_k(\lambda) = \sum_{j=k-1}^{k}(-1)^{k-j}\frac{\lambda_j}{\lambda_k-\lambda_{k-1}}y_j \qquad (k \in \mathbb{N}) \tag{4.1.8}$$

Bu taktirde (3.1.2) ve (4.1.8) ifadeleri kullanılarak her $n \in \mathbb{N}$ için,

$$\begin{aligned}\Lambda_n(x) &= \frac{1}{\lambda_n}\sum_{k=0}^{n}(\lambda_k-\lambda_{k-1})x_k(\lambda) = \frac{1}{\lambda_n}\sum_{k=0}^{n}\sum_{j=k-1}^{k}(-1)^{k-j}\lambda_j y_j \\ &= \frac{1}{\lambda_n}\sum_{k=0}^{n}(\lambda_k y_k-\lambda_{k-1}y_{k-1}) = y_n\end{aligned}$$

elde edilir. Bu bize $\Lambda(x) = y$ olduğunu ve $y \in \ell_p$ olduğundan $\Lambda(x) \in \ell_p$ olduğunu gösterir. Bu nedenle T dönüşümü örtendir. Bundan başka her $x \in \ell_p^\lambda$ için (4.1.5), (4.1.6) ve Teorem 4.1.1 deki (4.1.7) ifadelerinden,

$$\|T_x\|_{\ell_p} = \|y(\lambda)\|$$

olup $0 < p < 1$ ve $1 \leq p \leq \infty$ durumlarında sırasıyla T nin bir p-normlu olduğunu ve normu koruduğunu görürüz. Böylece T bir izometridir. Sonuç olarak ℓ_p^λ ve ℓ_p uzayları $0 < p \leq \infty$ için izometrik-izomorfturlar. Bu da ispatı tamamlar. □

Şimdi benzer bir sonucun ℓ_p^λ ve ℓ_p uzaylarında geçerli olduğu düşünülebilir ve doğal olarak şu soruyu sorarız. $p \neq 2$ iken ℓ_p^λ bir Hilbert uzayı değil midir? Bu sorunun cevabı evettir ve aşağıdaki teoremle verilir.

Teorem 4.1.6. *$p = 2$ durumu dışında ℓ_p^λ bir iç çarpım uzayı değildir ve bu nedenle ℓ_p^λ uzayı, $1 \leq p < \infty$ için bir Hilbert uzayı değildir [5].*

İspat. $1 \leq p < \infty$ için ℓ_2^λ uzayının ℓ_p^λ uzayları içindeki tek Hilbert uzayı olduğunu ispatlamalıyız. Teorem 4.1.1 den ℓ_2^λ uzayı, $\|x\|_{\ell_2^\lambda} = \|\Lambda(x)\|_{\ell_2}$ normlu bir BK-uzayı olduğundan dolayı, her $x \in \ell_2^\lambda$ için norm şu şekilde elde edilebilir.

$$\|x\|_{\ell_2^\lambda} = \langle x, x\rangle^{\frac{1}{2}} = \langle \Lambda(x), \Lambda(x)\rangle^{\frac{1}{2}}_{2}.$$

Burada $\langle ., . \rangle$, ℓ_2 üzerinde bir iç çarpımı gösterdiği zaman, ℓ_2^λ uzayı bir Hilbert uzayıdır. Şimdi,

$$u = (u_k(\lambda)) = \left(1, 1, \frac{-\lambda_1}{\lambda_2 - \lambda_1}, 0, 0, ...\right)$$

ve

$$v = (v_k(\lambda)) = \left(1, -\frac{\lambda_1 + \lambda_0}{\lambda_1 - \lambda_0}, \frac{\lambda_1}{\lambda_2 - \lambda_1}, 0, 0, ...\right)$$

dizilerini düşünelim. Bu taktirde, $\Lambda(u) = (1, 1, 0, 0, ...)$ ve $\Lambda(v) = (1, -1, 0, 0, ...)$ elde ederiz. Böylece

$$\|u + v\|^2_{\ell_p^\lambda} + \|u - v\|^2_{\ell_p^\lambda} = 8 \neq 4\left(2^{\frac{2}{p}}\right) = 2\left(\|u\|^2_{\ell_p^\lambda} + \|v\|^2_{\ell_p^\lambda}\right); (p \neq 2)$$

olduğu kolayca görülür. Yani $p \neq 2$ ve $1 \leq p < \infty$ iken ℓ_p^λ uzayının normu paralelkenar eşitliğini sağlamaz. Bu nedenle bu norm iç çarpımdan elde edilemez. Böylece ℓ_p^λ uzayı $p \neq 2$ iken bir Hilbert uzayı olmayıp bir Banach uzayıdır. □

Uyarı 4.1.4. *ℓ_∞^λ uzayının Hilbert uzayı olmayan bir Banach uzayı olduğu açıktır [5].*

5. c_o^λ, c^λ , ℓ_∞^λ ve ℓ_p^λ Uzaylarına İlişkin Bazı Kapsama İlişkileri

Bu bölümde, c_0^λ, c^λ , ℓ_∞^λ ve ℓ_p^λ uzaylarına ilişkin bazı kapsama bağıntıları verilmiştir.

5.1 Bazı Kapsama Bağıntıları

Bir önceki bölümde tanımlanan mutlak olmayan tipten dizi uzayları arasındaki bazı kapsama ilişkilerini verelim.

Teorem 5.1.1. *$c_0^\lambda \subset c^\lambda \subset \ell_\infty^\lambda$ kapsamaları kesindir [6].*

İspat. $c_0^\lambda \subset c^\lambda \subset \ell_\infty^\lambda$ kapsamasının sağlandığı açıktır. Ayrıca, $c_0 \subset c$ kapsaması kesin olduğundan Lemma 3.1.1 gereğince $c_0^\lambda \subset c^\lambda$ kapsaması da kesindir. Diğer taraftan her $k \in \mathbb{N}$ için $x = (x_k)$ dizisini, $x_k = (-1)^k (\lambda_k + \lambda_{k-1}) / (\lambda_k - \lambda_{k-1})$ şeklinde alalım. Bu taktirde her $n \in \mathbb{N}$ için,

$$\begin{aligned}
\Lambda_n (x) &= \frac{1}{\lambda_n} \sum_{k=0}^{n} (\lambda_k - \lambda_{k-1}) x_k \\
&= \frac{1}{\lambda_n} \sum_{k=0}^{n} (-1)^k (\lambda_k + \lambda_{k-1}) \\
&= \frac{1}{\lambda_n} \left[(-1)^0 (\lambda_0 + \lambda_{-1}) + (-1)^1 (\lambda_1 + \lambda_0) + ... + (-1)^n (\lambda_n + \lambda_{n-1}) \right] \\
&= \frac{1}{\lambda_n} [(\lambda_0 + \lambda_{-1}) - (\lambda_1 + \lambda_0) + (\lambda_2 + \lambda_1) + ... + (-1)^n (\lambda_n + \lambda_{n-1})] \\
&= \frac{1}{\lambda_n} (-1)^n \lambda_n \\
&= (-1)^n
\end{aligned}$$

olur. Bu $\Lambda (x) \in \ell_\infty \backslash c$ olduğunu gösterir. Bu nedenle x dizisi ℓ_∞^λ uzayında fakat c^λ uzayında değildir. Böylece $c^\lambda \subset \ell_\infty^\lambda$ kapsaması kesindir. Bu da ispatı tamamlar. □

Lemma 5.1.1. *$c_0 \subset c_0^\lambda$ ve $c \subset c^\lambda$ kapsamaları sağlanır. Ayrıca eşitliğin sağlanması için gerek ve yeter şart c_0^λ ve c^λ uzaylarından alınan her x dizisi için $S(x) \in c_0$ olmasıdır [6].*

İspat. $c_0 \subset c_0^\lambda$ ve $c \subset c^\lambda$ kapsamalarının geçerli olduğu Lemma 3.1.1 den açık olduğundan dolayı biz burada teoremin sadece ikinci kısmını ispat edeceğiz. Öncelikle $c_0^\lambda = c_0$ olduğunu kabul edersek her $x \in c_0^\lambda$ için $x \in c_0$ olur ve böylece Lemma 3.1.3 gereğince $S(x) \in c_0$ olur. Tersine $x \in c_0^\lambda$ olsun. Bu taktirde hipotez gereğince $S(x) \in c_0$ olur. Böylece Lemma 3.1.3 ve Lemma 3.1.2 den $x \in c_0$ elde edilir. Bu $c_0^\lambda \subset c_0$ kapsamasının sağlandığını gösterir. Böylece $c_0^\lambda \subset c_0$ ve $c_0 \subset c_0^\lambda$ kapsamaları birleştirilirse $c_0^\lambda = c_0$ eşitliği sağlanır. Benzer şekilde her $x \in c^\lambda$ için $c^\lambda = c$ eşitliğinin sağlanması için gerek ve yeter şart $S(x) \in c_0$ olduğu gösterilebilir. Bu da ispatı tamamlar. □

Lemma 5.1.2. *Her $x = (x_k) \in w$ dizisi için, $S(x) = (S_n(x))$ dizisi $S_0(x) = 0$ ve $S_n(x) = \frac{1}{\lambda_n}\sum_{k=1}^{n}\lambda_{k-1}(x_k - x_{k-1})$ $(n \geq 1)$ olacak şekilde tanımlandığında,*

$$S_n(x) = x_n - \Lambda_n(x); \quad (n \in \mathbb{N}) \tag{5.1.1}$$

ve

$$S_n(x) = \frac{\lambda_{n-1}}{\lambda_n - \lambda_{n-1}}[\Lambda_n(x) - \Lambda_{n-1}(x)]; \quad (n \in \mathbb{N}) \tag{5.1.2}$$

eşitsizlikleri sağlanır [5].

Lemma 5.1.3. *$\ell_p^\lambda \subset \ell_p$ kapsamının sağlanması için gerek ve yeter şart her $x \in \ell_p^\lambda$ dizisi için $S(x) \in \ell_p$ olmasıdır. Burada $0 < p < \infty$ dur [5].*

İspat. $0 < p \leq \infty$ için $\ell_p^\lambda \subset \ell_p$ kapsamasının sağlandığını kabul edelim ve herhangi bir $x = (x_k) \in \ell_p^\lambda$ dizisini ele alalım. Bu taktirde hipotezden $x \in \ell_p$ dir. Böylece (5.1.1) den,

$$\|S(x)\|_{\ell_p} \leq \|x\|_{\ell_p} + \|\Lambda(x)\|_{\ell_p} = \|x\|_{\ell_p} + \|x\|_{\ell_p^\lambda} < \infty$$

elde edilir. Bu $S(x) \in \ell_p$ olduğunu gösterir.

Tersine, $0 < p \leq \infty$ için $x \in \ell_p^\lambda$ dizisini ele alalım. Bu taktirde hipotezden dolayı $S(x) \in \ell_p$ olur. Tekrar (5.1.1) ifadesinden,

$$\|x\|_{\ell_p} \leq \|S(x)\|_{\ell_p} + \|\Lambda(x)\|_{\ell_p} = \|S(x)\|_{\ell_p} + \|x\|_{\ell_P^\lambda} < \infty$$

olur ki bu $x \in \ell_p$ olduğunu gösterir. Böylece $\ell_p^\lambda \subset \ell_p$ kapsaması sağlanır ve bu da ispatı tamamlar. □

Aşağıdaki sonuç, Lemma 3.1.4 ve Lemma 3.1.5 den benzer olarak ispat edilebilir.

Lemma 5.1.4. $\ell_\infty \subset \ell_\infty^\lambda$ *kapsaması sağlanır. Ayrıca* $\ell_\infty^\lambda = \ell_\infty$ *eşitliğinin sağlanması için gerek ve yeter şart her* $x \in \ell_\infty^\lambda$ *için* $S(x) \in \ell_\infty$ *olmasıdır [6].*

İspat. Teoremin birinci kısmı Lemma 3.1.4 den direkt elde edileceğinden biz sadece ikinci kısmı ispat edeceğiz. İlk olarak $\ell_\infty^\lambda = \ell_\infty$ eşitliğinin sağlandığını kabul edelim. Bu taktirde $\ell_\infty^\lambda \subset \ell_\infty$ kapsaması sağlanır ve bu bizi Lemma 5.1.3 den her $x \in \ell_\infty^\lambda$ için $S(x) \in \ell_\infty$ sonucuna götürür. Tersine her $x \in \ell_\infty^\lambda$ için $S(x) \in \ell_\infty$ olduğunu kabul edelim. Yine Lemma 5.1.3 den $\ell_\infty^\lambda \subset \ell_\infty$ kapsamasının sağlandığı sonucunu çıkarırız. Bu kapsama ilişkisi ile $\ell_\infty \subset \ell_\infty^\lambda$ kapsama ilişkisi birlikte düşünülürse $\ell_\infty = \ell_\infty^\lambda$ eşitliği elde edilir. Bu da ispatı tamamlar. □

Lemma 5.1.1 gereğince $c_0 \subset c_0^\lambda \cap c$ olduğu açıktır. Tersine Lemma 3.1.2 den $c_0^\lambda \cap c \subset c_0$ bulunur. Bu da aşağıdaki sonucu doğurur.

Teorem 5.1.2. $c_0^\lambda \cap c = c_0$ *eşitliği sağlanır [6].*

İspat. $c_0 \subset c_0^\lambda$ ve $c_0 \subset c$ olduğundan $c_0 \subset c_0^\lambda \cap c$ olur. Aynı zamanda Lemma 3.1.2 gereğince $c_0^\lambda \subset c_0$ olduğundan $c_0^\lambda \cap c \subset c_0 \cap c = c_0$ olur ki bu da $c_0^\lambda \cap c = c_0$ olması demektir. □

Örneğin, tüm k lar için $\lambda_k = k + 1$ ve $x_k = (-1)^k$ olsun. Bu taktirde $x \notin c$

iken $x \in c^{\lambda} \cap \ell_{\infty}$ olur.

$$\begin{aligned}
\Lambda_n(x) &= \frac{1}{\lambda_n}\sum_{k=0}^{n}(\lambda_k - \lambda_{k-1})x_k \\
&= \frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n}(k+1-k)(-1)^k \\
&= \frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n}(-1)^k \\
&= \frac{1}{n+1}\left[(-1)^0 + (-1)^1 + ... + (-1)^n\right] \\
&= \begin{cases} 0 & ; \quad n \text{ tek ise} \\ \frac{1}{n+1} & ; \quad n \text{ çift ise} \end{cases}
\end{aligned}$$

olduğundan, $\Lambda_n(x) \in c$ olup $x \in c^{\lambda}$ elde edilir. Ayrıca $x \in \ell_{\infty}$ olup $\lambda_k = k+1$ ve $x_k = (-1)^k$ için $x \notin c$ iken $x \in c^{\lambda} \cap \ell_{\infty}$ olur.

Şimdi $x = (x_k) \in w$ ve $n \geq 1$ olsun. Bu durumda (3.1.3) ve (3.1.4) ilişkileri ile aşağıdaki eşitlikler türetilebilir.

$$\begin{aligned}
S_n(x) &= \frac{1}{\lambda_n}\sum_{k=1}^{n}\lambda_{k-1}(x_k - x_{k-1}) \\
&= \frac{1}{\lambda_n}\left[\sum_{k=1}^{n}\lambda_{k-1}x_k - \sum_{k=1}^{n}\lambda_{k-1}x_{k-1}\right] \\
&= \frac{1}{\lambda_n}\left[\sum_{k=0}^{n}\lambda_{k-1}x_k - \sum_{k=0}^{n-1}\lambda_k x_k\right] \\
&= \frac{1}{\lambda_n}\left[\lambda_{n-1}x_n - \sum_{k=0}^{n-1}(\lambda_k - \lambda_{k-1})x_k\right] \\
&= \frac{\lambda_{n-1}}{\lambda_n}\left[x_n - \Lambda_{n-1}(x)\right] \\
&= \frac{\lambda_{n-1}}{\lambda_n}\left[S_n(x) + \Lambda_n(x) - \Lambda_{n-1}(x)\right] \\
&= \frac{\lambda_{n-1}}{\lambda_n}S_n(x) + \frac{\lambda_{n-1}}{\lambda_n}[\Lambda_n(x) - \Lambda_{n-1}(x)].
\end{aligned}$$

Böylece her $x \in w$ için,

$$\begin{aligned}
\lambda_n S_n(x) &= \lambda_{n-1}S_n(x) + \lambda_{n-1}[\Lambda_n(x) - \Lambda_{n-1}(x)] \\
S_n(x)(\lambda_n - \lambda_{n-1}) &= \lambda_{n-1}[\Lambda_n(x) - \Lambda_{n-1}(x)] \\
S_n(x) &= \frac{\lambda_{n-1}}{\lambda_n - \lambda_{n-1}}[\Lambda_n(x) - \Lambda_{n-1}(x)]; \quad (n \in \mathbb{N}) \qquad (5.1.3)
\end{aligned}$$

elde edilir. Diğer taraftan (3.1.1) gereğince λ dizisinin tanımı dikkate alındığında her $k \in \mathbb{N}$ için $\lambda_{k+1}/\lambda_k > 1$ olur. Böylece λ dizisinin yalnızca iki ayrı durumu vardır. Buna göre ya $\liminf_{k\to\infty} \lambda_{k+1}/\lambda_k > 1$ ya da $\liminf_{k\to\infty} \lambda_{k+1}/\lambda_k = 1$ dir. Açık olarak birinci durumun sağlanması için gerek ve yeter şart $\liminf_{k\to\infty} (\lambda_{k+1} - \lambda_k)/\lambda_{k+1} > 0$ iken $(\lambda_k/(\lambda_k - \lambda_{k-1}))_{k=0}^{n}$ dizisinin sınırlı bir dizi olmasıdır. Benzer olarak ikinci durumun sağlanması için gerek ve yeter şart yukarıdaki dizinin sınırlı olmamasıdır. Böylece aşağıdaki lemma elde edilir.

Lemma 5.1.5. *(3.1.1) ifadesini sağlayan* $\lambda = (\lambda_k)_{k=0}^{n}$ *dizisi için,*

a) $\left(\frac{\lambda_k}{\lambda_k - \lambda_{k-1}}\right)_{k=0}^{n} \notin \ell_\infty$ *olması için gerek ve yeter şart* $\liminf_{k\to\infty} \frac{\lambda_{k+1}}{\lambda_k} = 1$ *olmasıdır.*

b) $\left(\frac{\lambda_k}{\lambda_k - \lambda_{k-1}}\right)_{k=0}^{n} \in \ell_\infty$ *olması için gerek ve yeter şart* $\liminf_{k\to\infty} \frac{\lambda_{k+1}}{\lambda_k} > 1$ *olmasıdır [6].*

İspat. Biz burada sadece $\left(\frac{\lambda_k}{\lambda_k - \lambda_{k-1}}\right)_{k=0}^{n} \in \ell_\infty$ ise $\liminf_{k\to\infty} \frac{\lambda_{k+1}}{\lambda_k} > 1$ olduğunu ispatlayacağız. $\left(\frac{\lambda_k}{\lambda_k - \lambda_{k-1}}\right)_{k=0}^{n} \in \ell_\infty$ ise $m \leq \frac{\lambda_k}{\lambda_k - \lambda_{k-1}} \leq M$ olacak şekilde $m, M \in \mathbb{R}$ mevcuttur. Şimdi $m, M \in \mathbb{R}^+$ olduğunu gösterelim. (3.1.1) gereğince,

$$0 < \lambda_0 < \lambda_1 < ... < \lambda_{k-1} < \lambda_k < ...$$

olduğundan $\lambda_k - \lambda_{k-1} > 0$ dır. Her $k \in \mathbb{N}$ için $\lambda_k > 0$ olduğundan,

$$\frac{\lambda_k}{\lambda_k - \lambda_{k-1}} > 0$$

dır. Bu iddianın doğruluğunu gösterir. Tekrar

$$\frac{\lambda_k}{\lambda_k - \lambda_{k-1}} \geq m$$

eşitsizliğinden

$$\lambda_k \geq m\lambda_k - m\lambda_{k-1}$$

ve buradan da

$$\frac{\lambda_k}{\lambda_{k-1}} \geq \frac{-m}{1-m} = \frac{m}{m-1} > 1$$

elde ederiz ki bu son eşitsizlikten $\liminf_{k\to\infty} \frac{\lambda_{k+1}}{\lambda_k} > 1$ elde edilir. □

Eğer $(\lambda_k/(\lambda_k - \lambda_{k-1}))_{k=0}^{n}$ ifadesi $(\lambda_k/(\lambda_{k+1} - \lambda_k))_{k=0}^{n}$ ile yer değiştirse bile Lemma 5.1.5'in sağlandığı açıktır.

Şimdi $\Lambda-$matrisinin sınırlılık ve yakınsaklıktan daha kuvvetli olması için gerekli ve yeterli şartları veren aşağıdaki sonucu ifade ve ispat edelim.

Teorem 5.1.3. *$c_0 \subset c_0^\lambda$, $c \subset c^\lambda$ ve $\ell_\infty \subset \ell_\infty^\lambda$ kapsamalarının kesin olması için gerek ve yeter şart $\liminf_{n\to\infty} \lambda_{n+1}/\lambda_n = 1$ olmasıdır [6].*

İspat. $\ell_\infty \subset \ell_\infty^\lambda$ kapsamasının kesin olduğunu kabul edelim. Bu taktirde Lemma 5.1.4 gereğince bir $x \in \ell_\infty^\lambda$ dizisi vardır ki $S(x) = (S_n(x))_{n=0}^\infty \notin \ell_\infty$ dur. $x \in \ell_\infty^\lambda$ olduğundan $\Lambda(x) = (\Lambda_n(x))_{n=0}^\infty \in \ell_\infty$ ve böylece $(\Lambda_n(x) - \Lambda_{n-1}(x))_{n=0}^\infty \in \ell_\infty$ olur. Bu nedenle (5.1.3) eşitliğinden $(\lambda_{n-1}/(\lambda_n - \lambda_{n-1}))_{n=0}^\infty \notin \ell_\infty$ ve böylece $(\lambda_n/(\lambda_n - \lambda_{n-1}))_{n=0}^\infty \notin \ell_\infty$ elde edilir. Bu bizi, 5.1.5 (a) gereğince $\liminf_{n\to\infty} \lambda_{n+1}/\lambda_n = 1$ sonucuna götürür. Benzer olarak Lemma 5.1.4 yerine Lemma 5.1.1 kullanıldığında $c_0 \subset c_0^\lambda$ ve $c \subset c^\lambda$ kapsamalarının kesin olduğu kabul edilirse $\liminf_{n\to\infty} \lambda_{n+1}/\lambda_n = 1$ olduğu gösterilir. Bu da gereklilik şartının ispatını tamamlar.

Yeterlilik şartının ispatı için $\liminf_{n\to\infty} \lambda_{n+1}/\lambda_n = 1$ olduğunu kabul edelim. Bu taktirde Lemma 5.1.5 (a) dan $(\lambda_n/(\lambda_n - \lambda_{n-1}))_{n=0}^\infty \notin \ell_\infty$ olur. Şimdi her k için $x = (x_k)$ dizisini $x_k = (-1)^k \lambda_k/(\lambda_k - \lambda_{k-1})$ olarak tanımlayalım. Buna göre her $n \in \mathbb{N}$ için,

$$\begin{aligned}
|\Lambda_n(x)| &= \left|\frac{1}{\lambda_n}\sum_{k=0}^n (-1)^k \lambda_k\right| \\
&= \left|\frac{1}{\lambda_n}\right| \left|\sum_{k=0}^n (-1)^k \lambda_k\right| \\
&= \frac{1}{\lambda_n}\left|(-1)^0\lambda_0 + (-1)^1\lambda_1 + (-1)^2\lambda_2 + ... + (-1)^n\lambda_n\right| \\
&= \frac{1}{\lambda_n}\left|(\lambda_0 - \lambda_1) + (\lambda_2 - \lambda_3) + (\lambda_4 - \lambda_5) + ... + (\lambda_{n-1} - \lambda_n)\right|
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\le \frac{1}{\lambda_n}\left(|\lambda_0 - \lambda_1| + |\lambda_2 - \lambda_3| + |\lambda_4 - \lambda_5| + ... + |\lambda_{n-1} - \lambda_n|\right) \\
&= \frac{1}{\lambda_n}\left(|\lambda_1 - \lambda_0| + |\lambda_3 - \lambda_2| + |\lambda_5 - \lambda_4| + ... + |\lambda_n - \lambda_{n-1}|\right) \\
&\le \frac{1}{\lambda_n}\sum_{k=0}^n (\lambda_k - \lambda_{k-1}) \\
&= 1
\end{aligned}$$

olur. Bu da $\Lambda(x) \in \ell_\infty$ olduğunu gösterir. Böylece x dizisi ℓ_∞^λ uzayında fakat ℓ_∞ uzayında değildir. Bu elde edilen sonuç ile Lemma 5.1.4 deki $\ell_\infty \subset \ell_\infty^\lambda$ kapsamasının daima sağlandığı gerçeği ile birleştirildiğinde bu kapsamanın kesin olduğu sonucu elde edilmiş olur. Benzer olarak $\liminf_{k\to\infty} \lambda_{k+1}/\lambda_k = 1$ ise bu taktirde Lemma 5.1.5 (a) dan $\liminf_{k\to\infty} (\lambda_k - \lambda_{k-1})/\lambda_k = 0$ olur. Böylece $\lambda = (\lambda_k)_{k=0}^{n}$ dizisinin bir $(\lambda_{k_r})_{r=0}^{n}$ alt dizisi vardır ki,

$$\lim_{r\to\infty} \left(\frac{\lambda_{k_r} - \lambda_{k_r-1}}{\lambda_{k_r}} \right) = 0 \tag{5.1.4}$$

olur. Bu alt dizi her r doğal sayısı için $k_{r+1} - k_r \geq 2$ olacak biçimde seçilebilir.

Şimdi her $k \in \mathbb{N}$ için $y = (y_k)_{k=0}^{n}$ dizisi,

$$y_k = \begin{cases} 1 & ; \quad (k = k_r)\ , \\ -\left(\frac{\lambda_{k-1}-\lambda_{k-2}}{\lambda_k-\lambda_{k-1}}\right) & ; \quad (k = k_r + 1) \end{cases} \qquad (r \in \mathbb{N}) \tag{5.1.5}$$

olarak tanımlansın. Bu taktirde $y \notin c$ dir. Öte yandan her $n \in \mathbb{N}$ için,

$$\Lambda_n(y) = \begin{cases} \frac{\lambda_n-\lambda_{n-1}}{\lambda_n} & ; \quad (n = k_r)\ , \\ 0 & ; \quad (n = k_r + 1) \end{cases} \qquad (r \in \mathbb{N})$$

eşitliği elde edilir. Bu ve (5.1.4) ifadesi birleştirildiğinde $\Lambda(y) \in c_0$ ve böylece $y \in c_0^{\lambda}$ olduğu görülür. Bu nedenle y dizisi c_0^{λ} ve c^{λ} uzaylarının her ikisinin elamanıdır fakat c_0 ve c uzaylarının herhangi birinin elemanı değildir. Böylece bu ifade ile Lemma 5.1.1 ile birleştirilirse $c_0 \subset c_0^{\lambda}$ ve $c \subset c^{\lambda}$ kapsamalarının kesin olduğu elde edilir. Bu da ispatı tamamlar. □

Şimdi, Teorem 5.1.3'ün bir sonucu olarak $\Lambda-$matrisi için yakınsaklık ve sınırlılığa denk olan gerekli ve yeterli şartları veren aşağıdaki sonucu elde ederiz.

Sonuç 5.1.1. *$c_0^{\lambda} = c_0$, $c^{\lambda} = c$ ve $\ell_{\infty}^{\lambda} = \ell_{\infty}$ eşitliklerinin sağlanması için gerek ve yeter şart $\liminf_{n\to\infty} \lambda_{n+1}/\lambda_n > 1$ olmasıdır [6].*

İspat. Gereklilik şartı Teorem 5.1.3 den açıktır. Gerçekten eğer eşitlikler sağlanırsa Teorem 5.1.3 deki kapsamalar kesin değildir ve böylece $\liminf \lambda_{n+1}/\lambda_n \neq 1$ elde edilir. Buradan $\liminf_{n\to\infty} \lambda_{n+1}/\lambda_n > 1$ olur. Tersine $\liminf_{n\to\infty} \lambda_{n+1}/\lambda_n > 1$ olduğunu kabul edelim. Bu taktirde Lemma 5.1.5 (b) den $(\lambda_n/(\lambda_n - \lambda_{n-1}))_{n=0}^{\infty} \in \ell_{\infty}$ ve böylece $(\lambda_{n-1}/(\lambda_n - \lambda_{n-1}))_{n=0}^{\infty} \in \ell_{\infty}$ olur. Şimdi $x \in c^{\lambda}$ olsun. Bu taktirde $\Lambda(x) = (\Lambda_n(x))_{n=0}^{\infty} \in c$ ve dolayısıyla $(\Lambda_n(x) - \Lambda_{n-1}(x))_{n=0}^{\infty} \in c_0$ olur. Böylece

(5.1.3) den $(S_n(x))_{n=0}^{\infty} \in c_0$ elde edilir. Bu her $x \in c^{\lambda}$ ve her $x \in c_0^{\lambda}$ için $S(x) \in c_0$ olduğunu gösterir. Sonuç olarak Lemma 5.1.1 gereğince $c_0^{\lambda} = c_0$ ve $c^{\lambda} = c$ eşitlikleri sağlanır. Benzer olarak Lemma 5.1.1 yerine Lemma 5.1.4 kullanılırsa $\liminf\limits_{n\to\infty} \lambda_{n+1}/\lambda_n > 1$ ise $\ell_{\infty}^{\lambda} = \ell_{\infty}$ eşitliği sağlanır. Bu da ispatı tamamlar. □

Lemma 5.1.6. *Aşağıdaki önermeler doğrudur.*

(a) c_0^{λ} ve c uzaylarının arakesitleri boş olmamasına rağmen c_0^{λ} uzayı c uzayını kapsamaz.

(b) c^{λ} ve ℓ_{∞} uzaylarının arakesitleri boş olmamasına rağmen c^{λ} uzayı ℓ_{∞} uzayını kapsamaz [6].

İspat. (a) İspat Teorem 5.1.2 den açıktır.

(b) Lemma 5.1.1 den $c \subset c^{\lambda} \cap \ell_{\infty}$ olduğundan c^{λ} ile ℓ_{∞} uzaylarının kesiştiği açıktır. Ayrıca [29] nolu çalışmadaki Steinhaus Teoreminden dolayı Λ matrisinin regülerliği $\Lambda-$toplanamayan bir $x \in \ell_{\infty}$ dizisinin mevcudiyetini gerektirir. Yani $\Lambda(x) \notin c$ dir. Böylece bir $x \in \ell_{\infty}$ dizisi vardır fakat $x \notin c^{\lambda}$ dır. Bundan dolayı $\ell_{\infty} \subset c^{\lambda}$ kapsaması sağlanmaz. Bu da ispatı tamamlar. □

Teorem 5.1.4. *Eğer* $\liminf\limits_{n\to\infty} \lambda_{n+1}/\lambda_n = 1$ *ise aşağıdakiler sağlanır.*

(a) c_0^{λ} ve c uzaylarından hiçbiri diğerini kapsamaz.

(b) c_0^{λ} ve ℓ_{∞} uzaylarından hiçbiri diğerini kapsamaz.

(c) c^{λ} ve ℓ_{∞} uzaylarından hiçbiri diğerini kapsamaz [6].

İspat. (a) Lemma 5.1.6 (a) da gösterildiği gibi $c \subset c_0^{\lambda}$ kapsaması sağlanmaz. Ayrıca $\liminf\limits_{n\to\infty} \lambda_{n+1}/\lambda_n = 1$ ise ters kapsama da sağlanmaz. Gerçekten Teorem 5.1.3'ün ispatında (5.1.5) ile tanımlanan y dizisi c_0^{λ}/c kümesine aittir. Böylece (a) şıkkı ispatlanmış olur.

(b) Lemma 5.1.6 dan $\ell_{\infty} \subset c_0^{\lambda}$ kapsaması sağlanmaz. Ayrıca $\lim\limits_{n\to\infty} \inf \lambda_{n+1}/\lambda_n = 1$ ise ters kapsamanın sağlanmadığını gösterelim. Bunun için $\liminf\limits_{n\to\infty} \lambda_{n+1}/\lambda_n = 1$ olduğunu kabul edelim. Bu taktirde Teorem 5.1.3'ün ispatında görüldüğü gibi $\lambda = (\lambda_k)_{k=0}^{\infty}$ dizisinin bir $(\lambda_{k_r})_{r=0}^{\infty}$ alt dizisi vardır öyle ki her $r \in \mathbb{N}$ için $k_{r+1} - k_r \geq 2$

dir ve (5.1.4) sağlanır. Şimdi $0 < \alpha < 1$ olmak üzere her $k \in \mathbb{N}$ için $x = (x_k)_{k=0}^{\infty}$ dizisini,

$$x_k = \begin{cases} \left(\frac{\lambda_k}{\lambda_k - \lambda_{k-1}}\right)^{\alpha} & ; \quad (k = k_r) \ , \\ -\left(\frac{\lambda_{k-1} - \lambda_{k-2}}{\lambda_k - \lambda_{k-1}}\right) x_{k-1} & ; \ (k = k_r + 1) \ , \\ 0 & ; \quad - \end{cases} \qquad (r \in \mathbb{N})$$

şeklinde tanımlayalım. Bu taktirde (5.1.4) gereğince $x \notin \ell_\infty$ olur. Diğer taraftan basit hesaplamalarla her $n \in \mathbb{N}$ için,

$$\sum_{k=0}^{n} (\lambda_k - \lambda_{k-1}) x_k = \begin{cases} (\lambda_n - \lambda_{n-1}) \left(\frac{\lambda_n}{\lambda_n - \lambda_{n-1}}\right)^{\alpha} & ; \ (n = k_r) \ , \\ 0 & ; \ (n \neq k_r) \end{cases}$$

elde edilir ve böylece,

$$\Lambda_n(x) = \begin{cases} \left(\frac{\lambda_n - \lambda_{n-1}}{\lambda_n}\right)^{1-\alpha} & ; \ (n = k_r) \ , \\ 0 & ; \ (n \neq k_r) \end{cases} \qquad (r \in \mathbb{N})$$

olur. Bu da (5.1.4) ile birlikte $\Lambda(x) \in c_0$ olduğunu gösterir. Bu nedenle x dizisi c_0^λ uzayının elemanı fakat ℓ_∞ uzayının elemanı değildir. Sonuç olarak $c_0^\lambda \subset \ell_\infty$ kapsaması sağlanmaz. Son olarak (c) şıkkı Lemma 5.1.6 (b) ve (b) şıkkının birleştirilmesiyle elde edilir. □

Uyarı 5.1.1. *Bu bölümün sonuçları [2] nolu çalışmadaki $Z(u, v; c)$, $Z(u, v; c_0)$ ve $Z(u, v, \ell_\infty)$ genelleştirilmiş ağırlıklı ortalamalar uzaylarına u ve v ye belirli bazı şartlar konularak genişletilebilir [6].*

Teorem 5.1.5. *Eğer $0 < p < q < \infty$ ise $\ell_p^\lambda \subset \ell_q^\lambda$ kapsaması kesin olarak sağlanır [5].*

İspat. $0 < p < q < \infty$ olsun. Bu durumda $\ell_p \subset \ell_q$ olduğundan $\ell_p^\lambda \subset \ell_q^\lambda$ kapsaması sağlanır. $\ell_p \subset \ell_q$ kapsaması kesin olduğundan ℓ_q uzayında olup ℓ_p uzayında olmayan bir $x = (x_k)$ dizisi mevcuttur. Yani $x \in \ell_q / \ell_p$ dir.

Şimdi x dizisinin terimleri yardımıyla $y = (y_k)$ dizisini şu şekilde tanımlayalım.

$y_k = \frac{\lambda_k x_k - \lambda_{k-1} x_{k-1}}{\lambda_k - \lambda_{k-1}}$; $k \in \mathbb{N}$ olsun. Bu taktirde her $n \in \mathbb{N}$ için

$$\begin{aligned} \Lambda_n(y) &= \frac{1}{\lambda_n} \sum_{k=0}^{n} (\lambda_k x_k - \lambda_{k-1} x_{k-1}) \\ &= x_n \end{aligned}$$

dir. Yani $\wedge(y) = x$ dir ve böylece $\wedge(y) \in \ell_q / \ell_p$ olur. Bu durumda y dizisi ℓ_q^λ uzayında iken ℓ_p^λ uzayında değildir. Bu nedenle $\ell_p^\lambda \subset \ell_q^\lambda$ kapsaması sağlanır ve kesindir. Bu da ispatı tamamlar. □

Teorem 5.1.6. $0 < p < \infty$ *iken* $\ell_p^\lambda \subset c_0^\lambda \subset c^\lambda \subset \ell_\infty^\lambda$ *kapsaması kesindir [5].*

İspat. Teorem 5.1.1'den $c_0^\lambda \subset c^\lambda \subset \ell_\infty^\lambda$ kapsaması kesin olduğundan dolayı $\ell_p^\lambda \subset c_0^\lambda$ kapsamasının kesin olduğunu göstermek yeterlidir.

Öncelikle $x \in \ell_p^\lambda$ olması $\Lambda(x) \in \ell_p$ yi gerektirdiğinden $\Lambda(x) \in c_0$ olur ki bu $x \in c_0^\lambda$ olması demektir yani $0 < p < \infty$ için $\ell_p^\lambda \subset c_0^\lambda$ kapsaması sağlanır.

$$x_k = \frac{1}{(k+1)^{\frac{1}{p}}}; \; (k \in \mathbb{N}) \tag{5.1.6}$$

şeklinde tanımlanan $x = (x_k)$ dizisini düşünelim. Bu durumda $x \in c_0$ ve $c_0 \subset c_0^\lambda$ olduğundan dolayı $x \in c_0^\lambda$ olur. Diğer bir ifade ile her $n \in \mathbb{N}$ için,

$$\begin{aligned} |\Lambda_n(x)| &= \frac{1}{\lambda_n} \sum_{k=0}^{n} \frac{\lambda_k - \lambda_{k-1}}{(k+1)^{\frac{1}{p}}} \\ &\geq \frac{1}{\lambda_n (n+1)^{\frac{1}{p}}} \sum_{k=0}^{n} (\lambda_k - \lambda_{k-1}) \\ &= \frac{1}{(n+1)^{\frac{1}{p}}} \end{aligned}$$

olur ki bu $\Lambda(x) \notin \ell_p$ ve böylece $x \notin \ell_p^\lambda$ olduğunu gösterir. Bu nedenle x dizisi c_0^λ da iken ℓ_p^λ uzayında değildir. Böylece $\ell_p^\lambda \subset c_0^\lambda$ kapsaması $0 < p < \infty$ için kesindir. Bu da ispatı tamamlar. □

Daima $c_0 \subset c_0^\lambda$, $c \subset c^\lambda$ ve $\ell_\infty \subset \ell_\infty^\lambda$ kapsamalarının sağlanmasına rağmen $0 < p < \infty$ için $\ell_p \subset \ell_p^\lambda$ kapsaması sağlanmaz. Gerçekten $1/\lambda = (1/\lambda_k)$ ve $0 < p < \infty$ olduğunda eğer $\frac{1}{\lambda} \notin \ell_p$ ise o zaman $\ell_p \subset \ell_p^\lambda$ kapsamasının sağlanmadığını aşağıdaki Lemmada ispat edeceğiz.

Lemma 5.1.7. *ℓ_p ve ℓ_p^λ uzayları ayrık degildir. Ayrıca eğer $\frac{1}{\lambda} \notin \ell_p$ ise $0 < p < \infty$ olmak üzere ℓ_p ve ℓ_p^λ uzaylarının hiçbirisi bir diğerini içermez [5].*

İspat. $0 < p < \infty$ için $(\lambda_1 - \lambda_0, -\lambda_0, 0, 0, ...) \in \ell_p \cap \ell_p^\lambda$ olduğundan ℓ_p ve ℓ_p^λ uzaylarının arakesiti boş kümeden farklıdır.

Şimdi $0 < p < \infty$ iken $\frac{1}{\lambda} \notin \ell_p$ olduğunu kabul edelim ve $x = e^{(0)} = (1, 0, 0, ...) \in \ell_p$ dizisini düşünelim. O zaman her $n \in \mathbb{N}$ için,

$$\Lambda_n(x) = \frac{1}{\lambda_n} \sum_{k=0}^{n} (\lambda_k - \lambda_{k-1}) e_k^{(0)} = \frac{\lambda_0}{\lambda_n}$$

olur. Bu bize $\wedge(x) \notin \ell_p$ ve böylece $x \notin \ell_p^\lambda$ olduğunu gösterir. Bu yüzden x dizisi ℓ_p uzayında iken ℓ_p^λ uzayında değildir. Böylece $\ell_p \subset \ell_p^\lambda$ kapsaması $\frac{1}{\lambda} \notin \ell_p$ için sağlanmaz $(0 < p < \infty)$. Diğer bir ifade ile $1 \leq p < \infty$ olsun ve her $k \in \mathbb{N}$ için $y = (y_k)$ dizisi şöyle tanımlansın,

$$y_k = \begin{cases} \frac{1}{\lambda} & ; \quad (\ k, \text{çift ise}) \\ \frac{-1}{\lambda_{k-1}} \left(\frac{\lambda_{k-1} - \lambda_{k-2}}{\lambda_k - \lambda_{k-1}} \right) & ; \quad (k, \text{tek ise}) \end{cases}$$

$\frac{1}{\lambda} \notin \ell_p$ olduğundan $y \notin \ell_p$ olur. Bunun yanında her $n \in N$ için,

$$\Lambda_n(y) = \begin{cases} \frac{1}{\lambda_n} (\frac{\lambda_n - \lambda_{n-1}}{\lambda_n}) & ; \quad (\ n, \text{çift ise}) \\ 0 & ; \quad (n, \text{tek ise}) \end{cases}$$

ve böylece

$$\begin{aligned}
\sum_n |\Lambda_n(y)|^p &= \sum_n |\Lambda_{2n}(y)|^p \\
&= \sum_n \frac{1}{\lambda_{2n}^p} \left(\frac{\lambda_{2n} - \lambda_{2n-1}}{\lambda_{2n}} \right)^p \\
&\leq \frac{1}{\lambda_0^p} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_{2n-2}^p} \left(\frac{\lambda_{2n} - \lambda_{2n-2}}{\lambda_{2n}} \right)^p \\
&\leq \frac{1}{\lambda_0^p} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_{2n-2}^p} \left(\frac{\lambda_{2n}^p - \lambda_{2n-2}^p}{\lambda_{2n}^p} \right) \\
&= \frac{1}{\lambda_0^p} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{\lambda_{2n-2}^p} - \frac{1}{\lambda_{2n}^p} \right) \\
&= \frac{2}{\lambda_0^p} \\
&< \infty
\end{aligned}$$

olduğundan $\wedge(y) \in \ell_p$ ve $y \in \ell_p^\lambda$ elde edilir. Bu ise y dizisinin ℓ_p^λ uzayında olup ℓ_p uzayında olmadığını gösterir.

Benzer olarak $0 < p < 1$ için $\ell_p^\lambda \backslash \ell_p$ kümesine ait olan bir dizi inşa edilebilir. Böylece $0 < p < \infty$ için $\frac{1}{\lambda} \notin \ell_p$ olduğu zaman $\ell_p^\lambda \subset \ell_p$ kapsaması sağlanmaz. Sonuç olarak $0 < p < \infty$ için eğer $\frac{1}{\lambda} \notin \ell_p$ ise ℓ_p ve ℓ_p^λ uzaylarının biri diğerini kapsamaz. Bu da ispatı tamamlar. □

Lemma 5.1.8. *Eğer $\ell_p \subset \ell_p^\lambda$ kapsaması sağlanırsa, o zaman $0 < p < \infty$ için $\frac{1}{\lambda} \in \ell_p$ dir [5].*

İspat. $0 < p < \infty$ için $\ell_p \subset \ell_p^\lambda$ kapsamasının sağlandığını kabul edelim ve $x = e^{(0)} = (1, 0, 0, ...) \in \ell_p$ dizisini düşünelim. Bu taktirde $x \in \ell_p^\lambda$ ve bundan dolayı $\Lambda(x) \in \ell_p$ dir. Böylece,

$$\lambda_0^p \sum_n \left(\frac{1}{\lambda_n}\right)^p = \sum_n |\Lambda_n(x)|^p < \infty$$

elde edilir. Bu $\frac{1}{\lambda} \in \ell_p$ olduğunu gösterir ve ispat tamamlanır. Daha sonra $\frac{1}{\lambda} \in \ell_p$ şartının sadece gerekli olmadığını aynı zamanda $1 \leq p < \infty$ olmak üzere $\ell_p \subset \ell_p^\lambda$ kapsamasının sağlanması için yeterli olduğunu gösterelim. Bundan önce (3.1.1) ile verilen $\lambda = (\lambda_k)$ dizisini dikkate alalım. Her $k \in \mathbb{N}$ ve $n + k > 0$ için, $0 < \frac{\lambda_k - \lambda_{k-1}}{\lambda_n} < 1$; $(0 \leq k \leq n)$ bulunur. □

Ayrıca eğer $\frac{1}{\lambda} \in \ell_1$ ise ispatı kolay olan aşağıdaki Lemmayı elde ederiz.

Lemma 5.1.9. *Eğer $\frac{1}{\lambda} \in \ell_1$ ise o zaman;*

$$\sup_k \left((\lambda_k - \lambda_{k-1}) \sum_{n=k}^{\infty} \frac{1}{\lambda_n} \right) < \infty$$

olur [5].

Teorem 5.1.7. *$\ell_1 \subset \ell_1^\lambda$ kapsamasının sağlanması için gerek ve yeter şart $\frac{1}{\lambda} \in \ell_1$ olmasıdır [5].*

İspat. Gereklilik kısmı Lemma 5.1.8 den direk elde edilir. Tersine $\frac{1}{\lambda} \in \ell_1$ olduğunu varsayalım. Bu taktirde Lemma 5.1.9 dan

$$M = \sup_k \left[(\lambda_k - \lambda_{k-1}) \sum_{n=k}^{\infty} \frac{1}{\lambda_n} \right] < \infty$$

olur. Ayrıca $x = (x_k) \in \ell_1$ verilsin. Böylece,

$$\begin{aligned}
\|x\|_{\ell_1^\lambda} &= \sum_{n=0}^{\infty} |\Lambda_n(x)|^1 \\
&\leq \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{\lambda_n} \sum_{k=0}^{n} (\lambda_k - \lambda_{k-1}) |x_k| \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} |x_k| (\lambda_k - \lambda_{k-1}) \sum_{n=k}^{\infty} \frac{1}{\lambda_n} \\
&\leq M \sum_{k=0}^{\infty} |x_k|^1 \\
&= M \|x\|_{\ell_1} \\
&< \infty
\end{aligned}$$

elde edilir. Bu $x \in \ell_1^\lambda$ olduğunu gösterir. Böylece $\ell_1 \subset \ell_1^\lambda$ kapsaması sağlanır. □

Sonuç 5.1.2. *Eğer $\frac{1}{\lambda} \in \ell_1$ ise $1 \leq p < \infty$ için $\ell_p \subset \ell_p^\lambda$ kapsaması sağlanır [5].*

İspat. Teorem 5.1.7 den elde edilen kapsamanın $p = 1$ için sağlandığı aşikardır. Geriye $1 < p < \infty$ için ispatın yapılması kalır. Bunun için $x = (x_k) \in \ell_p$ alalım. Bu taktirde her $n \in \mathbb{N}$ için Hölder eşitsizliğinden,

$$\begin{aligned}
|\Lambda_n(x)|^p &= \left| \sum_{k=0}^{n} \left(\frac{\lambda_k - \lambda_{k-1}}{\lambda_n} \right) x_k \right|^p \\
&\leq \left[\sum_{k=0}^{n} \left(\frac{\lambda_k - \lambda_{k-1}}{\lambda_n} \right) |x_k| \right]^p \\
&\leq \left[\sum_{k=0}^{n} \left(\frac{\lambda_k - \lambda_{k-1}}{\lambda_n} \right) |x_k|^p \right] \left[\sum_{k=0}^{n} \frac{\lambda_k - \lambda_{k-1}}{\lambda_n} \right]^{p-1} \\
&= \frac{1}{\lambda_n} \sum_{k=0}^{n} (\lambda_k - \lambda_{k-1}) |x_k|^p
\end{aligned}$$

elde ederiz. Böylece,

$$\begin{aligned}
\sum_{n}^{p} |\Lambda_n(x)|^p &\leq \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{\lambda_n} \sum_{k=0}^{n} (\lambda_k - \lambda_{k-1}) |x_k|^p \\
&= \sum_{k=0}^{n} |x_k|^p (\lambda_k - \lambda_{k-1}) \sum_{n=k}^{\infty} \frac{1}{\lambda_n}
\end{aligned}$$

olur ve burada Lemma 5.1.9 da tanımlanan,

$$M = \sup_k \left[(\lambda_k - \lambda_{k-1}) \sum_{n=k}^{\infty} \frac{1}{\lambda_n} \right] < \infty$$

kullanıldığı zaman,

$$\|x\|_{\ell_p^\lambda}^p \leq M \sum_{k=0}^{n} |x_k|^p = M \|x\|_{\ell_p}^p < \infty$$

elde edilir. Bu $x \in \ell_p^\lambda$ olduğunu gösterir. Böylece $1 < p < \infty$ için $\ell_p \subset \ell_p^\lambda$ kapsaması sağlanır. Bu da ispatı tamamlar. □

Sonuç 5.1.3. *$\ell_p \subset \ell_p^\lambda$ kapsamasının sağlanması için gerek ve yeter şart $1 \leq p < \infty$ olmak üzere $\frac{1}{\lambda} \in \ell_p$ olmasıdır [5].*

İspat. Gereklilik Lemma 5.1.8 ile elde edilir. Tersine $1 \leq p < \infty$ için $\frac{1}{\lambda} \in \ell_p$ olduğunu kabul edelim. Böylece $\frac{1}{\lambda^p} = \left(\frac{1}{\lambda_k^p}\right) \in \ell_1$ dir. Bu nedenle Lemma 5.1.9 ile,

$$\sup_k ((\lambda_k - \lambda_{k-1}))^p \sum_{n=k}^{\infty} \frac{1}{\lambda_n^p}) \leq \sup_k \left(\left(\lambda_k^p - \lambda_{k-1}^p\right) \sum_{n=k}^{\infty} \frac{1}{\lambda_n^p} \right) < \infty$$

elde edilir. Ayrıca her sabit $k \in \mathbb{N}$ için,

$$\left(\Lambda_n \left(e^{(k)}\right)\right) = \begin{cases} \frac{\lambda_k - \lambda_{k-1}}{\lambda_n} & ; \quad (n \geq k) \\ 0 & ; \quad (n < k) \end{cases} \quad (n \in \mathbb{N})$$

dir. Böylece,

$$\left\|e^{(k)}\right\|_{\ell_p^\lambda}^p = (\lambda_k - \lambda_{k-1})^p \sum_{n=k}^{\infty} \frac{1}{\lambda_n^p} < \infty \qquad (k \in \mathbb{N})$$

olur ki bu her $k \in \mathbb{N}$ için $e^{(k)} \in \ell_p^\lambda$ olduğunu verir. Yani ℓ_p uzayının her baz elemanı ℓ_p^λ uzayının elemanıdır. Bu ℓ_p^λ uzayının ℓ_p uzayının Schauder bazını içerdiğini gösterir ki $\sup_k \left\|e^{(k)}\right\|_{\ell_p^\lambda} < \infty$ dur. Sonuç olarak $\ell_p \subset \ell_p^\lambda$ kapsaması sağlanır. Bu da ispatı tamamlar. □

Şimdi, $1 \leq p < \infty$ olmak üzere ℓ_p^λ uzayının önemli bir özel durumunu verelim.

Örnek 5.1.1. *Her $k \in \mathbb{N}$ için $\lambda_k = k+1$ olarak verilen $\lambda = (\lambda_k)$ dizisini gözönüne alalım. Bu durumda $1 < p < \infty$ için $\frac{1}{\lambda} \in \ell_p$ iken $\frac{1}{\lambda} \notin \ell_1$ dir. Böylece Lemma 5.1.7 den $\ell_1 \subset \ell_1^\lambda$ kapsaması sağlanmaz. Diğer taraftan çok iyi bilinen Hardy discrete eşitsizliğini uygularsak,*

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{k=0}^{n} \frac{|x_k|}{n+1} \right)^p < \left(\frac{p}{p-1} \right)^p \sum_{n=0}^{\infty} |x_n|^p ; \quad (1 < p < \infty)$$

olur. Şimdi $1 < p < \infty$ olmak üzere her $x \in \ell_p$ için,

$$\|x\|_{\ell_p^\lambda} < \left(\frac{p}{p-1}\right)\|x\|_{\ell_p}$$

elde edilir. Bu $1 < p < \infty$ için $\ell_p \subset \ell_p^\lambda$ olduğunu gösterir. Buna ilaveten aslında bu kapsama kesin olarak sağlanır. Örneğin, $y = \left((-1)^k\right)$ dizisini ele alalım. Bu dizi ℓ_p de olmamasına rağmen ℓ_p^λ dadır. Çünkü,

$$\sum_n |\Lambda_n(y)| = \sum_n \left|\frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\right|^p = \sum_n \frac{1}{(2n+1)^p} < \infty \qquad (1 < p < \infty)$$

dur [5].

Böylece yukarıdaki açıklamadan aşağıdaki sonuç elde edilir.

Lemma 5.1.10. *$x = (x_k)$ dizisi, $\liminf_{k\to\infty} x_k = 0$ olacak şekilde pozitif reel sayıların bir dizisi olsun. Bu taktirde $0 < p < \infty$ olacak şekildeki her pozitif sayı için x'in p ye bağlı olan bir $x^{(p)} = (x_{k_r})_{r=0}^{\infty}$ alt dizisi vardır öyle ki her $r \in \mathbb{N}$ için $k_{r+1} - k_r \geq 2$ ve $\sum_r |(r+1)\,x_{k_r}|^p < \infty$ dur [5].*

Şimdi aşağıdaki teorem $\Lambda-$matrisinin $p-$mutlak yakınsaklıktan daha kuvvetli, yani $1 \leq p < \infty$ olmak üzere $\ell_p \subset \ell_p^\lambda$ kapsamasının kesin olması için gerekli ve yeterli koşulları vemektedir.

Teorem 5.1.8. *$\ell_p \subset \ell_p^\lambda$ kapsamasının kesin olarak sağlanması için gerek ve yeter şart $1 \leq p < \infty$ olmak üzere $\frac{1}{\lambda} \in \ell_p$ ve $\liminf_{n\to\infty} \frac{\lambda_{n+1}}{\lambda_n} = 1$ olmasıdır [5].*

İspat. $1 \leq p < \infty$ olmak üzere $\ell_p \subset \ell_p^\lambda$ kapsamasının kesin olduğunu kabul edelim. Bu sebeple birinci koşulun gerekliliği Lemma 5.1.8 den direk görülür. Ayrıca $\ell_p^\lambda \subset \ell_p$ kapsaması sağlanmadığından dolayı Lemma 5.1.3 gereğince bir $x \in \ell_p^\lambda$ dizisi vardır ki $S(x) = (S_n(x)) \notin \ell_p$ dir. $x \in \ell_p^\lambda$ olduğundan dolayı $\sum_n |\Lambda(x)|^p < \infty$ olur. Böylece Minkowski eşitsizliği uygulanırsa $\sum_n |\Lambda_n(x) - \Lambda_{n-1}(x)|^p < \infty$ elde edilir. Bu $(\Lambda_n(x) - \Lambda_{n-1}(x)) \in \ell_p$ ve $(S_n(x)) \notin \ell_p$ olduğundan (5.1.2) deki ilişki gereğince $(\lambda_{n-1}/(\lambda_n - \lambda_{n-1})) \notin \ell_\infty$ ve böylece $(\lambda_n/(\lambda_n - \lambda_{n-1})) \notin \ell_\infty$ olur. Bu durumda Lemma 5.1.5 (a) gereğince birinci şartın gerekliliği elde edilir.

Tersine $\frac{1}{\lambda} \in \ell_p$ olduğundan, Sonuç 5.1.3 den $\ell_p \subset \ell_p^\lambda$ kapsaması sağlanır. Bunun yanısıra $\liminf_{n\to\infty} \ \lambda_{k+1}/\ \lambda_k = 1$ olduğundan dolayı Lemma 5.1.5 (a) dan $\liminf_{n\to\infty} \left(\frac{\lambda_k-\lambda_{k-1}}{\lambda_k}\right) = 0$ elde edilir. Böylece Lemma 5.1.10 dan p ye bağlı olan $\lambda = (\lambda_k)$ dizisinin bir $\lambda^{(p)} = (\ \lambda_{k_r})_{r=0}^{\infty}$ alt dizisi vardır ki her $r \in \mathbb{N}$ için $k_{r+1} - k_r \geq 2$ ve

$$\sum_r \left|(r+1)\left(\frac{\lambda_{k_r} - \lambda_{k_{r-1}}}{\lambda_{k_r}}\right)\right|^p < \infty \tag{5.1.7}$$

dur. □

Şimdi her $k \in \mathbb{N}$ için,

$$y_k = \begin{cases} r+1 & ; \quad (k = k_r) \\ -(r+1)(\frac{\lambda_{k-1}-\lambda_{k-2}}{\lambda_k-\ \lambda_{k-1}}) & ; \quad (k = k_{r+1}) \end{cases} \quad (r \in \mathbb{N}) \tag{5.1.8}$$

olacak şekilde bir $y = (y_k)$ dizisi tanımlayalım. Bu durumda $y \notin \ell_p$ olduğu açıktır. Öte yandan her $n \in \mathbb{N}$ için,

$$\Lambda_n(y) = \begin{cases} (r+1)(\frac{\lambda_n-\ \lambda_{n-1}}{\lambda_n}) & ; \quad (n = k_r) \\ 0 & ; \quad (n \neq k_r) \end{cases}$$

eşitliği elde edilir. Bu ve (5.1.7) ifadesi, $\wedge(y) \in \ell_p$ ve $y \in \ell_p^\lambda$ olduğunu belirtir. Böylece y dizisi ℓ_p^λ uzayındadır fakat ℓ_p uzayında değildir. Bu nedenle $1 \leq p < \infty$ olmak üzere $\ell_p \subset \ell_p^\lambda$ kapsaması kesindir. Bu da ispatı tamamlar.

Şimdi $1 \leq p < \infty$ olmak üzere aşağıdaki sonuç, Teorem 5.1.8'un doğrudan sonucu olarak $\Lambda-$matrisinin $p-$mutlak yakınsaklığa eşit olması için gerekli ve yeterli koşulları vermektedir.

Sonuç 5.1.4. *$\ell_p^\lambda = \ell_p$ eşitliğinin sağlanması için gerek ve yeter şart $1 \leq p < \infty$ olmak üzere $\liminf_{n\to\infty} \frac{\lambda_{n+1}}{\lambda_n} > 1$ olmasıdır [5].*

İspat. Gereklilik şartı Teorem 5.1.8 den elde edilir. Eğer eşitlik sağlanırsa $\ell_p \subset \ell_p^\lambda$ kapsaması sağlanır ve Lemma 5.1.8 gereğince $\frac{1}{\lambda} \in \ell_p$ olur. Ayrıca $\ell_p \subset \ell_p^\lambda$ kapsaması kesin olmadığından dolayı Teorem 5.1.8 den $\liminf_{n\to\infty} \lambda_{n+1}/\lambda_n \neq 1$ ve böylece $\liminf_{n\to\infty} \lambda_{n+1}/\lambda_n > 1$ olur.

Tersine $\liminf_{n\to\infty} \lambda_{n+1}/\lambda_n > 1$ olduğunu kabul edelim. Bu taktirde $\lambda_{n+1}/\lambda_n \geq a$ olacak biçimde bir $a > 1$ sabiti vardır ve böylece her $n \in \mathbb{N}$ için $\lambda_n \geq \lambda_0 a^n$ olur.

Bu $\frac{1}{\lambda} \in \ell_1$ olduğunu gösterir ve Sonuç 5.1.2 gereğince $1 \leq p < \infty$ olmak üzere $\ell_p \subset \ell_p^\lambda$ kapsaması sağlanır. Diğer bir ifade ile Lemma 5.1.5 (b) den $(\lambda_n / (\lambda_n - \lambda_{n-1})) \in \ell_\infty$ ve böylece $(\lambda_{n-1} / (\lambda_n - \lambda_{n-1})) \in \ell_\infty$ elde edilir.

Şimdi $x \in \ell_p^\lambda$ olsun. Bu durumda $\Lambda(x) = (\Lambda_n(x)) \in \ell_p$ ve buradan $(\Lambda_n(x) - \Lambda_{n-1}(x)) \in \ell_p$ dir. Bu sebeple (5.1.2) ilişkisi ile $(S_n(x)) \in \ell_p$ yani her $x \in \ell_p^\lambda$ için $S(x) \in \ell_p$ elde edilir. Bu taktirde Lemma 5.1.5 gereğince $\ell_p^\lambda \subset \ell_p$ kapsaması sağlanır. Böylece $\ell_p \subset \ell_p^\lambda$ ve $\ell_p^\lambda \subset \ell_p$ kapsamaları birleştirilirse $1 \leq p < \infty$ olmak üzere $\ell_p^\lambda = \ell_p$ eşitliği elde edilir. Bu da ispatı tamamlar. □

Uyarı 5.1.2. $0 < p < 1$ *olmak üzere Sonuç 5.1.4'ün sağlandığı kolayca elde edilebilir [5].*

Sonuç 5.1.5. ℓ_p^λ, c_0, c *ve* ℓ_∞ *uzayları kesişmelerine rağmen* ℓ_p^λ *uzayı bu uzaylardan herhangi birini kapsamaz. Ayrıca* $0 < p < \infty$ *olmak üzere eğer* $\liminf\limits_{n\to\infty} \lambda_{n+1}/\lambda_n = 1$ *ise* c_0, c *ve* ℓ_∞ *uzaylarından hiçbiri* ℓ_p^λ *uzayını kapsamaz [5].*

İspat. $0 < p < \infty$ olsun. Bu durumda $(\lambda_1 - \lambda_0, -\lambda_0, 0, 0, ...)$ dizisi bütün bu uzaylara ait olduğundan ℓ_p^λ, c_0, c ve ℓ_∞ uzaylarının arakesitinin boş olmadığı aşikardır.

Ayrıca ℓ_p^λ uzayı c_0 uzayını kapsamaz. Çünkü Teorem 5.1.6'nın ispatında (5.1.6) numarada tanımlanan x dizisi c_0'ın elemanı fakat ℓ_p^λ nın elemanı değildir. Bundan dolayı ℓ_p^λ uzayı c_0, c ve ℓ_∞ uzaylarından herhangi birini kapsamaz.

Aynı zamanda eğer $\liminf\limits_{n\to\infty} \lambda_{n+1}/\lambda_n = 1$ ise ℓ_∞ uzayı ℓ_p^λ uzayını kapsamaz. Bu durumda Teorem 5.1.8'in ispatında (5.1.8) ile tanımlanan y dizisi ℓ_p^λ uzayında fakat ℓ_∞ uzayında değildir. Böylece $0 < p < \infty$ olmak üzere $\liminf\limits_{n\to\infty} \lambda_{n+1}/\lambda_n = 1$ olduğunda c_0, c ve ℓ_∞ uzaylarından hiçbiri ℓ_p^λ uzayını kapsamaz. Bu da ispatı tamamlar. □

6. Mutlak Olmayan Tipten c_0^λ, c^λ ve ℓ_∞^λ Uzaylarının $\alpha-, \beta-$ ve $\gamma-$Dualleri

Bu bölümde c_0^λ, c^λ ve ℓ_∞^λ uzaylarının $\alpha-$, $\beta-$ ve γ duallerinin ifadeleri ve ispatları verilmiştir.

6.1 c_0^λ, c^λ ve ℓ_∞^λ Uzaylarının $\alpha-, \beta-$ ve $\gamma-$Dualleri

Burada $\mathcal{F}$ sembolü ile; $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, ...\}$ kümesinin boştan farklı ve sonlu alt cümlelerinin koleksiyonunu göstermek üzere bu tez için gerekli olan [34] nolu çalışmamızda verilen aşağıdaki sonuçları verelim.

Lemma 6.1.1. $(c_0, \ell_1) = (c, \ell_1) = (\ell_\infty, \ell_1)$ *eşitlikleri sağlanır. Ayrıca* $A \in (c_0, \ell_1)$ *olması için gerek ve yeter şart,*

$$\sup_{K \in \mathcal{F}} \left(\sum_{n=0}^{\infty} \left| \sum_{k \in K} a_{nk} \right| \right) < \infty$$

olmasıdır [6].

Lemma 6.1.2. $(c_0, \ell_\infty) = (c, \ell_\infty) = (\ell_\infty, \ell_\infty)$ *eşitlikleri sağlanır. Ayrıca* $A \in (\ell_\infty, \ell_\infty)$ *olması için gerek ve yeter şart,*

$$\sup_{n} \left(\sum_{k=0}^{\infty} |a_{nk}| \right) < \infty$$

olmasıdır [6].

Ayrıca çalışmamız boyunca $x = (x_k)$ ve $y = (y_k)$ dizilerinin birbirlerine $y = \Lambda(x)$ ilişkisi ile bağlı olduğunu kabul edeceğiz. Yani y dizisi, x'in $\Lambda-$dönüşümüdür. Buna göre, x dizisinin c_0^λ, c^λ ve ℓ_∞^λ uzaylarının içinde olması için gerek ve yeter şart y dizisinin sırasıyla c_0, c ve ℓ_∞ uzaylarının içinde olmasıdır. Buna ek olarak,

$$
\begin{aligned}
x_k &= \sum_{j=k-1}^{k} (-1)^{k-j} \frac{\lambda_j}{\lambda_k - \lambda_{k-1}} y_j \\
&= \frac{-\lambda_{k-1}}{\lambda_k - \lambda_{k-1}} y_{k-1} + \frac{\lambda_k}{\lambda_k - \lambda_{k-1}} y_k \quad ; (k \in \mathbb{N}) \qquad (6.1.1) \\
&= \frac{1}{\lambda_k - \lambda_{k-1}} (\lambda_k y_k - \lambda_{k-1} y_{k-1})
\end{aligned}
$$

eşitliği kolayca türetilebilir. Şimdi c_0^λ, c^λ ve ℓ_∞^λ uzaylarının $\alpha-$dualini tanımlayan aşağıdaki sonucu vereceğiz.

Teorem 6.1.1. *c_0^λ, c^λ ve ℓ_∞^λ uzaylarının $\alpha-$ duali,*

$$a_1^\lambda = \left\{ a = (a_n) \in w : \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\lambda_n}{\lambda_n - \lambda_{n-1}} |a_n| < \infty \right\}$$

cümlesidir [6].

İspat. Herhangi bir sabit $a = (a_n) \in w$ dizisi için her $k, n \in \mathbb{N}$ olmak üzere $B = (b_{nk})_{n,k=0}^{\infty}$ matrisini,

$$b_{nk} = \begin{cases} (-1)^{n-k} \frac{\lambda_k}{\lambda_n - \lambda_{n-1}} a_n & ; \quad n-1 \leq k \leq n \ , \\ 0 & ; \quad k < n-1 \text{ veya } k > n \end{cases}$$

şeklinde tanımlansın. Aynı zamanda her $x \in w$ için $\Lambda(x) = y$ dir. Bu taktirde (6.1.1) gereğince,

$$a_n x_n = \sum_{k=n-1}^{n} (-1)^{n-k} \frac{\lambda_k}{\lambda_n - \lambda_{n-1}} a_n y_k = B_n(y) \ \ (n \in \mathbb{N}) \qquad (6.1.2)$$

elde edilir. Böylece (6.1.2) den $x \in c_0^\lambda$ iken $ax = (a_n x_n) \in \ell_1$ olması için gerek ve yeter şart $y \in c_0$ iken $By \in \ell_1$ olmasıdır. Yani $a \in \left(c_0^\lambda\right)^\alpha$ olması için gerek ve yeter şart $B \in (c_0, \ell_1)$ olmasıdır. Bu nedenle Lemma 6.1.1 den A yerine B kullanıldığında $a \in \left(c_0^\lambda\right)^\alpha$ olması için gerek ve yeter şart,

$$\sup_{K \in \mathcal{F}} \left(\sum_{n=0}^{\infty} \left| \sum_{k \in K} b_{nk} \right| \right) < \infty \qquad (6.1.3)$$

olmasıdır. Diğer taraftan $n \in \mathbb{N}$ verilsin. Bu taktirde herhangi bir $K \in \mathcal{F}$ için

$$\left|\sum_{k\in K} b_{nk}\right| = \begin{cases} 0 & ; \quad n-1 \notin K \quad \text{ve } n \notin K \ , \\ \frac{\lambda_{n-1}}{\lambda_n-\lambda_{n-1}} |a_n| & ; \quad n-1 \in K \quad \text{ve } n \notin K \ , \\ \frac{\lambda_{n}}{\lambda_n-\lambda_{n-1}} |a_n| & ; \quad n-1 \notin K \quad \text{ve } n \in K \ , \\ |a_n| & ; \quad n-1 \in K \quad \text{ve } n \in K \end{cases}$$

olur. Böylece (6.1.3) ifadesinin sağlanması için gerek ve yeter şart,

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\lambda_n}{\lambda_n - \lambda_{n-1}} |a_n| < \infty$$

olmasıdır ki bu $\left(c_0^\lambda\right)^\alpha = a_1^\lambda$ olduğunu gösterir. Son olarak Lemma 6.1.1 den $(c_0, \ell_1) = (c, \ell_1) = (\ell_\infty, \ell_1)$ olduğundan benzer olarak $\left(c^\lambda\right)^\alpha = \left(\ell_\infty^\lambda\right)^\alpha = a_1^\lambda$ olduğu gösterilebilir. Bu da ispatı tamamlar. □

Uyarı 6.1.1. *Her n için $\mu = (\mu_n)_{n=0}^\infty$ dizisini $\mu_n = (\lambda_n - \lambda_{n-1})/\lambda_n$ olarak tanımlayalım. Bu taktirde Teorem 6.1.1 den,*

$$\left(c_0^\lambda\right)^\alpha = \left(c^\lambda\right)^\alpha = \ell_\mu^1$$

olur. Burada ℓ_μ^1; Malofosse'nun tanımladığı,

$$\ell_\mu{}^1 = \left\{ x = (x_n) \in w : \frac{x}{\mu} = \left(\frac{x_n}{\mu_n}\right) \in \ell_1 \right\}$$

uzayıdır [36]. Diğer taraftan Lemma 5.1.5 (b) den,

$$\liminf_{n\to\infty} \frac{\lambda_{n+1}}{\lambda_n} > 1$$

ise bu taktirde bir $M > 1$ vardır ki her n için,

$$1 \leq \frac{\lambda_n}{\lambda_n - \lambda_{n-1}} \leq M$$

dir.

Özel olarak Sonuç 5.1.1 den $c_0^\lambda = c_0$, $c^\lambda = c$ ve $\ell_\infty^\lambda = \ell_\infty$ gerçeği ile uygun olarak Teorem 6.1.1 den $\left(c_0^\lambda\right)^\alpha = \left(c^\lambda\right)^\alpha = \left(\ell_\infty^\lambda\right)^\alpha = \ell_1$ elde edilir. $x, y \in w$ dizilerinin $y = \Lambda(x)$ ilişkisi ile bağlantılı olduğunu hatırlarsak (6.1.1)'i kullanarak kolaylıkla aşağıdaki eşitlikleri elde ederiz.

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{n} a_k x_k =& a_0 \frac{1}{\lambda_0-\lambda_{-1}}\left(\lambda_0 y_0-\lambda_{-1} y_{-1}\right)+a_1 \frac{1}{\lambda_1-\lambda_0}\left(\lambda_1 y_1-\lambda_0 y_0\right)+\ldots \\ &+a_n \frac{1}{\lambda_n-\lambda_{n-1}}\left(\lambda_n y_n-\lambda_{n-1} y_{n-1}\right) \\ =& \lambda_0 y_0\left(\frac{a_0}{\lambda_0-\lambda_{-1}}-\frac{a_1}{\lambda_1-\lambda_0}\right)+\lambda_1 y_1\left(\frac{a_1}{\lambda_1-\lambda_0}-\frac{a_2}{\lambda_2-\lambda_1}\right)+\ldots \\ &+\lambda_{n-1} y_{n-1}\left(\frac{a_{n-1}}{\lambda_{n-1}-\lambda_{n-2}}-\frac{a_n}{\lambda_n-\lambda_{n-1}}\right)+a_n \frac{\lambda_n}{\lambda_n-\lambda_{n-1}} y_n \\ =& \sum_{k=0}^{n-1}\left(\frac{a_k}{\lambda_k-\lambda_{k-1}}-\frac{a_{k-1}}{\lambda_{k+1}-\lambda_k}\right) \lambda_k y_k+\frac{\lambda_n}{\lambda_n-\lambda_{n-1}} a_n y_n \\ =& \sum_{k=0}^{n-1} \bar{\Delta}\left(\frac{a_k}{\lambda_k-\lambda_{k-1}}\right) \lambda_k y_k+\frac{\lambda_n}{\lambda_n-\lambda_{n-1}} a_n y_n\end{aligned} \tag{6.1.4}$$

$$\bar{\Delta}\left(\frac{a_k}{\lambda_k-\lambda_{k-1}}\right)=\frac{a_k}{\lambda_k-\lambda_{k-1}}-\frac{a_{k-1}}{\lambda_{k+1}-\lambda_k} \quad ;(k \in \mathbb{N})$$

dir [6]. Bu bizi aşağıdaki sonuca götürür.

Teorem 6.1.2. *$a_2^\lambda, a_3^\lambda, a_4^\lambda$ ve a_5^λ kümeleri aşağıdaki gibi tanımlanır.*

$$\begin{aligned} a_2^\lambda &= \left\{a=(a_k) \in w : \sum_{k=0}^{n}\left|\bar{\Delta}\left(\frac{a_k}{\lambda_k-\lambda_{k-1}}\right)\lambda_k\right|<\infty\right\}, \\ a_3^\lambda &= \left\{a=(a_k) \in w : \sup_k\left|\frac{\lambda_k}{\lambda_k-\lambda_{k-1}} a_k\right|<\infty\right\}, \\ a_4^\lambda &= \left\{a=(a_k) \in w : \lim_{k \rightarrow \infty}\left(\frac{\lambda_k}{\lambda_k-\lambda_{k-1}} a_k\right) \text{ mevcut}\right\}, \\ a_5^\lambda &= \left\{a=(a_k) \in w : \lim_{k \rightarrow \infty}\left(\frac{\lambda_k}{\lambda_k-\lambda_{k-1}} a_k\right)=0\right\}. \end{aligned}$$

Bu taktirde $\left(c_0^\lambda\right)^\beta=a_2^\lambda \cap a_3^\lambda$, $\left(c^\lambda\right)^\beta=a_2^\lambda \cap a_4^\lambda$ ve $\left(\ell_\infty^\lambda\right)^\beta=a_2^\lambda \cap a_5^\lambda$ olur [6].

İspat. Bu teorem [2] nolu çalışmadaki Teorem 2 nin direkT bir sonucudur. □

Uyarı 6.1.2. *(6.1.4) eşitliğinin $x=y=e$ özel durumunu gözönüne alalım. Bu taktirde Teorem 6.1.2 den $\left(c_0^\lambda\right)^\beta \subset bs$, $\left(c^\lambda\right)^\beta \subset cs$ ve $\left(\ell_\infty^\lambda\right)^\beta \subset cs$ kapsamaları sağlanır. Son olarak bu bölümde c_0^λ, c^λ ve ℓ_∞^λ uzaylarının $\gamma-$dualine ilişkin aşağıdaki sonucu elde edeceğiz [6].*

Teorem 6.1.3. *c_0^λ, c^λ ve ℓ_∞^λ uzaylarının $\gamma-$duali $a_2^\lambda \cap a_3^\lambda$ kümesidir [6].*

İspat. Bu sonuç (6.1.4) kullanılarak Lemma 6.1.2 den elde edilir. □

7. Mutlak Olmayan Tipten c_0^λ, c^λ ve ℓ_∞^λ Uzaylarının Bazı Matris Dönüşümleri

Bu bölümde c_0^λ, c^λ ve ℓ_∞^λ uzayları ve bunların arasındaki çeşitli matris dönüşümlerini karakterize eden bazı sonuçlar ifade edilmiştir.

7.1 c_0^λ, c^λ ve ℓ_∞^λ Uzaylarının Bazı Matris Dönüşümleri

Bir $A = (a_{nk})$ sonsuz matrisi için her $n, k \in \mathbb{N}$ olmak üzere kısaca,

$$\tilde{a}_{nk} = \left(\frac{a_{nk}}{\lambda_k - \lambda_{k-1}} - \frac{a_{n,k+1}}{\lambda_{k+1} - \lambda_k} \right) \lambda_k$$

eşitliğini yazalım. Ayrıca $x, y \in w$ olmak üzere $y = \Lambda(x)$ ilişkisini tekrar kullanırsak (6.1.4) den,

$$\sum_{k=0}^{m} a_{nk} x_k = \sum_{k=0}^{m-1} \tilde{a}_{nk} y_k + \frac{\lambda_m}{\lambda_m - \lambda_{m-1}} a_{nm} y_m \quad (n, m \in \mathbb{N}) \tag{7.1.1}$$

elde edilir. Özellikle $x \in c^\lambda$ ve her $n \in \mathbb{N}$ için $A_n = (a_{nk})_{k=0}^{n} \in \left(c^\lambda\right)^\beta$ olsun. Bu taktirde (7.1.1) de $m \to \infty$ için limite geçersek Teorem 6.1.2'i kullanarak,

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{\infty} a_{nk} x_k &= \sum_{k=0}^{\infty} a_{nk} y_k + l a_n \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \tilde{a}_{nk} (y_k - l) + l \left(\sum_{k=0}^{\infty} \tilde{a}_{nk} + a_n \right) \end{aligned}$$

yazabiliriz ki $l = \lim_{k\to\infty} y_k$ ve her n için $a_n = \lim_{k\to\infty} \left(\lambda_k a_{nk} / (\lambda_k - \lambda_{k-1})\right)$ olmak üzere,

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_{nk} x_k = \sum_{k=0}^{\infty} \tilde{a}_{nk} (y_k - l) + l \left(\sum_{k=0}^{\infty} a_{nk} \right) \ ; (n \in \mathbb{N}) \tag{7.1.2}$$

eşitliğine ulaşılır.

Şimdi aşağıdaki koşulları gözönüne alalım.

$$\sup_n \left(\sum_{k=0}^{\infty} |\tilde{a}_{nk}| \right) < \infty \tag{7.1.3}$$

$$\text{Her } n \in \mathbb{N} \text{ için } \left(\frac{\lambda_k}{\lambda_k - \lambda_{k-1}} a_{nk} \right)_{k=0}^{\infty} \in c_0 \tag{7.1.4}$$

$$\text{Her } n \in \mathbb{N} \text{ için } \left(\frac{\lambda_k}{\lambda_k - \lambda_{k-1}} a_{nk} \right)_{k=0}^{\infty} \in c \tag{7.1.5}$$

$$\text{Her } n \in \mathbb{N} \text{ için } \left(\frac{\lambda_k}{\lambda_k - \lambda_{k-1}} a_{nk} \right)_{k=0}^{\infty} \in \ell_\infty \tag{7.1.6}$$

$$\sup_n \left(\sum_{k=0}^{\infty} |a_{nk}| \right) < \infty \tag{7.1.7}$$

$$\lim_{n\to\infty} \left(\sum_{k=0}^{\infty} a_{nk} \right) = a \tag{7.1.8}$$

$$\lim_{n\to\infty} \left(\sum_{k=0}^{\infty} a_{nk} \right) = 0 \tag{7.1.9}$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left| \sum_{k=0}^{\infty} a_{nk} \right| < \infty \tag{7.1.10}$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left| \sum_{k=0}^{\infty} a_{nk} \right|^p < \infty \quad (1 < p < \infty) \tag{7.1.11}$$

$$\text{Her } k \in \mathbb{N} \text{ için } \lim_{n\to\infty} \tilde{a}_{nk} = \tilde{a}_{nk} \tag{7.1.12}$$

$$\lim_{n\to\infty} \left(\sum_{k=0}^{\infty} |\tilde{a}_{nk} - \tilde{a}_k| \right) = 0 \tag{7.1.13}$$

$$\lim_{n\to\infty} \left(\sum_{k=0}^{\infty} |\tilde{a}_{nk}| \right) = 0 \tag{7.1.14}$$

$$\text{Her } k \in \mathbb{N} \text{ için } \lim_{n\to\infty} \tilde{a}_{nk} = 0 \tag{7.1.15}$$

$$\sup_{N\in\mathcal{F}} \left(\sum_{k=0}^{\infty} \left| \sum_{n\in\mathbb{N}} \tilde{a}_{nk} \right| \right) < \infty \tag{7.1.16}$$

$$\sup_{K\in F}\left(\sum_{n=0}^{\infty}\left|\sum_{k\in K}\tilde{a}_{nk}\right|^{p}\right)<\infty\;;(1<p<\infty) \tag{7.1.17}$$

$$\text{Her } n\in\mathbb{N} \text{ için} \sum_{k=0}^{\infty}|\tilde{a}_{nk}| \text{ yakınsak} \tag{7.1.18}$$

Bu taktirde Teorem 6.1.2 ve [34] nolu çalışmadaki Stieglitz ve Tietz'in sonuçları birleştirildiğinde (7.1.1) ve (7.1.2) kullanılarak aşağıdaki sonuçlar elde edilir.

Teorem 7.1.1. *Aşağıdaki ifadeler sağlanır.*

(a) $A\in\left(\ell_{\infty}^{\lambda},\ell_{\infty}\right)$ olması için gerek ve yeter şart (7.1.3) ve (7.1.4)'ün sağlanmasıdır.

(b) $A\in\left(c^{\lambda},\ell_{\infty}\right)$ olması için gerek ve yeter şart (7.1.3), (7.1.5) ve (7.1.7)'nin sağlanmasıdır.

(c) $A\in\left(c_{0}^{\lambda},\ell_{\infty}\right)$ olması için gerek ve yeter şart (7.1.3) ve (7.1.6)'nın sağlanmasıdır [6].

Teorem 7.1.2. *Aşağıdaki ifadeler sağlanır.*

(a) $A\in\left(\ell_{\infty}^{\lambda},c\right)$ olması için gerek ve yeter şart (7.1.3), (7.1.4), (7.1.12) ve (7.1.13)'ün sağlanmasıdır. Ayrıca $A\in\left(\ell_{\infty}^{\lambda},c\right)$ ise bu taktirde her $x\in\ell_{\infty}^{\lambda}$ için,

$$\lim_{n\to\infty}\Lambda_{n}(x)=\sum_{k=0}^{\infty}\tilde{a}_{k}\Lambda_{k}(x) \tag{7.1.19}$$

dir.

(b) $A\in\left(c^{\lambda},c\right)$ olması için gerek ve yeter şart (7.1.3), (7.1.5), (7.1.8) ve (7.1.12)'nin sağlanmasıdır. Ayrıca $A\in\left(c^{\lambda},c\right)$ ise bu taktirde her $x\in c^{\lambda}$ için,

$$\lim_{n\to\infty}\Lambda_{n}(x)=\sum_{k=0}^{\infty}\tilde{a}_{k}\left(\Lambda_{k}(x)-l\right)+la$$

dır.

Burada $l=\lim_{k\to\infty}\Lambda_{k}(x)$ dir.

(c) $A\in\left(c_{0}^{\lambda},c\right)$ olması için gerek ve yeter şart (7.1.3), (7.1.6) ve (7.1.12)'nin sağlanmasıdır. Ayrıca eğer $A\in\left(c_{0}^{\lambda},c\right)$ ise her $x\in c_{0}^{\lambda}$ ise her $x\in c_{0}^{\lambda}$ için (7.1.19) sağlanır [6].

Teorem 7.1.3. *Aşağıdaki ifadeler sağlanır.*

(a) $A \in \left(\ell_\infty^\lambda, c_0\right)$ *olması için gerek ve yeter şart (7.1.4) ve (7.1.14)'ün sağlanmasıdır.*

(b) $A \in \left(c^\lambda, c_0\right)$ *olması için gerek ve yeter şart (7.1.3), (7.1.5), (7.1.9) ve (7.1.15)'in sağlanmasıdır.*

(c) $A \in \left(c_0^\lambda, c_0\right)$ *olması için gerek ve yeter şart (7.1.3), (7.1.6) ve (7.1.15)'in sağlanmasıdır [6].*

Teorem 7.1.4. *Aşağıdaki ifadeler sağlanır.*

(a) $A \in \left(\ell_\infty^\lambda, \ell_1\right)$ *olması için gerek ve yeter şart (7.1.4) ve (7.1.16)'nın sağlanmasıdır.*

(b) $A \in \left(c^\lambda, \ell_1\right)$ *olması için gerek ve yeter şart (7.1.5), (7.1.10) ve (7.1.16)'nın sağlanmasıdır.*

(c) $A \in \left(c_0^\lambda, \ell_1\right)$ *olması için gerek ve yeter şart (7.1.6) ve (7.1.16)'nın sağlanmasıdır [6].*

Teorem 7.1.5. $1 < p < \infty$ *olsun. Bu taktirde aşağıdakiler sağlanır.*

(a) $A \in \left(\ell_\infty^\lambda, \ell_p\right)$ *olması için gerek ve yeter şart (7.1.4), (7.1.17) ve (7.1.18)'in sağlanmasıdır.*

(b) $A \in \left(c^\lambda, \ell_p\right)$ *olması için gerek ve yeter şart (7.1.5), (7.1.11), (7.1.17) ve (7.1.18)'in sağlanmasıdır.*

(c) $A \in \left(c_0^\lambda, \ell_p\right)$ *olması için gerek ve yeter şart (7.1.6), (7.1.17) ve (7.1.18)'in sağlanmasıdır [6].*

Sonuç 7.1.1. $\lambda' = \left(\lambda'_k\right)$ *pozitif reel sayıların kesin artan ve sonsuza giden bir dizisi olsun.* $A = (a_{nk})$ *sonsuz bir matris ve* $B = (b_{nk})$ *matrisi,*

$$b_{nk} = \frac{1}{\lambda'_n}\sum_{j=0}^{n}\left(\lambda'_j - \lambda'_{j-1}\right)a_{jk} \quad ; \ (n, k \in \mathbb{N})$$

şeklinde tanımlansın. Bu taktirde A matrisinin $\left(\ell_\infty^\lambda, \ell_\infty^{\lambda'}\right)$, $\left(c^\lambda, \ell_\infty^{\lambda'}\right)$, $\left(c_0^\lambda, \ell_\infty^{\lambda'}\right)$, $\left(\ell_\infty^\lambda, c^{\lambda'}\right)$, $\left(c^\lambda, c^{\lambda'}\right)$, $\left(c_0^\lambda, c^{\lambda'}\right)$, $\left(\ell_\infty^\lambda, c_0^{\lambda'}\right)$, $\left(c^\lambda, c_0^{\lambda'}\right)$ *veya* $\left(c_0^\lambda, c_0^{\lambda'}\right)$ *sınıflarından herhangi birine ait olması için gerek ve yeter şartlar; Teorem 7.1.1, 7.1.2 veya*

7.1.3 den uygun olanlardan birinde B matrisinin elemanları yerine A matrisinin elemanlarının yazılmasıyla elde edilir [6].

Sonuç 7.1.2. *$A = (a_{nk})$ sonsuz bir matris ve $B = (b_{nk})$ matrisi,*

$$b_{nk} = \sum_{j=0}^{n} a_{jk} \ ; \quad (n, k \in \mathbb{N})$$

şeklinde tanımlansın. Bu taktirde A matrisinin $(\ell_\infty^\lambda, bs)$, (c^λ, bs), (c_0^λ, bs), $(\ell_\infty^\lambda, cs)$, (c^λ, cs), (c_0^λ, cs), $(\ell_\infty^\lambda, cs_0)$, (c^λ, cs_0) veya (c_0^λ, cs_0) sınıflarından herhangi birine ait olması için gerek ve yeter şartlar; Teorem 7.1.1, 7.1.2 veya 7.1.3 den uygun olanlardan birinde B matrisinin elemanları yerine A matrisinin elemanlarının yazılmasıyla elde edilir [6].

Sonuç 7.1.3. *$0 < r < 1$ olmak üzere, $A = (a_{nk})$ sonsuz bir matris ve $B = (b_{nk})$ matrisi,*

$$b_{nk} = \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} (1-r)^{n-j} r^j a_{jk} \ ; \quad (n, k \in \mathbb{N})$$

şeklinde tanımlansın. Bu taktirde A matrisinin $(\ell_\infty^\lambda, e_p^r)$, (c^λ, e_p^r), (c_0^λ, e_p^r), $(\ell_\infty^\lambda, e_c^r)$, (c^λ, e_c^r), (c_0^λ, e_c^r), $(\ell_\infty^\lambda, e_0^r)$, (c^λ, e_0^r) veya (c_0^λ, e_0^r) sınıflarından herhangi birine ait olması için gerek ve yeter şartlar; Teorem 7.1.1-7.1.5 den uygun olanlardan birinde B matrisinin elemanları yerine A matrisinin elemanlarının yazılmasıyla elde edilir. Burada $1 \leq p \leq \infty$ ve e_0^r, e_c^r ve e_p^r uzayları, Altay et al. [24], Mursaleen et al. [25], Başar ve Altay [1] tarafından elde edilen Euler dizi uzaylarını gösterir [6].

KAYNAKLAR

[1] B. Altay and F. Başar, Some Euler sequence spaces of non-absolute type, Ukrainian Math. J., 57(1) (2005) 1-17.

[2] E. Malkowsky and E. Savaş, Matrix transformations between sequence spaces of generalized weighted means, Appl. Math. Comput., 147(2) (2004) 333-345.

[3] C. Aydın and F. Başar, On the new sequence spaces which include the spaces c_0 and c, Hokkaido Math. J., 33(2) (2004) 383-398.

[4] P.-N. Ng and P. -Y. Lee, Cesàro sequence spaces of non-absolute type, Comment.Math. Prace Mat., 20(2) (1978) 429-433.

[5] M. Mursaleen and A. Noman, On some new sequence spaces of non-absolute type related to the spaces ℓ_p and ℓ_∞ I; Nis, Sebria 25(2) (2011) 33-51.

[6] M. Mursaleen and A.K. Noman, On the spaces of $\lambda-$Convergent and Bounded Sequences, Thai J.Math. 8(2) (2010) 311-329.

[7] E. Şuhubi, Fonksyonel Analiz, İTÜ Vakfı, 2001.

[8] F. Başar, Summability Theory and Its Applications. Bentham Science Publishers, İstanbul (2012). ISBN:978-1-60805-252-3.

[9] J. Boos, Classical and Modern Methods in Summability, Oxford University Press. New York, Oxford, 2000.

[10] M. Candan, Domain of the double sequential band matrix in the classical sequence spaces, J. Inequal. Appl. (2012), 2012:281, 15 pp.

[11] M. Candan, Almost convergence and double sequential band matrix, Acta. Math. Sci. 34B(2)(2014), 354-366.

[12] M. Candan, A new sequence space isomorphic to the space $\ell(p)$ and compact operators J. Math. Comput. Sci. 4 (2014), No. 2, 306-334.

[13] M. Candan, Domain of the double sequential band matrix in the spaces of convergent and null sequences, Adv. Difference Edu.(2014), 2014:163, 18 pp.

[14] M. Candan, Some new sequence spaces derived from the spaces of bounded,convergent and null sequences, Int. J. Mod.Math. Sci.,(12) (2) (2014), 74-87.

[15] M. Candan, A new approach on the spaces of generalized Fibonacci difference null and convergent sequences, Math. AEterna. (1) (5) (2015), 191-210.

[16] M. Candan and A. Güneş, Paranormed sequence space of non-absolute type founded using generalized difference matrix, Proc. Nat. Acad. Sci. India Sect. A., (85) (2) (2015), 269-276.

[17] M. Candan and K. Kayaduman, Almost convergent sequence space derived by generalized Fibonacci matrix and Fibonacci core, Brithish J. Math. Comput. Sci., (7) (2) (2015), 150-167.

[18] M. Candan and G. Kılınç, A different look for paranormed Riesz sequence space of derived by Fibonacci Matrix, Konuralp J. Math. Vol.3, No.2, (2015), 62-76.

[19] M. Candan and E.E. Kara, A study on topological and geometrical characteristics of new Banach sequence spaces, Gulf J. Math. Vol.3, No.4, (2015), 67-84.

[20] M. Şengönül and F. Başar, Some new Cesàro sequence spaces of non-absolute type which include the spaces c_0 and c, Soochow J.Math., 31(1) (2005) 107-119.

[21] E. Malkowsky and V. Rakocevic, Measure of noncompactness of linear operators between spaces of sequences that are $(\bar{N}, q)$ summable or bounded, Czechoslovak Math. J., 51(3) (2001) 505-522.

[22] K. Knopp, Über das Eulersche summerungsverfahren I, Math. Z. 15(1922), 226-2533.

[23] K. Knopp, Über das Eulersche summerungsverfahren II, Math. Z. 16(1923), 125-156.

[24] B. Altay, F. Başar and M. Mursaleen, On the euler sequence spaces which include the spaces ℓ_p and ℓ_q I, Information Sci., 176(10) (2006) 1450-1462.

[25] M. Mursaleen, F. Başar and B. Altay, On the Euler sequence spaces which include the spaces ℓ_p and ℓ_∞ II, Nonlinear Analysis (TMA), 65(3) (2006) 707-717.

[26] G.M. Petersen, Regular Matrix Transformation, Mc Graw-Hill, New York-Toronto-Sydney 1966.

[27] E. Kreyszig, Introductory Functional Analysis With Applications, John Wiley and Sons, Canada, 1978.

[28] P.K. Kamthan and M.Gupta, Sequence spaces and Series, Marcel Dekler, Inc., New York and Basel, 1981.

[29] I. J. Maddox, Elements of Functional Analysis, The University Press, 1st ed., Cambridge, 1970.

[30] R.E. Powell and S.M. Shah, Summability theory and its applications, Van Nostrand Reinhold Company, London (1972).

[31] I. Djolovic and E. Malkowsky, A note on compact operators on matrix domains, J. Math. Anal. Apple., 340(1) (2008) 291-303.

[32] E. Malkowsky and V. Rakocevic, On matrix domains of triangles, Appl. Math. Comput., 189(2) (2007) 1146-1163.

[33] A. Wilansky, Summability through Functional Analysis, North-Holland Mathematics Studies 85, Elsevier Science Publishers, Amsterdam; New York; Oxford, 1984..

[34] Stieglitz and H. Tietz, Matrixtransformationen von folgenräumen eine ergebnisübersicht, Math. Z., 154 (1977) 1-16..

[35] C. Aydın and F. Başar, Some new sequence spaces which include the spaces ℓ_p and ℓ_∞, Demonstratio Math., 38(3) (2005) 641-656.

[36] B. de Malafosse, The Banach algebra $B(x)$, where X is a BK space and applications, Math. Vesnik, 57 (2005) 41-60.

[37] F. Moricz, On Λ-strong convergence of numerical sequences and Fourier series, Acta Math. Hung., 54(3-4) (1989) 319-327.

ÖZGEÇMİŞ

Ad Soyad: Pınar SALMAN

Doğum Yeri ve Tarihi: Malatya / 12.02.1988

Adres: İnönü Üniversitesi, Fen Edebiyat Fakültesi, Matematik Bölümü

E-Posta: pinarsalman44@hotmail.com

Lisans: Fırat Üniversitesi, Fen Edebiyat Fakültesi, Matematik Bölümü (2006-2010)