

T.C.
İNÖNÜ ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

2-BOYUTLU BURGERS DENKLEMİNİN SONLU FARK YÖNTEMLERİ İLE
NÜMERİK ÇÖZÜMLERİ

Erhan KESER

YÜKSEK LİSANS TEZİ
MATEMATİK ANABİLİM DALI

Temmuz 2016

Tezin Başlığı : 2-BOYUTLU BURGERS DENKLEMİNİN SONLU FARK
YÖNTEMLERİ İLE NÜMERİK ÇÖZÜMLERİ

Tezi Hazırlayan : Erhan KESER

Sınav Tarihi : 14.07.2016

Yukarıda adı geçen tez jürimizce değerlendirilerek Matematik Ana Bilim Dalında
Yüksek Lisans Tezi olarak kabul edilmiştir.

Sınav Jüri Üyeleri

Tez Danışmanı: **Yrd. Doç. Dr. Yusuf UÇAR** _____

İnönü Üniversitesi

Prof.Dr. Alaattin ESEN _____

İnönü Üniversitesi

Yrd.Doç.Dr. Muaz SEYDAOĞLU _____

Muş Alparslan Üniversitesi

Prof.Dr. Alaattin ESEN

Enstitü Müdürü

ONUR SÖZÜ

Yüksek Lisans Tezi olarak sunduğum “2-Boyutlu Burgers Denkleminin Sonlu Fark Yöntemleri ile Nümerik Çözümleri” başlıklı bu çalışmanın bilimsel ahlâk ve geleneklere aykırı düşecek bir yardıma başvurmaksızın tarafımdan yazıldığını ve yararlandığım bütün kaynakların, hem metin içinde hem de kaynakçada yöntemine uygun biçimde gösterilenlerden oluştuğunu belirtir, bunu onurumla doğrularım.

Erhan KESER

ÖZET

Yüksek Lisans Tezi

2-BOYUTLU BURGERS DENKLEMİNİN SONLU FARK YÖNTEMLERİ İLE NÜMERİK ÇÖZÜMLERİ

Erhan KESER

İnönü Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Anabilim Dalı

136+xiii sayfa

2016

Danışman : Yrd. Doç. Dr. Yusuf UÇAR

Bu tez altı bölümden oluşmaktadır. Giriş bölümünde, bu çalışmanın amacı hakkında bilgi verildi.

İkinci bölümde, klasik sonlu fark yöntemleri kısaca tanıtıldıktan sonra, yöntemin daha iyi anlaşılabilmesi için 2-boyutlu ısı iletim denklemi üzerinde uygulaması yapıldı. Ayrıca von Neumann kararlılık analizi anlatıldıktan sonra, 2-boyutlu ısı iletim denkleminin klasik sonlu fark yöntemlerinin uygulanması ile elde edilen sonlu fark şemalarının kararlılık analizi incelendi.

Üçüncü bölümde, 2-boyutlu Burgers denkleminin literatür taraması verildikten sonra farklı iki başlangıç ve sınır şartlarına sahip problemler tanıtıldı.

Dördüncü bölümde, model problemlerin Açık, Kapalı ve Crank-Nicolson klasik sonlu fark yöntemleri ile nümerik çözümleri elde edildi. Elde edilen nümerik sonuçlar mevcut tam çözümlerle ve literatürdeki diğer sonuçlarla karşılaştırıldı. Ayrıca 2-boyutlu Burgers denklemi için ağırlıklı averaj yaklaşımının kararlılık analizi incelendi.

Beşinci bölüm bu tezin orijinal bölümünü oluşturmaktadır. Bu bölümde 2-boyutlu Burgers denklemindeki lineer olmayan UU_x ve UU_y terimleri yerine farklı lineerleştirme teknikleri kullanılarak model problemlerin nümerik çözümleri elde edildi. Elde edilen

nümerik çözümler mevcut tam çözümlerle ve literatürdeki diğer sonuçlarla karşılaştırıldı. Ayrıca seçilen SFY2 yaklaşımı için elde edilen nümerik sonuçlar grafiksel olarak gösterildi.

Altıncı bölümde, bu tezde göz önüne alınan tüm yaklaşımlarda elde edilen L_2 ve L_∞ hata normları karşılaştırıldı ve diğerlerine göre öne çıkan yöntemler belirlendi.



ANAHTAR KELİMELELER: 2-Boyutlu Burgers Denklemi, 2-Boyutlu Isı İletim Problemi, Sonlu Fark Yöntemleri, Fourier Kararlılık Analizi

ABSTRACT

M.Sc. Thesis

NUMERICAL SOLUTIONS OF 2-DIMENSIONAL BURGERS EQUATION WITH FINITE DIFFERENCE METHODS

Erhan KESER

İnönü University
Graduate School of Natural and Applied Sciences
Department of Mathematics

136+xiii pages

2016

Supervisor : Assist. Prof. Dr. Yusuf UÇAR

This thesis consists of six chapters. In the introduction chapter, some information about the aim of this study is presented.

In the second chapter, after introducing classical finite difference methods, an application of the method has been carried out on 2-dimensional heat conduction equation to understand the method better. Moreover, after explaining von Neumann stability analysis, the stability analysis of finite difference schemes obtained by the application of the classical finite difference methods to 2-dimensional heat conduction equation.

In the third chapter, after presenting the literature survey of 2-dimensional Burgers' equation, the problems with two different initial and boundary conditions are introduced.

In the fourth chapter, numerical solutions of the model problems are obtained using classical explicit, implicit and Crank-Nicolson finite difference methods. The obtained results are compared with exact and other numerical results available in the literature. Moreover, the stability analysis of the weighted-average approximation for the 2-dimensional Burgers' equation has been made.

The fifth chapter constitutes the original part of this thesis. In this section, numerical solutions of the model problems are obtained using different linearization techniques in place of the nonlinear terms UU_x and UU_y existing in the 2-dimensional Burgers' equation. The newly obtained results are compared with exact and other numerical results available in the literature. Moreover the numerical results obtained for FDA2 are presented graphically.

In the sixth chapter, the error norms L_2 and L_∞ for all approximation taken into consideration in this thesis are compared and outstanding methods are determined.



KEY WORDS: 2-Dimensional Burgers Equation, 2-Dimensional Heat Transfer Problem, Finite Difference Methods, Fourier Stability Analysis

TEŞEKKÜR

Yüksek lisans tez çalışmamı yöneten ve tezin hazırlanması sürecinde yardımlarını esirgemeyen değerli hocam Sayın Yrd. Doç. Dr. Yusuf UÇAR' a, her zaman yakın ilgi ve desteklerini gördüğüm çok kıymetli hocalarım Sayın Prof. Dr. Selçuk KUTLUAY, Sayın Prof. Dr. Alaattin ESEN ve Sayın Yrd. Doç. Dr. Nuri Murat YAĞMURLU' ya, bu tezin yazımı esnasında bilgilerinden yararlandığım değerli hocam Sayın Doç. Dr. Mustafa Kemal ÖZDEMİR' e, yüksek lisans öğrenimim süresince yardımlarını esirgemeyen bölüm başkanımız Sayın Prof. Dr. Sadık KELEŐ' in şahsında bütün bölüm hocalarıma, her zaman sabır ve sevgi ile manevi destek olan sevgili eşime teşekkürü bir borç bilirim.

İÇİNDEKİLER

ÖZET	i
ABSTRACT	iii
TEŞEKKÜR	v
İÇİNDEKİLER	vii
ŞEKİLLER DİZİNİ	viii
TABLolar DİZİNİ	ix
SİMGELER VE KISALTMALAR	xiv
1. GİRİŞ	1
2. TEMEL KAVRAMLAR	3
2.1. Klasik Sonlu Fark Yöntemleri	3
2.1.1. Açık Sonlu Fark Yöntemi (ASFY)	6
2.1.2. Kapalı Sonlu Fark Yöntemi (KSFY)	7
2.1.3. Crank-Nicolson Sonlu Fark Yöntemi (CNSFY)	9
2.1.4. Ağırlıklı AveraJ Yaklaşımı	9
2.2. Kararlılık Analizi	10
2.2.1. von Neumann (Fourier Seri) Yöntemi	10
2.2.2. von Neumann Yöntemiyle Kararlılık Analizi	12
3. 2-BOYUTLU BURGERS DENKLEMİ	15
3.1. Giriş	15
3.2. Model Problem 1	18
3.3. Model Problem 2	19
4. MODEL PROBLEMLERİN KLASİK SONLU FARK YÖNTEMLERİ İLE NÜMERİK ÇÖZÜMLERİ	20
4.1. Açık Sonlu Fark Yöntemi (ASFY) ile Çözümü	20
4.2. Kapalı Sonlu Fark Yöntemi (KSFY) ile Çözümü	21
4.3. Crank-Nicolson Sonlu Fark Yöntemi (CNSFY) ile Çözümü	22
4.4. Kararlılık Analizi	24

5.	2-BOYUTLU BURGERS DENKLEMİNİN FARKLI LİNEERLEŞTİRME TEKNİKLERİ İLE SONLU FARK ÇÖZÜMLERİ.....	53
5.1.	Sonlu Fark Yaklaşımı 1 (SFY1)	53
5.2.	Sonlu Fark Yaklaşımı 2 (SFY2)	61
5.3.	Sonlu Fark Yaklaşımı 3 (SFY3)	76
5.4.	Sonlu Fark Yaklaşımı 4 (SFY4)	85
5.5.	Sonlu Fark Yaklaşımı 5 (SFY5)	93
5.6.	Sonlu Fark Yaklaşımı 6 (SFY6)	102
5.7.	Sonlu Fark Yaklaşımı 7 (SFY7)	110
5.8.	Sonlu Fark Yaklaşımı 8 (SFY8)	119
6.	SONUÇLAR	128
	KAYNAKLAR	132
	ÖZGEÇMİŞ	136

ŞEKİLLER DİZİNİ

Şekil 2.1	$U_{i,j}$ noktalarının P_l noktalarına dönüşüm şeması[6].....	8
Şekil 5.1	$M = 20, t = 0.25, k = 0.001$ değerleri için Problem 1' in SFY2 ile elde edilen nümerik çözümlerin farklı v değerlerindeki gösterimi	70
Şekil 5.2	$M = 32, t = 0.25, k = 0.001$ değerleri için Problem 1' in SFY2 ile elde edilen nümerik çözümlerin farklı v değerlerindeki gösterimi	71
Şekil 5.3	$M = 16, t = 9, k = 0.01$ değerleri için Problem 1' in SFY2 ile elde edilen nümerik çözümlerin farklı v değerlerindeki gösterimi.....	72
Şekil 5.4	$M = 40, t = 0.25, k = 0.001$, değerleri için Problem 2' nin SFY2 ile elde edilen nümerik çözümlerin farklı v değerlerindeki gösterimi	73
Şekil 5.5	$M = 48, t = 0.25, k = 0.01$ değerleri için Problem 2' nin SFY2 ile elde edilen nümerik çözümlerin farklı v değerlerindeki gösterimi	74
Şekil 5.6	$M = 16, v = 1, k = 0.01$, değerleri için Problem 1' in SFY2 ile elde edilen nümerik çözümlerin (a) $t = 0.1$, (b) $t = 1$, (c) $t = 3$, (d) $t = 9$ zamanlarındaki gösterimi	75

TABLULAR DİZİNİ

Tablo 4.1	Problem 1' in $v = 1$, $k = 0.001$ ve h' nin farklı değerleri için $t = 0.25$ zamanında ASFY ile elde edilen nümerik ve tam çözümleri (*' da $k = 0.0001$ alındı).....	28
Tablo 4.2	Problem 1' in $v = 1$, $h = 0.1$ ve farklı k zaman adımları için $t = 0.25$ zamanında ASFY ile elde edilen nümerik ve tam çözümleri.....	29
Tablo 4.3	Problem 1' in $k = 0.0001$, $t = 0.25$ ve v' nin farklı değerleri için ASFY ile elde edilen L_2 ve L_∞ değerlerinin Ref. [24] ile karşılaştırılması	30
Tablo 4.4	Problem 1' in $v = 1$, $k = 0.001$ ve $M = 16$ olmak üzere farklı t zamanında ASFY ile elde edilen nümerik ve tam çözümleri ile L_2 ve L_∞ değerleri	31
Tablo 4.5	Problem 1' in $v = 1$, $k = 0.001$ ve h' nin farklı değerleri için $t = 0.25$ zamanında KSFY ile elde edilen nümerik ve tam çözümleri	33
Tablo 4.6	Problem 1' in $v = 1$, $h = 0.05$ ve farklı k zaman adımları için $t = 0.25$ zamanında KSFY ile elde edilen nümerik ve tam çözümleri	34
Tablo 4.7	Problem 1' in $k = 0.01$, $t = 0.25$ ve v' nin farklı değerleri için KSFY ile elde edilen L_2 ve L_∞ değerlerinin Ref. [24] ile karşılaştırılması ..	35
Tablo 4.8	Problem 1' in $v = 1$, $k = 0.01$ ve $M = 16$ olmak üzere farklı t zamanında KSFY ile elde edilen nümerik ve tam çözümleri ile L_2 ve L_∞ değerleri	36
Tablo 4.9	Problem 1' in $v = 1$, $k = 0.001$ ve h' nin farklı değerleri için $t = 0.25$ zamanında CNSFY ile elde edilen nümerik ve tam çözümleri	38
Tablo 4.10	Problem 1' in $v = 1$, $h = 0.05$ ve farklı k zaman adımları için $t = 0.25$ zamanında CNSFY ile elde edilen nümerik ve tam çözümleri	39
Tablo 4.11	Problem 1' in $k = 0.01$, $t = 0.25$ ve v' nin farklı değerleri için CNSFY ile elde edilen L_2 ve L_∞ değerleri	40
Tablo 4.12	Problem 1'in $v = 1$, $k = 0.01$ ve $M = 16$ olmak üzere farklı t zamanında CNSFY ile elde edilen nümerik ve tam çözümleri ile L_2 ve L_∞ değerleri	41
Tablo 4.13	Problem 2' nin $k = 0.001$, h' nin ve v' nin farklı değerleri için $t = 0.25$ zamanında ASFY ile elde edilen nümerik sonuçları.....	43

Tablo 4.14	Problem 2' nin $h = 0.1$, v ve k' nin farklı değerleri için $t = 0.05$ zamanında ASFY ile elde edilen nümerik sonuçları.....	44
Tablo 4.15	Problem 2' nin $k = 0.001$, h' nin ve v' nin farklı değerleri için $t = 0.25$ zamanında KSFY ile elde edilen nümerik sonuçları.....	46
Tablo 4.16	Problem 2' nin $h = 0.1$, v ve k' nin farklı değerleri için $t = 0.05$ zamanında KSFY ile elde edilen nümerik sonuçları.....	47
Tablo 4.17	Problem 2' nin $k = 0.001$, h' nin ve v' nin farklı değerleri için $t = 0.25$ zamanında CNSFY ile elde edilen nümerik sonuçları	49
Tablo 4.18	Problem 2' nin $h = 0.1$, v ve k' nin farklı değerleri için $t = 0.05$ zamanında CNSFY ile elde edilen nümerik sonuçları	50
Tablo 4.19	Problem 1' in $v = 1$, $t = 0.25$, $k = 0.001$ ve farklı h değerlerinde ASFY, KSFY ve CNSFY ile elde edilen L_2 ve L_∞ hata normlarının karşılaştırılması (*' da $k = 0.0001$ alındı)	51
Tablo 4.20	Problem 1' in $v = 1$, $h = 0.05$, $t = 0.25$ ve farklı k değerlerinde ASFY, KSFY ve CNSFY ile elde edilen L_2 ve L_∞ hata normlarının karşılaştırılması	52
Tablo 5.1	Problem 1' in $v = 1$, $k = 0.0001$ ve h' nin farklı değerleri için $t = 0.25$ zamanında SFY1 ile elde edilen nümerik ve tam sonuçları.....	56
Tablo 5.2	Problem 1' in $v = 1$, $h = 0.1$ ve $t = 0.25$ için farklı k değerlerinde SFY1 ile elde edilen nümerik ve tam sonuçları	57
Tablo 5.3	Problem 1' in $k = 0.01$, $t = 0.25$ ve v' nin farklı değerlerinde SFY1 ile elde edilen L_2 ve L_∞ değerlerinin Ref. [24] ile karşılaştırılması ..	58
Tablo 5.4	Problem 2' nin $v = 0.01$, $k = 0.0125$ ve $t = 0.125$ zamanında farklı M bölüntü değerlerinde SFY1 ile elde edilen nümerik sonuçlarının Ref. [24] ile karşılaştırılması	58
Tablo 5.5	Problem 2' nin $k = 0.001$, h' nin ve v' nin farklı değerleri için $t = 0.25$ zamanında SFY1 ile elde edilen nümerik sonuçları	59
Tablo 5.6	Problem 2' nin $h = 0.1$, v ve k' nin farklı değerleri için $t = 0.05$ zamanında SFY1 ile elde edilen nümerik sonuçları	60
Tablo 5.7	Problem 1' in $v = 1$, $k = 0.001$ ve h' nin farklı değerleri için $t = 0.25$ zamanında SFY2 ile elde edilen nümerik ve tam sonuçları.....	64
Tablo 5.8	Problem 1' in $v = 1$, $h = 0.05$ ve farklı k zaman adımları için $t = 0.25$ zamanında SFY2 ile elde edilen nümerik ve tam sonuçları.....	65
Tablo 5.9	Problem 1' in $k = 0.01$, $t = 0.25$ ve v' nin farklı değerlerinde SFY2 ile elde edilen L_2 ve L_∞ değerlerinin Ref. [24] ile karşılaştırılması ..	66
Tablo 5.10	Problem 1' in $v = 1$, $k = 0.01$ ve $M = 16$ olmak üzere farklı t zamanında SFY2 ile elde edilen nümerik ve tam sonuçlarının karşılaştırılması	67

Tablo 5.11	Problem 2' nin $v = 0.01$, $k = 0.0125$ ve $t = 0.125$ zamanında SFY2 ile elde edilen nümerik sonuçlarının Ref. [24] ile karşılaştırılması	68
Tablo 5.12	Problem 2' nin $k = 0.001$, h' nin ve v' nin farklı değerleri için $t = 0.25$ zamanında SFY2 ile elde edilen nümerik sonuçları	68
Tablo 5.13	Problem 2' nin $h = 0.1$, v ve k' nin farklı değerleri için $t = 0.05$ zamanında SFY2 ile elde edilen nümerik sonuçları	69
Tablo 5.14	Problem 1' in $v = 1$, $k = 0.001$ ve h' nin farklı değerleri için $t = 0.25$ zamanında SFY3 ile elde edilen nümerik ve tam sonuçları	79
Tablo 5.15	Problem 1' in $v = 1$, $h = 0.05$ ve farklı k zaman adımları için $t = 0.25$ zamanında SFY3 ile elde edilen nümerik ve tam sonuçları	80
Tablo 5.16	Problem 1' in $k = 0.01$, $t = 0.25$ ve v' nin farklı değerleri için SFY3 ile elde edilen L_2 ve L_∞ değerlerinin Ref. [24] ile karşılaştırılması . .	81
Tablo 5.17	Problem 1' in $v = 1$, $k = 0.01$ ve $M = 16$ olmak üzere farklı t zamanında SFY3 ile elde edilen nümerik ve tam sonuçlarının karşılaştırılması	82
Tablo 5.18	Problem 2' nin $v = 0.01$, $k = 0.0125$ ve $t = 0.125$ zamanında SFY3 ile elde edilen nümerik sonuçlarının Ref. [24] ile karşılaştırılması	83
Tablo 5.19	Problem 2' nin $k = 0.001$, h' nin ve v' nin farklı değerleri için $t = 0.25$ zamanında SFY3 ile elde edilen nümerik sonuçları	83
Tablo 5.20	Problem 2' nin $h = 0.1$, v ve k' nin farklı değerleri için $t = 0.05$ zamanında SFY3 ile elde edilen nümerik sonuçları	84
Tablo 5.21	Problem 1' in $v = 1$, $k = 0.0001$ ve h' nin farklı değerleri için $t = 0.25$ zamanında SFY4 ile elde edilen nümerik ve tam sonuçları	88
Tablo 5.22	Problem 1' in $v = 1$, $h = 0.1$ ve $t = 0.25$ için farklı k değerlerinde SFY4 ile elde edilen nümerik ve tam sonuçları	89
Tablo 5.23	Problem 1' in $k = 0.01$, $t = 0.25$ ve v' nin farklı değerleri için SFY4 ile elde edilen L_2 ve L_∞ değerlerinin Ref. [24] ile karşılaştırılması (*' da $k = 0.001$ alındı.)	90
Tablo 5.24	Problem 2' nin $v = 0.01$, $k = 0.0125$ ve $t = 0.125$ zamanında SFY4 ile elde edilen nümerik sonuçların Ref. [24] ile karşılaştırılması	90
Tablo 5.25	Problem 2' nin $k = 0.001$, h' nin ve v' nin farklı değerleri için $t = 0.25$ zamanında SFY4 ile elde edilen nümerik sonuçları	91
Tablo 5.26	Problem 2' nin $h = 0.1$, v ve k' nin farklı değerleri için $t = 0.05$ zamanında SFY4 ile elde edilen nümerik sonuçları	92
Tablo 5.27	Problem 1' in $v = 1$, $k = 0.001$ ve h' nin farklı değerleri için $t = 0.25$ zamanında SFY5 ile elde edilen nümerik ve tam sonuçları	96
Tablo 5.28	Problem 1' in $v = 1$, $h = 0.05$ ve farklı k zaman adımları için $t = 0.25$ zamanında SFY5 ile elde edilen nümerik ve tam sonuçları	97

Tablo 5.29	Problem 1' in $k = 0.01$, $t = 0.25$ ve v' nin farklı değerleri için SFY5 ile elde edilen L_2 ve L_∞ değerlerinin Ref. [24] ile karşılaştırılması ..	98
Tablo 5.30	Problem 1' in $v = 1$, $k = 0.01$ ve $M = 16$ olmak üzere farklı t zamanında SFY5 ile elde edilen nümerik ve tam sonuçlarının karşılaştırılması	99
Tablo 5.31	Problem 2' nin $v = 0.01$, $k = 0.0125$ ve $t = 0.125$ zamanında SFY5 ile elde edilen nümerik sonuçlarının Ref. [24] ile karşılaştırılması	100
Tablo 5.32	Problem 2' nin $k = 0.001$, h' nin ve v' nin farklı değerleri için $t = 0.25$ zamanında SFY5 ile elde edilen nümerik sonuçları	100
Tablo 5.33	Problem 2' nin $h = 0.1$, v ve k' nin farklı değerleri için $t = 0.05$ zamanında SFY5 ile elde edilen nümerik sonuçları	101
Tablo 5.34	Problem 1' in $v = 1$, $k = 0.0001$ ve h' nin farklı değerleri için $t = 0.25$ zamanında SFY6 ile elde edilen nümerik ve tam sonuçları	105
Tablo 5.35	Problem 1' in $v = 1$, $h = 0.1$ ve $t = 0.25$ için farklı k değerlerinde SFY6 ile elde edilen nümerik ve tam sonuçları	106
Tablo 5.36	Problem 1' in $k = 0.01$, $t = 0.25$ ve v' nin farklı değerleri için SFY6 ile elde edilen L_2 ve L_∞ değerlerinin Ref. [24] ile karşılaştırılması (*' da $k = 0.001$ alındı.)	107
Tablo 5.37	Problem 2' nin $v = 0.01$, $k = 0.0125$ ve $t = 0.125$ zamanında SFY6 ile elde edilen nümerik sonuçlarının Ref. [24] ile karşılaştırılması	107
Tablo 5.38	Problem 2' nin $k = 0.001$, h' nin ve v' nin farklı değerleri için $t = 0.25$ zamanında SFY6 ile elde edilen nümerik sonuçları	108
Tablo 5.39	Problem 2' nin $h = 0.1$, v ve k' nin farklı değerleri için $t = 0.05$ zamanında SFY6 ile elde edilen nümerik sonuçları	109
Tablo 5.40	Problem 1' in $v = 1$, $k = 0.001$ ve h' nin farklı değerleri için $t = 0.25$ zamanında SFY7 ile elde edilen nümerik ve tam sonuçları	113
Tablo 5.41	Problem 1' in $v = 1$, $h = 0.05$ ve farklı k zaman adımları için $t = 0.25$ zamanında SFY7 ile elde edilen nümerik ve tam sonuçları	114
Tablo 5.42	Problem 1' in $k = 0.01$, $t = 0.25$ ve v' nin farklı değerleri için SFY7 ile elde edilen L_2 ve L_∞ değerlerinin Ref. [24] ile karşılaştırılması ..	115
Tablo 5.43	Problem 1' in $v = 1$, $k = 0.01$ ve $M = 16$ olmak üzere farklı t zamanında SFY7 ile elde edilen nümerik ve tam sonuçlarının karşılaştırılması	116
Tablo 5.44	Problem 2' nin $v = 0.01$, $k = 0.0125$ ve $t = 0.125$ zamanında SFY7 ile elde edilen nümerik sonuçların Ref. [24] ile karşılaştırılması	117
Tablo 5.45	Problem 2' nin $k = 0.001$, h' nin ve v' nin farklı değerleri için $t = 0.25$ zamanında SFY7 ile elde edilen nümerik sonuçları	117

Tablo 5.46	Problem 2' nin $h = 0.1$, v ve k' nin farklı değerleri için $t = 0.05$ zamanında SFY7 ile elde edilen nümerik sonuçları	118
Tablo 5.47	Problem 1' in $v = 1$, $k = 0.001$ ve h' nin farklı değerleri için $t = 0.25$ zamanında SFY8 ile elde edilen nümerik ve tam sonuçları	122
Tablo 5.48	Problem 1' in $v = 1$, $h = 0.05$ ve farklı k zaman adımları için $t = 0.25$ zamanında SFY8 ile elde edilen nümerik ve tam sonuçları	123
Tablo 5.49	Problem 1' in $k = 0.01$, $t = 0.25$ ve v' nin farklı değerleri için SFY8 ile elde edilen L_2 ve L_∞ değerlerinin Ref. [24] ile karşılaştırılması ..	124
Tablo 5.50	Problem 1' in $v = 1$, $k = 0.01$ ve $M = 16$ olmak üzere farklı t zamanında SFY8 ile elde edilen nümerik ve tam sonuçları	125
Tablo 5.51	Problem 2' nin $v = 0.01$, $k = 0.0125$ ve $t = 0.125$ zamanında farklı M bölüntü sayıları için SFY8 ile elde edilen nümerik sonuçlarının Ref. [24] ile karşılaştırılması	126
Tablo 5.52	Problem 2' nin $k = 0.001$, h' nin ve v' nin farklı değerleri için $t = 0.25$ zamanında SFY8 ile elde edilen nümerik sonuçları	126
Tablo 5.53	Problem 2' nin $h = 0.1$, v ve k' nin farklı değerleri için $t = 0.05$ zamanında SFY8 ile elde edilen nümerik sonuçları	127
Tablo 6.1	$v = 1$, $k = 0.001$ ve h' nin farklı değerleri için $t = 0.25$ zamanında Problem 1' in SFY yaklaşımları ile elde edilen L_2 ve L_∞ hata normları karşılaştırmaları (*' da $k = 0.0001$ alındı)	130
Tablo 6.2	$h = 0.05$ ve farklı k zaman adımları için $t = 0.25$ zamanında Problem 1' in SFY yaklaşımları ile elde edilen L_2 ve L_∞ hata normlarının karşılaştırılması (*' da $h = 0.1$ alındı)	131

SİMGELER VE KISALTMALAR

<i>ASFY</i>	:	Açık Sonlu Fark Yöntemi
<i>KSFY</i>	:	Kapalı Sonlu Fark Yöntemi
<i>CNSFY</i>	:	Crank-Nicolson Sonlu Fark Yöntemi
<i>SFY</i>	:	Sonlu Fark Yaklaşımı
<i>h</i>	:	Konum adım uzunluğu
<i>k</i>	:	Zaman adım uzunluğu
<i>v</i>	:	viskosite parametresi

1. GİRİŞ

Doğada karşılaşılan birçok olay fizik kanunları yardımıyla matematiksel model şeklinde ifade edilir. Bu olayların biyolojik, kimyasal veya fiziksel gibi farklı alanlarda olması durumu pek değiştirmez. Her bir olay kendisine ait büyüklükler göz önünde bulundurularak genellikle cebirsel, integral veya çoğunlukla diferansiyel denklemler ile ifade edilirler. Farklı bilim dallarında karşılaşılan bu tür problemlerin tam çözümünü bulmak bazen zor olabilir. Bu durumda problemlerin tam çözümü yerine genellikle kabul edilebilir bir yaklaşık çözümü aranır. Son yıllarda bilim adamları bilgisayar alanındaki gelişmelere paralel olarak, tam çözümü olmayan veya çözümü zaman alan problemler için nümerik yöntemler geliştirmeye başlamışlardır. Bu yöntemleri uygularken problemleri genellikle alt problemlere ayırmışlar ya da problemleri dönüştürerek daha anlaşılır bir forma getirmişlerdir. Böylece nümerik yöntemler yardımıyla çok karmaşık problemler kısa sürede ve daha az zahmetle çözülebilmektedir[1].

Nümerik yöntemler içerisinde önemli bir yere sahip olan Sonlu Fark Yöntemleri, lineer veya lineer olmayan kısmi diferansiyel denklemlerin başlangıç ve sınır şartları altında nümerik çözümlerinin bulunmasında yaygın olarak kullanılmaktadır. Bu tezde iki boyutlu Burgers denkleminin sonlu fark yöntemleri yardımıyla yaklaşık çözümleri elde edilecektir. Literatürde bir boyutlu Burgers denkleminin sonlu fark yöntemleriyle çözümü üzerine çok sayıda çalışma bulunmasına rağmen iki boyutlu Burgers denkleminin sonlu fark yöntemleriyle çözümü üzerine çok sayıda çalışma bulunmamaktadır.

İlk olarak Bateman tarafından ortaya atılan ve daha sonra Burgers tarafından türbülans için matematiksel bir model olarak kullanılan bir boyutlu Burgers denklemi

$$u_t + uu_x = \nu u_{xx}$$

şeklinde verilir[2]. Burgers denklemi akışkanlar mekaniğinde önemli bir yere sahip olup literatürde temel model denklemlerden biri olarak ele alınmaktadır.

Bu tezde

$$u_t + uu_x + uu_y = \nu(u_{xx} + u_{yy})$$

ile verilen iki boyutlu Burgers denklemi[3] farklı başlangıç ve sınır şartları ile göz önüne alındı. Denkleminde bulunan lineer olmayan terimler yerine değişik lineerleştirme teknikleri kullanılarak Açık, Kapalı ve Crank-Nicolson sonlu fark yöntemleri ile denklemin nümerik çözümleri elde edildi.

2. TEMEL KAVRAMLAR

Bu bölümde daha sonraki bölümlerde kullanılacak olan bazı temel kavramlar verildi.

2.1 Klasik Sonlu Fark Yöntemleri

Sonlu Fark Yöntemleri genel olarak diferansiyel denklemlerin nümerik çözümlerinin elde edilmesinde kullanılan yöntemlerden biridir. Yöntem uygulanırken, problemin çözüm bölgesi düzgün geometrik şekiller içeren kafeslere bölünür ve yaklaşık çözüm, her bir kafesin düğüm (mesh veya grid) noktasında, diferansiyel denklemdaki türevler yerine Taylor serisi açılımından elde edilen uygun sonlu fark yaklaşımları kullanılarak hesaplanır. Böylece lineer veya lineer olmayan diferansiyel denklemden oluşan başlangıç ve/veya sınır değer probleminin çözümünü bulma problemi fark denklemlerinden oluşan lineer veya lineer olmayan bir cebirsel denklem sisteminin çözümünü bulma problemine indirgenir. Elde edilen denklem sistemi direkt veya iteratif yöntemlerden biri yardımı ile çözümlenerek göz önüne alınan problemin istenilen düğüm noktalarında yaklaşık çözümü bulunur[4].

U fonksiyonu x , y ve t değişkenlerine bağlı bir fonksiyon olsun. Genel olarak sonlu fark yöntemlerinde çözüm bölgesi $\Delta x (\equiv h_x)$ (x yönünde konum adım uzunluğu), $\Delta y (\equiv h_y)$ (y yönünde konum adım uzunluğu) ve $\Delta t (\equiv k)$ (t yönünde zaman adım uzunluğu) kenar uzunluklu kafeslere bölünür.

Örneğin; $[0, \ell] \times [0, \infty)$ yarı açık bölgesi üzerinde (x_i, y_j, t_n) ile ifade edilen bir

düğüm noktası;

$$x_i = i\Delta x = ih_x, \quad i = 0(1)M$$

$$y_j = j\Delta y = jh_y, \quad j = 0(1)N$$

$$t_n = n\Delta t = nk, \quad n = 0, 1, \dots$$

olarak verilir. Temsili bir $P(ih_x, jh_y, nk)$ düğüm noktası üzerinde $U(x, y, t)$ fonksiyonunun noktasal değeri için;

$$U_p = U(ih_x, jh_y, nk) = U_{i,j}^n$$

gösterimlerinden birisi kullanılır. Bu gösterimlerin kullanılmasıyla U fonksiyonunun birinci ve ikinci mertebeden türevlerine sonlu fark yaklaşımları,

$$\frac{\partial U}{\partial x} \simeq \frac{U_{i+1,j}^n - U_{i,j}^n}{h_x} \quad (2.1.1)$$

$$\frac{\partial U}{\partial y} \simeq \frac{U_{i,j+1}^n - U_{i,j}^n}{h_y} \quad (2.1.2)$$

$$\frac{\partial U}{\partial x} \simeq \frac{U_{i,j}^n - U_{i-1,j}^n}{h_x} \quad (2.1.3)$$

$$\frac{\partial U}{\partial y} \simeq \frac{U_{i,j}^n - U_{i,j-1}^n}{h_y} \quad (2.1.4)$$

$$\frac{\partial U}{\partial x} \simeq \frac{U_{i+1,j}^n - U_{i-1,j}^n}{2h_x} \quad (2.1.5)$$

$$\frac{\partial U}{\partial y} \simeq \frac{U_{i,j+1}^n - U_{i,j-1}^n}{2h_y} \quad (2.1.6)$$

$$\frac{\partial U}{\partial t} \simeq \frac{U_{i,j}^{n+1} - U_{i,j}^n}{k} \quad (2.1.7)$$

$$\frac{\partial U}{\partial t} \simeq \frac{U_{i,j}^n - U_{i,j}^{n-1}}{k} \quad (2.1.8)$$

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} \simeq \frac{U_{i,j}^n - 2U_{i+1,j}^n + U_{i+2,j}^n}{h_x^2} \quad (2.1.9)$$

$$\frac{\partial^2 U}{\partial y^2} \simeq \frac{U_{i,j}^n - 2U_{i,j+1}^n + U_{i,j+2}^n}{h_y^2} \quad (2.1.10)$$

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} \simeq \frac{U_{i-2,j}^n - 2U_{i-1,j}^n + U_{i,j}^n}{h_x^2} \quad (2.1.11)$$

$$\frac{\partial^2 U}{\partial y^2} \simeq \frac{U_{i,j-2}^n - 2U_{i,j-1}^n + U_{i,j}^n}{h_y^2} \quad (2.1.12)$$

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} \simeq \frac{U_{i-1,j}^n - 2U_{i,j}^n + U_{i+1,j}^n}{h_x^2} \quad (2.1.13)$$

$$\frac{\partial^2 U}{\partial y^2} \simeq \frac{U_{i,j-1}^n - 2U_{i,j}^n + U_{i,j+1}^n}{h_y^2} \quad (2.1.14)$$

olarak Taylor serisi yardımıyla bulunur.

(2.1.1), (2.1.3) ve (2.1.5) ile verilen x' e göre birinci mertebeden, (2.1.2), (2.1.4) ve (2.1.6) ile verilen y' ye göre birinci mertebeden türev yaklaşımlarına sırasıyla iki nokta ileri, geri ve üç nokta merkezi fark formülleri denir. Aynı şekilde (2.1.7) ve (2.1.8) ile verilen t' ye göre birinci mertebeden türev yaklaşımlarına sırasıyla ileri ve geri fark formülleri denir. (2.1.9), (2.1.11) ve (2.1.13) ile verilen x' e göre ikinci mertebeden, (2.1.10), (2.1.12) ve (2.1.14) ile verilen y' ye göre ikinci mertebeden türev yaklaşımlarına da sırasıyla üç nokta ileri, geri ve merkezi fark formülleri denir.

Bir diferansiyel denklemi sonlu fark formunda ifade etmek için en çok kullanılan Sonlu Fark Yöntemleri şunlardır:

1. Açık (Explicit) Sonlu Fark Yöntemi
2. Kapalı (Implicit) Sonlu Fark Yöntemi
3. Crank-Nicolson Sonlu Fark Yöntemi

Bu yöntemler Klasik Sonlu Fark Yöntemleri olarak bilinir[4].

2.1.1 Açık Sonlu Fark Yöntemi (ASFY)

Bu yöntemin daha iyi anlaşılabilmesi için $D = [0, \ell] \times [0, \ell]$ bölgesi üzerinde

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} = \frac{1}{K} \frac{\partial U}{\partial t}, \quad (x, y) \in D, \quad t > 0 \quad (2.1.1.1)$$

olarak verilen iki boyutlu ısı iletim denklemini

$$U(x, y, 0) = U_0(x, y)$$

başlangıç şartı ve

$$U(x, y_0, t) = g_1(x, t) \quad x_0 \leq x \leq x_M, \quad t > 0$$

$$U(x, y_N, t) = g_2(x, t) \quad x_0 \leq x \leq x_M, \quad t > 0$$

$$U(x_0, y, t) = h_1(y, t) \quad y_0 \leq y \leq y_N, \quad t > 0$$

$$U(x_M, y, t) = h_2(y, t) \quad y_0 \leq y \leq y_N, \quad t > 0$$

sınır şartları ile birlikte gözönüne alındığı [5]. (2.1.1.1) denklemindeki $\frac{\partial^2 U}{\partial x^2}$, $\frac{\partial^2 U}{\partial y^2}$ ve $\frac{\partial U}{\partial t}$ türevleri yerlerine sırasıyla

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} &\simeq \frac{U_{i-1,j}^n - 2U_{i,j}^n + U_{i+1,j}^n}{h_x^2} \\ \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} &\simeq \frac{U_{i,j-1}^n - 2U_{i,j}^n + U_{i,j+1}^n}{h_y^2} \\ \frac{\partial U}{\partial t} &\simeq \frac{U_{i,j}^{n+1} - U_{i,j}^n}{k} \end{aligned}$$

ile verilen sonlu fark yaklaşımları hatalar ihmal edilerek yazılırsa ısı iletim denkleminin açık sonlu fark yaklaşımı;

$$\frac{U_{i-1,j}^n - 2U_{i,j}^n + U_{i+1,j}^n}{h_x^2} + \frac{U_{i,j-1}^n - 2U_{i,j}^n + U_{i,j+1}^n}{h_y^2} = \frac{1}{K} \frac{U_{i,j}^{n+1} - U_{i,j}^n}{k} \quad (2.1.1.2)$$

bulunur. $r_1 = Kk/h_x^2$ ve $r_2 = Kk/h_y^2$ olmak üzere yeniden düzenleme yapılırsa;

$$U_{i,j}^{n+1} = U_{i,j}^n + r_1(U_{i-1,j}^n - 2U_{i,j}^n + U_{i+1,j}^n) + r_2(U_{i,j-1}^n - 2U_{i,j}^n + U_{i,j+1}^n) \quad (2.1.1.3)$$

olur. Açık sonlu fark yaklaşımında t_n zaman adımında $U_{i,j}^n$ değerleri verilirse t_{n+1} zaman adımındaki $U_{i,j}^{n+1}$ değerleri (2.1.1.3) denkleminde bulunur.

2.1.2 Kapalı Sonlu Fark Yöntemi (KSFY)

(2.1.1.1) denklemindeki $\frac{\partial^2 U}{\partial x^2}$, $\frac{\partial^2 U}{\partial y^2}$ ve $\frac{\partial U}{\partial t}$ türevleri yerlerine

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} &\simeq \frac{U_{i-1,j}^{n+1} - 2U_{i,j}^{n+1} + U_{i+1,j}^{n+1}}{h_x^2} \\ \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} &\simeq \frac{U_{i,j-1}^{n+1} - 2U_{i,j}^{n+1} + U_{i,j+1}^{n+1}}{h_y^2} \\ \frac{\partial U}{\partial t} &\simeq \frac{U_{i,j}^{n+1} - U_{i,j}^n}{k} \end{aligned}$$

şeklinde verilen sonlu fark yaklaşımları hatalar ihmal edilerek yazılırsa ısı iletim denkleminin kapalı sonlu fark yaklaşımı;

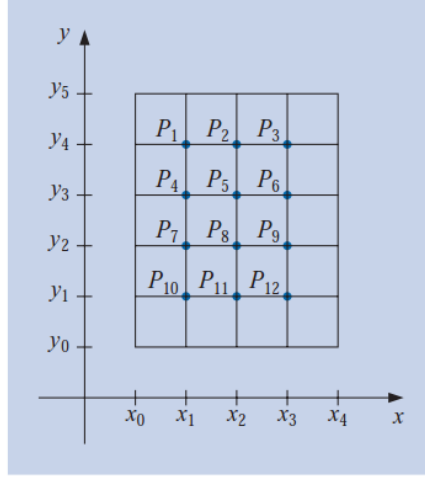
$$\frac{U_{i-1,j}^{n+1} - 2U_{i,j}^{n+1} + U_{i+1,j}^{n+1}}{h_x^2} + \frac{U_{i,j-1}^{n+1} - 2U_{i,j}^{n+1} + U_{i,j+1}^{n+1}}{h_y^2} = \frac{1}{K} \frac{U_{i,j}^{n+1} - U_{i,j}^n}{k} \quad (2.1.2.1)$$

bulunur. $r_1 = Kk/h_x^2$ ve $r_2 = Kk/h_y^2$ olmak üzere yeniden düzenleme yapılırsa;

$$U_{i,j}^{n+1} - r_1(U_{i-1,j}^{n+1} - 2U_{i,j}^{n+1} + U_{i+1,j}^{n+1}) - r_2(U_{i,j-1}^{n+1} - 2U_{i,j}^{n+1} + U_{i,j+1}^{n+1}) = U_{i,j}^n \quad (2.1.2.2)$$

olur.

Bu tezde elde edilen kapalı sonlu fark yaklaşımlarının çözümü için izlenecek yol aşağıda kısaca anlatılmıştır. Örneğin; $i = 1, 2, \dots, n$ ve $j = 1, 2, \dots, m$ olmak üzere $n = 4$, $m = 5$ olarak seçelim. $U(x_i, y_j)$ noktaları $l = i + (m - 1 - j)(n - 1)$



Şekil 2.1: $U_{i,j}$ noktalarının P_l noktalarına dönüşüm şeması[6]

dönüşümü kullanılarak yukarıdaki şekilde verildiği gibi $P_l = (x_i, y_j)$ ve $U_{i,j} = w_l$ olarak yeniden adlandırılır. Örnek olarak (x_1, y_1) ve (x_1, y_2) noktaları $l = i + (m - 1 - j)(n - 1)$ dönüşümünde sırasıyla $i = 1, j = 1, n = 4, m = 5$ ve $i = 1, j = 2, n = 4, m = 5$ yazılırsa $U_{1,1} = w_{10} = P_{10}$ ve $U_{1,2} = w_7 = P_7$ olarak bulunur. Benzer şekilde diğer $U_{i,j}$ noktaları

$$\begin{aligned}
 U_{1,3} &= w_4, & U_{1,4} &= w_1, & U_{2,1} &= w_{11}, & U_{2,2} &= w_8, & U_{2,3} &= w_5 \\
 U_{2,4} &= w_2, & U_{3,1} &= w_{12}, & U_{3,2} &= w_9, & U_{3,3} &= w_6, & U_{3,4} &= w_3
 \end{aligned}$$

şeklinde elde edilir[6]. Buradan (2.1.2.2) kulanılarak w bilinmeyenini cinsinden elde edilen sistem çözülür. Daha sonra $l = i + (m - 1 - j)(n - 1)$ dönüşümü tersine uygulanarak $(n + 1)$. zaman adımındaki $U_{i,j}$ değerleri elde edilir.

2.1.3 Crank-Nicolson Sonlu Fark Yöntemi (CNSFY)

(2.1.1.1) denkleminin (2.1.1.2) ve (2.1.2.1) denklemleriyle verilen açık ve kapalı sonlu fark yaklaşımları sırasıyla

$$\frac{U_{i-1,j}^n - 2U_{i,j}^n + U_{i+1,j}^n}{h_x^2} + \frac{U_{i,j-1}^n - 2U_{i,j}^n + U_{i,j+1}^n}{h_y^2} = \frac{1}{K} \frac{U_{i,j}^{n+1} - U_{i,j}^n}{k}$$

ve

$$\frac{U_{i-1,j}^{n+1} - 2U_{i,j}^{n+1} + U_{i+1,j}^{n+1}}{h_x^2} + \frac{U_{i,j-1}^{n+1} - 2U_{i,j}^{n+1} + U_{i,j+1}^{n+1}}{h_y^2} = \frac{1}{K} \frac{U_{i,j}^{n+1} - U_{i,j}^n}{k}$$

olduğunu biliyoruz. (2.1.1.1) için yukarıda verilen açık ve kapalı sonlu fark yaklaşımlarının avarajlarının alınmasıyla

$$\begin{aligned} & \frac{2}{K} \frac{U_{i,j}^{n+1} - U_{i,j}^n}{k} \\ &= \frac{U_{i-1,j}^n - 2U_{i,j}^n + U_{i+1,j}^n}{h_x^2} + \frac{U_{i,j-1}^n - 2U_{i,j}^n + U_{i,j+1}^n}{h_y^2} \\ &+ \frac{U_{i-1,j}^{n+1} - 2U_{i,j}^{n+1} + U_{i+1,j}^{n+1}}{h_x^2} + \frac{U_{i,j-1}^{n+1} - 2U_{i,j}^{n+1} + U_{i,j+1}^{n+1}}{h_y^2} \end{aligned} \quad (2.1.3.1)$$

şeklinde Crank-Nicolson sonlu fark yaklaşımı bulunur. Bu denklem $r_1 = Kk/h_x^2$ ve $r_2 = Kk/h_y^2$ olmak üzere,

$$\begin{aligned} & 2U_{i,j}^{n+1} - r_1(U_{i-1,j}^{n+1} - 2U_{i,j}^{n+1} + U_{i+1,j}^{n+1}) - r_2(U_{i,j-1}^{n+1} - 2U_{i,j}^{n+1} + U_{i,j+1}^{n+1}) \\ &= 2U_{i,j}^n + r_1(U_{i-1,j}^n - 2U_{i,j}^n + U_{i+1,j}^n) + r_2(U_{i,j-1}^n - 2U_{i,j}^n + U_{i,j+1}^n) \end{aligned} \quad (2.1.3.2)$$

olarak yazılabilir. Burada $U_{i,j}^{n+1}$ değerlerini elde etmek için (2.1.3.2) ile verilen sistem, kapalı sonlu fark yaklaşımındakine benzer olarak çözülür.

2.1.4 Ağırlıklı Avaraj Yaklaşımı

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} = \frac{1}{K} \frac{\partial U}{\partial t}$$

iki boyutlu ısı iletim denkleminin ağırlıklı averaj yaklaşımı $\lambda \in [0, 1]$ olmak üzere,

$$\begin{aligned} & \frac{1}{h_x^2} \left\{ \lambda(U_{i-1,j}^{n+1} - 2U_{i,j}^{n+1} + U_{i+1,j}^{n+1}) + (1-\lambda)(U_{i-1,j}^n - 2U_{i,j}^n + U_{i+1,j}^n) \right\} \\ & + \frac{1}{h_y^2} \left\{ \lambda(U_{i,j-1}^{n+1} - 2U_{i,j}^{n+1} + U_{i,j+1}^{n+1}) + (1-\lambda)(U_{i,j-1}^n - 2U_{i,j}^n + U_{i,j+1}^n) \right\} \quad (2.1.4.1) \\ & = \frac{1}{K} \frac{U_{i,j}^{n+1} - U_{i,j}^n}{k} \end{aligned}$$

dır. $r_1 = Kk/h_x^2$ ve $r_2 = Kk/h_y^2$ olmak üzere,

$$\begin{aligned} & U_{i,j}^{n+1} - r_1\lambda(U_{i-1,j}^{n+1} - 2U_{i,j}^{n+1} + U_{i+1,j}^{n+1}) - r_2\lambda(U_{i,j-1}^{n+1} - 2U_{i,j}^{n+1} + U_{i,j+1}^{n+1}) \\ & = U_{i,j}^n + r_1(1-\lambda)(U_{i-1,j}^n - 2U_{i,j}^n + U_{i+1,j}^n) + r_2(1-\lambda)(U_{i,j-1}^n - 2U_{i,j}^n + U_{i,j+1}^n) \quad (2.1.4.2) \end{aligned}$$

bulunur. (2.1.4.2) sistemi, $\lambda = 0$ için açık, $\lambda = 1$ için kapalı, $\lambda = \frac{1}{2}$ için Crank-Nicolson sonlu fark şemalarını verir.

2.2 Kararlılık Analizi

Bu bölümde von Neumann (Fourier Seri) kararlılık analizi üzerinde durulacaktır.

2.2.1 von Neumann (Fourier Seri) Yöntemi

Fourier seri yöntemi diferansiyel denklemin kararlılığını sadece hata yayılımı için inceleyer.

Burada T sonlu, $\delta x = h \rightarrow 0$, $\delta t = k \rightarrow 0$ ve $N \rightarrow \infty$ olduğunda $0 \leq t \leq T = Nk$ zaman aralığında $U(x, t)$ için lineer iki zaman seviyeli fark denkleminin kararlılığı konusu incelenecektir. von Neuman yöntemi, $t = 0$ düğüm noktası boyunca sonlu Fourier serisine göre başlangıç değerini ifade eder. Böylece

kısmi diferansiyel denklemleri çözmek için kullanılan “değişkenlerine ayırma” yöntemine benzer olarak $t = 0$ için fourier serilerine indirgenen bir fonksiyon göz önüne alınır.

Her ne kadar Fourier serileri \sin ve \cos fonksiyonlarına göre ifade edilebiliyorsa da cebirsel olarak üstel biçimde yazılması daha uygundur. Yani $\sum a_n \cos(\frac{n\pi x}{l})$ veya $\sum b_n \sin(\frac{n\pi x}{l})$ ifadeleri yerine bu denklemlere denk olan $\sum A_n e^{\frac{i n \pi x}{l}}$ üstel ifadesi yazılabilir. Burada $i = \sqrt{-1}$ ve l, x aralığının uzunluğudur. Buna göre

$$A_n e^{\frac{i n \pi x}{l}} = A_n e^{\frac{i n \pi m h}{l}} = A_n e^{i \beta_n m h}$$

yazılabilir. Burada $Mh = l$ ve $\beta_n = n\pi/Mh$ alınmıştır.

$t = 0$ pivot noktasındaki başlangıç değerlerini $U(mh, 0) = U_m^0$, $m = 0(1)M$ şeklinde olan $(M + 1)$ tane denklem, $A_0, A_1, A_2, \dots, A_M$ bilinmeyen sabitlerini tek türlü belirlemek için yeterlidir. Bu ise başlangıç düğüm değerlerinin kompleks üstel formda açıklanabildiğini gösterir. Buna göre göz önüne alınan lineer fark denkleminin $e^{i\beta m h}$ gibi yalnız bir başlangıç değerinden elde edilmesi mümkündür. Çünkü lineer fark denklemi bağımsız çözümlerin lineer birleşimi şeklinde yazılabilir.

t değerinin artışına göre üstel dağılıma bakmak için

$$U_m^n = e^{i\beta x} e^{at} = e^{i\beta m h} e^{ank} = e^{i\beta m h} \varepsilon^n$$

ifadesi gözönüne alınır. Burada genellikle a kompleks bir sabit olmak üzere $\varepsilon = e^{ak}$ olarak kullanılır ve ε genellikle güçlendirme faktörü olarak adlandırılır. Sonlu fark denkleminin kararlılığı için $h \rightarrow 0$ ve $k \rightarrow 0$ olduğunda her $n \leq N$ ve başlangıç şartını sağlayan tüm β değerleri için $|U_m^n|$ kalıntısı sabit olmalıdır. Sonlu fark denkleminin tam çözümü zamana bağlı olarak üstel biçimde artmıyor ise kararlılık için gerek ve

yeter şart

$$|\varepsilon| \leq 1$$

yani $-1 \leq \varepsilon \leq 1$ olmasıdır.

Bununla birlikte U_m^n zamana bağlı olarak artıyor ise kararlılık için gerek ve yeter şart; K pozitif sayısı, h , k , ve β değerlerinden bağımsız olmak üzere

$$|\varepsilon| \leq 1 + Kk = 1 + O(k)$$

olmasıdır[4].

2.2.2 von Neumann Yöntemiyle Kararlılık Analizi

(2.1.1.1) ile verilen ısı iletim denkleminin (2.1.4.1) averaj yaklaşımında $h = h_x = h_y$ olmak üzere,

$$U_{i,j}^n = e^{I\beta(i+j)h} e^{ank} = e^{I\beta(i+j)h} \varepsilon^n, \quad I = \sqrt{-1}$$

yerine yazılırsa

$$\begin{aligned} & \frac{1}{h^2} \{ \lambda (e^{I\beta(i-1+j)h} \varepsilon^{n+1} - 2e^{I\beta(i+j)h} \varepsilon^{n+1} + e^{I\beta(i+1+j)h} \varepsilon^{n+1}) \\ & + (1 - \lambda) (e^{I\beta(i-1+j)h} \varepsilon^n - 2e^{I\beta(i+j)h} \varepsilon^n + e^{I\beta(i+1+j)h} \varepsilon^n) \} \\ & + \frac{1}{h^2} \{ \lambda (e^{I\beta(i+j-1)h} \varepsilon^{n+1} - 2e^{I\beta(i+j)h} \varepsilon^{n+1} + e^{I\beta(i+j+1)h} \varepsilon^{n+1}) \\ & + (1 - \lambda) (e^{I\beta(i+j-1)h} \varepsilon^n - 2e^{I\beta(i+j)h} \varepsilon^n + e^{I\beta(i+j+1)h} \varepsilon^n) \} \\ & = \frac{1}{K} \frac{e^{I\beta(i+j)h} \varepsilon^{n+1} - e^{I\beta(i+j)h} \varepsilon^n}{k} \end{aligned}$$

elde edilir. Gerekli düzenlemeler yapıldığında

$$\frac{2}{h^2} \{ \lambda \varepsilon (e^{-I\beta h} - 2 + e^{I\beta h}) + (1 - \lambda) (e^{-I\beta h} - 2 + e^{I\beta h}) \} = \frac{\varepsilon - 1}{Kk}$$

bulunur. Bu eşitlikte $e^{I\beta h} = \cos \beta h + I \sin \beta h$ Euler formülünün kullanılmasıyla

$$\frac{h^2 + 2Kk\lambda\varepsilon(2 \cos \beta h - 2) + 2Kk(1 - \lambda)(2 \cos \beta h - 2)}{h^2} = \varepsilon$$

bulunur. $\cos \beta h = 1 - 2 \sin^2 \frac{\beta h}{2}$ dönüşümü yardımıyla ε güçlendirme çarpanı

$$\varepsilon = \frac{h^2 - 8(1 - \lambda)Kk \sin^2 \frac{\beta h}{2}}{h^2 + 8\lambda Kk \sin^2 \frac{\beta h}{2}} \quad (2.2.2.1)$$

olur.

(2.2.2.1)' de $\lambda = 0$ ise açık sonlu fark yaklaşımı için yöntemin kararlı olması $|\varepsilon| \leq 1$ şartı ile sağlanır. O halde,

$$-1 \leq \frac{h^2 - 8Kk \sin^2 \frac{\beta h}{2}}{h^2} \leq 1$$

bulunur. Gerekli düzenlemeler yapılırsa

$$-2 \leq \frac{-8Kk \sin^2 \frac{\beta h}{2}}{h^2} \leq 0$$

elde edilir. $r = \frac{Kk}{h^2}$ olmak üzere buradan

$$-2 \leq -8r \sin^2 \frac{\beta h}{2} \leq 0$$

bulunur. Bu eşitsizliğin sağ tarafından

$$r \geq 0$$

ve sol parçasından ise

$$r \leq \frac{1}{4 \sin^2 \frac{\beta h}{2}} \leq \frac{1}{4}$$

bulunur. Böylece yöntemin kararlı olması için r parametresi $0 \leq r \leq \frac{1}{4}$ olmalıdır.

(2.2.2.1)' de $\lambda = 1$ seçildiğinde kararlılık $|\varepsilon| \leq 1$ şartı ile sağlanır. O halde

$$\left| \frac{h^2}{h^2 + 8Kk \sin^2 \frac{\beta h}{2}} \right| \leq 1$$

biçimine dönüşür. Buradan $r = \frac{Kk}{h^2}$ olmak üzere,

$$\frac{1}{|1 + 8r \sin^2 \frac{\beta h}{2}|} \leq 1$$

bulunur. Bu eşitsizlik her $r \geq 0$ için sağlandığından yöntem şartsız kararlıdır.

(2.2.2.1)' de $\lambda = \frac{1}{2}$ seçilmesi ile elde edilen Crank-Nicolson sonlu fark yöntemi için ise $|\varepsilon| \leq 1$ şartı her $r > 0$ için sağlanacağından Crank-Nicolson sonlu fark yöntemi şartsız kararlıdır.



3. 2-BOYUTLU BURGERS DENKLEMİ

3.1 Giriş

Bu tezde ele alınan 2-boyutlu Burgers denklemi[3]

$$u_t + uu_x + uu_y = v(u_{xx} + u_{yy}) \quad (3.1.1)$$

formundadır. Akışkanlar dinamiğinde önemli yere sahip olan Burgers denklemi; Brusselator modellerinin kimyasal reaksiyonlarını incelemeye, sığ su dalgalarını araştırmada, trafik akışı ve gaz dinamiğinin modellenmesi gibi çeşitli fiziksel uygulamalarda kullanılır. Ayrıca Burgers denklemi akustik dalgalar, konveksiyon etkileri, difüzyon nakli, ısı iletimi, dinamik modelleme ile aralarındaki etkileşimleri tanımlamak için örnek bir model sergiler. Bu modeller ile ilgili çalışmalar diğer nümerik ve analitik tekniklerin anlaşılmasında önemli rol oynar[2, 7, 8, 9, 10, 11].

Lineer olmayan yatay difüzyon denklemi olarak da bilinen Burgers denklemi, Navier-Stokes denkleminin basitleştirilmiş bir modelidir. Burgers denklemi ilk olarak onu fiziksel bir yapı içinde Bateman tarafından önerilmiş ve daha sonra da J. M. Burger tarafından kullanılmıştır. Analitik olarak Burgers denklemi, ilk defa J. M. Burger tarafından türbülans model adlı çalışmasında kullanılmış ve basit bir boyutlu Burgers denkleminin kararlı çözümü ise Bateman tarafından yapılmıştır[2, 7, 8].

Literatürde iki boyutlu Burgers denklemi ile ilgili birçok çalışma mevcuttur. Bunlardan bazıları, Fan vd.[12], sembolik hesaplama ve genişletilmiş tanh metodunu kullanarak iki boyutlu KdV Burgers denklemi için şok dalga çözümlerini elde ettiler.

Kannan ve Chung[13], 2-boyutlu Burgers sistemleri için sonlu fark yaklaşık çözümlerini bir tüp içindeki çalkantılı akışını modelledi. Boules ve Eick[14], 2- boyutlu Burgers denkleminin tam çözümüne zamana bağlı katsayılar ile kesilmiş Fourier serileri yardımıyla sunuldu. Bahadır[15], iki boyutlu Burgers denklemini tamamen kapalı sonlu fark yöntemi ile ayrıştırarak, lineer olmayan diferansiyel denklem sisteminin çözümlerine ulaştı. El-Sayed ve Kaya[16], başlangıç şartları verilen iki boyutlu Burgers denkleminin tam ve nümerik çözümünü ADM metodu ile elde ettiler. Radwan[17], 2-boyutlu Burgers denklemlerini dik eğimi modere ettikten sonra yüksek dereceden tam sonlu fark yöntemi ile nümerik sonuçları elde etti. Duan ve Liu[18], kararsız 2-boyutlu Burgers denklemini simüle etmek için özel bir Lattice Boltzmann modeli üzerinde çalıştılar. Zhua vd.[19], iki boyutlu lineer olmayan Burgers denkleminin nümerik çözümlerini ADM metodu ile elde ettiler. Srivastava vd.[20], iki boyutlu coupled Burgers denkleminin sayısal çözümlerini Crank-Nicolson yöntemini kullanarak buldular. Tamsir ve Srivastava[21], 2-boyutlu coupled Burgers denkleminin nümerik çözümlerine ulaşmak için yarı açık sonlu fark metodunu kullandılar. Kweyu vd.[22], değişkenlerin ayrıştırılması ve Hopf-Cole dönüşümü kullanarak 2-boyutlu Burgers denklemleri için dirichlet sınır şartlarının ve başlangıç şartlarının çeşitli kümelerini meydana getirdiler. Aminikhah[23], lineer olmayan iki boyutlu Burgers denklemini etkili bir şekilde çözmeye yarayan Laplace dönüşüm metodunun yeni bir formunu oluşturdu. Kadir vd.[24], 2-boyutlu Burgers denkleminin nümerik olarak çözümünü lineerleştirilmiş Crank-Nicolson sonlu fark metodu ile verdi. Shukla vd.[25], 2-boyutlu non-lineer coupled viskos Burgers denkleminin nümerik çözümlerini uygun başlangıç ve sınır şartlarıyla modifiye edilmiş kübik B-spline diferansiyel quadrature metodu kullanarak elde etti. Khan[26], 2-boyutlu lineer olmayan Burgers denklemini LDM

metodu ile çözdü. Kutluay ve Yağmurlu[27], modifiye edilmiş bi-kuintik B-spline fonksiyonları kullandı ve nümerik sonuçları elde etmek için 2-boyutlu kararsız Burgers denkleminin Galerkin metodu uyguladı. Hussain vd.[28], meshfree yöntemi ile 2-boyutlu Burgers denkleminin nümerik çözümlerini elde ettiler. Zhanlav vd.[29], 2-boyutlu ısı denklemini çözmek için yüksek dereceden sonlu fark metodunu kullandı. Sarboland ve Aminataei[30], lineer olmayan coupled Burgers denklemlerini multiküadratik quasi-interpolasyon şeması olarak bilinen meshless metodlarının bir çeşidi vasıtasıyla çözdüler. Gardner ve Gardner[31], manyeto-hidro dinamik düzlem akışını 2-boyutlu kübik B-spline sonlu eleman metodunu kullanarak çözdüler. Ang[32], yerel olmayan şarta bağlı 2-boyutlu difüzyon denkleminin nümerik çözümü için sınır integral denklem yöntemini sundu ve özel bir problemi bu yöntemle çözdü. Velivelli ve Bryden[33], 2-boyutlu difüzyon denkleminin çözümü için kafes Boltzmann yönteminin ön-etkin (cache-efficient) uygulamasını sundular. Wu ve Zhang[34], 2-boyutlu Burgers denkleminin nümerik çözümünü bir yapay sınır yöntemiyle elde ettiler. Gurefe ve Mısırlı[35], (G'/G) - açılım yöntemi yardımıyla Riccati denkleminin bazı tam çözümlerini elde ettikten sonra Riccati denkleminin kendisi ve tam çözümlerini kullanarak 2-boyutlu Burgers denkleminin iki keyfi fonksiyonlu değişkenlerine ayrılabilir çözümlerini buldular. Mittal ve Jiwari[36], uygun başlangıç ve sınır şartları ile birlikte verilen lineer olmayan 2-boyutlu Burgers denklem sisteminin nümerik çözümlerini elde etmek için hızlı yakınsayan diferansiyel quadrature yöntemini önerdiler. Allery vd.[37], 2-boyutlu Burgers denklemlerini herbir iterasyonda bazın daha da iyileştirildiği bir baza dayalı iteratif prosedür olan indirgeme yöntemini kullanarak çözdüler. İnan vd.[38], dokuzuncu mertebe Korteweg-de Vries (nKdv) denklemi ve 2-boyutlu Burgers denklemlerinin kompleks çözümleri için direkt bir

cebirsel yöntem uygulamış ve bu denklemlerin bir takım kompleks çözümlerini bulmuşlardır. Huang ve Abdowali[39], bir ve iki boyutlu Burgers denkleminde modifiye edilmiş lokal Crank-Nicolson metodunu uyguladılar.

Şimdi (3.1.1) ile verilen 2-boyutlu Burgers denklemini aşağıda sunulan farklı başlangıç ve sınır şartları ile ele alalım.

3.2 Model Problem 1

İlk model problem olarak

$$u_t + uu_x + uu_y = v(u_{xx} + u_{yy}) \quad (x, y) \in D, \quad t > 0 \quad (3.2.1)$$

2-boyutlu Burgers denklemini $D = [0, 1] \times [0, 1]$ bölgesinde

$$u(0, y, t) = \frac{1}{1 + e^{(y-t)/2v}}, \quad t > 0$$

$$u(1, y, t) = \frac{1}{1 + e^{(y+1-t)/2v}}, \quad t > 0$$

$$u(x, 0, t) = \frac{1}{1 + e^{(x-t)/2v}}, \quad t > 0$$

$$u(x, 1, t) = \frac{1}{1 + e^{(x+1-t)/2v}}, \quad t > 0$$

sınır şartları ve

$$u(x, y, 0) = u_0(x, y) = \frac{1}{1 + e^{(x+y)/2v}}$$

başlangıç şartı ile ele alındı. Problemin analitik çözümü

$$u(x, y, t) = \frac{1}{1 + e^{(x+y-t)/2v}}$$

dir[27].

3.3 Model Problem 2

İkinci model problem olarak

$$u_t + uu_x + uu_y = v(u_{xx} + u_{yy}) \quad (x, y) \in D, \quad t > 0$$

2-boyutlu Burgers denklemi $D = [0, 1] \times [0, 1]$ bölgesinde

$$u(0, y, t) = 0, \quad t > 0$$

$$u(1, y, t) = 0, \quad t > 0$$

$$u(x, 0, t) = \sin(2\pi x), \quad t > 0$$

$$u(x, 1, t) = \sin(2\pi x), \quad t > 0$$

sınır şartları ve

$$u(x, y, 0) = u_0(x, y) = \sin(2\pi x) \cos(2\pi y)$$

başlangıç şartı ile ele alındı[24].

Çalışmada elde edilen sonuçların doğruluğunu, etkinliğini ve nümerik çözümlerin analitik sonuçlara ne kadar yakın olduğunu ölçmek için literatürde bulunan

$$L_2 = \sqrt{\sum_{i,j=1}^{N-1} |U_{i,j} - (u_{tam})_{i,j}|^2}$$

$$L_\infty = \max_{0 < i,j < N-1} |U_{i,j} - (u_{tam})_{i,j}|$$

hata normları kullanıldı.

4. MODEL PROBLEMLERİN KLASİK SONLU FARK YÖNTEMLERİ İLE NÜMERİK ÇÖZÜMLERİ

4.1 Açık Sonlu Fark Yöntemi (ASFY) ile Çözümü

(3.1.1) denkleminin açık sonlu fark yaklaşımını elde etmek için denklemden bulunan türevler yerine

$$\begin{aligned}\frac{\partial U}{\partial x} &\simeq \frac{U_{i+1,j}^n - U_{i-1,j}^n}{2h_x} \\ \frac{\partial U}{\partial y} &\simeq \frac{U_{i,j+1}^n - U_{i,j-1}^n}{2h_y} \\ \frac{\partial U}{\partial t} &\simeq \frac{U_{i,j}^{n+1} - U_{i,j}^n}{k} \\ \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} &\simeq \frac{U_{i-1,j}^n - 2U_{i,j}^n + U_{i+1,j}^n}{h_x^2} \\ \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} &\simeq \frac{U_{i,j-1}^n - 2U_{i,j}^n + U_{i,j+1}^n}{h_y^2}\end{aligned}$$

sonlu fark yaklaşımları yazılırsa;

$$\begin{aligned}\frac{U_{i,j}^{n+1} - U_{i,j}^n}{k} + U_{i,j}^n \frac{U_{i+1,j}^n - U_{i-1,j}^n}{2h_x} + U_{i,j}^n \frac{U_{i,j+1}^n - U_{i,j-1}^n}{2h_y} = \\ v \left[\frac{U_{i-1,j}^n - 2U_{i,j}^n + U_{i+1,j}^n}{h_x^2} + \frac{U_{i,j-1}^n - 2U_{i,j}^n + U_{i,j+1}^n}{h_y^2} \right]\end{aligned}$$

bulunur. Burada $i, j = 1(1)M - 1$ olmak üzere $h_x = h_y = h$ alınır ve gerekli düzenlemeler yapılırsa;

$$\begin{aligned}
U_{i,j}^{n+1} &= U_{i,j}^n - \frac{k}{2h} U_{i,j}^n (U_{i+1,j}^n - U_{i-1,j}^n + U_{i,j+1}^n - U_{i,j-1}^n) \\
&+ \frac{vk}{h^2} (U_{i-1,j}^n - 2U_{i,j}^n + U_{i+1,j}^n + U_{i,j-1}^n - 2U_{i,j}^n + U_{i,j+1}^n)
\end{aligned} \tag{4.1.1}$$

elde edilir.

4.2 Kapalı Sonlu Fark Yöntemi (KSFY) ile Çözümü

(3.1.1) ile verilen denklemin kapalı sonlu fark yaklaşımı için, denklemde bulunan türevler yerine

$$\begin{aligned}
\frac{\partial U}{\partial x} &\simeq \frac{U_{i+1,j}^{n+1} - U_{i-1,j}^{n+1}}{2h_x} \\
\frac{\partial U}{\partial y} &\simeq \frac{U_{i,j+1}^{n+1} - U_{i,j-1}^{n+1}}{2h_y} \\
\frac{\partial U}{\partial t} &\simeq \frac{U_{i,j}^{n+1} - U_{i,j}^n}{k} \\
\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} &\simeq \frac{U_{i-1,j}^{n+1} - 2U_{i,j}^{n+1} + U_{i+1,j}^{n+1}}{h_x^2} \\
\frac{\partial^2 U}{\partial y^2} &\simeq \frac{U_{i,j-1}^{n+1} - 2U_{i,j}^{n+1} + U_{i,j+1}^{n+1}}{h_y^2}
\end{aligned}$$

sonlu fark yaklaşımları yazılırsa;

$$\begin{aligned}
&\frac{U_{i,j}^{n+1} - U_{i,j}^n}{k} + U_{i,j}^n \left(\frac{U_{i+1,j}^{n+1} - U_{i-1,j}^{n+1}}{2h_x} + \frac{U_{i,j+1}^{n+1} - U_{i,j-1}^{n+1}}{2h_y} \right) \\
&= v \left(\frac{U_{i-1,j}^{n+1} - 2U_{i,j}^{n+1} + U_{i+1,j}^{n+1}}{h_x^2} + \frac{U_{i,j-1}^{n+1} - 2U_{i,j}^{n+1} + U_{i,j+1}^{n+1}}{h_y^2} \right)
\end{aligned}$$

olur. $i, j = 1(1)M - 1$ olmak üzere gerekli düzenlemeler yapılırsa

$$\begin{aligned} \frac{U_{i,j}^n}{k} &= U_{i-1,j}^{n+1} \left(-\frac{U_{i,j}^n}{2h_x} - \frac{v}{h_x^2} \right) + U_{i+1,j}^{n+1} \left(\frac{U_{i,j}^n}{2h_x} - \frac{v}{h_x^2} \right) + U_{i,j}^{n+1} \left(\frac{1}{k} + \frac{2v}{h_x^2} + \frac{2v}{h_y^2} \right) \\ &+ U_{i,j-1}^{n+1} \left(-\frac{U_{i,j}^n}{2h_y} - \frac{v}{h_y^2} \right) + U_{i,j+1}^{n+1} \left(\frac{U_{i,j}^n}{2h_y} - \frac{v}{h_y^2} \right) \end{aligned} \quad (4.2.1)$$

elde edilir.

4.3 Crank-Nicolson Sonlu Fark Yöntemi (CNSFY) ile Çözümü

Crank-Nicolson sonlu fark yaklaşımı açık ve kapalı sonlu fark yaklaşımlarının averajlarının alınmasıyla elde edilir. Denklemin açık sonlu fark yaklaşımı

$$\begin{aligned} U_{i,j}^{n+1} &= U_{i,j}^n - \frac{k}{2h} U_{i,j}^n (U_{i+1,j}^n - U_{i-1,j}^n + U_{i,j+1}^n - U_{i,j-1}^n) \\ &+ \frac{vk}{h^2} (U_{i-1,j}^n - 2U_{i,j}^n + U_{i+1,j}^n + U_{i,j-1}^n - 2U_{i,j}^n + U_{i,j+1}^n) \end{aligned}$$

ve kapalı sonlu fark yaklaşımı

$$\begin{aligned} U_{i,j}^n \frac{1}{k} &= U_{i-1,j}^{n+1} \left(-\frac{U_{i,j}^n}{2h_x} - \frac{v}{h_x^2} \right) + U_{i+1,j}^{n+1} \left(\frac{U_{i,j}^n}{2h_x} - \frac{v}{h_x^2} \right) + U_{i,j}^{n+1} \left(\frac{1}{k} + \frac{2v}{h_x^2} + \frac{2v}{h_y^2} \right) \\ &+ U_{i,j-1}^{n+1} \left(-\frac{U_{i,j}^n}{2h_y} - \frac{v}{h_y^2} \right) + U_{i,j+1}^{n+1} \left(\frac{U_{i,j}^n}{2h_y} - \frac{v}{h_y^2} \right) \end{aligned}$$

dir. Bunların $i, j = 1(1)M - 1$ olmak üzere averajlarının alınmasıyla

$$\begin{aligned}
\alpha_1 &= -\frac{U_{i,j}^n}{4h_x} - \frac{v}{2h_x^2}, & \alpha_2 &= \frac{U_{i,j}^n}{4h_x} - \frac{v}{2h_x^2} \\
\alpha_3 &= -\frac{1}{k} + \frac{v}{h_x^2} + \frac{v}{h_y^2}, & \alpha_4 &= -\frac{U_{i,j}^n}{4h_y} - \frac{v}{2h_y^2} \\
\alpha_5 &= \frac{U_{i,j}^n}{4h_y} - \frac{v}{2h_y^2}, & \alpha_6 &= \frac{U_{i,j}^n}{4h_x} + \frac{v}{2h_x^2} \\
\alpha_7 &= -\frac{U_{i,j}^n}{4h_x} + \frac{v}{2h_x^2}, & \alpha_8 &= -\frac{1}{k} - \frac{v}{h_x^2} - \frac{v}{h_y^2} \\
\alpha_9 &= \frac{U_{i,j}^n}{4h_y} + \frac{v}{2h_y^2}, & \alpha_{10} &= -\frac{U_{i,j}^n}{4h_y} + \frac{v}{2h_y^2}
\end{aligned}$$

olmak üzere

$$\begin{aligned}
&\alpha_1 U_{i-1,j}^n + \alpha_2 U_{i+1,j}^n + \alpha_3 U_{i,j}^n + \alpha_4 U_{i,j-1}^n + \alpha_5 U_{i,j+1}^n \\
&= \alpha_6 U_{i-1,j}^{n+1} + \alpha_7 U_{i+1,j}^{n+1} + \alpha_8 U_{i,j}^{n+1} + \alpha_9 U_{i,j-1}^{n+1} + \alpha_{10} U_{i,j+1}^{n+1}
\end{aligned} \tag{4.3.1}$$

elde edilir.

4.4 Kararlılık Analizi

(3.1.1) ile verilen iki boyutlu Burgers denklemi için ağırlıklı averaj yaklaşımı, $\lambda \in [0, 1]$, $h = h_x = h_y$ ve

$$\begin{aligned}\alpha_1 &= \frac{U_{i+1,j}^{n+1} - U_{i-1,j}^{n+1}}{2h}, & \alpha_2 &= \frac{U_{i+1,j}^n - U_{i-1,j}^n}{2h} \\ \alpha_3 &= \frac{U_{i,j+1}^{n+1} - U_{i,j-1}^{n+1}}{2h}, & \alpha_4 &= \frac{U_{i,j+1}^n - U_{i,j-1}^n}{2h} \\ \alpha_5 &= \frac{U_{i-1,j}^{n+1} - 2U_{i,j}^{n+1} + U_{i+1,j}^{n+1}}{h^2} \\ \alpha_6 &= \frac{U_{i-1,j}^n - 2U_{i,j}^n + U_{i+1,j}^n}{h^2} \\ \alpha_7 &= \frac{U_{i,j-1}^{n+1} - 2U_{i,j}^{n+1} + U_{i,j+1}^{n+1}}{h^2} \\ \alpha_8 &= \frac{U_{i,j-1}^n - 2U_{i,j}^n + U_{i,j+1}^n}{h^2}\end{aligned}$$

olmak üzere,

$$\begin{aligned}& \frac{U_{i,j}^{n+1} - U_{i,j}^n}{k} + U [\alpha_1 \lambda + \alpha_2 (1 - \lambda)] + U [\alpha_3 \lambda + \alpha_4 (1 - \lambda)] \\ &= v [\alpha_5 \lambda + \alpha_6 (1 - \lambda) + \alpha_7 \lambda + \alpha_8 (1 - \lambda)]\end{aligned}\tag{4.4.1}$$

dır. Bu yaklaşımda $\lambda = 0$, $\lambda = \frac{1}{2}$, ve $\lambda = 1$ seçilmesi ile sırasıyla Açık, Crank Nicolson ve Kapalı yöntemleri elde edilir.

Şimdi (4.4.1) denkleminde von-Neumann kararlılık analizi uygulayalım.

Bunun için $U_{i,j}^n$ yerine

$$U_{i,j}^n = e^{I\beta(i+j)h} \epsilon^n, \quad I = \sqrt{-1}$$

yazılır ve gerekli düzenlemeler yapılırsa

$$\begin{aligned}& \epsilon \left[\frac{1}{k} + 2U\lambda \left(\frac{e^{I\beta h} - e^{-I\beta h}}{2h} \right) - 2v\lambda \left(\frac{e^{-I\beta h} - 2 + e^{I\beta h}}{h^2} \right) \right] \\ &= \left[\frac{1}{k} - 2U(1 - \lambda) \left(\frac{e^{I\beta h} - e^{-I\beta h}}{2h} \right) + 2v(1 - \lambda) \left(\frac{e^{-I\beta h} - 2 + e^{I\beta h}}{h^2} \right) \right]\end{aligned}$$

elde edilir. Son eşitlikte

$$e^{I\beta h} = \cos \beta h + I \sin \beta h$$

Euler formülünün kullanılmasıyla

$$\varepsilon = \frac{\frac{1}{k} - U(1 - \lambda)\left(\frac{2I \sin \beta h}{h}\right) - v(1 - \lambda)\left(\frac{4 \cos \beta h - 4}{h^2}\right)}{\frac{1}{k} + U\lambda\left(\frac{2I \sin \beta h}{h}\right) - v\lambda\left(\frac{4 \cos \beta h - 4}{h^2}\right)}$$

bulunur.

$$\cos \beta h = 1 - 2 \sin^2 \frac{\beta h}{2}$$

olduğundan

$$\varepsilon = \frac{1 - (1 - \lambda)\left[\frac{8vk}{h^2} \sin^2 \frac{\beta h}{2} + I\frac{2Uk}{h} \sin \beta h\right]}{1 + \lambda\left[\frac{8vk}{h^2} \sin^2 \frac{\beta h}{2} + I\frac{2Uk}{h} \sin \beta h\right]}$$

dır. Bu eşitlikte $r = \frac{k}{h^2}$ yazılırsa

$$\varepsilon = \frac{1 - (1 - \lambda)\left[8vr \sin^2 \frac{\beta h}{2} + I\frac{2Uk}{h} \sin \beta h\right]}{1 + \lambda\left[8vr \sin^2 \frac{\beta h}{2} + I\frac{2Uk}{h} \sin \beta h\right]} \quad (4.4.2)$$

elde edilir.

$\lambda = 0$ ise açık sonlu fark yaklaşımı için (4.4.2)'nin kararlı olması $|\varepsilon| \leq 1$ şartı ile sağlanır. O halde, $|\varepsilon| \leq 1$ ise $0 \leq |\varepsilon|^2 \leq 1$ dir.

$$|\varepsilon|^2 = \left(1 - \frac{8vk}{h^2} \sin^2 \frac{\beta h}{2}\right)^2 + \left(\frac{2Uk}{h} \sin \beta h\right)^2$$

ifadesi $|\varepsilon|^2 \leq 1$ eşitsizliğinde

$$\sin \beta h = 2 \sin \frac{\beta h}{2} \cos \frac{\beta h}{2}$$

kullanılır ve gerekli düzenlemeler yapılırsa

$$1 - 16 \frac{vk}{h^2} \sin^2 \frac{\beta h}{2} + 64 \frac{v^2 k^2}{h^4} \sin^4 \frac{\beta h}{2} + 16 \frac{U^2 k^2}{h^2} \sin^2 \frac{\beta h}{2} \cos^2 \frac{\beta h}{2} \leq 1$$

elde edilir. Buradan

$$r \left[U^2 h^2 + (4v^2 - U^2 h^2) \sin^2 \frac{\beta h}{2} \right] \leq v$$

bulunur. Böylece yöntemin kararlı olması için r parametresinin

$$r \leq \min \left(\frac{v}{U^2 h^2}, \frac{1}{4v} \right)$$

eşitsizliğini sağlayacak şekilde seçilmesi gerekir.

$\lambda = 1$ seçilmesi ile elde edilen kapalı sonlu fark yaklaşımı için (4.4.2)' nin kararlı olması $|\varepsilon| \leq 1$ şartı ile sağlanır. Bu şart her $r > 0$ için sağlanacağından kapalı yöntem şartsız kararlıdır.

$\lambda = \frac{1}{2}$ seçilmesi ile elde edilen Crank Nicolson sonlu fark yaklaşımı için (4.4.2)' nin kararlı olması $|\varepsilon| \leq 1$ şartı ile sağlanır. Bu şart her $r > 0$ için sağlanacağından Crank Nicolson sonlu fark yöntemi şartsız kararlıdır.

Nümerik Sonuçlar

Bu kısımda (4.1.1), (4.2.1) ve (4.3.1) ile verilen sırasıyla Açık, Kapalı ve Crank-Nicolson sonlu fark şemalarında Problem 1 ve Problem 2' de verilen başlangıç ve sınır şartları kullanılarak elde edilen nümerik sonuçlar verildi. ASFY için elde edilen nümerik sonuçlar Tablo 4.1 ve Tablo 4.2' de sunuldu.

Tablo 4.1' de $v = 1$, $k = 0.001$ ve $t = 0.25$ seçilerek farklı h konum adımı uzunlukları için açık sonlu fark yöntemi ile elde edilen nümerik sonuçlar, L_2 , L_∞ hata normları ve problemin tam çözümü ile nümerik çözümlerinin karşılaştırılması sunuldu. Tablodan görüleceği üzere nümerik çözüm ile tam çözüm birbiriyle uyum içinde olup hata normları yeterince küçüktür. Konum bölüntü sayısı arttırıldığında L_2 ve L_∞ hata normlarının oldukça küçüldüğü görülmektedir.

Tablo 4.2' de $v = 1$, $h = 0.1$, $t = 0.25$ ve farklı k değerleri için Problem 1' in açık sonlu fark yöntemi ile elde edilen nümerik sonuçlarının tam çözümlerle karşılaştırılması sunuldu. Tablodan k zaman adımı küçüldükçe nümerik çözümlerin tam çözüme yaklaştığı ve L_2 ve L_∞ normlarının yeterince küçük olduğu görülmektedir.

Tablo 4.3' te $k = 0.0001$, $t = 0.25$ ve v' nin farklı değerleri için Problem 1' in L_2 ve L_∞ hata normları Ref. [24] ile karşılaştırıldı. Tablodan v' nin farklı değerlerinde elde edilen L_2 ve L_∞ hata normlarının Ref. [24] ile verilen hata normlarından daha küçük olduğu görülmektedir.

Tablo 4.4' te $v = 1$, $k = 0.001$ ve $M = 16$ olmak üzere farklı t zamanında Problem 1' in ASFY ile elde edilen nümerik ve tam çözümleri ile L_2 ve L_∞ değerleri verildi. Farklı t zamanlarında nümerik ve tam sonuçlara bakıldığında birbirine yakın oldukları görülmektedir. Ayrıca L_2 ve L_∞ değerleri farklı t zamanlarında yeterince küçüktür.

Tablo 4.1: Problem 1' in $v = 1$, $k = 0.001$ ve h' nin farklı değerleri için $t = 0.25$ zamanında ASFY ile elde edilen nümerik ve tam çözümleri (*' da $k = 0.0001$ alındı)

(x, y)	Nümerik Çözüm			Tam Çözüm
	$h = 0.1$	$(*)h = 0.05$	$(*)h = 0.025$	
(0.0, 0.0)	0.531209	0.531209	0.531209	0.531209
(0.0, 0.1)	0.518741	0.518741	0.518741	0.518741
(0.0, 0.2)	0.506250	0.506250	0.506250	0.506250
(0.0, 0.3)	0.493750	0.493750	0.493750	0.493750
(0.0, 0.4)	0.481259	0.481259	0.481259	0.481259
(0.1, 0.0)	0.518741	0.518741	0.518741	0.518741
(0.1, 0.1)	0.506249	0.506250	0.506250	0.506250
(0.1, 0.2)	0.493750	0.493750	0.493750	0.493750
(0.1, 0.3)	0.481258	0.481259	0.481259	0.481259
(0.2, 0.0)	0.506250	0.506250	0.506250	0.506250
(0.2, 0.1)	0.493750	0.493750	0.493750	0.493750
(0.3, 0.0)	0.493750	0.493750	0.493750	0.493750
(0.3, 0.1)	0.481258	0.481259	0.481259	0.481259
(0.4, 0.0)	0.481259	0.481259	0.481259	0.481259
(0.5, 0.0)	0.468791	0.468791	0.468791	0.468791
(1.0, 1.0)	0.294215	0.294215	0.294215	0.294215
L_2	1.316×10^{-5}	5.92×10^{-6}	3.67×10^{-6}	
L_∞	2.36×10^{-6}	5.3×10^{-7}	1.7×10^{-7}	

Tablo 4.2: Problem 1' in $v = 1$, $h = 0.1$ ve farklı k zaman adımları için $t = 0.25$ zamanında ASFY ile elde edilen nümerik ve tam çözümleri

(x, y)	Nümerik Çözüm			Tam Çözüm
	$k = 0.001$	$k = 0.0005$	$k = 0.0001$	
(0.0, 0.0)	0.531209	0.531209	0.531209	0.531209
(0.0, 0.1)	0.518741	0.518741	0.518741	0.518741
(0.0, 0.2)	0.506250	0.506250	0.506250	0.506250
(0.0, 0.3)	0.493750	0.493750	0.493750	0.493750
(0.0, 0.4)	0.481259	0.481259	0.481259	0.481259
(0.1, 0.0)	0.518741	0.518741	0.518741	0.518741
(0.1, 0.1)	0.506249	0.506249	0.506249	0.506250
(0.1, 0.2)	0.493750	0.493750	0.493750	0.493750
(0.1, 0.3)	0.481258	0.481258	0.481258	0.481259
(0.2, 0.0)	0.506250	0.506250	0.506250	0.506250
(0.2, 0.1)	0.493750	0.493750	0.493750	0.493750
(0.3, 0.0)	0.493750	0.493750	0.493750	0.493750
(0.3, 0.1)	0.481258	0.481258	0.481258	0.481259
(0.4, 0.0)	0.481259	0.481259	0.481259	0.481259
(0.5, 0.0)	0.468791	0.468791	0.468791	0.468791
(1.0, 1.0)	0.294215	0.294215	0.294215	0.294215
L_2	1.136×10^{-5}	1.199×10^{-5}	1.107×10^{-5}	
L_∞	2.36×10^{-6}	2.15×10^{-6}	1.99×10^{-6}	

Tablo 4.3: Problem 1' in $k = 0.0001$, $t = 0.25$ ve v' nin farklı değerleri için ASFY ile elde edilen L_2 ve L_∞ değerlerinin Ref. [24] ile karşılaştırılması

v	M	$L_2(k = 0.0001)$	$L_2[24]$	$L_\infty(k = 0.0001)$	$L_\infty[24]$
1	8×8	1.4×10^{-5}	5.311×10^{-5}	3.0×10^{-6}	1.189×10^{-5}
	32×32	4.19×10^{-6}	1.904×10^{-4}	2.3×10^{-7}	1.065×10^{-5}
	48×48	3.37×10^{-6}	2.843×10^{-4}	1.3×10^{-7}	1.060×10^{-5}
0.1	8×8	5.151×10^{-3}	5.811×10^{-3}	2.452×10^{-3}	1.751×10^{-3}
	32×32	1.491×10^{-3}	9.465×10^{-3}	2.02×10^{-4}	1.722×10^{-3}
	40×40	1.244×10^{-3}	1.224×10^{-2}	1.34×10^{-4}	1.242×10^{-3}
0.05	8×8	2.4412×10^{-2}	2.255×10^{-2}	2.1626×10^{-2}	1.016×10^{-2}
	24×24	9.702×10^{-3}	2.044×10^{-2}	2.61×10^{-3}	6.011×10^{-3}
	32×32	7.399×10^{-3}	2.735×10^{-2}	1.511×10^{-3}	6.663×10^{-3}

Tablo 4.4: Problem 1' in $v = 1$, $k = 0.001$ ve $M = 16$ olmak üzere farklı t zamanında ASFY ile elde edilen nümerik ve tam çözümleri ile L_2 ve L_∞ değerleri

(x, y)	$t = 0.1$		$t = 0.25$	
	Nümerik	Tam	Nümerik	Tam
(1/8, 1/8)	0.481259	0.481259	0.500000	0.500000
(3/8, 1/8)	0.450166	0.450166	0.468790	0.468791
(3/8, 3/8)	0.419457	0.419458	0.437823	0.437823
(4/8, 3/8)	0.404318	0.404319	0.422504	0.422505
(4/8, 4/8)	0.389360	0.389361	0.407332	0.407333
(5/8, 4/8)	0.374607	0.374608	0.392336	0.392337
(5/8, 5/8)	0.360083	0.360084	0.377540	0.377541
(7/8, 5/8)	0.331812	0.331812	0.348645	0.348645
(7/8, 7/8)	0.304703	0.304703	0.320821	0.320821
(1/8, 7/8)	0.389360	0.389361	0.407333	0.407333
L_2	1.0×10^{-5}		1.1×10^{-5}	
L_∞	1.0×10^{-6}		1.0×10^{-6}	
(x, y)	$t = 0.5$		$t = 0.75$	
	Nümerik	Tam	Nümerik	Tam
(1/8, 1/8)	0.531209	0.531209	0.562304	0.562177
(3/8, 1/8)	0.500000	0.500000	0.531539	0.531209
(3/8, 3/8)	0.468791	0.468791	0.500849	0.500000
(4/8, 3/8)	0.453262	0.453262	0.485327	0.484380
(4/8, 4/8)	0.437824	0.437823	0.469847	0.468791
(5/8, 4/8)	0.422505	0.422505	0.454266	0.453262
(5/8, 5/8)	0.407333	0.407333	0.438778	0.437823
(7/8, 5/8)	0.377541	0.377541	0.407750	0.407333
(7/8, 7/8)	0.348645	0.348645	0.377722	0.377541
(1/8, 7/8)	0.437823	0.437823	0.468945	0.468791
L_2	1.3×10^{-5}		8.47×10^{-3}	
L_∞	2.0×10^{-6}		1.056×10^{-3}	

Problem 1' in (4.2.1) ile verilen kapalı sonlu fark şeması ile elde edilen nümerik sonuçları Tablo 4.5 ve Tablo 4.6' da sunuldu.

Tablo 4.5' te $v = 1$, $k = 0.001$ ve $t = 0.25$ seçilerek farklı konum adım uzunlukları için, kapalı sonlu fark yöntemi ile elde edilen nümerik sonuçlar, L_2 ve L_∞ hata normları ve problemin seçilen (x_i, y_i) noktaları için tam çözümü sunuldu. Tablodan görüleceği üzere nümerik çözüm ile tam çözüm birbiriyle uyum içindedir ve hata normları oldukça küçüktür. Tablo 4.5' ten görüleceği üzere h konum adım uzunluğu azaldığında L_2 ve L_∞ hata normlarında kayda değer bir azalma gözlenmedi.

Tablo 4.6' da $v = 1$, $h = 0.05$, $t = 0.25$ ve farklı k değerleri için Problem 1' in kapalı sonlu fark yöntemi ile elde edilen nümerik sonuçlarının tam sonuçlarla karşılaştırılması sunuldu. Tablodan görüleceği üzere k değerleri azaldıkça L_2 ve L_∞ hata normlarında azalma olmaktadır.

Tablo 4.7' de $k = 0.01$, $t = 0.25$ ve v ' nin farklı değerleri için Problem 1' in KSFY ile elde edilen L_2 ve L_∞ değerlerinin Ref. [24] ile karşılaştırılması verildi. Tablodan görüleceği üzere farklı v ve M değerlerinde L_2 ve L_∞ hata normları uyum içerisindedir.

Tablo 4.8' de $v = 1$, $k = 0.01$ ve $M = 16$ olmak üzere farklı t zamanında Problem 1' in KSFY ile elde edilen nümerik ve tam çözümleri ile L_2 ve L_∞ hata normları verildi. t ' nin farklı değerlerinde elde edilen nümerik sonuçlar tam sonuçlara oldukça yakındır. L_2 ve L_∞ hata normları da oldukça küçüktür.

Tablo 4.5: Problem 1' in $v = 1$, $k = 0.001$ ve h' nin farklı değerleri için $t = 0.25$ zamanında KSFY ile elde edilen nümerik ve tam çözümleri

(x, y)	Nümerik Çözüm			Tam Çözüm
	$h = 0.1$	$h = 0.05$	$h = 0.025$	
(0.0, 0.0)	0.531209	0.531209	0.531209	0.531209
(0.0, 0.1)	0.518741	0.518741	0.518741	0.518741
(0.0, 0.2)	0.506250	0.506250	0.506250	0.506250
(0.0, 0.3)	0.493750	0.493750	0.493750	0.493750
(0.0, 0.4)	0.481259	0.481259	0.481259	0.481259
(0.1, 0.0)	0.518741	0.518741	0.518741	0.518741
(0.1, 0.1)	0.506249	0.506249	0.506256	0.506250
(0.1, 0.2)	0.493749	0.493749	0.493748	0.493750
(0.1, 0.3)	0.481257	0.481257	0.481256	0.481259
(0.2, 0.0)	0.506250	0.506250	0.506250	0.506250
(0.2, 0.1)	0.493749	0.493749	0.493748	0.493750
(0.3, 0.0)	0.493750	0.493750	0.493750	0.493750
(0.3, 0.1)	0.481257	0.481257	0.481256	0.481259
(0.4, 0.0)	0.481259	0.481259	0.481259	0.481259
(0.5, 0.0)	0.468791	0.468791	0.468791	0.468791
(1.0, 1.0)	0.294215	0.294215	0.294215	0.294215
L_2	2.995×10^{-5}	5.579×10^{-5}	1.9768×10^{-4}	
L_∞	5.36×10^{-6}	4.98×10^{-6}	8.84×10^{-6}	

Tablo 4.6: Problem 1' in $v = 1$, $h = 0.05$ ve farklı k zaman adımları için $t = 0.25$ zamanında KSFY ile elde edilen nümerik ve tam çözümleri

(x, y)	Nümerik Çözüm			Tam Çözüm
	$k = 0.01$	$k = 0.005$	$k = 0.001$	
(0.0, 0.0)	0.531209	0.531209	0.531209	0.531209
(0.0, 0.1)	0.518741	0.518741	0.518741	0.518741
(0.0, 0.2)	0.506250	0.506250	0.506250	0.506250
(0.0, 0.3)	0.493750	0.493750	0.493750	0.493750
(0.0, 0.4)	0.481259	0.481259	0.481259	0.481259
(0.1, 0.0)	0.518741	0.518741	0.518741	0.518741
(0.1, 0.1)	0.506246	0.506248	0.506249	0.506250
(0.1, 0.2)	0.493744	0.493747	0.493749	0.493750
(0.1, 0.3)	0.481252	0.481255	0.481257	0.481259
(0.2, 0.0)	0.506250	0.506250	0.506250	0.506250
(0.2, 0.1)	0.493744	0.493747	0.493749	0.493750
(0.3, 0.0)	0.493750	0.493750	0.493750	0.493750
(0.3, 0.1)	0.481252	0.481255	0.481257	0.481259
(0.4, 0.0)	0.481259	0.481259	0.481259	0.481259
(0.5, 0.0)	0.468791	0.468791	0.468791	0.468791
(1.0, 1.0)	0.294215	0.294215	0.294215	0.294215
L_2	2.0819×10^{-4}	1.1374×10^{-4}	5.579×10^{-5}	
L_∞	1.858×10^{-5}	1.014×10^{-5}	4.98×10^{-6}	

Tablo 4.7: Problem 1' in $k = 0.01$, $t = 0.25$ ve v ' nin farklı değerleri için KSFY ile elde edilen L_2 ve L_∞ değerlerinin Ref. [24] ile karşılaştırılması

v	M	L_2	$L_2[24]$	L_∞	$L_\infty[24]$
1	8×8	8.736×10^{-5}	5.311×10^{-5}	1.955×10^{-5}	1.189×10^{-5}
	32×32	3.013×10^{-4}	1.904×10^{-4}	1.690×10^{-5}	1.065×10^{-5}
	48×48	1.096×10^{-4}	2.843×10^{-4}	4.02×10^{-6}	1.060×10^{-5}
0.1	8×8	7.423×10^{-3}	5.811×10^{-3}	3.704×10^{-3}	1.751×10^{-3}
	32×32	1.387×10^{-2}	9.465×10^{-3}	1.633×10^{-3}	1.722×10^{-3}
	40×40	2.964×10^{-1}	1.224×10^{-2}	1.925×10^{-2}	1.242×10^{-3}
0.05	8×8	2.895×10^{-2}	2.255×10^{-2}	2.575×10^{-2}	1.016×10^{-2}
	24×24	3.402×10^{-2}	2.044×10^{-2}	9.573×10^{-3}	6.011×10^{-3}
	32×32	4.098×10^{-2}	2.735×10^{-2}	8.599×10^{-3}	6.663×10^{-3}

Tablo 4.8: Problem 1' in $v = 1$, $k = 0.01$ ve $M = 16$ olmak üzere farklı t zamanında KSFY ile elde edilen nümerik ve tam çözümleri ile L_2 ve L_∞ değerleri

(x, y)	$t = 0.1$		$t = 1$	
	Nümerik	Tam	Nümerik	Tam
(1/8, 1/8)	0.481255	0.481259	0.592661	0.592667
(3/8, 1/8)	0.450159	0.450166	0.562166	0.562176
(3/8, 3/8)	0.419445	0.419458	0.531189	0.531209
(4/8, 3/8)	0.404306	0.404319	0.515598	0.515620
(4/8, 4/8)	0.389347	0.389361	0.499977	0.500000
(5/8, 4/8)	0.374595	0.374608	0.484358	0.484380
(5/8, 5/8)	0.360073	0.360084	0.468770	0.468791
(7/8, 5/8)	0.331807	0.331812	0.437813	0.437823
(7/8, 7/8)	0.304701	0.304703	0.407328	0.407333
(1/8, 7/8)	0.389357	0.389361	0.499994	0.500000
L_2	1.232×10^{-4}		2.0759×10^{-4}	
L_∞	1.355×10^{-5}		2.324×10^{-5}	
(x, y)	$t = 3$		$t = 9$	
	Nümerik	Tam	Nümerik	Tam
(1/8, 1/8)	0.798182	0.798187	0.987568	0.987568
(3/8, 1/8)	0.777291	0.777300	0.985936	0.985936
(3/8, 3/8)	0.754896	0.754915	0.984093	0.984094
(4/8, 3/8)	0.743148	0.743168	0.983084	0.983085
(4/8, 4/8)	0.731036	0.731059	0.982012	0.982014
(5/8, 4/8)	0.718572	0.718594	0.980875	0.980876
(5/8, 5/8)	0.705763	0.705785	0.979666	0.979668
(7/8, 5/8)	0.679167	0.679179	0.977022	0.977023
(7/8, 7/8)	0.651348	0.651355	0.974042	0.974043
(1/8, 7/8)	0.731053	0.731059	0.982013	0.982014
L_2	2.0139×10^{-4}		1.236×10^{-5}	
L_∞	2.262×10^{-5}		1.43×10^{-6}	

Problem 1' in (4.3.1) ile elde edilen nümerik çözümleri Tablo 4.9 ve Tablo 4.10' da verildi.

Tablo 4.9' da $v = 1$, $k = 0.001$ ve farklı h uzunlukları için $t = 0.25$ zamanında Problem 1' in Crank-Nicolson sonlu fark yöntemi ile elde edilen nümerik sonuçlarının tam çözümlerle karşılaştırılması ile L_2 ve L_∞ hata normları verildi. Tablodan görüleceği üzere nümerik çözüm ile tam çözüm birbiriyle uyum içerisinde ve hata normları oldukça küçüktür. h değeri 0.1' den 0.05' e azaltıldığında L_2 değerleri uyum içindeyken, 0.05' ten 0.025' e azaltıldığında ise L_2 değeri az miktarda artmıştır. Benzer şekilde h değeri azaldıkça L_∞ hata normları uyum içerisindeydir.

Tablo 4.10' da $v = 1$, $h = 0.05$, $t = 0.25$ ve farklı k değerleri için Problem 1' in Crank-Nicolson sonlu fark yöntemi ile elde edilen nümerik sonuçlarının tam çözümlerle karşılaştırılması gösterilmiştir. Tablodan görüleceği üzere $k = 0.01$ ' den $k = 0.005$ ' e azaldığında L_2 ve L_∞ değerlerde azalma olmaktadır. k değeri $k = 0.005$ ' den $k = 0.001$ ' e azaldığında ise L_2 ve L_∞ hata normlarının uyumlu olduğu görülmektedir.

Kadir Ref. [24]' de Problem 1 ve Problem 2' nin lineerleştirilmiş Crank-Nicolson yöntemini kullanarak nümerik çözümlerini vermiştir. Bu çalışmada aynı şema kullanılarak aynı sonuçlar elde edilmiş ve Tablo 4.11' de gösterilmiştir. Tablo 4.11' de $k = 0.01$ ve $t = 0.25$ için farklı v ve h değerleri seçimi ile elde edilen L_2 ve L_∞ değerleri gösterilmiştir. Tablodan, elde edilen sonuçların Ref. [24] çalışması ile aynı olduğu sonucuna varılır.

Tablo 4.12' de $v = 1$, $k = 0.01$ ve $M = 16$ olmak üzere farklı t zamanında Problem 1' in CNSFY ile elde edilen nümerik ve tam çözümleri ile L_2 ve L_∞ değerleri verildi. Tablodan nümerik sonuçların tam sonuçlara yakın olduğu görülmektedir.

Tablo 4.9: Problem 1' in $v = 1$, $k = 0.001$ ve h' nin farklı değerleri için $t = 0.25$ zamanında CNSFY ile elde edilen nümerik ve tam çözümleri

(x, y)	Nümerik Çözüm			Tam Çözüm
	$h = 0.1$	$h = 0.05$	$h = 0.025$	
(0.0, 0.0)	0.531209	0.531209	0.531209	0.531209
(0.0, 0.1)	0.518741	0.518741	0.518741	0.518741
(0.0, 0.2)	0.506250	0.506250	0.506250	0.506250
(0.0, 0.3)	0.493750	0.493750	0.493750	0.493750
(0.0, 0.4)	0.481259	0.481259	0.481259	0.481259
(0.1, 0.0)	0.518741	0.518741	0.518741	0.518741
(0.1, 0.1)	0.506249	0.506249	0.506248	0.506250
(0.1, 0.2)	0.493749	0.493749	0.493749	0.493750
(0.1, 0.3)	0.481258	0.481258	0.481256	0.481259
(0.2, 0.0)	0.506250	0.506250	0.506250	0.506250
(0.2, 0.1)	0.493749	0.493749	0.493748	0.493750
(0.3, 0.0)	0.493750	0.493750	0.493750	0.493750
(0.3, 0.1)	0.481258	0.481258	0.481256	0.481259
(0.4, 0.0)	0.481259	0.481259	0.481259	0.481259
(0.5, 0.0)	0.468791	0.468791	0.468791	0.468791
(1.0, 1.0)	0.294215	0.294215	0.294215	0.294215
L_2	1.842×10^{-5}	3.341×10^{-5}	1.774×10^{-4}	
L_∞	3.29×10^{-6}	2.99×10^{-6}	7.93×10^{-6}	

Tablo 4.10: Problem 1' in $v = 1$, $h = 0.05$ ve farklı k zaman adımları için $t = 0.25$ zamanında CNSFY ile elde edilen nümerik ve tam çözümleri

(x, y)	Nümerik Çözüm			Tam Çözüm
	$k = 0.01$	$k = 0.005$	$k = 0.001$	
(0.0, 0.0)	0.531209	0.531209	0.531209	0.531209
(0.0, 0.1)	0.518741	0.518741	0.518741	0.518741
(0.0, 0.2)	0.506250	0.506250	0.506250	0.506250
(0.0, 0.3)	0.493750	0.493750	0.493750	0.493750
(0.0, 0.4)	0.481259	0.481259	0.481259	0.481259
(0.1, 0.0)	0.518741	0.518741	0.518741	0.518741
(0.1, 0.1)	0.506248	0.506248	0.506249	0.506250
(0.1, 0.2)	0.493747	0.493748	0.493749	0.493750
(0.1, 0.3)	0.481255	0.481256	0.481258	0.481259
(0.2, 0.0)	0.506250	0.506250	0.506250	0.506250
(0.2, 0.1)	0.493747	0.493748	0.493749	0.493750
(0.3, 0.0)	0.493750	0.493750	0.493750	0.493750
(0.3, 0.1)	0.481255	0.481256	0.481258	0.481259
(0.4, 0.0)	0.481259	0.481259	0.481259	0.481259
(0.5, 0.0)	0.468791	0.468791	0.468791	0.468791
(1.0, 1.0)	0.294215	0.294215	0.294215	0.294215
L_2	1.3421×10^{-4}	7.524×10^{-5}	3.341×10^{-5}	
L_∞	1.201×10^{-5}	6.72×10^{-6}	2.99×10^{-6}	

Tablo 4.11: Problem 1' in $k = 0.01$, $t = 0.25$ ve v ' nin farklı değerleri için CNSFY ile elde edilen L_2 ve L_∞ değerleri

v	M	L_2	L_∞
1	8×8	5.311×10^{-5}	1.189×10^{-5}
	32×32	1.904×10^{-4}	1.065×10^{-5}
	48×48	2.843×10^{-4}	1.060×10^{-5}
0.1	8×8	5.811×10^{-3}	1.751×10^{-3}
	32×32	9.465×10^{-3}	1.722×10^{-3}
	40×40	1.224×10^{-2}	1.242×10^{-3}
0.05	8×8	2.255×10^{-2}	1.016×10^{-2}
	24×24	2.044×10^{-2}	6.011×10^{-3}
	32×32	2.735×10^{-2}	6.663×10^{-3}

Tablo 4.12: Problem 1'in $v = 1$, $k = 0.01$ ve $M = 16$ olmak üzere farklı t zamanında CNSFY ile elde edilen nümerik ve tam çözümleri ile L_2 ve L_∞ değerleri

(x, y)	$t = 0.1$		$t = 1$	
	Nümerik	Tam	Nümerik	Tam
(1/8, 1/8)	0.481256	0.481259	0.592664	0.592667
(3/8, 1/8)	0.450162	0.450166	0.562171	0.562176
(3/8, 3/8)	0.419449	0.419458	0.531199	0.531209
(4/8, 3/8)	0.404311	0.404319	0.515609	0.515620
(4/8, 4/8)	0.389352	0.389361	0.499988	0.500000
(5/8, 4/8)	0.374599	0.374608	0.484368	0.484380
(5/8, 5/8)	0.360076	0.360084	0.468779	0.468791
(7/8, 5/8)	0.331808	0.331812	0.437818	0.437823
(7/8, 7/8)	0.304701	0.304703	0.407330	0.407333
(1/8, 7/8)	0.389358	0.389361	0.499997	0.500000
L_2	8.177×10^{-5}		1.0847×10^{-4}	
L_∞	8.98×10^{-6}		1.215×10^{-5}	
(x, y)	$t = 3$		$t = 9$	
	Nümerik	Tam	Nümerik	Tam
(1/8, 1/8)	0.798185	0.798187	0.987568	0.987568
(3/8, 1/8)	0.777297	0.777300	0.985936	0.985936
(3/8, 3/8)	0.754909	0.754915	0.984094	0.984094
(4/8, 3/8)	0.743161	0.743168	0.983085	0.983085
(4/8, 4/8)	0.731051	0.731059	0.982014	0.982014
(5/8, 4/8)	0.718587	0.718594	0.980876	0.980876
(5/8, 5/8)	0.705777	0.705785	0.979668	0.979668
(7/8, 5/8)	0.679174	0.679179	0.977023	0.977023
(7/8, 7/8)	0.651352	0.651355	0.974043	0.974043
(1/8, 7/8)	0.731057	0.731059	0.982014	0.982014
L_2	7.006×10^{-5}		6.8×10^{-7}	
L_∞	7.95×10^{-6}		8.0×10^{-8}	

Problem 2' nin (4.1.1) şeması kullanılarak elde edilen nümerik çözümleri farklı h konum adımı ve k zaman adımları için elde edildi. Elde edilen nümerik sonuçlar Tablo 4.13 ve Tablo 4.14' te sunuldu.

Tablo 4.13' te $k = 0.001$, h' nin ve v' nin farklı değerleri için $t = 0.25$ zamanında Problem 2' nin ASFY ile elde edilen nümerik sonuçları verildi. Tablodan, h değerinin azalmasıyla elde edilen nümerik sonuçlar kendi içinde uyumludur.

Tablo 4.14' te $h = 0.1$, v ve k' nin farklı değerleri için $t = 0.05$ zamanında Problem 2' nin ASFY ile elde edilen nümerik sonuçları verildi. Tablodan k' nin değişen değerleri için nümerik sonuçlar birbiriyle uyum içerisindedir.

Tablo 4.13: Problem 2' nin $k = 0.001$, h' nin ve v' nin farklı değerleri için $t = 0.25$ zamanında ASFY ile elde edilen nümerik sonuçları

v	(x, y)	Nümerik Çözüm		
		$h = 0.1$	$h = 0.05$	$h = 0.025$
1	(0.1, 0.0)	0.587785	0.587785	0.587785
	(0.1, 0.5)	0.055650	0.051785	0.050819
	(0.4, 0.4)	0.070433	0.066309	0.065280
	(0.7, 0.7)	-0.173929	-0.166190	-0.164242
	(1.0, 1.0)	0.000000	0.000000	0.000000
0.5	(0.1, 0.0)	0.587785	0.587785	0.587785
	(0.1, 0.5)	0.054542	0.050862	0.049940
	(0.4, 0.4)	0.073563	0.069655	0.068680
	(0.7, 0.7)	-0.180736	-0.173284	-0.171411
	(1.0, 1.0)	0.000000	0.000000	0.000000
0.1	(0.1, 0.0)	0.587785	0.587785	0.587785
	(0.1, 0.5)	-0.088222	-0.082576	-0.081274
	(0.4, 0.4)	-0.044072	-0.040841	-0.040085
	(0.7, 0.7)	-0.047977	-0.049756	-0.050104
	(1.0, 1.0)	0.000000	0.000000	0.000000

Tablo 4.14: Problem 2' nin $h = 0.1$, v ve k' nin farklı değerleri için $t = 0.05$ zamanında ASFY ile elde edilen nümerik sonuçları

v	(x, y)	Nümerik Çözüm		
		$k = 0.001$	$k = 0.0001$	$k = 0.00001$
1	(0.1, 0.0)	0.587785	0.587785	0.587785
	(0.1, 0.5)	0.020568	0.018453	0.018240
	(0.4, 0.4)	0.035557	0.033595	0.033398
	(0.7, 0.7)	-0.126556	-0.124097	-0.123853
	(1.0, 1.0)	0.000000	0.000000	0.000000
0.5	(0.1, 0.0)	0.587785	0.587785	0.587785
	(0.1, 0.5)	-0.079055	-0.081788	-0.082060
	(0.4, 0.4)	-0.053893	-0.056008	-0.056218
	(0.7, 0.7)	-0.018735	-0.017126	-0.016966
	(1.0, 1.0)	0.000000	0.000000	0.000000
0.1	(0.1, 0.0)	0.587785	0.587785	0.587785
	(0.1, 0.5)	-0.460303	-0.460197	-0.460187
	(0.4, 0.4)	-0.305697	-0.306287	-0.306346
	(0.7, 0.7)	0.224404	0.224281	0.224269
	(1.0, 1.0)	0.000000	0.000000	0.000000

Problem 2' nin (4.2.1) şeması kullanılarak elde edilen nümerik çözümleri farklı h konum adımı ve k zaman adımları için elde edildi. Elde edilen nümerik sonuçlar Tablo 4.15 ve Tablo 4.16' da sunuldu.

Tablo 4.15' te $k = 0.001$, h' nin ve v' nin farklı değerleri için $t = 0.25$ zamanında Problem 2' nin KSFY ile elde edilen nümerik sonuçları verildi. Tablodan, h' nin farklı değerlerinde elde edilen nümerik sonuçlar kendi içinde uyum içindedir.

Tablo 4.16' da $h = 0.1$, v ve k' nin farklı değerleri için $t = 0.05$ zamanında Problem 2' nin KSFY ile elde edilen nümerik sonuçları verildi. Tablodan görüleceği üzere k' nin farklı değerlerinde elde edilen nümerik sonuçlar birbirleriyle uyumludur.

Tablo 4.15: Problem 2' nin $k = 0.001$, h ' nin ve v ' nin farklı değerleri için $t = 0.25$ zamanında KSFY ile elde edilen nümerik sonuçları

v	(x, y)	Nümerik Çözüm		
		$h = 0.1$	$h = 0.05$	$h = 0.025$
1	(0.1, 0.0)	0.587785	0.587785	0.587785
	(0.1, 0.5)	0.055649	0.051784	0.050818
	(0.4, 0.4)	0.070432	0.066308	0.065279
	(0.7, 0.7)	-0.173927	-0.166189	-0.164240
	(1.0, 1.0)	0.000000	0.000000	0.000000
0.5	(0.1, 0.0)	0.587785	0.587785	0.587785
	(0.1, 0.5)	0.054461	0.050789	0.049868
	(0.4, 0.4)	0.073472	0.069574	0.068600
	(0.7, 0.7)	-0.180611	-0.173173	-0.171301
	(1.0, 1.0)	0.000000	0.000000	0.000000
0.1	(0.1, 0.0)	0.587785	0.587785	0.587785
	(0.1, 0.5)	-0.088984	-0.083309	-0.081999
	(0.4, 0.4)	-0.044540	-0.041295	-0.040535
	(0.7, 0.7)	-0.047444	-0.049245	-0.049596
	(1.0, 1.0)	0.000000	0.000000	0.000000

Tablo 4.16: Problem 2' nin $h = 0.1$, v ve k' nin farklı değerleri için $t = 0.05$ zamanında KSFY ile elde edilen nümerik sonuçları

v	(x, y)	Nümerik Çözüm		
		$k = 0.001$	$k = 0.0001$	$k = 0.00001$
1	(0.1, 0.0)	0.587785	0.587785	0.587785
	(0.1, 0.5)	0.015827	0.017979	0.018192
	(0.4, 0.4)	0.031140	0.033153	0.033355
	(0.7, 0.7)	-0.121060	-0.123547	-0.123802
	(1.0, 1.0)	0.000000	0.000000	0.000000
0.5	(0.1, 0.0)	0.587785	0.587785	0.587785
	(0.1, 0.5)	-0.085170	-0.082400	-0.082132
	(0.4, 0.4)	-0.058584	-0.056478	-0.056274
	(0.7, 0.7)	-0.015079	-0.016760	-0.016925
	(1.0, 1.0)	0.000000	0.000000	0.000000
0.1	(0.1, 0.0)	0.587785	0.587785	0.587785
	(0.1, 0.5)	-0.460333	-0.460207	-0.460249
	(0.4, 0.4)	-0.306790	-0.306400	-0.306394
	(0.7, 0.7)	0.224279	0.224272	0.224299
	(1.0, 1.0)	0.000000	0.000000	0.000000

Problem 2' nin (4.3.1) ile verilen nümerik çözümleri farklı h konum adımı ve k zaman adımları için elde edildi. Elde edilen nümerik sonuçlar Tablo 4.17 ve Tablo 4.18' de sunuldu.

Tablo 4.17' de $k = 0.001$, h' nin ve v' nin farklı değerleri için $t = 0.25$ zamanında Problem 2' nin CNSFY ile elde edilen nümerik sonuçları verildi. Tablodan h konum adımının farklı değerlerinde elde edilen nümerik sonuçların uyumlu olduğu görülmektedir.

Tablo 4.18' de $h = 0.1$, v ve k' nin farklı değerleri için $t = 0.05$ zamanında Problem 2' nin CNSFY ile elde edilen nümerik sonuçları verildi. Tablodan, k' nin değişen değerleri için nümerik sonuçlar birbiriyle uyum içerisindedir.

Tablo 4.17: Problem 2' nin $k = 0.001$, h' nin ve v' nin farklı değerleri için $t = 0.25$ zamanında CNSFY ile elde edilen nümerik sonuçları

v	(x, y)	Nümerik Çözüm		
		$h = 0.1$	$h = 0.05$	$h = 0.025$
1	(0.1, 0.0)	0.587785	0.587785	0.587785
	(0.1, 0.5)	0.055690	0.051791	0.050820
	(0.4, 0.4)	0.069686	0.066114	0.065230
	(0.7, 0.7)	-0.172430	-0.165800	-0.164142
	(1.0, 1.0)	0.000000	0.000000	0.000000
0.5	(0.1, 0.0)	0.587785	0.587785	0.587785
	(0.1, 0.5)	0.054558	0.050854	0.049933
	(0.4, 0.4)	0.071970	0.069229	0.068565
	(0.7, 0.7)	-0.177576	-0.172450	-0.171190
	(1.0, 1.0)	0.000000	0.000000	0.000000
0.1	(0.1, 0.0)	0.587785	0.587785	0.587785
	(0.1, 0.5)	-0.086090	-0.082261	-0.081247
	(0.4, 0.4)	-0.047197	-0.041864	-0.040376
	(0.7, 0.7)	-0.039064	-0.047008	-0.049323
	(1.0, 1.0)	0.000000	0.000000	0.000000

Tablo 4.18: Problem 2' nin $h = 0.1$, v ve k ' nin farklı değerleri için $t = 0.05$ zamanında CNSFY ile elde edilen nümerik sonuçları

v	(x, y)	Nümerik Çözüm		
		$k = 0.001$	$k = 0.0001$	$k = 0.00001$
1	(0.1, 0.0)	0.587785	0.587785	0.587785
	(0.1, 0.5)	0.018254	0.018232	0.018232
	(0.4, 0.4)	0.032931	0.032928	0.032930
	(0.7, 0.7)	-0.122714	-0.122724	-0.122730
	(1.0, 1.0)	0.000000	0.000000	0.000000
0.5	(0.1, 0.0)	0.587785	0.587785	0.587785
	(0.1, 0.5)	-0.081671	-0.081663	-0.081639
	(0.4, 0.4)	-0.056559	-0.056568	-0.056551
	(0.7, 0.7)	-0.015932	-0.015970	-0.015983
	(1.0, 1.0)	0.000000	0.000000	0.000000
0.1	(0.1, 0.0)	0.587785	0.587785	0.587785
	(0.1, 0.5)	-0.446913	-0.446788	-0.446691
	(0.4, 0.4)	-0.309107	-0.309176	-0.309129
	(0.7, 0.7)	0.219650	0.219598	0.219551
	(1.0, 1.0)	0.000000	0.000000	0.000000

Bu kısımda Problem 1' e Açık, Kapalı, Crank-Nicolson sonlu fark yöntemlerinin uygulanması ile elde edilen sonuçların karşılaştırılması Tablo 4.19 ve Tablo 4.20' de verildi.

Tablo 4.19' da $v = 1$, $t = 0.25$, $k = 0.001$ ve farklı h değerlerinde L_2 ve L_∞ hata normları karşılaştırılması verildi. Tablodan Problem 1' in farklı h değerleri için en küçük hata normlarının Crank-Nicolson sonlu fark yöntemi ile elde edildiği görülmektedir.

Tablo 4.20' de $h = 0.05$, $t = 0.25$ ve farklı k değerlerinde L_2 ve L_∞ hata normları karşılaştırılması verildi. Tablodan görüleceği gibi Problem 1' in farklı k değerleri için en küçük hata normları Crank-Nicolson sonlu fark yöntemi ile elde edildi.

Tablo 4.19: Problem 1' in $v = 1$, $t = 0.25$, $k = 0.001$ ve farklı h değerlerinde ASFY, KSFY ve CNSFY ile elde edilen L_2 ve L_∞ hata normlarının karşılaştırılması (*' da $k = 0.0001$ alındı)

h	<i>ASFY</i>		<i>KSFY</i>		<i>CNSFY</i>	
	L_2	L_∞	L_2	L_∞	L_2	L_∞
0.1	1.316×10^{-5}	2.36×10^{-6}	2.995×10^{-5}	5.36×10^{-6}	1.842×10^{-5}	3.29×10^{-6}
0.05	(*) 5.92×10^{-6}	(*) 5.3×10^{-7}	5.579×10^{-5}	4.98×10^{-6}	3.341×10^{-5}	2.99×10^{-6}
0.025	(*) 3.67×10^{-6}	(*) $1,7 \times 10^{-7}$	1.9768×10^{-4}	8.84×10^{-6}	1.774×10^{-4}	7.93×10^{-6}

Tablo 4.20: Problem 1' in $v = 1$, $h = 0.05$, $t = 0.25$ ve farklı k değerlerinde ASFY, KSFY ve CNSFY ile elde edilen L_2 ve L_∞ hata normlarının karşılaştırılması

k	<i>ASFY</i> ($h = 0.1$)		k	<i>KSFY</i>		<i>CNSFY</i>	
	L_2	L_∞		L_2	L_∞	L_2	L_∞
0.001	1.136×10^{-5}	2.36×10^{-6}	0.01	2.0819×10^{-4}	1.858×10^{-5}	1.3421×10^{-4}	1.201×10^{-5}
0.0005	1.199×10^{-5}	2.15×10^{-6}	0.005	1.1374×10^{-4}	1.014×10^{-5}	7.524×10^{-5}	6.72×10^{-6}
0.0001	1.107×10^{-5}	1.99×10^{-6}	0.001	5.579×10^{-5}	4.98×10^{-6}	3.341×10^{-5}	2.99×10^{-6}



5. 2-BOYUTLU BURGERS DENKLEMİNİN FARKLI LİNEERLEŞTİRME TEKNİKLERİ İLE SONLU FARK ÇÖZÜMLERİ

Tezin bu bölümünde

$$U_t + UU_x + UU_y = v(U_{xx} + U_{yy}) \quad (5.1)$$

2-boyutlu Burgers denklemindeki UU_x ve UU_y lineer olmayan terimleri için farklı lineerleştirme teknikleri kullanıldı ve farklı başlangıç ve sınır şartlarına sahip iki model problem için nümerik çözümler elde edildi.

5.1 Sonlu Fark Yaklaşımı 1 (SFY1)

(5.1) ile verilen 2-boyutlu Burgers denkleminde U_t yerine (2.1.7) ile verilen ileri fark yaklaşımı, UU_x ve UU_y lineer olmayan terimleri için ise sırasıyla

$$UU_x \cong U_{i,j}^{n+1} \left(\frac{U_{i+1,j}^n - U_{i-1,j}^n}{2h_x} \right) + U_{i,j}^n \left(\frac{U_{i+1,j}^{n+1} - U_{i-1,j}^{n+1}}{2h_x} \right) - U_{i,j}^n \left(\frac{U_{i+1,j}^n - U_{i-1,j}^n}{2h_x} \right)$$
$$UU_y \cong U_{i,j}^{n+1} \left(\frac{U_{i,j+1}^n - U_{i,j-1}^n}{2h_y} \right) + U_{i,j}^n \left(\frac{U_{i,j+1}^{n+1} - U_{i,j-1}^{n+1}}{2h_y} \right) - U_{i,j}^n \left(\frac{U_{i,j+1}^n - U_{i,j-1}^n}{2h_y} \right)$$

sonlu fark yaklaşımları[40], U_{xx} ve U_{yy} türevleri için de sırasıyla

$$U_{xx} \cong \frac{U_{i-1,j}^n - 2U_{i,j}^n + U_{i+1,j}^n}{h_x^2}$$
$$U_{yy} \cong \frac{U_{i,j-1}^n - 2U_{i,j}^n + U_{i,j+1}^n}{h_y^2}$$

merkezi açık sonlu fark yaklaşımları yazılır ve gerekli düzenlemeler yapılırsa

$$\begin{aligned}\alpha_1 &= -\frac{U_{i,j}^n}{2h_x}, & \alpha_2 &= \frac{U_{i,j}^n}{2h_x}, & \alpha_3 &= \frac{1}{k} + \frac{U_{i+1,j}^n}{2h_x} - \frac{U_{i-1,j}^n}{2h_x} + \frac{U_{i,j+1}^n}{2h_y} - \frac{U_{i,j-1}^n}{2h_y} \\ \alpha_4 &= -\frac{U_{i,j}^n}{2h_y}, & \alpha_5 &= \frac{U_{i,j}^n}{2h_y}, & \alpha_6 &= -\frac{U_{i,j}^n}{2h_x} + \frac{v}{h_x^2}, & \alpha_7 &= \frac{U_{i,j}^n}{2h_x} + \frac{v}{h_x^2} \\ \alpha_8 &= \frac{1}{k} - \frac{2v}{h_x^2} - \frac{2v}{h_y^2}, & \alpha_9 &= -\frac{U_{i,j}^n}{2h_y} + \frac{v}{h_y^2}, & \alpha_{10} &= \frac{U_{i,j}^n}{2h_y} + \frac{v}{h_y^2}\end{aligned}$$

ve $i, j = 1(1)M - 1$ olmak üzere

$$\begin{aligned}\alpha_1 U_{i-1,j}^{n+1} + \alpha_2 U_{i+1,j}^{n+1} + \alpha_3 U_{i,j}^{n+1} + \alpha_4 U_{i,j-1}^{n+1} + \alpha_5 U_{i,j+1}^{n+1} \\ = \alpha_6 U_{i-1,j}^n + \alpha_7 U_{i+1,j}^n + \alpha_8 U_{i,j}^n + \alpha_9 U_{i,j-1}^n + \alpha_{10} U_{i,j+1}^n\end{aligned}\quad (5.1.1)$$

elde edilir.

Nümerik Sonuçlar

Problem 1 ve Problem 2' nin (5.1.1) ile elde edilen nümerik sonuçları Tablo 5.1-5.6' da verildi.

Problem 1' in $t = 0.25$ zamanında $v = 1$, $k = 0.0001$ ve h' nin farklı değerleri için elde edilen nümerik sonuçları ile L_2 ve L_∞ hata normları Tablo 5.1' de sunuldu. Tablodan h' nin küçülen değerlerinde L_∞ hata normunun da kayda değer ölçüde azaldığı, L_2 hata normunun ise $h = 0.1'$ den $h = 0.05'$ e küçüldüğünde azaldığı ancak $h = 0.025$ için L_2 hata normunun az miktarda arttığı görülmektedir.

Tablo 5.2' de ise Problem 1' in $t = 0.25$, $v = 1$ ve $h = 0.1$ için k' nin farklı değerlerinde elde edilen nümerik ve tam sonuçları ile L_2 ve L_∞ hata normları verildi. Tablodan k zaman adımı küçüldükçe nümerik sonuçların tam sonuçlara yakın olduğu ancak hata normlarında büyük ölçüde değişim olmadığı görülmektedir.

Problem 1' in $t = 0.25$ zamanında $h = 0.01$, $k = 0.01$ için farklı v ve M bölüntü değerlerinde elde edilen L_2 ve L_∞ hata normlarının, Ref. [24]' de

lineerleştirilmiş Crank-Nicolson şeması kullanılarak elde edilen hata normlarıyla karşılaştırılması Tablo 5.3' te verildi. Tablo 5.3' te v değerleri düştükçe M ' nin artan değerlerinde L_2 ve L_∞ hata normlarında iyileşme olduğu görülmektedir. Tablodan SFY1 yaklaşımı kullanılarak elde edilen hata normlarının Ref. [24]' de verilenlerden daha iyi olduğu açıkça görülmektedir. Yine tablodan $v = 0.1$ ve farklı M bölüntü sayıları için de hata normlarını karşılaştırdığımızda elde edilen sonuçların Ref. [24]' de verilenlerden daha küçük olduğu görülür. Ancak $v = 0.05$ ve farklı M bölüntü sayıları için sonuçları karşılaştırdığımızda hata normlarının Ref. [24]' de verilenlerle uyumlu olduğu görülmektedir.

Problem 2' nin tam çözümü mevcut olmadığından $v = 0.01$, $k = 0.0125$, $t = 0.125$ ve farklı M bölüntü sayılarında sadece nümerik sonuçlarının Ref. [24]' de verilenler ile karşılaştırılması Tablo 5.4' te verildi. Tablodan $M = 32$ ve $M = 48$ için elde edilen nümerik sonuçların Ref. [24]' de verilen sonuçlarla uyumlu olduğu görülmektedir.

Tablo 5.5 ve Tablo 5.6' da sırasıyla farklı h ve k değerlerinde Problem 2' nin elde edilen nümerik sonuçları sunuldu. Problem 2' nin Tablo 5.5' te $k = 0.001$, h ' nin ve v ' nin farklı değerleri için $t = 0.25$ zamanında SFY1 ile elde edilen nümerik çözümleri verildi. Ayrıca Tablo 5.6' da $h = 0.1$, v ve k ' nin farklı değerleri için $t = 0.25$ zamanında SFY1 ile elde edilen nümerik çözümleri verildi.

Tablo 5.1: Problem 1' in $v = 1$, $k = 0.0001$ ve h' nin farklı değerleri için $t = 0.25$ zamanında SFY1 ile elde edilen nümerik ve tam sonuçları

(x, y)	Nümerik Çözüm			Tam Çözüm
	$h = 0.1$	$h = 0.05$	$h = 0.025$	
(0.0, 0.0)	0.531209	0.531209	0.531209	0.531209
(0.0, 0.5)	0.468791	0.468791	0.468791	0.468791
(0.0, 1.0)	0.407333	0.407333	0.407333	0.407333
(0.1, 0.0)	0.518741	0.518741	0.518741	0.518741
(0.1, 0.2)	0.493751	0.493751	0.493751	0.493750
(0.2, 0.2)	0.481258	0.481259	0.481259	0.481259
(0.2, 0.5)	0.443985	0.443986	0.443986	0.443986
(0.3, 0.1)	0.481258	0.481259	0.481259	0.481259
(0.3, 0.5)	0.431679	0.431680	0.431680	0.431680
(0.3, 0.6)	0.419456	0.419458	0.419458	0.419458
(0.4, 0.5)	0.419456	0.419458	0.419458	0.419458
(0.5, 0.6)	0.395319	0.395321	0.395321	0.395321
(0.6, 0.3)	0.419456	0.419458	0.419458	0.419458
(0.7, 0.4)	0.395319	0.395321	0.395321	0.395321
(0.8, 0.7)	0.348644	0.348645	0.348645	0.348645
(0.9, 0.2)	0.395320	0.395321	0.395321	0.395321
(1.0, 1.0)	0.294215	0.294215	0.294215	0.294215
L_2	8.86×10^{-6}	4.16×10^{-6}	5.1×10^{-6}	
L_∞	1.98×10^{-6}	8.50×10^{-7}	6.9×10^{-7}	

Tablo 5.2: Problem 1' in $v = 1$, $h = 0.1$ ve $t = 0.25$ için farklı k değerlerinde SFY1 ile elde edilen nümerik ve tam sonuçları

(x, y)	Nümerik Çözüm			Tam Çözüm
	$k = 0.001$	$k = 0.0005$	$k = 0.0001$	
(0.0, 0.0)	0.531209	0.531209	0.531209	0.531209
(0.0, 0.5)	0.468791	0.468791	0.468791	0.468791
(0.0, 1.0)	0.407333	0.407333	0.407333	0.407333
(0.1, 0.0)	0.518741	0.518741	0.518741	0.518741
(0.1, 0.2)	0.493750	0.493750	0.493751	0.493750
(0.2, 0.2)	0.481259	0.481258	0.481258	0.481259
(0.2, 0.5)	0.443986	0.443986	0.443985	0.443986
(0.3, 0.1)	0.481259	0.481258	0.481258	0.481259
(0.3, 0.5)	0.431680	0.431679	0.431679	0.431680
(0.3, 0.6)	0.419458	0.419457	0.419456	0.419458
(0.4, 0.5)	0.419458	0.419457	0.419456	0.419458
(0.5, 0.6)	0.395321	0.395320	0.395319	0.395321
(0.6, 0.3)	0.419458	0.419457	0.419456	0.419458
(0.7, 0.4)	0.395321	0.395320	0.395319	0.395321
(0.8, 0.7)	0.348645	0.348645	0.348644	0.348645
(0.9, 0.2)	0.395321	0.395321	0.395320	0.395321
(1.0, 1.0)	0.294215	0.294215	0.294215	0.294215
L_2	2.09×10^{-6}	4.35×10^{-6}	8.86×10^{-6}	
L_∞	3.8×10^{-7}	7.7×10^{-7}	1.98×10^{-6}	

Tablo 5.3: Problem 1' in $k = 0.01$, $t = 0.25$ ve v ' nin farklı değerlerinde SFY1 ile elde edilen L_2 ve L_∞ değerlerinin Ref. [24] ile karşılaştırılması

v	M	L_2	$L_2[24]$	L_∞	$L_\infty[24]$
1.0	8×8	3.19×10^{-6}	5.311×10^{-5}	7.1×10^{-7}	1.189×10^{-5}
0.1	8×8	4.753×10^{-3}	5.811×10^{-3}	2.260×10^{-3}	1.751×10^{-3}
	32×32	3.178×10^{-4}	9.465×10^{-3}	4.284×10^{-5}	1.722×10^{-3}
	40×40	1.031×10^{-3}	1.224×10^{-2}	1.124×10^{-4}	1.242×10^{-3}
0.05	8×8	2.354×10^{-2}	2.255×10^{-2}	2.086×10^{-2}	1.016×10^{-2}
	24×24	6.267×10^{-3}	2.044×10^{-2}	1.688×10^{-3}	6.011×10^{-3}
	32×32	2.788×10^{-3}	2.735×10^{-2}	5.717×10^{-4}	6.663×10^{-3}

Tablo 5.4: Problem 2' nin $v = 0.01$, $k = 0.0125$ ve $t = 0.125$ zamanında farklı M bölüntü değerlerinde SFY1 ile elde edilen nümerik sonuçlarının Ref. [24] ile karşılaştırılması

(x, y)	$M = 32$		$M = 48$	
	Nümerik	Nümerik[24]	Nümerik	Nümerik[24]
$(1/8, 1/8)$	0.390860	0.391154	0.388149	0.387991
$(3/8, 1/8)$	0.878054	0.894478	0.875226	0.893949
$(3/8, 3/8)$	-0.381189	-0.380232	-0.380547	-0.379037
$(4/8, 3/8)$	-0.005095	-0.005224	-0.005098	-0.005715
$(4/8, 4/8)$	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000
$(5/8, 4/8)$	0.405000	0.394053	0.404635	0.392413
$(5/8, 5/8)$	0.381189	0.380232	0.380547	0.379037
$(7/8, 5/8)$	0.857566	0.891940	0.852728	0.889148
$(7/8, 7/8)$	-0.319242	-0.391154	-0.330303	-0.387991
$(1/8, 7/8)$	0.270671	0.262426	0.270522	0.261139

Tablo 5.5: Problem 2' nin $k = 0.001$, h' nin ve v' nin farklı değerleri için $t = 0.25$ zamanında SFY1 ile elde edilen nümerik sonuçları

v	(x, y)	Nümerik Çözüm		
		$h = 0.1$	$h = 0.05$	$h = 0.025$
1	(0.1, 0.0)	0.587785	0.587785	0.587785
	(0.1, 0.5)	0.055650	0.051785	0.050819
	(0.4, 0.4)	0.070433	0.066309	0.065280
	(0.7, 0.7)	-0.173929	-0.166190	-0.164242
	(1.0, 1.0)	0.000000	0.000000	0.000000
				$k = 0.0001$
0.5	(0.1, 0.0)	0.587785	0.587785	0.587785
	(0.1, 0.5)	0.054605	0.050919	0.049940
	(0.4, 0.4)	0.073634	0.069718	0.068681
	(0.7, 0.7)	-0.180831	-0.173370	-0.171411
	(1.0, 1.0)	0.000000	0.000000	0.000000
0.1	(0.1, 0.0)	0.587785	0.587785	0.587785
	(0.1, 0.5)	-0.087482	-0.081890	-0.080602
	(0.4, 0.4)	-0.043674	-0.040448	-0.039693
	(0.7, 0.7)	-0.048538	-0.050310	-0.050659
	(1.0, 1.0)	0.000000	0.000000	0.000000

Tablo 5.6: Problem 2' nin $h = 0.1$, v ve k ' nin farklı değerleri için $t = 0.05$ zamanında SFY1 ile elde edilen nümerik sonuçları

v	(x, y)	Nümerik Çözüm		
		$k = 0.001$	$k = 0.0001$	$k = 0.00001$
1	(0.1, 0.0)	0.587785	0.587785	0.587785
	(0.1, 0.5)	0.020567	0.018453	0.018240
	(0.4, 0.4)	0.035614	0.033601	0.033399
	(0.7, 0.7)	-0.126640	-0.124105	-0.123853
	(1.0, 1.0)	0.000000	0.000000	0.000000
0.5	(0.1, 0.0)	0.587785	0.587785	0.587785
	(0.1, 0.5)	-0.078894	-0.081771	-0.082058
	(0.4, 0.4)	-0.053857	-0.056005	-0.056218
	(0.7, 0.7)	-0.018940	-0.017146	-0.016968
	(1.0, 1.0)	0.000000	0.000000	0.000000
0.1	(0.1, 0.0)	0.587785	0.587785	0.587785
	(0.1, 0.5)	-0.459300	-0.460098	-0.460178
	(0.4, 0.4)	-0.305927	-0.306310	-0.306348
	(0.7, 0.7)	0.223926	0.224234	0.224265
	(1.0, 1.0)	0.000000	0.000000	0.000000

5.2 Sonlu Fark Yaklaşımı 2 (SFY2)

(5.1) ile verilen 2-boyutlu Burgers denkleminde U_t yerine (2.1.7) ile verilen ileri fark yaklaşımı, UU_x ve UU_y non-lineer terimleri yerine

$$UU_x \cong U_{i,j}^{n+1} \left(\frac{U_{i+1,j}^n - U_{i-1,j}^n}{2h_x} \right) + U_{i,j}^n \left(\frac{U_{i+1,j}^{n+1} - U_{i-1,j}^{n+1}}{2h_x} \right) - U_{i,j}^n \left(\frac{U_{i+1,j}^n - U_{i-1,j}^n}{2h_x} \right)$$

$$UU_y \cong U_{i,j}^{n+1} \left(\frac{U_{i,j+1}^n - U_{i,j-1}^n}{2h_y} \right) + U_{i,j}^n \left(\frac{U_{i,j+1}^{n+1} - U_{i,j-1}^{n+1}}{2h_y} \right) - U_{i,j}^n \left(\frac{U_{i,j+1}^n - U_{i,j-1}^n}{2h_y} \right)$$

sonlu fark yaklaşımları[40] ile U_{xx} ve U_{yy} türevlerinin yerine

$$U_{xx} \cong \frac{U_{i-1,j}^{n+1} - 2U_{i,j}^{n+1} + U_{i+1,j}^{n+1}}{h_x^2}$$

$$U_{yy} \cong \frac{U_{i,j-1}^{n+1} - 2U_{i,j}^{n+1} + U_{i,j+1}^{n+1}}{h_y^2}$$

kapalı sonlu fark yaklaşımları yazılır ve gerekli düzenlemeler yapılırsa

$$\alpha_1 = -\frac{U_{i,j}^n}{2h_x} - \frac{v}{h_x^2}, \quad \alpha_2 = \frac{U_{i,j}^n}{2h_x} - \frac{v}{h_x^2}$$

$$\alpha_3 = \frac{1}{k} + \frac{2v}{h_x^2} + \frac{2v}{h_y^2} + \frac{U_{i+1,j}^n - U_{i-1,j}^n}{2h_x} + \frac{U_{i,j+1}^n - U_{i,j-1}^n}{2h_y}$$

$$\alpha_4 = -\frac{U_{i,j}^n}{2h_y} - \frac{v}{h_y^2}, \quad \alpha_5 = \frac{U_{i,j}^n}{2h_y} - \frac{v}{h_y^2}, \quad \alpha_6 = -\frac{U_{i,j}^n}{2h_x}$$

$$\alpha_7 = \frac{U_{i,j}^n}{2h_x}, \quad \alpha_8 = \frac{1}{k}, \quad \alpha_9 = -\frac{U_{i,j}^n}{2h_y}, \quad \alpha_{10} = \frac{U_{i,j}^n}{2h_y}$$

ve $i, j = 1(1)M - 1$ olmak üzere

$$\alpha_1 U_{i-1,j}^{n+1} + \alpha_2 U_{i+1,j}^{n+1} + \alpha_3 U_{i,j}^{n+1} + \alpha_4 U_{i,j-1}^{n+1} + \alpha_5 U_{i,j+1}^{n+1}$$

$$= \alpha_6 U_{i-1,j}^n + \alpha_7 U_{i+1,j}^n + \alpha_8 U_{i,j}^n + \alpha_9 U_{i,j-1}^n + \alpha_{10} U_{i,j+1}^n \quad (5.2.1)$$

bulunur.

Nümerik Sonuçlar

Problem 1 ve Problem 2' nin (5.2.1) ile elde edilen nümerik sonuçları Tablo 5.7-5.13' te verildi.

Problem 1' in $t = 0.25$ zamanında $v = 1$, $k = 0.001$ ve h' nin farklı değerleri için elde edilen nümerik sonuçları ile L_2 ve L_∞ hata normları Tablo 5.7' de sunuldu. Tablodan $h = 0.1'$ den $h = 0.05'$ e küçüldüğünde L_2 ve L_∞ hata normlarının giderek azaldığı ancak $h = 0.025$ seçiminde hemen hemen aynı kaldığı görülmektedir.

Tablo 5.8' de ise Problem 1' in $t = 0.25$, $v = 1$ ve $h = 0.05$ için k' nin farklı değerlerinde elde edilen nümerik ve tam çözümleri ile L_2 ve L_∞ hata normları verildi. Tablodan k zaman adımı küçüldükçe nümerik çözümlerin tam çözüme yakın olduğu, ayrıca L_2 ve L_∞ hata normlarının da küçüldüğü görülmektedir.

Problem 1' in $t = 0.25$ zamanında, $k = 0.01$ için farklı v ve M bölüntü değerlerinde elde edilen L_2 ve L_∞ hata normlarının Ref. [24]' de lineerleştirilmiş Crank-Nicolson şeması kullanılarak elde edilen hata normlarıyla karşılaştırılması Tablo 5.9' da verildi. Tablodan $v = 1$ ve farklı M bölüntü sayıları için, SFY2 yaklaşımı kullanılarak elde edilen hata normlarının Ref. [24]' de verilenlerden daha küçük olduğu açıkça görülmektedir. Yine tablodan $v = 0.1$ ve $v = 0.05$ için farklı M bölüntü sayılarında elde edilen hata normlarını karşılaştırdığımızda sonuçların Ref. [24]' de verilenlerle uyum içinde olduğu görüldü.

Tablo 5.10' da Problem 1' in, $v = 1$, $k = 0.01$ ve $M = 16$ olmak üzere farklı t zamanında elde edilen nümerik ve tam çözümler ile L_2 ve L_∞ hata normları verilmiştir. Tablodan, $t = 0.1$, $t = 1$, $t = 3$ ve $t = 9$ için elde edilen nümerik sonuçlar ile tam sonuçların birbirine çok yakın olduğu açıktır. L_2 ve L_∞ hata normlarının ise oldukça

küçük olduğu görüldü.

Problem 2' nin tam çözümü mevcut olmadığından $v = 0.01$, $k = 0.0125$, $t = 0.125$ ve farklı M bölüntü sayılarında sadece nümerik sonuçların Ref. [24]' de verilenler ile karşılaştırılması Tablo 5.11' de verildi. Tablodan $M = 32$ ve $M = 48$ için elde edilen nümerik sonuçların birbiriyle uyumlu olduğu görülmektedir.

Tablo 5.12 ve Tablo 5.13' te sırasıyla farklı h ve k değerlerinde Problem 2' nin elde edilen nümerik sonuçları sunuldu. Problem 2' nin Tablo 5.12' de $k = 0.001$, h' nin ve v' nin farklı değerleri için $t = 0.25$ zamanında SFY2 ile elde edilen nümerik çözümleri verildi. Problem 2' nin Tablo 5.13' te $h = 0.1$, v ve k' nin farklı değerleri için $t = 0.05$ zamanında SFY2 ile elde edilen nümerik çözümleri verildi.

Tablo 5.7: Problem 1' in $v = 1$, $k = 0.001$ ve h' nın farklı değerleri için $t = 0.25$ zamanında SFY2 ile elde edilen nümerik ve tam sonuçları

(x, y)	Nümerik Çözüm			Tam Çözüm
	$h = 0.1$	$h = 0.05$	$h = 0.025$	
(0.0, 0.0)	0.531209	0.531209	0.531209	0.531209
(0.0, 0.5)	0.468790	0.468790	0.468790	0.468790
(0.0, 1.0)	0.407333	0.407333	0.407333	0.407333
(0.1, 0.0)	0.518741	0.518741	0.518741	0.518741
(0.1, 0.2)	0.493749	0.493750	0.493749	0.493750
(0.2, 0.2)	0.481258	0.481258	0.481258	0.481258
(0.2, 0.5)	0.443985	0.443985	0.443986	0.443986
(0.3, 0.1)	0.481258	0.481258	0.481258	0.481258
(0.3, 0.5)	0.431678	0.431679	0.431680	0.431680
(0.3, 0.6)	0.419456	0.419457	0.419457	0.419457
(0.4, 0.5)	0.419456	0.419457	0.419457	0.419457
(0.5, 0.6)	0.395319	0.395320	0.395321	0.395320
(0.6, 0.3)	0.419456	0.419457	0.419457	0.419457
(0.7, 0.4)	0.395319	0.395320	0.395321	0.395320
(0.8, 0.7)	0.348644	0.348645	0.348645	0.348645
(0.9, 0.2)	0.395320	0.395320	0.395321	0.395320
(1.0, 1.0)	0.294214	0.294214	0.294214	0.294214
L_2	8.35×10^{-6}	2.15×10^{-6}	6.33×10^{-6}	
L_∞	1.5×10^{-6}	2.9×10^{-7}	4.8×10^{-7}	

Tablo 5.8: Problem 1' in $v = 1$, $h = 0.05$ ve farklı k zaman adımları için $t = 0.25$ zamanında SFY2 ile elde edilen nümerik ve tam sonuçları

(x, y)	Nümerik Çözüm			Tam Çözüm
	$k = 0.01$	$k = 0.005$	$k = 0.001$	
(0.0, 0.0)	0.531209	0.531209	0.531209	0.531209
(0.0, 0.5)	0.468790	0.468790	0.468790	0.468790
(0.0, 1.0)	0.407333	0.407333	0.407333	0.407333
(0.1, 0.0)	0.518741	0.518741	0.518741	0.518741
(0.1, 0.2)	0.493750	0.493750	0.493750	0.493750
(0.2, 0.2)	0.481259	0.481259	0.481258	0.481258
(0.2, 0.5)	0.443987	0.443986	0.443985	0.443986
(0.3, 0.1)	0.481259	0.481259	0.481258	0.481258
(0.3, 0.5)	0.431682	0.431681	0.431679	0.431680
(0.3, 0.6)	0.419460	0.419458	0.419457	0.419457
(0.4, 0.5)	0.419460	0.419459	0.419457	0.419457
(0.5, 0.6)	0.395324	0.395322	0.395320	0.395320
(0.6, 0.3)	0.419460	0.419458	0.419457	0.419457
(0.7, 0.4)	0.395324	0.395322	0.395320	0.395320
(0.8, 0.7)	0.348648	0.348646	0.348645	0.348645
(0.9, 0.2)	0.395322	0.395321	0.395320	0.395320
(1.0, 1.0)	0.294214	0.294214	0.294214	0.294214
L_2	4.138×10^{-5}	1.807×10^{-5}	2.15×10^{-6}	
L_∞	3.91×10^{-6}	1.76×10^{-6}	2.9×10^{-7}	

Tablo 5.9: Problem 1' in $k = 0.01$, $t = 0.25$ ve v ' nin farklı değerlerinde SFY2 ile elde edilen L_2 ve L_∞ değerlerinin Ref. [24] ile karşılaştırılması

v	M	L_2	$L_2[24]$	L_∞	$L_\infty[24]$
1	8×8	6.11×10^{-6}	5.311×10^{-5}	1.64×10^{-6}	1.189×10^{-5}
	32×32	6.848×10^{-5}	1.904×10^{-4}	4.25×10^{-6}	1.065×10^{-5}
	48×48	1.117×10^{-4}	2.843×10^{-4}	4.66×10^{-6}	1.060×10^{-5}
0.1	8×8	6.062×10^{-3}	5.811×10^{-3}	1.867×10^{-3}	1.751×10^{-3}
	32×32	2.073×10^{-3}	9.465×10^{-3}	1.692×10^{-3}	1.722×10^{-3}
	40×40	2.611×10^{-2}	1.224×10^{-2}	1.718×10^{-3}	1.242×10^{-3}
0.05	8×8	2.166×10^{-2}	2.255×10^{-2}	1.776×10^{-2}	1.016×10^{-2}
	24×24	2.197×10^{-2}	2.044×10^{-2}	4.818×10^{-3}	6.011×10^{-3}
	32×32	3.885×10^{-2}	2.735×10^{-2}	5.154×10^{-3}	6.663×10^{-3}

Tablo 5.10: Problem 1' in $v = 1$, $k = 0.01$ ve $M = 16$ olmak üzere farklı t zamanında SFY2 ile elde edilen nümerik ve tam sonuçlarının karşılaştırılması

(x, y)	$t = 0.1$		$t = 1$	
	Nümerik	Tam	Nümerik	Tam
(1/8, 1/8)	0.481259	0.481259	0.592666	0.592667
(3/8, 1/8)	0.450167	0.450166	0.562176	0.562177
(3/8, 3/8)	0.419460	0.419458	0.531208	0.531209
(4/8, 3/8)	0.404322	0.404319	0.515619	0.515620
(4/8, 4/8)	0.389364	0.389361	0.500000	0.500000
(5/8, 4/8)	0.374611	0.374608	0.484380	0.484380
(5/8, 5/8)	0.360087	0.360084	0.468791	0.468791
(7/8, 5/8)	0.331814	0.331812	0.437824	0.437823
(7/8, 7/8)	0.304705	0.304703	0.407334	0.407333
(1/8, 7/8)	0.389362	0.389361	0.500000	0.500000
L_2	3.087×10^{-5}		7.92×10^{-6}	
L_∞	3.58×10^{-6}		1.13×10^{-6}	
(x, y)	$t = 3$		$t = 9$	
	Nümerik	Tam	Nümerik	Tam
(1/8, 1/8)	0.798185	0.798187	0.987568	0.987568
(3/8, 1/8)	0.777296	0.777300	0.985936	0.985936
(3/8, 3/8)	0.754908	0.754915	0.984092	0.984094
(4/8, 3/8)	0.743160	0.743168	0.983084	0.983085
(4/8, 4/8)	0.731050	0.731059	0.982012	0.982014
(5/8, 4/8)	0.718587	0.718594	0.980875	0.980876
(5/8, 5/8)	0.705777	0.705785	0.979666	0.979668
(7/8, 5/8)	0.679175	0.679179	0.977022	0.977023
(7/8, 7/8)	0.651353	0.651355	0.974042	0.974043
(1/8, 7/8)	0.731057	0.731059	0.982013	0.982014
L_2	7.301×10^{-5}		1.212×10^{-5}	
L_∞	8.23×10^{-6}		1.38×10^{-6}	

Tablo 5.11: Problem 2' nin $v = 0.01$, $k = 0.0125$ ve $t = 0.125$ zamanında SFY2 ile elde edilen nümerik sonuçlarının Ref. [24] ile karşılaştırılması

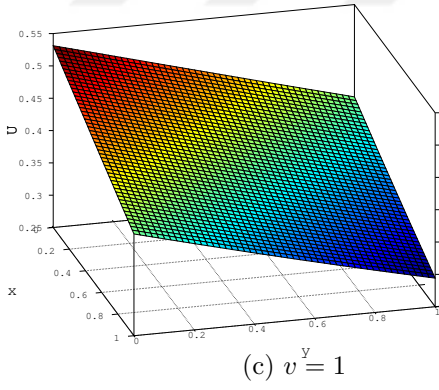
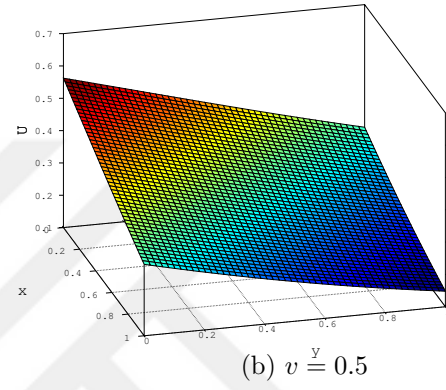
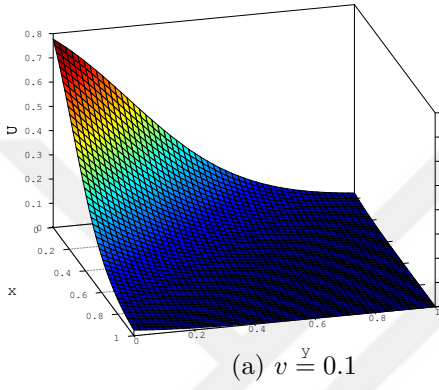
(x, y)	$M = 32$		$M = 48$	
	Nümerik	Nümerik[24]	Nümerik	Nümerik[24]
(1/8, 1/8)	0.395668	0.391154	0.393226	0.387991
(3/8, 1/8)	0.881355	0.894478	0.877808	0.893949
(3/8, 3/8)	-0.383560	-0.380232	-0.382909	-0.379037
(4/8, 3/8)	-0.005558	-0.005224	-0.005561	-0.005715
(4/8, 4/8)	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000
(5/8, 4/8)	0.407323	0.394053	0.406958	0.392413
(5/8, 5/8)	0.383561	0.380232	0.382910	0.379037
(7/8, 5/8)	0.862318	0.891940	0.856914	0.889148
(7/8, 7/8)	-0.313757	-0.391154	-0.323159	-0.387991
(1/8, 7/8)	0.270925	0.262426	0.270454	0.261139

Tablo 5.12: Problem 2' nin $k = 0.001$, h' nin ve v' nin farklı değerleri için $t = 0.25$ zamanında SFY2 ile elde edilen nümerik sonuçları

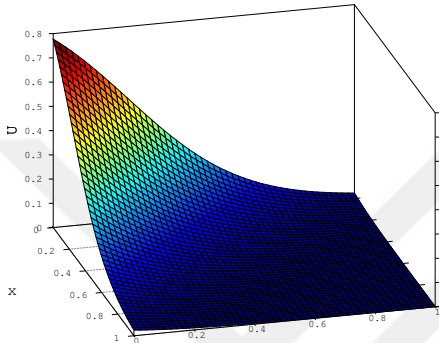
v	(x, y)	Nümerik Çözüm		
		$h = 0.1$	$h = 0.05$	$h = 0.025$
1	(0.1, 0.0)	0.587785	0.587785	0.587785
	(0.1, 0.5)	0.055649	0.051784	0.050819
	(0.4, 0.4)	0.070432	0.066309	0.065280
	(0.7, 0.7)	-0.173927	-0.166189	-0.164241
	(1.0, 1.0)	0.000000	0.000000	0.000000
0.5	(0.1, 0.0)	0.587785	0.587785	0.587785
	(0.1, 0.5)	0.054461	0.050789	0.049869
	(0.4, 0.4)	0.073477	0.069578	0.068605
	(0.7, 0.7)	-0.180619	-0.173179	-0.171309
	(1.0, 1.0)	0.000000	0.000000	0.000000
0.1	(0.1, 0.0)	0.587785	0.587785	0.587785
	(0.1, 0.5)	-0.088971	-0.083323	-0.082020
	(0.4, 0.4)	-0.044560	-0.041326	-0.040569
	(0.7, 0.7)	-0.047575	-0.049348	-0.049693
	(1.0, 1.0)	0.000000	0.000000	0.000000

Tablo 5.13: Problem 2' nin $h = 0.1$, v ve k' nin farklı değerleri için $t = 0.05$ zamanında SFY2 ile elde edilen nümerik sonuçları

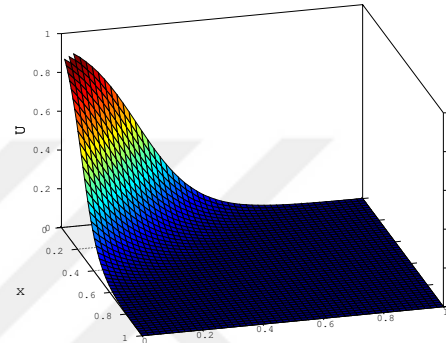
v	(x, y)	Nümerik Çözüm		
		$k = 0.001$	$k = 0.0001$	$k = 0.00001$
1	(0.1, 0.0)	0.587785	0.587785	0.587785
	(0.1, 0.5)	0.015829	0.017979	0.018192
	(0.4, 0.4)	0.031184	0.033158	0.033355
	(0.7, 0.7)	-0.121142	-0.123555	-0.123798
	(1.0, 1.0)	0.000000	0.000000	0.000000
0.5	(0.1, 0.0)	0.587785	0.587785	0.587785
	(0.1, 0.5)	-0.085089	-0.082392	-0.082120
	(0.4, 0.4)	-0.058571	-0.056476	-0.056265
	(0.7, 0.7)	-0.015200	-0.016772	-0.016931
	(1.0, 1.0)	0.000000	0.000000	0.000000
0.1	(0.1, 0.0)	0.587785	0.587785	0.587785
	(0.1, 0.5)	-0.460076	-0.460175	-0.460185
	(0.4, 0.4)	-0.307001	-0.306418	-0.306359
	(0.7, 0.7)	0.224135	0.224255	0.224267
	(1.0, 1.0)	0.000000	0.000000	0.000000



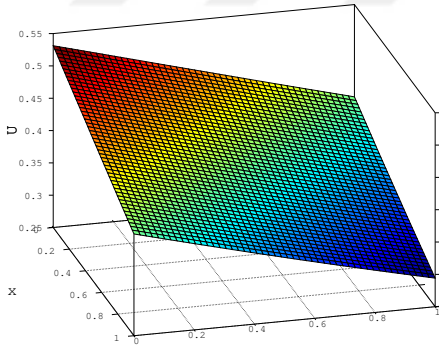
Şekil 5.1: $M = 20$, $t = 0.25$, $k = 0.001$ değerleri için Problem 1' in SFY2 ile elde edilen nümerik çözümlerin farklı v değerlerinde gösterimi



(a) $v = 0.1$

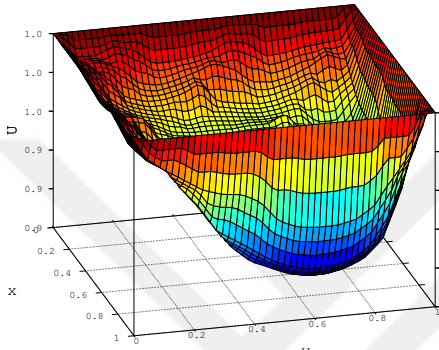


(b) $v = 0.05$

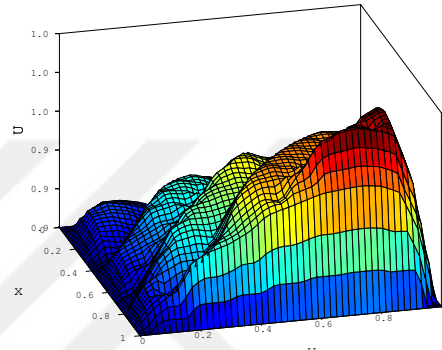


(c) $v = 1$

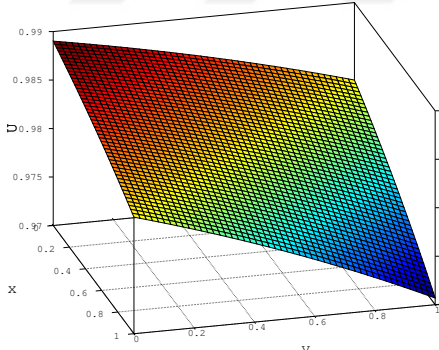
Şekil 5.2: $M = 32$, $t = 0.25$, $k = 0.001$ değerleri için Problem 1' in SFY2 ile elde edilen nümerik çözümlerin farklı v değerlerindeki gösterimi



(a) $v = 0.1$

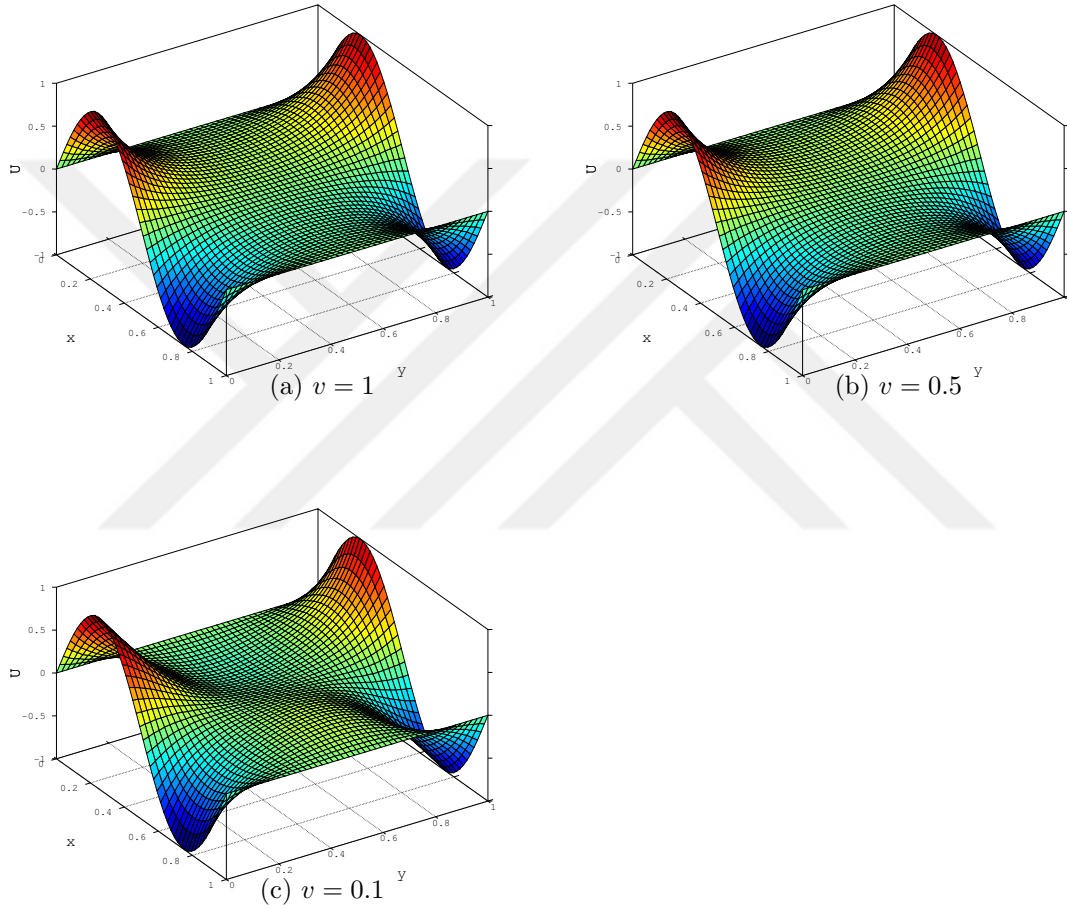


(b) $v = 0.05$

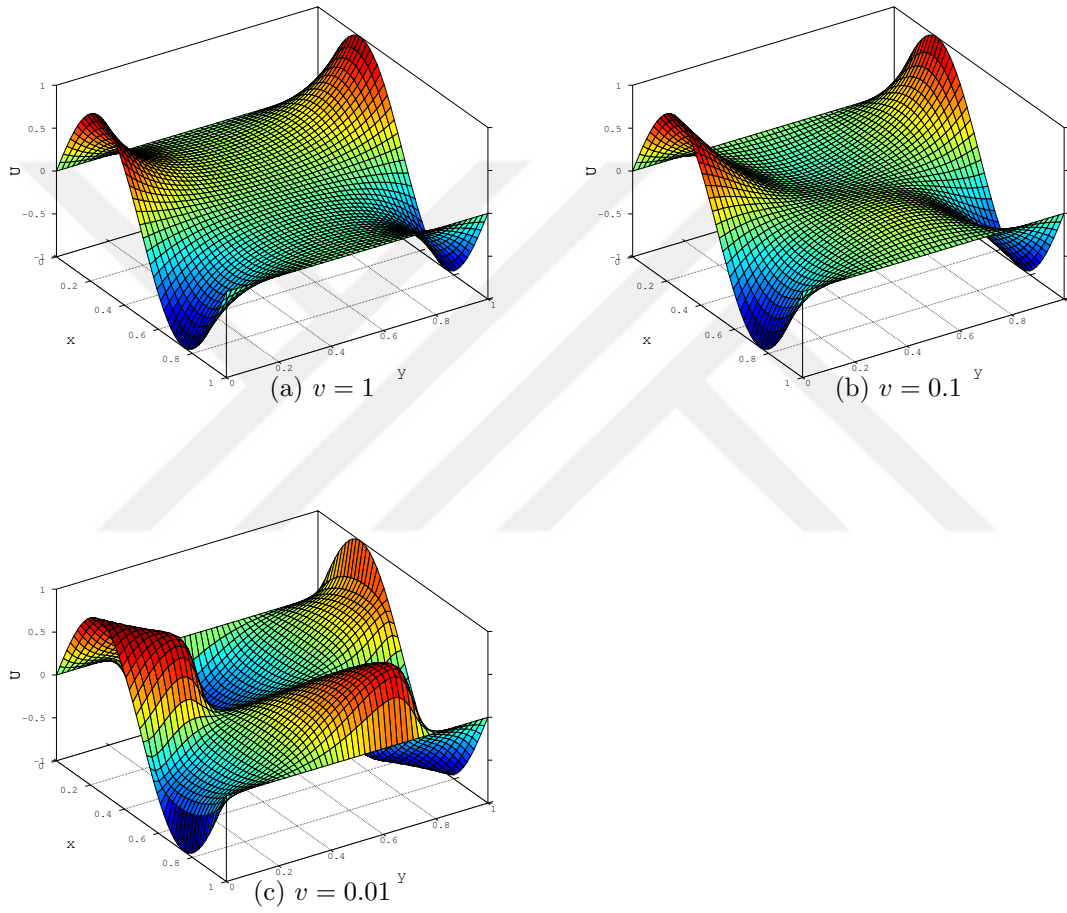


(c) $v = 1$

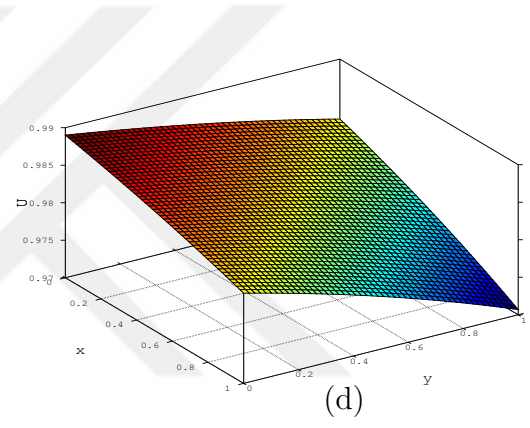
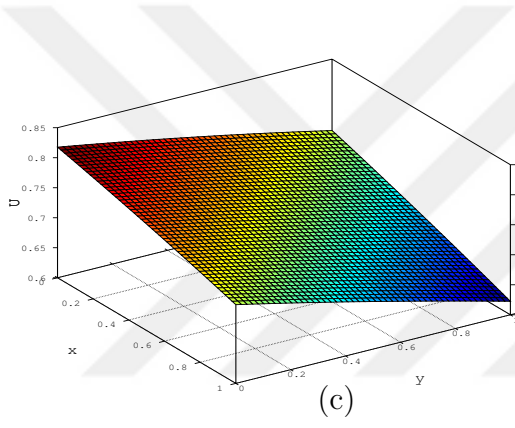
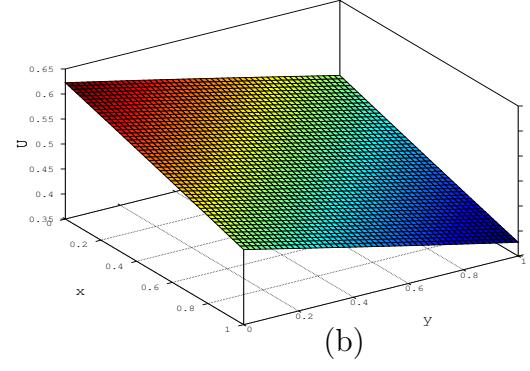
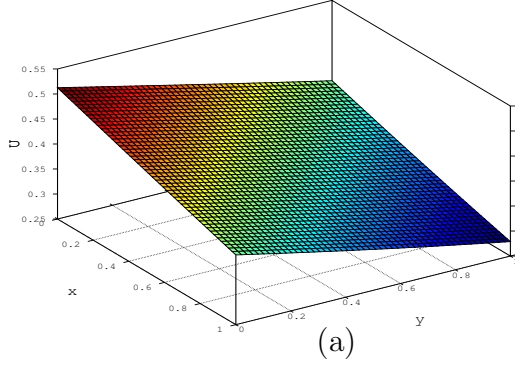
Şekil 5.3: $M = 16$, $t = 9$, $k = 0.01$ değerleri için Problem 1' in SFY2 ile elde edilen nümerik çözümlerin farklı v değerlerindeki gösterimi



Şekil 5.4: $M = 40$, $t = 0.25$, $k = 0.001$, değerleri için Problem 2' nin SFY2 ile elde edilen nümerik çözümlerin farklı v değerlerindeki gösterimi



Şekil 5.5: $M = 48$, $t = 0.25$, $k = 0.01$ değerleri için Problem 2' nin SFY2 ile elde edilen nümerik çözümlerin farklı v değerlerindeki gösterimi



Şekil 5.6: $M = 16$, $v = 1$, $k = 0.01$, değerleri için Problem 1' in SFY2 ile elde edilen nümerik çözümlerin (a) $t = 0.1$, (b) $t = 1$, (c) $t = 3$, (d) $t = 9$ zamanlarındaki gösterimi

5.3 Sonlu Fark Yaklaşımı 3 (SFY3)

(5.1) ile verilen 2-boyutlu Burgers denkleminde U_t yerine (2.1.7) ile verilen ileri fark yaklaşımı, UU_x ve UU_y non-lineer terimleri yerine

$$UU_x \cong U_{i,j}^{n+1} \left(\frac{U_{i+1,j}^n - U_{i-1,j}^n}{2h_x} \right) + U_{i,j}^n \left(\frac{U_{i+1,j}^{n+1} - U_{i-1,j}^{n+1}}{2h_x} \right) - U_{i,j}^n \left(\frac{U_{i+1,j}^n - U_{i-1,j}^n}{2h_x} \right)$$

$$UU_y \cong U_{i,j}^{n+1} \left(\frac{U_{i,j+1}^n - U_{i,j-1}^n}{2h_y} \right) + U_{i,j}^n \left(\frac{U_{i,j+1}^{n+1} - U_{i,j-1}^{n+1}}{2h_y} \right) - U_{i,j}^n \left(\frac{U_{i,j+1}^n - U_{i,j-1}^n}{2h_y} \right)$$

sonlu fark yaklaşımları[40] ile U_{xx} ve U_{yy} türevlerinin yerine

$$U_{xx} \cong \frac{1}{2} \left[\frac{U_{i-1,j}^{n+1} - 2U_{i,j}^{n+1} + U_{i+1,j}^{n+1}}{h_x^2} + \frac{U_{i-1,j}^n - 2U_{i,j}^n + U_{i+1,j}^n}{h_x^2} \right]$$

$$U_{yy} \cong \frac{1}{2} \left[\frac{U_{i,j-1}^{n+1} - 2U_{i,j}^{n+1} + U_{i,j+1}^{n+1}}{h_y^2} + \frac{U_{i,j-1}^n - 2U_{i,j}^n + U_{i,j+1}^n}{h_y^2} \right]$$

sonlu fark yaklaşımları yazılır ve gerekli düzenlemeler yapılırsa

$$\alpha_1 = -\frac{U_{i,j}^n}{2h_x} - \frac{v}{2h_x^2}, \quad \alpha_2 = \frac{U_{i,j}^n}{2h_x} - \frac{v}{2h_x^2}$$

$$\alpha_3 = \frac{1}{k} + \frac{v}{h_x^2} + \frac{v}{h_y^2} + \frac{U_{i+1,j}^n - U_{i-1,j}^n}{2h_x} + \frac{U_{i,j+1}^n - U_{i,j-1}^n}{2h_y}$$

$$\alpha_4 = -\frac{U_{i,j}^n}{2h_y} - \frac{v}{2h_y^2}, \quad \alpha_5 = \frac{U_{i,j}^n}{2h_y} - \frac{v}{2h_y^2}, \quad \alpha_6 = \frac{U_{i,j}^n}{2h_x} - \frac{v}{2h_x^2}$$

$$\alpha_7 = -\frac{U_{i,j}^n}{2h_x} - \frac{v}{2h_x^2}, \quad \alpha_8 = \frac{1}{k} - \frac{v}{h_x^2} - \frac{v}{h_y^2}$$

$$\alpha_9 = -\frac{U_{i,j}^n}{2h_y} + \frac{v}{2h_y^2}, \quad \alpha_{10} = \frac{U_{i,j}^n}{2h_y} + \frac{v}{2h_y^2}$$

ve $i, j = 1(1)M - 1$ olmak üzere

$$\alpha_1 U_{i-1,j}^{n+1} + \alpha_2 U_{i+1,j}^{n+1} + \alpha_3 U_{i,j}^{n+1} + \alpha_4 U_{i,j-1}^{n+1} + \alpha_5 U_{i,j+1}^{n+1} \quad (5.3.1)$$

$$= \alpha_6 U_{i-1,j}^n + \alpha_7 U_{i+1,j}^n + \alpha_8 U_{i,j}^n + \alpha_9 U_{i,j-1}^n + \alpha_{10} U_{i,j+1}^n$$

bulunur.

Nümerik Sonuçlar

Problem 1 ve Problem 2' nin (5.3.1) ile elde edilen nümerik sonuçları Tablo 5.14-5.20' de verildi.

Problem 1' in $t = 0.25$ zamanında $v = 1$, $k = 0.001$ ve h ' nin farklı değerleri için elde edilen nümerik sonuçları ile L_2 ve L_∞ hata normları Tablo 5.14' te sunuldu. Tablodan h değeri küçüldüğünde L_2 hata normunun arttığı, $h = 0.1$ den $h = 0.05$ ' e küçüldüğünde L_∞ hata normlarının uyumlu olduğu, $h = 0.05$ ' ten $h = 0.025$ ' e küçüldüğünde ise L_∞ hata normunun arttığı görülmektedir.

Tablo 5.15' te ise Problem 1' in $t = 0.25$, $v = 1$ ve $h = 0.05$ için k ' nin farklı değerlerinde elde edilen nümerik ve tam çözümleri ile L_2 ve L_∞ hata normları verildi. Tablodan k zaman adımı küçüldükçe nümerik çözümlerin tam çözüme yakın olduğu, L_2 hata normunun ise küçüldüğü görülmektedir. Ayrıca $k = 0.01$ ' den $k = 0.005$ ' e küçüldüğünde L_∞ hata normunun küçüldüğü, $k = 0.005$ ' ten $k = 0.001$ ' e küçüldüğünde ise L_∞ hata normunun arttığı görüldü.

Problem 1' in $t = 0.25$ zamanında $k = 0.01$ için farklı v ve M bölüntü değerlerinde elde edilen L_2 ve L_∞ hata normlarının, Ref. [24]' de lineerleştirilmiş Crank-Nicolson şeması kullanılarak elde edilen hata normlarıyla karşılaştırılması Tablo 5.16' da verildi. Tablodan $v = 1$ ve farklı M bölüntü sayıları için SFY3 yaklaşımı kullanılarak elde edilen hata normlarının Ref. [24]' de verilenlerle uyumlu olduğu açıkça görülmektedir. Benzer şekilde $v = 0.1$ ve $v = 0.05$ olmak üzere farklı M bölüntü sayıları için de hata normlarını karşılaştırdığımızda elde edilen sonuçların Ref. [24]' de verilenlerle uyum içinde olduğu açıktır.

Tablo 5.17' de Problem 1' in, $v = 1$, $k = 0.01$ ve $M = 16$ olmak üzere farklı t zamanında Problem 1' in SFY3 ile elde edilen nümerik ve tam sonuçlarının

karşılaştırılması verildi. Tablodan t değerinin artmasıyla birlikte elde edilen nümerik sonuçlar tam sonuçlara yaklaşmaktadır. Ayrıca L_2 ve L_∞ değerleri ise yeterince küçüktür.

Tablo 5.18' de $v = 0.01$, $k = 0.0125$ ve $t = 0.125$ zamanında Problem 2' nin SFY3 ile elde edilen nümerik sonuçlarının Ref. [24] ile karşılaştırılması verildi. Tablodan $M = 32$ ve $M = 48$ için elde edilen nümerik sonuçların Ref. [24] ile elde edilen nümerik sonuçlarla uyumlu olduğu görülmektedir.

Tablo 5.19 ve Tablo 5.20' de Problem 2' nin sırasıyla farklı h ve k değerlerinde elde edilen nümerik sonuçları sunuldu. Problem 2' nin Tablo 5.19' da $k = 0.001$, h' nin ve v' nin farklı değerleri için $t = 0.25$ zamanında SFY3 ile elde edilen nümerik çözümleri verildi. Problem 2' nin Tablo 5.20' de $h = 0.1$, v ve k' nin farklı değerleri için $t = 0.05$ zamanında SFY3 ile elde edilen nümerik çözümleri verildi.

Tablo 5.14: Problem 1' in $v = 1$, $k = 0.001$ ve h' nin farklı değerleri için $t = 0.25$ zamanında SFY3 ile elde edilen nümerik ve tam sonuçları

(x, y)	Nümerik Çözüm			Tam Çözüm
	$h = 0.1$	$h = 0.05$	$h = 0.025$	
(0.0, 0.0)	0.531209	0.531209	0.531209	0.531209
(0.0, 0.5)	0.468791	0.468791	0.468791	0.468791
(0.0, 1.0)	0.407333	0.407333	0.407333	0.407333
(0.1, 0.0)	0.518741	0.518741	0.518741	0.518741
(0.1, 0.2)	0.493750	0.493750	0.493751	0.493750
(0.2, 0.2)	0.481259	0.481259	0.481259	0.481259
(0.2, 0.5)	0.443986	0.443987	0.443987	0.443986
(0.3, 0.1)	0.481259	0.481259	0.481259	0.481259
(0.3, 0.5)	0.431680	0.431681	0.431681	0.431680
(0.3, 0.6)	0.419457	0.419458	0.419459	0.419458
(0.4, 0.5)	0.419457	0.419459	0.419459	0.419458
(0.5, 0.6)	0.395320	0.395322	0.395322	0.395321
(0.6, 0.3)	0.419457	0.419458	0.419459	0.419458
(0.7, 0.4)	0.395320	0.395322	0.395322	0.395321
(0.8, 0.7)	0.348645	0.348646	0.348646	0.348645
(0.9, 0.2)	0.395321	0.395321	0.395321	0.395321
(1.0, 1.0)	0.294215	0.294215	0.294215	0.294215
L_2	3.11×10^{-6}	1.022×10^{-5}	3.032×10^{-5}	
L_∞	5.6×10^{-7}	9.3×10^{-7}	1.43×10^{-6}	

Tablo 5.15: Problem 1' in $v = 1$, $h = 0.05$ ve farklı k zaman adımları için $t = 0.25$ zamanında SFY3 ile elde edilen nümerik ve tam sonuçları

(x, y)	Nümerik Çözüm			Tam Çözüm
	$k = 0.01$	$k = 0.005$	$k = 0.001$	
(0.0, 0.0)	0.531209	0.531209	0.531209	0.531209
(0.0, 0.5)	0.468790	0.468790	0.468790	0.468790
(0.0, 1.0)	0.407333	0.407333	0.407333	0.407333
(0.1, 0.0)	0.518741	0.518741	0.518741	0.518741
(0.1, 0.2)	0.493754	0.493752	0.493750	0.493750
(0.2, 0.2)	0.481264	0.481261	0.481259	0.481259
(0.2, 0.5)	0.443995	0.443990	0.443987	0.443986
(0.3, 0.1)	0.481263	0.481261	0.481259	0.481259
(0.3, 0.5)	0.431691	0.431685	0.431681	0.431680
(0.3, 0.6)	0.419469	0.419463	0.419458	0.419458
(0.4, 0.5)	0.419470	0.419464	0.419459	0.419458
(0.5, 0.6)	0.395334	0.395327	0.395322	0.395321
(0.6, 0.3)	0.419469	0.419463	0.419458	0.419458
(0.7, 0.4)	0.395332	0.395326	0.395322	0.395321
(0.8, 0.7)	0.348653	0.348649	0.348646	0.348645
(0.9, 0.2)	0.395325	0.395323	0.395321	0.395321
(1.0, 1.0)	0.294215	0.294215	0.294215	0.294215
L_2	1.4930×10^{-4}	7.218×10^{-5}	1.022×10^{-5}	
L_∞	1.343×10^{-5}	6.49×10^{-6}	9.3×10^{-5}	

Tablo 5.16: Problem 1' in $k = 0.01$, $t = 0.25$ ve v ' nin farklı değerleri için SFY3 ile elde edilen L_2 ve L_∞ değerlerinin Ref. [24] ile karşılaştırılması

v	M	L_2	$L_2[24]$	L_∞	$L_\infty[24]$
1	8×8	4.755×10^{-5}	5.311×10^{-5}	1.067×10^{-5}	1.189×10^{-5}
	32×32	2.4338×10^{-4}	1.904×10^{-4}	1.374×10^{-5}	1.065×10^{-5}
	48×48	3.6860×10^{-4}	2.843×10^{-4}	1.378×10^{-5}	1.060×10^{-5}
0.1	8×8	3.47213×10^{-3}	5.811×10^{-3}	1.25061×10^{-3}	1.751×10^{-3}
	32×32	1.454966×10^{-2}	9.465×10^{-3}	1.60514×10^{-3}	1.722×10^{-3}
	40×40	1.868219×10^{-2}	1.224×10^{-2}	1.67562×10^{-3}	1.242×10^{-3}
0.05	8×8	1.860204×10^{-2}	2.255×10^{-2}	1.613717×10^{-2}	1.016×10^{-2}
	24×24	1.944979×10^{-2}	2.044×10^{-2}	4.12161×10^{-3}	6.011×10^{-3}
	32×32	3.029744×10^{-2}	2.735×10^{-2}	5.12029×10^{-3}	6.663×10^{-3}

Tablo 5.17: Problem 1' in $v = 1$, $k = 0.01$ ve $M = 16$ olmak üzere farklı t zamanında SFY3 ile elde edilen nümerik ve tam sonuçlarının karşılaştırılması

(x, y)	$t = 0.1$		$t = 1$	
	Nümerik	Tam	Nümerik	Tam
(1/8, 1/8)	0.481261	0.481259	0.592668	0.592667
(3/8, 1/8)	0.450171	0.450166	0.562180	0.562177
(3/8, 3/8)	0.419468	0.419458	0.531218	0.531209
(4/8, 3/8)	0.404330	0.404319	0.515630	0.515620
(4/8, 4/8)	0.389372	0.389361	0.500011	0.500000
(5/8, 4/8)	0.374618	0.374608	0.484391	0.484380
(5/8, 5/8)	0.360094	0.360084	0.468801	0.468791
(7/8, 5/8)	0.331818	0.331812	0.437829	0.437823
(7/8, 7/8)	0.304706	0.304703	0.407337	0.407333
(1/8, 7/8)	0.389364	0.389361	0.500003	0.500000
L_2	1.0182×10^{-4}		9.614×10^{-5}	
L_∞	1.124×10^{-5}		1.094×10^{-5}	
(x, y)	$t = 3$		$t = 9$	
	Nümerik	Tam	Nümerik	Tam
(1/8, 1/8)	0.798185	0.798187	0.987568	0.987568
(3/8, 1/8)	0.777297	0.777300	0.985935	0.985936
(3/8, 3/8)	0.754910	0.754915	0.984091	0.984094
(4/8, 3/8)	0.743163	0.743168	0.983083	0.983085
(4/8, 4/8)	0.731054	0.731059	0.982011	0.982014
(5/8, 4/8)	0.718590	0.718594	0.980873	0.980876
(5/8, 5/8)	0.705782	0.705785	0.979665	0.979668
(7/8, 5/8)	0.679177	0.679179	0.977021	0.977023
(7/8, 7/8)	0.651354	0.651355	0.974042	0.974043
(1/8, 7/8)	0.731057	0.731059	0.982013	0.982014
L_2	4.142×10^{-5}		2.52×10^{-5}	
L_∞	4.74×10^{-6}		2.91×10^{-6}	

Tablo 5.18: Problem 2' nin $v = 0.01$, $k = 0.0125$ ve $t = 0.125$ zamanında SFY3 ile elde edilen nümerik sonuçlarının Ref. [24] ile karşılaştırılması

(x, y)	$M = 32$		$M = 48$	
	Nümerik	Nümerik[24]	Nümerik	Nümerik[24]
(1/8, 1/8)	0.393323	0.391154	0.390765	0.387991
(3/8, 1/8)	0.879669	0.894478	0.876522	0.893949
(3/8, 3/8)	-0.382383	-0.380232	-0.381737	-0.379037
(4/8, 3/8)	-0.005330	-0.005224	-0.005333	-0.005715
(4/8, 4/8)	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000
(5/8, 4/8)	0.406162	0.394053	0.405797	0.392413
(5/8, 5/8)	0.382383	0.380232	0.381737	0.379037
(7/8, 5/8)	0.859911	0.891940	0.854860	0.889148
(7/8, 7/8)	-0.316374	-0.391154	-0.326487	-0.387991
(1/8, 7/8)	0.270818	0.262426	0.270517	0.261139

Tablo 5.19: Problem 2' nin $k = 0.001$, h' nin ve v' nin farklı değerleri için $t = 0.25$ zamanında SFY3 ile elde edilen nümerik sonuçları

v	(x, y)	Nümerik Çözüm		
		$h = 0.1$	$h = 0.05$	$h = 0.025$
1	(0.1, 0.0)	0.587785	0.587785	0.587785
	(0.1, 0.5)	0.055650	0.051785	0.050819
	(0.4, 0.4)	0.070433	0.066309	0.065280
	(0.7, 0.7)	-0.173929	-0.166190	-0.164242
	(1.0, 1.0)	0.000000	0.000000	0.000000
0.5	(0.1, 0.0)	0.587785	0.587785	0.587785
	(0.1, 0.5)	0.054535	0.050856	0.049934
	(0.4, 0.4)	0.073557	0.069650	0.068675
	(0.7, 0.7)	-0.180728	-0.173277	-0.171404
	(1.0, 1.0)	0.000000	0.000000	0.000000
0.1	(0.1, 0.0)	0.587785	0.587785	0.587785
	(0.1, 0.5)	-0.088226	-0.082606	-0.081310
	(0.4, 0.4)	-0.044117	-0.040887	-0.040131
	(0.7, 0.7)	-0.048056	-0.049828	-0.050175
	(1.0, 1.0)	0.000000	0.000000	0.000000

Tablo 5.20: Problem 2' nin $h = 0.1$, v ve k ' nin farklı değerleri için $t = 0.05$ zamanında SFY3 ile elde edilen nümerik sonuçları

v	(x, y)	Nümerik Çözüm		
		$k = 0.001$	$k = 0.0001$	$k = 0.00001$
1	(0.1, 0.0)	0.587785	0.587785	0.587785
	(0.1, 0.5)	0.018239	0.018216	0.018216
	(0.4, 0.4)	0.033424	0.033379	0.033377
	(0.7, 0.7)	-0.123889	-0.123830	-0.123826
	(1.0, 1.0)	0.000000	0.000000	0.000000
0.5	(0.1, 0.0)	0.587785	0.587785	0.587785
	(0.1, 0.5)	-0.081985	-0.082081	-0.082089
	(0.4, 0.4)	-0.056212	-0.056240	-0.056242
	(0.7, 0.7)	-0.017057	-0.016959	-0.016950
	(1.0, 1.0)	0.000000	0.000000	0.000000
0.1	(0.1, 0.0)	0.587785	0.587785	0.587785
	(0.1, 0.5)	-0.459691	-0.460137	-0.460181
	(0.4, 0.4)	-0.306466	-0.306364	-0.306354
	(0.7, 0.7)	0.224032	0.224244	0.224266
	(1.0, 1.0)	0.000000	0.000000	0.000000

5.4 Sonlu Fark Yaklaşımı 4 (SFY4)

(5.1) ile verilen 2-boyutlu Burgers denkleminde U_t yerine (2.1.7) ile verilen ileri fark yaklaşımı, UU_x ve UU_y non-lineer terimleri yerine

$$UU_x \cong \left(\frac{U_{i+1,j}^n + U_{i,j}^n + U_{i-1,j}^n}{3} \right) \left(\frac{U_{i+1,j}^n - U_{i-1,j}^n}{2h_x} \right)$$

$$UU_y \cong \left(\frac{U_{i,j+1}^n + U_{i,j}^n + U_{i,j-1}^n}{3} \right) \left(\frac{U_{i,j+1}^n - U_{i,j-1}^n}{2h_y} \right)$$

sonlu fark yaklaşımları ile U_{xx} ve U_{yy} türevlerinin yerine

$$U_{xx} \cong \frac{U_{i-1,j}^n - 2U_{i,j}^n + U_{i+1,j}^n}{h_x^2}$$

$$U_{yy} \cong \frac{U_{i,j-1}^n - 2U_{i,j}^n + U_{i,j+1}^n}{h_y^2}$$

sonlu fark yaklaşımları yazılır ve gerekli düzenlemeler yapılırsa

$$\alpha_1 = \frac{1}{k}$$

$$\alpha_2 = \frac{U_{i-1,j}^n + U_{i,j}^n}{6h_x} + \frac{v}{h_x^2}$$

$$\alpha_3 = \frac{-U_{i+1,j}^n - U_{i,j}^n}{6h_x} + \frac{v}{h_x^2}$$

$$\alpha_4 = \frac{1}{k} - \frac{2v}{h_x^2} - \frac{2v}{h_y^2}$$

$$\alpha_5 = \frac{U_{i,j-1}^n + U_{i,j}^n}{6h_y} + \frac{v}{h_y^2}$$

$$\alpha_6 = \frac{-U_{i,j+1}^n - U_{i,j}^n}{6h_y} + \frac{v}{h_y^2}$$

ve $i, j = 1(1)M - 1$ olmak üzere

$$\alpha_1 U_{i,j}^{n+1} = \alpha_2 U_{i-1,j}^n + \alpha_3 U_{i+1,j}^n + \alpha_4 U_{i,j}^n + \alpha_5 U_{i,j-1}^n + \alpha_6 U_{i,j+1}^n \quad (5.4.1)$$

sonlu fark yaklaşımı bulunur.

Nümerik Sonuçlar

Problem 1 ve Problem 2' nin (5.4.1) ile elde edilen nümerik sonuçları Tablo 5.21-5.26' da verildi.

Problem 1' in $t = 0.25$ zamanında $v = 1$, $k = 0.0001$ ve h ' nin farklı değerleri için elde edilen nümerik sonuçları ile L_2 ve L_∞ hata normları Tablo 5.21' de sunuldu. Tablodan $h = 0.1$ ' den $h = 0.05$ ' e küçüldüğünde L_2 hata normlarının uyumlu olduğu, ancak $h = 0.025$ seçiminde L_2 hata normunun arttığı görülmektedir. Ayrıca L_∞ hata normlarının seçilen h değerlerinde uyumlu olduğu görülmektedir.

Tablo 5.22' de ise Problem 1' in $t = 0.25$, $v = 1$ ve $h = 0.1$ için k ' nin farklı değerlerinde elde edilen nümerik ve tam çözümleri ile L_2 ve L_∞ hata normları verildi. Tablodan zaman adımı $k = 0.001$ ' den $k = 0.0005$ ' e küçüldüğünde L_2 hata normunun uyumlu olduğu, $k = 0.0001$ ' e küçüldüğünde ise L_2 hata normunun arttığı görülmektedir. Yine tablodan seçilen zaman adımlarında L_∞ hata normlarının uyumlu olduğu görülmektedir.

Tablo 5.23' te $k = 0.01$, $t = 0.25$ ve v ' nin farklı değerleri için Problem 1' in SFY4 ile elde edilen L_2 ve L_∞ değerlerinin Ref. [24] ile karşılaştırılması verildi. Tablodan $v = 0.1$ için elde edilen L_2 değerlerinin uyumlu olduğu, L_∞ değerlerinin daha iyi olduğu açıktır. $v = 0.05$ için ise elde edilen L_2 ve L_∞ değerlerinin birbirleriyle uyumlu olduğu görülmektedir.

Tablo 5.24' te $v = 0.01$, $k = 0.0125$ ve $t = 0.125$ zamanında Problem 2' nin SFY4 ile elde edilen nümerik sonuçlarının Ref. [24] ile karşılaştırılması verildi. Farklı M bölüntü sayıları için elde edilen nümerik sonuçların birbiriyle uyumlu olduğu görüldü.

Tablo 5.25 ve Tablo 5.26' da sırasıyla farklı h ve k değerlerinde Problem 2' nin

elde edilen nümerik sonuçları sunuldu. Problem 2' nin Tablo 5.25' te $k = 0.001$, h' nin ve v' nin farklı değerleri için $t = 0.25$ zamanında SFY4 ile elde edilen nümerik çözümleri verildi. Problem 2' nin Tablo 5.26' da $h = 0.1$, v ve k' nin farklı değerleri için $t = 0.05$ zamanında SFY4 ile elde edilen nümerik çözümleri verildi.



Tablo 5.21: Problem 1' in $v = 1$, $k = 0.0001$ ve h ' nın farklı değerleri için $t = 0.25$ zamanında SFY4 ile elde edilen nümerik ve tam sonuçları

(x, y)	Nümerik Çözüm			Tam Çözüm
	$h = 0.1$	$h = 0.05$	$h = 0.025$	
(0.0, 0.0)	0.531209	0.531209	0.531209	0.531209
(0.0, 0.5)	0.468791	0.468791	0.468791	0.468791
(0.0, 1.0)	0.407333	0.407333	0.407333	0.407333
(0.1, 0.0)	0.518741	0.518741	0.518741	0.518741
(0.1, 0.2)	0.493752	0.493752	0.493753	0.493750
(0.2, 0.2)	0.481262	0.481262	0.481262	0.481259
(0.2, 0.5)	0.443990	0.443991	0.443991	0.443986
(0.3, 0.1)	0.481261	0.481261	0.481261	0.481259
(0.3, 0.5)	0.431685	0.431686	0.431686	0.431680
(0.3, 0.6)	0.419463	0.419464	0.419464	0.419458
(0.4, 0.5)	0.419464	0.419465	0.419465	0.419458
(0.5, 0.6)	0.395327	0.395328	0.395328	0.395321
(0.6, 0.3)	0.419463	0.419464	0.419464	0.419458
(0.7, 0.4)	0.395326	0.395327	0.395327	0.395321
(0.8, 0.7)	0.348649	0.348649	0.348649	0.348645
(0.9, 0.2)	0.395323	0.395323	0.395323	0.395321
(1.0, 1.0)	0.294215	0.294215	0.294215	0.294215
L_2	3.418×10^{-5}	7.964×10^{-5}	1.6496×10^{-4}	
L_∞	6.1×10^{-6}	7.11×10^{-6}	7.36×10^{-6}	

Tablo 5.22: Problem 1' in $v = 1$, $h = 0.1$ ve $t = 0.25$ için farklı k değerlerinde SFY4 ile elde edilen nümerik ve tam sonuçları

(x, y)	Nümerik Çözüm			Tam Çözüm
	$k = 0.001$	$k = 0.0005$	$k = 0.0001$	
(0.0, 0.0)	0.531209	0.531209	0.531209	0.531209
(0.0, 0.5)	0.468791	0.468791	0.468791	0.468791
(0.0, 1.0)	0.407333	0.407333	0.407333	0.407333
(0.1, 0.0)	0.518741	0.518741	0.518741	0.518741
(0.1, 0.2)	0.493750	0.493750	0.493752	0.493750
(0.2, 0.2)	0.481258	0.481258	0.481262	0.481259
(0.2, 0.5)	0.443985	0.443986	0.443990	0.443986
(0.3, 0.1)	0.481258	0.481259	0.481261	0.481259
(0.3, 0.5)	0.431679	0.431679	0.431685	0.431680
(0.3, 0.6)	0.419457	0.419457	0.419463	0.419458
(0.4, 0.5)	0.419456	0.419457	0.419464	0.419458
(0.5, 0.6)	0.395320	0.395320	0.395327	0.395321
(0.6, 0.3)	0.419457	0.419457	0.419463	0.419458
(0.7, 0.4)	0.395320	0.395320	0.395326	0.395321
(0.8, 0.7)	0.348644	0.348645	0.348649	0.348645
(0.9, 0.2)	0.395321	0.395321	0.395323	0.395321
(1.0, 1.0)	0.294215	0.294215	0.294215	0.294215
L_2	7.25×10^{-6}	3.86×10^{-6}	3.418×10^{-5}	
L_∞	1.3×10^{-6}	6.9×10^{-7}	6.1×10^{-6}	

Tablo 5.23: Problem 1' in $k = 0.01$, $t = 0.25$ ve v ' nin farklı değerleri için SFY4 ile elde edilen L_2 ve L_∞ değerlerinin Ref. [24] ile karşılaştırılması (*' da $k = 0.001$ alındı.)

v	M		L_2	$L_2[24]$	L_∞	$L_\infty[24]$
0.1	8×8		3.19452×10^{-3}	5.811×10^{-3}	1.91074×10^{-3}	1.751×10^{-3}
	32×32	*	1.48096×10^{-3}	9.465×10^{-3}	1.8058×10^{-4}	1.722×10^{-3}
	40×40	*	2.06442×10^{-3}	1.224×10^{-2}	1.6528×10^{-4}	1.242×10^{-3}
0.05	8×8		1.460532×10^{-2}	2.255×10^{-2}	1.215761×10^{-2}	1.016×10^{-2}
	24×24		3.036948×10^{-2}	2.044×10^{-2}	6.13385×10^{-3}	6.011×10^{-3}
	32×32	*	5.24338×10^{-3}	2.735×10^{-2}	1.18309×10^{-3}	6.663×10^{-3}

Tablo 5.24: Problem 2' nin $v = 0.01$, $k = 0.0125$ ve $t = 0.125$ zamanında SFY4 ile elde edilen nümerik sonuçların Ref. [24] ile karşılaştırılması

(x, y)	$M = 32$		$M = 48$	
	Nümerik	Nümerik[24]	Nümerik	Nümerik[24]
$(1/8, 1/8)$	0.387841	0.391154	0.384463	0.387991
$(3/8, 1/8)$	0.943187	0.894478	0.937145	0.893949
$(3/8, 3/8)$	-0.379511	-0.380232	-0.378808	-0.379037
$(4/8, 3/8)$	-0.005551	-0.005224	-0.005927	-0.005715
$(4/8, 4/8)$	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000
$(5/8, 4/8)$	0.387634	0.394053	0.386398	0.392413
$(5/8, 5/8)$	0.379511	0.380232	0.378808	0.379037
$(7/8, 5/8)$	0.959400	0.891940	0.954668	0.889148
$(7/8, 7/8)$	-0.387841	-0.391154	-0.384463	-0.387991
$(1/8, 7/8)$	0.257393	0.262426	0.256459	0.261139

Tablo 5.25: Problem 2' nin $k = 0.001$, h' nin ve v' nin farklı değerleri için $t = 0.25$ zamanında SFY4 ile elde edilen nümerik sonuçları

v	(x, y)	Nümerik Çözüm		
		$h = 0.1$	$h = 0.05$	$h = 0.025$
		$k = 0.0001$		
1	(0.1, 0.0)	0.587785	0.587785	0.587785
	(0.1, 0.5)	0.055703	0.051797	0.050823
	(0.4, 0.4)	0.070782	0.066405	0.065305
	(0.7, 0.7)	-0.174731	-0.166401	-0.164296
	(1.0, 1.0)	0.000000	0.000000	0.000000
		$k = 0.0001$		
0.5	(0.1, 0.0)	0.587785	0.587785	0.587785
	(0.1, 0.5)	0.054720	0.050945	0.049947
	(0.4, 0.4)	0.074372	0.069917	0.068733
	(0.7, 0.7)	-0.182484	-0.173800	-0.171523
	(1.0, 1.0)	0.000000	0.000000	0.000000
0.1	(0.1, 0.0)	0.587785	0.587785	0.587785
	(0.1, 0.5)	-0.085304	-0.081470	-0.080543
	(0.4, 0.4)	-0.041148	-0.039801	-0.039528
	(0.7, 0.7)	-0.056036	-0.052014	-0.050924
	(1.0, 1.0)	0.000000	0.000000	0.000000

Tablo 5.26: Problem 2' nin $h = 0.1$, v ve k ' nin farklı değerleri için $t = 0.05$ zamanında SFY4 ile elde edilen nümerik sonuçları

v	(x, y)	Nümerik Çözüm		
		$k = 0.001$	$k = 0.0001$	$k = 0.00001$
1	(0.1, 0.0)	0.587785	0.587785	0.587785
	(0.1, 0.5)	0.020592	0.018477	0.018264
	(0.4, 0.4)	0.035928	0.033962	0.033765
	(0.7, 0.7)	-0.127416	-0.124951	-0.124710
	(1.0, 1.0)	0.000000	0.000000	0.000000
0.5	(0.1, 0.0)	0.587785	0.587785	0.587785
	(0.1, 0.5)	-0.078745	-0.081470	-0.081751
	(0.4, 0.4)	-0.053520	-0.055637	-0.055855
	(0.7, 0.7)	-0.020049	-0.018435	-0.018272
	(1.0, 1.0)	0.000000	0.000000	0.000000
0.1	(0.1, 0.0)	0.587785	0.587785	0.587785
	(0.1, 0.5)	-0.450798	-0.450795	-0.450848
	(0.4, 0.4)	-0.306683	-0.307263	-0.307354
	(0.7, 0.7)	0.218827	0.218745	0.218764
	(1.0, 1.0)	0.000000	0.000000	0.000000

5.5 Sonlu Fark Yaklaşımı 5 (SFY5)

(5.1) ile verilen 2-boyutlu Burgers denkleminde U_t yerine (2.1.7) ile verilen ileri fark yaklaşımı, UU_x ve UU_y non-lineer terimleri yerine

$$UU_x \cong \left(\frac{U_{i+1,j}^n + U_{i,j}^n + U_{i-1,j}^n}{3} \right) \left(\frac{U_{i+1,j}^{n+1} - U_{i-1,j}^{n+1}}{2h_x} \right)$$

$$UU_y \cong \left(\frac{U_{i,j+1}^n + U_{i,j}^n + U_{i,j-1}^n}{3} \right) \left(\frac{U_{i,j+1}^{n+1} - U_{i,j-1}^{n+1}}{2h_y} \right)$$

sonlu fark yaklaşımları ile U_{xx} ve U_{yy} türevlerinin yerine

$$U_{xx} \cong \frac{U_{i-1,j}^{n+1} - 2U_{i,j}^{n+1} + U_{i+1,j}^{n+1}}{h_x^2}$$

$$U_{yy} \cong \frac{U_{i,j-1}^{n+1} - 2U_{i,j}^{n+1} + U_{i,j+1}^{n+1}}{h_y^2}$$

sonlu fark yaklaşımları yazılır ve gerekli düzenlemeler yapılırsa

$$\alpha_1 = \frac{-U_{i+1,j}^n - U_{i,j}^n - U_{i-1,j}^n}{6h_x} - \frac{v}{h_x^2}$$

$$\alpha_2 = \frac{U_{i+1,j}^n + U_{i,j}^n + U_{i-1,j}^n}{6h_x} - \frac{v}{h_x^2}$$

$$\alpha_3 = \frac{1}{k} + \frac{2v}{h_x^2} + \frac{2v}{h_y^2}$$

$$\alpha_4 = \frac{-U_{i,j+1}^n - U_{i,j}^n - U_{i,j-1}^n}{6h_y} - \frac{v}{h_y^2}$$

$$\alpha_5 = \frac{U_{i,j+1}^n + U_{i,j}^n + U_{i,j-1}^n}{6h_y} - \frac{v}{h_y^2}$$

$$\alpha_6 = \frac{1}{k}$$

ve $i, j = 1(1)M - 1$ olmak üzere

$$\alpha_1 U_{i-1,j}^{n+1} + \alpha_2 U_{i+1,j}^{n+1} + \alpha_3 U_{i,j}^{n+1} + \alpha_4 U_{i,j-1}^{n+1} + \alpha_5 U_{i,j+1}^{n+1} = \alpha_6 U_{i,j}^n \quad (5.5.1)$$

bulunur.

Nümerik Sonuçlar

Problem 1 ve Problem 2' nin (5.5.1) ile elde edilen nümerik sonuçları Tablo 5.27-5.33' te verildi.

Problem 1' in $t = 0.25$ zamanında $v = 1$, $k = 0.001$ ve h' nin farklı değerleri için elde edilen nümerik sonuçları ile L_2 ve L_∞ hata normları Tablo 5.27' de sunuldu. Tablodan h değeri küçüldüğünde L_2 ve L_∞ hata normlarının birbirleriyle uyumlu olduğu görülmektedir.

Tablo 5.28' de ise Problem 1' in $t = 0.25$, $v = 1$ ve $h = 0.05$ için k' nin farklı değerlerinde elde edilen nümerik ve tam sonuçları ile L_2 ve L_∞ hata normları verildi. Tablodan, k değeri küçüldükçe nümerik sonuçların tam sonuçlara yakın olduğu, L_2 ve L_∞ hata normlarının iyileştiği görülmektedir.

Tablo 5.29' da $t = 0.25$ zamanında, $k = 0.01$ için farklı v ve M bölüntü değerlerinde elde edilen L_2 ve L_∞ hata normlarının, Ref. [24]' de lineerleştirilmiş Crank-Nicolson şeması kullanılarak elde edilen hata normlarıyla karşılaştırılması verildi. Tablodan $v = 1$, $v = 0.1$ ve $v = 0.05$ ve farklı M bölüntü sayıları için, SFY5 yaklaşımı kullanılarak elde edilen hata normlarının Ref. [24]' de verilenlerle uyumlu olduğu görülmektedir.

Tablo 5.30' da Problem 1' in $v = 1$, $k = 0.01$ ve $M = 16$ olmak üzere farklı t zamanında elde edilen nümerik çözümlerin tam çözümler ile karşılaştırılması verildi. Tablodan $t = 0.1$, $t = 1$, $t = 3$ ve $t = 9$ için elde edilen nümerik sonuçlar tam sonuçlara oldukça yakındır. Ayrıca L_2 ve L_∞ hata normları oldukça küçüktür.

Tablo 5.31' de $v = 0.01$, $k = 0.0125$ ve $t = 0.125$ zamanında Problem 2' nin SFY5 ile elde edilen nümerik sonuçlarının Ref. [24] ile karşılaştırılması verildi. Tablodan

$M = 32$ ve $M = 48$ için elde edilen nümerik sonuçların birbiriyle uyumlu olduğu görülmektedir.

Tablo 5.32 ve Tablo 5.33' te sırasıyla farklı h ve k değerlerinde Problem 2' nin elde edilen nümerik sonuçları sunuldu. Problem 2' nin Tablo 5.32' de $k = 0.001$, h' nin ve v' nin farklı değerleri için $t = 0.25$ zamanında SFY5 ile elde edilen nümerik çözümleri verildi. Problem 2' nin Tablo 5.33' te $h = 0.1$, v ve k' nin farklı değerleri için $t = 0.05$ zamanında SFY5 ile elde edilen nümerik çözümleri verildi.



Tablo 5.27: Problem 1' in $v = 1$, $k = 0.001$ ve h' nin farklı değerleri için $t = 0.25$ zamanında SFY5 ile elde edilen nümerik ve tam sonuçları

(x, y)	Nümerik Çözüm			Tam Çözüm
	$h = 0.1$	$h = 0.05$	$h = 0.025$	
(0.0, 0.0)	0.531209	0.531209	0.531209	0.531209
(0.0, 0.5)	0.468791	0.468791	0.468791	0.468791
(0.0, 1.0)	0.407333	0.407333	0.407333	0.407333
(0.1, 0.0)	0.518741	0.518741	0.518741	0.518741
(0.1, 0.2)	0.493749	0.493749	0.493748	0.493750
(0.2, 0.2)	0.481256	0.481256	0.481256	0.481259
(0.2, 0.5)	0.443986	0.443983	0.443980	0.443986
(0.3, 0.1)	0.481257	0.481257	0.481256	0.481259
(0.3, 0.5)	0.431676	0.431676	0.431672	0.431680
(0.3, 0.6)	0.419454	0.419454	0.419450	0.419458
(0.4, 0.5)	0.419453	0.419453	0.419449	0.419458
(0.5, 0.6)	0.395316	0.395316	0.395312	0.395321
(0.6, 0.3)	0.419454	0.419454	0.419450	0.419458
(0.7, 0.4)	0.395317	0.395317	0.395317	0.395321
(0.8, 0.7)	0.348643	0.348642	0.348642	0.348645
(0.9, 0.2)	0.395320	0.395320	0.395320	0.395321
(1.0, 1.0)	0.294215	0.294215	0.294215	0.294215
L_2	2.626×10^{-5}	5.404×10^{-5}	1.9748×10^{-4}	
L_∞	4.69×10^{-6}	4.82×10^{-6}	8.79×10^{-6}	

Tablo 5.28: Problem 1' in $v = 1$, $h = 0.05$ ve farklı k zaman adımları için $t = 0.25$ zamanında SFY5 ile elde edilen nümerik ve tam sonuçları

(x, y)	Nümerik Çözüm			Tam Çözüm
	$k = 0.01$	$k = 0.005$	$k = 0.001$	
(0.0, 0.0)	0.531209	0.531209	0.531209	0.531209
(0.0, 0.5)	0.468791	0.468791	0.468791	0.468791
(0.0, 1.0)	0.407333	0.407333	0.407333	0.407333
(0.1, 0.0)	0.518741	0.518741	0.518741	0.518741
(0.1, 0.2)	0.493744	0.493747	0.493749	0.493750
(0.2, 0.2)	0.481249	0.481254	0.481256	0.481259
(0.2, 0.5)	0.443973	0.443979	0.443983	0.443986
(0.3, 0.1)	0.481252	0.481255	0.481257	0.481259
(0.3, 0.5)	0.431664	0.431671	0.431676	0.431680
(0.3, 0.6)	0.419442	0.419449	0.419454	0.419458
(0.4, 0.5)	0.419440	0.419448	0.419453	0.419458
(0.5, 0.6)	0.395303	0.395311	0.395316	0.395321
(0.6, 0.3)	0.419442	0.419449	0.419454	0.419458
(0.7, 0.4)	0.395306	0.395313	0.395317	0.395321
(0.8, 0.7)	0.348635	0.348640	0.348642	0.348645
(0.9, 0.2)	0.395316	0.395318	0.395320	0.395321
(1.0, 1.0)	0.294215	0.294215	0.294215	0.294215
L_2	2.0643×10^{-4}	1.1214×10^{-4}	5.404×10^{-5}	
L_∞	1.838×10^{-5}	1.0×10^{-5}	4.82×10^{-6}	

Tablo 5.29: Problem 1' in $k = 0.01$, $t = 0.25$ ve v ' nin farklı değerleri için SFY5 ile elde edilen L_2 ve L_∞ değerlerinin Ref. [24] ile karşılaştırılması

v	M	L_2	$L_2[24]$	L_∞	$L_\infty[24]$
1	8×8	8.256×10^{-5}	5.311×10^{-5}	1.844×10^{-5}	1.189×10^{-5}
	32×32	3.0203×10^{-4}	1.904×10^{-4}	1.700×10^{-5}	1.065×10^{-5}
	48×48	1.1283×10^{-4}	2.843×10^{-4}	4.18×10^{-5}	1.060×10^{-5}
0.1	8×8	7.59642×10^{-3}	5.811×10^{-3}	2.49370×10^{-3}	1.751×10^{-3}
	32×32	1.394734×10^{-2}	9.465×10^{-3}	1.56405×10^{-3}	1.722×10^{-3}
	40×40	1.696055×10^{-2}	1.224×10^{-2}	1.53690×10^{-3}	1.242×10^{-3}
0.05	8×8	2.343358×10^{-2}	2.255×10^{-2}	1.226429×10^{-2}	1.016×10^{-2}
	24×24	3.165270×10^{-2}	2.044×10^{-2}	8.38257×10^{-3}	6.011×10^{-3}
	32×32	3.924601×10^{-2}	2.735×10^{-2}	8.00159×10^{-3}	6.663×10^{-3}

Tablo 5.30: Problem 1' in $v = 1$, $k = 0.01$ ve $M = 16$ olmak üzere farklı t zamanında SFY5 ile elde edilen nümerik ve tam sonuçlarının karşılaştırılması

(x, y)	$t = 0.1$		$t = 1$	
	Nümerik	Tam	Nümerik	Tam
(1/8, 1/8)	0.481255	0.481259	0.592661	0.592667
(3/8, 1/8)	0.450159	0.450166	0.562166	0.562177
(3/8, 3/8)	0.419445	0.419458	0.531189	0.531209
(4/8, 3/8)	0.404306	0.404319	0.515598	0.515620
(4/8, 4/8)	0.389348	0.389361	0.499977	0.500000
(5/8, 4/8)	0.374596	0.374608	0.484358	0.484380
(5/8, 5/8)	0.360073	0.360084	0.468770	0.468791
(7/8, 5/8)	0.331807	0.331812	0.437813	0.437823
(7/8, 7/8)	0.304701	0.304703	0.407328	0.407333
(1/8, 7/8)	0.389357	0.389361	0.499994	0.500000
L_2	1.2065×10^{-4}		2.0801×10^{-4}	
L_∞	1.327×10^{-5}		2.329×10^{-5}	
(x, y)	$t = 3$		$t = 9$	
	Nümerik	Tam	Nümerik	Tam
(1/8, 1/8)	0.798182	0.798187	0.987568	0.987568
(3/8, 1/8)	0.777291	0.777300	0.985936	0.985936
(3/8, 3/8)	0.754896	0.754915	0.984092	0.984094
(4/8, 3/8)	0.743147	0.743168	0.983084	0.983085
(4/8, 4/8)	0.731036	0.731059	0.982012	0.982014
(5/8, 4/8)	0.718572	0.718594	0.980874	0.980876
(5/8, 5/8)	0.705763	0.705785	0.979666	0.979668
(7/8, 5/8)	0.679167	0.679179	0.977022	0.977023
(7/8, 7/8)	0.651348	0.651355	0.974042	0.974043
(1/8, 7/8)	0.731053	0.731059	0.982013	0.982014
L_2	2.0481×10^{-4}		1.382×10^{-5}	
L_∞	2.304×10^{-5}		1.58×10^{-6}	

Tablo 5.31: Problem 2' nin $v = 0.01$, $k = 0.0125$ ve $t = 0.125$ zamanında SFY5 ile elde edilen nümerik sonuçlarının Ref. [24] ile karşılaştırılması

(x, y)	$M = 32$		$M = 48$	
	Nümerik	Nümerik[24]	Nümerik	Nümerik[24]
(1/8, 1/8)	0.393261	0.391154	0.390505	0.387991
(3/8, 1/8)	0.867840	0.894478	0.866943	0.893949
(3/8, 3/8)	-0.379336	-0.380232	-0.378571	-0.379037
(4/8, 3/8)	-0.005440	-0.005224	-0.005751	-0.005715
(4/8, 4/8)	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000
(5/8, 4/8)	0.398746	0.394053	0.397526	0.392413
(5/8, 5/8)	0.379337	0.380232	0.378572	0.379037
(7/8, 5/8)	0.849991	0.891940	0.846311	0.889148
(7/8, 7/8)	-0.393261	-0.391154	-0.390505	-0.387991
(1/8, 7/8)	0.266041	0.262426	0.265148	0.261139

Tablo 5.32: Problem 2' nin $k = 0.001$, h' nin ve v' nin farklı değerleri için $t = 0.25$ zamanında SFY5 ile elde edilen nümerik sonuçları

v	(x, y)	Nümerik Çözüm		
		$h = 0.1$	$h = 0.05$	$h = 0.025$
1	(0.1, 0.0)	0.587785	0.587785	0.587785
	(0.1, 0.5)	0.055702	0.051795	0.050821
	(0.4, 0.4)	0.070780	0.066404	0.065303
	(0.7, 0.7)	-0.174729	-0.166399	-0.164293
	(1.0, 1.0)	0.000000	0.000000	0.000000
0.5	(0.1, 0.0)	0.587785	0.587785	0.587785
	(0.1, 0.5)	0.054575	0.050815	0.049874
	(0.4, 0.4)	0.074214	0.069775	0.068652
	(0.7, 0.7)	-0.182269	-0.173607	-0.171411
	(1.0, 1.0)	0.000000	0.000000	0.000000
0.1	(0.1, 0.0)	0.587785	0.587785	0.587785
	(0.1, 0.5)	-0.086671	-0.082815	-0.081880
	(0.4, 0.4)	-0.042059	-0.040664	-0.040376
	(0.7, 0.7)	-0.055087	-0.051142	-0.050071
	(1.0, 1.0)	0.000000	0.000000	0.000000

Tablo 5.33: Problem 2' nin $h = 0.1$, v ve k ' nin farklı değerleri için $t = 0.05$ zamanında SFY5 ile elde edilen nümerik sonuçları

v	(x, y)	Nümerik Çözüm		
		$k = 0.001$	$k = 0.0001$	$k = 0.00001$
1	(0.1, 0.0)	0.587785	0.587785	0.587785
	(0.1, 0.5)	0.015851	0.018003	0.018217
	(0.4, 0.4)	0.031491	0.033518	0.033721
	(0.7, 0.7)	-0.121891	-0.124399	-0.124655
	(1.0, 1.0)	0.000000	0.000000	0.000000
0.5	(0.1, 0.0)	0.587785	0.587785	0.587785
	(0.1, 0.5)	-0.084833	-0.082079	-0.081812
	(0.4, 0.4)	-0.058238	-0.056109	-0.055902
	(0.7, 0.7)	-0.016336	-0.018064	-0.018234
	(1.0, 1.0)	0.000000	0.000000	0.000000
0.1	(0.1, 0.0)	0.587785	0.587785	0.587785
	(0.1, 0.5)	-0.451076	-0.450823	-0.450851
	(0.4, 0.4)	-0.307814	-0.307376	-0.307365
	(0.7, 0.7)	0.218846	0.218747	0.218764
	(1.0, 1.0)	0.000000	0.000000	0.000000

5.6 Sonlu Fark Yaklaşımı 6 (SFY6)

(5.1) ile verilen 2-boyutlu Burgers denkleminde U_t yerine (2.1.7) ile verilen ileri fark yaklaşımı, UU_x ve UU_y non-lineer terimleri yerine

$$UU_x \cong \frac{1}{2} \left[U_{i,j}^{n+1} \left(\frac{U_{i+1,j}^n - U_{i-1,j}^n}{2h_x} \right) + U_{i,j}^n \left(\frac{U_{i+1,j}^{n+1} - U_{i-1,j}^{n+1}}{2h_x} \right) \right]$$

$$UU_y \cong \frac{1}{2} \left[U_{i,j}^{n+1} \left(\frac{U_{i,j+1}^n - U_{i,j-1}^n}{2h_y} \right) + U_{i,j}^n \left(\frac{U_{i,j+1}^{n+1} - U_{i,j-1}^{n+1}}{2h_y} \right) \right]$$

sonlu fark yaklaşımları[41] ile U_{xx} ve U_{yy} türevlerinin yerine

$$U_{xx} \cong \frac{U_{i-1,j}^n - 2U_{i,j}^n + U_{i+1,j}^n}{h_x^2}$$

$$U_{yy} \cong \frac{U_{i,j-1}^n - 2U_{i,j}^n + U_{i,j+1}^n}{h_y^2}$$

sonlu fark yaklaşımları yazılır ve gerekli düzenlemeler yapılırsa

$$\alpha_1 = -\frac{U_{i,j}^n}{4h_x}, \quad \alpha_2 = \frac{U_{i,j}^n}{4h_x}$$

$$\alpha_3 = \frac{1}{k} + \frac{U_{i+1,j}^n - U_{i-1,j}^n}{4h_x} + \frac{U_{i,j+1}^n - U_{i,j-1}^n}{4h_y}$$

$$\alpha_4 = -\frac{U_{i,j}^n}{4h_y}, \quad \alpha_5 = \frac{U_{i,j}^n}{4h_y}, \quad \alpha_6 = \frac{v}{h_x^2}$$

$$\alpha_7 = \frac{1}{k} - \frac{2v}{h_x^2} - \frac{2v}{h_y^2}, \quad \alpha_8 = \frac{v}{h_y^2}$$

ve $i, j = 1(1)M - 1$ olmak üzere

$$\begin{aligned} & \alpha_1 U_{i-1,j}^{n+1} + \alpha_2 U_{i+1,j}^{n+1} + \alpha_3 U_{i,j}^{n+1} + \alpha_4 U_{i,j-1}^{n+1} + \alpha_5 U_{i,j+1}^{n+1} \\ & = \alpha_6 U_{i-1,j}^n + \alpha_6 U_{i+1,j}^n + \alpha_7 U_{i,j}^n + \alpha_8 U_{i,j-1}^n + \alpha_8 U_{i,j+1}^n \end{aligned} \quad (5.6.1)$$

bulunur.

Nümerik Sonuçlar

Problem 1 ve Problem 2' nin (5.6.1) ile elde edilen nümerik sonuçları Tablo 5.34-5.39' da verildi.

Problem 1' in $t = 0.25$ zamanında $v = 1$, $k = 0.0001$ ve h ' nin farklı değerleri için elde edilen nümerik sonuçları ile L_2 ve L_∞ hata normları Tablo 5.34' te sunuldu. Tablodan h değerleri küçüldükçe L_2 ve L_∞ hata normlarının daha da küçüldüğü açıktır.

Tablo 5.35' te ise Problem 1' in $t = 0.25$, $v = 1$ ve $h = 0.1$ için k ' nin farklı değerlerinde elde edilen nümerik ve tam çözümleri ile L_2 ve L_∞ hata normları verildi. Tablodan zaman adımı $k = 0.001$ ' den $k = 0.0005$ ' e küçüldüğünde L_2 ve L_∞ hata normlarının uyumlu olduğu, $k = 0,0001$ ' e küçüldüğünde ise L_2 ve L_∞ hata normlarının arttığı görülmektedir.

Problem 1' in, $t = 0.25$ zamanında $h = 0.01$, $k = 0.01$ için farklı v ve M bölüntü değerlerinde elde edilen L_2 ve L_∞ hata normlarının, Ref. [24]' de lineerleştirilmiş Crank-Nicolson şeması kullanılarak elde edilen hata normlarıyla karşılaştırılması Tablo 5.36' da verildi. Tablodan $v = 1$ ve $M = 8$ bölüntü sayısı için, $k = 0.001$ için SFY6 yaklaşımı kullanılarak elde edilen hata normlarının Ref. [24]' de verilenlerden daha iyi olduğu görülmektedir. Aynı şekilde $v = 0.1$, $k = 0.01$ ve $M = 8$ için hata normlarını karşılaştırdığımızda elde edilen sonuçların Ref. [24]' de verilenlerle uyumlu olduğu açıktır. $v = 0.1$, $k = 0.001$, $M = 32$ ve $M = 40$ için hata normlarını karşılaştırdığımızda elde edilen sonuçların Ref. [24]' de verilenlerle uyumlu olduğu açıktır. Benzer şekilde $v = 0.05$, $M = 8$ ve $M = 24$ için hata normları birbirleriyle uyumludur. Aynı şekilde $v = 0.05$, $k = 0.001$ ve $M = 32$ için hata normları birbirleriyle uyumludur.

Problem 2' nin tam çözümü mevcut olmadığından $v = 0.01$, $k = 0.0125$, $t = 0.125$ ve farklı M bölüntü sayılarında sadece nümerik sonuçları Ref. [24]' de verilenler ile karşılaştırılarak Tablo 5.37' de verildi. Tablodan $M = 32$ ve $M = 48$ için elde edilen nümerik sonuçların birbiriyle uyumlu olduğu görüldü.

Tablo 5.38 ve Tablo 5.39' da sırasıyla farklı h ve k değerlerinde Problem 2' nin elde edilen nümerik sonuçları sunuldu. Problem 2' nin Tablo 5.38' de $k = 0.001$, h' nin ve v' nin farklı değerleri için $t = 0.25$ zamanında SFY6 ile elde edilen nümerik çözümleri verildi. Problem 2' nin Tablo 5.39' da $h = 0.1$, v ve k' nin farklı değerleri için $t = 0.05$ zamanında SFY6 ile elde edilen nümerik çözümleri verildi.

Tablo 5.34: Problem 1' in $v = 1$, $k = 0.0001$ ve h ' nin farklı değerleri için $t = 0.25$ zamanında SFY6 ile elde edilen nümerik ve tam sonuçları

(x, y)	Nümerik Çözüm			Tam Çözüm
	$h = 0.1$	$h = 0.05$	$h = 0.025$	
(0.0, 0.0)	0.531209	0.531209	0.531209	0.531209
(0.0, 0.5)	0.468791	0.468791	0.468791	0.468791
(0.0, 1.0)	0.407333	0.407333	0.407333	0.407333
(0.1, 0.0)	0.518741	0.518741	0.518741	0.518741
(0.1, 0.2)	0.493751	0.493751	0.493751	0.493750
(0.2, 0.2)	0.481259	0.481259	0.481259	0.481259
(0.2, 0.5)	0.443985	0.443986	0.443986	0.443986
(0.3, 0.1)	0.481259	0.481259	0.481259	0.481259
(0.3, 0.5)	0.431678	0.431680	0.431680	0.431680
(0.3, 0.6)	0.419455	0.419457	0.419458	0.419458
(0.4, 0.5)	0.419455	0.419457	0.419458	0.419458
(0.5, 0.6)	0.395319	0.395321	0.395321	0.395321
(0.6, 0.3)	0.419455	0.419457	0.419458	0.419458
(0.7, 0.4)	0.395319	0.395321	0.395321	0.395321
(0.8, 0.7)	0.348645	0.348645	0.348645	0.348645
(0.9, 0.2)	0.395320	0.395321	0.395321	0.395321
(1.0, 1.0)	0.294215	0.294215	0.294215	0.294215
L_2	1.177×10^{-5}	5.51×10^{-6}	6.75×10^{-6}	
L_∞	2.57×10^{-6}	9.5×10^{-7}	9.0×10^{-7}	

Tablo 5.35: Problem 1' in $v = 1$, $h = 0.1$ ve $t = 0.25$ için farklı k değerlerinde SFY6 ile elde edilen nümerik ve tam sonuçları

(x, y)	Nümerik Çözüm			Tam Çözüm
	$k = 0.001$	$k = 0.0005$	$k = 0.0001$	
(0.0, 0.0)	0.531209	0.531209	0.531209	0.531209
(0.0, 0.5)	0.468791	0.468791	0.468791	0.468791
(0.0, 1.0)	0.407333	0.407333	0.407333	0.407333
(0.1, 0.0)	0.518741	0.518741	0.518741	0.518741
(0.1, 0.2)	0.493750	0.493750	0.493750	0.493750
(0.2, 0.2)	0.481258	0.481258	0.481259	0.481259
(0.2, 0.5)	0.443985	0.443985	0.443985	0.443986
(0.3, 0.1)	0.481258	0.481258	0.481259	0.481259
(0.3, 0.5)	0.431679	0.431679	0.431678	0.431680
(0.3, 0.6)	0.419457	0.419456	0.419455	0.419458
(0.4, 0.5)	0.419457	0.419456	0.419455	0.419458
(0.5, 0.6)	0.395320	0.395320	0.395319	0.395321
(0.6, 0.3)	0.419457	0.419456	0.419455	0.419458
(0.7, 0.4)	0.395320	0.395320	0.395319	0.395321
(0.8, 0.7)	0.348645	0.348644	0.348645	0.348645
(0.9, 0.2)	0.395321	0.395321	0.395320	0.395321
(1.0, 1.0)	0.294215	0.294215	0.294215	0.294215
L_2	5.49×10^{-6}	8.21×10^{-6}	1.177×10^{-5}	
L_∞	9.8×10^{-7}	1.49×10^{-7}	2.57×10^{-6}	

Tablo 5.36: Problem 1' in $k = 0.01$, $t = 0.25$ ve v ' nin farklı değerleri için SFY6 ile elde edilen L_2 ve L_∞ değerlerinin Ref. [24] ile karşılaştırılması (*' da $k = 0.001$ alındı.)

v	M		L_2	$L_2[24]$	L_∞	$L_\infty[24]$
1	8×8	*	9.26×10^{-6}	5.311×10^{-5}	2.08×10^{-6}	1.189×10^{-5}
0.1	8×8		4.79353×10^{-3}	5.811×10^{-3}	2.12854×10^{-3}	1.751×10^{-3}
	32×32	*	1.37266×10^{-3}	9.465×10^{-3}	1.4487×10^{-4}	1.722×10^{-3}
	40×40	*	3.623134×10^{-2}	1.224×10^{-2}	7.28942×10^{-4}	1.242×10^{-3}
0.05	8×8		2.325248×10^{-2}	2.255×10^{-2}	2.003551×10^{-2}	1.016×10^{-2}
	24×24		1.484442×10^{-2}	2.044×10^{-2}	2.54568×10^{-3}	6.011×10^{-3}
	32×32	*	6.37596×10^{-2}	2.735×10^{-2}	1.23435×10^{-3}	6.663×10^{-3}

Tablo 5.37: Problem 2' nin $v = 0.01$, $k = 0.0125$ ve $t = 0.125$ zamanında SFY6 ile elde edilen nümerik sonuçlarının Ref. [24] ile karşılaştırılması

(x, y)	$M = 32$		$M = 48$	
	Nümerik	Nümerik[24]	Nümerik	Nümerik[24]
$(1/8, 1/8)$	0.389452	0.391154	0.386502	0.387991
$(3/8, 1/8)$	0.903728	0.894478	0.898330	0.893949
$(3/8, 3/8)$	-0.380478	-0.380232	-0.379767	-0.379037
$(4/8, 3/8)$	-0.005628	-0.005224	-0.005633	-0.005715
$(4/8, 4/8)$	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000
$(5/8, 4/8)$	0.395909	0.394053	0.395523	0.392413
$(5/8, 5/8)$	0.479100	0.380232	0.379767	0.379037
$(7/8, 5/8)$	0.900320	0.891940	0.893494	0.889148
$(7/8, 7/8)$	-0.389451	-0.391154	-0.386502	-0.387991
$(1/8, 7/8)$	0.263364	0.262426	0.263202	0.261139

Tablo 5.38: Problem 2' nin $k = 0.001$, h' nin ve v' nin farklı değerleri için $t = 0.25$ zamanında SFY6 ile elde edilen nümerik sonuçları

v	(x, y)	Nümerik Çözüm		
		$h = 0.1$	$h = 0.05$	$h = 0.025$
1	(0.1, 0.0)	0.587785	0.587785	0.587785
	(0.1, 0.5)	0.055650	0.051785	0.050819
	(0.4, 0.4)	0.070434	0.066309	0.065280
	(0.7, 0.7)	-0.173929	-0.166190	-0.164242
	(1.0, 1.0)	0.000000	0.000000	0.000000
0.5	(0.1, 0.0)	0.587785	0.587785	0.587785
	(0.1, 0.5)	0.054605	0.050919	0.049940
	(0.4, 0.4)	0.073632	0.069717	0.068680
	(0.7, 0.7)	-0.180829	-0.173368	-0.171411
	(1.0, 1.0)	0.000000	0.000000	0.000000
0.1	(0.1, 0.0)	0.587785	0.587785	0.587785
	(0.1, 0.5)	-0.087545	-0.081926	-0.080632
	(0.4, 0.4)	-0.043673	-0.040446	-0.039691
	(0.7, 0.7)	-0.048423	-0.050201	-0.050551
	(1.0, 1.0)	0.000000	0.000000	0.000000

Tablo 5.39: Problem 2' nin $h = 0.1$, v ve k ' nin farklı değerleri için $t = 0.05$ zamanında SFY6 ile elde edilen nümerik sonuçları

v	(x, y)	Nümerik Çözüm		
		$k = 0.001$	$k = 0.0001$	$k = 0.00001$
1	(0.1, 0.0)	0.587785	0.587785	0.587785
	(0.1, 0.5)	0.020567	0.018453	0.018240
	(0.4, 0.4)	0.035586	0.033598	0.033399
	(0.7, 0.7)	-0.126598	-0.124101	-0.123854
	(1.0, 1.0)	0.000000	0.000000	0.000000
0.5	(0.1, 0.0)	0.587785	0.587785	0.587785
	(0.1, 0.5)	-0.078974	-0.081779	-0.082059
	(0.4, 0.4)	-0.053875	-0.056006	-0.056218
	(0.7, 0.7)	-0.018837	-0.017136	-0.016967
	(1.0, 1.0)	0.000000	0.000000	0.000000
0.1	(0.1, 0.0)	0.587785	0.587785	0.587785
	(0.1, 0.5)	-0.459801	-0.460147	-0.460182
	(0.4, 0.4)	-0.305812	-0.306299	-0.306347
	(0.7, 0.7)	0.224165	0.224258	0.224267
	(1.0, 1.0)	0.000000	0.000000	0.000000

5.7 Sonlu Fark Yaklaşımı 7 (SFY7)

(5.1) ile verilen 2-boyutlu Burgers denkleminde U_t yerine (2.1.7) ile verilen ileri fark yaklaşımı, UU_x ve UU_y non-lineer terimleri yerine

$$UU_x \cong \frac{1}{2} \left[U_{i,j}^{n+1} \left(\frac{U_{i+1,j}^n - U_{i-1,j}^n}{2h_x} \right) + U_{i,j}^n \left(\frac{U_{i+1,j}^{n+1} - U_{i-1,j}^{n+1}}{2h_x} \right) \right]$$

$$UU_y \cong \frac{1}{2} \left[U_{i,j}^{n+1} \left(\frac{U_{i,j+1}^n - U_{i,j-1}^n}{2h_y} \right) + U_{i,j}^n \left(\frac{U_{i,j+1}^{n+1} - U_{i,j-1}^{n+1}}{2h_y} \right) \right]$$

sonlu fark yaklaşımları[41] ile U_{xx} ve U_{yy} türevlerinin yerine

$$U_{xx} \cong \frac{U_{i-1,j}^{n+1} - 2U_{i,j}^{n+1} + U_{i+1,j}^{n+1}}{h_x^2}$$

$$U_{yy} \cong \frac{U_{i,j-1}^{n+1} - 2U_{i,j}^{n+1} + U_{i,j+1}^{n+1}}{h_y^2}$$

sonlu fark yaklaşımları yazılır ve gerekli düzenlemeler yapılırsa

$$\alpha_1 = -\frac{U_{i,j}^n}{4h_x} - \frac{v}{h_x^2}, \quad \alpha_2 = \frac{U_{i,j}^n}{4h_x} - \frac{v}{h_x^2}$$

$$\alpha_3 = \frac{1}{k} + \frac{2v}{h_x^2} + \frac{2v}{h_y^2} + \frac{U_{i+1,j}^n - U_{i-1,j}^n}{4h_x} + \frac{U_{i,j+1}^n - U_{i,j-1}^n}{4h_y}$$

$$\alpha_4 = -\frac{U_{i,j}^n}{4h_y} - \frac{v}{h_y^2}, \quad \alpha_5 = \frac{U_{i,j}^n}{4h_y} - \frac{v}{h_y^2}, \quad \alpha_6 = \frac{1}{k}$$

ve $i, j = 1(1)M - 1$ olmak üzere

$$\alpha_1 U_{i-1,j}^{n+1} + \alpha_2 U_{i+1,j}^{n+1} + \alpha_3 U_{i,j}^{n+1} + \alpha_4 U_{i,j-1}^{n+1} + \alpha_5 U_{i,j+1}^{n+1} = \alpha_6 U_{i,j}^n \quad (5.7.1)$$

sonlu fark yaklaşımı bulunur.

Nümerik Sonuçlar

Problem 1 ve Problem 2' nin (5.7.1) ile elde edilen nümerik sonuçları Tablo 5.40-5.46' da verildi.

Problem 1' in $t = 0.25$ zamanında $v = 1$, $k = 0.001$ ve h ' nin farklı değerleri için elde edilen nümerik sonuçları ile L_2 ve L_∞ hata normları Tablo 5.40' ta sunuldu. Tablodan h değeri küçüldükçe L_2 ve L_∞ hata normlarının birbiriyle uyumlu olduğu görüldü.

Tablo 5.41' de ise Problem 1' in $t = 0.25$, $v = 1$ ve $h = 0.05$ için k ' nin farklı değerlerinde elde edilen nümerik ve tam çözümleri ile L_2 ve L_∞ hata normları verildi. Tablodan, k zaman adımı küçüldükçe nümerik çözümlerin tam çözüme yakın olduğu, L_2 ve L_∞ hata normlarında küçülme olduğu görülmektedir.

Problem 1' in, $t = 0.25$ zamanında, $k = 0.01$ için farklı v ve M bölüntü değerlerinde elde edilen L_2 ve L_∞ hata normlarının, Ref. [24]' de lineerleştirilmiş Crank-Nicolson şeması kullanılarak elde edilen hata normlarıyla karşılaştırılması Tablo 5.42' de verildi. Tablodan görüleceği üzere hata normlarını karşılaştırdığımızda elde edilen sonuçların Ref. [24]' de verilenlerle uyum içinde olduğu görüldü.

Tablo 5.43' te $v = 1$, $k = 0.01$ ve $M = 16$ olmak üzere farklı t zamanında Problem 1' in SFY7 ile elde edilen nümerik ve tam sonuçlarının karşılaştırılması verilmiştir. Tablodan farklı t zamanlarında nümerik ve tam sonuçların birbirine yakın olduğu görüldü. L_2 ve L_∞ hata normlarının ise yeterince küçüktür.

Problem 2' nin tam çözümü mevcut olmadığından $v = 0.01$, $k = 0.0125$, $t = 0.125$ ve farklı M bölüntü sayılarında sadece nümerik sonuçların Ref. [24]' de verilenler ile karşılaştırılması Tablo 5.44' te verildi. Tablodan $M = 32$ ve $M = 48$ için elde edilen nümerik sonuçların birbiriyle uyumlu olduğu görüldü.

Tablo 5.45 ve Tablo 5.46' da Problem 2' nin sırasıyla farklı h ve k değerlerinde elde edilen nümerik sonuçları sunuldu. Problem 2' nin Tablo 5.45' te $k = 0.001$, h' nin ve v' nin farklı değerleri için $t = 0.25$ zamanında SFY7 ile elde edilen nümerik çözümleri verildi. Problem 2' nin Tablo 5.46' da $h = 0.1$, v ve k' nin farklı değerleri için $t = 0.05$ zamanında SFY7 ile elde edilen nümerik çözümleri verildi.



Tablo 5.40: Problem 1' in $v = 1$, $k = 0.001$ ve h' nin farklı değerleri için $t = 0.25$ zamanında SFY7 ile elde edilen nümerik ve tam sonuçları

(x, y)	Nümerik Çözüm			Tam Çözüm
	$h = 0.1$	$h = 0.05$	$h = 0.025$	
(0.0, 0.0)	0.531209	0.531209	0.531209	0.531209
(0.0, 0.5)	0.468791	0.468791	0.468791	0.468791
(0.0, 1.0)	0.407333	0.407333	0.407333	0.407333
(0.1, 0.0)	0.518741	0.518741	0.518741	0.518741
(0.1, 0.2)	0.493750	0.493750	0.493749	0.493750
(0.2, 0.2)	0.481257	0.481258	0.481258	0.481259
(0.2, 0.5)	0.443984	0.443985	0.443985	0.443986
(0.3, 0.1)	0.481258	0.481258	0.481258	0.481259
(0.3, 0.5)	0.431678	0.431679	0.431679	0.431680
(0.3, 0.6)	0.419455	0.419457	0.419457	0.419458
(0.4, 0.5)	0.419455	0.419456	0.419457	0.419458
(0.5, 0.6)	0.395318	0.395320	0.395320	0.395321
(0.6, 0.3)	0.419455	0.419457	0.419457	0.419458
(0.7, 0.4)	0.395318	0.395320	0.395320	0.395321
(0.8, 0.7)	0.348643	0.348644	0.348645	0.348645
(0.9, 0.2)	0.395320	0.395321	0.395321	0.395321
(1.0, 1.0)	0.294215	0.294215	0.294215	0.294215
L_2	1.619×10^{-5}	1.608×10^{-5}	2.658×10^{-5}	
L_∞	2.89×10^{-6}	1.37×10^{-6}	1.15×10^{-6}	

Tablo 5.41: Problem 1' in $v = 1$, $h = 0.05$ ve farklı k zaman adımları için $t = 0.25$ zamanında SFY7 ile elde edilen nümerik ve tam sonuçları

(x, y)	Nümerik Çözüm			Tam Çözüm
	$k = 0.01$	$k = 0.005$	$k = 0.001$	
(0.0, 0.0)	0.531209	0.531209	0.531209	0.531209
(0.0, 0.5)	0.468791	0.468791	0.468791	0.468791
(0.0, 1.0)	0.407333	0.407333	0.407333	0.407333
(0.1, 0.0)	0.518741	0.518741	0.518741	0.518741
(0.1, 0.2)	0.493747	0.493749	0.493750	0.493750
(0.2, 0.2)	0.481254	0.481256	0.481258	0.481259
(0.2, 0.5)	0.443979	0.443982	0.443985	0.443986
(0.3, 0.1)	0.481255	0.481257	0.481258	0.481259
(0.3, 0.5)	0.431671	0.431675	0.431679	0.431680
(0.3, 0.6)	0.419449	0.419453	0.419457	0.419458
(0.4, 0.5)	0.419448	0.419452	0.419456	0.419458
(0.5, 0.6)	0.395311	0.395316	0.395320	0.395321
(0.6, 0.3)	0.419449	0.419453	0.419457	0.419458
(0.7, 0.4)	0.395312	0.395316	0.395320	0.395321
(0.8, 0.7)	0.348640	0.348642	0.348644	0.348645
(0.9, 0.2)	0.395318	0.395319	0.395321	0.395321
(1.0, 1.0)	0.294215	0.294215	0.294215	0.294215
L_2	1.1496×10^{-4}	5.973×10^{-5}	1.608×10^{-5}	
L_∞	1.036×10^{-5}	5.36×10^{-6}	1.37×10^{-6}	

Tablo 5.42: Problem 1' in $k = 0.01$, $t = 0.25$ ve v ' nin farklı değerleri için SFY7 ile elde edilen L_2 ve L_∞ değerlerinin Ref. [24] ile karşılaştırılması

v	M	L_2	$L_2[24]$	L_∞	$L_\infty[24]$
1	8×8	5.59×10^{-5}	5.311×10^{-5}	1.256×10^{-5}	1.189×10^{-5}
	32×32	1.7976×10^{-4}	1.904×10^{-4}	1.003×10^{-5}	1.065×10^{-5}
	48×48	2.5987×10^{-4}	2.843×10^{-4}	9.81×10^{-6}	1.060×10^{-5}
0.1	8×8	6.70584×10^{-3}	5.811×10^{-3}	3.07340×10^{-3}	1.751×10^{-3}
	32×32	1.186936×10^{-2}	9.465×10^{-3}	8.8513×10^{-4}	1.722×10^{-3}
	40×40	1.452069×10^{-2}	1.224×10^{-2}	8.3044×10^{-4}	1.242×10^{-3}
0.05	8×8	2.644817×10^{-2}	2.255×10^{-2}	2.318571×10^{-2}	1.016×10^{-2}
	24×24	2.265204×10^{-2}	2.044×10^{-2}	5.52447×10^{-3}	6.011×10^{-3}
	32×32	2.613906×10^{-2}	2.735×10^{-2}	4.43698×10^{-3}	6.663×10^{-3}

Tablo 5.43: Problem 1' in $v = 1$, $k = 0.01$ ve $M = 16$ olmak üzere farklı t zamanında SFY7 ile elde edilen nümerik ve tam sonuçlarının karşılaştırılması

(x, y)	$t = 0.1$		$t = 1$	
	Nümerik	Tam	Nümerik	Tam
(1/8, 1/8)	0.481256	0.481259	0.592664	0.592667
(3/8, 1/8)	0.450162	0.450166	0.562172	0.562177
(3/8, 3/8)	0.419450	0.419458	0.531199	0.531209
(4/8, 3/8)	0.404311	0.404319	0.515609	0.515620
(4/8, 4/8)	0.389353	0.389361	0.499988	0.500000
(5/8, 4/8)	0.374600	0.374608	0.484369	0.484380
(5/8, 5/8)	0.360077	0.360084	0.468780	0.468791
(7/8, 5/8)	0.331809	0.331812	0.437818	0.437823
(7/8, 7/8)	0.304702	0.304703	0.407330	0.407333
(1/8, 7/8)	0.389359	0.389361	0.499997	0.500000
L_2	7.351×10^{-5}		1.0741×10^{-4}	
L_∞	8.02×10^{-6}		1.193×10^{-5}	
(x, y)	$t = 3$		$t = 9$	
	Nümerik	Tam	Nümerik	Tam
(1/8, 1/8)	0.798187	0.798187	0.987569	0.987568
(3/8, 1/8)	0.777299	0.777300	0.985937	0.985936
(3/8, 3/8)	0.754913	0.754915	0.984095	0.984094
(4/8, 3/8)	0.743165	0.743168	0.983086	0.983085
(4/8, 4/8)	0.731055	0.731059	0.982015	0.982014
(5/8, 4/8)	0.718591	0.718594	0.980877	0.980876
(5/8, 5/8)	0.705781	0.705785	0.979669	0.979668
(7/8, 5/8)	0.679176	0.679179	0.977023	0.977023
(7/8, 7/8)	0.651353	0.651355	0.974043	0.974043
(1/8, 7/8)	0.731058	0.731059	0.982014	0.982014
L_2	3.139×10^{-5}		1.358×10^{-5}	
L_∞	3.85×10^{-6}		1.55×10^{-6}	

Tablo 5.44: Problem 2' nin $v = 0.01$, $k = 0.0125$ ve $t = 0.125$ zamanında SFY7 ile elde edilen nümerik sonuçların Ref. [24] ile karşılaştırılması

(x, y)	$M = 32$		$M = 48$	
	Nümerik	Nümerik[24]	Nümerik	Nümerik[24]
(1/8, 1/8)	0.394664	0.391154	0.392062	0.387991
(3/8, 1/8)	0.909923	0.894478	0.904216	0.893949
(3/8, 3/8)	-0.383053	-0.380232	-0.382332	-0.379037
(4/8, 3/8)	-0.006102	-0.005224	-0.006106	-0.005715
(4/8, 4/8)	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000
(5/8, 4/8)	0.398305	0.394053	0.397918	0.392413
(5/8, 5/8)	0.383054	0.380232	0.382333	0.379037
(7/8, 5/8)	0.906432	0.891940	0.898960	0.889148
(7/8, 7/8)	-0.394664	-0.391154	-0.392062	-0.387991
(1/8, 7/8)	0.264593	0.262426	0.264424	0.261139

Tablo 5.45: Problem 2' nin $k = 0.001$, h' nin ve v' nin farklı değerleri için $t = 0.25$ zamanında SFY7 ile elde edilen nümerik sonuçları

v	(x, y)	Nümerik Çözüm		
		$h = 0.1$	$h = 0.05$	$h = 0.025$
1	(0.1, 0.0)	0.587785	0.587785	0.587785
	(0.1, 0.5)	0.055649	0.051784	0.050819
	(0.4, 0.4)	0.070432	0.066309	0.065280
	(0.7, 0.7)	-0.173927	-0.166189	-0.164241
	(1.0, 1.0)	0.000000	0.000000	0.000000
0.5	(0.1, 0.0)	0.587785	0.587785	0.587785
	(0.1, 0.5)	0.054461	0.050789	0.049869
	(0.4, 0.4)	0.073475	0.069576	0.068604
	(0.7, 0.7)	-0.180617	-0.173178	-0.171307
	(1.0, 1.0)	0.000000	0.000000	0.000000
0.1	(0.1, 0.0)	0.587785	0.587785	0.587785
	(0.1, 0.5)	-0.089036	-0.083361	-0.083361
	(0.4, 0.4)	-0.044558	-0.041323	-0.041323
	(0.7, 0.7)	-0.047459	-0.049238	-0.049238
	(1.0, 1.0)	0.000000	0.000000	0.000000

Tablo 5.46: Problem 2' nin $h = 0.1$, v ve k' nin farklı değerleri için $t = 0.05$ zamanında SFY7 ile elde edilen nümerik sonuçları

v	(x, y)	Nümerik Çözüm		
		$k = 0.001$	$k = 0.0001$	$k = 0.00001$
1	(0.1, 0.0)	0.587785	0.587785	0.587785
	(0.1, 0.5)	0.015827	0.017979	0.018192
	(0.4, 0.4)	0.031156	0.033155	0.033354
	(0.7, 0.7)	-0.121098	-0.123551	-0.123799
	(1.0, 1.0)	0.000000	0.000000	0.000000
0.5	(0.1, 0.0)	0.587785	0.587785	0.587785
	(0.1, 0.5)	-0.085180	-0.082400	-0.082121
	(0.4, 0.4)	-0.058585	-0.056477	-0.056265
	(0.7, 0.7)	-0.015096	-0.016762	-0.016930
	(1.0, 1.0)	0.000000	0.000000	0.000000
0.1	(0.1, 0.0)	0.587785	0.587785	0.587785
	(0.1, 0.5)	-0.460568	-0.460224	-0.460190
	(0.4, 0.4)	-0.306888	-0.306407	-0.306358
	(0.7, 0.7)	0.224370	0.224278	0.224269
	(1.0, 1.0)	0.000000	0.000000	0.000000

5.8 Sonlu Fark Yaklaşımı 8 (SFY8)

(5.1) ile verilen 2-boyutlu Burgers denkleminde U_t yerine (2.1.7) ile verilen ileri fark yaklaşımı, UU_x ve UU_y non-lineer terimleri yerine

$$UU_x \cong \frac{1}{2} \left[U_{i,j}^{n+1} \left(\frac{U_{i+1,j}^n - U_{i-1,j}^n}{2h_x} \right) + U_{i,j}^n \left(\frac{U_{i+1,j}^{n+1} - U_{i-1,j}^{n+1}}{2h_x} \right) \right]$$

$$UU_y \cong \frac{1}{2} \left[U_{i,j}^{n+1} \left(\frac{U_{i,j+1}^n - U_{i,j-1}^n}{2h_y} \right) + U_{i,j}^n \left(\frac{U_{i,j+1}^{n+1} - U_{i,j-1}^{n+1}}{2h_y} \right) \right]$$

sonlu fark yaklaşımları[41] ile U_{xx} ve U_{yy} türevlerinin yerine

$$U_{xx} \cong \frac{1}{2} \left[\frac{U_{i-1,j}^{n+1} - 2U_{i,j}^{n+1} + U_{i+1,j}^{n+1}}{h_x^2} + \frac{U_{i-1,j}^n - 2U_{i,j}^n + U_{i+1,j}^n}{h_x^2} \right]$$

$$U_{yy} \cong \frac{1}{2} \left[\frac{U_{i,j-1}^{n+1} - 2U_{i,j}^{n+1} + U_{i,j+1}^{n+1}}{h_y^2} + \frac{U_{i,j-1}^n - 2U_{i,j}^n + U_{i,j+1}^n}{h_y^2} \right]$$

sonlu fark yaklaşımları yazılır ve gerekli düzenlemeler yapılırsa

$$\alpha_1 = -\frac{U_{i,j}^n}{4h_x} - \frac{v}{2h_x^2}, \quad \alpha_2 = \frac{U_{i,j}^n}{4h_x} - \frac{v}{2h_x^2}$$

$$\alpha_3 = \frac{1}{k} + \frac{v}{h_x^2} + \frac{v}{h_y^2} + \frac{U_{i+1,j}^n - U_{i-1,j}^n}{4h_x} + \frac{U_{i,j+1}^n - U_{i,j-1}^n}{4h_y}$$

$$\alpha_4 = -\frac{U_{i,j}^n}{4h_y} - \frac{v}{2h_y^2}, \quad \alpha_5 = \frac{U_{i,j}^n}{4h_y} - \frac{v}{2h_y^2}, \quad \alpha_6 = \frac{v}{2h_x^2},$$

$$\alpha_7 = \frac{1}{k} - \frac{v}{h_x^2} - \frac{v}{h_y^2}, \quad \alpha_8 = \frac{v}{2h_y^2}$$

ve $i, j = 1(1)M - 1$ olmak üzere

$$\begin{aligned} & \alpha_1 U_{i-1,j}^{n+1} + \alpha_2 U_{i+1,j}^{n+1} + \alpha_3 U_{i,j}^{n+1} + \alpha_4 U_{i,j-1}^{n+1} + \alpha_5 U_{i,j+1}^{n+1} \\ & = \alpha_6 U_{i-1,j}^n + \alpha_7 U_{i+1,j}^n + \alpha_8 U_{i,j}^n + \alpha_9 U_{i,j-1}^n + \alpha_{10} U_{i,j+1}^n \end{aligned} \quad (5.8.1)$$

bulunur.

Nümerik Sonuçlar

Problem 1 ve Problem 2' nin (5.8.1) ile elde edilen nümerik sonuçları Tablo 5.47-5.53' te verildi.

Problem 1' in $t = 0.25$ zamanında $v = 1$, $k = 0.001$ ve h ' nin farklı değerleri için elde edilen nümerik sonuçları ile L_2 ve L_∞ hata normları Tablo 5.47' de sunuldu. Tablodan h değeri küçüldükçe nümerik çözümlerin analitik çözümlere yaklaştığı, L_2 ve L_∞ hata normlarının küçüldüğü görülmektedir.

Tablo 5.48' de ise Problem 1' in $t = 0.25$, $v = 1$ ve $h = 0.05$ için k ' nin farklı değerlerinde elde edilen nümerik ve tam çözümleri ile L_2 ve L_∞ hata normları verildi. Tablodan, k zaman adımı küçüldükçe nümerik çözümlerin analitik çözüme yaklaştığı, L_2 ve L_∞ hata normlarının uyumlu olduğu görüldü.

Problem 1' in, $t = 0.25$ zamanında, $k = 0.01$ için farklı v ve M bölüntü değerlerinde elde edilen L_2 ve L_∞ hata normlarının, Ref. [24]' de lineerleştirilmiş Crank-Nicolson şeması kullanılarak elde edilen hata normlarıyla karşılaştırılması Tablo 5.49' da verildi. Tablodan $v = 1$ ve $M = 8$ bölüntü sayısı için, SFY8 yaklaşımı kullanılarak elde edilen hata normlarının Ref. [24]' de verilenlerle uyumlu olduğu açıkça görülmektedir. Benzer şekilde $v = 1$, $M = 32$ ve $M = 48$ için elde edilen hata normlarının Ref. [24] ile verilenlerden daha iyi olduğu açıktır. $v = 0.1$ ve $v = 0.05$ olmak üzere farklı M bölüntü sayıları için de hata normlarını karşılaştırdığımızda elde edilen sonuçların Ref. [24]' de verilenlerle uyum içinde olduğu görülmektedir.

Tablo 5.50' de $v = 1$, $k = 0.01$ ve $M = 16$ olmak üzere farklı t zamanında Problem 1' in SFY8 ile elde edilen nümerik ve tam sonuçları verildi. Tablodan t ' nin farklı değerlerinde elde edilen nümerik ve tam sonuçların birbirine çok yakın olduğu

görüldü. Yine t ' nin farklı değerleri için elde edilen L_2 ve L_∞ hata normlarının oldukça küçük olduğu görüldü.

Tablo 5.51' de $v = 0.01$, $k = 0.0125$ ve $t = 0.125$ zamanında farklı M bölüntü sayıları için Problem 2' nin SFY8 ile elde edilen nümerik sonuçların Ref. [24] ile karşılaştırılması verildi. Tablodan $M = 32$ ve $M = 48$ için elde edilen nümerik sonuçlar birbirleriyle uyum içindedir.

Tablo 5.52 ve Tablo 5.53' te sırasıyla farklı h ve k değerlerinde Problem 2' nin elde edilen nümerik sonuçları sunuldu. Problem 2' nin Tablo 5.52' de $k = 0.001$, h' nin ve v' nin farklı değerleri için $t = 0.25$ zamanında SFY8 ile elde edilen nümerik çözümleri verildi. Problem 2' nin Tablo 5.53' te $h = 0.1$, v ve k' nin farklı değerleri için $t = 0.05$ zamanında SFY8 ile elde edilen nümerik çözümleri verildi.

Tablo 5.47: Problem 1' in $v = 1$, $k = 0.001$ ve h' nin farklı değerleri için $t = 0.25$ zamanında SFY8 ile elde edilen nümerik ve tam sonuçları

(x, y)	Nümerik Çözüm			Tam Çözüm
	$h = 0.1$	$h = 0.05$	$h = 0.025$	
(0.0, 0.0)	0.531209	0.531209	0.531209	0.531209
(0.0, 0.5)	0.468791	0.468791	0.468791	0.468791
(0.0, 1.0)	0.407333	0.407333	0.407333	0.407333
(0.1, 0.0)	0.518741	0.518741	0.518741	0.518741
(0.1, 0.2)	0.493750	0.493750	0.493750	0.493750
(0.2, 0.2)	0.481258	0.481259	0.481259	0.481259
(0.2, 0.5)	0.443985	0.443986	0.443986	0.443986
(0.3, 0.1)	0.481258	0.481259	0.481259	0.481259
(0.3, 0.5)	0.431678	0.431680	0.431680	0.431680
(0.3, 0.6)	0.419456	0.419457	0.419458	0.419458
(0.4, 0.5)	0.419456	0.419457	0.419458	0.419458
(0.5, 0.6)	0.395319	0.395320	0.395321	0.395321
(0.6, 0.3)	0.419456	0.419457	0.419458	0.419458
(0.7, 0.4)	0.395319	0.395320	0.395321	0.395321
(0.8, 0.7)	0.348644	0.348645	0.348645	0.348645
(0.9, 0.2)	0.395320	0.395321	0.395321	0.395321
(1.0, 1.0)	0.294215	0.294215	0.294215	0.294215
L_2	1.085×10^{-5}	5.56×10^{-6}	4.41×10^{-6}	
L_∞	1.93×10^{-6}	5.1×10^{-7}	3.1×10^{-7}	

Tablo 5.48: Problem 1' in $v = 1$, $h = 0.05$ ve farklı k zaman adımları için $t = 0.25$ zamanında SFY8 ile elde edilen nümerik ve tam sonuçları

(x, y)	Nümerik Çözüm			Tam Çözüm
	$k = 0.01$	$k = 0.005$	$k = 0.001$	
(0.0, 0.0)	0.531209	0.531209	0.531209	0.531209
(0.0, 0.5)	0.468791	0.468791	0.468791	0.468791
(0.0, 1.0)	0.407333	0.407333	0.407333	0.407333
(0.1, 0.0)	0.518741	0.518741	0.518741	0.518741
(0.1, 0.2)	0.493750	0.493750	0.493750	0.493750
(0.2, 0.2)	0.481259	0.481259	0.481259	0.481259
(0.2, 0.5)	0.443986	0.443986	0.443986	0.443986
(0.3, 0.1)	0.481259	0.481259	0.481259	0.481259
(0.3, 0.5)	0.431680	0.431680	0.431680	0.431680
(0.3, 0.6)	0.419457	0.419457	0.419457	0.419458
(0.4, 0.5)	0.419457	0.419457	0.419457	0.419458
(0.5, 0.6)	0.395320	0.395320	0.395320	0.395321
(0.6, 0.3)	0.419457	0.419457	0.419457	0.419458
(0.7, 0.4)	0.395320	0.395320	0.395320	0.395321
(0.8, 0.7)	0.348645	0.348645	0.348645	0.348645
(0.9, 0.2)	0.395321	0.395321	0.395321	0.395321
(1.0, 1.0)	0.294215	0.294215	0.294215	0.294215
L_2	5.37×10^{-6}	6.01×10^{-6}	5.56×10^{-6}	
L_∞	4.9×10^{-7}	5.5×10^{-7}	5.1×10^{-7}	

Tablo 5.49: Problem 1' in $k = 0.01$, $t = 0.25$ ve v ' nin farklı değerleri için SFY8 ile elde edilen L_2 ve L_∞ değerlerinin Ref. [24] ile karşılaştırılması

v	M	L_2	$L_2[24]$	L_∞	$L_\infty[24]$
1	8×8	1.353×10^{-5}	5.311×10^{-5}	3.04×10^{-6}	1.189×10^{-5}
	32×32	2.32×10^{-6}	1.904×10^{-4}	2.1×10^{-7}	1.065×10^{-5}
	48×48	6.09×10^{-6}	2.843×10^{-4}	3.0×10^{-7}	1.060×10^{-5}
0.1	8×8	5.17679×10^{-3}	5.811×10^{-3}	2.46070×10^{-3}	1.751×10^{-3}
	32×32	1.59251×10^{-3}	9.465×10^{-3}	2.1391×10^{-4}	1.722×10^{-3}
	40×40	1.36372×10^{-3}	1.224×10^{-2}	1.4665×10^{-4}	1.242×10^{-3}
0.05	8×8	2.451864×10^{-2}	2.255×10^{-2}	2.171096×10^{-2}	1.016×10^{-2}
	24×24	1.015485×10^{-2}	2.044×10^{-2}	2.72931×10^{-3}	6.011×10^{-3}
	32×32	8.00818×10^{-3}	2.735×10^{-2}	1.62708×10^{-3}	6.663×10^{-3}

Tablo 5.50: Problem 1' in $v = 1$, $k = 0.01$ ve $M = 16$ olmak üzere farklı t zamanında SFY8 ile elde edilen nümerik ve tam sonuçları

(x, y)	$t = 0.1$		$t = 1$	
	Nümerik	Tam	Nümerik	Tam
(1/8, 1/8)	0.481259	0.481259	0.592666	0.592667
(3/8, 1/8)	0.450166	0.450166	0.562176	0.562177
(3/8, 3/8)	0.419457	0.419458	0.531209	0.531209
(4/8, 3/8)	0.404319	0.404319	0.515619	0.515620
(4/8, 4/8)	0.389360	0.389361	0.499999	0.500000
(5/8, 4/8)	0.374607	0.374608	0.484379	0.484380
(5/8, 5/8)	0.360083	0.360084	0.468790	0.468791
(7/8, 5/8)	0.331812	0.331812	0.437823	0.437823
(7/8, 7/8)	0.304703	0.304703	0.407333	0.407333
(1/8, 7/8)	0.389361	0.389361	0.500000	0.500000
L_2	5.94×10^{-6}		6.48×10^{-6}	
L_∞	6.6×10^{-7}		7.5×10^{-7}	
(x, y)	$t = 3$		$t = 9$	
	Nümerik	Tam	Nümerik	Tam
(1/8, 1/8)	0.798187	0.798187	0.987568	0.987568
(3/8, 1/8)	0.777300	0.777300	0.985936	0.985936
(3/8, 3/8)	0.754915	0.754915	0.984094	0.984094
(4/8, 3/8)	0.743168	0.743168	0.983085	0.983085
(4/8, 4/8)	0.731059	0.731059	0.982014	0.982014
(5/8, 4/8)	0.718594	0.718594	0.980876	0.980876
(5/8, 5/8)	0.705785	0.705785	0.979668	0.979668
(7/8, 5/8)	0.679179	0.679179	0.977023	0.977023
(7/8, 7/8)	0.651355	0.651355	0.974043	0.974043
(1/8, 7/8)	0.731059	0.731059	0.982014	0.982014
L_2	1.26×10^{-6}		1.71×10^{-6}	
L_∞	2.0×10^{-7}		2.5×10^{-7}	

Tablo 5.51: Problem 2' nin $v = 0.01$, $k = 0.0125$ ve $t = 0.125$ zamanında farklı M bölüntü sayıları için SFY8 ile elde edilen nümerik sonuçlarının Ref. [24] ile karşılaştırılması

(x, y)	$M = 32$		$M = 48$	
	Nümerik	Nümerik[24]	Nümerik	Nümerik[24]
(1/8, 1/8)	0.392127	0.391154	0.389390	0.387991
(3/8, 1/8)	0.907383	0.894478	0.901585	0.893949
(3/8, 3/8)	-0.381773	-0.380232	-0.381057	-0.379037
(4/8, 3/8)	-0.005868	-0.005224	-0.005872	-0.005715
(4/8, 4/8)	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000
(5/8, 4/8)	0.397107	0.394053	0.396720	0.392413
(5/8, 5/8)	0.381773	0.380232	0.381057	0.379037
(7/8, 5/8)	0.903886	0.891940	0.896478	0.889148
(7/8, 7/8)	-0.392127	-0.391154	-0.389379	-0.387991
(1/8, 7/8)	0.263969	0.262426	0.263803	0.261139

Tablo 5.52: Problem 2' nin $k = 0.001$, h' nin ve v' nin farklı değerleri için $t = 0.25$ zamanında SFY8 ile elde edilen nümerik sonuçları

v	(x, y)	Nümerik Çözüm		
		$h = 0.1$	$h = 0.05$	$h = 0.025$
1	(0.1, 0.0)	0.587785	0.587785	0.587785
	(0.1, 0.5)	0.055650	0.051785	0.050819
	(0.4, 0.4)	0.070433	0.066309	0.065280
	(0.7, 0.7)	-0.173929	-0.166190	-0.164242
	(1.0, 1.0)	0.000000	0.000000	0.000000
0.5	(0.1, 0.0)	0.587785	0.587785	0.587785
	(0.1, 0.5)	0.054535	0.050856	0.049934
	(0.4, 0.4)	0.073555	0.069648	0.068674
	(0.7, 0.7)	-0.180726	-0.173275	-0.171402
	(1.0, 1.0)	0.000000	0.000000	0.000000
0.1	(0.1, 0.0)	0.587785	0.587785	0.587785
	(0.1, 0.5)	-0.088290	-0.082643	-0.081341
	(0.4, 0.4)	-0.044116	-0.040884	-0.040129
	(0.7, 0.7)	-0.047941	-0.049719	-0.050067
	(1.0, 1.0)	0.000000	0.000000	0.000000

Tablo 5.53: Problem 2' nin $h = 0.1$, v ve k ' nin farklı değerleri için $t = 0.05$ zamanında SFY8 ile elde edilen nümerik sonuçları

v	(x, y)	Nümerik Çözüm		
		$k = 0.001$	$k = 0.0001$	$k = 0.00001$
1	(0.1, 0.0)	0.587785	0.587785	0.587785
	(0.1, 0.5)	0.018238	0.018216	0.018216
	(0.4, 0.4)	0.033396	0.033377	0.033377
	(0.7, 0.7)	-0.123846	-0.123826	-0.123826
	(1.0, 1.0)	0.000000	0.000000	0.000000
0.5	(0.1, 0.0)	0.587785	0.587785	0.587785
	(0.1, 0.5)	-0.082070	-0.082090	-0.082090
	(0.4, 0.4)	-0.056228	-0.056242	-0.056242
	(0.7, 0.7)	-0.016954	-0.016949	-0.016948
	(1.0, 1.0)	0.000000	0.000000	0.000000
0.1	(0.1, 0.0)	0.587785	0.587785	0.587785
	(0.1, 0.5)	-0.460187	-0.460186	-0.460186
	(0.4, 0.4)	-0.306351	-0.306353	-0.306353
	(0.7, 0.7)	0.224268	0.224268	0.224268
	(1.0, 1.0)	0.000000	0.000000	0.000000

6. SONUÇLAR

Bu çalışmada 2-boyutlu Burgers denklemi iki farklı başlangıç ve sınır şartları ile göz önüne alındı.

İlk olarak klasik sonlu fark yöntemi olarak bilinen Açık, Kapalı, Crank-Nicolson yöntemleri yardımıyla çözümler elde edilen sonuçlar literatürde daha önce verilen çözümler ve varsa tam çözümler ile karşılaştırılarak tablolar halinde sunuldu. Bu kısımda sunulan 2-boyutlu Burgers denkleminin Crank-Nicolson sonlu fark yöntemiyle çözümleri literatürde daha önce Ref. [24] çalışmasında da verilmiştir. Ayrıca 2-boyutlu Burgers denklemindeki lineer olmayan terimler yerine farklı yaklaşımlar yazılarak elde edilen sonlu fark yaklaşımları kullanılarak model problemin nümerik sonuçları bulundu. Elde edilen nümerik sonuçların mevcut tam çözüm ve önceki araştırmacıların verdiği nümerik sonuçlarla karşılaştırılması tablolarla sunuldu.

Model problemler için kullanılan tüm yaklaşımlarla elde edilen nümerik sonuçlar birbirine yakın olduğundan, sadece SFY2 ile elde edilen nümerik sonuçlar grafiksel olarak gösterilmiştir. Bu tezde kullanılan tüm yaklaşımlarla elde edilen L_2 ve L_∞ hata normlarının karşılaştırılması Tablo 6.1 ve Tablo 6.2' de sunuldu.

Tablo 6.1' de $v = 1$, $k = 0.001$ ve h' nin farklı değerleri için $t = 0.25$ zamanında Problem 1' in SFY yaklaşımları ile elde edilen L_2 ve L_∞ hata normları karşılaştırmaları verildi. Tablodan SFY2' nin diğer yaklaşımlara göre daha iyi sonuçlar verdiği açıktır.

Tablo 6.2' de $h = 0.05$ ve farklı k zaman adımları için $t = 0.25$ zamanında Problem 1' in SFY yaklaşımları ile elde edilen L_2 ve L_∞ hata normları verildi.

Tablodan SFY8 yaklaşımı ile elde edilen L_2 ve L_∞ hata normlarının diğer yaklaşımlarla elde edilen hata normlarına göre daha küçük olduğu ve bu yaklaşımın öne çıktığı anlaşılmaktadır.

Sonuç olarak UU_x ve UU_y lineer olmayan terimleri yerine bu tezde göz önüne alınan farklı sonlu fark yaklaşımları 2-boyutlu Burgers denkleminde uygulanabildiği gibi farklı alanlarda karşılaşılan lineer olmayan yapıya sahip problemlere de kolayca uygulanabilir.



Tablo 6.1: $v = 1$, $k = 0.001$ ve h 'nin farklı değerleri için $t = 0.25$ zamanında Problem 1' in SFY yaklaşımları ile elde edilen L_2 ve L_∞ hata normları karşılaştırmaları (*' da $k = 0.0001$ alındı)

<i>Yöntem</i>	L_2		
	$h = 0.1$	$h = 0.05$	$h = 0.025$
<i>ASFY</i>	1.316×10^{-5} *	5.92×10^{-6} *	3.67×10^{-6}
<i>KSFY</i>	2.995×10^{-5}	5.579×10^{-5}	1.9768×10^{-4}
<i>CNSFY</i>	1.842×10^{-5}	3.341×10^{-6}	1.774×10^{-4}
<i>SFY1</i>	8.86×10^{-6}	4.16×10^{-6}	5.1×10^{-6}
<i>SFY2</i>	8.35×10^{-6}	2.15×10^{-6}	6.33×10^{-6}
<i>SFY3</i>	3.11×10^{-6}	1.022×10^{-5}	3.032×10^{-5}
<i>SFY4</i>	3.418×10^{-5}	7.964×10^{-5}	1.6496×10^{-4}
<i>SFY5</i>	2.626×10^{-5}	5.404×10^{-5}	1.9748×10^{-4}
<i>SFY6</i>	1.177×10^{-5}	5.51×10^{-6}	6.75×10^{-6}
<i>SFY7</i>	1.619×10^{-5}	1.608×10^{-5}	2.658×10^{-5}
<i>SFY8</i>	1.085×10^{-5}	5.56×10^{-6}	4.41×10^{-6}
<i>Yöntem</i>	L_∞		
	$h = 0.1$	$h = 0.05$	$h = 0.025$
<i>ASFY</i>	2.36×10^{-6} *	5.3×10^{-7} *	1.7×10^{-7}
<i>KSFY</i>	5.36×10^{-6}	4.98×10^{-6}	8.84×10^{-6}
<i>CNSFY</i>	3.29×10^{-6}	2.99×10^{-6}	7.93×10^{-6}
<i>SFY1</i>	1.98×10^{-6}	8.50×10^{-7}	6.9×10^{-7}
<i>SFY2</i>	1.5×10^{-6}	2.9×10^{-7}	4.8×10^{-7}
<i>SFY3</i>	5.6×10^{-7}	9.3×10^{-7}	1.43×10^{-6}
<i>SFY4</i>	6.1×10^{-6}	7.11×10^{-6}	7.36×10^{-6}
<i>SFY5</i>	4.69×10^{-6}	4.82×10^{-6}	8.79×10^{-6}
<i>SFY6</i>	2.57×10^{-6}	9.5×10^{-7}	9×10^{-7}
<i>SFY7</i>	2.89×10^{-6}	1.37×10^{-6}	1.15×10^{-6}
<i>SFY8</i>	1.93×10^{-6}	5.1×10^{-7}	3.1×10^{-7}

Tablo 6.2: $h = 0.05$ ve farklı k zaman adımları için $t = 0.25$ zamanında Problem 1' in SFY yaklaşımları ile elde edilen L_2 ve L_∞ hata normlarının karşılaştırılması (*' da $h = 0.1$ alındı)

<i>Yöntem</i>	L_2		
	$k = 0.01$	$k = 0.005$	$k = 0.001$
<i>ASFY</i> (*)	1.136×10^{-5}	1.199×10^{-5}	1.107×10^{-5}
<i>KSFY</i>	2.0819×10^{-4}	1.1374×10^{-4}	5.579×10^{-5}
<i>CNSFY</i>	1.3421×10^{-4}	7.524×10^{-5}	3.341×10^{-5}
<i>SFY1</i> (*)	2.09×10^{-6}	4.35×10^{-6}	8.86×10^{-6}
<i>SFY2</i>	4.138×10^{-5}	1.807×10^{-5}	2.15×10^{-6}
<i>SFY3</i>	1.4930×10^{-4}	7.218×10^{-5}	1.022×10^{-5}
<i>SFY4</i> (*)	7.25×10^{-6}	3.86×10^{-6}	3.418×10^{-5}
<i>SFY5</i>	2.0643×10^{-4}	1.1214×10^{-4}	5.404×10^{-5}
<i>SFY6</i> (*)	5.49×10^{-6}	8.21×10^{-6}	1.177×10^{-5}
<i>SFY7</i>	1.1496×10^{-4}	5.973×10^{-5}	1.608×10^{-5}
<i>SFY8</i>	5.37×10^{-6}	6.01×10^{-6}	5.56×10^{-6}
<i>Yöntem</i>	L_∞		
	$k = 0.01$	$k = 0.005$	$k = 0.001$
<i>ASFY</i> (*)	2.36×10^{-6}	2.15×10^{-6}	1.99×10^{-6}
<i>KSFY</i>	1.858×10^{-5}	1.014×10^{-5}	4.98×10^{-6}
<i>CNSFY</i>	1.201×10^{-5}	6.72×10^{-6}	2.99×10^{-6}
<i>SFY1</i> (*)	3.8×10^{-7}	7.7×10^{-7}	1.98×10^{-6}
<i>SFY2</i>	3.91×10^{-6}	1.76×10^{-6}	2.9×10^{-7}
<i>SFY3</i>	1.343×10^{-5}	6.49×10^{-6}	9.3×10^{-5}
<i>SFY4</i> (*)	1.3×10^{-6}	6.9×10^{-7}	6.1×10^{-6}
<i>SFY5</i>	1.838×10^{-5}	1×10^{-5}	4.82×10^{-6}
<i>SFY6</i> (*)	9.8×10^{-7}	1.49×10^{-7}	2.57×10^{-6}
<i>SFY7</i>	1.036×10^{-5}	5.36×10^{-6}	1.37×10^{-6}
<i>SFY8</i>	4.9×10^{-7}	5.5×10^{-7}	5.1×10^{-7}

KAYNAKLAR

- [1] G. D. Smith, Numerical solution of partial differential equations, Finite Difference Method, Third Edition, Brunel University, 1985.
- [2] H. Bateman, Some recent researches on the motion of fluids, Mon. Weather, Rev.,43,163-170, 1915.
- [3] A. H. Khater, R. S. Temsah and M. M. Hassan, A Chebyshev spectral collocation method for solving Burgers'-type equations, J. Comput. Appl. Math., 222:2, 333-350.
- [4] S. Kutluay, Klasik sonlu fark yöntemlerine giriş ders notları, İnönü University, Turkey.
- [5] N. Özışık, Heat Conduction, Department of Mechanical and Aerospace Engineering, North Carolina State University, Raleigh.
- [6] Richard L. Burden, J. Douglas Faires, Numerical Analysis Ninth Edition, Youngstown State University, 2010.
- [7] J. M. Burgers, A Model for one-dimensional compressible turbulence with two sets of characteristics, Proc. Roy. Neth. Acad. Sci. Amsterdam, B58,1-18,(1955).
- [8] J. M. Burgers, Mathematical examples illustrating relations occurring in the theory of turbulent fluid motion, Trans. Roy. Neth. Acad. Sci., Amsterdam,17,1-53,(1939).
- [9] M. J. Lighthill, Viscosity effects in sound waves of finite amplitude, in surveys in mechanics, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 250-351,(1956).
- [10] L. A. Pospelov, Propagation of finite-amplitude elastic waves, Soviet Physics Acoust. 11, 302-304,(1966).
- [11] J. D. Cole, On a quasi linear parabolic equation occurring in aerodynamics, Quart. Appl. Math.,9,225-236,(1951).
- [12] E. Fan, J. Zhang, B. Y. C. Hon, A new complex line soliton for the two dimensional KdV-Burgers' equation, Appl. Math. Comput. Article in Press, 2001.

- [13] R. Kannan, S.K. Chung, Finite difference approximate solutions for the two dimensional Burgers system, *Computers and Mathematics with Applications* 44 193-200, 2002.
- [14] A. N. Boules, I.J. Eick, A spectral approximation of the two dimensional Burgers' equation, *Indian Journal*, 2003.
- [15] A. R. Bahadır, A fully implicit finite-difference scheme for two-dimensional Burgers' equations, *Applied Mathematics and Computation* 137 131–137, 2003.
- [16] S. M. El-Sayed, D. Kaya, On the numerical solution of the system of two-dimensional Burgers' equations by the decomposition method, *Applied Mathematics and Computation* 158 101–109, 2004.
- [17] S. F. Radwan, Comparison of higher-order accurate schemes for solving the two-dimensional unsteady Burgers' equation, *Journal of Computational and Applied Mathematics* 174 383–397, 2005.
- [18] Y. Duan, R. Liu, Lattice Boltzmann model for two-dimensional unsteady Burgers' equation, *Journal of Computational and Applied Mathematics* 206 432–439, 2007.
- [19] H. Zhua, H. Shub, M. Ding, Numerical solutions of two-dimensional Burgers' equations by discrete adomian decomposition method, *Computers and Mathematics with Applications* 60 840–848, 2010.
- [20] V. K. Srivastava, M. Tamsir, U. Bhardwaj, YVSS Sanyasiraju, Crank-Nicolson scheme for numerical solutions of two-dimensional coupled Burgers' equations, *International Journal of Scientific & Engineering Research* Volume 2, Issue 5, 2011.
- [21] M. Tamsir, V. Srivastava, A semi-implicit finite-difference approach for two-dimensional coupled Burgers' equations, *International Journal of Scientific & Engineering Research*, Volume 2, Issue 6, 2011.
- [22] M. C. Kweyu, W. A. Manyonge, A. Koross, V. Ssemaganda, Numerical solutions of the Burgers' system in two dimensions under varied initial and boundary conditions, *Applied Mathematical Sciences*, Vol. 6, 2012, 2012.
- [23] H. Aminikhah, A new efficient method for solving two dimensional Burgers' equation, *International Scholarly Research Network ISRN Computational Mathematics*, 2012.

- [24] Z. Kadir, N. Li, X. Feng, Linearized Crank-Nicolson scheme for the viscous Burgers' equation, College of Mathematics and System Sciences, Xinjiang University, 2014.
- [25] H. S. Shukla, M. Tamsir, V.K. Srivastava, J. Kumar, Numerical solution of two dimensional coupled viscous Burger equation using modified cubic b-spline differential quadrature method, AIP ADVANCES 4 117134, 2014.
- [26] M. Khan, A novel solution technique for two dimensional Burgers' equation, Alexandria Engineering Journal, 2014.
- [27] S. Kutluay, N. M. Yağmurlu, The Modified Bi-quintic B-Splines for solving the two-dimensional unsteady Burgers' equation, European International Journal of Science and Technology Vol. 1 No. 2.
- [28] I. Hussain, S. Mukhtar, A. Ali, A numerical meshless technique for the Solution of the two dimensional Burgers' equation using collocation method, World Applied Sciences Journal 23 (12), 2013.
- [29] T. Zhanlav, O. Chuluunbaatar, V. Ulziibayar, Higher-Order numerical solution of two-dimensional coupled Burgers' equation, American Journal of Computational Mathematics, 2016, 6, 120-129
- [30] M. Sarboland, A. Aminataei, An efficient numerical scheme for coupled nonlinear Burgers' equations, Appl. Math. Inf. Sci. 9, No. 1, 245-255 (2015).
- [31] L. R. T. Gardner, G. A. Gardner, A two-dimensional bi-cubic B-spline finite element: used in a study of MHD-duct flow, Comp. Methods Appl. Mech. Engrg., 124 (1995) 365-375.
- [32] W. T. Ang, A boundary integral equation method for the two-dimensional diffusion equation subject to a non-local condition, Engineering Analysis with Boundary Elements, 25 (2001) 1-6.
- [33] A. C. Velivelli, K. M. Bryden, A cache-efficient implementation of lattice Boltzmann method for the two-dimensional diffusion equation, Concurrency Comp. Pract. Exper., 16 (2004) 1415-1432.
- [34] Xiaonan Wu, Jiwei Zhang, Artificial boundary method for two-dimensional Burgers' equation, Computers and Mathematics with Applications, 56 (2008) 242-256.
- [35] Y. Gurefe, E. Misirli, New variable separation solutions of two-dimensional Burgers system, Appl. Math. and Comput., 217 (2011) 9189-9197

- [36] R. C. Mittal, R. Jiwari, Differential quadrature method for two-dimensional Burgers' equations, *Int. J. of Comput. Methods in Engrg. Sci. and Mech.*, 10 (2009) 450-459.
- [37] C. Allery, A. Hamdouini, D. Ryckelynck, N. Verdon, A priori reduction method for solving the two-dimensional Burgers' equations, *Appl. Math. and Comput.*, 217 (2011) 6671-6679.
- [38] I. E. İnan, Y. Uğurlu, S. Duran, Complex solutions for ninth-order Korteweg-de Vries (nKdv) equation and two-dimensional Burgers' equation, *Turkish Journal of Science and Technology*, 5 (2010) 37-42.
- [39] Pengzhan Huang, Abdurishit Abduwali, The modified local Crank–Nicolson method for one and two-dimensional Burgers' equations, *Computers and Mathematics with Applications*, 59 (2010) 2452–2463.
- [40] S. G. Rubin, R. A. Graves, Cubic spline approximation for problems in fluid mechanics, Nasa TR R-436, Washington, D.C., 1975.
- [41] J. Caldwell, P. Smith, Solution of Burgers' equation with large Reynolds number, *Appl. Math. Modelling* 6, 381-385, 1982.

ÖZGEÇMİŞ

Erhan KESER, 22 Mart 1987 tarihinde Çan' da doğdu. İlk, orta ve lise öğrenimini Çan' da tamamladı. 2009 yılında İstanbul Üniversitesi Fen Fakültesi Matematik Bölümünden mezun oldu. 2013 yılında İnönü Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Uygulamalı Matematik Anabilim Dalı' nda yüksek lisans öğrenimine başladı. Bu kapsamda Yrd. Doç. Dr. Yusuf UÇAR danışmanlığında "2-boyutlu Burgers denkleminin sonlu fark yöntemleri ile nümerik çözümleri" alanında çalışmalarına devam etti.