

T.C.
İNÖNÜ ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

1-BOYUTLU BURGERS' DENKLEMİNİN MULTİKUADRİK RADYAL BAZ
FONKSİYONU İLE NÜMERİK ÇÖZÜMLERİ

Yeşim SARIBAŞ

YÜKSEK LİSANS TEZİ
MATEMATİK ANA BİLİM DALI

Haziran 2019

Tezin Başlığı : 1-BOYUTLU BURGERS' DENKLEMİNİN
MULTİKUADRİK RADYAL BAZ FONKSİYONU İLE
NÜMERİK ÇÖZÜMLERİ

Tezi Hazırlayan : Yeşim SARIBAŞ

Sınav Tarihi : 18.06.2019

Yukarıda adı geçen tez jürimizce değerlendirilerek Matematik Ana Bilim Dalında
Yüksek Lisans Tezi olarak kabul edilmiştir.

Sınav Jüri Üyeleri

Tez Danışmanı: Prof.Dr. Selçuk KUTLUAY _____

İnönü Üniversitesi

Eş Danışman: Dr. Öğr. Üyesi Muaz SEYDAOĞLU _____

Muş Alparslan Üniversitesi

Doç.Dr. Reşat YILMAZER _____

Fırat Üniversitesi

Doç.Dr. Nuri Murat YAĞMURLU _____

İnönü Üniversitesi

Prof.Dr. Halil İbrahim ADIGÜZEL

Enstitü Müdürü

ONUR SÖZÜ

Yüksek Lisans Tezi olarak sunduğum “1-Boyutlu Burgers’ Denkleminin Multikvadrik Radyal Baz Fonksiyonu ile Nümerik Çözümleri” başlıklı bu çalışmanın bilimsel ahlâk ve geleneklere aykırı düşecek bir yardıma başvurmaksızın tarafımdan yazıldığını ve yararlandığım bütün kaynakların, hem metin içinde hem de kaynakçada yöntemine uygun biçimde gösterilenlerden oluştuğunu belirtir, bunu onurumla doğrularım.

Yeşim SARIBAŞ

ÖZET

Yüksek Lisans Tezi

1-BOYUTLU BURGERS' DENKLEMİNİN MULTİKUADRİK RADYAL BAZ FONKSİYONU İLE NÜMERİK ÇÖZÜMLERİ

Yeşim SARIBAŞ

İnönü Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Ana Bilim Dalı

35+vii sayfa

2019

Danışman : Prof.Dr. Selçuk KUTLUAY

Eş Danışman : Dr. Öğr. Üyesi Muaz SEYDAOĞLU

Bu tez çalışması üç bölümden oluşmaktadır.

Tezin birinci bölümünde diğer bölümlerde kullanılacak olan 1-boyutlu Burgers' denklemi, klasik sonlu farklar ve radyal baz fonksiyonu hakkında bazı bilgiler verildi.

Tezin esasını teşkil eden ikinci bölümde genel olarak ele alınan başlangıç ve sınır şartları ile verilen 1-boyutlu Burgers' denkleminin zaman integrasyonu için klasik sonlu fark formülasyonu ve konum integrasyonu için multikuadrik radyal baz fonksiyonu üzerine temellenmiş nümerik şeması elde edildi.

Tezin son bölümü olan üçüncü bölümde Burgers' denklemi için analitik çözümü olan iki test problem göz önüne alındı. Her bir test problemin Bölüm 2'de verilen şema kullanılarak nümerik çözümleri bulundu. Elde edilen çözümler analitik çözüm, literatürde mevcut olan bazı sonuçlar ve hata normlarıyla birlikte tablolar halinde sunuldu. Ayrıca, elde edilen çözümlerin sürekliliğini ve her bir problemin doğru fiziksel davranışını sergilediğini göstermek için bazı grafikler verildi.

ANAHTAR KELİMELELER: Burgers' Denklemi, Multikuadrik Radyal Baz Fonksiyonu, Klasik Sonlu Farklar, Rubin-Graves Yaklaşımı

ABSTRACT

M.Sc. Thesis

NUMERICAL SOLUTIONS OF 1-DIMENSIONAL BURGERS' EQUATION
BY MULTIQUADRIC RADIAL BASIS FUNCTION

Yeşim SARIBAŞ

İnönü University
Graduate School of Natural and Applied Sciences
Department of Mathematics

35+vii pages

2019

Supervisor : Prof.Dr. Selçuk KUTLUAY
Co-Supervisor : Assist.Prof.Dr. Muaz SEYDAOĞLU

This master thesis consists of three chapters.

In the first chapter of the thesis, some information about 1-dimensional Burgers' equation, classical finite differences and radial basis functions which are going to be used in the next chapters are given.

In the second chapter, which is constituting the main part of the thesis, a numerical scheme based on the classical finite difference formulation for time integration and the multiquadric radial basis function for space integration of the 1-dimensional Burgers' equation given by the initial and boundary conditions which are generally discussed has been obtained.

In the last chapter of the thesis which is the third chapter, two test problems with analytical solution for Burgers' equation are considered. Numerical solutions of each test problem have been found using the scheme given in Chapter 2. The obtained solutions are presented in tables with analytical solution, some results available in the literature and error norms. In addition, some graphs have been given to demonstrate the continuity of the solutions obtained and the correct physical behavior of each problem.

KEYWORDS: Burgers' Equation, Multiquadric Radial Basis Function, Classical Finite Differences, Rubin-Graves Approximation

TEŞEKKÜR

Yüksek lisans tez sürecimi yöneten, bu tezin hazırlanması sırasında her türlü desteği veren ve her durumda yardımını esirgemeyen kıymetli tez danışmanım Sayın Prof. Dr. Selçuk KUTLUAY'a ve ikinci tez danışmanım olarak her zaman yardımını esirgemeyen Muş Alparslan Üniversitesi Dr. Öğretim Üyesi Muaz SEYDAOĞLU'na ayrıca bu tez çalışmasında büyük emeği olan, programların yazımı sırasında kıymetli zamanlarını bizlere ayıran Sayın Doç. Dr. Yusuf UÇAR'a, Sayın Doç. Dr. Nuri Murat YAĞMURLU'ya ve desteğini esirgemeyen Sayın Doç. Dr. Mustafa Kemal ÖZDEMİR ile birlikte görüşlerinden yararlandığım tüm bölüm hocalarıma ve maddi-manevi desteğini benden esirgemeyen sevgili AİLEM'e teşekkürü bir borç bilirim.



İÇİNDEKİLER

ÖZET	i
ABSTRACT	ii
TEŞEKKÜR	iii
İÇİNDEKİLER	iv
ŞEKİLLER DİZİNİ.....	v
TABLolar DİZİNİ	vi
SİMGELER VE KISALTMALAR	vii
1. GİRİŞ	1
1.1. Burgers' Denklemi	1
1.2. Klasik Sonlu Farklar	3
1.3. Radyal Baz Fonksiyonu.....	4
2. BURGERS' DENKLEMİNİN MULTİKUADRİK RADYAL BAZ FONKSİYONU İLE ÇÖZÜMÜ	8
2.1. Yöntemin Uygulanması.....	8
3. TEST PROBLEMLER VE NÜMERİK SONUÇLAR	15
3.1. Test Problemler	15
3.2. Nümerik Sonuçlar	17
3.3. Sonuç	30
KAYNAKLAR.....	31
ÖZGEÇMİŞ.....	35

ŞEKİLLER DİZİNİ

Şekil 3.1	Problem 1'in $v = 1$, $k = 0.0001$, $h = 0.0125$ ve $c = 0.1$ için farklı t zamanlarında çözüm grafikleri	26
Şekil 3.2	Problem 1'in $v = 0.1$, $k = 0.0001$, $h = 0.0125$ ve $c = 0.1$ için farklı t zamanlarında çözüm grafikleri	27
Şekil 3.3	Problem 1'in $v = 0.01$, $k = 0.0001$, $h = 0.0125$ ve $c = 0.112$ için farklı t zamanlarında çözüm grafikleri	27
Şekil 3.4	Problem 2'nin $v = 1$, $k = 0.0001$, $h = 0.0125$ ve $c = 0.13$ için farklı t zamanlarında çözüm grafikleri	28
Şekil 3.5	Problem 2'nin $v = 0.1$, $k = 0.0001$, $h = 0.0125$ ve $c = 0.12$ için farklı t zamanlarında çözüm grafikleri	29
Şekil 3.6	Problem 2'nin $v = 0.01$, $k = 0.0001$, $h = 0.0125$ ve $c = 0.04$ için farklı t zamanlarında çözüm grafikleri	29

TABLolar DİZİNİ

Tablo 3.1	Problem 1'in $v = 1$, h ve k 'nın farklı değerleri için $t = 0.1$ zamanında çözümleri.....	18
Tablo 3.2	Problem 1'in $v = 0.1$, $h = 0.0125$ ve $k = 0.0001$ için farklı t zamanlarında çözümleri.....	19
Tablo 3.3	Problem 1'in $v = 0.1$, $k = 0.01$ ve $h = 0.1, 0.01$ için farklı t zamanlarında çözümleri.....	20
Tablo 3.4	Problem 1'in $v = 0.01$, $h = 0.0125$ ve $k = 0.01, 0.001, 0.0001$ için farklı t zamanlarında çözümleri.....	21
Tablo 3.5	Problem 1'in $v = 10$, $h = 0.1$ ve $k = 0.0001$ için farklı t zamanlarında çözümleri.....	22
Tablo 3.6	Problem 1'in $v = 1$, $h = 0.1, 0.05, 0.025, 0.0125$ ve $k = 0.00001$ için $t = 0.1$ zamanında çözümleri.....	23
Tablo 3.7	Problem 2'nin $v = 1$, $h = 0.0125$ ve $k = 0.001, 0.00001$ için farklı t zamanlarında çözümleri.....	23
Tablo 3.8	Problem 2'nin $v = 0.1$, $h = 0.0125$ ve $k = 0.01, 0.001, 0.0001, 0.00001$ için farklı t zamanlarında çözümleri.....	24
Tablo 3.9	Problem 2'nin $v = 0.01$, $h = 0.0125$ ve $k = 0.01, 0.001, 0.0001$ için farklı t zamanlarında çözümleri.....	25
Tablo 3.10	Problem 2'nin $v = 1$, $h = 0.1, 0.05, 0.025, 0.0125$ ve $k = 0.00001$ için $t = 0.1$ zamanında çözümleri.....	26

SİMGELER VE KISALTMALAR

RBF	:	Radyal Baz Fonksiyonu
MQ	:	Multikvadrik
$\ \cdot\ $:	Öklid normu
c	:	Şekil (shape) parametresi
v	:	Kinematik viskozite parametresi
L_2	:	Ortalama hata
L_∞	:	Maksimum hata
$k(\equiv \Delta t)$:	Zaman adım uzunluğu
$h(\equiv \Delta x)$:	Konum adım uzunluğu
$u(x, t)$:	x ve t 'ye bağlı bir fonksiyon
u_t	:	u' nun t 'ye göre birinci türevi
u_x	:	u' nun x 'e göre birinci türevi
u_{xx}	:	u' nun x 'e göre ikinci türevi
u^n	:	u' nun n . zaman adımında değeri

1. GİRİŞ

Bu bölümde Burgers' denklemini, klasik sonlu farklar ve radyal baz fonksiyonu hakkında bazı bilgiler verildi.

1.1 Burgers' Denklemi

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} = \nu \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad (1.1)$$

olarak verilen 1-boyutlu Burgers' denklemi uygulamalı matematikte, matematiksel fizikte ve mühendislik bilimlerinde karşılaşılan iyi bilinen birkaç non-lineer kısmi türevli denklemden biri olup bir çok önemli problemin modellenmesinde kullanılır.

(1.1) denklemi türbülans sıvının matematiksel modeli olan şok dalgalar teorisinde ve sürekli stokastik proseslerde karşılaşılan homojen kuazi-lineer parabolik denklemdir. Bu kısmi türevli denklem Bateman [1] tarafından 1915 yılında sunuldu ve Bateman bu problemin zamandan bağımsız çözümünü sundu. 1948'de Burger [2, 3], daha sonra literatüre Burgers' denklemi olarak geçen konveksiyon ve difüzyonun zıt etkilerinin etkileşiminden kaynaklanan bir kanal içindeki türbülans sıvının bazı özelliklerini yakalamak için bu kısmi türevli denklemi kullandı. Burgers' denkleminin yapısı lineer olmayan konveksiyon teriminin varlığı ve viskozite katsayılı difüzyon teriminin olması yüzünden Navier-Stokes denklemlerine benzerdir. Burgers' denkleminin genel özelliklerinin çalışılması gaz dinamiği, ısı iletimi, elastisite vb. gibi çeşitli alanlarda uygulamaları yüzünden bu konuda çalışanların dikkatini çekmiştir.

(1.1) Burgers' denklemi sadece sınırlı sayıda verilen başlangıç ve sınır şartları için tam olarak çözülebilen birkaç lineer olmayan kısmi türevli denklemlerden biridir.

$$u = -2v \frac{\omega_x}{\omega} \quad (1.2)$$

dönüşümü $u(x, t)$ ve $\omega(x, t)$ ' yi birbiriyle ilişkilendirir ve eğer ω ,

$$\frac{\partial \omega}{\partial t} = v \frac{\partial^2 \omega}{\partial x^2}$$

lineer difüzyon denkleminin çözümü ise o zaman u 'da (1.1) kuazi-lineer Burgers' denkleminin çözümüdür. (1.2) dönüşümü ilk defa Lagerstrom vd. [4] tarafından sunulan bir teknik raporda ortaya çıktı ve Cole [5] tarafından yayımlandı. Hemen hemen aynı zamanlarda Hopf [6] tarafından da bağımsız olarak verildi. Dolayısıyla (1.2) dönüşümü Hopf-Cole dönüşümü olarak bilinir [7]. Benton ve Platzman [8], farklı başlangıç şartlarına sahip Burgers' denkleminin 35 farklı analitik çözümünü verdiler.

Burgers' denkleminin çözümünün incelenmesi yarım yüzyıldır devam etmektedir ve halen onun çözümlerine yaklaşmak için daha iyi nümerik şemalar geliştirilmektedir. Nümerik olarak Burgers' denklemini birçok araştırmacı tarafından ele alındı. Evans [9], Burgers' denklemini çözmek için group-explicit yöntemini sundu. Mittal ve Singhal [10,11], farklı başlangıç ve sınır şartlarıyla verilen Burgers' denklemini çözmek için non-linear operatörün sonlu yeniden-üreten (reproducing) özelliğini kullanan bir spektral yöntem verdiler. Kutluay vd. [12], Burgers' denklemini Hopf-Cole dönüşümünü kullanarak Neumann sınır şartlarına sahip lineer ısı denklemine dönüştürdükten sonra problemin açık sonlu fark (explicit finite difference) ve tam açık sonlu fark (exact-finite difference) yöntemleri ile çözümlerini verdiler. Caldwell ve Smith [13], Burgers' denklemini çözmek için sonlu fark ve kübik-spline sonlu elemanlar yöntemini kullandılar. Ali vd. [14], Burgers' denklemini çözmek için kollokasyon formülasyonuna dayalı kübik B-spline sonlu eleman yöntemleri kullandı. Gardner vd. [15], kuadratik B-spline konum sonlu elemanlar ile Petrov-Galerkin yöntemini uyguladılar ve lineer konum

zaman sonlu elemanlarını kullanan en küçük kareler yöntemini sundular [16]. Öziş ve Özdeş [17], Burgers' denklemini için tam çözüme yakınsayan varyasyonel yaklaşıma dayalı yaklaşık çözümler dizisini ürettiler. Son yıllarda Burgers' denkleminin nümerik çözümü için otomatik türev yöntemi [18], yeni nümerik şema [19], modifiye edilmiş kübik B-spline kollokasyon yöntemi [20], türevli kuadratür yöntemine dayalı nümerik şema [21] gibi çeşitli nümerik algoritmalar kullanıldı.

1.2 Klasik Sonlu Farklar

Sonlu fark yöntemleri kısmi türevli denklemlerden oluşan başlangıç ve sınır değer problemlerinin yaklaşık çözümünün bulunmasında sıklıkla kullanılan bir nümerik yöntemdir. Bu yöntemlerin uygulanmasında kullanılan başlıca adımlar şunlardır: Önce problemin çözüm bölgesi genellikle düzgün geometrik şekiller içeren kafeslere bölünür. Yaklaşık çözüm her bir kafesin düğüm (mesh veya grid) noktaları üzerinde hesaplanır. Sonra problemde görülen türevler yerine Taylor seri açılımı yardımıyla elde edilen uygun sonlu fark yaklaşımları yazılır ve problemin nümerik şeması bulunur. Böylece başlangıç ve sınır değer problemi lineer veya lineer olmayan cebirsel denklem sistemine indirgenir. Daha sonra elde edilen nümerik şemanın kararlılığı incelenir. Son olarak cebirsel denklem sistemi direkt veya direkt olmayan çözüm yöntemlerinden biri yardımıyla çözümlenerek istenilen grid noktalarında problemin yaklaşık çözümü elde edilir.

Literatürde sıklıkla kullanılan yöntemlerin başlıcaları klasik sonlu fark yöntemleri olarak bilinen açık, kapalı ve Crank-Nicolson yöntemleridir.

$(x, t) \in [0, l] \times [0, T]$ olmak üzere $u(x, t)$ bir kısmi türevli denklemini sağlayan x -konum ve t -zaman değişkenlerine bağlı bir fonksiyon olsun.

$$x_m = m\Delta x = mh; \quad m = 0, 1, \dots, M; \quad l = Mh$$

ve

$$t_n = n\Delta t = tk; \quad n = 0, 1, \dots, N$$

olmak üzere (x_m, t_n) düğüm noktalarındaki $u(x, t)$ ' ye bir yaklaşım u_m^n ile gösterilir. Burada $h(\equiv \Delta x)$ konum uzunluğu ve $k(\equiv \Delta t)$ zaman adım uzunluğudur [22, 23].

1.3 Radyal Baz Fonksiyonu

Radyal baz fonksiyonu (RBF) çok boyutlu uzayda sadece iki noktaya olan uzaklığa bağlı olan reel değerli bir fonksiyondur. Bu noktalardan bir tanesi merkez diye adlandırılır ve bu nokta orijin olabileceği gibi uzayda alternatif olarak bir başka nokta da olabilir. RBF interpolasyonu çok-boyutlu uzayda dağıtık (scattered) verileri analiz etmek için kullanılan temel yöntemlerden biridir. Bu fonksiyonlar keyfi uzay boyutlarını genelleştirebildiğinden ve spektral hassasiyeti sağlayabildiğinden özellikle farklı uygulamalarda popüler hale gelmiştir. Bu uygulamalardan bazıları, fonksiyon yaklaşımı, kısmi türevli denklemlerin sayısal çözümü, bilgisayar görüntüsü ve sınır ağları gibi uygulamaları içerir.

RBF formal olarak $\phi(r) = \phi(\|r\|)$ şeklinde tanımlanır. $\phi(r) = \phi(\|r\|)$ özelliğini sağlayan herhangi bir fonksiyon radyal baz fonksiyonudur. $\phi(\|\cdot\|)$ normu yerine genellikle öklid normu kullanılır fakat bazı uygulamalarda norm için nadiren diğer mesafe fonksiyonları da kullanılabilir. $r = \|x - x_j\|$ (x_j :merkez) ve c şekil parametresi diye adlandırılan bir sabit (veya bazı kaynaklarda serbest parametre) olmak üzere uygulamada sıklıkla kullanılan radyal baz fonksiyonları türleri şunlardır:

$$\text{Multikuadrik: } \phi(r) = \sqrt{r^2 + c^2}$$

$$\text{Ters multikuadrik: } \phi(r) = \frac{1}{\sqrt{r^2 + c^2}}$$

$$\text{Gaussian: } \phi(r) = e^{-(cr)^2}$$

$$\text{Ters kuadrik: } \phi(r) = \frac{1}{r^2 + c^2}$$

Radyal baz fonksiyonlarındaki c şekil parametresi hassasiyet için önemli bir rol oynar fakat değerinin nasıl seçileceği halen açık bir araştırma konusudur. Genellikle araştırmacılar bu değeri deneme-yanımla yoluyla seçerler [24, 25]. Okuyucu daha detaylı bilgi için referans verilen çalışmalara ve içindeki referanslara bakabilir.

Radyal baz fonksiyon yöntemleri 1968 yılında Iowa eyalet yer bilimcisi olan Roland Hardy tarafından dağıtık verilerin interpolasyonu için ilk etkin yöntemlerden birini geliştirdiğinde incelendi [26]. Polinom yöntemler önceden de kullanılmıştı fakat iki boyutlu ve daha yüksek boyutlu dağıtık verilerin tek çözümlü özelliğine sahip değillerdi. Uzun araştırmadan sonra Hardy multikvadrik (MQ) radyal baz fonksiyonunu geliştirdi [27]. Multikvadrik baz fonksiyonu radyal baz fonksiyonlarından yalnızca biridir. Daha sonra 1979 yılında Richard Franke [28] dağıtık veri interpolasyonunun bilinen tüm yöntemlerini bir çalışmada yayımladı ve MQ-RBF yönteminin en iyi yöntem olduğu sonucuna vardı. Franke, multikvadrik yaklaşımlarla geniş çaplı nümerik deneyimleri nedeniyle genellikle multikvadrik yaklaşımları matematik bilim alanına ilk defa sunan bilim insanıdır.

RBF tarihindeki bir sonraki önemli olay bir IBM matematikçisi olan Charles Micchelli'in MQ yönteminin arkasındaki teoriyi 1986 yılında geliştirmesidir. Charles MQ yöntemi için sistem matrisinin tersinin mevcut olduğu yani RBF dağıtık veri interpolasyon probleminin iyi tanımlı olduğunu ispatladı [29]. Birkaç yıl sonra fizikçi Edward Kansa [30], ilk defa kısmi türevli denklemleri çözmek için MQ yöntemini kullandı. 1992 yılında Wolodymyr Madych ve Stuart Nelson'un [31] verdikleri sonuçlarda MQ interpolasyonunun spektral yakınsaklık oranını gösterdiler. Kansa'nın keşfinden bu yana RBF yöntemlerine yönelik araştırmalar hızlıca arttı ve son yıllarda radyal baz fonksiyonları kısmi türevli denklemlerin çözümünde etkin bir rol oynamaktadır [32]. Sonsuz türevlenebilir radyal baz fonksiyonlarını kullanan tüm RBF yöntemleri yapay-spektral (pseudo-spektral) yöntemlere dayalı polinomların genelleştirmeleridir [33]. Yıllar boyunca RBF

interpolasyonunun, polinom interpolasyonunun başarısız olduğu birçok durumda kullanılabilceği gösterildi [34]. RBF yöntemler tensör çarpım ızgaraları veya dikdörtgensel bölgelerde uygulanma ihtiyacında olmadığından polinom interpolasyonunun kısıtlamalarının yani sınırlamalarının üstesinden geldiler. RBF yöntemler diğer karmaşık 3-boyutlu şekillerin yanında topografik yüzeyleri temsil etmede de sıklıkla kullanılır [35]. İklim modelleme, yüz tanıma, topografik haritalama, otomobil ve uçak tasarımı, okyanus tabanı haritalama ve tıbbi görüntüleme gibi birçok farklı alanlarda başarılı bir şekilde uygulanmıştır. RBF yöntemlerinin yaklaşık son 50 yılda aktif bir şekilde geliştirilmesine rağmen hala birçok açık soru cevaplanmayı beklediğinden üzerinde çalışılması gereken bir araştırma alanıdır.

Bu tez çalışmasında farklı başlangıç-sınır şartlarıyla verilen Burgers' denklemi için göz önüne alınan iki test problemin multiküadrik radyal baz fonksiyonu ile nümerik çözümlerinin bulunmasıyla ilgilenileceğinden bunlarla ilgili literatürde yer alan bazı çalışmalardan bahsedelim. Hon ve Mao [36], lineer olmayan Burgers' denklemini çözmek için zamana göre türev yerine düşük mertebeden açık sonlu fark yaklaşımını ve bir konum yaklaşım olarak da multiküadrik radyal baz fonksiyon yöntemini uyguladılar. Sirajul Haq vd. [37], Burgers' tipi denklemlerin nümerik çözümü için multiküadrik ve Gaussian radyal baz fonksiyonlarını uyguladılar. Xie vd. [38], 1-boyutlu zamana bağlı Burgers' denklemini çözmek için radyal baz fonksiyonlarını kullandılar. Xie ve Li [39], konum yaklaşımı için multiküadrik radyal baz fonksiyonunu ve zaman yaklaşımı için ikinci mertebeden kompakt sonlu fark şemasını kullanarak 1-boyutlu Burgers' denkleminin çözümü için yeni bir nümerik yöntem sundular. Sarboland ve Aminataei [40], lineer olmayan nonhomojen Burgers' denkleminin çözümü için multiküadrik kuazi interpolasyon operatör ile direkt ve direkt olmayan radyal baz ağ şemasına dayalı yöntemleri önerdiler. Xie vd. [41], Burgers' denkleminin çözümünde zamanın

diskritizasyonu için Crank-Nicolson şemasını ve konum yaklaşımı için radyal baz fonksiyonunu kullandılar. Son zamanlarda, Seydaoğlu [42], 1- boyutlu Burgers' denkleminin çözümünde konum yaklaşımı için multikvadrik radyal baz fonksiyonu ve zaman integrasyonu için Lie-grup şemasına dayalı bir teknik önerdi.



2. BURGERS' DENKLEMİNİN MULTİKUADRİK RADYAL BAZ FONKSİYONU İLE ÇÖZÜMÜ

Bu bölümde

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} = v \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad a < x < b, \quad t > 0 \quad (2.1)$$

olarak verilen 1- boyutlu Burgers' denklemini

$$u(a, t) = g_1(t), \quad t > 0 \quad (2.2)$$

$$u(b, t) = g_2(t), \quad t > 0$$

sınır şartlarıyla ve

$$u(x, 0) = f(x), \quad a \leq x \leq b \quad (2.3)$$

başlangıç şartıyla göz önüne alınacaktır. Burada $v > 0$ kinematik viskozite parametresi, x ve t sırasıyla konum ve zaman değişkenleri olup g_1 , g_2 ve f nümerik hesaplamalar sırasında verilecek olan fonksiyonlardır.

Bu bölümde (2.1)-(2.3) ile verilen başlangıç ve sınır değer probleminin zaman yönünde uygun sonlu fark yaklaşımları ve konum yönünde multikuadrık radyal baz fonksiyonu kullanılarak nümerik şeması elde edildi.

2.1 Yöntemin Uygulanması

Önce (2.1) denkleminin zaman yönünde uygun sonlu fark yaklaşımları kullanarak diskritize edelim. (2.1) denkleminde görülen $\frac{\partial u}{\partial t}$ türevi yerine Taylor seri açılımı yardımıyla elde edilen

$$\frac{\partial u}{\partial t} \simeq \frac{u^{n+1} - u^n}{k}$$

ileri fark yaklaşımı, $u \frac{\partial u}{\partial x}$ ve $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ türevleri yerine de sırasıyla

$$\begin{aligned} u \frac{\partial u}{\partial x} &\simeq \frac{(u u_x)^{n+1} + (u u_x)^n}{2} \\ \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} &\simeq \frac{(u_{xx})^{n+1} + (u_{xx})^n}{2} \end{aligned}$$

olarak verilen Crank-Nicolson tipi yaklaşımları yazılırsa (2.1) denkleminin ayrıklaştırılmış formu

$$\frac{u^{n+1} - u^n}{k} + \frac{(u u_x)^{n+1} + (u u_x)^n}{2} - v \frac{(u_{xx})^{n+1} + (u_{xx})^n}{2} = 0$$

olur. Burada k zaman adım uzunluğu olup $u^n = u(x, nk)$ ' dir. Yukarıdaki eşitlikte görülen $(u u_x)^{n+1}$ lineer olmayan terimi yerine

$$(u u_x)^{n+1} = u^{n+1}(u_x)^n + u^n(u_x)^{n+1} - u^n(u_x)^n$$

olarak verilen Rubin-Graves tipi yaklaşımı [43] yazılır ve gerekli düzenlemeler yapılırsa

$$u^{n+1} + \frac{k}{2}(u^{n+1} u_x^n + u^n(u_x)^{n+1}) - \frac{vk}{2}(u_{xx})^{n+1} = u^n + \frac{vk}{2}(u_{xx})^n \quad (2.4)$$

elde edilir.

u tam çözümüne bir yaklaşım u^n ile gösterilirse u^n çözümü genel olarak bir RBF cinsinden

$$u(x) \simeq u^n(x) = \sum_{j=0}^N \lambda_j^n \phi(r_j) \quad (2.5)$$

formunda aranır. Burada $r_j = \|x - x_j\|$ ve c şekil parametresi olmak üzere

$$\phi(r_j) = \sqrt{r_j^2 + c^2}$$

olarak tanımlanan multikvadrik radyal baz fonksiyonudur. (2.4)'deki u_x ve u_{xx} türevleri (2.5)'den

$$u_x \simeq u_x^n(x) = \sum_{j=0}^N \lambda_j^n \phi'(r_j) = \sum_{j=0}^N \lambda_j^n \frac{x - x_j}{\sqrt{(x - x_j)^2 + c^2}} \quad (2.6)$$

$$u_{xx} \simeq u_{xx}^n(x) = \sum_{j=0}^N \lambda_j^n \phi''(r_j) = \sum_{j=0}^N \lambda_j^n \frac{c^2}{((x-x_j)^2 + c^2)^{3/2}} \quad (2.7)$$

dir.

Nümerik hesaplamalar için problemin çözüm aralığı $[a, b]$, $a = x_0 < x_1 < \dots < x_{N-1} < x_N = b$, $h = \frac{b-a}{N}$ olarak N eşit parçaya bölünür ve her bir x_i kollokasyon noktaları için $r_{ij} = \|x_i - x_j\|$ ve $\phi(r_{ij}) = \sqrt{(x_i - x_j)^2 + c^2}$ olmak üzere (2.5)'den

$$u^n(x_i) = \sum_{j=0}^N \lambda_j^n \phi(r_{ij}), \quad i = 0(1)N \quad (2.8)$$

dir. Bu yaklaşım (2.4)'de yerine yazılırsa

$$\begin{aligned} & \sum_{j=0}^N \lambda_j^{n+1} \phi(r_{ij}) + \frac{k}{2} \left[\sum_{j=0}^N \lambda_j^{n+1} \phi(r_{ij}) \sum_{j=0}^N \lambda_j^n \phi'(r_{ij}) + \sum_{j=0}^N \lambda_j^n \phi(r_{ij}) \sum_{j=0}^N \lambda_j^{n+1} \phi'(r_{ij}) \right] \\ & - \frac{vk}{2} \sum_{j=0}^N \lambda_j^{n+1} \phi''(r_{ij}) = \sum_{j=0}^N \lambda_j^n \phi(r_{ij}) + \frac{vk}{2} \sum_{j=0}^N \lambda_j^n \phi''(r_{ij}) \end{aligned} \quad (2.9)$$

cebirsel denklem sistemi elde edilir. Bu cebirsel denklem sisteminin çözümü için önce $n = 0$ ($t = 0$)'da

$$\lambda = \lambda^n = [\lambda_0^n, \lambda_1^n, \lambda_2^n, \dots, \lambda_N^n]^T$$

başlangıç vektörünün hesaplanması gerekir. Bunun için (2.3) ile verilen

$$u(x_i, 0) = f(x_i), \quad i = 0(1)N$$

başlangıç şartı göz önünde bulundurularak (2.8)'den

$$\begin{aligned} i = 0 \text{ için} & \quad u^n(x_0) = u(x_0) = \lambda_0^n \phi(r_{00}) + \lambda_1^n \phi(r_{01}) + \dots + \lambda_N^n \phi(r_{0N}) \\ i = 1 \text{ için} & \quad u^n(x_1) = u(x_1) = \lambda_0^n \phi(r_{10}) + \lambda_1^n \phi(r_{11}) + \dots + \lambda_N^n \phi(r_{1N}) \\ i = 2 \text{ için} & \quad u^n(x_2) = u(x_2) = \lambda_0^n \phi(r_{20}) + \lambda_1^n \phi(r_{21}) + \dots + \lambda_N^n \phi(r_{2N}) \\ & \quad \vdots \\ i = N \text{ için} & \quad u^n(x_N) = u(x_N) = \lambda_0^n \phi(r_{N0}) + \lambda_1^n \phi(r_{N1}) + \dots + \lambda_N^n \phi(r_{NN}) \end{aligned}$$

cebirsel denklem sistemi bulunur. Bu sistem, $\phi(r_{ij}) = \phi_{ij}$ ve $\Phi = [\phi_{ij}]$ olmak üzere, matris formunda

$$\underbrace{\begin{bmatrix} \phi_{00} & \phi_{01} & \cdots & \phi_{0N} \\ \phi_{10} & \phi_{11} & \cdots & \phi_{1N} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \phi_{N0} & \phi_{N1} & \cdots & \phi_{NN} \end{bmatrix}}_{\Phi} \underbrace{\begin{bmatrix} \lambda_0^n \\ \lambda_1^n \\ \vdots \\ \lambda_N^n \end{bmatrix}}_{\underline{\lambda}^n} = \underbrace{\begin{bmatrix} u(x_0) \\ u(x_1) \\ \vdots \\ u(x_N) \end{bmatrix}}_{\underline{\mathbf{u}}}$$

veya

$$\Phi \underline{\lambda}^n = \underline{\mathbf{u}} \quad (2.10)$$

olarak yazılabilir. Kolayca gösterilebilir ki Φ matrisi, simetrik ve pozitif tanımlı bir matris olup tersi vardır ve dolayısıyla (2.10) sistemi çözülebilir. Böylece (2.10) cebirsel denklem sistemi direkt yöntemlerden biri kullanarak çözülür ve $n = 0$ da

$$\underline{\lambda}^0 = [\lambda_0^0, \lambda_1^0, \lambda_2^0, \dots, \lambda_N^0]^T$$

başlangıç vektörü bulunur.

Şimdi de u_x^n ve u_{xx}^n türevlerinin x_i , $i = 0(1)N$ kollokasyon noktalarındaki değerlerini hesaplayalım. Önce $u_x^n(x_i)$ 'yi hesaplayalım. (2.6)'dan

$$\begin{aligned} i = 0; & \quad u_x^n(x_0) = \lambda_0^n \phi'(r_{00}) + \lambda_1^n \phi'(r_{01}) + \dots + \lambda_N^n \phi'(r_{0N}) \\ i = 1; & \quad u_x^n(x_1) = \lambda_0^n \phi'(r_{10}) + \lambda_1^n \phi'(r_{11}) + \dots + \lambda_N^n \phi'(r_{1N}) \\ i = 2; & \quad u_x^n(x_2) = \lambda_0^n \phi'(r_{20}) + \lambda_1^n \phi'(r_{21}) + \dots + \lambda_N^n \phi'(r_{2N}) \\ & \quad \vdots \\ i = N; & \quad u_x^n(x_N) = \lambda_0^n \phi'(r_{N0}) + \lambda_1^n \phi'(r_{N1}) + \dots + \lambda_N^n \phi'(r_{NN}) \end{aligned}$$

dir. Bu sistem, $\phi'(r_{ij}) = \phi'_{ij}$ ve $\Phi' = [\phi'_{ij}]$ olmak üzere, matris formunda

$$\begin{bmatrix} \phi'_{00} & \phi'_{01} & \cdots & \phi'_{0N} \\ \phi'_{10} & \phi'_{11} & \cdots & \phi'_{1N} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \phi'_{N0} & \phi'_{N1} & \cdots & \phi'_{NN} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda_0^n \\ \lambda_1^n \\ \vdots \\ \lambda_N^n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_x(x_0) \\ u_x(x_1) \\ \vdots \\ u_x(x_N) \end{bmatrix}$$

veya

$$\Phi' \underline{\lambda}^n = \underline{u}_x$$

olarak yazılabilir. Buradan λ^n başlangıç değerlerinin kullanılmasıyla $u_x^n(x_i)$ değerleri bulunur.

Yukardakine benzer şekilde $u_{xx}^n(x_i)$ değerleri de hesaplanabilir. Şöyle ki (2.7)'den

$$\begin{aligned} i = 0; & \quad u_{xx}^n(x_0) = \lambda_0^n \phi''(r_{00}) + \lambda_1^n \phi''(r_{01}) + \dots + \lambda_N^n \phi''(r_{0N}) \\ i = 1; & \quad u_{xx}^n(x_1) = \lambda_0^n \phi''(r_{10}) + \lambda_1^n \phi''(r_{11}) + \dots + \lambda_N^n \phi''(r_{1N}) \\ i = 2; & \quad u_{xx}^n(x_2) = \lambda_0^n \phi''(r_{20}) + \lambda_1^n \phi''(r_{21}) + \dots + \lambda_N^n \phi''(r_{2N}) \\ & \quad \vdots \\ i = N; & \quad u_{xx}^n(x_N) = \lambda_0^n \phi''(r_{N0}) + \lambda_1^n \phi''(r_{N1}) + \dots + \lambda_N^n \phi''(r_{NN}) \end{aligned}$$

elde edilir. Bu cebirsel denklem sistemi, $\phi''(r_{ij}) = \phi''_{ij}$ ve $\Phi'' = [\phi''_{ij}]$ ile gösterilirse, matris formunda

$$\begin{bmatrix} \phi''_{00} & \phi''_{01} & \cdots & \phi''_{0N} \\ \phi''_{10} & \phi''_{11} & \cdots & \phi''_{1N} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \phi''_{N0} & \phi''_{N1} & \cdots & \phi''_{NN} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda_0^n \\ \lambda_1^n \\ \vdots \\ \lambda_N^n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_{xx}(x_0) \\ u_{xx}(x_1) \\ \vdots \\ u_{xx}(x_N) \end{bmatrix}$$

veya

$$\Phi'' \underline{\lambda}^n = \underline{u}_{xx}$$

olarak yazılabilir. Buradan daha önce hesaplanan λ^n başlangıç değerlerinin kullanılmasıyla u_{xx}^n türevinin x_i , $i = 0(1)N$ kollokasyon noktalarındaki $u_{xx}^n(x_i)$ değerleri bulunur.

Yukarıdaki hazırlıklardan sonra (2.9) sistemi çözülebilir. $A = [a_{ij}]$ ve $B = [b_{ij}]$ olmak üzere (2.9) sistemi matris formunda

$$A\lambda^{n+1} = B\lambda^n \quad (2.11)$$

olarak yazılabilir. (2.2) ile verilen sınır şartlarından

$$a_{0j} = \sqrt{(x_0 - x_j)^2 + c^2}; \quad j = 0(1)N$$

$$a_{Nj} = \sqrt{(x_N - x_j)^2 + c^2}; \quad j = 0(1)N$$

olup

$$a_{ij} = \sqrt{(x_i - x_j)^2 + c^2} + \frac{k}{2} \left[u_x^n(x_i) \sqrt{(x_i - x_j)^2 + c^2} + u^n(x_i) \frac{x_i - x_j}{\sqrt{(x_i - x_j)^2 + c^2}} \right] - \frac{vk}{2} \frac{c^2}{((x_i - x_j)^2 + c^2)^{3/2}}; \quad i = 1(1)N - 1, j = 0(1)N$$

ve

$$b_{ij} = \sqrt{(x_i - x_j)^2 + c^2} + \frac{vk}{2} \frac{c^2}{((x_i - x_j)^2 + c^2)^{3/2}}; \quad i = 1(1)N - 1, j = 0(1)N$$

dir. (2.11)'in sağ tarafı

$$B\lambda^n = \left[\sum_{j=0}^N b_{ij} \lambda_j^n \right] = [d_i], \quad i = 1(1)N - 1, j = 0(1)N$$

ile ifade edilebilir. Böylece (2.11) sistemi açık matris formunda

$$\begin{bmatrix} a_{00} & a_{01} & \cdots & a_{0(N-1)} & a_{0N} \\ a_{10} & a_{11} & \cdots & a_{1(N-1)} & a_{1N} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{(N-1)0} & a_{(N-1)1} & \cdots & a_{(N-1)(N-1)} & a_{(N-1)N} \\ a_{N0} & a_{N1} & \cdots & a_{N(N-1)} & a_{NN} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda_0^{n+1} \\ \lambda_1^{n+1} \\ \vdots \\ \lambda_{N-1}^{n+1} \\ \lambda_N^{n+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} g_1 \\ d_1 \\ \vdots \\ d_{N-1} \\ g_2 \end{bmatrix} \quad (2.12)$$

olarak yazılabilir. (2.12) karesel cebirsel denklem sistemi direkt yöntemlerden biri yardımıyla çözümlenerek λ^{n+1} bulunur ve iterasyona devam edilir. Böylece, g_1 , g_2 ve f fonksiyonlarının verilmesi durumunda (2.5)'den $t = t_{n+1}$ zamanında ve x_i , $i = 0(1)N$ kollokasyon noktalarında (2.1)-(2.3) başlangıç ve sınır değer probleminin $u^n(x_i, t_n)$ nümerik çözümleri elde edilir.



3. TEST PROBLEMLER VE NÜMERİK SONUÇLAR

Bu bölümde, analitik çözümü mevcut olan farklı başlangıç ve sınır şartlarıyla verilen (2.1) Burgers' denklemini için iki test problem göz önüne alındı. Her bir problemin 2. Bölüm'de verilen multiküadratik radyal baz fonksiyonu ile elde edilen nümerik çözümleri, analitik çözüm ve literatürde mevcut diğer çalışmalarda verilen sonuçlarla karşılaştırılarak tablolar halinde sunuldu. Ayrıca, elde edilen nümerik çözümlerin ele alınan test problemlerin doğru fiziksel davranışlarını ne kadar iyi sergilediğini göstermek için grafikler verildi.

Kullanılan yöntemin doğruluğunu test etmek için tam çözüm ile elde edilen nümerik çözümler arasındaki farkı ölçen

$$L_2 = \sqrt{h \sum_{j=0}^N |(u)_j - (u^n)_j|^2}$$

olarak tanımlanan ortalama hata normu ile yine tam çözüm ile nümerik çözümler arasındaki maksimum hatayı ölçen

$$L_\infty = \max_j |(u)_j - (u^n)_j|$$

olarak tanımlanan maksimum hata normu hesaplandı.

3.1 Test Problemler

Problem 1: İlk olarak (2.1) ile verilen Burgers' denklemini

$$u(0, t) = u(1, t) = 0, \quad t > 0$$

sınır şartları ve

$$u(x, 0) = \sin(\pi x), \quad 0 \leq x \leq 1$$

başlangıç şartı ile ele alındı. Bu problemin tam çözümü

$$u = u(x, t) = 2\pi v \frac{\sum_{n=1}^{\infty} a_n \exp(-n^2 \pi^2 vt) n \sin(\pi x)}{a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \exp(-n^2 \pi^2 vt) \cos(\pi x)} \quad (3.1)$$

dir. Burada a_0 ve a_n Fourier katsayıları sırasıyla

$$a_0 = \int_0^1 \exp\{-(2\pi v)^{-1} [1 - \cos(\pi x)]\} dx$$

ve

$$a_n = 2 \int_0^1 \cos(n\pi x) \{\exp\{-(2\pi v)^{-1} [1 - \cos(\pi x)]\}\} dx, \quad n \geq 1$$

dir [5].

Problem 2: İkinci olarak (2.1) Burgers' denklemini

$$u(0, t) = u(1, t) = 0, \quad t > 0$$

sınır şartları ve

$$u(x, 0) = 4x(1 - x), \quad 0 \leq x \leq 1$$

başlangıç şartı ile ele alındı. Bu problemin tam çözümü (3.1)'de verilen $u(x, t)$ fonksiyonudur. Fakat burada a_0 ve a_n Fourier katsayıları sırasıyla

$$a_0 = \int_0^1 \exp\{-x^2(3v)^{-1}(3 - 2x)\} dx$$

ve

$$a_n = 2 \int_0^1 \cos(n\pi x) \exp\{-x^2(3v)^{-1}(3 - 2x)\} dx, \quad n \geq 1$$

dir.

3.2 Nümerik Sonuçlar

Bu çalışmada bütün hesaplamalar Intel(R) Celeron(R) CPU N3060 @ 1.60GHz 4GB bilgisayarda MATLAB R 2011a programı kullanılarak yapıldı.

Tablo 3.1’de Problem 1’in $v = 1$, $k = 0.0001$ ve $h = 0.1, 0.0125$ için $t = 0.1$ zamanında multikvadrik radyal baz fonksiyonu ile elde edilen nümerik çözümleri önceki araştırmacıların [12, 44, 45] referanslı çalışmalarında verdikleri sonuçlarla ve problemin analitik çözümüyle karşılaştırıldı. Tablodan elde edilen nümerik sonuçların analitik çözüm ve [12, 44, 45] referanslarında verilenlerle iyi uyum içinde olduğu açıkça görülmektedir.

Tablo 3.2’de Problem 1’in $v = 0.1$, $h = 0.0125$ ve $k = 0.0001$ için $t = 0.4, 0.6, 0.8, 1.0, 3.0$ zamanlarında multikvadrik radyal baz fonksiyonu kullanılarak elde edilen nümerik çözümleri literatürde mevcut olan [46–50] referanslı çalışmalarda verilenlerle ve ayrıca problemin analitik çözümü ile karşılaştırıldı. Tablodan, açıkça sunulan yöntemle elde edilen nümerik sonuçların önceki araştırmacıların verdikleri sonuçlarla uyumlu ve analitik sonuçlara oldukça yakın olduğu görülmektedir.

Tablo 3.1: Problem 1'in $v = 1$, h ve k 'nin farklı değerleri için $t = 0.1$ zamanında çözümleri

x	[12]		[44]		[45]		Mevcut	
	Explicit	Exact-Explicit	$h = 0.1$	$h = 0.1$	$h = 0.0125$	$h = 0.1$	$h = 0.0125$	$h = 0.0125$
	$h = 0.0125$	$h = 0.1$	$h = 0.0125$	$h = 0.1$	$h = 0.0125$	$h = 0.1$	$h = 0.0125$	$h = 0.0125$
	$k = 0.00001$	$k = 0.00001$	$k = 0.00001$	$k = 0.0001$	$k = 0.0001$	$k = 0.0001$	$k = 0.0001$	$k = 0.0001$
								$(c = 0.1)$
								$(c = 1.5)$
0.1	0.10952	0.11048	0.10955	0.10958	0.10954	0.109536	0.109535	0.109538
0.2	0.20975	0.21159	0.20981	0.20989	0.20980	0.209791	0.209789	0.209792
0.3	0.29184	0.29435	0.29192	0.29199	0.29190	0.291895	0.291893	0.291896
0.4	0.34786	0.35080	0.34795	0.34709	0.34794	0.34792	0.347921	0.347924
0.5	0.37151	0.37458	0.37161	0.37173	0.37159	0.371575	0.371575	0.371577
0.6	0.35898	0.36189	0.35907	0.35920	0.35906	0.359043	0.359043	0.359046
0.7	0.30985	0.31231	0.30993	0.31003	0.30992	0.309901	0.309902	0.309905
0.8	0.22778	0.22955	0.22783	0.22792	0.22783	0.227813	0.227814	0.227817
0.9	0.12067	0.12160	0.12070	0.12071	0.12069	0.120682	0.120683	0.120687

Tablo 3.2: Problem 1'in $v = 0.1$, $h = 0.0125$ ve $k = 0.0001$ için farklı t zamanlarında çözümleri

x	t	[46]	[47]	[48]	[49]	[50]	Mevcut	Analitik
		$k = 0.0001$	$k = 0.01$	$k = 0.0001$	$k = 0.0001$	$k = 0.0001$	$k = 0.0001$ ($c = 0.1$)	
0.25	0.4	0.31429	0.30881	0.30890	0.30890	0.30895	0.308893	0.308894
	0.6	0.24373	0.24069	0.24075	0.24075	0.24078	0.240737	0.240739
	0.8	0.19758	0.19569	0.19569	0.19569	0.19570	0.195674	0.195676
0.50	1.0	0.16391	0.16254	0.16258	0.16258	0.16259	0.162563	0.162565
	3.0	0.02743	0.02720	0.02720	0.02722	0.02721	0.027202	0.027202
	0.4	0.57636	0.56955	0.56965	0.56969	0.56964	0.569632	0.569632
0.75	0.6	0.45169	0.44714	0.44723	0.44726	0.44723	0.447204	0.447206
	0.8	0.36245	0.35925	0.35925	0.35928	0.35926	0.365226	0.365228
	1.0	0.29437	0.29188	0.29192	0.29146	0.29194	0.291914	0.291916
0.75	3.0	0.04057	0.04021	0.04019	0.29196	0.04021	0.040204	0.040205
	0.4	0.62592	0.62540	0.62538	0.62539	0.62531	0.625435	0.625438
	0.6	0.49034	0.48715	0.48715	0.48723	0.48716	0.487212	0.487215
0.75	0.8	0.37713	0.37385	0.37385	0.37396	0.37391	0.373918	0.373922
	1.0	0.29016	0.28744	0.28741	0.28752	0.28748	0.287471	0.287474
	3.0	0.01334	0.02978	0.02976	0.02979	0.02978	0.029771	0.029772

Tablo 3.3’de Problem 1’in $v = 0.1$, $k = 0.01$ ve $h = 0.1, 0.01$ için $t = 0.5$ ve $t = 1.0$ zamanlarında mevcut yöntemle elde edilen nümerik çözümleri önceki araştırmacıların [36, 45] referanslı çalışmalarında verdikleri sonuçlarla ve ayrıca problemin analitik çözümünüyle karşılaştırıldı. Tablodan, elde edilen nümerik sonuçların diğer sonuçlarla uyumlu olduğu ve problemin analitik çözümüne oldukça yakın olduğu açıkça görülmektedir.

Tablo 3.4’de Problem 1’ in $v = 0.01$, $k = 0.001$ ve $h = 0.0125$ için farklı zamanlarda elde edilen nümerik çözümleri önceki araştırmacıların [12, 14, 45, 47, 49, 51] referanslı çalışmalarda sundukları sonuçlarla karşılaştırıldı ve sonuçların birbirleriyle uyumlu olduğu görüldü. Ayrıca tablodan, sunulan yöntemle elde edilen nümerik sonuçların problemin analitik çözümüne oldukça yakın olduğu görülmektedir.

Tablo 3.3: Problem 1’in $v = 0.1$, $k = 0.01$ ve $h = 0.1, 0.01$ için farklı t zamanlarında çözümleri

t	x	[36]	[45]		Mevcut		Analitik
		$h = 0.1$	$h = 0.1$	$h = 0.01$	$h = 0.1$ ($c = 0.897$)	$h = 0.01$ ($c = 0.1$)	
0.5	0.1	0.1104	0.1099	0.1099	0.109199	0.109912	0.109916
	0.2	0.2186	0.2181	0.2180	0.217601	0.218043	0.218050
	0.3	0.3227	0.3222	0.3222	0.321898	0.322185	0.322193
	0.4	0.4194	0.4191	0.4190	0.418867	0.419026	0.419034
	0.5	0.5028	0.5029	0.5028	0.502702	0.502784	0.502789
	0.6	0.5618	0.5625	0.5623	0.562304	0.562326	0.562325
	0.7	0.5744	0.5763	0.5759	0.575919	0.575860	0.575851
	0.8	0.5030	0.5063	0.5056	0.505728	0.505536	0.505521
	0.9	0.3059	0.3101	0.3094	0.309843	0.309358	0.309346
1.0	0.1	0.0664	0.0663	0.0663	0.066169	0.066315	0.066316
	0.2	0.1314	0.1312	0.1312	0.131002	0.131208	0.131209
	0.3	0.1930	0.1928	0.1928	0.192544	0.192784	0.192786
	0.4	0.2483	0.2481	0.2480	0.247784	0.248039	0.248041
	0.5	0.2923	0.2921	0.2919	0.291646	0.291915	0.291916
	0.6	0.3167	0.3163	0.3161	0.315770	0.316066	0.316068
	0.7	0.3090	0.3084	0.3081	0.307738	0.308087	0.308089
	0.8	0.2548	0.2541	0.2537	0.253305	0.253714	0.253718
	0.9	0.1468	0.1464	0.1461	0.145630	0.146062	0.146065

Tablo 3.4: Problem 1'in $v = 0.01$, $h = 0.0125$ ve $k = 0.01$, 0.001 , 0.0001 için farklı t zamanlarında çözümleri

x	t	[12]	[18]	[45]	[47]	[49]	[51]	Mevcut		Analitik
		$k = 0.001$	$k = 0.0001$	$k = 0.001$	$k = 0.01$	$k = 0.0001$	$k = 0.0001$	$k = 0.001$	c	
0.25	0.4	0.34244	0.34193	0.34191	0.34229	0.34819	0.3419149324	0.115	0.3419148219	0.3419149324
	0.6	0.26905	0.26898	0.26896	0.26902	0.27536	0.2689648453	0.108	0.2689644808	0.2689648453
	0.8	0.22145	0.22149	0.22148	0.22148	0.22752	0.2214819145	0.12345	0.2214816180	0.2214819145
	1.0	0.18813	0.18820	0.18819	0.18817	0.19375	0.1881939614	0.12345	0.1881881014	0.1881939614
0.50	3.0	0.07509	0.07512	0.07511	0.07511	0.07754	0.0751140839	0.12345	0.0751096789	0.0751140839
	0.4	0.67152	0.66076	0.66071	0.66797	0.66543	0.6607109708	0.115	0.6607111293	0.6607109710
	0.6	0.53406	0.52945	0.52942	0.53211	0.53525	0.5294182636	0.108	0.5294182663	0.5294182637
	0.8	0.44143	0.43916	0.43914	0.44526	0.44526	0.4391382506	0.12345	0.4391359852	0.4391382507
0.75	1.0	0.37568	0.37443	0.37442	0.37500	0.38047	0.3744200376	0.12345	0.3744174831	0.3744200376
	3.0	0.15020	0.15018	0.15218	0.15018	0.15362	0.1501790052	0.12345	0.1501743570	0.1501790052
	0.4	0.94675	0.91046	0.91027	0.93680	0.91201	0.9102645487	0.115	0.9102652762	0.9102645505
	0.6	0.78474	0.76733	0.76724	0.77724	0.77132	0.7672432886	0.108	0.7672437675	0.7672432826
1.0	0.8	0.65659	0.64744	0.64740	0.55833	0.65254	0.6473952374	0.12345	0.6473936263	0.6473952348
	1.0	0.56135	0.55608	0.55605	0.55833	0.56157	0.5560506935	0.12345	0.5560498926	0.5560507045
	3.0	0.22502	0.22484	0.22481	0.22485	0.22874	0.2248112673	0.12345	0.2248082863	0.2248112482

Tablo 3.5: Problem 1'in $v = 10$, $h = 0.1$ ve $k = 0.0001$ için farklı t zamanlarında çözümleri

t	x	[36]	[45]	[47]	Mevcut ($c = 1.5$)	Analitik
0.01	0.1	0.1152	0.1146	0.11365	0.114613	0.114613
	0.2	0.2192	0.2182	0.21634	0.218163	0.218164
	0.3	0.3021	0.3006	0.29810	0.300614	0.300615
	0.4	0.3556	0.3539	0.35093	0.353895	0.353897
	0.5	0.3745	0.3727	0.36957	0.372694	0.372696
	0.6	0.3567	0.3550	0.35204	0.355014	0.355016
	0.7	0.3039	0.3024	0.29989	0.302424	0.302426
	0.8	0.2211	0.2200	0.21813	0.219974	0.219975
	0.9	0.1163	0.1157	0.11476	0.115732	0.115732
0.02	0.1	0.0433	0.0428		0.042836	0.042836
	0.2	0.0823	0.0815		0.081504	0.081504
	0.3	0.1133	0.1122		0.112234	0.112235
	0.4	0.1333	0.1320		0.132018	0.132020
	0.5	0.1403	0.1389		0.138905	0.138907
	0.6	0.1335	0.1322		0.132195	0.132197
	0.7	0.1136	0.1125		0.112520	0.112521
	0.8	0.0826	0.0818		0.081790	0.081791
	0.9	0.0434	0.0430		0.043013	0.043013

Tablo 3.5'de Problem 1'in $v = 10$, $h = 0.1$, $k = 0.0001$ için $t = 0.01$ ve $t = 0.02$ zamanlarında sunulan multiküadrik radyal baz fonksiyonu ile elde edilen nümerik sonuçları literatürde bulunan [36, 45, 47] referanslı çalışmaların sonuçlarıyla karşılaştırıldı ve sonuçların birbirine yakın olduğu görüldü. Tabloya bakıldığında sunulan yöntemle elde edilen sonuçların problemin analitik çözümü ile iyi uyum içinde olduğu açıkça görülmektedir.

Tablo 3.6'da Problem 1'in $v = 1$, $k = 0.00001$ alınarak konum uzunluğu h 'nın değişik değerleri için $t = 0.1$ zamanında sunulan yöntemle elde edilen nümerik çözümleri problemin analitik çözümü ile karşılaştırıldı. Tablodan konum uzunluğu h 'nın küçük değerleri için L_2 ve L_∞ hata normlarının gittikçe küçüldüğü ve elde edilen nümerik çözümlerin analitik çözüme oldukça yaklaştığı görülmektedir.

Tablo 3.6: Problem 1'in $v = 1$, $h = 0.1, 0.05, 0.025, 0.0125$ ve $k = 0.00001$ için $t = 0.1$ zamanında çözümleri

x	Mevcut				Analitik
	$h = 0.1$ ($c = 0.5$)	$h = 0.05$ ($c = 0.3$)	$h = 0.025$ ($c = 0.234$)	$h = 0.0125$ ($c = 0.1194$)	
0.1	0.109528	0.109506	0.109537	0.109537	0.109538
0.2	0.209788	0.209761	0.209791	0.209791	0.209792
0.3	0.291897	0.291866	0.291895	0.291896	0.291896
0.4	0.347933	0.347895	0.347923	0.347923	0.347924
0.5	0.371596	0.371549	0.371576	0.371577	0.371577
0.6	0.359075	0.359016	0.359044	0.359045	0.359046
0.7	0.309945	0.309874	0.309904	0.309904	0.309905
0.8	0.227866	0.227785	0.227816	0.227816	0.227817
0.9	0.120743	0.120654	0.120685	0.120686	0.120687
L_2	2.9167×10^{-5}	3.0392×10^{-5}	1.2412×10^{-6}	8.4337×10^{-7}	
L_∞	5.6142×10^{-5}	3.3956×10^{-5}	1.3561×10^{-6}	9.4830×10^{-7}	

Tablo 3.7: Problem 2'nin $v = 1$, $h = 0.0125$ ve $k = 0.001, 0.00001$ için farklı t zamanlarında çözümleri

x	t	[45]	[46]	Mevcut	Analitik
		$k = 0.001$	$k = 0.00001$	($c = 0.13$)	
0.25	0.10	0.26148	0.26245	0.261477	0.261480
	0.15	0.16148	0.16157	0.161475	0.161478
	0.20	0.09947	0.09948	0.099468	0.099470
	0.25	0.06109	0.06111	0.061086	0.061088
0.50	0.10	0.38342	0.38314	0.383419	0.383422
	0.15	0.23405	0.23394	0.234052	0.234055
	0.20	0.14289	0.14287	0.142885	0.142888
	0.25	0.08723	0.08729	0.087231	0.087233
0.75	0.10	0.28157	0.28004	0.281570	0.281573
	0.15	0.16974	0.16948	0.169736	0.169738
	0.20	0.10265	0.10261	0.102653	0.102655
	0.25	0.06229	0.06230	0.062288	0.062290

Tablo 3.7'de Problem 2'nin $v = 1$, $k = 0.001$ ile $h = 0.0125$ için $t = 0.10, 0.15, 0.20, 0.25$ zamanlarında elde edilen nümerik çözümleri problemin analitik çözümü ve diğer araştırmacıların [45, 46] referanslı çalışmalarında verdikleri sonuçlarla karşılaştırıldı. Tablodan açıkça görüleceği üzere elde edilen sonuçlarla analitik sonuçlar birbirine oldukça yakındır.

Tablo 3.8: Problem 2'nin $v = 0.1$, $h = 0.0125$ ve $k = 0.01, 0.001, 0.0001, 0.00001$ için farklı t zamanlarında çözümleri

x	t	[45] $k = 0.001$	[46] $k = 0.00001$	[47] $k = 0.01$	[49] $k = 0.0001$	Mevcut ($c = 0.12$)	Analitik
0.25	0.4	0.31752	0.32679	0.31743	0.32091	0.317522	0.317523
	0.6	0.24614	0.25117	0.24609	0.24910	0.246138	0.246138
	0.8	0.19955	0.20270	–	0.20211	0.199555	0.199555
	1.0	0.16559	0.16780	0.16558	0.16782	0.165598	0.165599
	3.0	0.02776	0.02804	0.02776	0.02828	0.027759	0.027759
0.50	0.4	0.58454	0.59661	0.58446	0.58788	0.584537	0.584537
	0.6	0.45798	0.46581	0.45791	0.46174	0.457976	0.457976
	0.8	0.36740	0.37293	–	0.37111	0.346923	0.346924
	1.0	0.29834	0.30253	0.29831	0.30183	0.298343	0.298343
	3.0	0.04106	0.04155	0.04107	0.04185	0.041065	0.041065
0.75	0.4	0.64562	0.64680	0.64558	0.65054	0.645615	0.645616
	0.6	0.50268	0.50852	0.50261	0.50825	0.502675	0.502676
	0.8	0.38534	0.39117	–	0.39068	0.385335	0.385336
	1.0	0.29586	0.30066	0.29582	0.30057	0.295856	0.295857
	3.0	0.03044	0.03081	0.03044	0.03106	0.030439	0.030440

Tablo 3.8'de Problem 2'nin $v = 0.1$, $k = 0.0001$ ve $h = 0.0125$ için $t = 0.4, 0.6, 0.8, 1.0, 3.0$ zamanlarında bu çalışmada sunulan yöntemle elde edilen nümerik çözümleri problemin analitik sonuçları ve literatürdeki [45–47, 49] referanslı çalışmalarda verilenlerle karşılaştırıldı. Tabloya bakıldığında sunulan yöntemle elde edilen sonuçların problemin analitik çözümü ile iyi uyum içerisinde olduğu görülmektedir.

Tablo 3.9'da Problem 2'nin $v = 0.01$, $k = 0.0001$ ve $h = 0.0125$ için nümerik çözümleri [12, 47, 49, 52] referanslı çalışmalardaki sonuçlarla ve problemin analitik çözümü ile karşılaştırıldı. Nümerik çözümlerin analitik çözüm ile oldukça iyi uyumlu olduğu görüldü.

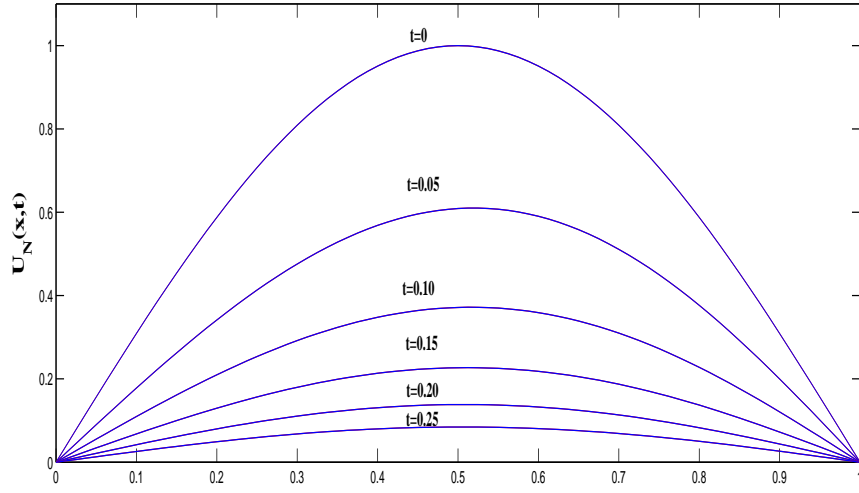
Tablo 3.10'da Problem 2'nin $v = 1$, $k = 0.00001$ ve $t = 0.1$ ile konum uzunluğu h 'nin farklı değerleri için analitik ve nümerik çözümleri verildi. Tablodan, L_2 ve L_∞ hata normlarının h küçüldükçe azaldığı ve elde edilen nümerik sonuçların analitik çözüme oldukça yakın olduğu görüldü.

Tablo 3.9: Problem 2'nin $v = 0.01$, $h = 0.0125$ ve $k = 0.01$, 0.001 , 0.0001 için farklı t zamanlarında çözümleri

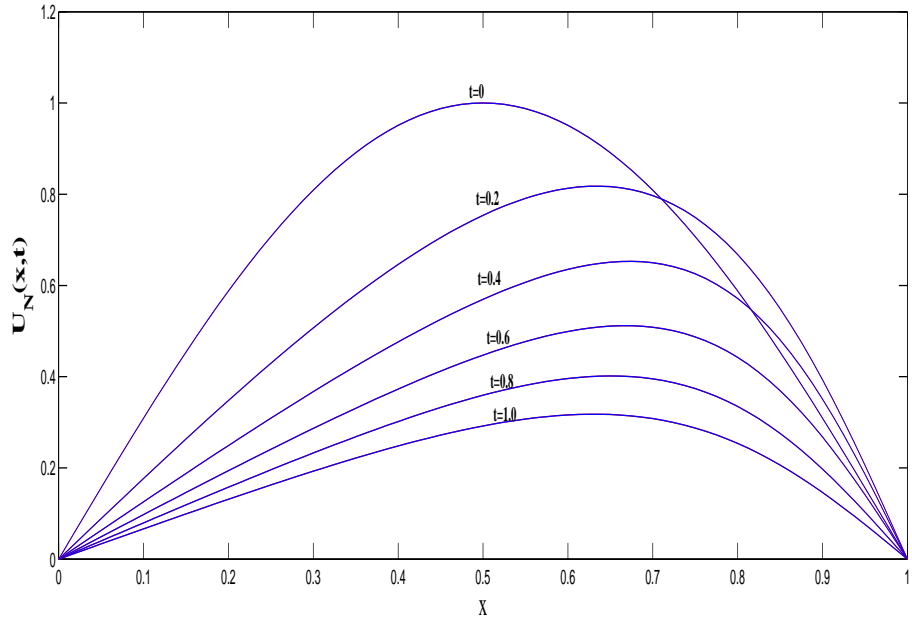
x	t	[12]		[47]	[49]	[52]	Mevcut		Analitik
		Explicit	Exact-Explicit	$k = 0.01$	$k = 0.0001$	$k = 0.01$	$k = 0.0001$	$k = 0.0001$	
0.25	0.4	0.36296	0.36185	0.36273	0.36911	0.36226	0.04	0.362244	0.362259
	0.6	0.28217	0.28193	0.28212	0.28905	0.28204	0.04	0.282007	0.282037
	0.8	0.23043	0.23046	—	0.23703	0.23045	0.04	0.230420	0.230451
0.50	1.0	0.19463	0.19474	0.19467	0.20069	0.19469	0.04	0.194667	0.194690
	3.0	0.07611	0.07617	0.07613	0.07865	0.07606	0.10	0.076133	0.076134
	0.4	0.69591	0.67851	0.69186	0.68818	0.68369	0.04	0.683679	0.683679
0.75	0.6	0.55351	0.54508	0.55125	0.55425	0.54832	0.04	0.548315	0.548316
	0.8	0.45625	0.45176	—	0.46011	0.45372	0.04	0.453708	0.453714
	1.0	0.38705	0.38446	0.38627	0.39206	0.38568	0.04	0.385666	0.385676
0.75	3.0	0.15220	0.15215	0.15218	0.15576	0.15203	0.10	0.152179	0.152180
	0.4	0.95925	0.91169	0.94940	0.92194	0.92040	0.04	0.920500	0.920500
	0.6	0.80197	0.77402	0.79399	0.78676	0.78304	0.04	0.782994	0.782994
0.75	0.8	0.67267	0.65617	—	0.66777	0.66276	0.04	0.662720	0.662720
	1.0	0.57501	0.56478	0.57170	0.57491	0.56934	0.04	0.569317	0.569319
	3.0	0.22796	0.22746	0.22778	0.23183	0.22751	0.10	0.227743	0.227743

Tablo 3.10: Problem 2'nin $v = 1$, $h = 0.1, 0.05, 0.025, 0.0125$ ve $k = 0.00001$ için $t = 0.1$ zamanında çözümleri

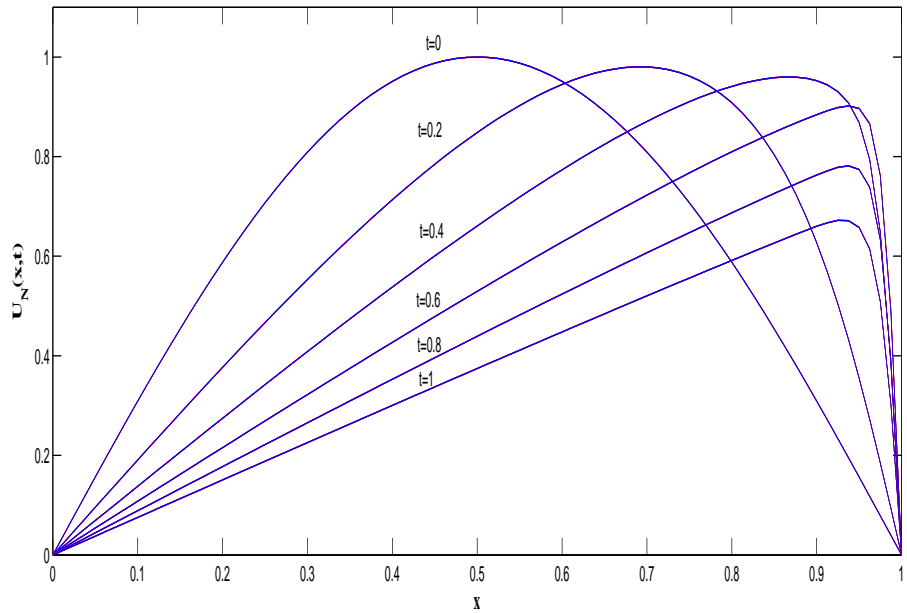
x	Mevcut				Analitik
	$h = 0.1$ ($c = 0.3$)	$h = 0.05$ ($c = 0.2$)	$h = 0.025$ ($c = 0.234$)	$h = 0.0125$ ($c = 0.1194$)	
0.1	0.111855	0.112643	0.112891	0.112891	0.112892
0.2	0.215349	0.216003	0.216251	0.216251	0.216252
0.3	0.300063	0.300724	0.300965	0.300965	0.300966
0.4	0.358011	0.358627	0.358862	0.358862	0.358863
0.5	0.382555	0.383185	0.383421	0.383422	0.383422
0.6	0.369771	0.370410	0.370657	0.370657	0.370658
0.7	0.319095	0.319800	0.320065	0.320065	0.320066
0.8	0.234380	0.235090	0.235370	0.235370	0.235371
0.9	0.123579	0.124435	0.124717	0.124717	0.124718
L_2	9.0510×10^{-4}	2.5253×10^{-4}	1.1286×10^{-6}	8.6616×10^{-7}	
L_∞	1.1390×10^{-3}	3.0469×10^{-4}	1.3781×10^{-6}	9.7795×10^{-7}	



Şekil 3.1: Problem 1'in $v = 1$, $k = 0.0001$, $h = 0.0125$ ve $c = 0.1$ için farklı t zamanlarında çözüm grafikleri

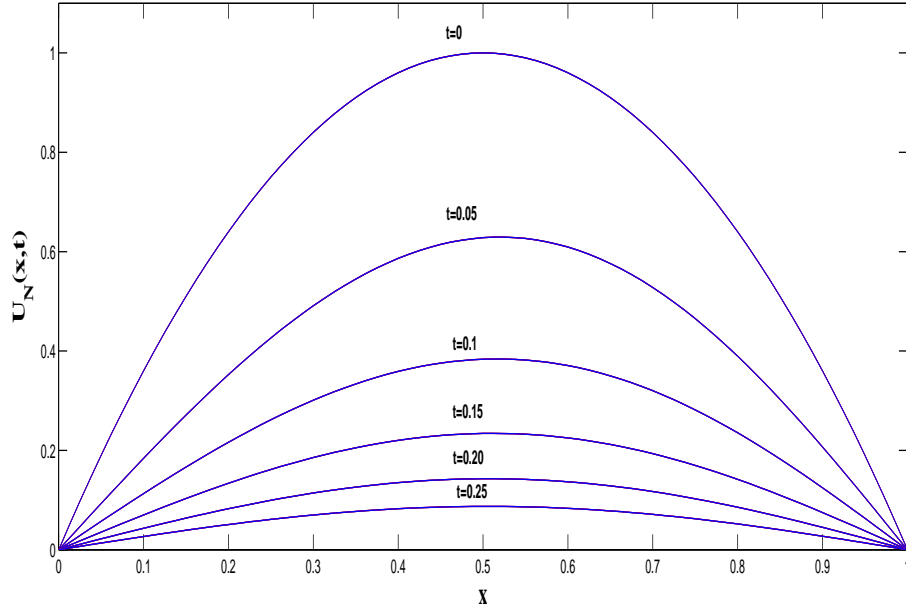


Şekil 3.2: Problem 1'in $v = 0.1$, $k = 0.0001$, $h = 0.0125$ ve $c = 0.1$ için farklı t zamanlarında çözüm grafikleri

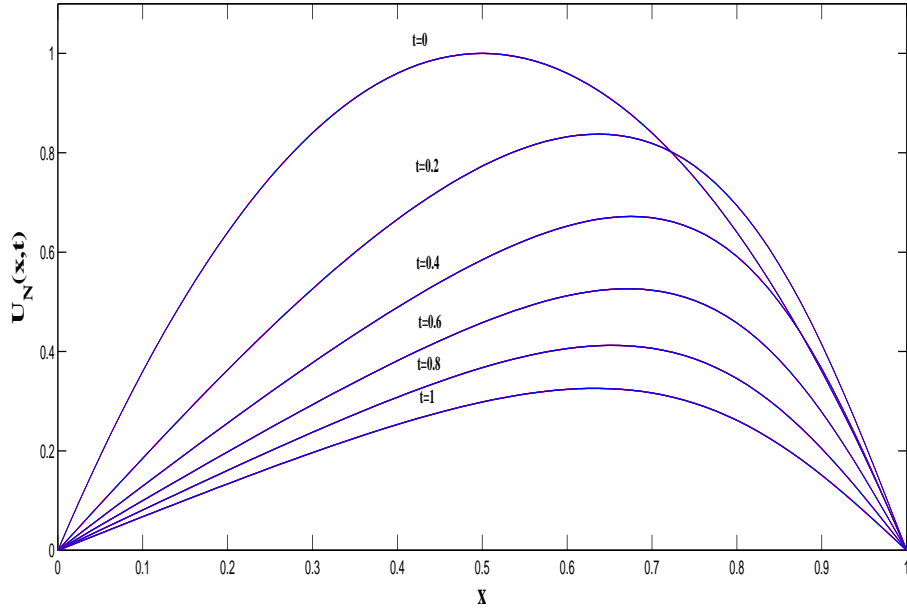


Şekil 3.3: Problem 1'in $v = 0.01$, $k = 0.0001$, $h = 0.0125$ ve $c = 0.112$ için farklı t zamanlarında çözüm grafikleri

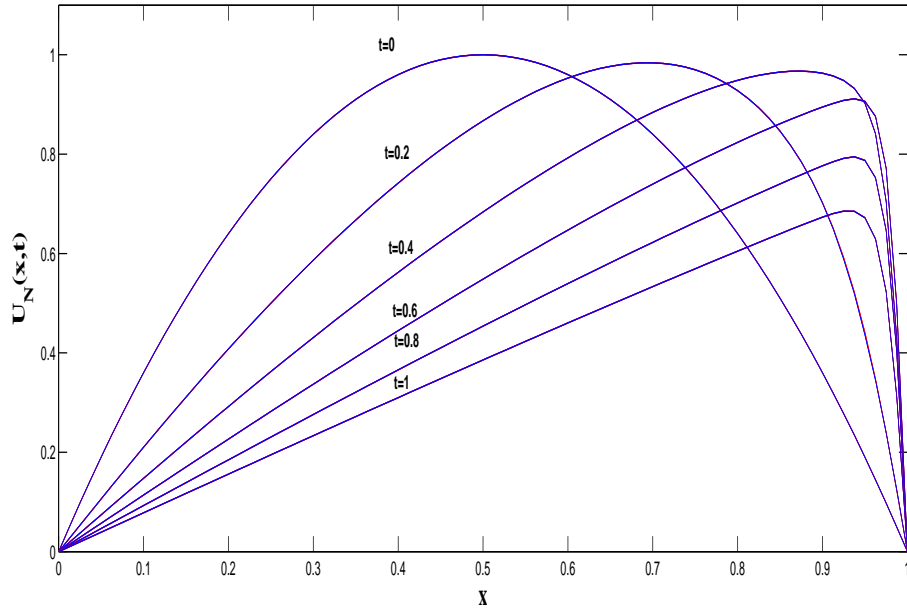
Şekil 3.1, Şekil 3.2 ve Şekil 3.3 viskozitenin farklı değerleri için Problem 1'in nümerik ve tam çözümlerinin zamana bağlı değişimini göstermektedir. Nümerik ve tam çözümler birbirine oldukça yakın olduğundan her iki çözüm aynı grafik üzerinde olup ayırt edilememektedir. Nümerik çözümlerde gözlemlendiği üzere $v = 1$ için normal dağılım şeklinde zamana bağlı olarak genliğin azalarak x eksenine yaklaştığı, viskozitenin azalmasıyla dalgaların sağa yatık ve şok dalgalarının zirvesi yüksekte kalacak şekilde zamana bağlı bozulmalar olduğu görülmektedir.



Şekil 3.4: Problem 2'nin $v = 1$, $k = 0.0001$, $h = 0.0125$ ve $c = 0.13$ için farklı t zamanlarında çözüm grafikleri



Şekil 3.5: Problem 2'nin $v = 0.1$, $k = 0.0001$, $h = 0.0125$ ve $c = 0.12$ için farklı t zamanlarında çözüm grafikleri



Şekil 3.6: Problem 2'nin $v = 0.01$, $k = 0.0001$, $h = 0.0125$ ve $c = 0.04$ için farklı t zamanlarında çözüm grafikleri

Problem 2'nin nümerik çözümlerinin problemin doğru fiziksel davranışlarını ne kadar iyi sergilediğini göstermek için Şekil 3.4, Şekil 3.5 ve Şekil 3.6'da viskozitenin farklı değerleri için zamana bağlı değişimleri verildi. Nümerik ve tam çözümler birbirine oldukça yakın olduğundan her iki çözüm aynı grafik üzerinde olup ayırt edilememektedir. Şekillerden de görüldüğü gibi $v = 1$ için normal olan dağılım grafiği viskozitenin küçük değerleri için sağ sınıra yakın şok dalgalar oluşturmaktadır.

3.3 Sonuç

Bu çalışmada 1-boyutlu Burgers' denklemleri için tam çözümü mevcut olan iki test problemin sonlu fark teknikleriyle birleştirilmiş multikvadrik radyal baz fonksiyonu ile nümerik çözümleri elde edildi. Elde edilen sonuçlar analitik çözüm ve literatürde bulunan diğer bazı araştırmacıların verdikleri sonuçlarla karşılaştırıldı. Ayrıca L_2 ve L_∞ hata normları hesaplandı. Tablolardan sunulan yöntemle elde edilen sonuçların problemin analitik çözümüne oldukça yakın olduğu ve diğer araştırmacıların verdikleri sonuçlarla iyi uyum içerisinde olduğu açıkça görülmektedir. Elde edilen sonuçlardan c şekil parametresinin seçiminin oldukça önemli olduğu, analitik çözüme daha yakın çözümlerin elde edilmesinde önemli rol oynadığı ve dolayısıyla optimal değerlerinin bulunması durumunda multikvadrik radyal baz fonksiyonu ile elde edilecek nümerik sonuçların problemin analitik çözümüne daha yakın olacağı açıktır. Sonuç olarak uygulanması kolay ve etkili olan bu yöntem, c şekil parametresinin uygun seçilmesi durumunda uygulamalı matematikte, matematiksel fizikte ve mühendislik bilimlerinde ortaya çıkan birçok lineer olmayan başlangıç ve sınır değer problemlerinin nümerik çözümlerinin elde edilmesinde kullanılabilir.

KAYNAKLAR

- [1] H. Bateman, *Some recent researches on the motion of fluids*, Mon. Weather Rev., 43 (1915) 163-170.
- [2] J. M. Burgers, *Mathematical example illustrating relations occurring in the theory of turbulent fluid motion*, **Trans. Roy. Neth. Acad. Sci. Amst.**, 17 (1939) 1-53.
- [3] J.M. Burgers, *A mathematical model illustrating the theory of turbulence*, **Adv. in Appl. Mech.**, vol. 1, Academic Press, New York, (1948) 171-199.
- [4] P. A. Lagerstrom, J. D. Cole, and L. Trilling, *Problems in the theory of viscous compressible fluids*, Calif. Inst. Technol. 1949.
- [5] J. D. Cole, *On a quasilinear parabolic equation occurring in aerodynamics*, **Quart. Appl. Math.**, 9 (1951) 225-236.
- [6] E. Hopf, *The partial differential equation $u_t + uu_x = \mu u$* , **Commun. Pure Appl. Math.**, 3, (1950), 201-230.
- [7] W. F. Ames, *Nonlinear partial differential equation in engineering*, Academic press, New York, 1965.
- [8] E. R. Benton, ve G. W. Platzman, *A table of solutions of the one-dimensional Burgers equation*, **Quart. Appl. Math.**, 30 (1972) 195-212.
- [9] D. J. Evans, A. R. Abdullah, *The group explicit method for the solution of Burgers equation*, *Comput.*, Springer, vol. 32, pp. 239-253, 1984.
- [10] R. C. Mittal, Poonam Singhal, *Numerical solution of Burgers equation*, **Commun. Numer. Methods Eng.**, 9 (1993) 397-406.
- [11] R. C. Mittal, Poonam Singhal, *Numerical solution of periodic Burgers equation*, **Indian J. Pure Appl. Math.**, 27 (1996) 689-700.
- [12] S. Kutluay, A. R. Bahadır, A. Özdeş, *Numerical solution of one-dimensional Burgers equation: explicit and exact explicit methods*, **J. Comp. appl. Math.**, 103 (1999) 251-261.
- [13] J. Caldwell, P. Smith, *Solution of Burgers' equation with a large Reynolds number*, **Appl. Math. Modelling.**, 6 (1982) 381-385.
- [14] A. H. A. Ali, G. A. Gardner, L. R. T. Gardner, *A collocation solution for Burgers' equation using cubic B-spline finite elements*, **Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.** 100 (1992) 325-337.

- [15] L. R. T. Gardner, G. A. Gardner, A. Doğan, *A least square finite element scheme for Burgers' equation*, University of Wales, Bangor, Mathematics, Preprint 96.01, 1996.
- [16] L. R. T. Gardner, G. A. Gardner, A. Doğan, *A Petrov-Galerkin finite element scheme for Burgers' equation*, **Arab. J. Sci. Engnrg.**, 22 (1997) 99-109.
- [17] T. Öziş, A. Özdeş, *A direct variational methods applied to Burgers' equation*, **J. Comput. Appl. Math.**, 71 (1996)163-175.
- [18] A. Asaithambi, *Numerical solution of the Burgers' equation by automatic differentiation*, **Appl. Math. Comput.**, 216 (2010) 2700-2708.
- [19] Min Xu, Ren-Hong Wang, Ji-Hong Zhang, Qin Fang, *A novel numerical scheme for solving Burgers' equation*, **Appl. Math. Comput.** 147 (2011) 4473-4482.
- [20] R. C.Mittal, R. K. Jain, *Numerical solution of nonlinear Burgers' equation with modified cubic B-splines collocation method*, **Appl. Math. and Comput.** 218 (2012) 7829-7855.
- [21] Ram Jiwari, R. C. Mittal, K. K. Sharma, *A numerical scheme based on differential quadrature method to solve time dependent Burgers' equation* (Accepted in Engineering Computations with ID EC-Aug-2011-0092.R2).
- [22] G. D. Smith, *Numerical solution of partial differential equations: finite difference methods*-3rd. ed., Oxford University Press, New York, 1985, 11-79.
- [23] S. Kutluay, *Klasik sonlu fark yöntemleri*, yayımlanmamış ders notları.
- [24] K. Liu, *Radial Basis Functions: Biomedical Applications and Parallelization*, University of Wisconsin, **UWM Digital Commons**, December 2016.
- [25] H. R. Shooroki, R. R. Meybodi, S. M. Karbassi ve G. B. Loghmani, *Numerical solution of Reynold's Equation Governing Noncircular Gas Bearing System Using Radial Basis Function*, **IJST**, 38A4, 2014, 389-397.
- [26] R. L. Hardy, *Multiquadric equation of topography and other irregular surface*, **J. Geophys. Res.** 76, (1971) no. 8, 1905-1915.
- [27] —, *Theory and applications of the multiquadric-biharmonic method; 20 years of discovery*, **Comput. Math. Appl.** 19 (1990), no.8/9, 163-208.
- [28] R. A Franke, *Critical comparison of some methods for interpolation of scattered data*, Technical Reports NPS (1979), 53-79.
- [29] C. Micchelli, *Interpolation of scattered data: Distance matrices and conditionally positive definite functions*, *Constructive Approximation* 2, 1122, 1986.

- [30] E. J. Kansa, *Multiquadrics- A scattered data approximation scheme with applications to computational fluid dynamics 1: Surface approxiamtions and partial derivative estimates*, **Comput. Math. Appl.** 19, (1990), no.8/9, 127-145.
- [31] W. R. Madych, S. A. Nelson, *Bounds on multivariate interpolation and exponential error estimates for multiquadric interpolation*, **J. Approx. Theory** 70, (1992), 94-114.
- [32] J. R. Xaio, M. A. McCarthy, *A local heaviside weighted meshless method for two dimensional solid using radial basis functions*, **Comput. Mech.** 31, (2003), 301-315.
- [33] S. A. Sarra, E. J. Kansa, *Multiquadric radial basis function approximation methods for the numerical solution of partial differential equations*, *Advances in Computational Mechanics*, vol. 2, 2009.
- [34] S. A. Sarra, *Radial basis function approximation methods with extended precision floating point arithmetic*, *Engineering Analysis with Boundary Elements* 35, no. 1, 68-76, 2011
- [35] T. Sauer, *Numerical analysis*, Pearson Education, Inc., Boston, 2006.
- [36] Y. C. Hon, X. Z. Mao, *An efficient numerical scheme for Burgers' equation*, **Appl. Math. Comput.** 95 (1998) 37-50.
- [37] S. Haq, A. Hussain, M. Uddin, *On the numerical solution of nonlinear Burgers'-type equation using meshless method of lines*, **Appl. Math. Comput.** 218 (2012) 6280-6290.
- [38] H.Xie, D. Li, F. Li, *A new numerical method of particular solution for inhomogeneous Burgers' equation*, **Math. Probl. Eng.** vol. 2013, ID 974808, 7 pages.
- [39] H. Xie, D. Li, *A meshless method for Burgers' equation using MQ-RBF and high-order temporal approximation*, **Appl. Math. Model.** 37 (2013) 9215-9222.
- [40] M. Sarboland, A. Aminatei, *On the numerical solution of one-dimensional nonlinear nonhomogeneous Burgers' equation*, **J. Appl. Math.** vol. 2014, ID 598432, 15 pages.
- [41] H. Xie, J. Zhou, Z. Jiang, X. Guo, *Approximations for Burgers' equations with C-N scheme and RBF collocation methods*, **J. Nonlinear Sci. Appl.** 9 (2016), 3727-3734.
- [42] M. Seydaoğlu, *A meshless method for Burgers' equation using multiquadric radial basis functions with a Lie- group integrator*, *Mathematics article* 27 Nov. 2018, Accp. 21 Jan. 2019; Pub. 22 Jan. 2019.

- [43] S.G. Rubin, R.A. Graves, *National aeronautics and space administration, Tech. Rep.* (Washington) 1975.
- [44] E. N. Aksan, A. Özdeş, *A numerical solution of Burgers' equation, Appl. Math. Comput.* 156 (2004) 395-402.
- [45] I. A. Hassanien, A. A. Salama, H. A. Hosham, *Fourth-order finite difference method for solving Burgers' equation, Appl. Math. Comput.* 170 (2005) 781-800.
- [46] T. Öziş, E. N. Aksan, A. Özdeş, *A finite element approach for solution of Burgers' equation, Appl. Math. Comput.* vol.139, (2003) pp. 417-28.
- [47] M. K. Kadalbajoo, A. Awasthi, *A numerical method based on Crank-Nicolson scheme for Burgers' equation, Appl. Math. Comput.* 182, (2006) 1430.
- [48] İ. Dağ, D. Irk, B. Saka, *A numerical solution of the Burgers' equation using cubic B-splines, Appl. Math. Comput.* 163 (2005) 199-211.
- [49] S. Kutluay, A. Esen, İ. Dağ, *Numerical solution of the Burgers' equation by the least-squares quadric B-spline finite element method, J. Comput. Appl. Math.* Vol.167, (2004) pp.21-33.
- [50] T. Öziş, A. Esen, S. Kutluay, *Numerical solution of Burgers' equation by quadric B-spline finite elements, Appl. Math. Comput.* 165 (2005) 237-249.
- [51] Yan Guo, Yu-Feng Shi, Yi-Min Li, *A fifth-order finite volume weighted compact scheme for solving one-dimensional Burgers' equation, Appl. Math. Comput.* 281 (2016) 172-185.
- [52] W. Liao, *An implicit fourth-order compact finite difference scheme for one-dimensional Burgers' equation, Appl. Math. Comput.* 206(2)(2008) 755-764.

ÖZGEÇMİŞ

Yeşim SARIBAŞ, 06.03.1992 tarihinde Malatya'da doğdu. İlk, orta ve lise öğrenimini Malatya'da tamamladı. 2010 yılında İnönü Üniversitesi Eğitim Fakültesi İlköğretim Matematik Öğretmenliği Bölümü'ne girdi. 2013-2014 Eğitim Öğretim yılı Güz döneminde Erasmus programı ile İtalya'da Università Degli Studi di Trento'da eğitim gördü. 2014 yılında mezun oldu. 2015 yılında İlköğretim Matematik Öğretmeni olarak atandı. 2016 yılında İnönü Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Uygulamalı Matematik Ana Bilim Dalı'nda yüksek lisans yapmaya hak kazandı. Halen Erkenek Mustafa Kemal İmam Hatip Ortaokulu'nda Matematik öğretmeni olarak görev yapmaktadır.

