

T.C.
İNÖNÜ ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

YOĞUNLUKLU EĞRİLER VE YÜZEYLERİN BAZI
KARAKTERİZASYONLARI

Mustafa ALTIN

DOKTORA TEZİ
MATEMATİK ANABİLİM DALI

Ağustos 2019

Tezin Başlığı : YOĞUNLUKLU EĞRİLER VE YÜZEYLERİN BAZI
KARAKTERİZASYONLARI

Tezi Hazırlayan : Mustafa ALTIN

Sınav Tarihi : 06.08.2019

Yukarıda adı geçen tez jürimizce değerlendirilerek Matematik Ana Bilim Dalında
Doktora Tezi olarak kabul edilmiştir.

Sınav Jüri Üyeleri

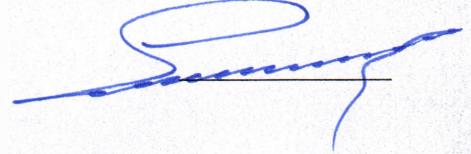
Tez Danışmanı: Prof.Dr. Hacı Bayram KARADAĞ

İnönü Üniversitesi



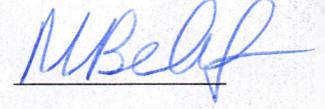
Prof.Dr. Ayhan TUTAR

Ondokuz Mayıs Üniversitesi



Prof.Dr. Mehmet BEKTAŞ

Fırat Üniversitesi



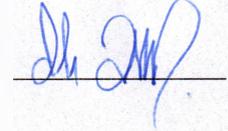
Doç.Dr. M. Kemal ÖZDEMİR

İnönü Üniversitesi



Doç.Dr. Müge KARADAĞ

İnönü Üniversitesi



Prof.Dr. Halil İbrahim ADIGÜZEL

Enstitü Müdürü

ONUR SÖZÜ

Doktora Tezi olarak sunduğum “Yoğunluklu Eğriler ve Yüzeyle rin Bazı Karakterizasyonları” başlıklı bu çalışmanın bilimsel ahlâk ve geleneklere aykırı düşecek bir yardıma başvurmaksızın tarafımdan yazıldığını ve yararlandığım bütün kaynakların, hem metin içinde hem de kaynakçada yöntemine uygun biçimde gösterilenlerden oluştuğunu belirtir, bunu onurumla doğrularım.

Mustafa ALTIN



ÖZET

Doktora Tezi

YOĞUNLUKLU EĞRİLER VE YÜZEYLERİN BAZI KARAKTERİZASYONLARI

Mustafa ALTIN

İnönü Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Ana Bilim Dalı

184+iv sayfa

2019

Danışman : Prof.Dr. Hacı Bayram KARADAĞ

“Yoğunluklu Eğriler ve Yüzeylerin Bazı Karakterizasyonları” isimli bu çalışmanın ilk bölümünde Öklid ve Lorentz-Minkowski uzaylarında regle yüzeyler, dönel yüzeyler ve yoğunluklu manifoldlar ile ilgili literatür özeti verilmiştir.

İkinci bölümde, daha sonraki bölümlerde kullanılacak olan bazı temel tanım ve teoremler verilmiştir.

Üçüncü bölümde, e^φ yoğunluklu Öklidyen ve Lorentz-Minkowski uzaylarında eğriler incelenmiş ve bu eğrilerin ağırlıklı eğrilikleri hesaplanmıştır. Ağırlıklı eğrilikler yardımıyla ağırlıklı eğriligi sıfır olan eğriler elde edilmiştir ve elde edilen bu eğrilerin Frenet vektörleri bulunarak Smarandache eğrileri oluşturulmuştur.

Dördüncü bölümde, bir önceki bölümde elde edilen eğriler kullanılarak, Öklid ve Lorentz-Minkowski uzaylarında dönel yüzeyler ve regle yüzeyler yoğunluk katsayısına bağlı olarak oluşturulmuştur ve bu yüzeyler için bazı önemli karakterizasyonlar verilip grafikleri çizilmiştir.

ANAHTAR KELİMELELER: Yoğunluklu Uzay, Ağırlıklı Eğrilik, Smarandache Eğriler, Regle Yüzeyler, Dönel Yüzeyler.

ABSTRACT

Ph.D. Thesis

SOME CHARACTERIZATIONS OF CURVES AND SURFACES WITH DENSITY

Mustafa ALTIN

İnönü University
Graduate School of Natural and Applied Sciences
Department of Mathematics

184+iv pages

2019

Supervisor : Prof.Dr. Hacı Bayram KARADAĞ

In the first chapter of this study entitled as “Some Characterizations of Curves and Surfaces with Density” summary of literature has been given about ruled surfaces, rotational surfaces and manifolds with density in Euclidean and Lorentz-Minkowski spaces.

In the second chapter, some basic definitions and theorems which will be used in the next chapters have been given.

In the third chapter, the curves have been investigated in Euclidean and Lorentz-Minkowski spaces with density e^φ and the weighted curvatures of these curves have been calculated. The curves with vanishing weighted curvatures have been obtained with the aid of weighted curvatures and by finding the Frenet vectors of these obtaining curves, the Smarandache curves have been constructed.

In the fourth chapter, by using the curves which are obtained in the previous chapter, the rotational surfaces and ruled surfaces have been constructed according to density coefficients in Euclidean and Lorentz-Minkowski spaces. Also, some important characterizations have been given for these surfaces and the graphics of them have been drawn.

KEYWORDS: Space with Density, Weighted Curvature, Smarandache Curves, Ruled Surfaces, Rotational Surfaces.

TEŐEKKÖR

Doktora alıőmam sırasında kıymetli bilgi, birikim ve tecrübeleriyle bana yol gösteren ve destek olan kıymetli danışman hocam sayın Prof. Dr. Hacı Bayram KARADAĞ'a teőekkÖrÖ bir borç biliyor ve őükranlarımı sunuyorum.

İlgisini ve önerilerini göstermekten kaçınmayan sayın Prof. Dr. Sadık KELEŞ ve Dr. Ahmet KAZAN'a, tez yazım sürecinde yardım, bilgi ve tecrübeleriyle destek olan sayın Doç. Dr. M. Kemal ÖZDEMİR'e, ve katkılarından dolayı değerli jÖri Öyelerine sonsuz teőekkÖrlerimi ve saygılarımı sunarım.

Benden hiçbir zaman desteğini esirgemeyen ve bugÖnlere gelmemde bÖyÖk payı olan aileme teőekkÖr ederim.

Ayrıca FDK-2018-1349: Doktora Tez Projesi kapsamında maddi desteklerinden dolayı İÖ BAP Komisyonuna teőekkÖrlerimi ve saygılarımı sunarım.

İÇİNDEKİLER

ÖZET	i
ABSTRACT	ii
TEŞEKKÜR	iii
İÇİNDEKİLER	iv
ŞEKİLLER DİZİNİ	v
1. GİRİŞ	1
2. TEMEL KAVRAMLAR	7
3. YOĞUNLUKLU UZAYLARDA EĞRİLER	21
3.1. Yoğunluklu Öklid Uzayında Eğriler	21
3.1.1. e^{ax+by} Yoğunluklu \mathbb{E}^2 Düzleminde Birim Hızlı Eğriler	21
3.1.2. e^{ax+by} Yoğunluklu \mathbb{E}^3 Uzayında Keyfi Parametrelili Eğriler	28
3.1.3. $e^{ax^2+by^2}$ Yoğunluklu \mathbb{E}^3 Uzayında Keyfi Parametrelili Eğriler	40
3.2. Yoğunluklu Lorentz-Minkowski Uzayında Eğriler	47
3.2.1. e^{ax+by} Yoğunluklu \mathbb{E}_1^2 Düzleminde Birim Hızlı Eğriler	48
3.2.2. e^{ax+by} Yoğunluklu \mathbb{E}_1^3 Uzayında Keyfi Parametrelili Eğriler	92
3.2.3. $e^{ax^2+by^2}$ Yoğunluklu \mathbb{E}_1^3 Uzayında Keyfi Parametrelili Eğriler	101
4. YOĞUNLUKLU UZAYLARDA YÜZEYLER	113
4.1. Yoğunluklu Öklid Uzayında Yüzeyleler	113
4.1.1. e^{ax+by} Yoğunluklu \mathbb{E}^3 Uzayında Dönel Yüzeyleler	113
4.1.2. e^{ax+by} Yoğunluklu \mathbb{E}^3 Uzayında Regle Yüzeyleler	122
4.1.3. $e^{ax^2+by^2}$ Yoğunluklu \mathbb{E}^3 Uzayında Dönel Yüzeyleler	137
4.1.4. $e^{ax^2+by^2}$ Yoğunluklu \mathbb{E}^3 Uzayında Regle Yüzeyleler	141
4.2. Yoğunluklu Lorentz-Minkowski Uzayında Yüzeyleler	148
4.2.1. e^{ax+by} Yoğunluklu \mathbb{E}_1^3 Uzayında Dönel Yüzeyleler	148
4.2.2. e^{ax+by} Yoğunluklu \mathbb{E}_1^3 Uzayında Regle Yüzeyleler	155
4.2.3. $e^{ax^2+by^2}$ Yoğunluklu \mathbb{E}_1^3 Uzayında Dönel Yüzeyleler	159
4.2.4. $e^{ax^2+by^2}$ Yoğunluklu \mathbb{E}_1^3 Uzayında Regle Yüzeyleler	171
KAYNAKLAR	180
ÖZGEÇMİŞ	184

ŞEKİLLER DİZİNİ

Şekil 3.1	e^{ax} yoğunluklu E^3 te φ -doğrusal eğrileri	30
Şekil 3.2	(3.1.15) eğrisinin TN-Smarandache eğrileri.....	33
Şekil 3.3	(3.1.15) eğrisinin TB-Smarandache eğrileri.....	33
Şekil 3.4	(3.1.15) eğrisinin NB-Smarandache eğrileri.....	34
Şekil 3.5	(3.1.15) eğrisinin TNB-Smarandache eğrileri	34
Şekil 3.6	(3.1.17) eğrisinin TN-Smarandache eğrileri.....	37
Şekil 3.7	(3.1.17) eğrisinin TB-Smarandache eğrileri.....	37
Şekil 3.8	(3.1.17) eğrisinin NB-Smarandache eğrileri.....	37
Şekil 3.9	(3.1.17) eğrisinin TNB-Smarandache eğrileri	38
Şekil 3.10	e^{ax^2} yoğunluklu \mathbb{E}^3 de φ -doğrusal eğrileri	42
Şekil 3.11	(3.1.38) eğrisinin TN-Smarandache eğrisi	44
Şekil 3.12	(3.1.38) eğrisinin TB-Smarandache eğrisi	45
Şekil 3.13	(3.1.38) eğrisinin NB-Smarandache eğrisi	45
Şekil 3.14	(3.1.38) eğrisinin TNB-Smarandache eğrisi	45
Şekil 3.15	$e^{a(x+y)}$ yoğunluklu \mathbb{E}_1^2 de spacelike φ -doğrusal eğrileri	50
Şekil 3.16	$e^{a(x+y)}$ yoğunluklu \mathbb{E}_1^2 de ($\kappa_\varphi = c \neq 0$) spacelike eğrileri	53
Şekil 3.17	e^{ax} yoğunluklu \mathbb{E}_1^2 de ($\kappa_\varphi = c = a$) spacelike eğrileri	55
Şekil 3.18	e^{ax} yoğunluklu \mathbb{E}_1^2 de ($\kappa_\varphi = c = -a$) spacelike eğrileri	57
Şekil 3.19	$\frac{c}{a} > 1$ için e^{ax} yoğunluklu \mathbb{E}_1^2 de ($\kappa_\varphi = c$) spacelike eğrileri.....	62
Şekil 3.20	$-1 < \frac{c}{a} < 1$ için e^{ax} yoğunluklu \mathbb{E}_1^2 de ($\kappa_\varphi = c$) spacelike eğrileri	64
Şekil 3.21	e^{ax} yoğunluklu \mathbb{E}_1^2 de φ -doğrusal spacelike eğrileri	65
Şekil 3.22	e^{by} yoğunluklu \mathbb{E}_1^2 de φ -doğrusal spacelike eğrileri	69
Şekil 3.23	e^{by} yoğunluklu \mathbb{E}_1^2 de ($\kappa_\varphi = c$) spacelike eğrileri	73
Şekil 3.24	$e^{a(x+y)}$ yoğunluklu \mathbb{E}_1^2 de φ -doğrusal timelike eğrileri	75
Şekil 3.25	$e^{a(x+y)}$ yoğunluklu \mathbb{E}_1^2 de ($\kappa_\varphi = c$) timelike eğrileri	77
Şekil 3.26	e^{ax} yoğunluklu \mathbb{E}_1^2 de φ -doğrusal timelike eğrileri.....	80
Şekil 3.27	e^{ax} yoğunluklu \mathbb{E}_1^2 de ($\kappa_\varphi = c$) timelike eğrileri.....	83
Şekil 3.28	e^{by} yoğunluklu \mathbb{E}_1^2 de ($\kappa_\varphi = c = -b$) timelike eğrileri	85
Şekil 3.29	e^{by} yoğunluklu \mathbb{E}_1^2 de ($\kappa_\varphi = c = b$) timelike eğrileri	86
Şekil 3.30	$\frac{c}{b} < -1$ için e^{by} yoğunluklu \mathbb{E}_1^2 de ($\kappa_\varphi = c$) timelike eğrileri	89

Şekil 3.31	$-1 < \frac{c}{b} < 1$ için e^{by} yoğunluklu \mathbb{E}_1^2 de $(\kappa_\varphi = c)$ timelike eğrileri	91
Şekil 3.32	e^{by} yoğunluklu \mathbb{E}_1^2 de φ -doğrusal timelike eğrileri	91
Şekil 3.33	e^{ax} yoğunluklu \mathbb{E}_1^3 de φ -doğrusal spacelike eğrileri	94
Şekil 3.34	(3.2.142) eğrisinin TB-Smarandache eğrileri	100
Şekil 3.35	(3.2.142) eğrisinin TNB-Smarandache eğrileri	100
Şekil 3.36	e^{ax^2} yoğunluklu \mathbb{E}_1^3 de φ -doğrusal spacelike eğrisi	103
Şekil 3.37	e^{ax^2} yoğunluklu \mathbb{E}_1^3 de φ -doğrusal timelike eğrisi	107
Şekil 3.38	(3.2.164) eğrisinin TB-Smarandache eğrisi	109
Şekil 3.39	(3.2.164) eğrisinin TNB-Smarandache eğrisi	109
Şekil 3.40	(3.2.173) eğrisinin NB-Smarandache eğrisi	111
Şekil 3.41	(3.2.173) eğrisinin TNB-Smarandache eğrisi	111
Şekil 4.1	(4.1.1) dönel yüzeyi	114
Şekil 4.2	(4.1.4) dönel yüzeyi	115
Şekil 4.3	(4.1.7) dönel yüzeyi	117
Şekil 4.4	(4.1.8) dönel yüzeyi	118
Şekil 4.5	(4.1.11) dönel yüzeyi	120
Şekil 4.6	(4.1.14) dönel yüzeyi	122
Şekil 4.7	(4.1.15) regle yüzeyi	123
Şekil 4.8	(4.1.16) regle yüzeyi	124
Şekil 4.9	(4.1.19) regle yüzeyi	126
Şekil 4.10	(4.1.22) regle yüzeyi	128
Şekil 4.11	(4.1.25) regle yüzeyi	130
Şekil 4.12	(4.1.26) regle yüzeyi	131
Şekil 4.13	(4.1.29) regle yüzeyi	133
Şekil 4.14	(4.1.32) regle yüzeyi	135
Şekil 4.15	(4.1.35) dönel yüzeyi	137
Şekil 4.16	(4.1.38) dönel yüzeyi	139
Şekil 4.17	(4.1.41) dönel yüzeyi	141
Şekil 4.18	(4.1.42) regle yüzeyi	142
Şekil 4.19	(4.1.43) regle yüzeyi	143
Şekil 4.20	(4.1.46) regle yüzeyi	145
Şekil 4.21	(4.1.49) regle yüzeyi	147
Şekil 4.22	(4.2.1) dönel yüzeyi	149

Şekil 4.23	(4.2.4) dönel yüzeyi	151
Şekil 4.24	(4.2.7) dönel yüzeyi	153
Şekil 4.25	(4.2.10) regle yüzeyi	155
Şekil 4.26	(4.2.13) regle yüzeyi	157
Şekil 4.27	(4.2.16) dönel yüzeyi	159
Şekil 4.28	(4.2.19) dönel yüzeyi	161
Şekil 4.29	(4.2.22) dönel yüzeyi	163
Şekil 4.30	(4.2.25) dönel yüzeyi	165
Şekil 4.31	(4.2.28) dönel yüzeyi	167
Şekil 4.32	(4.2.31) dönel yüzeyi	169
Şekil 4.33	(4.2.34) regle yüzeyi	172
Şekil 4.34	(4.2.37) regle yüzeyi	174
Şekil 4.35	(4.2.40) regle yüzeyi	176
Şekil 4.36	(4.2.43) regle yüzeyi	178

1. GİRİŞ

Diferensiyel geometrinin önemli çalışma alanlarından biri olan eğriler teorisi, matematiğin diğer alanlarında ve farklı disiplinlerde de önemli bir yer tutmaktadır. Eğriler teorisinde çok sık kullanılan Frenet vektörleri, eğrilerin yapısını temsil etmektedir. Bu nedenle farklı alanlarda da kullanılan Frenet vektörleri üzerine yapılan bazı çalışmalarda, araştırmacılar herhangi bir eğrinin Frenet vektörlerini yer vektörü kabul ederek, yeni eğriler elde etmektedirler. Bu elde edilen eğrilere Smarandache eğrileri denilmektedir. Smarandache eğrileri ile ilgili bazı çalışmalar aşağıda verilmiştir:

2008 yılında Turgut ve Yılmaz “Smarandache Curves in Minkowski space-time” isimli çalışmada Minkowski uzayında Smarandache eğrileri üzerine çalışmışlardır [1]. Ayrıca E_1^4 uzayında TB_2 Smarandache eğrisinin Frenet elemanlarını hesaplamışlardır.

2010 yılında Ali, “Special Smarandache Curves in Euclidian Space” isimli çalışmasında bazı özel Smarandache eğrilerini tanımlayarak bu eğrilere ait bazı karakterizasyonlar vermiştir [2].

2014 yılında Çetin ve arkadaşları, “Smarandache Curves According to Bishop Frame in Euclidian 3-Space” isimli çalışmalarında Öklid uzayında Smarandache eğrilerini, Bishop çatısına göre hesaplamışlardır [3].

Yine 2014 yılında Taşköprü ve Tosun “Smarandache Curves According to Sabban Frame on S^2 ” isimli çalışmada birim küre üzerinde Sabban çatısına göre Smarandache eğrilerini oluşturmuşlar ve bu eğriler ile ilgili bazı sonuçlar vermişlerdir [4].

2015 yılında Çalışkan ve Şenyurt, “Smarandache Curves in Terms of Sabban Frame of Spherical Indicatrix Curves” isimli çalışmada, küresel gösterge eğrilerinin Sabban çatısına göre Smarandache eğrilerini elde etmişlerdir [5].

Eğriler teorisi gibi yüzeyler teorisi de diferensiyel geometride ve diğer birçok alanda önemli bir role sahiptir. Özellikle yüzeyler teorisi fizik ve mühendisliğin birçok alanında uygulama alanı bulmaktadır. Bu bağlamda E^3 Öklid uzayında, E_1^3 Minkowski uzayında, G_3 Galilean uzayında, G_3^1 pseudo-Galilean uzayında (ve bu uzayların yüksek boyutlarında) dönel yüzeyler, Vranceau yüzeyleri, regle yüzeyler, küresel çarpım yüzeyleri, tensör çarpım yüzeyleri, kanal yüzeyleri, meridyen yüzeyler gibi pek çok yüzey türünün geometrisi, geometriciler için önemli bir çalışma alanı olmuştur. Örneğin, yüzeylerin birçok karakterizasyonları incelenmiş ve özellikle bu yüzeylerin minimal ve flat olması durumları detaylı olarak ele alınmıştır. Yüzeyler teorisinde birçok yüzey üzerine ayrıntılı çalışmalar yapılmasına rağmen bazı özel yüzeyler kendine has niteliklerinden dolayı yüzeyler teorisinde önemli bir yere sahiptir. Bu özel yüzeyler içerisinde belki de en ilginç ve önemli olan yüzeylerin başında regle yüzeyler ve dönel yüzeyler gelmektedir. Bazı mimari eserlerde regle yüzeyin örneklerine rastlanmakla beraber, en bilinen regle yüzey örnekleri koni ve silindir yüzeyidir. Birçok uzayda çalışılan regle yüzeyler için temel özellikler, farklı kaynaklarda bulunabilmektedir. 1960'lı yıllarda Juza, regle yüzeyler üzerine çalışmıştır [6]. Juza'dan sonra Frank, Giering ve Thas genelleştirilmiş regle yüzeyler üzerinde çalışmaları sürdürmüşlerdir [7], [8]. Ergüt, E^3 Öklid uzayında dağılma parametresi, boğaz noktası ve boğaz çizgisini çalışmış, sonrasında $(n+1)$ boyutlu genelleştirilmiş regle yüzeyler için skalar normal eğriliği hesaplamıştır [9]. Regle yüzeyler için Massey Teoremi, Keleş ve Kuruoğlu'nun yaptıkları çalışmalarda genelleştirilmiştir [10], [11]. Kapalı regle yüzeyler için açılım uzunluğu ve açılım açısı Hacısalihoğlu tarafından elde edilmiştir [12]. Öklid uzayında yapılan çalışmaları Turgut ve Hacısalihoğlu Minkowski uzayına taşımışlardır [13], [14]. Bu çalışmalardan sonra Yaylı, dayanak eğrisi spacelike ve timelike olan regle yüzeyler üzerine çalışmıştır [15].

Dönel yüzeyler, bir eğrinin bir doğru etrafında döndürülmesiyle oluşan yüzeylerdir.

Dönel yüzey oluşurken etrafında dönülen doğruya dönme eksenini, döndürülen eğriye ise dönel yüzeyin üreteç (profil) eğrisi denir. Çeşitli kaynaklardan Öklid uzayındaki dönel yüzeylerin, temel tanımları ve özellikleri hakkında bilgilere ulaşılabilir [16], [17], [18], [19], [20]. Bunlara ek olarak 1990 yılında Dillen ve arkadaşları dönel yüzeylerin Gauss dönüşümü üzerine [21]; ayrıca, 1993 yılında Chen sonlu tipli dönel yüzeylerin sınıflandırılması üzerine inceleme yapmıştır [22]. Minkowski uzayında dönel yüzeyler, Öklid uzayında elde edilen dönel yüzeylerden daha geniş bir geometrik yapıya sahiptir. Çünkü Minkowski uzayında dönel yüzeylerin eksenleri spacelike, timelike veya null olmak üzere üç farklı şekilde ele alınabilir. 1984 yılında Hano ve Nomizu, Minkowski uzayında sabit ortalama eğrilikli dönel yüzeyleri incelemişlerdir [23]. 1994 yılında Liu Minkowski uzayında dönel yüzeyler üzerine çalışarak bazı sonuçlar vermiştir [24]. Lopez'in 2000 yılında sabit ortalama eğrilikli timelike yüzeyler üzerine hazırladığı makalede dönel yüzeylerle ilgili bilgiler verilmiştir [25]. Lee ve Varnado 2006 yılında sabit ortalama eğrilikli spacelike dönel yüzey üzerine çalışmışlar [26] ve bir yıl sonra da bu çalışmayı timelike dönel yüzeye taşımışlardır [27]. 2013 yılında Choi ve arkadaşlarının Minkowski 3-uzayında dönel yüzeyler üzerine yaptığı çalışmada bazı sınıflandırmalar yapılmıştır [28].

Matematikte yeni konu olan yoğunluklu bir manifold, hacim ve alana (düşük boyutlarda alan ve uzunluğa) ağırlık vermek için kullanılan $\Psi(x) = e^{\varphi(x)}$ pozitif yoğunluk fonksiyonuna sahip Riemann manifoldudur. Riemannian hacim elementi dV_0 , alan elementi dA_0 ve yay uzunluğu elementi dS_0 in esaslarından yola çıkılarak elde edilen ağırlıklı hacim elementi dV , ağırlıklı alan elementi dA ve ağırlıklı yay uzunluğu elementi ds , sırasıyla

$$dV = \Psi dV_0, \quad dA = \Psi dA_0, \quad ds = \Psi ds_0$$

şeklindedir.

Ekonometri ve istatistik gibi birçok alanda da kullanılan yoğunluklu

manifoldlar, farklı fiziksel yoğunluğa sahip yüzeyler veya bölgeler dikkate alındığında, fizik alanında da kullanılmaktadır.

Yoğunluklu manifoldlarda Ricci tensörü ile ilgili çalışma, 1970 yılında Lichnerowicz tarafından yapılmıştır [29]. 1984 yılında Bakry ve Émery, difüzyon süreçlerini çalışırken e^φ yoğunluklu M^n Riemannian manifoldunun genelleştirilmiş Ricci tensörünü

$$Ric_\varphi^\infty = Ric - Hess\varphi$$

şeklinde tanımladılar. Burada $Hess\varphi$, φ 'nin hessianını ve Ric ise M^n nin Ricci eğriliğini göstermektedir [30], [31].

2003 yılında Gromov, e^φ yoğunluklu bir manifold üzerinde n -boyutlu bir hiperyüzeyin H_φ ağırlıklı ortalama eğriliğini ve bir eğrinin κ_φ ağırlıklı eğriliğini sırasıyla

$$H_\varphi = H - \frac{1}{n-1} \frac{d\varphi}{d\eta},$$

ve

$$\kappa_\varphi = \kappa - \frac{d\varphi}{dN}, \quad (1.0.1)$$

olarak tanımladı. Burada H hiperyüzeyin ortalama eğriliğini, η normal vektörünü; κ eğrinin eğriliğini, N de birim normal vektörünü ifade etmektedir ve burada

$$\frac{d\varphi}{dN} = \langle N, \nabla\varphi \rangle \quad (1.0.2)$$

dir [32]. Ayrıca Corvin, e^φ yoğunluklu bir manifold üzerinde yüzeyin G_φ ağırlıklı Gaussian eğriliğini 2006 yılında

$$G_\varphi = G - \Delta\varphi,$$

olarak ifade etmiş ve bir D diski için genelleştirilmiş Gauss-Bonnet formülünü

$$\int_D G_\varphi + \int_{\partial D} \kappa_\varphi = 2\pi$$

şeklinde elde etmiştir. Burada G yüzeyin Gauss eğriliği ve Δ ise Laplacian operatörüdür [33].

Bu tanımlardan sonra, yoğunluklu manifoldlar konusu pek çok yerde uygulama alanı bulmuştur. Örneğin, tomografi ve MR (Manyetik Rezonans) ile görüntüleme cihaz tarafından gönderilen ışınların yüzeyin yoğunluğuna göre dokunun cinsini belirlemede önemli bir rol oynadığı bilinmektedir. Ayrıca Öklid, Minkowski, Galilean ve pseudo-Galilean uzaylarında yoğunluklu manifoldlar üzerinde yüzeylerin ve eğrilerin geometrisi ile ilgili birçok çalışma yapılmaya başlanmıştır. Örneğin; F. Morgan 2005, 2006 ve 2009 yıllarında yaptığı çalışmalarda sırasıyla, yoğunluklu manifoldlarda Mayers teoremini genelleştirmiş [34], yoğunluklu Riemannian manifoldlar için genel sonuçlar vermiş [35] ve yine yoğunluklu manifoldlarda Perelman'ın Poincare varsayımını kanıtlamıştır , [36].

2009 yılında Hieu, e^z yoğunluklu \mathbb{R}^3 uzayında ağırlıklı minimal regle yüzeyleri ve translation yüzeyleri [37], 2017 yılında Yoon, $e^{-x^2-y^2}$ yoğunluklu \mathbb{R}^3 uzayında helisoid yüzeyleri [38] ve 2018 yılında da Yoon ve Yüzbaşı, yoğunluklu Öklid uzayında ağırlıklı minimal afin translation yüzeyleri incelemiş ve ağırlıklı ortalama eğriliği sıfır olacak şekilde yüzeyleri yeniden parametrelendirmişlerdir [39].

Ayrıca araştırmacılar, yoğunluklu Minkowski, Galilean ve pseudo-Galilean gibi farklı uzaylarda da yüzeyler ile ilgili çalışmalar yapmışlardır. Örneğin; 3-boyutlu Minkowki uzayında helisoid yüzeylerin ağırlıklı ortalama ve Gauss eğriliklerini Yıldız 2018 yılında [40] ve e^z yoğunluklu Minkowski uzayında ağırlıklı minimal translation yüzeylerini de Yoon 2017 yılında elde etmiştir [41]. Yoğunluklu Galilean uzayındaki çalışmalar ise Yoon'un 2017 yılında yapmış olduğu log-lineer yoğunluklu Galilean uzayında ağırlıklı minimal translation yüzeyleri sınıflandırarak başlatmıştır [42]. Bu çalışmadan bir yıl sonra Kazan ve Karadağ $e^{ax^2+by^2+cz^2}$ yoğunluklu Galilean uzayında ağırlıklı minimal ve flat döneel yüzeyleri çalışmışlar ve dikkate değer sonuçlar elde etmişlerdir [43]. Yoon 2017 yılında, yoğunluklu pseudo-Galilean uzayında döneel yüzeyleri incelemiştir [44].

Yukarıda belirtilen literatür çalışmaları incelendikten sonra, dört bölümden

oluşan bu tezin ikinci bölümünde çalışmamızda kullanılacak olan eğriler, yüzeyler ve yoğunluklu manifoldlarla ilgili temel tanım ve teoremlere yer verilecektir. Çalışmamızda elde ettiğimiz orjinal sonuçlar üçüncü ve dördüncü bölümlerde yer almaktadır. Üçüncü bölümde, e^{ax+by} ve $e^{ax^2+by^2}$ yoğunluklu Öklid ve Lorentz-Minkowski uzaylarında bir eğrinin ağırlıklı eğrilikleri hesaplanacaktır. Ayrıca e^{ax+by} ve $e^{ax^2+by^2}$ yoğunluklu Öklid ve Lorentz-Minkowski uzaylarında yoğunluk katsayısı olan a ve b nin farklı durumlarına göre hesaplanan ağırlıklı eğrilikleri sabit yapan birim hızlı eğriler ve ağırlıklı eğrilikleri sıfır yapan keyfi parametrelili eğriler elde edilecektir. Elde edilen bu yeni eğrilerin Smarandache eğrileri oluşturularak farklı yoğunluklarda eğrilerin değişimini gösteren grafikler de çizilecektir. Dördüncü ve son bölümde ise e^{ax+by} ve $e^{ax^2+by^2}$ yoğunluklu Öklid ve Lorentz-Minkowski uzaylarında dönel yüzeyler ve regle yüzeyler üzerine çalışmalar yapılacaktır. Bu çalışmalarda dönel yüzeyleri oluştururken profil eğrisi olarak φ -doğrusal eğriler, regle yüzeyleri oluştururken ise taban eğrisi olarak φ -doğrusal eğrileri, doğrultman vektörü olarak da φ -doğrusal eğrilerinin Smarandache eğrileri kullanılacaktır. Oluşturulan bu yüzeylerin ortalama ve Gauss eğrilikleri elde edilerek bazı karakterizasyonlar verilecek ve grafikleri çizilecektir.

2. TEMEL KAVRAMLAR

Bu bölümde tezde ihtiyaç duyulan diferensiyel geometrinin bazı temel tanım ve teoremlerine yer verilecektir.

Tanım 2.0.1. *A boştan farklı bir cümle ve V de F cismi üzerinde bir vektör uzayı olsun. Eğer*

$$X : A \times A \rightarrow V$$

$$(P, Q) \rightarrow X(P, Q) = \overrightarrow{PQ} \in V, \quad \forall P, Q \in A$$

aşağıdaki iki aksiyomu sağlıyorsa A cümlesine V vektör uzayı ile birleştirilmiş bir afin uzay denir, [16]

i) $\forall P, Q, R \in A$ için $\overrightarrow{PR} = \overrightarrow{PQ} + \overrightarrow{QR}$ dir,

ii) $\forall P \in A$ ve $\forall \gamma \in V$ için $\overrightarrow{PQ} = \gamma$ olacak şekilde bir tek $Q \in A$ noktası vardır.

Tanım 2.0.2. *A bir reel n -boyutlu afin uzay ve A ile birleşen vektör uzayı da V olsun. Bu durumda V de $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ ve $y = (y_1, y_2, \dots, y_n)$ olmak üzere*

$$\langle \cdot, \cdot \rangle : V \times V \rightarrow \mathbb{R}$$

$$(x, y) \rightarrow \langle x, y \rangle = \sum_{i=1}^n x_i y_i$$

şeklinde bir Öklid iç çarpımı tanımlı ise, A afin uzayına n -boyutlu Öklid uzayı denir ve \mathbb{E}^n ile gösterilir, [16].

Tanım 2.0.3. *Bir n -boyutlu reel iç çarpım uzayı V olsun. V ile birleştirilen \mathbb{E}^n Öklid uzayında sıralı bir $\{P_0, P_1, P_2, \dots, P_n\}$ nokta $(n+1)$ -lisi için eğer*

$$\left\{ \overrightarrow{P_0P_1}, \overrightarrow{P_0P_2}, \overrightarrow{P_0P_3}, \dots, \overrightarrow{P_0P_n} \right\}$$

vektör sistemi V nin ortonormal bir bazı ise $\{P_0, P_1, P_2, \dots, P_n\}$ çatısına Öklid çatısı denir, [16].

Tanım 2.0.4. I, \mathbb{R} nin açık alt cümlesi ve \mathbb{E}^n n -boyutlu Öklid uzayı olmak üzere,

$$\alpha : I \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{E}^n$$

$$u \rightarrow \alpha(u) = (\alpha_1(u), \alpha_2(u), \dots, \alpha_n(u))$$

dönüşümü diferensiyellenebilirse $\alpha(I)$ cümlesine \mathbb{E}^n de (I, α) koordinat komşuluğu ile tanımlanmış bir eğri denir. Ayrıca buradaki $u \in I$ değişkeni de $\alpha(u)$ eğrisinin parametresidir, [45].

Tanım 2.0.5. \mathbb{E}^n de α eğrisi (I, α) koordinat komşuluğu ile verilsin.

$\alpha : I \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{E}^n$ fonksiyonunun Öklid koordinat fonksiyonları $\alpha_1(u), \alpha_2(u), \dots, \alpha_n(u)$ olmak üzere

$$\alpha'(u) = \left(\frac{d\alpha_1(u)}{du}, \frac{d\alpha_2(u)}{du}, \dots, \frac{d\alpha_n(u)}{du} \right)$$

dir. $(\alpha(u), \alpha'(u)) \in T_{\mathbb{E}^n}(u)$ tanjant vektörüne, α eğrisinin $u \in I$ parametre değerine karşılık gelen $\alpha(u)$ noktasında, (I, α) koordinat komşuluğuna göre hız vektörü denir, [16].

Tanım 2.0.6. α eğrisi (I, α) koordinat komşuluğu ile verilsin. Eğer $\forall u \in I$ için,

$$\|\alpha'(u)\| = 1$$

ise α eğrisine (I, α) koordinat komşuluğunda birim hızlı bir eğri denir, [16].

Tanım 2.0.7. α eğrisi (I, α) koordinat komşuluğu ile verilsin. Eğer $\forall u \in I$ için,

$$\|\alpha'(u)\| \neq 0$$

ise α eğrisinin (I, α) koordinat komşuluğuna göre regüler bir eğri denir, [16].

Tanım 2.0.8. $\alpha : I \rightarrow \mathbb{E}^n$ regüler parametrik bir eğri olsun. Bu takdirde $\forall u \in I$ için α nın yüksek mertebeden türevleri $\alpha'(u), \alpha''(u), \alpha'''(u), \dots, \alpha^{(r)}(u)$, $(r \leq n)$ lineer bağımsız ve $\alpha'(u), \alpha''(u), \alpha'''(u), \dots, \alpha^{(r)}(u), \alpha^{(r+1)}(u)$ lineer bağımlı

ise α eğrisine r -ranklı Frenet eğrisi adı verilir. Bu durumda r -ranklı Frenet eğrisi \mathbb{E}^n in r -boyutlu alt uzayında yatacaktır. \mathbb{E}^n nin r -boyutlu alt uzayını $\Phi_r(u)$ ile göstereyim. Bu alt uzay, $\alpha'(u), \alpha''(u), \alpha'''(u), \dots, \alpha^{(r)}(u)$ vektörleri ile gerildiğinden $\Phi_r(u)$ ya α eğrisinin r . oskulator uzayı denir. Açık olarak $\Phi_1(u) \subset \Phi_2(u) \subset \dots \subset \Phi_r(u)$ dir. Eğer $\alpha(u)$, r -ranklı bir Frenet eğrisi ise $\alpha'(u), \alpha''(u), \alpha'''(u), \dots, \alpha^{(r)}(u)$ vektörlerine Gram-Schmidt ortonormalleştirme metodu uygulayarak $V_1(u), V_2(u), V_3(u), \dots, V_r(u)$ ortonormal r -çatısı (Serret-Frenet vektörleri) elde edilir, [17].

Teorem 2.0.1. $\alpha : I \rightarrow \mathbb{E}^n$ r -ranklı birim hızlı bir frenet eğrisi olmak üzere α nin ortonormal çatısı $V_1(u), V_2(u), V_3(u), \dots, V_r(u)$ nin türevleri,

$$V_1'(u) = \kappa_1(u)V_2(u) \quad (2.0.1)$$

$$V_i'(u) = -\kappa_{i-1}(u)V_{i-1}(u) + \kappa_i(u)V_{i+1}(u)$$

$$V_r'(u) = -\kappa_{r-1}(u)V_{r-1}(u), \quad (2 \leq i \leq r-1)$$

dir. Burada $\kappa_1, \dots, \kappa_{r-1} : I \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonları α nin Frenet eğrilik fonksiyonlarıdır, [17].

Tanım 2.0.9. $\alpha(u) : I \rightarrow \mathbb{R}^3$ birim hızlı regüler eğrinin Frenet çatısı $\{T, N, B\}$ olsun. Konum vektörü

$$\gamma(u) = \frac{a(u)T(u) + b(u)N(u) + c(u)B(u)}{\sqrt{a^2(u) + b^2(u) + c^2(u)}}$$

olan vektörün çizdiği regüler eğriye Smarandache eğrisi denir, [1]. Ayrıca $\alpha(u)$ eğrisinin TN, TB, NB ve TNB Smarandache eğrileri, sırasıyla

$$\gamma_{TN}(u) = \frac{T(u) + N(u)}{\sqrt{2}},$$

$$\gamma_{TB}(u) = \frac{T(u) + B(u)}{\sqrt{2}},$$

$$\gamma_{NB}(u) = \frac{N(u) + B(u)}{\sqrt{2}},$$

$$\gamma_{TNB}(u) = \frac{T(u) + N(u) + B(u)}{\sqrt{3}}$$

şeklindedir, [2].

Tanım 2.0.10. U, \mathbb{E}^2 uzayının irtibatlı bir açık alt cümlesi olmak üzere, $X : U \subset \mathbb{E}^2 \rightarrow \mathbb{E}^n$, düzgün ve regüler bir dönüşüm olsun. $X : U \subset \mathbb{E}^2 \rightarrow X(U)$ dönüşümü bir homeomorfizm ise $X(U)$ cümlesine, \mathbb{E}^3 uzayında bir basit yüzey denir. Ψ, \mathbb{E}^3 uzayının bir alt cümlesi olsun. Ψ nin her bir p noktası için $p \in X(U)$ ve $X(U) \subset \Psi$ olacak biçimde $X(U)$ basit yüzey bulunabiliyorsa Ψ cümlesine, \mathbb{E}^3 uzayında bir yüzey denir, [17].

Önerme 2.0.1. Ψ yüzeyi $X : U \subset \mathbb{E}^2 \rightarrow \mathbb{E}^n$ parametrizasyonu ile verilsin. Ψ yüzeyinin birinci ve ikinci temel formları, sırasıyla,

$$I = Edu^2 + 2Fdudv + Gdv^2,$$

$$II = edu^2 + 2fdudv + gdv^2$$

olduğundan, Ψ yüzeyinin Gauss eğriliği K , ortalama eğriliği H ve asli eğrilikleri sırasıyla,

$$i) K = \frac{eg-f^2}{EG-F^2},$$

$$ii) 2H = \frac{Eg-2Ff+Ge}{EG-F^2},$$

iii) asli eğrilikleri $H \pm \sqrt{H^2 - K}$ dir, burada, $N = \frac{X_u \times X_v}{\|X_u \times X_v\|}$ yüzeyin birim normali olmak üzere, birinci ve ikinci temel formlarının katsayıları, sırasıyla,

$$E = \langle X_u, X_u \rangle, F = \langle X_u, X_v \rangle, G = \langle X_v, X_v \rangle \quad (2.0.2)$$

ve

$$e = \langle X_{uu}, N \rangle, f = \langle X_{uv}, N \rangle, g = \langle X_{vv}, N \rangle \quad (2.0.3)$$

şeklindedir, [19], [46].

Yukarıdaki eşitliklerinden,

$$\|X_u \wedge X_v\|^2 = EG - F^2$$

bulunur. Eğer, $\|X_u \wedge X_v\| \neq 0$ ise $X(u, v)$ parametrizasyonu regülerdir denir, [17].

Bundan sonra aksi söylenmedikçe $X(u, v)$ parametrizasyonu regüler kabul edilecektir.

Tanım 2.0.11. Ψ yüzeyinin ortalama eğriliği H , Gauss eğriliği G olmak üzere, eğer $\Phi(H, G) = 0$ şeklinde bir fonksiyonel ilişki varsa Ψ yüzeyine Weingarten yüzey ya da W -yüzey denir, [47], [48].

Tanım 2.0.12. Uzayda bir $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^3$ eğrisi ile bir L doğrusu verilsin. $\alpha(I)$ kümesinin her bir $\alpha(u)$ noktasının L doğrusu çevresinde döndürülmesiyle elde edilen $C(u)$ çemberlerinin birleşimi bir yüzey oluşturur. Bu yüzeye kısaca $\alpha(u)$ eğrisinin, L doğrusu çevresinde döndürülmesiyle elde edilen dönel yüzey adı verilir. $\alpha(u)$ noktasının L doğrusu çevresinde döndürülmesiyle elde edilen çembere dönel yüzeyin $\alpha(u)$ noktasından geçen bir paraleli, L doğrusuna dönel yüzeyin dönme eksenini denir. Dönme ekseninden geçen bir düzlemle dönel yüzeyin arakesiti olan eğriye, dönel yüzeyin bir meridyeni denir. 3-boyutlu Öklid uzayında x , y ve z eksenleri etrafındaki θ açılık dönme matrisleri, sırasıyla,

$$i) R_x(\theta) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \theta & -\sin \theta \\ 0 & \sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix}$$

$$ii) R_y(\theta) = \begin{bmatrix} \cos \theta & 0 & -\sin \theta \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin \theta & 0 & \cos \theta \end{bmatrix}$$

$$iii) R_z(\theta) = \begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta & 0 \\ \sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \text{ şeklindedir.}$$

Tanım 2.0.13. Bir $\Psi \subset \mathbb{E}^3$ yüzeyi verilsin. $\forall p \in \Psi$ noktasında, \mathbb{E}^3 ün Ψ yüzeyinde kalan bir doğrusu varsa Ψ ye bir regle yüzey denir. Burada, $p \in \Psi$ noktasından geçen ve Ψ de kalan doğruya da regle yüzeyin ana doğrusu (doğrultmanı) denir, [16].

$\alpha(u) : I \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{E}^n$ diferensiyellenebilir bir eğri iken, $X(u, v)$ regle yüzeyinin parametrik gösterimi

$$X(u, v) = \alpha(u) + vA(u), \quad u, v \in I \subset \mathbb{R}$$

şeklinindedir. Burada, $\alpha(u)$ regle yüzeyin taban eğrisi, $A(u)$ ise doğrultman vektörü olarak isimlendirilir, [16].

Tanım 2.0.14. $X(u, v)$ regle yüzeyinde komşu iki doğrultmanın ortak dikmesinin doğrultmanlar üzerindeki ayaklarına striksiyon (merkez ya da boğaz) noktası denir, [16].

Tanım 2.0.15. $X(u, v)$ regle yüzeyinin dayanak eğrisi boyunca hareketinde striksiyon noktalarının geometrik yerine regle yüzeyin striksiyon (boğaz) eğrisi (çizgisi) denir ve

$$\gamma(u) = \alpha(u) - \frac{\langle \alpha'(u), A'(u) \rangle}{\|A'(u)\|^2} A(u)$$

şeklinde hesaplanır.

Lemma 2.0.1. Bir regle yüzeyde $\|A'(u)\| = 0$ ise bu regle yüzey silindirdir ve striksiyon eğrisi dayanak eğrisidir, [16].

Tanım 2.0.16. Bir $X(u, v)$ regle yüzeyinin komşu iki ana doğruları boyunca teğet düzlemleri aynı kalan regle yüzeye, açılabilir regle yüzey denir, [16].

Tanım 2.0.17. Bir regle yüzeyin komşu iki ana doğrusu arasındaki en kısa uzaklığın ana doğrular arasındaki açığa oranına regle yüzeyin drali (dağılma parametresi) denir ve aşağıdaki gibi hesaplanır [16]

$$\delta = \frac{\det[\alpha'(u), A(u), A'(u)]}{\|A'(u)\|^2}.$$

Teorem 2.0.2. $X(u, v)$ regle yüzeyinin açılabilir olması için gerek ve yeter şart dralinin sıfır olmasıdır, [16].

Tanım 2.0.18. V bir reel vektör uzayı olsun.

$$\langle \cdot, \cdot \rangle : V \times V \longrightarrow \mathbb{R}$$

dönüşümü $\forall a, b \in \mathbb{R}$ ve $\forall u, v, w \in V$ için

i) $\langle u, v \rangle = \langle v, u \rangle$ (Simetri özelliği)

ii)
$$\left. \begin{aligned} \langle au + bv, w \rangle &= a \langle u, w \rangle + b \langle v, w \rangle \\ \langle u, av + bw \rangle &= a \langle u, v \rangle + b \langle u, w \rangle \end{aligned} \right\} \text{ (Bilineerlik özelliği)}$$

özelliklerini sağlıyorsa $\langle \cdot, \cdot \rangle$ dönüşümüne V vektör uzayı üzerinde bir simetrik bilineer form denir, [17].

Tanım 2.0.19. V sonlu boyutlu reel vektör uzayı, V üzerindeki simetrik bilineer form $\langle \cdot, \cdot \rangle : V \times V \longrightarrow \mathbb{R}$, \mathbb{R} -bilineer fonksiyonu olsun. V üzerinde tanımlı $\langle \cdot, \cdot \rangle$ simetrik bilineer formu;

i) $\forall v \in V$ ve bir $u \in V$ için $\langle u, v \rangle = 0$ şartı sadece $u = 0$ için sağlanıyorsa, non-dejeneredir denir.

ii) $\forall v \in V$ ve bir $u \in V$ için $\langle u, v \rangle = 0$ şartı sadece $u \neq 0$ için sağlanıyorsa, dejeneredir denir, [17].

Tanım 2.0.20. V reel uzayı üzerinde bir simetrik bilineer form $\langle \cdot, \cdot \rangle$ olsun. $\forall u \in V$ ve $u \neq 0$ için,

i) $\langle u, v \rangle > 0$ (< 0) pozitif (negatif) tanımlı,

ii) $\langle u, v \rangle \geq 0$ (≤ 0) yarı pozitif (yarı negatif) tanımlı,

denir, [17].

Tanım 2.0.21. Bir V vektör uzayı üzerindeki $\langle \cdot, \cdot \rangle$ simetrik bilinear formunun v indeksi $\langle \cdot, \cdot \rangle|_{(W \times W)}$, negatif tanımlı olacak şekilde verilen en büyük boyutlu $W \subset V$ alt uzayının boyutudur. $\langle \cdot, \cdot \rangle$ iç çarpımının indeksi v ise $0 \leq v \leq \text{boy}V$ dir, [17].

Tanım 2.0.22. M diferensiyellenebilir bir manifold olsun. M üzerinde simetrik bilinear, nondejenere ve sabit indeksli $(0, 2)$ -tipinde $\langle \cdot, \cdot \rangle$ tensör alanına bir metrik tensör denir, [17].

Tanım 2.0.23. \mathbb{R}^n n -boyutlu standart reel vektör uzayı olmak üzere, her $p \in \mathbb{R}^n$ ve $v_p, w_p \in T_p\mathbb{R}^n$ için

$$\langle v_p, w_p \rangle_* = -\sum_{i=1}^v v_i w_i + \sum_{i=v+1}^n v_i w_i$$

eşitliği ile verilen v -indeksli metrik tensörle birlikte elde edilen uzaya yarı-Öklid uzayı denir ve \mathbb{E}_v^n ile gösterilir. Burada $1 \leq i \leq n$ olmak üzere, sırasıyla v_i ve w_i ler v_p ve w_p tanjant vektörlerinin bileşenidir, [17].

Tanım 2.0.24. \mathbb{E}_v^n yarı-Öklid uzayı olmak üzere $v = 1$ ve $n \geq 2$ ise \mathbb{E}_1^n yarı-Öklid uzayına Minkowski (Lorentz) n -uzay denir, [17].

Tanım 2.0.25. V bir Lorentz n -uzay olsun. $v \in V$ için

i) $\langle v, v \rangle_* > 0$ veya $v = 0$ ise v ye spacelike vektör,

ii) $\langle v, v \rangle_* < 0$ ise v ye timelike vektör,

iii) $\langle v, v \rangle_* = 0$ ve $v \neq 0$ ise v ye lightlike (null) vektör

denir, [17].

Tanım 2.0.26. \mathbb{E}_1^3 Lorentz-Minkowski uzayında $\alpha : I \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{E}_1^3$ bir eğri olsun. α eğrisinin teğet vektör alanı T olmak üzere,

- i) $\langle T, T \rangle_* > 0$ ise α eğrisine spacelike eğri,
- ii) $\langle T, T \rangle_* < 0$ ise α eğrisine timelike eğri,
- iii) $\langle T, T \rangle_* = 0$ ve $T \neq 0$ ise α eğrisine lightlike eğri,

denir, [17].

Tanım 2.0.27. 3-boyutlu Minkowski uzayında bir yüzey Ψ olsun. Ψ yüzeyi üzerine indirgenmiş metrik pozitif tanımlı ise Ψ yüzeyine \mathbb{E}_1^3 de bir spacelike yüzey denir, [49].

Teorem 2.0.3. 3-boyutlu Minkowski uzayında bir Ψ yüzeyinin spacelike yüzey olması için gerek ve yeter şart yüzeyin normalinin timelike bir vektör alanı, yani;

$$\langle N, N \rangle_* < 0$$

olmasıdır, [49].

Tanım 2.0.28. 3-boyutlu Minkowski uzayında bir yüzey Ψ olsun. Ψ yüzeyi üzerine indirgenmiş metrik Lorentz metriği ise Ψ yüzeyine \mathbb{E}_1^3 de bir timelike yüzey denir, [49].

Teorem 2.0.4. 3-boyutlu Minkowski uzayında bir Ψ yüzeyinin timelike yüzey olması için gerek ve yeter şart yüzeyin normalinin spacelike bir vektör alanı, yani;

$$\langle N, N \rangle_* > 0$$

olmasıdır, [49].

Tanım 2.0.29. \mathbb{E}_1^3 Minkowski 3-uzayında skaler çarpımın işareti $(-, +, +)$ iken, $\vec{u} = (u_1, u_2, u_3)$ ve $\vec{v} = (v_1, v_2, v_3)$ vektörlerin skaler çarpımı,

$$\langle \cdot, \cdot \rangle_* : \mathbb{E}^3 \times \mathbb{E}_1^3 \longrightarrow \mathbb{R} \quad (2.0.4)$$

$$(\vec{u}, \vec{v}) \longrightarrow \langle \vec{u}, \vec{v} \rangle_* = -u_1v_1 + u_2v_2 + u_3v_3$$

şeklinde tanımlanır. Eğer $\vec{u} = \vec{v}$ ise;

$$\|\vec{v}\|_* = (|\langle \vec{v}, \vec{v} \rangle_*|)^{\frac{1}{2}}$$

eşitliği ile tanımlı $\|\vec{v}\|_*$ reel sayısına \vec{v} vektörünün Lorentz anlamında normu denir. Normu 1 olan vektöre de Lorentz anlamında birim vektör denir, [17].

Tanım 2.0.30. \mathbb{E}_1^3 Minkowski 3-uzayında $u = (u_1, u_2, u_3)$ ve $v = (v_1, v_2, v_3)$ vektörleri verilsin. Bu durumda,

$$(u_3v_2 - u_2v_3, u_3v_1 - u_1v_3, u_1v_2 - u_2v_1)$$

vektörüne u ve v nin vektörel çarpımı (veya dış çarpımı) denir. $u \times_* v$ veya $u \wedge_* v$ şeklinde gösterilir.

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1, & i = j \text{ ise} \\ 0 & i \neq j \text{ ise} \end{cases} \quad e_i = (\delta_{i1}, \delta_{i2}, \delta_{i3})$$

olmak üzere,

$$u \wedge_* v = -\det \begin{pmatrix} e_1 & -e_2 & -e_3 \\ u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{pmatrix}$$

ya da

$$u \wedge_* v = \det \begin{pmatrix} -e_1 & e_2 & e_3 \\ u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{pmatrix}$$

olarak hesaplanır. Burada $e_1 \wedge_* e_2 = -e_3$, $e_2 \wedge_* e_3 = e_1$, $e_3 \wedge_* e_1 = e_2$ dir, [49].

Teorem 2.0.5. \mathbb{E}_1^3 , Minkowski 3-uzayında u ve v iki vektör iken;

i) u ve v spacelike vektör ise $u \wedge_* v$ bir timelike vektörüdür,

ii) u spacelike ve v timelike vektör ise $u \wedge_* v$ spacelike vektörüdür,

- iii) u spacelike ve v lightlike vektör olmak üzere $\langle u, v \rangle = 0$ ise $u \wedge_* v$ lightlike vektör, eğer $\langle u, v \rangle \neq 0$ ise $u \wedge_* v$ spacelike vektördür,
- iv) u ve v lightlike vektör ise $u \wedge_* v$ bir spacelike vektörüdür,
- v) u timelike ve v lightlike vektör ise $u \wedge_* v$ spacelike vektörüdür,
- vi) u ve v timelike vektör ise $u \wedge_* v$ bir spacelike vektörüdür, [17].

Tanım 2.0.31. \mathbb{E}_1^3 , 3-boyutlu Minkowski uzayında bir $X(u, v)$ yüzeyinin K Gauss eğriliği ve H ortalama eğrilikleri, sırasıyla

$$K = \varepsilon \left(\frac{e_* g_* - f_*^2}{E_* G_* - F_*^2} \right)$$

ve

$$H = \frac{1}{2} \varepsilon \left(\frac{e_* G_* - 2f_* F_* + g_* E_*}{E_* G_* - F_*^2} \right)$$

dir, burada $X(u, v)$ yüzeyinin; birim normali

$$N = \frac{X_u \wedge_* X_v}{\|X_u \wedge_* X_v\|},$$

I. temel formununun katsayıları

$$E_* = \langle X_u, X_u \rangle_*, \quad F_* = \langle X_u, X_v \rangle_*, \quad G_* = \langle X_v, X_v \rangle_*$$

ve II. temel formununun katsayıları

$$e_* = \langle X_{uu}, N \rangle_*, \quad f_* = \langle X_{uv}, N \rangle_*, \quad g_* = \langle X_{vv}, N \rangle_*$$

olup, burada $\varepsilon = \langle N, N \rangle_* = \pm 1$ dir, [17], [49].

Tanım 2.0.32. \mathbb{E}_1^3 Minkowski 3-uzayında bir Ω düzleminde, $\alpha : I = (a, b) \subset \mathbb{R} \rightarrow \Omega$ üreteç (profil) eğrisi verilsin. l , Ω düzleminde α ile kesişmeyen bir doğru olsun. l doğrusu sabit iken, α eğrisin l eksenini etrafında dönderilmesiyle oluşturulan nondejenere yüzeye \mathbb{E}_1^3 Minkowski 3-uzayında bir dönele yüzey denir, [50].

\mathbb{E}_1^3 Minkowski 3-uzayında bir döneel yüzeyin l dönme eksenini,

- i. eğer l timelike ise, x_0 -eksenini,
- ii. eğer l spacelike ise, x_1 ya da x_2 -eksenini,
- iii. eğer l lightlike ise, $(1, 1, 0)$ vektörüyle gerilen bir doğru olarak düşünülebilir, [27].

Buradan da anlaşılacağı gibi \mathbb{E}_1^3 Minkowski 3-uzayında bir döneel yüzey için, l ekseninin timelike, spacelike veya lightlike olması gibi üç farklı durumu vardır.

Durum 1. l eksenini timelike olsun:

Kabul edelim ki α profil eğrisi, x_0x_1 -düzleminde olsun. O zaman α eğrisi; $\alpha(u) = (g(u), f(u), 0)$ şeklinde olabilir. Buradaki $f(u) > 0$ ve $g(u)$ fonksiyonları, $I = (a, b)$ açık aralığındaki düzgün fonksiyonlardır. Bu durumda $v \in \mathbb{R}$ için, l timelike eksenini etrafında dönmeye karşılık gelen dönme matrisi

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos v & -\sin v \\ 0 & \sin v & \cos v \end{pmatrix}$$

dir. Böylece M döneel yüzeyini

$$X(u, v) = (g(u), f(u) \cos v, f(u) \sin v)$$

şeklinde elde edilir, [50].

Durum 2. l eksenini spacelike olsun:

Kabul edelim ki α profil eğrisi, x_1x_2 -düzleminde veya x_0x_2 -düzleminde olsun. O zaman α eğrisi; $\alpha(u) = (0, f(u), g(u))$ veya $\alpha(u) = (f(u), 0, g(u))$ olabilir. Buradaki $f(u) > 0$ ve $g(u)$ fonksiyonları, $I = (a, b)$ açık aralığındaki düzgün fonksiyonlardır. Bu durumda $v \in \mathbb{R}$ için, l spacelike eksenini etrafında dönmeye karşılık gelen dönme matrisi

$$\begin{pmatrix} \cosh v & \sinh v & 0 \\ \sinh v & \cosh v & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

ya da

$$\begin{pmatrix} \cosh v & 0 & \sinh v \\ 0 & 1 & 0 \\ \sinh v & 0 & \cosh v \end{pmatrix}$$

dir. Böylece M dönel yüzeyi

$$X(u, v) = (f(u) \sinh v, f(u) \cosh v, g(u))$$

ya da

$$X(u, v) = (f(u) \cosh v, f(u) \sinh v, g(u))$$

ile gösterilir, [50].

Durum 3. l eksenli lightlike olsun:

Kabul edelim ki α profil eğrisi, x_0x_1 -düzleminde ve $\alpha(u) = (f(u), g(u), 0)$ biçiminde olsun. Buradaki $f(u) > 0$ ve $g(u)$ fonksiyonu da $\forall u \in I$ için $f(u) - g(u) \neq 0$, şartını sağlayan ve $I = (a, b)$ açık aralığındaki düzgün fonksiyonlardır. Ayrıca l , $(1, 1, 0)$ vektörüyle gerilen bir doğrudur.

Bu durumda $v \in \mathbb{R}$ için, l lightlike eksenli etrafında dönmeye karşılık gelen dönme matrisi

$$\begin{pmatrix} 1 + \frac{v^2}{2} & -\frac{v^2}{2} & v \\ \frac{v^2}{2} & 1 - \frac{v^2}{2} & v \\ v & -v & 1 \end{pmatrix},$$

dir. Böylece M dönel yüzeyi

$$X(u, v) = (f(u) + \frac{v^2}{2}(f(u) - g(u)), g(u) + \frac{v^2}{2}(f(u) - g(u)), (f(u) - g(u))v)$$

şeklindedir, [50].

Tanım 2.0.33. $\alpha(u) : I \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{E}_1^3$ diferensiyellenebilir bir eğri iken \mathbb{E}_1^3 de, $X(u, v)$ regle yüzeyinin parametrik gösterimi

$$X(u, v) = \alpha(u) + vA(u), \quad u, v \in I \subset \mathbb{R}$$

şeklindedir. Burada $\alpha(u)$ regle yüzeyin dayanak eğrisi, $A(u)$ ise doğrultman vektörü olarak isimlendirilir.

Tanım 2.0.34. \mathbb{E}_1^3 Minkowski 3-uzayında $X(u, v)$ regle yüzeyinin dayanak eğrisi boyunca hareketinde striksiyon noktalarının geometrik yerine regle yüzeyin striksiyon (boğaz) eğrisi (çizgisi) denir ve

$$\gamma(u) = \alpha(u) - \frac{\langle \alpha'(u), A'(u) \rangle_*}{\|A'(u)\|_*^2} A(u)$$

şeklinde hesaplanır, [13] ve [14].

Lemma 2.0.2. Bir regle yüzeyde $\|A'(u)\|_* = 0$ ise bu regle yüzey silindirdir ve striksiyon eğrisi dayanak eğrisidir.

Teorem 2.0.6. \mathbb{E}_1^3 Minkowski 3-uzayında bir regle yüzeyin açılabilir olması için gerek ve yeter şart Gauss eğriliği K' nin ya da c 'nin sıfır olmasıdır. Burada

$$c = \varepsilon (\det[\alpha'(u), A(u), A'(u)])$$

olup regle yüzey spacelike (ya da timelike) ise $\varepsilon = 1$ (ya da $\varepsilon = -1$) dir, ([13] ve [14]).

Tanım 2.0.35. Bir regle yüzeyin komşu iki ana doğrusu arasındaki en kısa uzaklığın ana doğrular arasındaki açuya oranına regle yüzeyin drali (dağılma parametresi) denir ve

$$\delta = \varepsilon \left(\frac{\det[\alpha'(u), A(u), A'(u)]_*}{\|A'(u)\|_*^2} \right)$$

şeklinde verilir, ([13] ve [14]).

Teorem 2.0.7. \mathbb{E}_1^3 Minkowski 3-uzayında bir regle yüzeyin Gauss eğriliği $\varepsilon K(p) \leq 0$ dir. Eğer regle yüzey spacelike (ya da timelike) ise $\varepsilon = 1$ (ya da $\varepsilon = -1$) dir, ([13], [14]).

3. YOĞUNLUKLU UZAYLARDA EĞRİLER

Bu bölümde e^{ax+by} ve $e^{ax^2+by^2}$ yoğunluklu Öklid ve Lorentz-Minkowski uzaylarında yeni eğriler elde edilerek yoğunluklu Öklid ve Lorentz-Minkowski uzaylarındaki eğrilerin ağırlıklı eğrilikleri hesaplanmış ve bazı karakterizasyonlar vermiştir.

3.1 Yoğunluklu Öklid Uzayında Eğriler

Bu kısımda ilk olarak e^{ax+by} yoğunluklu Öklid uzayında birim hızlı bir eğrinin ağırlıklı eğriliğinin sabit olduğu durumlar incelenmiştir. Sonra e^{ax+by} ve $e^{ax^2+by^2}$ yoğunluklu Öklid uzayında keyfi parametrelili bir eğrinin ağırlıklı eğriliğini sıfır yapan yeni eğriler elde edilip bu yeni eğrilerin Smarandache eğrileri bulunarak bazı karakterizasyonlar verilmiştir.

3.1.1 e^{ax+by} Yoğunluklu \mathbb{E}^2 Düzleminde Birim Hızlı Eğriler

$\alpha(u) = (x(u), y(u))$ Öklid düzleminde birim hızlı bir eğri olsun. Bu $\alpha(u)$ eğrisinin teğet vektörü, normal vektörü ve eğriliği sırasıyla

$$T = (x'(u), y'(u)),$$

$$N = (-y'(u), x'(u)),$$

$$\kappa = x'(u)y''(u) - x''(u)y'(u)$$

dir. Ayrıca, e^φ yoğunluklu \mathbb{E}^2 de $\varphi = ax + by$ için φ nin gradyant vektörü

$$\nabla\varphi = (a, b)$$

olup (1.0.2) den

$$\frac{d\varphi}{dN} = -ay'(u) + bx'(u)$$

oluduğu görülür. Buradan $\alpha(u)$ birim hızlı eğrisinin ağırlıklı eğriliği, (1.0.1) den

$$\kappa_\varphi = x'(u)y''(u) - x''(u)y'(u) + ay'(u) - bx'(u)$$

olarak hesaplanır.

Sonuç 3.1.1. e^{ax+by} yoğunluklu \mathbb{E}^2 de birim hızlı bir $\alpha(u) = (x(u), y(u))$ eğrisinin ağırlıklı eğriliğinin sabit olması için

$$x'(u)y''(u) - x''(u)y'(u) + ay'(u) - bx'(u) = c \quad (3.1.1)$$

eğitliği sağlanmalıdır, burada $c \in \mathbb{R}$ dir.

Bu sunucun $a = 0$ ve $b = 1$ durumunu Hieu incelemiş ve ağırlıklı eğriliği sabit olan yeni eğrileri aşağıdaki gibi bulmuştur [51].

(3.1.1) eğitliğinde $a = 0$ ve $b = 1$ yerine yazılırsa

$$x'(u)y''(u) - x''(u)y'(u) - x'(u) = c \quad (3.1.2)$$

elde edilir. Burada

$$x'(u) = -\cos[2f(u)], \quad (3.1.3)$$

$$y'(u) = \sin[2f(u)]$$

iken (3.1.2) eğitliği

$$-2f'(u) + \cos[2f(u)] = c \quad (3.1.4)$$

olarak bulunur. (3.1.4) eğitliği, $\cos[2f(u)] \neq c$ şartını sağlayan bütün u parametreleri için düzenlenirse

$$\begin{aligned} -2f'(u) &= c + 1 - 2\cos^2[f(u)] \\ &= c + 1 - \frac{2}{\frac{\sin^2[f(u)] + \cos^2[f(u)]}{\cos^2[f(u)]}} \end{aligned}$$

veya

$$-2f'(u) = \frac{c - 1 + (c + 1)\tan^2[f(u)]}{1 + \tan^2[f(u)]} \quad (3.1.5)$$

olarak elde edilir.

(3.1.4) ve (3.1.5) eşitliklerinin $c < -1$, $c = -1$, $-1 < c < 1$, $c = 1$, $c > 1$ durumları için çözümleri aşağıda verilmiştir;

i) $c < -1$ olsun.

Bu durumda (3.1.5) eşitliği düzenlenirse

$$\frac{-2f'(u)(1 + \tan^2[f(u)])}{c - 1 + (c + 1)\tan^2[f(u)]} = 1$$

ya da

$$\frac{-2f'(u)(1 + \tan^2[f(u)])}{\tan^2[f(u)] + \left(\sqrt{\frac{c-1}{c+1}}\right)^2} = c + 1$$

olarak elde edilir. Bu ise

$$\frac{-2d \tan[f(u)]}{\tan^2[f(u)] + \left(\sqrt{\frac{c-1}{c+1}}\right)^2} = (c + 1)du$$

demektir. Buradan

$$\frac{-2}{\sqrt{\frac{c-1}{c+1}}} \arctan\left[\frac{\tan[f(u)]}{\sqrt{\frac{c-1}{c+1}}}\right] = (c + 1)u$$

dir ve $c < -1$ olduğundan

$$\tan[f(u)] = \sqrt{\frac{c-1}{c+1}} \tan\left[\frac{\sqrt{c^2-1}}{2}u\right] \quad (3.1.6)$$

olarak hesaplanır. (3.1.3) eşitliğinde, trigonometrik formüller kullanılarak, (3.1.6) eşitliği yerine yazıldığında

$$x'(u) = \frac{\left(\frac{c-1}{c+1}\right) \tan^2\left[\frac{\sqrt{c^2-1}}{2}u\right] - 1}{\left(\frac{c-1}{c+1}\right) \tan^2\left[\frac{\sqrt{c^2-1}}{2}u\right] + 1},$$
$$y'(u) = \frac{2\sqrt{\frac{c-1}{c+1}} \tan\left[\frac{\sqrt{c^2-1}}{2}u\right]}{\left(\frac{c-1}{c+1}\right) \tan^2\left[\frac{\sqrt{c^2-1}}{2}u\right] + 1}$$

elde edilir. Bu iki eşitliğin her ikisinin sağ tarafı " $\tan^2[\frac{\sqrt{c^2-1}}{2}u] + 1$ " ile çarpılıp bölüldüğünde $x'(u)$ ve $y'(u)$ aşağıdaki gibi hesaplanır:

$$x'(u) = \frac{-2}{\sqrt{c^2-1}} \frac{\left(1 - \left(\frac{c-1}{c+1}\right) \tan^2\left[\frac{\sqrt{c^2-1}}{2}u\right]\right) d\left(\tan\left[\frac{\sqrt{c^2-1}}{2}u\right]\right)}{\left(\left(\frac{c-1}{c+1}\right) \tan^2\left[\frac{\sqrt{c^2-1}}{2}u\right] + 1\right) \left(\tan^2\left[\frac{\sqrt{c^2-1}}{2}u\right] + 1\right)}, \quad (3.1.7)$$

$$y'(u) = \frac{-4}{c+1} \frac{\tan\left[\frac{\sqrt{c^2-1}}{2}u\right] d\left(\tan\left[\frac{\sqrt{c^2-1}}{2}u\right]\right)}{\left(\left(\frac{c-1}{c+1}\right) \tan^2\left[\frac{\sqrt{c^2-1}}{2}u\right] + 1\right) \left(\tan^2\left[\frac{\sqrt{c^2-1}}{2}u\right] + 1\right)}.$$

(3.1.7) eşitliklerinin her iki tarafının integralleri alındıktan sonra bileşenleri

$$x(u) = - \left(2 \arctan \left(\sqrt{\frac{c-1}{c+1}} \tan\left[\frac{\sqrt{c^2-1}}{2}u\right] \right) + cu \right),$$

$$y(u) = - \ln \left(\frac{\tan^2\left[\frac{\sqrt{c^2-1}}{2}u\right] + 1}{\left(\frac{c-1}{c+1}\right) \tan^2\left[\frac{\sqrt{c^2-1}}{2}u\right] + 1} \right)$$

olan yeni eğri elde edilmiş olur.

ii) $c = -1$ olsun.

Bu durumda; $\cos[2f(u_0)] = -1$ eşitliğini sağlayan herhangi bir u_0 varsa, (3.1.4) eşitliğinin çözümü tektir ve $f(u) = f(u_0)$ dir. Bu çözüme karşılık gelen eğriler ise x -eksenine paralel doğrulardır. Tersine, yani tüm u lar için $\cos[2f(u_0)] \neq -1$ ise (3.1.5) eşitliği

$$f'(u) = \frac{1}{1 + \tan^2[f(u)]}$$

ya da

$$d(\tan[f(u)]) = du$$

olup buradan da

$$\tan[f(u)] = u$$

elde edilir. Böylece trigonometrik eşitlikler yardımıyla (3.1.3) eşitliği,

$$x'(u) = - \frac{1 - u^2}{1 + u^2},$$

$$y'(u) = \frac{2u}{1 + u^2}$$

olarak bulunur. Bu eşitliklerin her birinin integralleri alındığında

$$x(u) = -2 \arctan(u) + u,$$

$$y(u) = \ln(1 + u^2)$$

parametrelerine sahip yeni eğri elde edilmiş olur.

iii) $-1 < c < 1$ olsun.

Bu durumda $\cos[2f(u_0)] = c$ eşitliğini sağlayan herhangi bir u_0 varsa, (3.1.4)

eşitliğinin çözümü tektir ve $f(u) = f(u_0)$ dır. Bu çözüme karşılık gelen

eğriler ise eğimi $\frac{\sqrt{1-c^2}}{-c}$ olan doğrulardır. Özel olarak $c = 0$ ise eğriler, eğimi

∞ olan dikey doğrulardır. Tersine, tüm u lar için $\cos[2f(u_0)] \neq c$ ise (3.1.5)

eşitliği

$$\frac{-2f'(u) (1 + \tan^2[f(u)])}{c - 1 + (c + 1) \tan^2[f(u)]} = 1$$

ya da

$$\frac{-2f'(u) (1 + \tan^2[f(u)])}{\tan^2[f(u)] - \left(\sqrt{\frac{1-c}{c+1}}\right)^2} = c + 1$$

olarak elde edilir. Bu ise

$$\frac{-2d \tan[f(u)]}{\tan^2[f(u)] - \left(\sqrt{\frac{1-c}{c+1}}\right)^2} = (c + 1)du$$

demektir. Buradan

$$\frac{1}{\sqrt{\frac{1-c}{c+1}}} \ln\left(\frac{\tan[f(u)] + \sqrt{\frac{1-c}{c+1}}}{\tan[f(u)] - \sqrt{\frac{1-c}{c+1}}}\right) = (c + 1)u$$

ya da

$$\left| \frac{\tan[f(u)] + \sqrt{\frac{1-c}{c+1}}}{\tan[f(u)] - \sqrt{\frac{1-c}{c+1}}} \right| = e^{\sqrt{1-c^2}u}$$

elde edilir. Bu eşitliğin çözümü iki durumda incelenir.

Durum 1: $\frac{\tan[f(u)] + \sqrt{\frac{1-c}{c+1}}}{\tan[f(u)] - \sqrt{\frac{1-c}{c+1}}} = e^{\sqrt{1-c^2}u}$ eşitliğinde içler-dışlar çarpımından sonra

gerekli düzenlemeler yapılırsa

$$\tan[f(u)] = \sqrt{\frac{1-c}{c+1}} \left(\frac{e^{\sqrt{1-c^2}u} + 1}{e^{\sqrt{1-c^2}u} - 1} \right)$$

elde edilir ve bu eşitlik (3.1.3) eşitliğinde yerine yazılırsa

$$x'(u) = -\frac{1 - \left(\sqrt{\frac{1-c}{c+1}} \frac{e^{\sqrt{1-c^2}u+1}}{e^{\sqrt{1-c^2}u-1}}\right)^2}{1 + \left(\sqrt{\frac{1-c}{c+1}} \frac{e^{\sqrt{1-c^2}u+1}}{e^{\sqrt{1-c^2}u-1}}\right)^2},$$

$$y'(u) = \frac{2\sqrt{\frac{1-c}{c+1}} \frac{e^{\sqrt{1-c^2}u+1}}{e^{\sqrt{1-c^2}u-1}}}{1 + \left(\sqrt{\frac{1-c}{c+1}} \frac{e^{\sqrt{1-c^2}u+1}}{e^{\sqrt{1-c^2}u-1}}\right)^2}$$

ya da eşiti olan

$$x'(u) = -\frac{ce^{2\sqrt{1-c^2}u} - 2e^{\sqrt{1-c^2}u} + c}{e^{2\sqrt{1-c^2}u} - 2ce^{\sqrt{1-c^2}u} + 1},$$

$$y'(u) = -\frac{\sqrt{1-c^2} \left(e^{\sqrt{1-c^2}u} - e^{-\sqrt{1-c^2}u}\right)}{e^{\sqrt{1-c^2}u} - 2c + e^{-\sqrt{1-c^2}u}}$$

eşitlikleri bulunur. Bu eşitliklerin integralleri alındığında yeni eğrinin bileşenleri aşağıdaki gibi olur:

$$x(u) = 2 \arctan \left(\frac{e^{\sqrt{1-c^2}u} - c}{\sqrt{1-c^2}} \right) - cu,$$

$$y(u) = \ln \left(e^{\sqrt{1-c^2}u} + e^{-\sqrt{1-c^2}u} - 2c \right).$$

Durum 2: $\frac{\tan[f(u)] + \sqrt{\frac{1-c}{c+1}}}{\tan[f(u)] - \sqrt{\frac{1-c}{c+1}}} = -e^{\sqrt{1-c^2}u}$ eşitliğinde cebirsel işlemler yapılırsa

$$\tan[f(u)] = \sqrt{\frac{1-c}{c+1}} \frac{e^{\sqrt{1-c^2}u} - 1}{e^{\sqrt{1-c^2}u} + 1}$$

elde edilir. Sonra Durum 1 deki gibi benzer hesaplamalar yapılırsa bileşenleri

$$x(u) = -2 \arctan \left(\frac{e^{\sqrt{1-c^2}u} + c}{\sqrt{1-c^2}} \right) - cu,$$

$$y(u) = \ln \left(e^{\sqrt{1-c^2}u} + e^{-\sqrt{1-c^2}u} + 2c \right)$$

şeklinde parametrelendirilmiş yeni eğri oluşur.

iv) $c = 1$ olsun.

Bu durumda; $\cos[2f(u_0)] = 1$ eşitliğini sağlayan herhangi bir u_0 varsa, (3.1.4) eşitliğinin çözümü tektir ve $f(u) = f(u_0)$ dir. Bu çözüme karşılık

gelen eğriler ise x -eksenine paralel doğrulardır. Tersine, yani tüm u lar için $\cos[2f(u_0)] \neq 1$ ise (3.1.5) eşitliği

$$\begin{aligned} -f'(u) &= \frac{\tan^2[f(u)]}{1 + \tan^2[f(u)]} \\ &= \frac{1}{1 + \cot^2[f(u)]} \end{aligned}$$

ya da

$$d(\cot[f(u)]) = du$$

buradan da

$$\cot[f(u)] = u$$

elde edilir. Ayrıca (3.1.3) eşitliğinden

$$\begin{aligned} x'(u) &= \frac{1 - u^2}{1 + u^2}, \\ y'(u) &= \frac{2u}{1 + u^2} \end{aligned}$$

olarak bulunur. Bu eşitliklerin her ikisinin integralleri alındığında

$$\alpha(u) = (2 \arctan(u) - u, \ln(1 + u^2))$$

eğrisi elde edilmiş olur.

v) $c > 1$ olsun.

Bu durumda, $c < -1$ durumundaki işlemlere benzer işlemler yapılırsa

$$\tan[f(u)] = -\sqrt{\frac{c-1}{c+1}} \tan\left[\frac{\sqrt{c^2-1}}{2}u\right]$$

olarak bulunur. (3.1.3) eşitliğinden,

$$\begin{aligned} x'(u) &= \frac{-2}{\sqrt{c^2-1}} \frac{\left(1 - \left(\frac{c-1}{c+1}\right) \tan^2\left[\frac{\sqrt{c^2-1}}{2}u\right]\right) d\left(\tan\left[\frac{\sqrt{c^2-1}}{2}u\right]\right)}{\left(\left(\frac{c-1}{c+1}\right) \tan^2\left[\frac{\sqrt{c^2-1}}{2}u\right] + 1\right) \left(\tan^2\left[\frac{\sqrt{c^2-1}}{2}u\right] + 1\right)}, \\ y'(u) &= \frac{-4}{c+1} \frac{\tan\left[\frac{\sqrt{c^2-1}}{2}u\right] d\left(\tan\left[\frac{\sqrt{c^2-1}}{2}u\right]\right)}{\left(\left(\frac{c-1}{c+1}\right) \tan^2\left[\frac{\sqrt{c^2-1}}{2}u\right] + 1\right) \left(\tan^2\left[\frac{\sqrt{c^2-1}}{2}u\right] + 1\right)} \end{aligned}$$

elde edilir ve bu eşitliklerinin her iki tarafının integralleri alındıktan sonra cebirsel işlemler yardımıyla

$$x(u) = \left(2 \arctan \left(\sqrt{\frac{c-1}{c+1}} \tan \left[\frac{\sqrt{c^2-1}}{2} u \right] \right) - cu \right),$$

$$y(u) = -\ln \left(\frac{\tan^2 \left[\frac{\sqrt{c^2-1}}{2} u \right] + 1}{\left(\frac{c-1}{c+1} \right) \tan^2 \left[\frac{\sqrt{c^2-1}}{2} u \right] + 1} \right)$$

olacak şekilde yeni eğri elde edilmiş olur.

3.1.2 e^{ax+by} Yoğunluklu \mathbb{E}^3 Uzayında Keyfi Parametrelili Eğriler

\mathbb{E}^3 Öklid uzayında $\alpha(u) = (x(u), y(u), 0)$ keyfi parametrelili bir eğri olsun.

$\alpha(u)$ eğrisinin Frenet vektörleri ve eğriliği aşağıdaki gibi hesaplanır:

$$T = \frac{1}{\sqrt{x'(u)^2 + y'(u)^2}} (x'(u), y'(u), 0),$$

$$N = \frac{1}{\sqrt{x'(u)^2 + y'(u)^2}} (-y'(u), x'(u), 0), \quad (3.1.8)$$

$$B = (0, 0, 1)$$

ve

$$\kappa = \frac{x'(u)y''(u) - x''(u)y'(u)}{(x'(u)^2 + y'(u)^2)^{3/2}}. \quad (3.1.9)$$

Ayrıca a ve b den az biri sıfırdan farklı reel sayılar olmak üzere $\varphi = ax + by$ için e^φ yoğunluklu Öklid uzayında φ nin gradyant vektörü

$$\nabla \varphi = (a, b, 0) \quad (3.1.10)$$

dır. (3.1.8) ve (3.1.10) eşitlikleri kullanılırsa (1.0.2) den

$$\frac{d\varphi}{dN} = \frac{-ay'(u) + bx'(u)}{\sqrt{x'(u)^2 + y'(u)^2}} \quad (3.1.11)$$

olarak bulunur. (3.1.9) ve (3.1.11) eşitlikleri yardımıyla, e^{ax+by} yoğunluklu Öklid uzayında keyfi parametrelili $\alpha(u) = (x(u), y(u), 0)$ eğrisinin ağırlıklı eğriliği, (1.0.1) eşitliğinden

$$\kappa_\varphi = \frac{x'(u)y''(u) - x''(u)y'(u) + (ay'(u) - bx'(u))(x'(u)^2 + y'(u)^2)}{(x'(u)^2 + y'(u)^2)^{3/2}} \quad (3.1.12)$$

olarak elde edilir.

Sonuç 3.1.2. e^{ax+by} yoğunluklu Öklid uzayında, keyfi parametrelili $\alpha(u)=(x(u), y(u), 0)$ eğrisinin ağırlıklı eğriliğinin sıfır (φ -doğrusal) olması için gerek ve yeter şart

$$x'(u)y''(u) + ay'(u)(x'(u)^2 + y'(u)^2) = x''(u)y'(u) + bx'(u)(x'(u)^2 + y'(u)^2) \quad (3.1.13)$$

olmasıdır.

Burada, e^{ax+by} yoğunluklu Öklid uzayında, a ve b nin durumlarına göre; keyfi parametrelili $\alpha(u) = (x(u), y(u), 0)$ eğrisinin ağırlıklı eğriliğini sıfır (φ -doğrusal) yapacak yeni eğriler oluşturulacaktır.

i) $a \neq 0$ ve $b = 0$ olsun.

Bu durumda e^{ax} yoğunluklu Öklid uzayında keyfi parametrelili $\alpha(u)=(x(u), y(u), 0)$ eğrisinin ağırlıklı eğriliği; (3.1.12) eşitliği yardımıyla

$$\kappa_{\varphi} = \frac{x'(u)y''(u) - x''(u)y'(u) + ay'(u)(x'(u)^2 + y'(u)^2)}{(x'(u)^2 + y'(u)^2)^{3/2}}$$

şeklinde elde edilir.

Sonuç 3.1.3. e^{ax} yoğunluklu Öklid uzayında, keyfi parametrelili $\alpha(u)=(x(u), y(u), 0)$ eğrisinin ağırlıklı eğriliğinin sıfır (φ -doğrusal) olması için gerek ve yeter şart

$$x'(u)y''(u) + ay'(u)(x'(u)^2 + y'(u)^2) = x''(u)y'(u) \quad (3.1.14)$$

olmasıdır.

Burada (3.1.14) denklemini çözülürse;

$x'(u) = 0$ ise; (3.1.14) denklemini $y'(u) = 0$ için sağlanır. Bu çözüm bir nokta belirtir.

$x'(u) \neq 0$ ise; (3.1.14) denklemini $y(u) = c_2 \pm \frac{\arctan[\sqrt{c_1 e^{2ax(u)} - 1}]}{a}$ için sağlanır, burada $c_1 > e^{-2ax(u)}$ ve $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ dir.

$y'(u) = 0$ ise; (3.1.14) denklemini bütün $x(u)$ lar için sağlanır.

$y'(u) \neq 0$ ise; (3.1.14) denklemini $x(u) = c_4 - \frac{\ln[\cos(c_3 + ay(u))]}{a}$ için sağlanır, burada $-\frac{\pi}{2} < c_3 + ay(u) < \frac{\pi}{2}$ ve $c_3, c_4 \in \mathbb{R}$ dir.

Böylece aşağıdaki teorem verilebilir.

Teorem 3.1.1. e^{ax} yoğunluklu Öklid uzayında, keyfi parametrelili $\alpha(u) = (x(u), y(u), 0)$ eğrisinin ağırlıklı eğriliği sıfır (φ – doğrusal) olan eğrileri

$$\alpha_1(u) = \left(x(u), c_2 \pm \frac{\arctan[\sqrt{c_1 e^{2ax(u)} - 1}]}{a}, 0 \right), \quad (3.1.15)$$

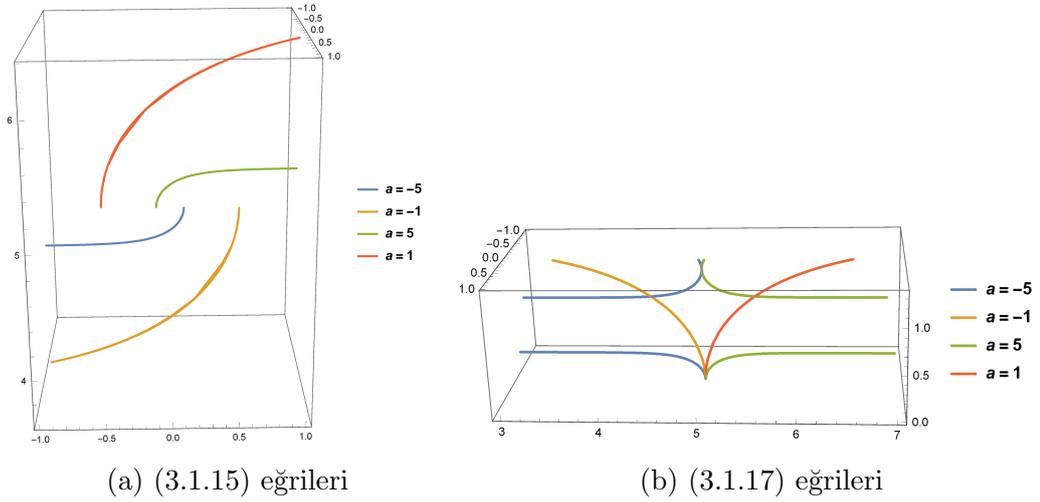
$$\alpha_2(u) = (x(u), c_5, 0), \quad (3.1.16)$$

ve

$$\alpha_3(u) = \left(c_4 - \frac{\ln[\cos(c_3 + ay(u))]}{a}, y(u), 0 \right) \quad (3.1.17)$$

şeklinde parametrelendirilebilir, burada $c_1 > e^{-2ax(u)}$, $-\frac{\pi}{2} < c_3 + ay(u) < \frac{\pi}{2}$ ve $c_1, c_2, c_3, c_4, c_5 \in \mathbb{R}$ dir.

Şekil 3.1 (a) ve (b), sırasıyla $x(u) = \sin(u)$, $c_1 = 3$, $c_2 = 5$, $a = -5, -1, 1, 5$ ve $y(u) = \arccos(e^u)$, $c_1 = 0$, $c_2 = 5$, $a = -5, -1, 1, 5$ için e^{ax} yoğunluklu Öklid uzayında, keyfi parametrelili $\alpha(u) = (x(u), y(u), 0)$ eğrisinin ağırlıklı eğriliği sıfır (φ –doğrusal) olan (3.1.15) ve (3.1.17) eğrilerini göstermektedir.



Şekil 3.1: e^{ax} yoğunluklu E^3 te φ –doğrusal eğrileri

ii) $b \neq 0$ ve $a = 0$ olsun.

Bu durumda e^{by} yoğunluklu Öklid uzayında keyfi parametrelili $\alpha(u)=(x(u), y(u), 0)$ eğrisinin ağırlıklı eğriliği; (3.1.12) eşitliği yardımıyla

$$\kappa_{\varphi} = \frac{x'(u)y''(u) - x''(u)y'(u) - bx'(u)(x'(u)^2 + y'(u)^2)}{(x'(u)^2 + y'(u)^2)^{3/2}}$$

olarak elde edilir.

Sonuç 3.1.4. e^{by} yoğunluklu Öklid uzayında, keyfi parametrelili $\alpha(u)=(x(u), y(u), 0)$ eğrisinin ağırlıklı eğriliğinin sıfır (φ - doğrusal) olması için gerek ve yeter şart

$$x'(u)y''(u) = x''(u)y'(u) + bx'(u)(x'(u)^2 + y'(u)^2) \quad (3.1.18)$$

olmasıdır.

Burada (3.1.18) denklemi çözülürse;

$x'(u) = 0$ ise; (3.1.18) denklemi bütün $y(u)$ lar için sağlanır.

$x'(u) \neq 0$ ise; (3.1.18) denklemi $y(u) = c_7 - \frac{\ln[\cos(c_6 + bx(u))]}{b}$ için sağlanır, burada $-\frac{\pi}{2} < c_6 + bx(u) < \frac{\pi}{2}$ ve $c_6, c_7 \in \mathbb{R}$ dir.

$y'(u) = 0$ ise; (3.1.18) denklemi $x'(u) = 0$ için sağlanır. Bu çözüm bir nokta belirtir.

$y'(u) \neq 0$ ise; (3.1.18) denklemi $x(u) = c_9 \pm \frac{\arctan[\sqrt{c_8 e^{2by(u)} - 1}]}{b}$ için sağlanır, burada $c_8 > e^{-2by(u)}$ ve $c_8, c_9 \in \mathbb{R}$ dir.

Böylece aşağıdaki teorem verilebilir.

Teorem 3.1.2. e^{by} yoğunluklu Öklid uzayında, keyfi parametrelili $\alpha(u)=(x(u), y(u), 0)$ eğrisinin ağırlıklı eğriliği sıfır (φ - doğrusal) olan eğriler

$$\alpha_4(u) = (c_{10}, y(u), 0), \quad (3.1.19)$$

$$\alpha_5(u) = \left(x(u), c_7 - \frac{\ln[\cos(c_6 + bx(u))]}{b}, 0 \right) \quad (3.1.20)$$

ve

$$\alpha_6(u) = \left(c_9 \pm \frac{\arctan[\sqrt{c_8 e^{2by(u)} - 1}]}{b}, y(u), 0 \right) \quad (3.1.21)$$

şeklinde parametrelendirilebilir, burada $c_8 > e^{-2by(u)}$, $-\frac{\pi}{2} < c_6 + bx(u) < \frac{\pi}{2}$ ve $c_6, c_7, c_8, c_9, c_{10} \in \mathbb{R}$ dir.

Sonuç 3.1.5. e^{ax} (ve e^{by}) yoğunluklu Öklid uzayında, keyfi parametrelili $\alpha(u) = (x(u), y(u), 0)$ eğrisinin ağırlıklı eğriliği sıfır (φ – doğrusal) olan (3.1.16) (ve (3.1.19)) eğrileri yoğunluk katsayısı a 'nın (ve b 'nin) seçiminden bağımsızdır.

Aşağıda e^{ax} ve e^{by} yoğunluklu Öklid uzayında, keyfi parametrelili $\alpha(u) = (x(u), y(u), 0)$ eğrisinin ağırlıklı eğriliği sıfır (φ –doğrusal) olan eğrilerin Frenet vektörleri ve Frenet vektörlerinden yararlanarak Smarandache eğrileri oluşturulmuştur. Ayrıca oluşturulan bu Smarandache eğrilerinin Frenet vektörleri ve eğriliği hesaplanmıştır. Burada yalnızca e^{ax} yoğunluklu Öklid uzayında, keyfi parametrelili $\alpha(u) = (x(u), y(u), 0)$ eğrisinin ağırlıklı eğriliği sıfır (φ –doğrusal) olan (3.1.15) ve (3.1.17) eğrileri için çalışma yapılmıştır. Çünkü e^{by} yoğunluklu Öklid uzayında, keyfi parametrelili $\alpha(u) = (x(u), y(u), 0)$ eğrisinin ağırlıklı eğriliği sıfır (φ – doğrusal) olan (3.1.20) ve (3.1.21) eğrileri; (3.1.15) ve (3.1.17) eğrileri için yapılan çalışmadaki işlemlere benzer işlemlerle yakın sonuçlar vermekte ve (3.1.16), (3.1.19) eğrileri ise birer doğru belirttiğinden yapılacak işlemler kolaylıkla hesaplanmaktadır.

İlk olarak e^{ax} yoğunluklu Öklid uzayında, keyfi parametrelili $\alpha(u) = (x(u), y(u), 0)$ eğrisinin ağırlıklı eğriliği sıfır (φ –doğrusal) olan (3.1.15) eğrisi

$\alpha_1(u) = \left(x(u), c_2 + \frac{\arctan[\sqrt{c_1 e^{2ax(u)} - 1}]}{a}, 0 \right)$ olarak alınıp, Frenet vektörleri ve eğriliği hesaplanırsa

$$\begin{aligned} T_{\alpha_1} &= \frac{1}{\sqrt{c_1 e^{2ax(u)}}} \left(\sqrt{c_1 e^{2ax(u)} - 1}, 1, 0 \right), \\ N_{\alpha_1} &= \frac{1}{\sqrt{c_1 e^{2ax(u)}}} \left(-1, \sqrt{c_1 e^{2ax(u)} - 1}, 0 \right), \\ B_{\alpha_1} &= (0, 0, 1) \end{aligned} \quad (3.1.22)$$

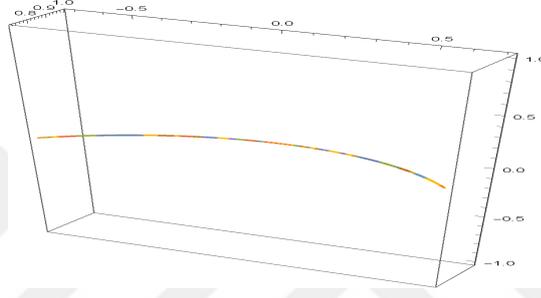
ve

$$\kappa_{\alpha_1} = \frac{|a|}{\sqrt{c_1 e^{2ax(u)}}}$$

olarak bulunur.

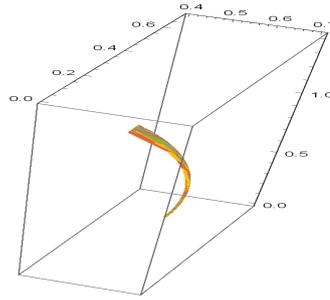
(3.1.22) eşitliklerinden, (3.1.15) eğrisinin TN -Smarandache $\gamma_{TN\alpha_1}$, TB -Smarandache $\gamma_{TB\alpha_1}$, NB -Smarandache $\gamma_{NB\alpha_1}$ ve TNB -Smarandache $\gamma_{TNB\alpha_1}$ eğrileri, sırasıyla

$$\gamma_{TN\alpha_1} = \frac{1}{\sqrt{2c_1 e^{2ax(u)}}} \left(\sqrt{c_1 e^{2ax(u)} - 1} - 1, \sqrt{c_1 e^{2ax(u)} - 1} + 1, 0 \right), \quad (3.1.23)$$



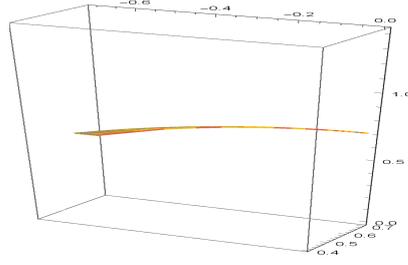
Şekil 3.2: (3.1.15) eğrisinin TN -Smarandache eğrileri

$$\gamma_{TB\alpha_1} = \left(\frac{\sqrt{c_1 e^{2ax(u)} - 1}}{\sqrt{2c_1 e^{2ax(u)}}}, \frac{1}{\sqrt{2c_1 e^{2ax(u)}}}, \frac{1}{\sqrt{2}} \right), \quad (3.1.24)$$



Şekil 3.3: (3.1.15) eğrisinin TB -Smarandache eğrileri

$$\gamma_{NB\alpha_1} = \left(\frac{-1}{\sqrt{2c_1 e^{2ax(u)}}}, \frac{\sqrt{c_1 e^{2ax(u)} - 1}}{\sqrt{2c_1 e^{2ax(u)}}}, \frac{1}{\sqrt{2}} \right) \quad (3.1.25)$$

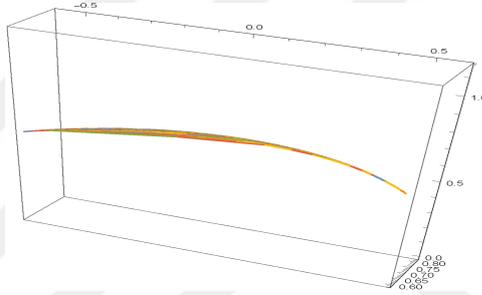


Şekil 3.4: (3.1.15) eğrisinin NB-Smarandache eğrileri

ve

$$\gamma_{TNB\alpha_1} = \left(\frac{\sqrt{c_1 e^{2ax(u)} - 1} - 1}{\sqrt{3c_1 e^{2ax(u)}}}, \frac{\sqrt{c_1 e^{2ax(u)} - 1} + 1}{\sqrt{3c_1 e^{2ax(u)}}}, \frac{1}{\sqrt{3}} \right) \quad (3.1.26)$$

şeklinde oluşturulur.



Şekil 3.5: (3.1.15) eğrisinin TNB-Smarandache eğrileri

Şekil 3.2, 3.3, 3.4 ve 3.5, $x(u) = \sin(u)$, $c_1 = 0$, $a = -5, -1, 1, 5$ için e^{ax} yoğunluklu Öklid uzayında, keyfi parametrelili $\alpha(u) = (x(u), y(u), 0)$ eğrisinin ağırlıklı eğriliği sıfır (φ -doğrusal) olan (3.1.15) eğrilerin Smarandache eğrilerini göstermektedir.

Böylece; (3.1.23)-(3.1.26) ifadelerinden

- TN -Smarandache $\gamma_{TN\alpha_1}$ eğrisinin Frenet vektörleri ve eğriliği, sırasıyla

$$T_{\gamma_{TN\alpha_1}} = \left(\frac{\sqrt{c_1 e^{2ax(u)} - 1} + 1}{\sqrt{2c_1 e^{2ax(u)}}}, \frac{\sqrt{c_1 e^{2ax(u)} - 1} - 1}{\sqrt{2c_1 e^{2ax(u)}}}, 0 \right),$$

$$N_{\gamma_{TN\alpha_1}} = \left(\frac{1 - \sqrt{c_1 e^{2ax(u)} - 1}}{\sqrt{2c_1 e^{2ax(u)}}}, \frac{\sqrt{c_1 e^{2ax(u)} - 1} + 1}{\sqrt{2c_1 e^{2ax(u)}}}, 0 \right),$$

$$B_{\gamma_{TN\alpha_1}} = (0, 0, 1)$$

ve

$$\kappa_{\gamma_{TN\alpha_1}} = 1$$

dir.

- TB –Smarandache $\gamma_{TB\alpha_1}$ eğrisinin Frenet vektörleri ve eğriliği

$$T_{\gamma_{TB\alpha_1}} = \left(\frac{1}{\sqrt{c_1 e^{2ax(u)}}}, \frac{\sqrt{c_1 e^{2ax(u)} - 1}}{\sqrt{c_1 e^{2ax(u)}}}, 0 \right),$$
$$N_{\gamma_{TB\alpha_1}} = \left(\frac{-\sqrt{c_1 e^{2ax(u)} - 1}}{\sqrt{c_1 e^{2ax(u)}}}, \frac{1}{\sqrt{c_1 e^{2ax(u)}}}, 0 \right),$$
$$B_{\gamma_{TB\alpha_1}} = (0, 0, 1)$$

ve

$$\kappa_{\gamma_{TB\alpha_1}} = \sqrt{2}$$

dir.

- NB –Smarandache $\gamma_{NB\alpha_1}$ eğrisinin Frenet vektörleri ve eğriliği

$$T_{\gamma_{NB\alpha_1}} = \left(\frac{\sqrt{c_1 e^{2ax(u)} - 1}}{\sqrt{c_1 e^{2ax(u)}}}, \frac{1}{\sqrt{c_1 e^{2ax(u)}}}, 0 \right),$$
$$N_{\gamma_{NB\alpha_1}} = \left(\frac{-1}{\sqrt{c_1 e^{2ax(u)}}}, \frac{\sqrt{c_1 e^{2ax(u)} - 1}}{\sqrt{c_1 e^{2ax(u)}}}, 0 \right),$$
$$B_{\gamma_{NB\alpha_1}} = (0, 0, 1)$$

ve

$$\kappa_{\gamma_{NB\alpha_1}} = \sqrt{2}$$

dir.

- TNB –Smarandache $\gamma_{TNB\alpha_1}$ eğrisinin Frenet vektörleri ve eğriliği

$$T_{\gamma_{TNB\alpha_1}} = \left(\frac{1 + \sqrt{c_1 e^{2ax(u)} - 1}}{\sqrt{2c_1 e^{2ax(u)}}}, \frac{1 - \sqrt{c_1 e^{2ax(u)} - 1}}{\sqrt{2c_1 e^{2ax(u)}}}, 0 \right),$$
$$N_{\gamma_{TNB\alpha_1}} = \left(\frac{\sqrt{c_1 e^{2ax(u)} - 1} - 1}{\sqrt{2c_1 e^{2ax(u)}}}, \frac{1 + \sqrt{c_1 e^{2ax(u)} - 1}}{\sqrt{2c_1 e^{2ax(u)}}}, 0 \right),$$

$$B_{\gamma_{TNB\alpha_1}} = (0, 0, 1)$$

ve

$$\kappa_{\gamma_{TNB\alpha_1}} = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}$$

dir.

Sonuç 3.1.6. e^{ax} yoğunluklu Öklid uzayında, keyfi parametrelili $\alpha(u) = (x(u), y(u), 0)$ eğrisinin ağırlıklı eğriliği sıfır (φ -doğrusal) olan (3.1.15) eğrisinin; TN -Smarandache $\gamma_{TN\alpha_1}$, TB -Smarandache $\gamma_{TB\alpha_1}$, NB -Smarandache $\gamma_{NB\alpha_1}$ ve TNB -Smarandache $\gamma_{TNB\alpha_1}$ eğrilerinin herbirinin eğrilikleri sabit olup, yoğunluk katsayısı olan a 'nın seçiminden bağımsızdır.

Benzer olarak; e^{ax} yoğunluklu Öklid uzayında, keyfi parametrelili $\alpha(u) = (x(u), y(u), 0)$ eğrisinin ağırlıklı eğriliği sıfır (φ -doğrusal) olan (3.1.17) eğrisinin Frenet vektörleri ve eğriliği, sırasıyla

$$\begin{aligned} T_{\alpha_3} &= (\sin(c_3 + ay(u)), \cos(c_3 + ay(u)), 0), \\ N_{\alpha_3} &= (-\cos(c_3 + ay(u)), \sin(c_3 + ay(u)), 0), \\ B_{\alpha_3} &= (0, 0, 1) \end{aligned} \quad (3.1.27)$$

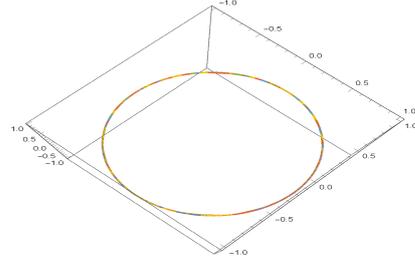
ve

$$\kappa_{\alpha_3} = |a \cos(c_3 + ay(u))|$$

şeklindedir.

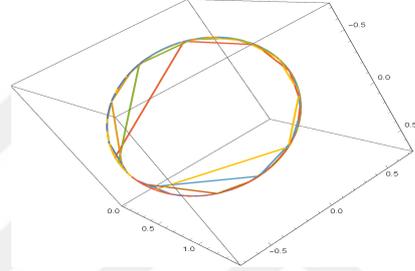
(3.1.27) eşitliğinden, (3.1.17) eğrisinin TN -Smarandache $\gamma_{TN\alpha_3}$, TB -Smarandache $\gamma_{TB\alpha_3}$, NB -Smarandache $\gamma_{NB\alpha_3}$ ve TNB -Smarandache $\gamma_{TNB\alpha_3}$ eğrileri, sırasıyla

$$\gamma_{TN\alpha_3} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} \sin(c_3 + ay(u)) - \cos(c_3 + ay(u)), \\ \cos(c_3 + ay(u)) + \sin(c_3 + ay(u)), 0 \end{pmatrix}, \quad (3.1.28)$$



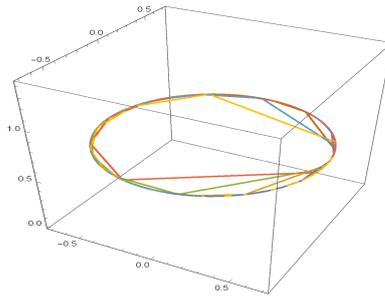
Şekil 3.6: (3.1.17) eğrisinin TN-Smarandache eğrileri

$$\gamma_{TB\alpha_3} = \frac{1}{\sqrt{2}} (\sin(c_3 + ay(u)), \cos(c_3 + ay(u)), 1), \quad (3.1.29)$$



Şekil 3.7: (3.1.17) eğrisinin TB-Smarandache eğrileri

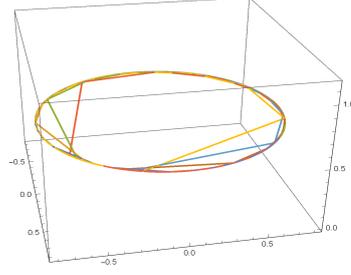
$$\gamma_{NB\alpha_3} = \frac{1}{\sqrt{2}} (-\cos(c_3 + ay(u)), \sin(c_3 + ay(u)), 1) \quad (3.1.30)$$



Şekil 3.8: (3.1.17) eğrisinin NB-Smarandache eğrileri

ve

$$\gamma_{TNB\alpha_3} = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} \sin(c_3 + ay(u)) - \cos(c_3 + ay(u)), \\ \sin(c_3 + ay(u)) + \cos(c_3 + ay(u)), 1 \end{pmatrix} \quad (3.1.31)$$



Şekil 3.9: (3.1.17) eğrisinin TNB-Smarandache eğrileri

şeklinde olur.

Şekil 3.6, 3.7, 3.8 ve 3.9, $y(u) = \arccos(e^u)$, $c_1 = 0$, $a = -5, -1, 1, 5$ için e^{ax} yoğunluklu Öklid uzayında, keyfi parametrelili $\alpha(u) = (x(u), y(u), 0)$ eğrisinin ağırlıklı eğriliği sıfır (φ -doğrusal) olan (3.1.17) eğrilerinin Smarandache eğrilerini göstermektedir.

Böylece;

- TN -Smarandache $\gamma_{TN\alpha_3}$ eğrisinin Frenet vektörleri ve eğriliği

$$T_{\gamma_{TN\alpha_3}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} \sin(c_3 + ay(u)) + \cos(c_3 + ay(u)), \\ \cos(c_3 + ay(u)) - \sin(c_3 + ay(u)), 0 \end{pmatrix},$$

$$N_{\gamma_{TN\alpha_3}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} \sin(c_3 + ay(u)) - \cos(c_3 + ay(u)), \\ \cos(c_3 + ay(u)) + \sin(c_3 + ay(u)), 0 \end{pmatrix},$$

$$B_{\gamma_{TN\alpha_3}} = (0, 0, 1)$$

ve

$$\kappa_{\gamma_{TN\alpha_3}} = 1$$

dir.

- TB -Smarandache $\gamma_{TB\alpha_3}$ eğrisinin Frenet vektörleri ve eğriliği

$$T_{\gamma_{TB\alpha_3}} = (\cos(c_3 + ay(u)), -\sin(c_3 + ay(u)), 0),$$

$$N_{\gamma_{TB\alpha_3}} = (\sin(c_3 + ay(u)), \cos(c_3 + ay(u)), 0),$$

$$B_{\gamma_{TB\alpha_3}} = (0, 0, 1)$$

ve

$$\kappa_{\gamma_{TB\alpha_3}} = \sqrt{2}$$

dir.

- NB –Smarandache $\gamma_{NB\alpha_3}$ eğrisinin Frenet vektörleri ve eğriliği

$$T_{\gamma_{NB\alpha_3}} = (\sin(c_3 + ay(u)), \cos(c_3 + ay(u)), 0),$$

$$N_{\gamma_{NB\alpha_3}} = (-\cos(c_3 + ay(u)), \sin(c_3 + ay(u)), 0),$$

$$B_{\gamma_{NB\alpha_3}} = (0, 0, 1)$$

ve

$$\kappa_{\gamma_{NB\alpha_3}} = \sqrt{2}$$

dir.

- TNB –Smarandache $\gamma_{TNB\alpha_3}$ eğrisinin Frenet vektörleri ve eğriliği

$$T_{\gamma_{TNB\alpha_3}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} \sin(c_3 + ay(u)) + \cos(c_3 + ay(u)), \\ \cos(c_3 + ay(u)) - \sin(c_3 + ay(u)), 0 \end{pmatrix},$$

$$N_{\gamma_{TNB\alpha_3}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} \sin(c_3 + ay(u)) - \cos(c_3 + ay(u)), \\ \cos(c_3 + ay(u)) + \sin(c_3 + ay(u)), 0 \end{pmatrix},$$

$$B_{\gamma_{TNB\alpha_3}} = (0, 0, 1)$$

ve

$$\kappa_{\gamma_{TNB\alpha_3}} = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}.$$

Sonuç 3.1.7. e^{ax} yoğunluklu Öklid uzayında, keyfi parametrelili $\alpha(u) = (x(u), y(u), 0)$ eğrisinin ağırlıklı eğriliği sıfır (φ -doğrusal) olan (3.1.17) eğrisinin; TN –Smarandache $\gamma_{TN\alpha_3}$, TB –Smarandache $\gamma_{TB\alpha_3}$, NB –Smarandache $\gamma_{NB\alpha_3}$ ve TNB –Smarandache $\gamma_{TNB\alpha_3}$ eğrilerinin herbirinin eğrilikleri sabit olup, yoğunluk katsayısı olan a 'nın seçiminden bağımsızdır.

3.1.3 $e^{ax^2+by^2}$ Yoğunluklu \mathbb{E}^3 Uzayında Keyfi Parametrelili Eğriler

\mathbb{E}^3 de keyfi parametrelili $\alpha(u) = (x(u), y(u), 0)$ eğrisinin Frenet vektörleri ve eğriliği (3.1.8) ve (3.1.9) eşitliklerinde hesaplanmıştır. Ayrıca, a, b ; en az biri sıfırdan farklı reel sayılar ve $\varphi = ax^2 + by^2$ için e^φ yoğunluklu Öklid uzayında φ nin gradyant vektörü

$$\nabla\varphi = 2(ax(u), by(u), 0), \quad (3.1.32)$$

dır. (1.0.2), (3.1.8) ve (3.1.32) eşitliklerinden

$$\frac{d\varphi}{dN} = \frac{2(-ax(u)y'(u) + by(u)x'(u))}{\sqrt{x'(u)^2 + y'(u)^2}} \quad (3.1.33)$$

olarak bulunur. (3.1.9) ve (3.1.33) eşitlikleri yardımıyla, $e^{ax^2+by^2}$ yoğunluklu Öklid uzayında keyfi parametrelili $\alpha(u) = (x(u), y(u), 0)$ eğrisinin ağırlıklı eğriliği (1.0.1) den

$$\kappa_\varphi = \frac{x'(u)y''(u) - x''(u)y'(u) + 2(ax(u)y'(u) - bx'(u)y(u))(x'(u)^2 + y'(u)^2)}{(x'(u)^2 + y'(u)^2)^{3/2}} \quad (3.1.34)$$

şeklinde hesaplanır.

Sonuç 3.1.8. $e^{ax^2+by^2}$ yoğunluklu Öklid uzayında, keyfi parametrelili $\alpha(u) = (x(u), y(u), 0)$ eğrisinin ağırlıklı eğriliğinin sıfır (φ -doğrusal) olması için gerek ve yeter şart

$$x'(u)y''(u) + 2ax(u)y'(u)(x'(u)^2 + y'(u)^2) = x''(u)y'(u) + 2bx'(u)y(u)(x'(u)^2 + y'(u)^2) \quad (3.1.35)$$

olmasıdır.

Aşağıda, $e^{ax^2+by^2}$ yoğunluklu Öklid uzayında, a ve b nin durumlarına göre keyfi parametrelili $\alpha(u) = (x(u), y(u), 0)$ eğrisinin ağırlıklı eğriliğini sıfır (φ -doğrusal) yapacak yeni eğriler oluşturulmuştur.

i) $a \neq 0$ ve $b = 0$ olsun.

Bu durumda, e^{ax^2} yoğunluklu Öklid uzayında keyfi parametrelili $\alpha(u) = (x(u), y(u), 0)$ eğrisinin ağırlıklı eğriliği; (3.1.34) eşitliği yardımıyla

$$\kappa_\varphi = \frac{x'(u)y''(u) - x''(u)y'(u) + 2ax(u)y'(u)(x'(u)^2 + y'(u)^2)}{(x'(u)^2 + y'(u)^2)^{3/2}}$$

olarak elde edilir.

Sonuç 3.1.9. e^{ax^2} yoğunluklu Öklid uzayında, keyfi parametrelili $\alpha(u) = (x(u), y(u), 0)$ eğrisinin ağırlıklı eğriliği sıfır (φ - doğrusal) dır gerek ve yeter şart

$$x'(u)y''(u) + 2ax(u)y'(u)(x'(u)^2 + y'(u)^2) = x''(u)y'(u) \quad (3.1.36)$$

dır.

Burada (3.1.36) denklemi çözülürse;

$x(u) = 0$ ise; (3.1.36) denklemi bütün $y(u)$ lar için sağlanır.

$x'(u) = 0$, $x(u) \neq 0$ ise; (3.1.36) denklemi $y'(u) = 0$ için sağlanır. Bu çözüm bir nokta belirtir.

$x'(u) \neq 0$ ise; (3.1.36) denklemi $y(u) = c_2 \pm \int_1^u \frac{x'(k)}{\sqrt{-1+c_1e^{2ax(k)^2}}} dk$ için sağlanır,

burada $c_1 > e^{-2ax(k)^2}$ ve $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ dir.

$y'(u) = 0$ ise; (3.1.36) denklemi bütün $x(u)$ lar için sağlanır.

Böylece aşağıdaki teorem verilebilir.

Teorem 3.1.3. e^{ax^2} yoğunluklu Öklid uzayında, keyfi parametrelili $\alpha(u) = (x(u), y(u), 0)$ eğrisinin ağırlıklı eğriliği sıfır (φ - doğrusal) olan eğrileri

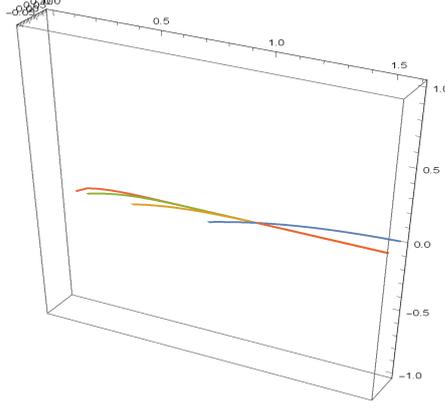
$$\alpha_7(u) = (0, y(u), 0), \quad (3.1.37)$$

$$\alpha_8(u) = \left(x(u), c_2 \pm \int_1^u \frac{x'(k)}{\sqrt{-1+c_1e^{2ax(k)^2}}} dk, 0 \right) \quad (3.1.38)$$

ve

$$\alpha_9(u) = (x(u), c_3, 0) \quad (3.1.39)$$

olarak parametrelendirilebilir, burada $c_1 > e^{-2ax(k)^2}$ ve $c_1, c_2, c_3 \in \mathbb{R}$ dir.



Şekil 3.10: e^{ax^2} yoğunluklu \mathbb{E}^3 de φ -doğrusal eğrileri

Şekil 3.10 $x(u) = \sqrt[4]{u}$, $c_1 = 1, c_2 = 0$ $a = 1, 2000, 4000, 6000$ için e^{ax^2} yoğunluklu Öklid uzayında, keyfi parametrelili $\alpha(u) = (x(u), y(u), 0)$ eğrisinin ağırlıklı eğriliği sıfır (φ -doğrusal) olan (3.1.38) eğrilerini göstermektedir.

ii) $b \neq 0$ ve $a = 0$ olsun.

Bu durumda e^{by^2} yoğunluklu Öklid uzayında keyfi parametrelili $\alpha(u) = (x(u), y(u), 0)$ eğrisinin ağırlıklı eğriliği; (3.1.34) eşitliği yardımıyla

$$\kappa_\varphi = \frac{x'(u)y''(u) - x''(u)y'(u) - 2bx'(u)y(u)(x'(u)^2 + y'(u)^2)}{(x'(u)^2 + y'(u)^2)^{3/2}}$$

olarak elde edilir.

Sonuç 3.1.10. e^{by^2} yoğunluklu Öklid uzayında, keyfi parametrelili $\alpha(u) = (x(u), y(u), 0)$ eğrisinin ağırlıklı eğriliğinin sıfır (φ -doğrusal) olması için gerek ve yeter şart

$$x'(u)y''(u) = x''(u)y'(u) + 2bx'(u)y(u)(x'(u)^2 + y'(u)^2) \quad (3.1.40)$$

olmasıdır.

Burada (3.1.40) denklemi çözülürse;

$x'(u) = 0$ ise; (3.1.40) denklemi bütün $y(u)$ lar için sağlanır.

$y(u) = 0$ ise; (3.1.40) denklemi bütün $x(u)$ lar için sağlanır.

$y'(u) = 0, y(u) \neq 0$ ise; (3.1.40) denklemi bütün $x'(u) = 0$ için sağlanır. Bu çözüm bir nokta belirtir.

$y'(u) \neq 0$ ise; (3.1.40) denklemini $x(u) = c_5 \pm \int_1^u \frac{y'(k)}{\sqrt{-1+c_4e^{2by(k)^2}}} dk$ için sağlanır, burada $c_4 > e^{-2ay(k)^2}$ ve $c_4, c_5 \in \mathbb{R}$ dir.

Teorem 3.1.4. e^{by^2} yoğunluklu Öklid uzayında, keyfi parametrelili $\alpha(u) = (x(u), y(u), 0)$ eğrisinin ağırlıklı eğriliği sıfır (φ – doğrusal) olan eğrileri

$$\alpha_{10}(u) = (c_6, y(u), 0), \quad (3.1.41)$$

$$\alpha_{11}(u) = (x(u), 0, 0) \quad (3.1.42)$$

ve

$$\alpha_{12}(u) = \left(c_5 \pm \int_1^u \frac{y'(k)}{\sqrt{-1+c_4e^{2by(k)^2}}} dk, y(u), 0 \right) \quad (3.1.43)$$

şeklinde parametrelendirilebilir, burada $c_4 > e^{-2ay(k)^2}$ ve $c_4, c_5, c_6 \in \mathbb{R}$ dir.

Sonuç 3.1.11. e^{ax^2} (ve e^{by^2}) yoğunluklu Öklid uzayında, keyfi parametrelili $\alpha(u) = (x(u), y(u), 0)$ eğrisinin ağırlıklı eğriliği sıfır olan (3.1.37), (3.1.39) eğrileri (ve (3.1.41), (3.1.42) eğrileri) yoğunluk katsayısı a 'nın (ve b 'nin) seçiminden bağımsızdır.

Aşağıda, e^{ax^2} ve e^{by^2} yoğunluklu Öklid uzayında, keyfi parametrelili $\alpha(u) = (x(u), y(u), 0)$ eğrisinin ağırlıklı eğriliği sıfır (φ – doğrusal) olan eğrilerin Frenet vektörleri ve Frenet vektörlerinden yararlanarak Smarandache eğrileri oluşturulmuştur. Ayrıca oluşturulan bu Smarandache eğrilerinin Frenet vektörleri ve eğriliği hesaplanmıştır. Burada, yalnızca e^{ax^2} yoğunluklu Öklid uzayında keyfi parametrelili $\alpha(u) = (x(u), y(u), 0)$ eğrisinin ağırlıklı eğriliği sıfır (φ –doğrusal) olan (3.1.38) eğrisi için çalışma yapılmıştır. Çünkü e^{by^2} yoğunluklu Öklid uzayında, keyfi parametrelili $\alpha(u) = (x(u), y(u), 0)$ eğrisinin ağırlıklı eğriliği sıfır (φ –doğrusal) olan (3.1.43) eğrisi; (3.1.38) eğrisi için yapılan çalışmadakilere benzer işlemlerle yakın sonuçlar vermekte ve (3.1.37), (3.1.39), (3.1.41), (3.1.42) eğrileri ise birer doğru belirttiğinden yapılacak işlemlerin sonuçları kolayca hesaplanabilir.

e^{ax^2} yoğunluklu Öklid uzayında, keyfi parametrelili $\alpha(u) = (x(u), y(u), 0)$ eğrisinin ağırlıklı eğriliği sıfır (φ -doğrusal) olan (3.1.38) eğrisi

$$\alpha_8(u) = \left(x(u), c_2 + \int_1^u \frac{x'(k)}{\sqrt{-1 + c_1 e^{2ax(k)^2}}} dk, 0 \right)$$

olarak alınır, bu durumda Frenet vektörleri ve eğriliği

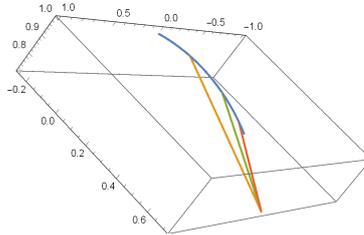
$$\begin{aligned} T_{\alpha_8} &= \left(\sqrt{\frac{-1 + c_1 e^{2ax(u)^2}}{c_1 e^{2ax(u)^2}}}, \frac{1}{\sqrt{c_1 e^{2ax(u)^2}}}, 0 \right), \\ N_{\alpha_8} &= \left(-\frac{1}{\sqrt{c_1 e^{2ax(u)^2}}}, \sqrt{\frac{-1 + c_1 e^{2ax(u)^2}}{c_1 e^{2ax(u)^2}}}, 0 \right), \\ B_{\alpha_8} &= (0, 0, 1) \end{aligned} \quad (3.1.44)$$

ve

$$\kappa_{\alpha_8} = \frac{2 |ax(u)|}{\sqrt{c_1 e^{2ax(u)^2}}}$$

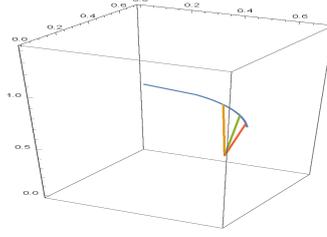
olarak bulunur. Böylece (3.1.44) eşitliğinden, (3.1.38) eğrisinin TN -Smarandache $\gamma_{TN\alpha_8}$, TB -Smarandache $\gamma_{TB\alpha_8}$, NB -Smarandache $\gamma_{NB\alpha_8}$ ve TNB -Smarandache $\gamma_{TNB\alpha_8}$ eğrileri, sırasıyla

$$\gamma_{TN\alpha_8} = \left(\frac{\sqrt{-1 + c_1 e^{2ax(u)^2}} - 1}{\sqrt{2c_1 e^{2ax(u)^2}}}, \frac{\sqrt{-1 + c_1 e^{2ax(u)^2}} + 1}{\sqrt{2c_1 e^{2ax(u)^2}}}, 0 \right), \quad (3.1.45)$$



Şekil 3.11: (3.1.38) eğrisinin TN -Smarandache eğrisi

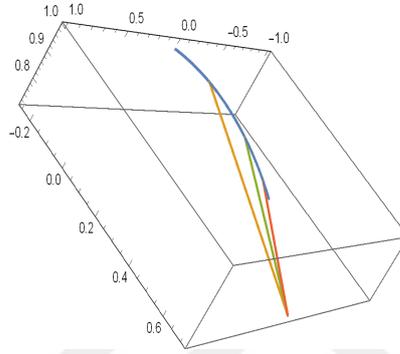
$$\gamma_{TB\alpha_8} = \left(\frac{\sqrt{-1 + c_1 e^{2ax(u)^2}}}{\sqrt{2c_1 e^{2ax(u)^2}}}, \frac{1}{\sqrt{2c_1 e^{2ax(u)^2}}}, \frac{1}{\sqrt{2}} \right), \quad (3.1.46)$$



Şekil 3.12: (3.1.38) eğrisinin TB-Smarandache eğrisi

$$\gamma_{NB\alpha_8} = \left(\frac{-1}{\sqrt{2c_1e^{2ax(u)^2}}}, \frac{\sqrt{-1 + c_1e^{2ax(u)^2}}}{\sqrt{2c_1e^{2ax(u)^2}}}, \frac{1}{\sqrt{2}} \right) \quad (3.1.47)$$

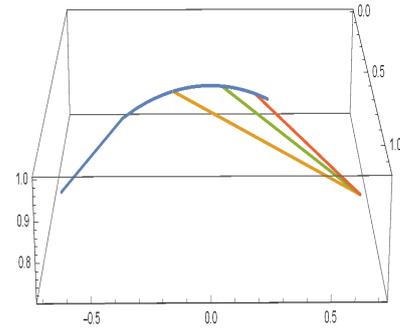
ve



Şekil 3.13: (3.1.38) eğrisinin NB-Smarandache eğrisi

$$\gamma_{TNB\alpha_8} = \left(\frac{\sqrt{-1 + c_1e^{2ax(u)^2}} - 1}{\sqrt{3c_1e^{2ax(u)^2}}}, \frac{\sqrt{-1 + c_1e^{2ax(u)^2}} + 1}{\sqrt{3c_1e^{2ax(u)^2}}}, \frac{1}{\sqrt{3}} \right) \quad (3.1.48)$$

şeklinde oluşturulur.



Şekil 3.14: (3.1.38) eğrisinin TNB-Smarandache eğrisi

Şekil 3.11, 3.12, 3.13 ve 3.14, $y(u) = \arccos(e^u)$, $c_1 = 1$, $a = 1, 2000, 4000, 6000$ için e^{ax^2} yoğunluklu Öklid uzayında, keyfi parametrelili $\alpha(u) = (x(u), y(u), 0)$

eğrisinin ağırlıklı eğriliği sıfır (φ -doğrusal) olan (3.1.38) eğrilerinin Smarandache eğrilerini göstermektedir.

Böylece;

- TN -Smarandache $\gamma_{TN\alpha_1}$ eğrisinin Frenet vektörleri ve eğriliği

$$T_{\gamma_{TN\alpha_8}} = \left(\frac{1 + \sqrt{-1 + c_1 e^{2ax(u)^2}}}{\sqrt{2c_1 e^{2ax(u)^2}}}, \frac{-1 + \sqrt{-1 + c_1 e^{2ax(u)^2}}}{\sqrt{2c_1 e^{2ax(u)^2}}}, 0 \right),$$

$$N_{\gamma_{TN\alpha_8}} = \left(\frac{1 - \sqrt{-1 + c_1 e^{2ax(u)^2}}}{\sqrt{2c_1 e^{2ax(u)^2}}}, \frac{1 + \sqrt{-1 + c_1 e^{2ax(u)^2}}}{\sqrt{2c_1 e^{2ax(u)^2}}}, 0 \right),$$

$$B_{\gamma_{TN\alpha_8}} = (0, 0, 1)$$

ve

$$\kappa_{\gamma_{TN\alpha_8}} = 1$$

dir.

- TB -Smarandache $\gamma_{TB\alpha_1}$ eğrisinin Frenet vektörleri ve eğriliği

$$T_{\gamma_{TB\alpha_8}} = \left(\frac{1}{\sqrt{c_1 e^{2ax(u)^2}}}, -\frac{\sqrt{-1 + c_1 e^{2ax(u)^2}}}{\sqrt{c_1 e^{2ax(u)^2}}}, 0 \right),$$

$$N_{\gamma_{TB\alpha_8}} = \left(\frac{\sqrt{-1 + c_1 e^{2ax(u)^2}}}{\sqrt{c_1 e^{2ax(u)^2}}}, \frac{1}{\sqrt{c_1 e^{2ax(u)^2}}}, 0 \right),$$

$$B_{\gamma_{TB\alpha_8}} = (0, 0, 1)$$

ve

$$\kappa_{\gamma_{TB\alpha_8}} = \sqrt{2}$$

dir.

- NB -Smarandache $\gamma_{NB\alpha_1}$ eğrisinin Frenet vektörleri ve eğriliği

$$T_{\gamma_{NB\alpha_8}} = \left(\frac{\sqrt{-1 + c_1 e^{2ax(u)^2}}}{\sqrt{c_1 e^{2ax(u)^2}}}, \frac{1}{\sqrt{c_1 e^{2ax(u)^2}}}, 0 \right),$$

$$N_{\gamma_{NB\alpha_8}} = \left(-\frac{1}{\sqrt{c_1 e^{2ax(u)^2}}}, \frac{\sqrt{-1 + c_1 e^{2ax(u)^2}}}{\sqrt{c_1 e^{2ax(u)^2}}}, 0 \right),$$

$$B_{\gamma_{NB\alpha_8}} = (0, 0, 1)$$

ve

$$\kappa_{\gamma_{NB\alpha_8}} = \sqrt{2}$$

dir.

- TNB –Smarandache $\gamma_{TNB\alpha_1}$ eğrisinin Frenet vektörleri ve eğriliği

$$T_{\gamma_{TNB\alpha_8}} = \left(\frac{1 + \sqrt{c_1 e^{2ax(u)^2} - 1}}{\sqrt{2c_1 e^{2ax(u)^2}}}, \frac{1 - \sqrt{c_1 e^{2ax(u)^2} - 1}}{\sqrt{2c_1 e^{2ax(u)^2}}}, 0 \right),$$

$$N_{\gamma_{TNB\alpha_8}} = \left(\frac{\sqrt{c_1 e^{2ax(u)^2} - 1} - 1}{\sqrt{2c_1 e^{2ax(u)^2}}}, \frac{1 + \sqrt{c_1 e^{2ax(u)^2} - 1}}{\sqrt{2c_1 e^{2ax(u)^2}}}, 0 \right),$$

$$B_{\gamma_{TNB\alpha_8}} = (0, 0, 1)$$

ve

$$\kappa_{\gamma_{TNB\alpha_1}} = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}$$

dir.

Sonuç 3.1.12. e^{ax^2} yoğunluklu Öklid uzayında, keyfi parametrelili $\alpha(u) = (x(u), y(u), 0)$ eğrisinin ağırlıklı eğriliği sıfır (φ –doğrusal) olan (3.1.38) eğrisinin; TN –Smarandache $\gamma_{TN\alpha_8}$, TB –Smarandache $\gamma_{TB\alpha_8}$, NB –Smarandache $\gamma_{NB\alpha_8}$ ve TNB –Smarandache $\gamma_{TNB\alpha_8}$ eğrilerinin herbirinin eğrilikleri sabit olup yoğunluk katsayısı olan a 'nın seçiminden bağımsızdır.

3.2 Yoğunluklu Lorentz-Minkowski Uzayında Eğriler

Bu kısımda, ilk olarak e^{ax+by} yoğunluklu Lorentz-Minkowski düzleminde birim hızlı bir eğrinin ağırlıklı eğriliğinin sabit olduğu durumlar incelenmiştir. Ardından e^{ax+by} ve $e^{ax^2+by^2}$ yoğunluklu Lorentz-Minkowski uzayında keyfi parametrelili bir eğrinin ağırlıklı eğriliğini sıfır yapan yeni eğriler elde edilip, bu yeni eğrilerin Smarandache eğrileri bulunarak bazı karakterizasyonlar verilmiştir.

3.2.1 e^{ax+by} Yoğunluklu \mathbb{E}_1^2 Düzleminde Birim Hızlı Eğriler

Bu alt kısımda e^φ yoğunluklu \mathbb{E}_1^2 de birim hızlı spacelike ve timelike eğriler incelenerek bazı karakterizasyonlar verilecektir.

İlk olarak $\alpha(u) = (x(u), y(u))$ Lorentz-Minkowski düzleminde birim hızlı spacelike bir eğri olsun. $\alpha(u)$ eğrisinin teğet vektörü, normal vektörü ve eğriliği, sırasıyla

$$T = (x'(u), y'(u)),$$

$$N = (y'(u), x'(u)),$$

$$\kappa = x''(u)y'(u) - x'(u)y''(u)$$

dir. Ayrıca, $\varphi = ax + by$ için e^φ yoğunluğunda φ nin gradyant vektörü

$$\nabla\varphi = (a, b)$$

olarak hesaplanır ve (1.0.2) eşitliğinden

$$\frac{d\varphi}{dN} = -ay'(u) + bx'(u)$$

dir. Buradan birim hızlı spacelike $\alpha(u)$ eğrisinin ağırlıklı eğriliği, (1.0.2) den

$$\kappa_\varphi = x''(u)y'(u) - x'(u)y''(u) + ay'(u) - bx'(u)$$

olarak bulunur.

Sonuç 3.2.1. e^{ax+by} yoğunluklu \mathbb{E}_1^2 de birim hızlı spacelike $\alpha(u) = (x(u), y(u))$ eğrisinin ağırlıklı eğriliğinin sabit olması için

$$x''(u)y'(u) - x'(u)y''(u) + ay'(u) - bx'(u) = c \quad (3.2.1)$$

eşitliğinin sağlanması gerekmektedir, burada $c \in \mathbb{R}$ dir.

\mathbb{E}_1^2 de birim hızlı spacelike $\alpha(u) = (x(u), y(u))$ eğrisinde

$$x'(u) = \sinh(g(u)), \quad (3.2.2)$$

$$y'(u) = \cosh(g(u))$$

olarak alınırsa (3.2.1) eşitliği

$$\kappa_\varphi = a \cosh(g(u)) - b \sinh(g(u)) + g'(u) = c \quad (3.2.3)$$

şeklinde bulunur.

Burada en az birisi sıfırdan farklı olan a ve b sabitlerinin durumlarına göre yoğunluklu Lorentz-Minkowski düzleminde ağırlıklı eğriliği sabit olan spacelike eğriler elde edilmiştir.

i) a = b olsun.

Bu durumda (3.2.3) eşitliği yeniden düzenlenirse

$$a \cosh(g(u)) - a \sinh(g(u)) + g'(u) = c$$

ya da

$$a \left(\frac{e^{g(u)} + e^{-g(u)}}{2} \right) - a \left(\frac{e^{g(u)} - e^{-g(u)}}{2} \right) + g'(u) = c$$

veya

$$ae^{-g(u)} + g'(u) = c$$

ve buradan da

$$g'(u)e^{g(u)} = ce^{g(u)} - a \quad (3.2.4)$$

olarak bulunur.

Burada (3.2.4) eşitliği $c = 0$ ve $c \neq 0$ durumlarına göre çözümlenerek spacelike eğriler elde edilecektir.

c = 0 için (3.2.4) eşitliğinin çözümü:

Bu durumda (3.2.4) eşitliği

$$g'(u)e^{g(u)} = -a$$

veya

$$d(e^{g(u)}) = -adu \quad (3.2.5)$$

olarak elde edilir. (3.2.5) eşitliğinin her iki tarafının integrali alındığında

$$e^{g(u)} = k_1 - au \quad (3.2.6)$$

olur, burada $k_1 \in \mathbb{R}$ dir. Ayrıca (3.2.2) ve (3.2.6) eşitliklerinden

$$\left. \begin{aligned} x'(u) &= \frac{(k_1-au)^2-1}{2(k_1-au)} \\ y'(u) &= \frac{(k_1-au)^2+1}{2(k_1-au)} \end{aligned} \right\} \quad (3.2.7)$$

elde edilir. (3.2.7) eşitliğinin her iki tarafının integrali alındıktan sonra gerekli düzenlemeler yapılırsa, $x(u)$ ve $y(u)$ bileşenleri

$$\left. \begin{aligned} x(u) &= \frac{k_1u}{2} - \frac{au^2}{4} + \frac{\ln(k_1-au)}{2a} + k_2 \\ y(u) &= \frac{k_1u}{2} - \frac{au^2}{4} - \frac{\ln(k_1-au)}{2a} + k_3 \end{aligned} \right\} \quad (3.2.8)$$

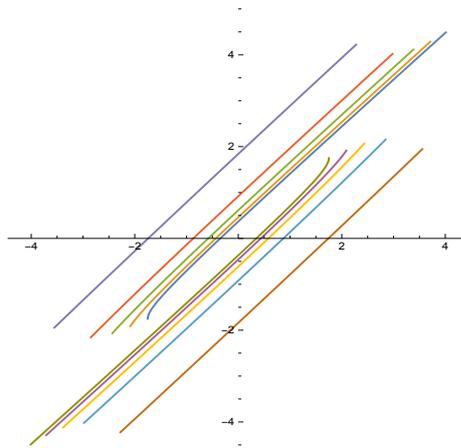
olarak hesaplanır, burada $k_2, k_3 \in \mathbb{R}$ ve $k_1 - au > 0$ dir.

Böylece (3.2.8) eşitliğinden aşağıdaki teorem verilebilir:

Teorem 3.2.1. $e^{a(x+y)}$ yoğunluklu Lorentz-Minkowski düzleminde ağırlıklı eğriliği sıfır (φ - doğrusal) olan birim hızlı spacelike eğrisi

$$\alpha_1(u) = \left(\frac{au(2k_1 - au) + 2 \ln(k_1 - au)}{4a} + k_2, \frac{au(2k_1 - au) - 2 \ln(k_1 - au)}{4a} + k_3 \right) \quad (3.2.9)$$

şeklinde parametrelendirilebilir, burada $k_1, k_2, k_3 \in \mathbb{R}$ ve $k_1 - au > 0$ dir.



Şekil 3.15: $e^{a(x+y)}$ yoğunluklu \mathbb{E}_1^2 de spacelike φ -doğrusal eğrileri

Şekil 3.15 de $k_1 = 6$, $k_2 = k_3 = 0$ ve $a = -5, -4, -3, -2, -1, 1, 2, 3, 4, 5$ için $e^{a(x+y)}$ yoğunluklu Lorentz-Minkowski düzleminde ağırlıklı eğriliği sıfır (φ -doğrusal) olan birim hızlı spacelike (3.2.9) eğrileri gösterilmiştir.

$c \neq 0$ için (3.2.4) eşitliğinin çözümü:

İlk olarak $g'(u) = 0$ kabul edilip (3.2.4) eşitliği yeniden yazılırsa

$$e^{g(u)} = \frac{a}{c} \quad (3.2.10)$$

olur. Ayrıca (3.2.2) ve (3.2.10) eşitliklerinden

$$\left. \begin{aligned} x'(u) &= \frac{a^2 - c^2}{2ac} \\ y'(u) &= \frac{a^2 + c^2}{2ac} \end{aligned} \right\} \quad (3.2.11)$$

elde edilir ve (3.2.11) eşitliğinin her iki tarafının integrali alındığında

$$\left. \begin{aligned} x(u) &= \frac{a^2 - c^2}{2ac} u + k_4 \\ y(u) &= \frac{a^2 + c^2}{2ac} u + k_5 \end{aligned} \right\} \quad (3.2.12)$$

olarak hesaplanır, burada $k_4, k_5 \in \mathbb{R}$ ve $\frac{a}{c} > 0$ dir.

Ayrıca $g'(u) \neq 0$ kabul edilip (3.2.4) eşitliği yeniden yazılırsa

$$g'(u)e^{g(u)} = c \left(e^{g(u)} - \frac{a}{c} \right)$$

veya

$$\frac{d(e^{g(u)})}{e^{g(u)} - \frac{a}{c}} = c du \quad (3.2.13)$$

elde edilir. (3.2.13) eşitliğinde her iki tarafın integrali alındığında

$$\left| e^{g(u)} - \frac{a}{c} \right| = e^{cu + k_6}$$

eşitliği bulunur, burada $k_6 \in \mathbb{R}$ dir. Buradan

$$e^{g(u)} = \frac{a}{c} + e^{cu + k_6} \quad (3.2.14)$$

ve

$$e^{g(u)} = \frac{a}{c} - e^{cu + k_6} \quad (3.2.15)$$

dir. Ayrıca (3.2.14) ve (3.2.15) eşitlikleri (3.2.2) eşitliğinde yerine yazılırsa

$$\left. \begin{aligned} x'(u) &= \frac{\frac{a}{c} + e^{cu+k_6} - \frac{1}{\frac{a}{c} + e^{cu+k_6}}}{2} \\ y'(u) &= \frac{\frac{a}{c} + e^{cu+k_6} + \frac{1}{\frac{a}{c} + e^{cu+k_6}}}{2} \end{aligned} \right\} \quad (3.2.16)$$

ve

$$\left. \begin{aligned} x'(u) &= \frac{\frac{a}{c} - e^{cu+k_6} - \frac{1}{\frac{a}{c} - e^{cu+k_6}}}{2} \\ y'(u) &= \frac{\frac{a}{c} - e^{cu+k_6} + \frac{1}{\frac{a}{c} - e^{cu+k_6}}}{2} \end{aligned} \right\} \quad (3.2.17)$$

eşitlikleri elde edilir. Burada (3.2.16) ve (3.2.17) eşitliklerinde her iki tarafın integralleri alınır, sırasıyla

$$\left. \begin{aligned} x(u) &= \frac{a}{2c}u + \frac{e^{cu+k_6}}{2c} + \frac{\ln|ae^{-cu} + ce^{k_6}|}{2a} + k_7 \\ y(u) &= \frac{a}{2c}u + \frac{e^{cu+k_6}}{2c} - \frac{\ln|ae^{-cu} + ce^{k_6}|}{2a} + k_8 \end{aligned} \right\} \quad (3.2.18)$$

ve

$$\left. \begin{aligned} x(u) &= \frac{a}{2c}u - \frac{e^{cu+k_6}}{2c} + \frac{\ln|ae^{-cu} - ce^{k_6}|}{2a} + k_9 \\ y(u) &= \frac{a}{2c}u - \frac{e^{cu+k_6}}{2c} - \frac{\ln|ae^{-cu} - ce^{k_6}|}{2a} + k_{10} \end{aligned} \right\} \quad (3.2.19)$$

olarak hesaplanır. (3.2.18) eşitliğinde $\frac{ae^{-cu}}{c} > -e^{k_6}$ ve $k_7, k_8 \in \mathbb{R}$ dir ve (3.2.19) eşitliğinde ise $\frac{ae^{-cu}}{c} > e^{k_6}$ ve $k_9, k_{10} \in \mathbb{R}$ dir.

Böylece (3.2.12), (3.2.18) ve (3.2.19) eşitliklerinden aşağıdaki teorem elde edilir.

Teorem 3.2.2. $e^{a(x+y)}$ yoğunluklu Lorentz-Minkowski düzleminde ağırlıklı eğriliği sıfırdan farklı sabit ($\kappa_\varphi = c \neq 0$) olan birim hızlı spacelike eğriler aşağıdaki gibi parametrelendirilebilir:

i) Eğimi $\frac{a^2+c^2}{a^2-c^2}$ olan

$$\alpha_2(u) = \left(\frac{a^2 - c^2}{2ac}u + k_4, \frac{a^2 + c^2}{2ac}u + k_5 \right)$$

bir doğrudur. $a = c$ olduğunda $\alpha_2(u)$ doğrusunun eğimi ∞ , yani y - eksenine paralel bir doğru olur, burada $\frac{a}{c} > 0$ and $k_i \in \mathbb{R}$, $i = 4, 5$ dir.

ii)

$$\alpha_3(u) = \left(\frac{au + e^{cu+k_6}}{2c} + \frac{\ln|ae^{-cu} + ce^{k_6}|}{2a} + k_7, \frac{au + e^{cu+k_6}}{2c} - \frac{\ln|ae^{-cu} + ce^{k_6}|}{2a} + k_8 \right),$$

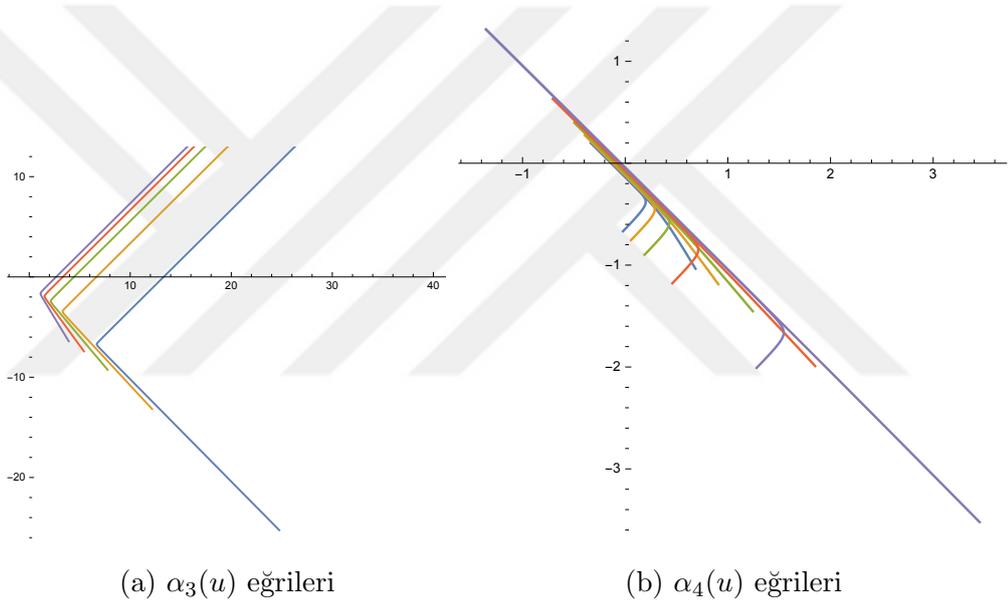
burada $\frac{ae^{-cu}}{c} > -e^{k_6}$ ve $k_i \in \mathbb{R}$, $i = 6, 7, 8$ dir.

iii)

$$\alpha_4(u) = \left(\frac{au - e^{cu+k_6}}{2c} + \frac{\ln |ae^{-cu} - ce^{k_6}|}{2a} + k_9, \frac{au - e^{cu+k_6}}{2c} - \frac{\ln |ae^{-cu} - ce^{k_6}|}{2a} + k_{10} \right),$$

burada $\frac{ae^{-cu}}{c} > e^{k_6}$ ve $k_i \in \mathbb{R}$, $i = 6, 9, 10$ dir.

Şekil 3.16 (a) ve (b) de, sırasıyla, $c = 10$, $k_6 = 11$, $k_7 = k_8 = 0$, $a = 1, 2, 3, 4, 5$ ve $c = 10$, $k_6 = 1$, $k_9 = k_{10} = 0$, $a = 1, 2, 3, 4, 5$ için $e^{a(x+y)}$ yoğunluklu Lorentz-Minkowski düzleminde ağırlıklı eğriliği sıfırdan farklı sabit ($\kappa_\varphi = c \neq 0$) olan birim hızlı spacelike $\alpha_3(u)$ ve $\alpha_4(u)$ eğrileri gösterilmektedir.



Şekil 3.16: $e^{a(x+y)}$ yoğunluklu \mathbb{E}_1^2 de ($\kappa_\varphi = c \neq 0$) spacelike eğrileri

ii) **a ≠ 0, b = 0 olsun.**

Bu durumda (3.2.3) eşitliği yeniden düzenlenirse

$$a(e^{g(u)} + e^{-g(u)}) + 2g'(u) = 2c \quad (3.2.20)$$

olur. (3.2.20) eşitliğinde her iki taraf $e^{g(u)}$ ile çarpılır ve düzenlenirse

$$2g'(u)e^{g(u)} = a \left(\frac{2ce^{g(u)}}{a} - e^{2g(u)} - 1 \right) \quad (3.2.21)$$

olarak bulunur. (3.2.21) eşitliğinde sağ tarafa $\frac{c^2}{a^2}$ eklenip çıkartıldığında

$$2g'(u)e^{g(u)} = a \left(\frac{c^2}{a^2} - 1 - \left(e^{g(u)} - \frac{c}{a} \right)^2 \right) \quad (3.2.22)$$

eşitliği bulunur.

Burada (3.2.22) eşitliği $c = a$, $c = -a$, $\frac{c}{a} > 1$, $\frac{c}{a} < -1$ ve $-1 < \frac{c}{a} < 1$ durumlarına göre çözümlenerek spacelike eğriler elde edilecektir.

c = a için (3.2.22) eşitliğinin çözümü:

Eğer $g'(u) = 0$ kabul edilirse (3.2.22) eşitliği

$$e^{g(u)} = 1$$

olur ve (3.2.2) eşitliğinden

$$\left. \begin{aligned} x(u) &= k_{11} \\ y(u) &= u + k_{12} \end{aligned} \right\} \quad (3.2.23)$$

elde edilir, burada $k_{11}, k_{12} \in \mathbb{R}$ dir.

Eğer $g'(u) \neq 0$ kabul edilir ve (3.2.22) eşitliği yeniden düzenlenirse

$$2g'(u)e^{g(u)} = -a \left(e^{g(u)} - \frac{c}{a} \right)^2$$

veya

$$\frac{2d(e^{g(u)})}{(e^{g(u)} - 1)^2} = -adu \quad (3.2.24)$$

eşitliği elde edilir. (3.2.24) eşitliğinin her iki tarafının integrali alınır ve gerekli işlemler yapılırsa

$$e^{g(u)} = \frac{2}{au - k_{13}} + 1 \quad (3.2.25)$$

olarak hesaplanır, burada $k_{13} \in \mathbb{R}$ dir. Ayrıca (3.2.2) ve (3.2.25) eşitliklerinden

$$\left. \begin{aligned} x'(u) &= \frac{\left(\frac{2}{au-k_{13}}+1\right)^2-1}{2\left(\frac{2}{au-k_{13}}+1\right)} \\ y'(u) &= \frac{\left(\frac{2}{au-k_{13}}+1\right)^2+1}{2\left(\frac{2}{au-k_{13}}+1\right)} \end{aligned} \right\} \quad (3.2.26)$$

elde edilir ve (3.2.26) dan

$$\left. \begin{aligned} x(u) &= \frac{\ln|au-k_{13}|}{a} + \frac{\ln|au-k_{13}+2|}{a} + k_{14} \\ y(u) &= u + \frac{\ln|au-k_{13}|}{a} - \frac{\ln|au-k_{13}+2|}{a} + k_{15} \end{aligned} \right\} \quad (3.2.27)$$

olarak bulunur, burada $au - k_{13} \in \mathbb{R} - [-2, 0]$ ve $k_{14}, k_{15} \in \mathbb{R}$ dir.

Böylece (3.2.23) ve (3.2.27) eşitliklerinden aşağıdaki teorem elde edilir.

Teorem 3.2.3. e^{ax} yoğunluklu Lorentz-Minkowski düzleminde ağırlıklı eğriliği sabit ve a ya eşit ($\kappa_\varphi = c = a$) olan birim hızlı spacelike eğrileri:

i) $k_{11}, k_{12} \in \mathbb{R}$ için eğimi ∞ , yani y - eksenine paralel olan

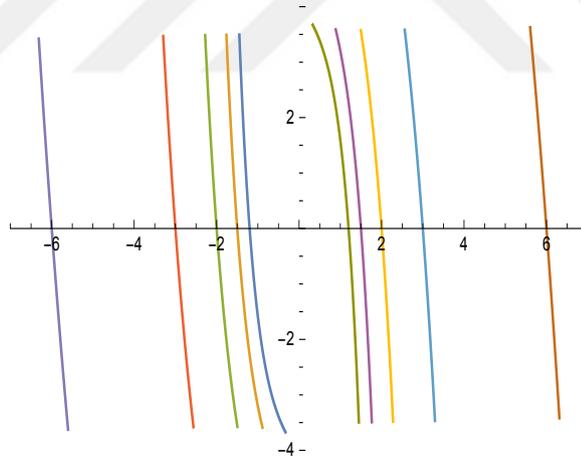
$$\alpha_5(u) = (k_{11}, u + k_{12})$$

bir doğrudur.

ii)

$$\alpha_6(u) = \left(\frac{\ln((au - k_{13})(au - k_{13} + 2))}{a} + k_{14}, \frac{au + \ln\left(\frac{au - k_{13}}{au - k_{13} + 2}\right)}{a} + k_{15} \right) \quad (3.2.28)$$

dir, burada $au - k_{13} \in \mathbb{R} - [-2, 0]$ ve $k_i \in \mathbb{R}$, $i = 13, 14, 15$ dir.



Şekil 3.17: e^{ax} yoğunluklu \mathbb{E}_1^2 de ($\kappa_\varphi = c = a$) spacelike eğrileri

Şekil 3.17, $k_{13} = 21$, $k_{14} = k_{15} = 0$, $a = c = -5, -4, -3, -2, -1, 1, 2, 3, 4, 5$ için e^{ax} yoğunluklu Lorentz-Minkowski düzleminde ağırlıklı eğriliği sabit ve a ya eşit ($\kappa_\varphi = c = a$) olan birim hızlı (3.2.28) spacelike eğrileri göstermiştir.

$c = -a$ için (3.2.22) eşitliğinin çözümü:

İlk olarak $g'(u) = 0$ kabul edilip (3.2.22) eşitliği yeniden yazılırsa

$$e^{g(u)} = -1$$

olur, bu ise mümkün değildir.

Ayrıca, $g'(u) \neq 0$ için (3.2.22) eşitliği

$$2g'(u)e^{g(u)} = -a \left(e^{g(u)} - \frac{c}{a} \right)^2$$

veya

$$\frac{2d \left(e^{g(u)} \right)}{\left(e^{g(u)} + 1 \right)^2} = -adu \quad (3.2.29)$$

olarak hesaplanır. (3.2.29) eşitliğinin her iki tarafının integrali alınır ve gerekli işlemler yapıldığında

$$e^{g(u)} = \frac{2}{au - k_{16}} - 1 \quad (3.2.30)$$

olarak hesaplanır, burada $k_{16} \in \mathbb{R}$ dir. Ayrıca (3.2.2) ve (3.2.30) eşitliklerinden

$$\left. \begin{aligned} x'(u) &= \frac{\left(\frac{2}{au - k_{16}} - 1 \right)^2 - 1}{2 \left(\frac{2}{au - k_{16}} - 1 \right)} \\ y'(u) &= \frac{\left(\frac{2}{au - k_{16}} - 1 \right)^2 + 1}{2 \left(\frac{2}{au - k_{16}} - 1 \right)} \end{aligned} \right\} \quad (3.2.31)$$

ve buradan

$$\left. \begin{aligned} x(u) &= \frac{\ln(au - k_{16})}{a} + \frac{\ln(k_{16} + 2 - au)}{a} + k_{17} \\ y(u) &= \frac{\ln(au - k_{16})}{a} - \frac{\ln(k_{16} + 2 - au)}{a} - u + k_{18} \end{aligned} \right\} \quad (3.2.32)$$

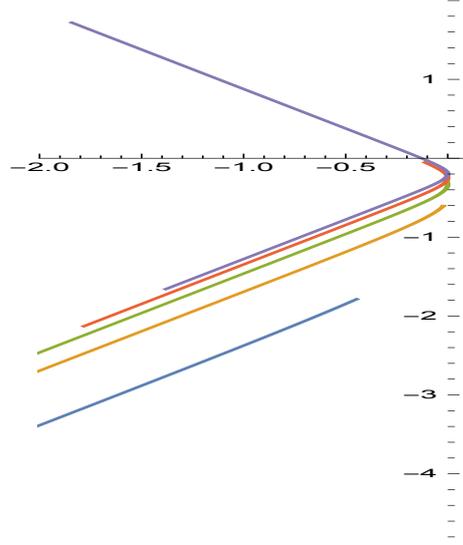
olarak elde edilir, burada $au - k_{16} \in (0, 2)$ ve $k_{17}, k_{18} \in \mathbb{R}$ dir.

Böylece (3.2.32) eşitliğinden aşağıdaki teorem verilir.

Teorem 3.2.4. $c = -a$ için e^{ax} yoğunluklu Lorentz-Minkowski düzleminde ağırlıklı eğriliği sabit ($\kappa_\varphi = c = -a$) olan birim hız spacelike eğrisi

$$\alpha_7(u) = \left(\frac{\ln((au - k_{16})(k_{16} + 2 - au))}{a} + k_{17}, \frac{\ln\left(\frac{au - k_{16}}{k_{16} + 2 - au}\right)}{a} - u + k_{18} \right)$$

şeklinde parametrelendirilebilir, burada $au - k_{16} \in (0, 2)$ ve $k_{16}, k_{17}, k_{18} \in \mathbb{R}$ dir.



Şekil 3.18: e^{ax} yoğunluklu \mathbb{E}_1^2 de ($\kappa_\varphi = c = -a$) spacelike eğrileri

Şekil 3.18 da $k_{16} = k_{17} = k_{18} = 0$, $c = -a = -5, -4, -3, -2, -1$ ve $c = -a$ için e^{ax} yoğunluklu Lorentz-Minkowski düzleminde ağırlıklı eğriliği sabit ($\kappa_\varphi = c = -a$) olan birim hızlı spacelike eğrileri gösterilmiştir.

$\frac{c}{a} > 1$ için (3.2.22) eşitliğinin çözümü:

İlk olarak $g'(u) = 0$ kabul edilip (3.2.22) eşitliği yeniden yazılırsa

$$-a \left(\left(e^{g(u)} - \frac{c}{a} \right)^2 + 1 - \frac{c^2}{a^2} \right) = 0$$

veya

$$e^{g(u)} = \frac{c}{a} \pm \sqrt{\left(\frac{c}{a}\right)^2 - 1} \quad (3.2.33)$$

olur. Böylece (3.2.2) ve (3.2.33) eşitliklerinden

$$\left. \begin{aligned} x'(u) &= \frac{\frac{c}{a} \pm \sqrt{\left(\frac{c}{a}\right)^2 - 1} - \frac{1}{\frac{c}{a} \pm \sqrt{\left(\frac{c}{a}\right)^2 - 1}}}{2} \\ y'(u) &= \frac{\frac{c}{a} \pm \sqrt{\left(\frac{c}{a}\right)^2 - 1} + \frac{1}{\frac{c}{a} \pm \sqrt{\left(\frac{c}{a}\right)^2 - 1}}}{2} \end{aligned} \right\} \quad (3.2.34)$$

elde edilir. (3.2.34) eşitliklerinin her iki tarafının integrali alınırsa

$$\left. \begin{aligned} x(u) &= \left(\frac{\frac{c}{a} \pm \sqrt{\left(\frac{c}{a}\right)^2 - 1} - \frac{1}{\frac{c}{a} \pm \sqrt{\left(\frac{c}{a}\right)^2 - 1}}}{2} \right) u + k_{19} \\ y(u) &= \left(\frac{\frac{c}{a} \pm \sqrt{\left(\frac{c}{a}\right)^2 - 1} + \frac{1}{\frac{c}{a} \pm \sqrt{\left(\frac{c}{a}\right)^2 - 1}}}{2} \right) u + k_{20} \end{aligned} \right\} \quad (3.2.35)$$

olarak hesaplanır, burada $k_{19}, k_{20} \in \mathbb{R}$ dir.

Ayrıca $g'(u) \neq 0$ için (3.2.22) eşitliği

$$\frac{2g'(u)e^{g(u)}}{(e^{g(u)} - \frac{c}{a})^2 + 1 - \frac{c^2}{a^2}} = -a$$

veya

$$\left(\frac{1}{e^{g(u)} - \frac{c}{a} - \sqrt{\frac{c^2}{a^2} - 1}} - \frac{1}{e^{g(u)} - \frac{c}{a} + \sqrt{\frac{c^2}{a^2} - 1}} \right) \frac{g'(u)e^{g(u)}}{\sqrt{\frac{c^2}{a^2} - 1}} = -a$$

ya da

$$\left(\frac{1}{e^{g(u)} - \frac{c}{a} - \sqrt{\frac{c^2}{a^2} - 1}} - \frac{1}{e^{g(u)} - \frac{c}{a} + \sqrt{\frac{c^2}{a^2} - 1}} \right) d(e^{g(u)}) = -a\sqrt{\frac{c^2}{a^2} - 1} du \quad (3.2.36)$$

olur. (3.2.36) eşitliğinin her iki tarafının integrali alınır ve düzenlenirse

$$\left| \frac{e^{g(u)} - \frac{c}{a} - \sqrt{\frac{c^2}{a^2} - 1}}{e^{g(u)} - \frac{c}{a} + \sqrt{\frac{c^2}{a^2} - 1}} \right| = e^{-ua\sqrt{\frac{c^2}{a^2} - 1} + k_{21}}$$

eşitliği elde edilir, burada $k_{21} \in \mathbb{R}$ dir. Buradan

$$\frac{e^{g(u)} - \frac{c}{a} - \sqrt{\frac{c^2}{a^2} - 1}}{e^{g(u)} - \frac{c}{a} + \sqrt{\frac{c^2}{a^2} - 1}} = e^{-ua\sqrt{\frac{c^2}{a^2} - 1} + k_{21}} \quad (3.2.37)$$

ve

$$\frac{e^{g(u)} - \frac{c}{a} - \sqrt{\frac{c^2}{a^2} - 1}}{e^{g(u)} - \frac{c}{a} + \sqrt{\frac{c^2}{a^2} - 1}} = -e^{-ua\sqrt{\frac{c^2}{a^2} - 1} + k_{21}} \quad (3.2.38)$$

dir. (3.2.37) ve (3.2.38) eşitliklerinde gerekli düzenlemeler yapılırsa

$$e^{g(u)} = \frac{\left(\sqrt{\frac{c^2}{a^2} - 1} - \frac{c}{a} \right) e^{-a\sqrt{\frac{c^2}{a^2} - 1}u + k_{21}} + \frac{c}{a} + \sqrt{\frac{c^2}{a^2} - 1}}{\left(1 - e^{-a\sqrt{\frac{c^2}{a^2} - 1}u + k_{21}} \right)} \quad (3.2.39)$$

ve

$$e^{g(u)} = \frac{\left(\frac{c}{a} - \sqrt{\frac{c^2}{a^2} - 1} \right) e^{-a\sqrt{\frac{c^2}{a^2} - 1}u + k_{21}} + \frac{c}{a} + \sqrt{\frac{c^2}{a^2} - 1}}{\left(1 + e^{-a\sqrt{\frac{c^2}{a^2} - 1}u + k_{21}} \right)} \quad (3.2.40)$$

olarak bulunur. Ayrıca $m = \sqrt{\frac{c^2}{a^2} - 1}$ ve $n = \frac{c}{a}$ olmak üzere (3.2.2), (3.2.39) eşitliklerinden

$$\left. \begin{aligned} x'(u) &= \frac{\frac{(m-n)e^{-amu+k_{21}+n+m}}{1-e^{-amu+k_{21}}} - \frac{1-e^{-amu+k_{21}}}{(m-n)e^{-amu+k_{21}+n+m}}}{2} \\ y'(u) &= \frac{\frac{(m-n)e^{-amu+k_{21}+n+m}}{1-e^{-amu+k_{21}}} + \frac{1-e^{-amu+k_{21}}}{(m-n)e^{-amu+k_{21}+n+m}}}{2} \end{aligned} \right\} \quad (3.2.41)$$

benzer olarak (3.2.2), (3.2.40) eşitliklerinden de

$$\left. \begin{aligned} x'(u) &= \frac{\frac{(n-m)e^{-amu+k_{21}+n+m}}{1+e^{-amu+k_{21}}} - \frac{1+e^{-amu+k_{21}}}{(n-m)e^{-amu+k_{21}+n+m}}}{2} \\ y'(u) &= \frac{\frac{(n-m)e^{-amu+k_{21}+n+m}}{1+e^{-amu+k_{21}}} + \frac{1+e^{-amu+k_{21}}}{(n-m)e^{-amu+k_{21}+n+m}}}{2}, \end{aligned} \right\} \quad (3.2.42)$$

elde edilir.

İlk olarak (3.2.41) eşitliklerinin her iki tarafının integrali alınır ve gerekli işlemler yapılırsa

$$\begin{aligned} 2x(u) &= \int \left(\frac{(m-n)e^{-amu+k_{21}+n+m}}{1-e^{-amu+k_{21}}} - \frac{1-e^{-amu+k_{21}}}{(m-n)e^{-amu+k_{21}+n+m}} \right) du, \\ 2y(u) &= \int \left(\frac{(m-n)e^{-amu+k_{21}+n+m}}{1-e^{-amu+k_{21}}} + \frac{1-e^{-amu+k_{21}}}{(m-n)e^{-amu+k_{21}+n+m}} \right) du \end{aligned}$$

veya

$$\begin{aligned} 2x(u) &= \int \left(\frac{(m+n)(1-e^{-amu+k_{21}}) + 2me^{-amu+k_{21}}}{1-e^{-amu+k_{21}}} \right) du - \\ &\int \left(\frac{1}{m+n} \left(\frac{m+n+(m-n)e^{-amu+k_{21}} - 2me^{-amu+k_{21}}}{(m-n)e^{-amu+k_{21}+n+m}} \right) \right) du \\ 2y(u) &= \int \left(\frac{(m+n)(1-e^{-amu+k_{21}}) + 2me^{-amu+k_{21}}}{1-e^{-amu+k_{21}}} \right) du + \\ &\int \left(\frac{1}{m+n} \left(\frac{m+n+(m-n)e^{-amu+k_{21}} - 2me^{-amu+k_{21}}}{(m-n)e^{-amu+k_{21}+n+m}} \right) \right) du \end{aligned}$$

ve burdanda

$$\begin{aligned} 2x(u) &= \int \left((m+n) + \frac{2}{a} \left(\frac{ame^{-amu+k_{21}}}{1-e^{-amu+k_{21}}} \right) \right) du - \\ &\int \left(\frac{1}{m+n} + \frac{2}{a(m+n)(m-n)} \left(\frac{-a(m-n)me^{-amu+k_{21}}}{(m-n)e^{-amu+k_{21}+n+m}} \right) \right) du \end{aligned}$$

$$2y(u) = \int \left((m+n) + \frac{2}{a} \left(\frac{ame^{-amu+k_{21}}}{1-e^{-amu+k_{21}}} \right) \right) du + \int \left(\frac{1}{m+n} + \frac{2}{a(m+n)(m-n)} \left(\frac{-a(m-n)me^{-amu+k_{21}}}{(m-n)e^{-amu+k_{21}} + n+m} \right) \right) du$$

eşitlikleri bulunur. Bu eşitliklerden de

$$2x(u) = (m+n)u + \frac{2}{a} \ln |1 - e^{-amu+k_{21}}| - \frac{u}{m+n} + \frac{2}{a} \ln |m+n + (m-n)e^{-amu+k_{21}}| + 2k_{22}, \quad (3.2.43)$$

$$2y(u) = (m+n)u + \frac{2}{a} \ln |1 - e^{-amu+k_{21}}| + \frac{u}{m+n} - \frac{2}{a} \ln |m+n + (m-n)e^{-amu+k_{21}}| + 2k_{23}$$

olduğu görülür, burada $(1 - e^{-amu+k_{21}})$ ile $(m+n + (m-n)e^{-amu+k_{21}})$ sayıları aynı işaretlidir ve $k_{22}, k_{23} \in \mathbb{R}$ dir.

Benzer olarak (3.2.42) eşitliklerinin her iki tarafının integrali alındığında

$$2x(u) = \int \left(\frac{(m+n)(1 + e^{-amu+k_{21}}) - 2me^{-amu+k_{21}}}{1 + e^{-amu+k_{21}}} \right) du - \int \left(\frac{1}{m+n} \left(\frac{m+n + (n-m)e^{-amu+k_{21}} + 2me^{-amu+k_{21}}}{(n-m)e^{-amu+k_{21}} + n+m} \right) \right) du,$$

$$2y(u) = \int \left(\frac{(m+n)(1 + e^{-amu+k_{21}}) - 2me^{-amu+k_{21}}}{1 + e^{-amu+k_{21}}} \right) du + \int \left(\frac{1}{m+n} \left(\frac{m+n + (n-m)e^{-amu+k_{21}} + 2me^{-amu+k_{21}}}{(n-m)e^{-amu+k_{21}} + n+m} \right) \right) du$$

veya

$$2x(u) = \int \left((m+n) + \frac{2}{a} \left(\frac{-ame^{-amu+k_{21}}}{1 + e^{-amu+k_{21}}} \right) - \frac{1}{m+n} \right) du + \int \left(\frac{2}{a(m+n)(n-m)} \left(\frac{-a(n-m)me^{-amu+k_{21}}}{(n-m)e^{-amu+k_{21}} + n+m} \right) \right) du,$$

$$2y(u) = \int \left((m+n) + \frac{2}{a} \left(\frac{-ame^{-amu+k_{21}}}{1 + e^{-amu+k_{21}}} \right) + \frac{1}{m+n} \right) du - \int \left(\frac{2}{a(m+n)(n-m)} \left(\frac{-a(n-m)me^{-amu+k_{21}}}{(n-m)e^{-amu+k_{21}} + n+m} \right) \right) du$$

olur ve $k_{24}, k_{25} \in \mathbb{R}$ için

$$2x(u) = (m+n)u + \frac{2}{a} \ln |1 + e^{-amu+k_{21}}| - \frac{u}{m+n} \quad (3.2.44)$$

$$+ \frac{2}{a} \ln |m+n + (n-m)e^{-amu+k_{21}}| + 2k_{24} \quad (3.2.45)$$

$$2y(u) = (m+n)u + \frac{2}{a} \ln |1 + e^{-amu+k_{21}}| + \frac{u}{m+n} \\ - \frac{2}{a} \ln |m+n + (n-m)e^{-amu+k_{21}}| + 2k_{25}$$

olarak hesaplanır.

Böylece (3.2.35), (3.2.43) ve (3.2.44) eşitliklerinden aşağıdaki teorem elde edilir.

Teorem 3.2.5. $m = \sqrt{\frac{c^2}{a^2} - 1}$, $n = \frac{c}{a}$ ve $\frac{c}{a} > 1$ olmak üzere, e^{ax} yoğunluklu Lorentz-Minkowski düzleminde ağırlıklı eğriliği sabit ($\kappa_\varphi = c$) olan birim hızlı spacelike eğrileri:

i) Eğriliği $\frac{(n \pm m)^2 + 1}{(n \pm m)^2 - 1}$ olan

$$\alpha_8(u) = \left(\left(\frac{n \pm m - \frac{1}{n \pm m}}{2} \right) u + k_{19}, \left(\frac{n \pm m + \frac{1}{n \pm m}}{2} \right) u + k_{20} \right) \quad (3.2.46)$$

bir doğrudur, burada $k_{19}, k_{20} \in \mathbb{R}$ dir.

ii)

$$\alpha_9(u) = \left(\begin{array}{l} \frac{u}{2} \left(n + m - \frac{1}{n+m} \right) + \frac{\ln((1-e^{k_{21}-amu})(n(1-e^{k_{21}-amu})+m(1+e^{k_{21}-amu})))}{a} + k_{22}, \\ \frac{u}{2} \left(n + m + \frac{1}{n+m} \right) + \frac{\ln(\frac{1-e^{k_{21}-amu}}{n(1-e^{k_{21}-amu})+m(1+e^{k_{21}-amu})})}{a} + k_{23} \end{array} \right) \quad (3.2.47)$$

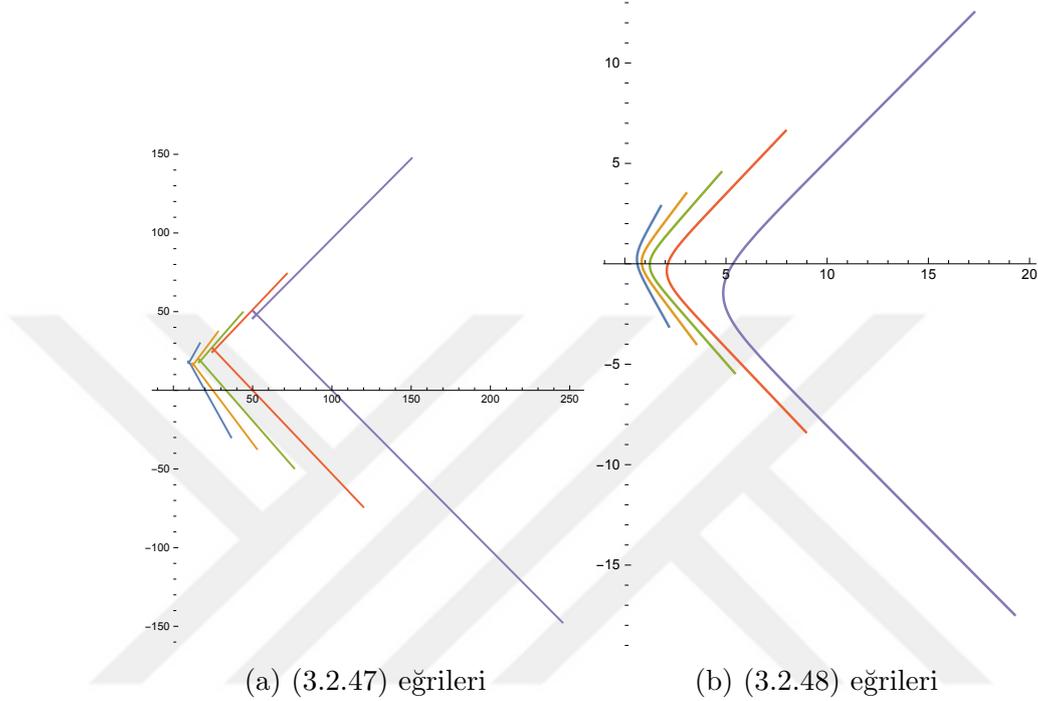
dir, burada $k_{21}, k_{22}, k_{23} \in \mathbb{R}$ ve $(1 - e^{-amu+k_{21}})$ ile $(m+n + (m-n)e^{-amu+k_{21}})$ sayıları aynı işaretlidir.

iii)

$$\alpha_{10}(u) = \left(\begin{array}{l} \frac{u}{2} \left(n + m - \frac{1}{n+m} \right) + \left(\frac{\ln(1+e^{k_{21}-amu}) + \ln|n(1+e^{k_{21}-amu})+m(1-e^{k_{21}-amu})|}{a} \right) + k_{24}, \\ \frac{u}{2} \left(n + m + \frac{1}{n+m} \right) + \left(\frac{\ln(1+e^{k_{21}-amu}) - \ln|n(1+e^{k_{21}-amu})+m(1-e^{k_{21}-amu})|}{a} \right) + k_{25} \end{array} \right) \quad (3.2.48)$$

dir, burada $k_{21}, k_{24}, k_{25} \in \mathbb{R}$ dir.

Şekil 3.19 (a) ve (b) de, sırasıyla $\frac{c}{a} > 1$ iken $c = 6, k_{21} = 50, k_{22} = k_{23} = 0,$
 $a = 1, 2, 3, 4, 5$ ve $c = 6, k_{21} = 1, k_{24} = k_{25} = 0, a = 1, 2, 3, 4, 5$ için e^{ax} yoğunluklu
 Lorentz-Minkowski düzleminde ağırlıklı eğriliği ($\kappa_\varphi = c$) sıfırdan farklı sabit olan
 birim hızlı spacelike (3.2.47) ve (3.2.48) eğrileri gösterilmektedir.



Şekil 3.19: $\frac{c}{a} > 1$ için e^{ax} yoğunluklu \mathbb{E}_1^2 de ($\kappa_\varphi = c$) spacelike eğrileri

$\frac{c}{a} < -1$ için (3.2.22) eşitliğinin çözümü:

Bu durumda $\frac{c}{a} > 1$ durumuna benzer işlemler yapılırsa; sırasıyla (3.2.37),
 (3.2.39), (3.2.41) ve (3.2.43) eşitlikleri kolaylıkla elde edilir. Böylece

Teorem 3.2.6. $m = \sqrt{\frac{c^2}{a^2} - 1}, n = \frac{c}{a}$ iken; $\frac{c}{a} < -1$ için e^{ax} yoğunluklu Lorentz-Minkowski
 düzleminde ağırlıklı eğriliği sabit ($\kappa_\varphi = c$) olan birim hızlı spacelike eğrileri
 (3.2.47) ile verilir.

$-1 < \frac{c}{a} < 1$ için (3.2.22) eşitliğinin çözümü:

İlk olarak $g'(u) = 0$ kabul edilip (3.2.22) eşitliği yeniden yazılırsa

$$\left(e^{g(u)} - \frac{c}{a}\right)^2 = \left(\frac{c}{a}\right)^2 - 1$$

olur, bu da mümkün değildir.

Ayrıca $g'(u) \neq 0$ kabul edilir ve (3.2.22) eşitliği yeniden düzenlendiğinde

$$\frac{2g'(u)e^{g(u)}}{(e^{g(u)} - \frac{c}{a})^2 + 1 - \frac{c^2}{a^2}} = -a$$

veya

$$\frac{2d(e^{g(u)})}{\left(\sqrt{1 - \frac{c^2}{a^2}}\right)^2 \left(\left(\frac{e^{g(u)} - \frac{c}{a}}{\sqrt{1 - \frac{c^2}{a^2}}}\right)^2 + 1\right)} = -adu. \quad (3.2.49)$$

olarak hesaplanır. (3.2.49) eşitliğinin her iki tarafının integrali alınırsa

$$\frac{1}{\sqrt{1 - \frac{c^2}{a^2}}} 2 \arctan \left(\frac{e^{g(u)} - \frac{c}{a}}{\sqrt{1 - \frac{c^2}{a^2}}} \right) = k_{26} - au$$

elde edilir ve gerekli işlemler yapıldığında

$$e^{g(u)} = \sqrt{1 - \frac{c^2}{a^2}} \tan \left(\frac{\sqrt{1 - \frac{c^2}{a^2}} (k_{26} - au)}{2} \right) + \frac{c}{a} \quad (3.2.50)$$

olur, burada $k_{26} \in \mathbb{R}$ dir. (3.2.2), (3.2.50) eşitliklerinden

$$\left. \begin{aligned} x'(u) &= \frac{\left(r \tan\left(\frac{r(k_{26}-au)}{2}\right) + n\right)^2 - 1}{2\left(r \tan\left(\frac{r(k_{26}-au)}{2}\right) + n\right)} \\ y'(u) &= \frac{\left(r \tan\left(\frac{r(k_{26}-au)}{2}\right) + n\right)^2 + 1}{2\left(r \tan\left(\frac{r(k_{26}-au)}{2}\right) + n\right)}, \end{aligned} \right\} \quad (3.2.51)$$

olarak hesaplanır, burada $r = \sqrt{1 - \frac{c^2}{a^2}}$ ve $n = \frac{c}{a}$ olarak alınmıştır. (3.2.51)

eşitliğinin her iki tarafının integrali alınırsa

$$\left. \begin{aligned} x(u) &= \frac{nk_{26} + 2 \ln \left| \cos\left(\frac{r(k_{26}-au)}{2}\right) \right| + 2 \ln \left| \left(n \cos\left(\frac{r(k_{26}-au)}{2}\right) + r \sin\left(\frac{r(k_{26}-au)}{2}\right)\right) \right|}{2a} + k_{27} \\ y(u) &= \frac{n(2au - k_{26}) + 2 \ln \left| \cos\left(\frac{r(k_{26}-au)}{2}\right) \right| - 2 \ln \left| \left(n \cos\left(\frac{r(k_{26}-au)}{2}\right) + r \sin\left(\frac{r(k_{26}-au)}{2}\right)\right) \right|}{2a} + k_{28} \end{aligned} \right\} \quad (3.2.52)$$

olur, burada $k_{27}, k_{28} \in \mathbb{R}$ dir.

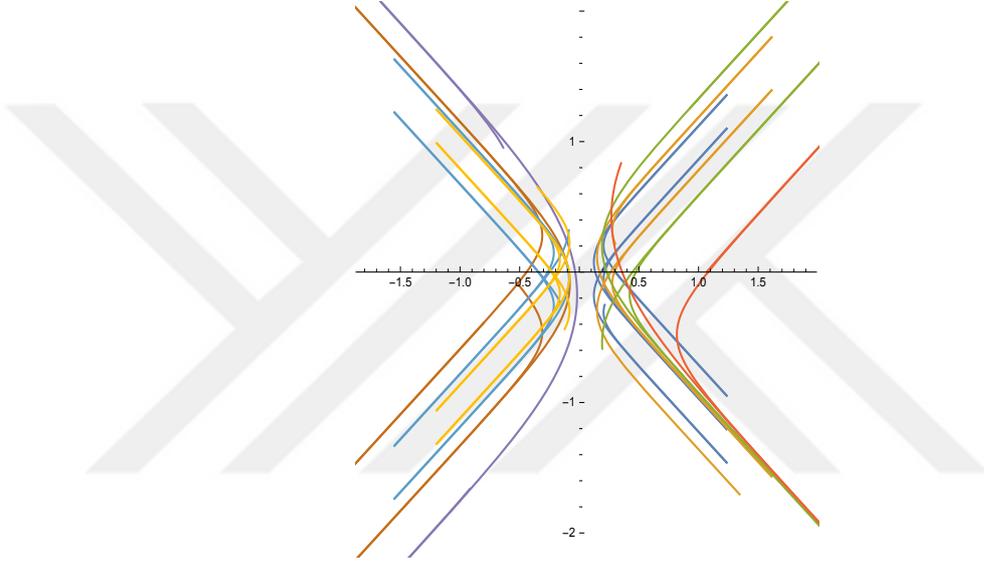
Teorem 3.2.7. $r = \sqrt{1 - \frac{c^2}{a^2}}$, $n = \frac{c}{a}$ ve $-1 < \frac{c}{a} < 1$ olmak üzere e^{ax} yoğunluklu Lorentz-Minkowski düzleminde ağırlıklı eğriliği sabit ($\kappa_\varphi = c$) olan birim hızlı

spacelike eğrisi aşağıdaki gibidir

$$\alpha_{11}(u) = \left(\begin{array}{c} \frac{nk_{26} + 2 \ln \left| \cos\left(\frac{r(k_{26}-au)}{2}\right) \right| + 2 \ln \left| (n \cos\left(\frac{r(k_{26}-au)}{2}\right) + r \sin\left(\frac{r(k_{26}-au)}{2}\right)) \right|}{2a} + k_{27}, \\ \frac{n(2au - k_{26}) + 2 \ln \left| \cos\left(\frac{r(k_{26}-au)}{2}\right) \right| - 2 \ln \left| (n \cos\left(\frac{r(k_{26}-au)}{2}\right) + r \sin\left(\frac{r(k_{26}-au)}{2}\right)) \right|}{2a} + k_{28} \end{array} \right),$$

burada $\tan\left(\frac{r(k_{26}-au)}{2}\right) > -\frac{n}{r}$ ve $k_i \in \mathbb{R}$, $i = 26, 27, 28$ dir.

Şekil 3.20 de $c = 1, k_{26} = 1, k_{27} = k_{28} = 0, a = -5, -4, -3, -2, 2, 3, 4, 5$ ve $-1 < \frac{c}{a} < 1$ için e^{ax} yoğunluklu Lorentz-Minkowski düzleminde ağırlıklı eğriliği $(\kappa_\varphi = c)$ olan birim hızlı spacelike eğrileri gösterilmektedir.



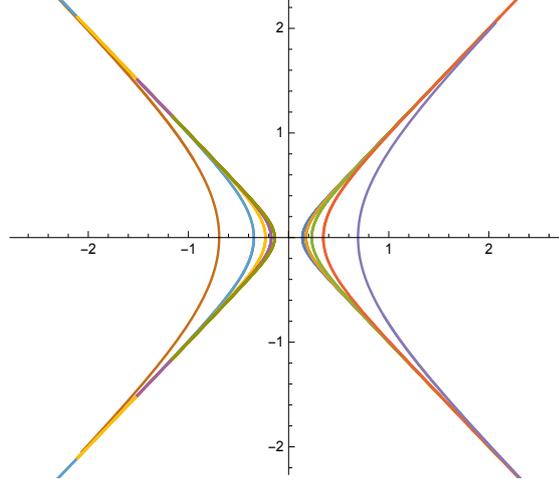
Şekil 3.20: $-1 < \frac{c}{a} < 1$ için e^{ax} yoğunluklu \mathbb{E}_1^2 de $(\kappa_\varphi = c)$ spacelike eğrileri

Sonuç 3.2.2. e^{ax} yoğunluklu Lorentz-Minkowski düzleminde ağırlıklı eğriliği sıfır $(\varphi\text{-doğrusal})$ olan birim hızlı spacelike eğrisi

$$\alpha_{12}(u) = \left(\begin{array}{c} \frac{\ln \left| \frac{\sin(k_{26}-au)}{2} \right|}{a} + k_{27}, \frac{\ln \left| \cot\left(\frac{k_{26}-au}{2}\right) \right|}{a} + k_{28} \end{array} \right)$$

şeklinde parametrelendirilebilir, burada $\tan\left(\frac{r(k_{26}-au)}{2}\right) > -\frac{n}{r}$ ve $k_i \in \mathbb{R}$, $i = 26, 27, 28$ dir.

Şekil 3.21 de $k_{26} = 1, k_{27} = k_{28} = 0, a = -5, -4, -3, -2, -1, 1, 2, 3, 4, 5$ için e^{ax} yoğunluklu Lorentz-Minkowski düzleminde ağırlıklı eğriliği sıfır $(\varphi\text{-doğrusal})$ olan birim hızlı spacelike eğrileri gösterilmektedir.



Şekil 3.21: e^{ax} yoğunluklu \mathbb{E}_1^2 de φ -doğrusal spacelike eğrileri

iii) $\mathbf{b} \neq \mathbf{0}$, $\mathbf{a} = \mathbf{0}$ olsun

Bu durumda (3.2.3) eşitliği

$$g'(u) - b \sinh(g(u)) = c$$

veya

$$2g'(u) - b(e^{g(u)} - e^{-g(u)}) = 2c \quad (3.2.53)$$

olur. (3.2.53) eşitliğinde her iki taraf $e^{g(u)}$ ile çarpılır ve düzenlenirse

$$2g'(u)e^{g(u)} = b \left(\frac{2ce^{g(u)}}{b} + e^{2g(u)} - 1 \right) \quad (3.2.54)$$

eşitliği bulunur. (3.2.54) eşitliğinde sağ tarafa $\frac{c^2}{b^2}$ eklenip çıkartıldığında

$$2g'(u)e^{g(u)} = b \left(\left(e^{g(u)} + \frac{c}{b} \right)^2 - \left(\frac{c^2}{b^2} + 1 \right) \right) \quad (3.2.55)$$

elde edilir.

Burada (3.2.55) eşitliği $c = 0$ ve $c \neq 0$ durumlarına göre çözümlenerek spacelike eğriler elde edilecektir.

$c = 0$ için (3.2.55) eşitliğinin çözümü:

İlk olarak $g'(u) = 0$ kabul edilip (3.2.55) eşitliği yeniden yazılırsa

$$e^{g(u)} = 1$$

olur ve böylece (3.2.2) eşitliklerinden

$$\left. \begin{aligned} x(u) &= k_{29} \\ y(u) &= u + k_{30} \end{aligned} \right\} \quad (3.2.56)$$

elde edilir, burada $k_{29}, k_{30} \in \mathbb{R}$ dir.

Ayrıca $g'(u) \neq 0$ için (3.2.55) eşitliği

$$\frac{2g'(u)e^{g(u)}}{(e^{g(u)})^2 - 1} = b$$

veya

$$\left(\frac{1}{e^{g(u)} - 1} - \frac{1}{e^{g(u)} + 1} \right) d(e^{g(u)}) = bdu$$

olarak hesaplanır ve burada her iki tarafın integrali alınırsa

$$\left| \frac{e^{g(u)} - 1}{e^{g(u)} + 1} \right| = e^{bu+k_{31}} \quad (3.2.57)$$

eşitliği bulunur. (3.2.57) eşitliğinden

$$\frac{e^{g(u)} - 1}{e^{g(u)} + 1} = e^{bu+k_{31}}$$

ve

$$\frac{e^{g(u)} - 1}{e^{g(u)} + 1} = -e^{bu+k_{31}}$$

olduğu kolayca görülür. Buradan da

$$e^{g(u)} = \frac{1 + e^{bu+k_{31}}}{1 - e^{bu+k_{31}}} \quad (3.2.58)$$

ve

$$e^{g(u)} = \frac{1 - e^{bu+k_{31}}}{1 + e^{bu+k_{31}}} \quad (3.2.59)$$

dir. Böylece (3.2.2), (3.2.58) ve (3.2.59) eşitliklerinden

$$\left. \begin{aligned} x'(u) &= \frac{\frac{1+e^{bu+k_{31}}}{1-e^{bu+k_{31}}} - \frac{1-e^{bu+k_{31}}}{1+e^{bu+k_{31}}}}{2} \\ y'(u) &= \frac{\frac{1+e^{bu+k_{31}}}{1-e^{bu+k_{31}}} + \frac{1-e^{bu+k_{31}}}{1+e^{bu+k_{31}}}}{2} \end{aligned} \right\} \quad (3.2.60)$$

ve

$$\left. \begin{aligned} x'(u) &= \frac{\frac{1-e^{bu+k_{31}}}{1+e^{bu+k_{31}}} - \frac{1+e^{bu+k_{31}}}{1-e^{bu+k_{31}}}}{2} \\ y'(u) &= \frac{\frac{1-e^{bu+k_{31}}}{1+e^{bu+k_{31}}} + \frac{1+e^{bu+k_{31}}}{1-e^{bu+k_{31}}}}{2}, \end{aligned} \right\} \quad (3.2.61)$$

olarak hesaplanır.

İlk olarak (3.2.60) eşitliklerinin her iki tarafının integrali alınırsa

$$2x(u) = \int \left(\frac{-1 + e^{bu+k_{31}}}{1 - e^{bu+k_{31}}} + \frac{2}{1 - e^{bu+k_{31}}} + \frac{1 + e^{bu+k_{31}}}{1 + e^{bu+k_{31}}} - \frac{2}{1 + e^{bu+k_{31}}} \right) du,$$

$$2y(u) = \int \left(\frac{-1 + e^{bu+k_{31}}}{1 - e^{bu+k_{31}}} + \frac{2}{1 - e^{bu+k_{31}}} - \frac{1 + e^{bu+k_{31}}}{1 + e^{bu+k_{31}}} + \frac{2}{1 + e^{bu+k_{31}}} \right) du$$

veya

$$2x(u) = \int \left(-1 + \frac{2e^{-bu}}{e^{-bu} - e^{k_{31}}} + 1 - \frac{2e^{-bu}}{e^{-bu} + e^{k_{31}}} \right) du,$$

$$2y(u) = \int \left(-1 + \frac{2e^{-bu}}{e^{-bu} - e^{k_{31}}} - 1 + \frac{2e^{-bu}}{e^{-bu} + e^{k_{31}}} \right) du$$

ya da

$$2x(u) = \int \left(\frac{-2}{b} \left(\frac{-be^{-bu}}{e^{-bu} - e^{k_{31}}} \right) + \frac{2}{b} \left(\frac{-be^{-bu}}{e^{-bu} + e^{k_{31}}} \right) \right) du,$$

$$2y(u) = \int \left(-2 - \frac{2}{b} \left(\frac{-be^{-bu}}{e^{-bu} - e^{k_{31}}} \right) - \frac{2}{b} \left(\frac{-be^{-bu}}{e^{-bu} + e^{k_{31}}} \right) \right) du$$

son olarak da

$$x(u) = \frac{\ln |e^{-bu} + e^{k_{31}}|}{b} - \frac{\ln |e^{-bu} - e^{k_{31}}|}{b} + k_{32}$$

$$y(u) = -u - \frac{\ln |e^{-bu} + e^{k_{31}}|}{b} - \frac{\ln |e^{-bu} - e^{k_{31}}|}{b} + k_{33}$$

elde edilir, burada $bu + k_{31} < 0$ ve $k_{32}, k_{33} \in \mathbb{R}$ dir.

Benzer olarak (3.2.61) eşitliklerinin her iki tarafının integrali alınırsa

$$x(u) = \frac{\ln |e^{-bu} - e^{k_{31}}|}{b} - \frac{\ln |e^{-bu} + e^{k_{31}}|}{b} + k_{34},$$

$$y(u) = -u - \frac{\ln |e^{-bu} + e^{k_{31}}|}{b} - \frac{\ln |e^{-bu} - e^{k_{31}}|}{b} + k_{35}$$

elde edilir, burada $bu + k_{31} < 0$ ve $k_{34}, k_{35} \in \mathbb{R}$ dir.

Teorem 3.2.8. e^{by} yoğunluklu Lorentz-Minkowski düzleminde ağırlıklı eğriliği sıfır (φ -doğrusal) olan birim hızlı spacelike eğrileri:

i) Eğimi ∞ , yani y -ksenine paralel olan

$$\alpha_{13}(u) = (k_{29}, u + k_{30})$$

bir doğrudur, burada $k_{29}, k_{30} \in \mathbb{R}$ dir.

ii)

$$\alpha_{14}(u) = \left(\frac{\ln \left(\frac{e^{-bu} + e^{k_{31}}}{e^{-bu} - e^{k_{31}}} \right)}{b} + k_{32}, -\left(\frac{\ln(e^{-2bu} - e^{2k_{31}})}{b} + u \right) + k_{33} \right), \quad (3.2.62)$$

burada $bu + k_{31} < 0$ ve $k_{32}, k_{33} \in \mathbb{R}$ dir.

iii)

$$\alpha_{15}(u) = \left(\frac{\ln \left(\frac{e^{-bu} - e^{k_{31}}}{e^{-bu} + e^{k_{31}}} \right)}{b} + k_{34}, -\left(\frac{\ln(e^{-2bu} - e^{2k_{31}})}{b} + u \right) + k_{35} \right), \quad (3.2.63)$$

burada $bu + k_{31} < 0$ ve $k_{34}, k_{35} \in \mathbb{R}$ dir.

Şekil 3.22 (a) ve (b) de sırasıyla $k_{31} = -1$, $k_{32} = k_{33} = k_{34} = k_{35} = 0$, $b = -1, -2, -3, -4, -5$ için e^{by} yoğunluklu Lorentz-Minkowski düzleminde ağırlıklı eğriliği sıfır (φ -doğrusal) olan birim hızlı spacelike (3.2.62) ve (3.2.63) eğrileri gösterilmektedir.

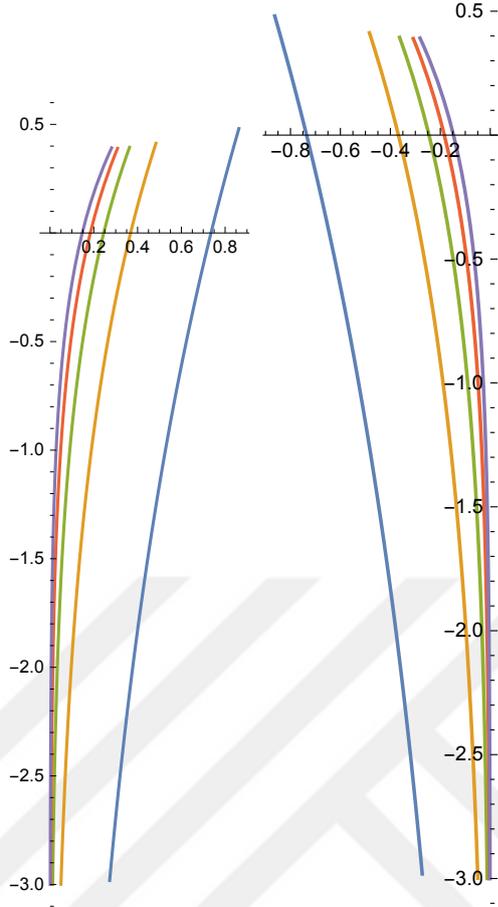
$c \neq 0$ için (3.2.55) eşitliğinin çözümü:

İlk olarak $g'(u) = 0$ kabul edilip (3.2.55) eşitliği yeniden yazıldığında

$$e^{g(u)} = \sqrt{\left(\frac{c}{b}\right)^2 + 1} - \frac{c}{b}$$

elde edilir ve (3.2.2) den

$$\left. \begin{aligned} x'(u) &= \frac{\sqrt{\left(\frac{c}{b}\right)^2 + 1} - \frac{c}{b} - \frac{1}{\sqrt{\left(\frac{c}{b}\right)^2 + 1} - \frac{c}{b}}}{2} \\ y'(u) &= \frac{\sqrt{\left(\frac{c}{b}\right)^2 + 1} - \frac{c}{b} + \frac{1}{\sqrt{\left(\frac{c}{b}\right)^2 + 1} - \frac{c}{b}}}{2} \end{aligned} \right\}$$



(a) (3.2.62) eğrileri (b) (3.2.63) eğrileri

Şekil 3.22: e^{by} yoğunluklu \mathbb{E}_1^2 de φ -doğrusal spacelike eğrileri

olarak bulunur. Burada her iki tarafın integrali alındığında

$$\left. \begin{aligned} 2x(u) &= \left(\sqrt{\left(\frac{c}{b}\right)^2 + 1} - \frac{c}{b} - \frac{1}{\sqrt{\left(\frac{c}{b}\right)^2 + 1} - \frac{c}{b}} \right) u + k_{36} \\ 2y(u) &= \left(\sqrt{\left(\frac{c}{b}\right)^2 + 1} - \frac{c}{b} + \frac{1}{\sqrt{\left(\frac{c}{b}\right)^2 + 1} - \frac{c}{b}} \right) u + k_{37} \end{aligned} \right\} \quad (3.2.64)$$

olur. (3.2.64) eşitliğinde $k_{36}, k_{37} \in \mathbb{R}$ dir.

İkinci olarak $c \neq 0$ için $g'(u) \neq 0$ kabul edilip (3.2.55) eşitliği yeniden düzenlenirse

$$\frac{2g'(u)e^{g(u)}}{(e^{g(u)} + \frac{c}{b})^2 - (\frac{c^2}{b^2} + 1)} = b$$

veya

$$\left(\frac{1}{e^{g(u)} + \frac{c}{b} - \sqrt{\frac{c^2}{b^2} + 1}} - \frac{1}{e^{g(u)} + \frac{c}{b} + \sqrt{\frac{c^2}{b^2} + 1}} \right) \frac{d(e^{g(u)})}{\sqrt{\frac{c^2}{b^2} + 1}} = bdu \quad (3.2.65)$$

olur ve (3.2.65) de her iki tarafının integrali alındığında

$$\left| \frac{e^{g(u)} + \frac{c}{b} - \sqrt{\frac{c^2}{b^2} + 1}}{e^{g(u)} + \frac{c}{b} + \sqrt{\frac{c^2}{b^2} + 1}} \right| = e^{bu\sqrt{\frac{c^2}{b^2} + 1} + k_{39}} \quad (3.2.66)$$

eşitliği bulunur, burada $k_{38}, k_{39} \in \mathbb{R}$ dir. (3.2.66) eşitliği

$$\frac{e^{g(u)} + \frac{c}{b} - \sqrt{\frac{c^2}{b^2} + 1}}{e^{g(u)} + \frac{c}{b} + \sqrt{\frac{c^2}{b^2} + 1}} = e^{bu\sqrt{\frac{c^2}{b^2} + 1} + k_{39}}$$

ve

$$\frac{e^{g(u)} + \frac{c}{b} - \sqrt{\frac{c^2}{b^2} + 1}}{e^{g(u)} + \frac{c}{b} + \sqrt{\frac{c^2}{b^2} + 1}} = -e^{bu\sqrt{\frac{c^2}{b^2} + 1} + k_{39}}$$

şeklinde yazılır. Bu son eşitliklerden

$$e^{g(u)} = \frac{\sqrt{\frac{c^2}{b^2} + 1} - \frac{c}{b} + (\frac{c}{b} + \sqrt{\frac{c^2}{b^2} + 1})e^{b\sqrt{\frac{c^2}{b^2} + 1}u + k_{39}}}{1 - e^{b\sqrt{\frac{c^2}{b^2} + 1}u + k_{39}}} \quad (3.2.67)$$

ve

$$e^{g(u)} = \frac{\sqrt{\frac{c^2}{b^2} + 1} - \frac{c}{b} - (\frac{c}{b} + \sqrt{\frac{c^2}{b^2} + 1})e^{b\sqrt{\frac{c^2}{b^2} + 1}u + k_{39}}}{1 + e^{b\sqrt{\frac{c^2}{b^2} + 1}u + k_{39}}} \quad (3.2.68)$$

olduğu görülür. (3.2.67), (3.2.68) eşitlikleri (3.2.2) eşitliğinde yerine yazıldığında

$$\left. \begin{aligned} x'(u) &= \frac{\frac{s-t+(t+s)e^{bsu+k_{39}}}{1-e^{bsu+k_{39}}} - \frac{1-e^{bsu+k_{39}}}{s-t+(t+s)e^{bsu+k_{39}}}}{2} \\ y'(u) &= \frac{\frac{s-t+(t+s)e^{bsu+k_{39}}}{1-e^{bsu+k_{39}}} + \frac{1-e^{bsu+k_{39}}}{s-t+(t+s)e^{bsu+k_{39}}}}{2} \end{aligned} \right\} \quad (3.2.69)$$

ve

$$\left. \begin{aligned} x'(u) &= \frac{\frac{s-t-(t+s)e^{bsu+k_{39}}}{1+e^{bsu+k_{39}}} - \frac{1+e^{bsu+k_{39}}}{s-t-(t+s)e^{bsu+k_{39}}}}{2} \\ y'(u) &= \frac{\frac{s-t-(t+s)e^{bsu+k_{39}}}{1+e^{bsu+k_{39}}} + \frac{1+e^{bsu+k_{39}}}{s-t-(t+s)e^{bsu+k_{39}}}}{2} \end{aligned} \right\} \quad (3.2.70)$$

olarak hesaplanır. Burada $\sqrt{\frac{c^2}{b^2} + 1} = s$, $\frac{c}{b} = t$ olarak kabul edilmiştir.

İlk olarak (3.2.69) eşitliklerinde her iki tarafın integrali alınırsa

$$2x(u) = \int \left(\frac{-(s+t) + (t+s)e^{bsu+k_{39}} + 2s}{1 - e^{bsu+k_{39}}} \right) du - \int \frac{1}{s+t} \left(\frac{(s+t) - (t+s)e^{bsu+k_{39}}}{(s-t) + (t+s)e^{bsu+k_{39}}} \right) du,$$

$$2y(u) = \int \left(\frac{-(s+t) + (t+s)e^{bsu+k_{39}} + 2s}{1 - e^{bsu+k_{39}}} \right) du + \int \frac{1}{s+t} \left(\frac{(s+t) - (t+s)e^{bsu+k_{39}}}{(s-t) + (t+s)e^{bsu+k_{39}}} \right) du$$

veya

$$2x(u) = \int \left(-(s+t) + \frac{2se^{-bsu}}{e^{-bsu} - e^{k_{39}}} \right) du - \int \frac{1}{s+t} \left(-1 + \frac{2s}{(s-t) + (t+s)e^{bsu+k_{39}}} \right) du,$$

$$2y(u) = \int \left(-(s+t) + \frac{2se^{-bsu}}{e^{-bsu} - e^{k_{39}}} \right) du + \int \frac{1}{s+t} \left(-1 + \frac{2s}{(s-t) + (t+s)e^{bsu+k_{39}}} \right) du$$

ya da

$$2x(u) = \int \left(-(s+t) - \frac{2}{b} \left(\frac{-bse^{-bsu}}{e^{-bsu} - e^{k_{39}}} \right) \right) du - \int \left(-\frac{1}{s+t} - \frac{2}{(s+t)(s-t)b} \left(\frac{-(s-t)bse^{-bsu}}{(s-t)e^{-bsu} + (t+s)e^{k_{39}}} \right) \right) du,$$

$$2y(u) = \int \left(-(s+t) - \frac{2}{b} \left(\frac{-bse^{-bsu}}{e^{-bsu} - e^{k_{39}}} \right) \right) du + \int \left(-\frac{1}{s+t} - \frac{2}{(s+t)(s-t)b} \left(\frac{-(s-t)bse^{-bsu}}{(s-t)e^{-bsu} + (t+s)e^{k_{39}}} \right) \right) du$$

ve böylece

$$2x(u) = -(s+t)u - \frac{2}{b} \ln |e^{-bsu} - e^{k_{39}}| + \frac{u}{s+t} + \frac{2}{b} \ln |(s-t)e^{-bsu} + (t+s)e^{k_{39}}| + k_{40},$$

$$2y(u) = -(s+t)u - \frac{2}{b} \ln |e^{-bsu} - e^{k_{39}}| - \frac{u}{s+t} - \frac{2}{b} \ln |(s-t)e^{-bsu} + (t+s)e^{k_{39}}| + k_{41}$$

elde edilir, burada $bsu + k_{39} < 0$ ve $k_{40}, k_{41} \in \mathbb{R}$ dir.

Benzer olarak (3.2.70) eşitliklerinin her iki tarafının integrali alınır ve gerekli işlemler yapılırsa

$$2x(u) = -(s+t)u - \frac{2}{b} \ln |e^{-bsu} + e^{k_{39}}| + \frac{u}{s+t} + \frac{2}{b} \ln |(s-t)e^{-bsu} - (t+s)e^{k_{39}}| + k_{42},$$

$$2y(u) = -(s+t)u - \frac{2}{b} \ln |e^{-bsu} + e^{k_{39}}| - \frac{u}{s+t} - \frac{2}{b} \ln |(s-t)e^{-bsu} - (t+s)e^{k_{39}}| + k_{43}$$

eşitlikleri elde edilir, burada $\frac{s-t}{s+t} > e^{bsu+k_{39}}$ ve $k_{42}, k_{43} \in \mathbb{R}$ dir.

Teorem 3.2.9. $\sqrt{\frac{c^2}{b^2} + 1} = s$, $\frac{c}{b} = t$ olmak üzere e^{by} yoğunluklu Lorentz-Minkowski düzleminde ağırlıklı eğriliği sıfırdan farklı ($\kappa_\varphi = c \neq 0$) olan birim hızlı spacelike eğrileri:

i) Eğimi $\frac{(s-t)^2+1}{(s-t)^2-1}$ olan

$$\alpha_{16}(u) = \left(\frac{s-t-\frac{1}{s-t}}{2} \right) u + k_{36}, \left(\frac{s-t+\frac{1}{s-t}}{2} \right) u + k_{37}$$

bir doğrudur, burada $k_{36}, k_{37} \in \mathbb{R}$ dir.

ii)

$$\begin{aligned} \alpha_{17}(u) = & \left(\frac{u}{2} \left(\frac{1}{s+t} - t - s \right) - \right. \\ & \frac{1}{b} (\ln(e^{-bsu} - e^{k_{39}}) - \ln((s-t)e^{-bsu} + (t+s)e^{k_{39}})) + k_{40}, \\ & \left. - \frac{u}{2} \left(\frac{1}{s+t} + t + s \right) - \right. \\ & \left. \frac{1}{b} (\ln(e^{-bsu} - e^{k_{39}}) + \ln((s-t)e^{-bsu} + (t+s)e^{k_{39}})) + k_{41} \right) \end{aligned} \quad (3.2.71)$$

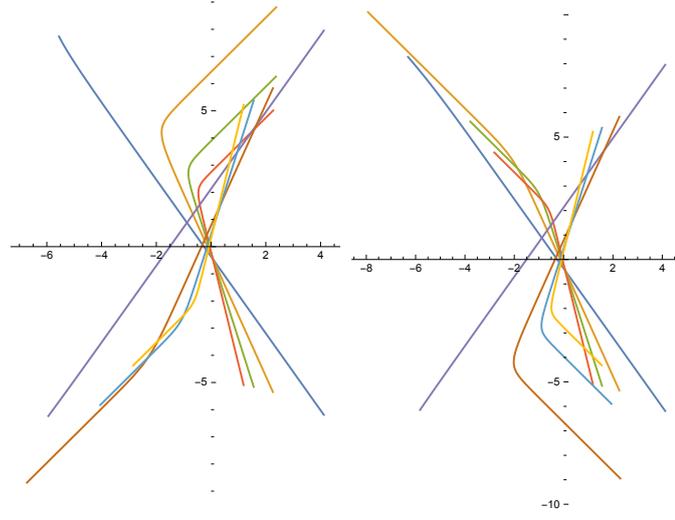
dir, burada $bsu + k_{39} < 0$ ve $k_{40}, k_{41} \in \mathbb{R}$ dir.

iii)

$$\begin{aligned} \alpha_{18}(u) = & \left(\frac{u}{2} \left(\frac{1}{s+t} - t - s \right) - \right. \\ & \frac{1}{b} (\ln |e^{-bsu} - e^{k_{39}}| - \ln |(s-t)e^{-bsu} - (t+s)e^{k_{39}}|) + k_{42}, \\ & \left. - \frac{u}{2} \left(\frac{1}{s+t} + t + s \right) - \right. \\ & \left. \frac{1}{b} (\ln |e^{-bsu} + e^{k_{39}}| + \ln |(s-t)e^{-bsu} - (t+s)e^{k_{39}}|) + k_{43} \right) \end{aligned} \quad (3.2.72)$$

dir, burada $\frac{s-t}{s+t} > e^{bsu+k_{39}}$ ve $k_{42}, k_{43} \in \mathbb{R}$ dir.

Şekil 3.23 (a) ve (b) de, sırasıyla, $c = 1, k_{39} = -10, k_{40} = k_{41} = k_{42} = k_{43} = 0, b = -4, -3, -2, -1, 1, 2, 3, 4$ için e^{by} yoğunluklu Lorentz-Minkowski düzleminde ağırlıklı eğriliği sıfırdan farklı sabit olan birim hızlı spacelike (3.2.71) ve (3.2.72) eğrileri gösterilmektedir.



(a) (3.2.71) eğrileri

(b) (3.2.72) eğrileri

Şekil 3.23: e^{by} yoğunluklu \mathbb{E}_1^2 de $(\kappa_\varphi = c)$ spacelike eğrileri

İkinci olarak $\alpha(u) = (x(u), y(u))$ Lorentz-Minkowski düzleminde birim hızlı timelike bir eğri olsun. $\alpha(u)$ eğrisinin teğet vektörü, normal vektörü ve eğriliği sırasıyla

$$T = (x'(u), y'(u)),$$

$$N = (y'(u), x'(u)),$$

$$\kappa = x'(u)y''(u) - x''(u)y'(u),$$

olup, (1.0.1) ve (1.0.2) eşitliklerinden birim hızlı timelike $\alpha(u)$ eğrisinin ağırlıklı eğriliği

$$\kappa_\varphi = x'(u)y''(u) - x''(u)y'(u) + ay'(u) - bx'(u)$$

olarak hesaplanır.

Sonuç 3.2.3. e^{ax+by} yoğunluklu \mathbb{E}_1^2 de birim hızlı timelike $\alpha(u) = (x(u), y(u))$ eğrisinin ağırlıklı eğriliğinin sabit olması için

$$x'(u)y''(u) - x''(u)y'(u) + ay'(u) - bx'(u) = c \quad (3.2.73)$$

eşitliğinin sağlanması gerekmektedir, burada $c \in \mathbb{R}$ dir.

\mathbb{E}_1^2 de birim hızlı timelike $\alpha(u) = (x(u), y(u))$ eğrisinde

$$\begin{aligned}x'(u) &= \cosh(h(u)), \\y'(u) &= \sinh(h(u))\end{aligned}\tag{3.2.74}$$

olarak alınırsa (3.2.73) eşitliği

$$\kappa_\varphi = h'(u) + a \sinh(h(u)) - b \cosh(h(u)) = c\tag{3.2.75}$$

eşitliğine dönüşür.

Burada en az birisi sıfırdan farklı olan a ve b sabitlerinin durumlarına göre yoğunluklu Lorentz-Minkowski düzleminde ağırlıklı eğriliği sabit olan timelike eğriler oluşturulmuştur.

i) $\mathbf{a} = \mathbf{b}$ olsun.

Bu durumda (3.2.75) eşitliği yeniden düzenlenirse

$$h'(u) + a \left(\frac{e^{h(u)} - e^{-h(u)}}{2} \right) - a \left(\frac{e^{h(u)} + e^{-h(u)}}{2} \right) + g'(u) = c$$

ve buradan da

$$h'(u)e^{h(u)} = ce^{h(u)} + a\tag{3.2.76}$$

olarak bulunur.

(3.2.76) eşitliği $c = 0$ ve $c \neq 0$ durumlarına göre çözümlenerek timelike eğriler elde edilecektir.

$c = 0$ için (3.2.76) eşitliğinin çözümü:

Bu durumda (3.2.76) dan

$$d(e^{h(u)}) = adu\tag{3.2.77}$$

eşitliği elde edilir. (3.2.77) eşitliğinin her iki tarafının integrali alınırsa

$$e^{h(u)} = au + k_{44}\tag{3.2.78}$$

olur, burada $k_{44} \in \mathbb{R}$ dir. Ayrıca (3.2.74) ve (3.2.78) eşitliklerinden

$$\left. \begin{aligned} x'(u) &= \frac{(au+k_{44})^2+1}{2(au+k_{44})} \\ y'(u) &= \frac{(au+k_{44})^2-1}{2(au+k_{44})} \end{aligned} \right\} \quad (3.2.79)$$

elde edilir ve (3.2.79) eşitliğinin her iki tarafının integrali alınırsa

$$\left. \begin{aligned} x(u) &= \frac{k_{44}u}{2} + \frac{au^2}{4} + \frac{\ln(au+k_{44})}{2a} + k_{45} \\ y(u) &= \frac{k_{44}u}{2} + \frac{au^2}{4} - \frac{\ln(au+k_{44})}{2a} + k_{46}, \end{aligned} \right\} \quad (3.2.80)$$

şeklinde hesaplanır, burada $au + k_{44} > 0$ ve $k_{45}, k_{46} \in \mathbb{R}$ dir.

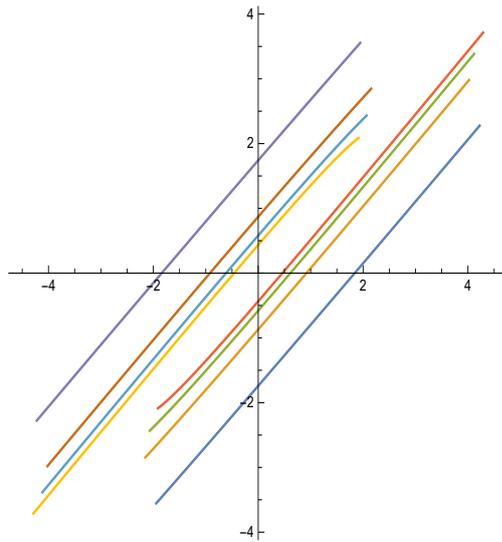
Böylece, (3.2.80) den aşağıdaki teorem elde edilir.

Teorem 3.2.10. $e^{a(x+y)}$ yoğunluklu Lorentz-Minkowski düzleminde ağırlıklı eğriliği sıfır (φ – doğrusal) olan birim hızlı timelike eğri

$$\alpha_{19}(u) = \left(\begin{aligned} &\frac{au(au+2k_{44})+2\ln(au+k_{44})}{4a} + k_{45}, \\ &\frac{au(au+k_{44})-2\ln(au+k_{44})}{4a} + k_{46} \end{aligned} \right) \quad (3.2.81)$$

dir, burada $k_{45}, k_{46} \in \mathbb{R}$ ve $au + k_{44} > 0$ dir.

Şekil 3.24 de $k_{44} = 6$, $k_2 = k_3 = 0$ ve $a = -5, -4, -3, -2, -1, 1, 2, 3, 4, 5$ için $e^{a(x+y)}$ yoğunluklu Lorentz-Minkowski düzleminde ağırlıklı eğriliği sıfır (φ –doğrusal) olan birim hızlı timelike (3.2.81) eğrileri gösterilmiştir.



Şekil 3.24: $e^{a(x+y)}$ yoğunluklu \mathbb{E}_1^2 de φ –doğrusal timelike eğrileri

$c \neq 0$ için (3.2.76) eşitliğinin çözümü:

İlk olarak $h'(u) = 0$ kabul edilip (3.2.76) eşitliği yeniden yazılırsa

$$\left. \begin{aligned} x'(u) &= \frac{-a^2-c^2}{2ac} \\ y'(u) &= \frac{c^2-a^2}{2ac} \end{aligned} \right\} \quad (3.2.82)$$

elde edilir. (3.2.82) eşitliğinin her iki tarafının integrali alındığında, $x(u)$ ve $y(u)$ bileşenleri

$$\left. \begin{aligned} x(u) &= \frac{-a^2-c^2}{2ac}u + k_{47} \\ y(u) &= \frac{c^2-a^2}{2ac}u + k_{48} \end{aligned} \right\} \quad (3.2.83)$$

olarak hesaplanır, burada $\frac{a}{c} < 0$ ve $k_{47}, k_{48} \in \mathbb{R}$ dir.

Ayrıca $h'(u) \neq 0$ kabul edilip (3.2.76) eşitliği yeniden düzenlenirse

$$\frac{d(e^{h(u)})}{e^{h(u)} + \frac{a}{c}} = cdu \quad (3.2.84)$$

elde edilir. (3.2.84) eşitliğinin her iki tarafının integrali alınır ve düzenlenirse

$$e^{h(u)} = e^{cu+k_{49}} - \frac{a}{c} \quad (3.2.85)$$

ve

$$e^{h(u)} = \frac{-a}{c} - e^{cu+k_{49}} \quad (3.2.86)$$

eşitlikleri elde edilir, burada $k_{49} \in \mathbb{R}$ dir. Ayrıca (3.2.85) ve (3.2.86) eşitlikleri (3.2.74) eşitliğinde yerine yazılır ve integralleri alınırsa

$$\left. \begin{aligned} x(u) &= \frac{-a}{2c}u + \frac{e^{cu+k_{49}}}{2c} + \frac{\ln|ce^{k_{49}}-ae^{-cu}|}{2a} + k_{50} \\ y(u) &= \frac{-a}{2c}u + \frac{e^{cu+k_{49}}}{2c} - \frac{\ln|ce^{k_{49}}-ae^{-cu}|}{2a} + k_{51} \end{aligned} \right\} \quad (3.2.87)$$

ve

$$\left. \begin{aligned} x(u) &= \frac{-a}{2c}u - \frac{e^{cu+k_{49}}}{2c} + \frac{\ln|ae^{-cu}+ce^{k_{49}}|}{2a} + k_{52} \\ y(u) &= \frac{-a}{2c}u - \frac{e^{cu+k_{49}}}{2c} - \frac{\ln|ae^{-cu}+ce^{k_{49}}|}{2a} + k_{53} \end{aligned} \right\} \quad (3.2.88)$$

olarak hesaplanır. (3.2.87) eşitliğinde $e^{cu+k_{49}} > \frac{a}{c}$ ve $k_{50}, k_{51} \in \mathbb{R}$ ve (3.2.88) eşitliğinde ise $-e^{cu+k_{49}} > \frac{a}{c}$ ve $k_{52}, k_{53} \in \mathbb{R}$ dir.

Böylece (3.2.83), (3.2.87) ve (3.2.88) eşitliklerinden aşağıdaki teorem elde edilir.

Teorem 3.2.11. $e^{a(x+y)}$ yoğunluklu Lorentz-Minkowski düzleminde ağırlıklı eğriliği sıfırdan farklı sabit ($\kappa_\varphi = c \neq 0$) olan birim hızlı timelike eğrileri:

i) Eğimi $\frac{a^2-c^2}{a^2+c^2}$ olan

$$\alpha_{20}(u) = \left(\frac{-a^2 - c^2}{2ac}u + k_{47}, \frac{c^2 - a^2}{2ac}u + k_{48} \right)$$

bir doğrudur. $a = -c$ olması durumunda $\alpha_{20}(u)$ doğrusunun eğimi ∞ olup $y -$ eksenine paralel bir doğrudur, burada $\frac{a}{c} < 0$ and $k_i \in \mathbb{R}$, $i = 47, 48$ dir.

ii)

$$\alpha_{21}(u) = \left(\frac{e^{cu+k_{49}}-au}{2c} + \frac{\ln|ce^{k_{49}}-ae^{-cu}|}{2a} + k_{50}, \frac{e^{cu+k_{49}}-au}{2c} - \frac{\ln|ce^{k_{49}}-ae^{-cu}|}{2a} + k_{51} \right),$$

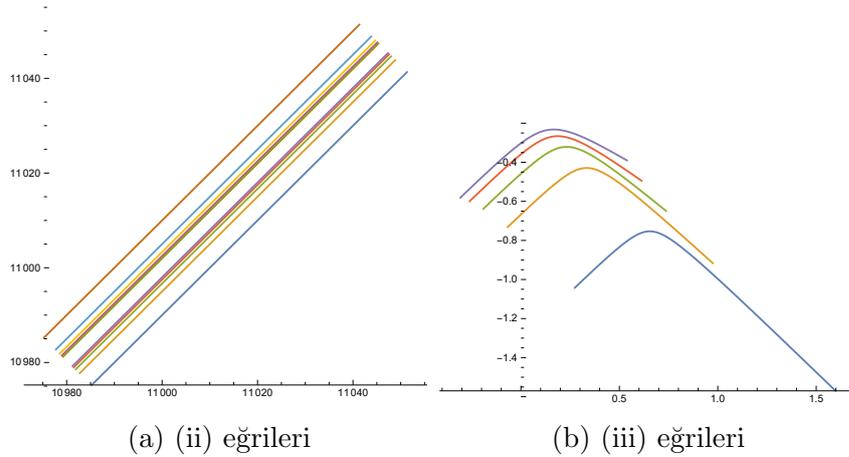
burada $e^{k_{49}} > \frac{ae^{-cu}}{c}$ ve $k_i \in \mathbb{R}$, $i = 49, 50, 51$ dir.

iii)

$$\alpha_{22}(u) = \left(\frac{\ln|ce^{k_{49}}+ae^{-cu}|}{2a} - \frac{e^{cu+k_{49}}+au}{2c} + k_{52}, -\frac{e^{cu+k_{49}}+au}{2c} - \frac{\ln|ce^{k_{49}}+ae^{-cu}|}{2a} + k_{53} \right),$$

burada $-e^{k_{49}} > \frac{ae^{-cu}}{c}$ ve $k_i \in \mathbb{R}$, $i = 49, 52, 53$ dir.

Şekil 3.25 (a) ve (b), sırasıyla $c = 1, k_{49} = 10, k_{50} = k_{51} = 0, a = -5, -4, -3, -2, -1, 1, 2, 3, 4, 5$ ve $c = 10, k_{49} = -1, k_9 = k_{10} = 0, a = 1, 2, 3, 4, 5$ için $e^{a(x+y)}$ yoğunluklu Lorentz-Minkowski düzleminde ağırlıklı eğriliği sıfırdan farklı sabit ($\kappa_\varphi = c \neq 0$) olan birim hızlı timelike eğrilerini göstermektedir.



Şekil 3.25: $e^{a(x+y)}$ yoğunluklu \mathbb{E}_1^2 de ($\kappa_\varphi = c$) timelike eğrileri

ii) $\mathbf{a} \neq \mathbf{0}$, $\mathbf{b} = \mathbf{0}$ olsun.

Bu durumda (3.2.75) eşitliği

$$2h'(u) + a(e^{h(u)} - e^{-h(u)}) = 2c \quad (3.2.89)$$

olur. (3.2.89) eşitliğinde her iki taraf $e^{h(u)}$ ile çarpılır ve sağ tarafa $\frac{c^2}{a^2}$ eklenip çıkartıldıktan sonra gerekli işlemler yapılırsa

$$2h'(u)e^{h(u)} = -a \left(\left(e^{h(u)} - \frac{c}{a} \right)^2 - \left(\frac{c^2}{a^2} + 1 \right) \right) \quad (3.2.90)$$

elde edilir.

Şimdi de (3.2.90) eşitliği $c = 0$ ve $c \neq 0$ durumlarına göre çözümlenerek timelike eğriler elde edilecektir.

$c = 0$ için (3.2.90) eşitliğinin çözümü:

İlk olarak $h'(u) = 0$ olsun. Böylece (3.2.90) eşitliğinden

$$\left. \begin{aligned} x(u) &= u + k_{54} \\ y(u) &= k_{55} \end{aligned} \right\} \quad (3.2.91)$$

elde edilir, burada $k_{54}, k_{55} \in \mathbb{R}$ dir.

İkinci olarak $h'(u) \neq 0$ olsun. Bu durumda (3.2.90) eşitliğinden

$$\left(\frac{1}{e^{h(u)} - 1} - \frac{1}{e^{h(u)} + 1} \right) d(e^{h(u)}) = -adu$$

bulunur ve her iki tarafın integrali alındığında

$$e^{h(u)} = \frac{1 + e^{-au+k_{56}}}{1 - e^{-au+k_{56}}} \quad (3.2.92)$$

ve

$$e^{h(u)} = \frac{1 - e^{-au+k_{56}}}{1 + e^{-au+k_{56}}} \quad (3.2.93)$$

olur. Böylece (3.2.92), (3.2.93) eşitlikleri (3.2.74) eşitliğinde kullanılırsa

$$\left. \begin{aligned} x'(u) &= \frac{\frac{1+e^{-au+k_{56}}}{1-e^{-au+k_{56}}} + \frac{1+e^{-au+k_{56}}}{1-e^{-au+k_{56}}}}{2} \\ y'(u) &= \frac{\frac{1+e^{-au+k_{56}}}{1-e^{-au+k_{56}}} - \frac{1+e^{-au+k_{56}}}{1-e^{-au+k_{56}}}}{2} \end{aligned} \right\} \quad (3.2.94)$$

ve

$$\left. \begin{aligned} x'(u) &= \frac{\frac{1-e^{-au+k_{56}}}{1+e^{-au+k_{56}}} + \frac{1-e^{-au+k_{56}}}{1+e^{-au+k_{56}}}}{2} \\ y'(u) &= \frac{\frac{1-e^{-au+k_{56}}}{1+e^{-au+k_{56}}} - \frac{1-e^{-au+k_{56}}}{1+e^{-au+k_{56}}}}{2} \end{aligned} \right\} \quad (3.2.95)$$

şeklinde yeni eşitlikler elde edilir.

İlk olarak (3.2.94) eşitliklerinin her iki tarafının integrali alınırsa

$$2x(u) = \int \left(-1 + \frac{2e^{au}}{e^{au} - e^{k_{56}}} - 1 + \frac{2e^{au}}{e^{au} + e^{k_{56}}} \right) du,$$

$$2y(u) = \int \left(-1 + \frac{2e^{au}}{e^{au} - e^{k_{56}}} + 1 - \frac{2e^{au}}{e^{au} + e^{k_{56}}} \right) du$$

veya

$$x(u) = -u + \frac{\ln |e^{au} - e^{k_{56}}|}{a} + \frac{\ln |e^{au} + e^{k_{56}}|}{a} + k_{57},$$

$$y(u) = \frac{\ln |e^{au} - e^{k_{56}}|}{a} - \frac{\ln |e^{au} + e^{k_{56}}|}{a} + k_{58}$$

elde edilir, burada $au > k_{56}$ ve $k_{57}, k_{58} \in \mathbb{R}$ dir.

Benzer olarak (3.2.95) eşitliklerinin her iki tarafının integrali alındığında $x(u)$ ve $y(u)$ bileşenleri

$$x(u) = -u + \frac{\ln |e^{au} - e^{k_{56}}|}{a} + \frac{\ln |e^{au} + e^{k_{56}}|}{a} + k_{59},$$

$$y(u) = \frac{\ln |e^{au} + e^{k_{56}}|}{a} - \frac{\ln |e^{au} - e^{k_{56}}|}{a} + k_{60}$$

olarak hesaplanır, burada $au > k_{56}$ ve $k_{59}, k_{60} \in \mathbb{R}$ dir.

Böylece aşağıdaki teorem verilebilir.

Teorem 3.2.12. e^{ax} yoğunluklu Lorentz-Minkowski düzleminde ağırlıklı eğriliği sıfır (φ – doğrusal) olan birim hızlı timelike eğrileri:

i) Eğimi 0, yani x -eksenine paralel olan

$$\alpha_{23}(u) = (u + k_{54}, k_{55})$$

bir doğrudur, burada $k_{54}, k_{55} \in \mathbb{R}$ dir.

ii)

$$\alpha_{24}(u) = \left(\frac{\ln(e^{2au} - e^{2k_{56}})}{a} - u + k_{57}, \left(\frac{\ln(\frac{e^{au} - e^{k_{56}}}{e^{au} + e^{k_{56}}})}{a} + k_{58} \right) \right), \quad (3.2.96)$$

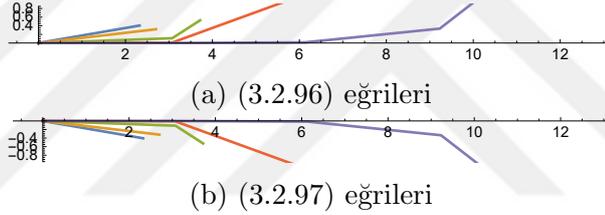
burada $au > k_{56}$ ve $k_{56}, k_{57}, k_{58} \in \mathbb{R}$ dir.

iii)

$$\alpha_{25}(u) = \left(\frac{\ln(e^{2au} - e^{2k_{56}})}{a} - u + k_{59}, \left(\frac{\ln(\frac{e^{au} + e^{k_{56}}}{e^{au} - e^{k_{56}}})}{a} + k_{60} \right) \right), \quad (3.2.97)$$

burada $au > k_{56}$ ve $k_{56}, k_{59}, k_{60} \in \mathbb{R}$ dir.

Şekil 3.26 (a) ve (b), sırasıyla $k_{56} = -11, k_{57} = k_{58} = k_{59} = k_{60} = 0,$ $a = 1, 2, 3, 4, 5$ ve için e^{ax} yoğunluklu Lorentz-Minkowski düzleminde ağırlıklı eğriliği sıfır (φ -doğrusal) olan birim hızlı timelike (3.2.96) ve (3.2.97) eğrilerini göstermektedir.



Şekil 3.26: e^{ax} yoğunluklu \mathbb{E}_1^2 de φ -doğrusal timelike eğrileri

$c \neq 0$ için (3.2.90) eşitliğinin çözümü:

İlk olarak $h'(u) = 0$ kabul edilip (3.2.90) eşitliği yeniden düzenlenirse

$$e^{h(u)} = \frac{c}{a} - \sqrt{\left(\frac{c}{a}\right)^2 + 1} \quad (3.2.98)$$

ve

$$e^{h(u)} = \sqrt{\left(\frac{c}{a}\right)^2 + 1} + \frac{c}{a} \quad (3.2.99)$$

eşitlikleri elde edilir. Fakat (3.2.98) eşitliği sağlanmaz çünkü eşitliğin sağ tarafı negatiftir. (3.2.74) ve (3.2.99) eşitliklerinden

$$\left. \begin{aligned} 2x(u) &= \left(\sqrt{\left(\frac{c}{a}\right)^2 + 1} + \frac{c}{a} + \frac{1}{\sqrt{\left(\frac{c}{a}\right)^2 + 1} + \frac{c}{a}} \right) u + k_{60} \\ 2y(u) &= \left(\sqrt{\left(\frac{c}{a}\right)^2 + 1} + \frac{c}{a} - \frac{1}{\sqrt{\left(\frac{c}{a}\right)^2 + 1} + \frac{c}{a}} \right) u + k_{61} \end{aligned} \right\} \quad (3.2.100)$$

bulunur, burada $k_{60}, k_{61} \in \mathbb{R}$ dir.

Ayrıca, $h'(u) \neq 0$ için (3.2.90) eşitliği

$$\left(\frac{1}{e^{h(u)} - \frac{c}{a} - \sqrt{\frac{c^2}{a^2} + 1}} - \frac{1}{e^{h(u)} - \frac{c}{a} + \sqrt{\frac{c^2}{a^2} + 1}} \right) \frac{d(e^{h(u)})}{\sqrt{\frac{c^2}{a^2} + 1}} = -adu \quad (3.2.101)$$

olur ve (3.2.101) eşitliğinin her iki tarafının integrali alındığında

$$\left| \frac{e^{h(u)} - \frac{c}{a} - \sqrt{\frac{c^2}{a^2} + 1}}{e^{h(u)} - \frac{c}{a} + \sqrt{\frac{c^2}{a^2} + 1}} \right| = e^{-au\sqrt{\frac{c^2}{a^2} + 1} + k_{63}} \quad (3.2.102)$$

eşitliği elde edilir, burada $k_{62}, k_{63} \in \mathbb{R}$ dir. (3.2.102) eşitliğinden

$$e^{h(u)} = \frac{\sqrt{\frac{c^2}{a^2} + 1} + \frac{c}{a} + (\sqrt{\frac{c^2}{a^2} + 1} - \frac{c}{a})e^{-au\sqrt{\frac{c^2}{a^2} + 1} + k_{63}}}{1 - e^{-au\sqrt{\frac{c^2}{a^2} + 1} + k_{63}}} \quad (3.2.103)$$

ve

$$e^{h(u)} = \frac{\sqrt{\frac{c^2}{a^2} + 1} + \frac{c}{a} - (\sqrt{\frac{c^2}{a^2} + 1} - \frac{c}{a})e^{-au\sqrt{\frac{c^2}{a^2} + 1} + k_{63}}}{1 + e^{-au\sqrt{\frac{c^2}{a^2} + 1} + k_{63}}} \quad (3.2.104)$$

olduğu görülür. $\sqrt{\frac{c^2}{a^2} + 1} = v$, $\frac{c}{a} = n$ olmak üzere (3.2.74), (3.2.103) ve (3.2.104) eşitliklerinden

$$\left. \begin{aligned} x'(u) &= \frac{\frac{v+n+(v-n)e^{-avu+k_{63}}}{1-e^{-avu+k_{63}}} + \frac{1-e^{-avu+k_{63}}}{v+n+(v-n)e^{-avu+k_{63}}}}{2} \\ y'(u) &= \frac{\frac{v+n+(v-n)e^{-avu+k_{63}}}{1-e^{-avu+k_{63}}} - \frac{1-e^{-avu+k_{63}}}{v+n+(v-n)e^{-avu+k_{63}}}}{2} \end{aligned} \right\} \quad (3.2.105)$$

ve

$$\left. \begin{aligned} x'(u) &= \frac{\frac{v+n-(v-n)e^{-avu+k_{63}}}{1+e^{-avu+k_{63}}} + \frac{1+e^{-avu+k_{63}}}{v+n-(v-n)e^{-avu+k_{63}}}}{2} \\ y'(u) &= \frac{\frac{v+n-(v-n)e^{-avu+k_{63}}}{1+e^{-avu+k_{63}}} - \frac{1+e^{-avu+k_{63}}}{v+n-(v-n)e^{-avu+k_{63}}}}{2} \end{aligned} \right\} \quad (3.2.106)$$

olur.

İlk olarak (3.2.105) eşitliklerinin her iki tarafının integrali alınırsa

$$2x(u) = \int \left(\frac{n-v+(v-n)e^{-avu+k_{63}}+2v}{1-e^{-avu+k_{63}}} \right) du + \int \frac{1}{v-n} \left(\frac{v-n-(v-n)e^{-avu+k_{63}}}{(v+n)+(v-n)e^{-avu+k_{63}}} \right) du,$$

$$2y(u) = \int \left(\frac{n-v+(v-n)e^{-avu+k_{63}}+2v}{1-e^{-avu+k_{63}}} \right) du - \int \frac{1}{v-n} \left(\frac{v-n-(v-n)e^{-avu+k_{63}}}{(v+n)+(v-n)e^{-avu+k_{63}}} \right) du$$

veya

$$2x(u) = \int \left(n - v + \frac{2}{a} \left(\frac{ave^{avu}}{e^{avu} - e^{k_{63}}} \right) \right) du + \int \left(\frac{1}{n - v} + \frac{2}{a} \left(\frac{ave^{avu}}{e^{avu} + (v - n)^2 e^{k_{63}}} \right) \right) du,$$

$$2y(u) = \int \left(n - v + \frac{2}{a} \left(\frac{ave^{avu}}{e^{avu} - e^{k_{63}}} \right) \right) du - \int \left(\frac{1}{n - v} + \frac{2}{a} \left(\frac{ave^{avu}}{e^{avu} + (v - n)^2 e^{k_{63}}} \right) \right) du$$

ya da

$$2x(u) = (n - v)u + \frac{2}{a} \ln(e^{avu} - e^{k_{63}}) + \frac{u}{n - v} + \frac{2}{a} \ln(e^{avu} + (v - n)^2 e^{k_{63}}) + k_{64},$$

$$2y(u) = (n - v)u + \frac{2}{a} \ln(e^{avu} - e^{k_{63}}) - \frac{u}{n - v} - \frac{2}{a} \ln(e^{avu} + (v - n)^2 e^{k_{63}}) + k_{65}$$

elde edilir, burada $avu > k_{63}$ ve $k_{64}, k_{65} \in \mathbb{R}$ dir.

Benzer olarak (3.2.106) eşitliklerinin her iki tarafının integrali alınırsa

$$2x(u) = (n - v)u + \frac{2}{a} \ln(e^{avu} + e^{k_{63}}) + \frac{u}{n - v} + \frac{2}{a} \ln(e^{avu} - (v - n)^2 e^{k_{63}}) + k_{66},$$

$$2y(u) = (n - v)u + \frac{2}{a} \ln(e^{avu} + e^{k_{63}}) - \frac{u}{n - v} - \frac{2}{a} \ln(e^{avu} - (v - n)^2 e^{k_{63}}) + k_{67}$$

elde edilir, burada $e^{avu - k_{63}} > \frac{n-v}{n+v}$ ve $k_{66}, k_{67} \in \mathbb{R}$ dir.

Böylece aşağıdaki teorem verilebilir.

Teorem 3.2.13. $\sqrt{\frac{c^2}{a^2} + 1} = v$, $\frac{c}{a} = n$ olmak üzere e^{ax} yoğunluklu Lorentz-Minkowski düzleminde ağırlıklı eğriliği sıfırdan farklı ($\kappa_\varphi = c \neq 0$) olan birim hızlı timelike eğrileri:

i) Eğimi $\frac{(v+n)^2 - 1}{(v+n)^2 + 1}$ olan

$$\alpha_{26}(u) = \left(\frac{v + n + \frac{1}{v+n}}{2} \right) u + k_{61}, \left(\frac{v + n + \frac{1}{v+n}}{2} \right) u + k_{62}$$

bir doğrudur, burada $k_{61}, k_{62} \in \mathbb{R}$ dir.

ii)

$$\alpha_{27}(u) = \left((n - v + \frac{1}{n - v}) \frac{u}{2} + \frac{1}{a} (\ln(e^{avu} - e^{k_{63}}) + \ln(e^{avu} + (v - n)^2 e^{k_{63}})) \right) + k_{64}, \quad (3.2.107)$$

$$\left((n - v - \frac{1}{n - v}) \frac{u}{2} + \frac{1}{a} (\ln(e^{avu} - e^{k_{63}}) - \ln(e^{avu} + (v - n)^2 e^{k_{63}})) \right) + k_{65},$$

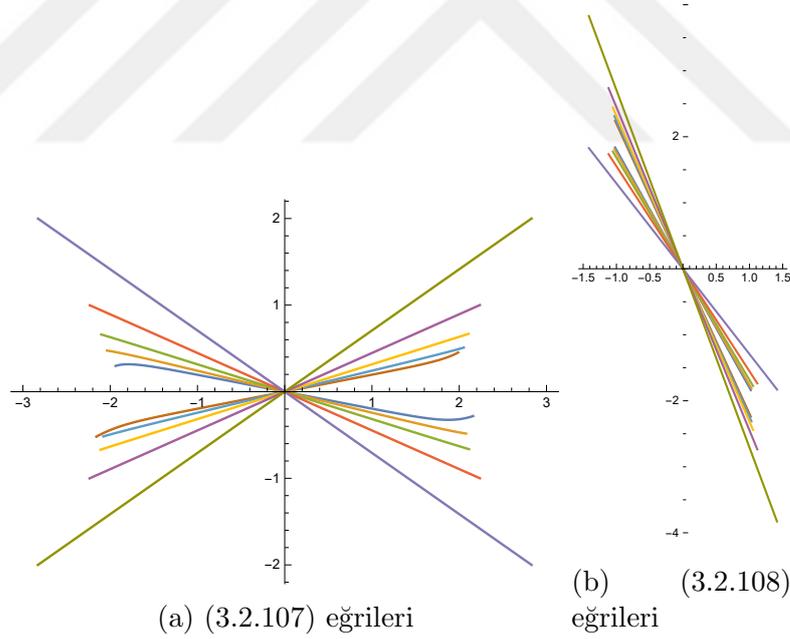
burada $avu > k_{63}$ ve $k_{64}, k_{65} \in \mathbb{R}$ dir.

iii)

$$\alpha_{28}(u) = \left((n - v + \frac{1}{n - v}) \frac{u}{2} + \frac{1}{a} (\ln(e^{avu} + e^{k_{63}}) + \ln(e^{avu} - (v - n)^2 e^{k_{63}})) \right) + k_{66}, \quad (3.2.108)$$

$$\left((n - v - \frac{1}{n - v}) \frac{u}{2} + \frac{1}{a} (\ln(e^{avu} + e^{k_{63}}) - \ln(e^{avu} - (v - n)^2 e^{k_{63}})) \right) + k_{67},$$

burada $e^{avu - k_{63}} > \frac{n - v}{n + v}$ ve $k_{66}, k_{67} \in \mathbb{R}$ dir.



Şekil 3.27: e^{ax} yoğunluklu \mathbb{E}_1^2 de $(\kappa_\varphi = c)$ timelike eğrileri

Şekil 3.27 (a) ve (b), sırasıyla $k_{63} = -11$, $k_{64} = k_{65} = k_{66} = k_{67} = 0$, $a = 1, 2, 3, 4, 5$ için e^{ax} yoğunluklu Lorentz-Minkowski düzleminde ağırlıklı eğriliği sıfırdan farklı olan birim hızlı timelike (3.2.107) ve (3.2.108) eğrilerini göstermektedir.

iii) $\mathbf{a} = \mathbf{0}$, $\mathbf{b} \neq \mathbf{0}$ olsun.

Bu durumda (3.2.75) eşitliği yeniden düzenlenirse

$$2h'(u) - b(e^{h(u)} + e^{-h(u)}) = 2c \quad (3.2.109)$$

olur. (3.2.109) eşitliğinde her iki taraf $e^{h(u)}$ ile çarpılır ve sağ tarafa $\frac{c^2}{b^2}$ eklenip çıkartılırsa

$$2h'(u)e^{h(u)} = b \left(\left(e^{h(u)} + \frac{c}{b} \right)^2 + 1 - \frac{c^2}{b^2} \right) \quad (3.2.110)$$

eşitliği elde edilir.

Burada (3.2.110) eşitliği $c = -b$, $c = b$, $\frac{c}{b} < -1$, $\frac{c}{b} > 1$ ve $-1 < \frac{c}{b} < 1$ durumlarına göre çözümlenerek timelike eğriler elde edilecektir.

$c = -b$ için (3.2.110) eşitliğinin çözümü:

İlk olarak $h'(u) = 0$ olsun. (3.2.110) eşitliğinden eğrinin bileşenleri

$$\left. \begin{aligned} x(u) &= u + k_{68} \\ y(u) &= k_{69} \end{aligned} \right\} \quad (3.2.111)$$

olur, burada $k_{68}, k_{69} \in \mathbb{R}$ dir.

$h'(u) \neq 0$ olsun. Bu durumda (3.2.110) eşitliği

$$\frac{2d(e^{h(u)})}{(e^{h(u)} - 1)^2} = bdu \quad (3.2.112)$$

olarak hesaplanır. (3.2.112) eşitliğinin her iki tarafının integrali alındıktan sonra gerekli işlemler yapıldığında

$$e^{h(u)} = 1 - \frac{2}{bu + k_{70}} \quad (3.2.113)$$

olarak hesaplanır ve (3.2.2) eşitliğinden $x(u)$ ve $y(u)$ bileşenleri

$$\left. \begin{aligned} x(u) &= u - \frac{\ln|bu+k_{70}|}{b} + \frac{\ln|bu+k_{70}-2|}{b} + k_{71} \\ y(u) &= -\frac{\ln|bu+k_{70}|}{b} - \frac{\ln|bu+k_{70}-2|}{b} + k_{72} \end{aligned} \right\} \quad (3.2.114)$$

olarak bulunur, burada $bu + k_{70} \in \mathbb{R} - [0, 2]$ ve $k_{70}, k_{71}, k_{72} \in \mathbb{R}$ dir.

Böylece (3.2.111) ve (3.2.114) eşitliklerinden aşağıdaki teorem elde edilir.

Teorem 3.2.14. e^{by} yoğunluklu Lorentz-Minkowski düzleminde ağırlıklı eğriliği sabit ($\kappa_\varphi = c = -b$) olan birim hızlı timelike eğrileri:

i) eğimi 0, yani x – eksenine paralel olan

$$\alpha_{29}(u) = (u + k_{68}, k_{69})$$

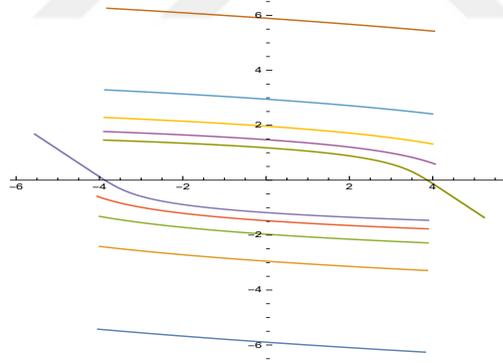
bir doğrudur, burada $k_{68}, k_{69} \in \mathbb{R}$ dir.

ii)

$$\alpha_{30}(u) = \left(\frac{bu + \ln\left(\frac{bu+k_{70}-2}{bu+k_{70}}\right)}{b} + k_{71}, -\frac{\ln((bu + k_{70} - 2)(bu + k_{70}))}{b} + k_{72} \right) \quad (3.2.115)$$

dir, burada $bu + k_{70} \in \mathbb{R} - [0, 2]$ ve $k_{70}, k_{71}, k_{72} \in \mathbb{R}$ dir.

Şekil 3.28, $k_{70} = 20$, $k_{71} = k_{72} = 0$, $c = -b = -5, -4, -3, -2, -1, 1, 2, 3, 4, 5$ için e^{by} yoğunluklu Lorentz-Minkowski düzleminde ağırlıklı eğriliği sıfırdan farklı olan birim hızlı timelike (3.2.115) eğrilerini göstermektedir.



Şekil 3.28: e^{by} yoğunluklu \mathbb{E}_1^2 de ($\kappa_\varphi = c = -b$) timelike eğrileri

$c = b$ için (3.2.110) eşitliğinin çözümü:

Kabul edelim ki $h'(u) = 0$ olsun. Bu durumda (3.2.110) eşitliğinden

$$e^{h(u)} = -1$$

olur ki bu da mümkün değildir.

Kabul edelim ki $h'(u) \neq 0$ olsun. Bu durumda (3.2.110) eşitliğinden

$$\frac{2d(e^{h(u)})}{(e^{h(u)} + 1)^2} = bdu \quad (3.2.116)$$

olarak bulunur. (3.2.116) eşitliğinin her iki tarafının integrali alındıktan sonra gerekli işlemlerle

$$\left. \begin{aligned} x(u) &= -u + \frac{\ln|bu+k_{73}+2|}{b} - \frac{\ln|bu+k_{73}|}{b} + k_{74} \\ y(u) &= -\frac{\ln|bu+k_{73}+2|}{b} - \frac{\ln|bu+k_{73}|}{b} + k_{75} \end{aligned} \right\} \quad (3.2.117)$$

eşitlikleri bulunur. Burada $bu + k_{73} \in (-2, 0)$ ve $k_{73}, k_{74}, k_{75} \in \mathbb{R}$ dir.

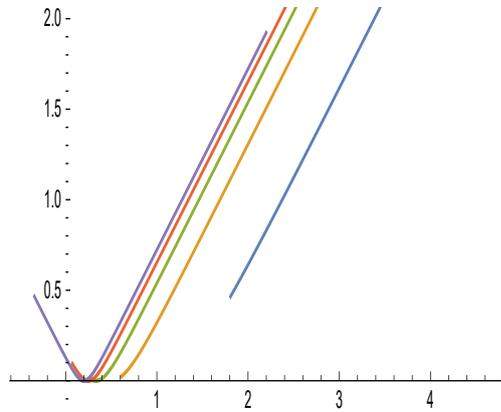
Böylece (3.2.117) eşitliğinden aşağıdaki teorem ifade edilebilir.

Teorem 3.2.15. e^{by} yoğunluklu Lorentz-Minkowski düzleminde ağırlıklı eğriliği sabit ($\kappa_\varphi = c = b$) olan birim hızlı timelike eğrisi

$$\alpha_{31}(u) = \left(-\frac{bu + \ln \left| \frac{bu+k_{73}}{bu+k_{73}+2} \right|}{b} + k_{74}, -\frac{\ln |(bu + k_{73} + 2)(bu + k_{73})|}{b} + k_{75} \right) \quad (3.2.118)$$

şeklinde parametrelendirilebilir, burada $bu + k_{73} \in (-2, 0)$ ve $k_{74}, k_{75} \in \mathbb{R}$ dir.

Şekil 3.29, $k_{73} = k_{74} = k_{75} = 0$, $c = b = 1, 2, 3, 4, 5$ için e^{by} yoğunluklu Lorentz-Minkowski düzleminde ağırlıklı eğriliği sıfırdan farklı ve b ye eşit olan birim hızlı timelike (3.2.118) eğrilerini göstermektedir.



Şekil 3.29: e^{by} yoğunluklu \mathbb{E}_1^2 de ($\kappa_\varphi = c = b$) timelike eğrileri

$\frac{c}{b} < -1$ için (3.2.110) eşitliğinin çözümü:

Eğer $h'(u) = 0$ ise (3.2.110) eşitliğinden

$$e^{h(u)} = -\frac{c}{b} \pm \sqrt{\left(\frac{c}{b}\right)^2 - 1} \quad (3.2.119)$$

elde edilir. Ayrıca, (3.2.74) ve (3.2.119) eşitliklerinden

$$\left. \begin{aligned} x'(u) &= \frac{-\frac{c}{b} \pm \sqrt{\left(\frac{c}{b}\right)^2 - 1} + \frac{1}{-\frac{c}{b} \pm \sqrt{\left(\frac{c}{b}\right)^2 - 1}}}{2} \\ y'(u) &= \frac{-\frac{c}{b} \pm \sqrt{\left(\frac{c}{b}\right)^2 - 1} - \frac{1}{-\frac{c}{b} \pm \sqrt{\left(\frac{c}{b}\right)^2 - 1}}}{2} \end{aligned} \right\} \quad (3.2.120)$$

bulunur ve (3.2.120) eşitliklerinin her iki tarafının integrali alınırsa $x(u)$ ve $y(u)$ bileşenleri

$$\left. \begin{aligned} x(u) &= \left(\frac{-\frac{c}{b} \pm \sqrt{\left(\frac{c}{b}\right)^2 - 1} + \frac{1}{-\frac{c}{b} \pm \sqrt{\left(\frac{c}{b}\right)^2 - 1}}}{2} \right) u + k_{76} \\ y(u) &= \left(\frac{-\frac{c}{b} \pm \sqrt{\left(\frac{c}{b}\right)^2 - 1} - \frac{1}{-\frac{c}{b} \pm \sqrt{\left(\frac{c}{b}\right)^2 - 1}}}{2} \right) u + k_{77} \end{aligned} \right\} \quad (3.2.121)$$

olarak hesaplanır, burada $k_{76}, k_{77} \in \mathbb{R}$ dir.

Kabul edelim ki $h'(u) \neq 0$ olsun. Bu durumda spacelike eğriler için yapılan işlemlere benzer olarak, (3.2.110) eşitliğinden

$$\left(\frac{1}{e^{h(u)} + \frac{c}{b} - \sqrt{\frac{c^2}{b^2} - 1}} - \frac{1}{e^{h(u)} + \frac{c}{b} + \sqrt{\frac{c^2}{b^2} - 1}} \right) d(e^{h(u)}) = b\sqrt{\frac{c^2}{b^2} - 1} du \quad (3.2.122)$$

veya

$$e^{h(u)} = \frac{\left(\sqrt{\frac{c^2}{b^2} - 1} + \frac{c}{b} \right) e^{bu\sqrt{\frac{c^2}{b^2} - 1} + k_{78}} + \sqrt{\frac{c^2}{b^2} - 1} - \frac{c}{b}}{\left(1 - e^{bu\sqrt{\frac{c^2}{b^2} - 1} + k_{78}} \right)} \quad (3.2.123)$$

ve

$$e^{h(u)} = \frac{\sqrt{\frac{c^2}{b^2} - 1} - \frac{c}{b} - \left(\sqrt{\frac{c^2}{b^2} - 1} + \frac{c}{b} \right) e^{bu\sqrt{\frac{c^2}{b^2} - 1} + k_{78}}}{\left(1 + e^{bu\sqrt{\frac{c^2}{b^2} - 1} + k_{78}} \right)} \quad (3.2.124)$$

eşitlikleri elde edilir. $p = \sqrt{\frac{c^2}{b^2} - 1}$ ve $t = \frac{c}{b}$ olmak üzere (3.2.74), (3.2.123) ve (3.2.124) eşitliklerinden

$$2x(u) = -u(p+t) - \frac{2}{b} \ln |e^{-bpu} - e^{k_{78}}| - \frac{u}{p+t} + \frac{2}{b} \ln |(p+t)e^{k_{78}} + (p-t)e^{-bpu}| + 2k_{79} \quad (3.2.125)$$

$$2y(u) = -u(p+t) - \frac{2}{b} \ln |e^{-bpu} - e^{k_{78}}| + \frac{u}{p+t} - \frac{2}{b} \ln |(p+t)e^{k_{78}} + (p-t)e^{-bpu}| + 2k_{80},$$

burada $(1 - e^{bpu+k_{78}})$ ile $(p-t + (p+t)e^{bpu+k_{78}})$ sayıları aynı işaretli olup

$$2x(u) = -(p+t)u - \frac{2}{b} \ln |e^{-bpu} + e^{k_{78}}| - \frac{u}{p+t} + \frac{2}{b} \ln |(p-t)e^{-bpu} - (p+t)e^{k_{78}}| + 2k_{81} \quad (3.2.126)$$

$$2y(u) = -(p+t)u - \frac{2}{b} \ln |e^{-bpu} + e^{k_{78}}| + \frac{u}{p+t} - \frac{2}{b} \ln |(p-t)e^{-bpu} - (p+t)e^{k_{78}}| + 2k_{82}$$

olduğu görülür, burada $k_{78}, k_{79}, k_{80}, k_{81}, k_{82} \in \mathbb{R}$ dir.

Böylece (3.2.121), (3.2.125) ve (3.2.126) eşitliklerinden aşağıdaki teorem elde edilir.

Teorem 3.2.16. $p = \sqrt{\frac{c^2}{b^2} - 1}$, $t = \frac{c}{b} < -1$ olmak üzere e^{by} yoğunluklu Lorentz-Minkowski düzleminde ağırlıklı eğriliği sabit ($\kappa_\varphi = c$) olan birim hızlı timelike eğrileri:

i) Eğimi $\frac{(-t \pm p)^2 - 1}{(-t \pm p)^2 + 1}$ olan

$$\alpha_{32}(u) = \left(\left(\frac{-t \pm p + \frac{1}{-t \pm p}}{2} \right) u + k_{76}, \left(\frac{-t \pm p - \frac{1}{-t \pm p}}{2} \right) u + k_{77} \right) \quad (3.2.127)$$

bir doğrudur, burada $k_{76}, k_{77} \in \mathbb{R}$ dir.

ii)

$$\alpha_{33}(u) = \left(\begin{array}{c} \frac{-u}{2} \left(t + p + \frac{1}{t+p} \right) - \left(\frac{\ln \left(\frac{e^{-bpu} - e^{k_{78}}}{(p-t)e^{-bpu} + (p+t)e^{k_{78}}} \right)}{b} \right) + h_{79}, \\ \frac{-u}{2} \left(t + p - \frac{1}{t+p} \right) - \left(\frac{\ln \left(\frac{e^{-bpu} - e^{k_{78}}}{(p-t)e^{-bpu} + (p+t)e^{k_{78}}} \right)}{b} \right) + h_{80} \end{array} \right) \quad (3.2.128)$$

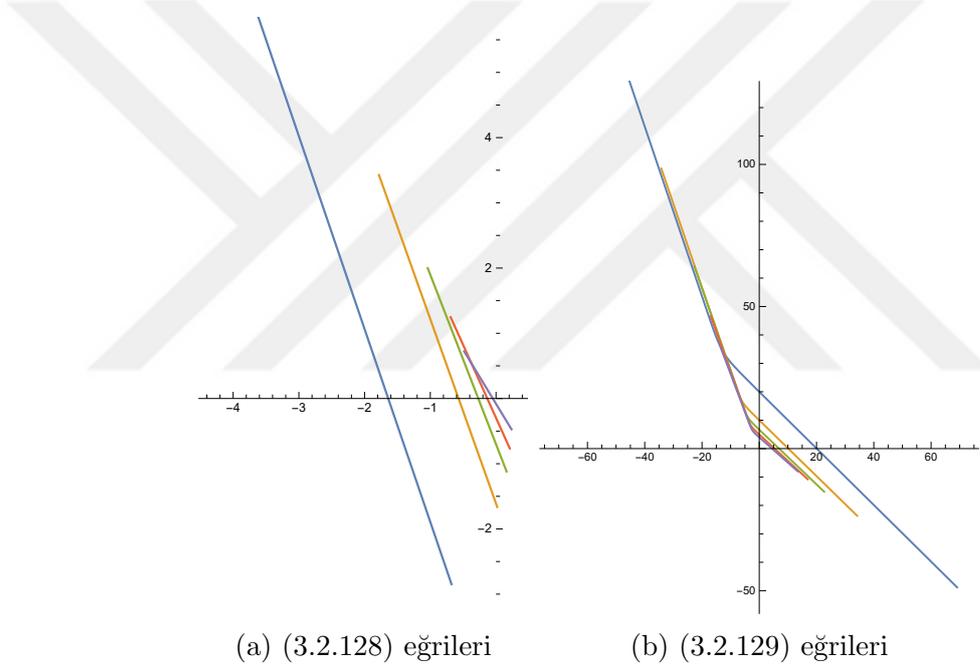
dir, burada $k_{78}, k_{79}, k_{80} \in \mathbb{R}$ ve $(1 - e^{bpu+k_{78}})$ ile $((p+t)e^{bpu+k_{78}} + p-t)$ sayıları aynı işaretlidir.

iii)

$$\alpha_{34}(u) = \left(\begin{array}{l} \frac{-u}{2} \left(t + p + \frac{1}{t+p} \right) - \left(\frac{\ln(e^{-bpu} + e^{k_{78}}) - \ln|(p-t)e^{-bpu} - (p+t)e^{k_{78}}|}{b} \right) + h_{81}, \\ \frac{-u}{2} \left(t + p - \frac{1}{t+p} \right) - \left(\frac{\ln(e^{-bpu} + e^{k_{78}}) + \ln|(p-t)e^{-bpu} - (p+t)e^{k_{78}}|}{b} \right) + h_{82} \end{array} \right), \quad (3.2.129)$$

burada k_{78} , k_{81} , k_{82} dir.

Şekil 3.30 (a) ve (b), sırasıyla $c = 6, k_{78} = -61, k_{79} = k_{80} = 0, b = -1, -2, -3, -4, -5$ ve $c = 11, k_{78} = 10, k_{81} = k_{82} = 0, b = -1, -2, -3, -4, -5$ için e^{by} yoğunluklu Lorentz-Minkowski düzleminde ağırlıklı eğriliği sabit olan birim hızlı timelike (3.2.128) ve (3.2.129) eğrilerini göstermektedir.



Şekil 3.30: $\frac{c}{b} < -1$ için e^{by} yoğunluklu \mathbb{E}_1^2 de ($\kappa_\varphi = c$) timelike eğrileri

$\frac{c}{b} > 1$ için (3.2.110) eşitliğinin çözümü:

Bu durumda $\frac{c}{b} < -1$ durumuna benzer işlemler yapıldığında, aşağıdaki teorem elde edilir.

Teorem 3.2.17. $p = \sqrt{\frac{c^2}{b^2} - 1}$, $t = \frac{c}{b} > 1$ olmak üzere, e^{by} yoğunluklu Lorentz-Minkowski düzleminde ağırlıklı eğriliği sabit ($\kappa_\varphi = c$) olan birim hızlı timelike eğrisi (3.2.128) ile verilir.

$-1 < \frac{c}{b} < 1$ için (3.2.110) eşitliğinin çözümü:

İlk olarak $h'(u) = 0$ kabul edilip (3.2.110) eşitliği yeniden yazılırsa

$$\left(e^{h(u)} + \frac{c}{b}\right)^2 = \left(\frac{c}{b}\right)^2 - 1$$

olur bu ise mümkün değildir.

Ayrıca $h'(u) \neq 0$ alırsa (3.2.110) eşitliği

$$\frac{2d(e^{h(u)})}{\left(\sqrt{1 - \frac{c^2}{b^2}}\right)^2 \left(\left(\frac{e^{h(u)} + \frac{c}{b}}{\sqrt{1 - \frac{c^2}{b^2}}}\right)^2 + 1\right)} = bdu. \quad (3.2.130)$$

olarak hesaplanır. (3.2.130) eşitliğinin her iki tarafının integrali alınır ve gerekli işlemler yapılırsa

$$e^{h(u)} = \sqrt{1 - \frac{c^2}{b^2}} \tan\left(\frac{\sqrt{1 - \frac{c^2}{b^2}}(bu + k_{83})}{2}\right) - \frac{c}{b} \quad (3.2.131)$$

elde edilir ve buna göre (3.2.74), (3.2.131) eşitliklerinden

$$\left. \begin{aligned} x(u) &= -\frac{t(k_{83}+2bu)+2\ln\left|\cos\left(\frac{q(bu+k_{83})}{2}\right)\right|-2\ln\left|(t\cos\left(\frac{q(bu+k_{83})}{2}\right)-q\sin\left(\frac{q(bu+k_{83})}{2}\right))\right|}{2b} + k_{84} \\ y(u) &= \frac{tk_{83}-2\ln\left|\cos\left(\frac{q(bu+k_{83})}{2}\right)\right|-2\ln\left|(t\cos\left(\frac{q(bu+k_{83})}{2}\right)-q\sin\left(\frac{q(bu+k_{83})}{2}\right))\right|}{2b} + k_{85} \end{aligned} \right\} \quad (3.2.132)$$

olur, burada $q = \sqrt{1 - \frac{c^2}{b^2}}$, $t = \frac{c}{b}$, $k_{83}, k_{84}, k_{85} \in \mathbb{R}$ dir.

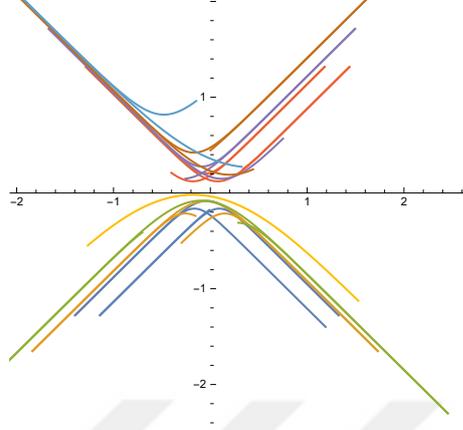
Böylece aşağıdaki teorem verilebilir.

Teorem 3.2.18. $q = \sqrt{1 - \frac{c^2}{b^2}}$, $t = \frac{c}{b}$ ve $-1 < \frac{c}{b} < 1$ olmak üzere, e^{by} yoğunluklu Lorentz-Minkowski düzleminde ağırlıklı eğriliği sabit ($\kappa_\varphi = c$) olan birim hızlı timelike eğrisi

$$\alpha_{35}(u) = \left(\begin{array}{c} -\frac{t(k_{83}+2bu)+2\ln\left|\cos\left(\frac{q(bu+k_{83})}{2}\right)\right|-2\ln\left|(t\cos\left(\frac{q(bu+k_{83})}{2}\right)-q\sin\left(\frac{q(bu+k_{83})}{2}\right))\right|}{2b} + k_{84}, \\ \frac{tk_{83}-2\ln\left|\cos\left(\frac{q(bu+k_{83})}{2}\right)\right|-2\ln\left|(t\cos\left(\frac{q(bu+k_{83})}{2}\right)-q\sin\left(\frac{q(bu+k_{83})}{2}\right))\right|}{2b} + k_{85} \end{array} \right) \quad (3.2.133)$$

dir, burada $\tan\left(\frac{q(bu+k_{83})}{2}\right) > \frac{t}{q}$ ve $k_i \in \mathbb{R}$, $i = 83, 84, 85$ dir.

Şekil 3.31, $c = 1, k_{83} = 1, k_{84} = k_{85} = 0, b = -5, -4, -3, -2, 2, 3, 4, 5$ ve $-1 < \frac{c}{b} < 1$ için e^{by} yoğunluklu Lorentz-Minkowski düzleminde ağırlıklı eğriliği sabit olan birim hızlı timelike (3.2.133) eğrilerini göstermektedir.

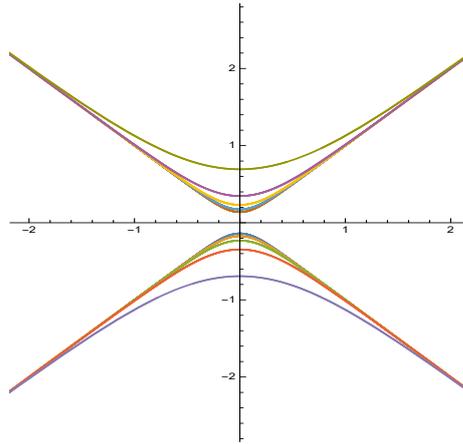


Şekil 3.31: $-1 < \frac{c}{b} < 1$ için e^{by} yoğunluklu \mathbb{E}_1^2 de $(\kappa_\varphi = c)$ timelike eğrileri

Sonuç 3.2.4. e^{by} yoğunluklu Lorentz-Minkowski düzleminde ağırlıklı eğriliği sıfır (φ - doğrusal) olan birim hızlı timelike eğrisi

$$\alpha_{36}(u) = \left(\frac{\ln \left| \tan\left(\frac{bu+k_{83}}{2}\right) \right|}{b} + k_{84}, \frac{-\ln \left| \frac{1}{2} \sin(bu + k_{83}) \right|}{b} + k_{85} \right) \quad (3.2.134)$$

dir, burada $\tan\left(\frac{q(bu+k_{83})}{2}\right) > \frac{t}{q}$ ve $k_i \in \mathbb{R}, i = 83, 84, 85$ dir.



Şekil 3.32: e^{by} yoğunluklu \mathbb{E}_1^2 de φ -doğrusal timelike eğrileri

Şekil 3.32, $k_{83} = 1, k_{84} = k_{85} = 0, b = -5, -4, -3, -2, -1, 1, 2, 3, 4, 5$ için e^{by}

yoğunluklu Lorentz-Minkowski düzleminde ağırlıklı eğriliği sıfır φ -doğrusal olan birim hızlı timelike (3.2.134) eğrilerini göstermektedir.

3.2.2 e^{ax+by} Yoğunluklu \mathbb{E}_1^3 Uzayında Keyfi Parametrelili Eğriler

Bu alt kısımda e^φ ($\varphi = ax + by$) yoğunluklu \mathbb{E}_1^3 de, sırasıyla spacelike ve timelike eğriler incelenerek bazı karakterizasyonlar verilecektir.

İlk olarak $\alpha(u) = (x(u), y(u), 0)$, \mathbb{E}_1^3 de keyfi parametrelili spacelike bir eğri olsun. $\alpha(u)$ eğrisinin Frenet vektörlerinin ve eğriliğinin aşağıdaki gibi olduğu kolaylıkla görülebilir

$$\begin{aligned} T &= \frac{1}{\sqrt{y'(u)^2 - x'(u)^2}}(x'(u), y'(u), 0), \\ N &= \frac{1}{\sqrt{y'(u)^2 - x'(u)^2}}(-y'(u), -x'(u), 0), \\ B &= (0, 0, 1) \end{aligned} \quad (3.2.135)$$

ve

$$\kappa = \frac{x''(u)y'(u) - x'(u)y''(u)}{(y'(u)^2 - x'(u)^2)^{3/2}}. \quad (3.2.136)$$

En az biri sıfırdan farkı olan a , b reel sayıları ve $\varphi = ax + by$ için e^φ yoğunluklu Lorentz-Minkowski uzayında φ nin gradyant vektörü

$$\nabla\varphi = (a, b, 0) \quad (3.2.137)$$

dır. (1.0.2), (3.2.135) ve (3.2.137) eşitliklerinden

$$\frac{d\varphi}{dN} = \frac{ay'(u) - bx'(u)}{\sqrt{y'(u)^2 - x'(u)^2}} \quad (3.2.138)$$

olduğu görülür. (3.2.136) ve (3.2.138) eşitlikleri yardımıyla, e^{ax+by} yoğunluklu Lorentz-Minkowski uzayında keyfi parametrelili spacelike $\alpha(u) = (x(u), y(u), 0)$ eğrisinin ağırlıklı eğriliği; (1.0.1) eşitliğinden

$$\kappa_\varphi = \frac{x''(u)y'(u) - x'(u)y''(u) - (y'(u)^2 - x'(u)^2)(ay'(u) - bx'(u))}{(y'(u)^2 - x'(u)^2)^{3/2}} \quad (3.2.139)$$

şeklinde hesaplanır.

Sonuç 3.2.5. e^{ax+by} yoğunluklu Lorentz-Minkowski uzayında, keyfi parametrelili spacelike $\alpha(u) = (x(u), y(u), 0)$ eğrisinin ağırlıklı eğriliğinin sıfır (φ – doğrusal) olması için gerek ve yeter şart

$$x'(u)y''(u) + ay'(u)(y'(u)^2 - x'(u)^2) = x''(u)y'(u) + bx'(u)(y'(u)^2 - x'(u)^2) \quad (3.2.140)$$

olmasıdır.

Aşağıda e^{ax+by} yoğunluklu Lorentz-Minkowski uzayında, a ve b nin durumlarına göre; keyfi parametrelili spacelike $\alpha(u) = (x(u), y(u), 0)$ eğrisinin ağırlıklı eğriliğini sıfır yapacak (φ –doğrusal) yeni eğriler oluşturulmuştur.

i) $a \neq 0$ ve $b = 0$ olsun.

Bu durumda e^{ax} yoğunluklu Lorentz-Minkowski uzayında keyfi parametrelili spacelike $\alpha(u) = (x(u), y(u), 0)$ eğrisinin ağırlıklı eğriliği; (3.2.139) eşitliğinden

$$\kappa_\varphi = \frac{x''(u)y'(u) - x'(u)y''(u) - ay'(u)(y'(u)^2 - x'(u)^2)}{(y'(u)^2 - x'(u)^2)^{3/2}}$$

olarak elde edilir.

Sonuç 3.2.6. e^{ax} yoğunluklu Lorentz-Minkowski uzayında keyfi parametrelili spacelike $\alpha(u) = (x(u), y(u), 0)$ eğrisinin ağırlıklı eğriliğinin sıfır (φ –doğrusal) olması için gerek ve yeter şart

$$x'(u)y''(u) + ay'(u)(y'(u)^2 - x'(u)^2) = x''(u)y'(u) \quad (3.2.141)$$

olmasıdır.

(3.2.141) non-lineer denkleminin çözümünde

$x'(u) = 0$ ise; (3.2.141) denklemi $y'(u) = 0$ için sağlanır. Bu çözüm bir nokta belirtir.

$x'(u) \neq 0$ ise; (3.2.141) denklemi $y(u) = c_2 \pm \frac{\ln(e^{ax(u)} + \sqrt{e^{2ax(u)} + c_1})}{a}$ için sağlanır, burada $c_1 < 0$, $e^{2ax(u)} + c_1 > 0$ ve $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ dir.

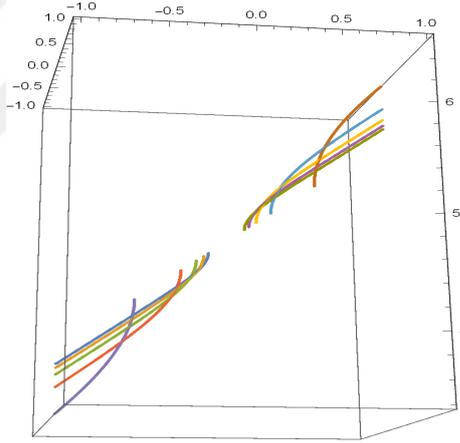
Böylece aşağıdaki teorem verilebilir.

Teorem 3.2.19. e^{ax} yoğunluklu Lorentz-Minkowski uzayında keyfi parametrelili spacelike $\alpha(u) = (x(u), y(u), 0)$ eğrisinin ağırlıklı eğriliği sıfır (φ – doğrusal) olan eğrisi

$$\alpha_1(u) = \left(x(u), c_2 \pm \frac{\ln \left(e^{ax(u)} + \sqrt{e^{2ax(u)} + c_1} \right)}{a}, 0 \right) \quad (3.2.142)$$

şeklinde parametrelendirilebilir, burada $c_1 < 0$, $e^{2ax(u)} + c_1 > 0$ ve $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ dir.

Şekil 3.33 de $x(u) = u$, $c_1 = -3$, $c_2 = 5$ ve $a = -5, -4, -3, -2, -1, 1, 2, 3, 4, 5$ için e^{ax} yoğunluklu Lorentz-Minkowski uzayında keyfi parametrelili spacelike $\alpha(u) = (x(u), y(u), 0)$ eğrisinin ağırlıklı eğriliği sıfır (φ –doğrusal) olan (3.2.142) eğrileri gösterilmiştir.



Şekil 3.33: e^{ax} yoğunluklu \mathbb{E}_1^3 de φ –doğrusal spacelike eğrileri

ii) $b \neq 0$ ve $a = 0$ olsun.

Bu durumda e^{by} yoğunluklu Lorentz-Minkowski uzayında keyfi parametrelili spacelike $\alpha(u) = (x(u), y(u), 0)$ eğrisinin ağırlıklı eğriliği; (3.2.139) eşitliğinden

$$\kappa_\varphi = \frac{x''(u)y'(u) - x'(u)y''(u) + bx'(u)(y'(u)^2 - x'(u)^2)}{(y'(u)^2 - x'(u)^2)^{3/2}}$$

olarak elde edilir.

Sonuç 3.2.7. e^{by} yoğunluklu Lorentz-Minkowski uzayında keyfi parametrelili spacelike $\alpha(u) = (x(u), y(u), 0)$ eğrisinin ağırlıklı eğriliğinin sıfır (φ -doğrusal) olması için gerek ve yeter şart

$$x'(u)y''(u) = x''(u)y'(u) + bx'(u)(y'(u)^2 - x'(u)^2) \quad (3.2.143)$$

olmasıdır.

Şimdi (3.2.143) non-lineer denkleminin çözümünde

$x'(u) = 0$ ise; (3.2.143) denklemi bütün $y(u)$ lar için sağlanır.

$x''(u) = 0$ ve $x'(u) \neq 0$ ise; bu durumda $c_3, c_4 \in \mathbb{R}$ ve $c_3 \neq 0$ olmak üzere $x(u) = c_3u + c_4$ olup (3.2.143) denklemi $y(u) = c_5 - \frac{\ln(\cosh(bc_3u - c_6c_3))}{b}$ için sağlanır, burada $c_5, c_6 \in \mathbb{R}$ dir. Fakat bu durumda bulunan eğri, spacelike bir eğri değildir.

$x''(u) \neq 0$ ise; (3.2.143) denklemi $x(u) = c_7 \pm \frac{\arctan h(\sqrt{1+c_8e^{2by(u)}})}{b}$ için sağlanır.

Burada $c_7, c_8 \in \mathbb{R}$ dir. Fakat bu durumda da, bulunan eğri spacelike bir eğri değildir.

Teorem 3.2.20. e^{by} yoğunluklu Lorentz-Minkowski uzayında keyfi parametrelili spacelike $\alpha(u) = (x(u), y(u), 0)$ eğrisinin ağırlıklı eğriliği sıfır (φ - doğrusal) olan eğrisi

$$\alpha_2(u) = (c_9, y(u), 0) \quad (3.2.144)$$

şeklinde parametrelendirilebilir, burada $c_9 \in \mathbb{R}$ dir.

Sonuç 3.2.8. e^{by} yoğunluklu Lorentz-Minkowski uzayında keyfi parametrelili spacelike $\alpha(u) = (x(u), y(u), 0)$ eğrisinin ağırlıklı eğriliği sıfır (φ -doğrusal) olan (3.2.144) eğrisi yoğunluk katsayısı olan b 'nin seçiminden bağımsızdır.

İkinci olarak $\alpha(u) = (x(u), y(u), 0)$, E_1^3 de keyfi parametrelili timelike bir eğri olsun. $\alpha(u)$ eğrisinin Frenet vektörleri ve eğriliği

$$T = \frac{1}{\sqrt{x'(u)^2 - y'(u)^2}}(x'(u), y'(u), 0),$$

$$N = \frac{1}{\sqrt{x'(u)^2 - y'(u)^2}}(y'(u), x'(u), 0), \quad (3.2.145)$$

$$B = (0, 0, 1)$$

ve

$$\kappa = \frac{x'(u)y''(u) - x''(u)y'(u)}{(x'(u)^2 - y'(u)^2)^{3/2}} \quad (3.2.146)$$

dir.

En az biri sıfırdan farklı olan a , b reel sayıları ve $\varphi = ax + by$ olmak üzere e^φ yoğunluklu Lorentz-Minkowski uzayında φ nin gradyant vektörü

$$\nabla\varphi = (a, b, 0) \quad (3.2.147)$$

dır. (1.0.2), (3.2.145) ve (3.2.147) eşitliklerinden

$$\frac{d\varphi}{dN} = \frac{-ay'(u) + bx'(u)}{\sqrt{x'(u)^2 - y'(u)^2}} \quad (3.2.148)$$

olarak bulunur. (3.2.146) ve (3.2.148) eşitlikleri yardımıyla, e^{ax+by} yoğunluklu Lorentz-Minkowski uzayında keyfi parametrelili timelike $\alpha(u) = (x(u), y(u), 0)$ eğrisinin ağırlıklı eğriliği, (1.0.1) den

$$\kappa_\varphi = \frac{x'(u)y''(u) - x''(u)y'(u) - (x'(u)^2 - y'(u)^2)(-ay'(u) + bx'(u))}{(x'(u)^2 - y'(u)^2)^{3/2}} \quad (3.2.149)$$

şeklinde hesaplanır.

Sonuç 3.2.9. e^{ax+by} yoğunluklu Lorentz-Minkowski uzayında, keyfi parametrelili timelike $\alpha(u) = (x(u), y(u), 0)$ eğrisinin ağırlıklı eğriliğinin sıfır (φ – doğrusal) olması için gerek ve yeter şart

$$x'(u)y''(u) + ay'(u)(x'(u)^2 - y'(u)^2) = x''(u)y'(u) + bx'(u)(x'(u)^2 - y'(u)^2) \quad (3.2.150)$$

olmasıdır.

Aşağıda e^{ax+by} yoğunluklu Lorentz-Minkowski uzayında, a ve b nin durumlarına göre; keyfi parametrelili timelike $\alpha(u) = (x(u), y(u), 0)$ eğrisinin ağırlıklı eğriliğini sıfır yapacak (φ –doğrusal) yeni eğriler oluşturulmuştur.

i) $a \neq 0$ ve $b = 0$ olsun.

Bu durumda e^{ax} yoğunluklu Lorentz-Minkowski uzayında keyfi parametrelili timelike $\alpha(u) = (x(u), y(u), 0)$ eğrisinin ağırlıklı eğriliği; (3.2.149) eşitliğinden

$$\kappa_\varphi = \frac{x'(u)y''(u) - x''(u)y'(u) + ay'(u)(x'(u)^2 - y'(u)^2)}{(x'(u)^2 - y'(u)^2)^{3/2}}$$

şeklinde elde edilir.

Sonuç 3.2.10. e^{ax} yoğunluklu Lorentz-Minkowski uzayında keyfi parametrelili timelike $\alpha(u) = (x(u), y(u), 0)$ eğrisinin ağırlıklı eğriliğinin sıfır (φ – doğrusal) olması için gerek ve yeter şart

$$x'(u)y''(u) + ay'(u)(x'(u)^2 - y'(u)^2) = x''(u)y'(u) \quad (3.2.151)$$

olmasıdır.

Burada (3.2.151) non-lineer denkleminin çözümünde;

$y'(u) = 0$ ise; (3.2.151) denklemi bütün $x(u)$ lar için sağlanır.

$y''(u) = 0$ ve $y'(u) \neq 0$ ise; bu durumda $c_{10}, c_{11} \in \mathbb{R}$ ve $c_{10} \neq 0$ olmak üzere $y(u) = c_{10}u + c_{11}$ için, (3.2.151) denklemi $x(u) = c_{12} - \frac{\ln(\cosh(ac_{10}u - c_{13}c_{10}))}{a}$ için sağlanır, burada $c_{12}, c_{13} \in \mathbb{R}$ dir. Fakat bu durumda bulunan eğri, timelike bir eğri değildir.

$y''(u) \neq 0$ ise; (3.2.151) denklemi $y(u) = c_{14} \pm \frac{\arctan h(\sqrt{1+c_{15}e^{2ax(u)}})}{a}$ için sağlanır, burada $c_{14}, c_{15} \in \mathbb{R}$ dir. Fakat bu durumda bulunan eğri, timelike bir eğri değildir.

Böylece aşağıdaki teorem verilebilir.

Teorem 3.2.21. e^{ax} yoğunluklu Lorentz-Minkowski uzayında keyfi parametrelili timelike $\alpha(u) = (x(u), y(u), 0)$ eğrisinin ağırlıklı eğriliği sıfır (φ – doğrusal) olan eğrisi

$$\alpha_3(u) = (x(u), c_{16}, 0) \quad (3.2.152)$$

şeklinde parametrelendirilebilir, burada $c_{16} \in \mathbb{R}$ dir.

Sonuç 3.2.11. e^{ax} yoğunluklu Lorentz-Minkowski uzayında keyfi parametrelili timelike $\alpha(u) = (x(u), y(u), 0)$ eğrisinin ağırlıklı eğriliği sıfır (φ – doğrusal) olan (3.2.152) eğrisi yoğunluk katsayısı olan a 'nin seçiminden bağımsızdır.

ii) $b \neq 0$ ve $a = 0$ olsun.

Bu durumda e^{by} yoğunluklu Lorentz-Minkowski uzayında keyfi parametrelili timelike $\alpha(u) = (x(u), y(u), 0)$ eğrisinin ağırlıklı eğriliği; (3.2.149) eşitliğinden

$$\kappa_\varphi = \frac{x'(u)y''(u) - x''(u)y'(u) - bx'(u)(x'(u)^2 - y'(u)^2)}{(x'(u)^2 - y'(u)^2)^{3/2}}$$

olarak elde edilir.

Sonuç 3.2.12. e^{by} yoğunluklu Lorentz-Minkowski uzayında keyfi parametrelili timelike $\alpha(u) = (x(u), y(u), 0)$ eğrisinin ağırlıklı eğriliği sıfır (φ – doğrusal) dır gerek ve yeter şart

$$x'(u)y''(u) = x''(u)y'(u) + bx'(u)(x'(u)^2 - y'(u)^2) \quad (3.2.153)$$

dır.

Benzer şekilde (3.2.153) non-lineer denkleminin çözümünde;

$y'(u) = 0$ ise; (3.2.143) denklemi $x'(u) = 0$ için sağlanır. Bu ise timelike bir eğri belirtmez.

$y'(u) \neq 0$ ise; (3.2.143) denklemi $x(u) = c_{17} \pm \frac{\ln(e^{by(u)} + \sqrt{e^{2by(u)} + c_{18}})}{b}$ için sağlanır, burada $c_{18} < 0$, $e^{2by(u)} + c_{18} > 0$ ve $c_{17}, c_{18} \in \mathbb{R}$ dir.

Teorem 3.2.22. e^{by} yoğunluklu Lorentz-Minkowski uzayında keyfi parametrelili timelike $\alpha(u) = (x(u), y(u), 0)$ eğrisinin ağırlıklı eğriliği sıfır (φ – doğrusal) olan eğrisi

$$\alpha_4(u) = \left(c_{17} \pm \frac{\ln(e^{by(u)} + \sqrt{e^{2by(u)} + c_{18}})}{b}, y(u), 0 \right) \quad (3.2.154)$$

şeklinde parametrelendirilebilir, burada $c_{18} < 0$, $e^{2by(u)} + c_{18} > 0$ ve $c_{17}, c_{18} \in \mathbb{R}$ dir.

Aşağıda, e^{ax} ve e^{by} yoğunluklu Lorentz-Minkowski uzayında, keyfi parametrelili $\alpha(u) = (x(u), y(u), 0)$ eğrisinin ağırlıklı eğriliği sıfır (φ -doğrusal) olan eğrilerin Frenet vektörleri ve Frenet vektörlerinden yararlanarak Smarandache eğrileri oluşturulmuştur. Ayrıca, oluşturulan bu Smarandache eğrilerinin Frenet vektörleri ve eğriliği hesaplanmıştır. Burada, yalnızca e^{ax} yoğunluklu Lorentz-Minkowski uzayında keyfi parametrelili spacelike $\alpha(u) = (x(u), y(u), 0)$ eğrisinin ağırlıklı eğriliği sıfır (φ -doğrusal) olan (3.2.142) eğrisi incelenmiştir. Çünkü e^{by} yoğunluklu Lorentz-Minkowski uzayında, keyfi parametrelili timelike $\alpha(u) = (x(u), y(u), 0)$ eğrisinin ağırlıklı eğriliği sıfır (φ -doğrusal) olan (3.2.154) eğrisi; (3.2.142) eğrisi için yapılan çalışmadaki işlemlere benzer işlemlerle yakın sonuçlar verir ve (3.2.144), (3.2.152) eğrileri ise birer doğru belirttiğinden yapılacak işlemlerin sonuçları kolayca hesaplanabilir.

Buna göre, e^{ax} yoğunluklu Lorentz-Minkowski uzayında keyfi parametrelili spacelike $\alpha(u) = (x(u), y(u), 0)$ eğrisinin ağırlıklı eğriliği sıfır (φ -doğrusal) olan (3.2.142) eğrisi

$$\alpha_1(u) = \left(x(u), c_2 + \frac{\ln \left(e^{ax(u)} + \sqrt{e^{2ax(u)} + c_1} \right)}{a}, 0 \right)$$

olarak alınırsa, Frenet vektörleri ve eğriliği

$$T_{\alpha_1} = \left(\frac{\sqrt{e^{2ax(u)} + c_1}}{\sqrt{-c_1}}, \frac{e^{ax(u)}}{\sqrt{-c_1}}, 0 \right), \quad (3.2.155)$$

$$N_{\alpha_1} = \left(\frac{-e^{ax(u)}}{\sqrt{-c_1}}, \frac{-\sqrt{e^{2ax(u)} + c_1}}{\sqrt{-c_1}}, 0 \right),$$

$$B_{\alpha_1} = (0, 0, 1)$$

ve

$$\kappa_{\alpha_1} = \frac{e^{ax(u)} x'(u)^{3/2} \sqrt[4]{-c_1}}{(e^{2ax(u)} + c_1)^{3/4}}$$

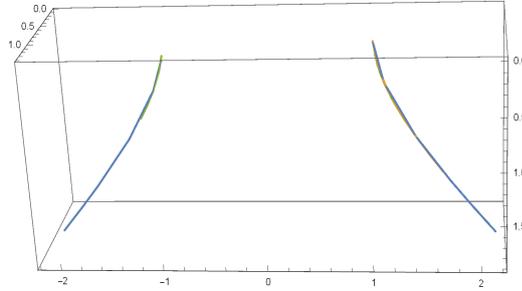
şeklinde bulunur.

(3.2.155) eşitliklerinden, (3.2.142) eğrisinin TB -Smarandache $\gamma_{TB\alpha_1}$ ve TNB -

Smarandache $\gamma_{TNB\alpha_1}$ eğrileri, sırasıyla

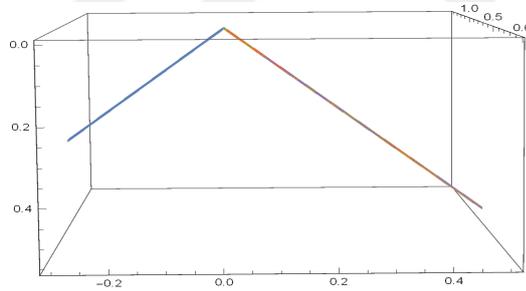
$$\gamma_{TB\alpha_1} = \left(\frac{\sqrt{e^{2ax(u)} + c_1}}{\sqrt{-c_1}}, \frac{e^{ax(u)}}{\sqrt{-c_1}}, \frac{1}{\sqrt{2}} \right) \quad (3.2.156)$$

ve



Şekil 3.34: (3.2.142) eğrisinin TB-Smarandache eğrileri

$$\gamma_{TNB\alpha_1} = \left(\frac{\sqrt{e^{2ax(u)} + c_1} - e^{ax(u)}}{\sqrt{-c_1}}, \frac{e^{ax(u)} - \sqrt{e^{2ax(u)} + c_1}}{\sqrt{-c_1}}, 1 \right) \quad (3.2.157)$$



Şekil 3.35: (3.2.142) eğrisinin TNB-Smarandache eğrileri

olarak bulunur.

Şekil 3.34 ve 3.35 da, sırasıyla $x(u) = \ln(u)$, $c_1 = -3$, $a = 1, 2, 3, 4, 5$ ve $x(u) = u$, $c_1 = -3$, $a = 1, 2, 3, 4, 5$ için e^{ax} yoğunluklu yoğunluklu Lorentz-Minkowski uzayında, keyfi parametrelili spacelike $\alpha(u) = (x(u), y(u), 0)$ eğrisinin ağırlıklı eğriliği sıfır (φ -doğrusal) olan (3.2.142) eğrisinin Smarandache eğrileri gösterilmiştir. Böylece;

- TB –Smarandache $\gamma_{TB\alpha_1}$ eğrisi timelike bir eğridir ve Frenet vektörleri ile eğriliği

$$T_{\gamma_{TB\alpha_1}} = \left(\frac{e^{ax(u)}}{\sqrt{-c_1}}, \frac{\sqrt{e^{2ax(u)} + c_1}}{\sqrt{-c_1}}, 0 \right),$$

$$N_{\gamma_{TB\alpha_1}} = \left(\frac{\sqrt{e^{2ax(u)} + c_1}}{\sqrt{-c_1}}, \frac{e^{ax(u)}}{\sqrt{-c_1}}, 0 \right),$$

$$B_{\gamma_{TB\alpha_1}} = (0, 0, 1)$$

ve

$$\kappa_{\gamma_{TB\alpha_1}} = \frac{(ax'(u)e^{ax(u)})^{3/2}}{(e^{2ax(u)} + c_1)^{3/4}}$$

dir.

- TNB –Smarandache $\gamma_{TNB\alpha_1}$ eğrisi null bir eğridir.

3.2.3 $e^{ax^2+by^2}$ Yoğunluklu \mathbb{E}_1^3 Uzayında Keyfi Parametrelili Eğriler

Bu alt kısımda e^φ ($\varphi = ax^2 + by^2$) yoğunluklu \mathbb{E}_1^3 de, sırasıyla spacelike ve timelike eğriler incelenerek bazı karakterizasyonlar verilecektir.

İlk olarak $\alpha(u) = (x(u), y(u), 0)$, \mathbb{E}_1^3 de keyfi parametrelili spacelike bir eğri olsun. $\alpha(u)$ eğrisinin Frenet vektörleri ve eğriliği (3.2.135) ve (3.2.136) eşitlikleriyle verilmiştir. En az biri sıfırdan farklı olan a , b reel sayıları ve $\varphi = ax^2 + by^2$ olmak üzere e^φ yoğunluklu Lorentz-Minkowski uzayında φ nin gradyant vektörü

$$\nabla\varphi = 2(ax(u), by(u), 0), \quad (3.2.158)$$

dır. (3.2.135) ve (3.2.158) eşitlikleri kullanılırsa, (1.0.2) den

$$\frac{d\varphi}{dN} = \frac{2(ax(u)y'(u) - bx'(u)y(u))}{\sqrt{y'(u)^2 - x'(u)^2}} \quad (3.2.159)$$

olarak bulunur. (3.2.136) ve (3.2.159) eşitlikleri yardımıyla, $e^{ax^2+by^2}$ yoğunluklu Lorentz-Minkowski uzayında keyfi parametrelili spacelike $\alpha(u) = (x(u), y(u), 0)$

eğrisinin ağırlıklı eğriliği, (1.0.1) den

$$\kappa_{\varphi} = \frac{x''(u)y'(u) - x'(u)y''(u) - 2(y'(u)^2 - x'(u)^2)(ax(u)y'(u) - bx'(u)y(u))}{(y'(u)^2 - x'(u)^2)^{3/2}} \quad (3.2.160)$$

şeklinde hesaplanır.

Sonuç 3.2.13. $e^{ax^2+by^2}$ yoğunluklu Lorentz-Minkowski uzayında, keyfi parametrelili spacelike $\alpha(u) = (x(u), y(u), 0)$ eğrisinin ağırlıklı eğriliğinin sıfır (φ – doğrusal) dır gerek ve yeter şart

$$x'(u)y''(u) + 2ax(u)y'(u)(y'(u)^2 - x'(u)^2) = x''(u)y'(u) + 2by(u)x'(u)(y'(u)^2 - x'(u)^2) \quad (3.2.161)$$

dır.

Aşağıda, $e^{ax^2+by^2}$ yoğunluklu Lorentz-Minkowski uzayında, a ve b nin durumlarına göre; keyfi parametrelili spacelike $\alpha(u) = (x(u), y(u), 0)$ eğrisinin ağırlıklı eğriliğini sıfır yapacak (φ – doğrusal) yeni eğriler oluşturulmuştur.

i) $a \neq 0$ ve $b = 0$ olsun.

Bu durumda, e^{ax^2} yoğunluklu Lorentz-Minkowski uzayında keyfi parametrelili spacelike $\alpha(u) = (x(u), y(u), 0)$ eğrisinin ağırlıklı eğriliği; (3.2.160) eşitliğinden

$$\kappa_{\varphi} = \frac{x''(u)y'(u) - x'(u)y''(u) - 2ax(u)y'(u)(y'(u)^2 - x'(u)^2)}{(y'(u)^2 - x'(u)^2)^{3/2}}$$

olarak elde edilir.

Sonuç 3.2.14. e^{ax^2} yoğunluklu Lorentz-Minkowski uzayında keyfi parametrelili spacelike $\alpha(u) = (x(u), y(u), 0)$ eğrisinin ağırlıklı eğriliğinin sıfır (φ – doğrusal) olması için gerek ve yeter şart

$$x'(u)y''(u) + 2ax(u)y'(u)(y'(u)^2 - x'(u)^2) = x''(u)y'(u) \quad (3.2.162)$$

olmasıdır.

Burada (3.2.162) denkleminin çözümü;

$x(u) = 0$ ise; (3.2.162) denklemi tüm $y(u)$ lar için sağlanır.

$x'(u) = 0$ ise; (3.2.162) denklemi $y'(u) = 0$ için sağlanır. Bu çözüm bir nokta belirtir.

$x'(u) \neq 0$ ise; (3.2.162) denklemi $y(u) = c_2 \pm \int_1^u \frac{x'(t)e^{ax^2(t)}}{\sqrt{e^{2ax^2(t)} + c_1}} dt$ için sağlanır, burada $c_1 < 0$, $e^{2ax^2(t)} + c_1 > 0$ ve $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ dir.

Teorem 3.2.23. e^{ax^2} yoğunluklu Lorentz-Minkowski uzayında keyfi parametrelili spacelike $\alpha(u) = (x(u), y(u), 0)$ eğrisinin ağırlıklı eğriliği sıfır (φ -doğrusal) olan eğrileri

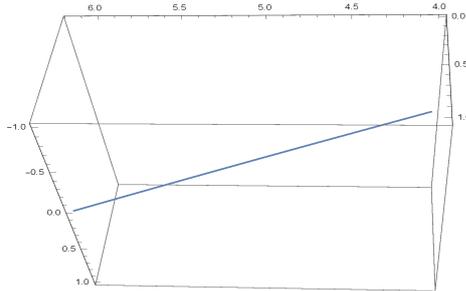
$$\alpha_1(u) = (0, y(u), 0) \quad (3.2.163)$$

ve

$$\alpha_2(u) = \left(x(u), c_2 \pm \int_1^u \frac{x'(t)e^{ax^2(t)}}{\sqrt{e^{2ax^2(t)} + c_1}} dt, 0 \right) \quad (3.2.164)$$

şeklinde parametrelendirilebilir, burada $c_1 < 0$, $e^{2ax^2(t)} + c_1 > 0$ ve $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ dir.

Şekil 3.36 de $x(u) = \sqrt{\ln(u)}$, $c_1 = -0.1$, $c_2 = 4$, $a = 1$ için e^{ax^2} yoğunluklu Lorentz-Minkowski uzayında keyfi parametrelili spacelike $\alpha(u) = (x(u), y(u), 0)$ eğrisinin ağırlıklı eğriliği sıfır (φ -doğrusal) olan (3.2.164) eğrisi gösterilmiştir.



Şekil 3.36: e^{ax^2} yoğunluklu \mathbb{E}_1^3 de φ -doğrusal spacelike eğrisi

ii) $b \neq 0$ ve $a = 0$ olsun.

Bu durumda, e^{by^2} yoğunluklu Lorentz-Minkowski uzayında keyfi parametrelili

spacelike $\alpha(u) = (x(u), y(u), 0)$ eğrisinin ağırlıklı eğriliği; (3.2.160) eşitliğinden

$$\kappa_\varphi = \frac{x''(u)y'(u) - x'(u)y''(u) + 2by(u)x'(u)(y'(u)^2 - x'(u)^2)}{(y'(u)^2 - x'(u)^2)^{3/2}}$$

olarak elde edilir.

Böylece aşağıdaki sonuç verilebilir.

Sonuç 3.2.15. e^{by^2} yoğunluklu Lorentz-Minkowski uzayında keyfi parametrelili spacelike $\alpha(u) = (x(u), y(u), 0)$ eğrisinin ağırlıklı eğriliğinin sıfır (φ – doğrusal) olması için gerek ve yeter şart

$$x'(u)y''(u) = x''(u)y'(u) + 2by(u)x'(u)(y'(u)^2 - x'(u)^2) \quad (3.2.165)$$

olmasıdır.

Benzer olarak (3.2.165) denkleminin çözümü;

$x'(u) = 0$ ise; (3.2.165) denklemi bütün $y(u)$ lar için sağlanır.

$x'(u) \neq 0$ ise; (3.2.165) denklemi $x(u) = c_4 \pm \int_1^u \frac{y'(t)}{\sqrt{1+c_5e^{2by^2(t)}}} dt$ için sağlanır,

burada $c_4, c_5 \in \mathbb{R}, c_5 > -e^{-2by^2(t)}$ dir.

Böylece aşağıdaki teorem verilebilir.

Teorem 3.2.24. e^{by^2} yoğunluklu Lorentz-Minkowski uzayında keyfi parametrelili spacelike $\alpha(u) = (x(u), y(u), 0)$ eğrisinin ağırlıklı eğriliği sıfır (φ – doğrusal) olan eğrileri

$$\alpha_3(u) = (c_3, y(u), 0) \quad (3.2.166)$$

ve

$$\alpha_4(u) = \left(c_4 \pm \int_1^u \frac{y'(t)}{\sqrt{1+c_5e^{2by^2(t)}}} dt, y(u), 0 \right) \quad (3.2.167)$$

şeklinde parametrelendirilebilir, burada $c_3, c_4, c_5 \in \mathbb{R}, c_5 > -e^{-2by^2(t)}$ dir.

Sonuç 3.2.16. e^{ax^2} (ve e^{by^2}) yoğunluklu Lorentz-Minkowski uzayında keyfi parametrelili spacelike $\alpha(u) = (x(u), y(u), 0)$ eğrisinin ağırlıklı eğriliği sıfır (φ –

doğrusal) olan (3.2.163) (ve (3.2.166)) eğrileri, yoğunluk katsayısı a 'nın (ve b 'nin) seçiminden bağımsızdır.

Şimdi de $\alpha(u) = (x(u), y(u), 0)$ eğrisinin \mathbb{E}_1^3 de keyfi parametrelili timelike bir eğri olduğunu kabul edelim. $\alpha(u)$ eğrisinin Frenet vektörleri ve eğriliği (3.2.145) ve (3.2.146) ile verilmiştir. Ayrıca, (3.2.145) ve (3.2.158) eşitlikleri kullanılırsa (1.0.2) den

$$\frac{d\varphi}{dN} = \frac{2(-ax(u)y'(u) + bx'(u)y(u))}{\sqrt{x'(u)^2 - y'(u)^2}} \quad (3.2.168)$$

olarak bulunur. (3.2.146) ve (3.2.159) eşitlikleri yardımıyla, $e^{ax^2+by^2}$ yoğunluklu Lorentz-Minkowski uzayında keyfi parametrelili timelike $\alpha(u) = (x(u), y(u), 0)$ eğrisinin ağırlıklı eğriliği, (1.0.1) den

$$\kappa_\varphi = \frac{x'(u)y''(u) - x''(u)y'(u) - (x'(u)^2 - y'(u)^2)(-2ax(u)y'(u) + 2by(u)x'(u))}{(x'(u)^2 - y'(u)^2)^{3/2}} \quad (3.2.169)$$

şeklinde hesaplanır.

Sonuç 3.2.17. $e^{ax^2+by^2}$ yoğunluklu Lorentz-Minkowski uzayında, keyfi parametrelili timelike $\alpha(u) = (x(u), y(u), 0)$ eğrisinin ağırlıklı eğriliğinin sıfır (φ – doğrusal) olması için gerek ve yeter şart

$$x'(u)y''(u) + 2ax(u)y'(u)(x'(u)^2 - y'(u)^2) = x''(u)y'(u) + 2by(u)x'(u)(x'(u)^2 - y'(u)^2) \quad (3.2.170)$$

olmasıdır.

Aşağıda $e^{ax^2+by^2}$ yoğunluklu Lorentz-Minkowski uzayında, a ve b nin durumlarına göre; keyfi parametrelili timelike $\alpha(u) = (x(u), y(u), 0)$ eğrisinin ağırlıklı eğriliğini sıfır yapan (φ –doğrusal) yeni eğriler oluşturulmuştur.

i) $a \neq 0$ ve $b = 0$ olsun.

Bu durumda, e^{ax^2} yoğunluklu Lorentz-Minkowski uzayında keyfi parametrelili timelike $\alpha(u) = (x(u), y(u), 0)$ eğrisinin ağırlıklı eğriliği; (3.2.169) eşitliğinden

$$\kappa_\varphi = \frac{x'(u)y''(u) - x''(u)y'(u) + 2ax(u)y'(u)(x'(u)^2 - y'(u)^2)}{(x'(u)^2 - y'(u)^2)^{3/2}}$$

olarak elde edilir.

Sonuç 3.2.18. e^{ax^2} yoğunluklu Lorentz-Minkowski uzayında keyfi parametrelili timelike $\alpha(u) = (x(u), y(u), 0)$ eğrisinin ağırlıklı eğriliğinin sıfır (φ – doğrusal) olması için gerek ve yeter şart

$$x'(u)y''(u) + 2ax(u)y'(u) (x'(u)^2 - y'(u)^2) = x''(u)y'(u) \quad (3.2.171)$$

olmasıdır.

Şimdi (3.2.171) denklemini sağlayacak olan timelike eğrilerinin $x(u)$ ve $y(u)$ bileşenlerini elde edelim.

$y'(u) = 0$ ise; (3.2.171) denklemi bütün $x(u)$ lar için sağlanır.

$y'(u) \neq 0$ ise; (3.2.171) denklemi $y(u) = c_7 \pm \int_1^u \frac{x'(t)}{\sqrt{1+c_8e^{2ax^2(t)}}} dt$ için sağlanır, burada $c_7, c_8 \in \mathbb{R}, c_8 > -e^{-2ax^2(t)}$ dir.

Teorem 3.2.25. e^{ax^2} yoğunluklu Lorentz-Minkowski uzayında keyfi parametrelili timelike $\alpha(u) = (x(u), y(u), 0)$ eğrisinin ağırlıklı eğriliği sıfır (φ – doğrusal) olan eğrileri

$$\alpha_5(u) = (x(u), c_6, 0) \quad (3.2.172)$$

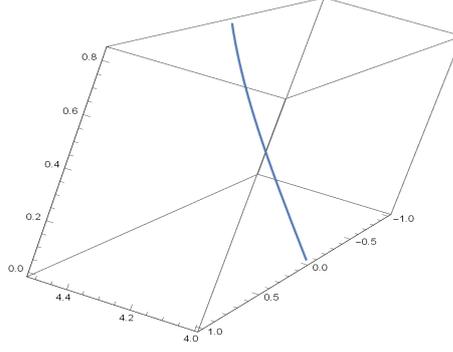
ve

$$\alpha_6(u) = \left(x(u), c_7 \pm \int_1^u \frac{x'(t)}{\sqrt{1+c_8e^{2ax^2(t)}}} dt, 0 \right) \quad (3.2.173)$$

şeklinde parametrelendirilebilir, burada $c_6, c_7, c_8 \in \mathbb{R}, c_8 > -e^{-2ax^2(t)}$ dir.

Şekil 3.37 de $x(u) = \sqrt{\ln(u)}, c_8 = -0.1, c_7 = 4, a = 1$ için e^{ax^2} yoğunluklu Lorentz-Minkowski uzayında keyfi parametrelili timelike $\alpha(u) = (x(u), y(u), 0)$ eğrisinin ağırlıklı eğriliği sıfır (φ – doğrusal) olan (3.2.173) eğrisi gösterilmiştir.

Sonuç 3.2.19. e^{ax^2} yoğunluklu Lorentz-Minkowski uzayında keyfi parametrelili timelike $\alpha(u) = (x(u), y(u), 0)$ eğrisinin ağırlıklı eğriliği sıfır (φ – doğrusal) olan (3.2.172) eğrisi yoğunluk katsayısı a 'nın seçiminden bağımsızdır.



Şekil 3.37: e^{ax^2} yoğunluklu \mathbb{E}_1^3 de φ -doğrusal timelike eğrisi

ii) $b \neq 0$ ve $a = 0$ olsun.

Bu durumda, e^{by^2} yoğunluklu Lorentz-Minkowski uzayında keyfi parametrelili timelike $\alpha(u) = (x(u), y(u), 0)$ eğrisinin ağırlıklı eğriliği; (3.2.169) eşitliğinden

$$\kappa_\varphi = \frac{x'(u)y''(u) - x''(u)y'(u) - 2by(u)x'(u)(x'(u)^2 - y'(u)^2)}{(x'(u)^2 - y'(u)^2)^{3/2}}$$

olarak elde edilir.

Sonuç 3.2.20. e^{by^2} yoğunluklu Lorentz-Minkowski uzayında keyfi parametrelili timelike $\alpha(u) = (x(u), y(u), 0)$ eğrisinin ağırlıklı eğriliğinin sıfır (φ - doğrusal) olması için gerek ve yeter şart

$$x'(u)y''(u) = x''(u)y'(u) + 2by(u)x'(u)(x'(u)^2 - y'(u)^2) \quad (3.2.174)$$

olmasıdır.

Benzer şekilde (3.2.174) denkleminin çözümü;

$y(u) = 0$ ise; (3.2.174) denklemi tüm $x(u)$ için sağlanır.

$y'(u) = 0$ ise; (3.2.174) denklemi $x'(u) = 0$ için sağlanır. Bu çözüm bir nokta belirtir.

$y'(u) \neq 0$ ise; (3.2.174) denklemi $x(u) = c_9 \pm \int \frac{e^{by^2(t)}y'(t)}{\sqrt{c_{10} + e^{2by^2(t)}}} dt$ için sağlanır, burada $c_{10} < 0$, $e^{2by^2(t)} + c_{10} > 0$ ve $c_9, c_{10} \in \mathbb{R}$ dir.

Teorem 3.2.26. e^{by^2} yoğunluklu Lorentz-Minkowski uzayında keyfi parametrelili timelike $\alpha(u) = (x(u), y(u), 0)$ eğrisinin ağırlıklı eğriliği sıfır (φ - doğrusal) olan

eğrileri

$$\alpha_7(u) = (x(u), 0, 0) \quad (3.2.175)$$

ve

$$\alpha_8(u) = \left(c_9 \pm \int_1^u \frac{e^{by^2(t)} y'(t)}{\sqrt{c_{10} + e^{2by^2(t)}}} dt, y(u), 0 \right) \quad (3.2.176)$$

şeklinde parametrelendirilebilir, burada $c_{10} < 0$, $e^{2by^2(t)} + c_{10} > 0$ ve $c_9, c_{10} \in \mathbb{R}$ dir.

Benzer şekilde e^{ax^2} ve e^{by^2} yoğunluklu Lorentz-Minkowski uzayında, keyfi parametrelili $\alpha(u) = (x(u), y(u), 0)$ eğrisinin ağırlıklı eğriliği sıfır (φ -doğrusal) olan eğrilerin Frenet vektörleri ve Frenet vektörlerinden yararlanarak Smarandache eğrileri oluşturularak bu eğrilerin Frenet vektörleri ve eğriliği hesaplanmıştır. Burada, yalnızca e^{ax^2} yoğunluklu Lorentz-Minkowski uzayında keyfi parametrelili spacelike ve timelike $\alpha(u) = (x(u), y(u), 0)$ eğrilerinin ağırlıklı eğriliği sıfır (φ -doğrusal) olan (3.2.164) ve (3.2.173) eğrileri incelenmiştir. Çünkü (3.2.167), (3.2.176) eğrileri benzer işlemlerle yakın sonuçlar verir ve (3.2.163), (3.2.166), (3.2.172), (3.2.175) eğrileri ise birer doğru belirttiğinden yapılacak işlemlerin sonuçları kolayca hesaplanabilir.

İlk önce e^{ax^2} yoğunluklu Lorentz-Minkowski uzayında, keyfi parametrelili spacelike $\alpha(u) = (x(u), y(u), 0)$ eğrisinin ağırlıklı eğriliği sıfır (φ -doğrusal) olan (3.2.164) eğrisi

$$\alpha_2(u) = \left(x(u), c_2 + \int_1^u \frac{x'(t)e^{ax^2(t)}}{\sqrt{e^{2ax^2(t)} + c_1}} dt, 0 \right)$$

olarak alınıp, Frenet vektörleri ve eğriliği hesaplanırsa

$$\begin{aligned} T_{\alpha_2} &= \left(\frac{\sqrt{e^{2ax^2(u)} + c_1}}{\sqrt{-c_1}}, \frac{e^{ax^2(u)}}{\sqrt{-c_1}}, 0 \right), \\ N_{\alpha_2} &= \left(\frac{-e^{ax^2(u)}}{\sqrt{-c_1}}, \frac{-\sqrt{e^{2ax^2(u)} + c_1}}{\sqrt{-c_1}}, 0 \right), \\ B_{\alpha_2} &= (0, 0, 1) \end{aligned} \quad (3.2.177)$$

ve

$$k_{\alpha_2} = \frac{2ae^{ax^2(u)}x(u)}{\sqrt{-c_1}}$$

olarak bulunur.

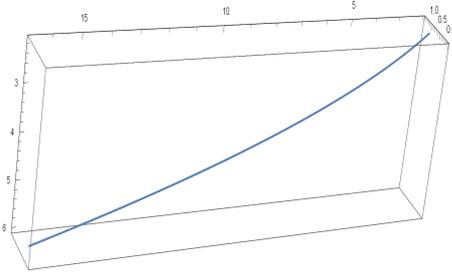
(3.2.177) eşitliğinden, (3.2.164) eğrisinin TB -Smarandache $\gamma_{TB\alpha_1}$ ve TNB -Smarandache $\gamma_{TNB\alpha_1}$ eğrileri, sırasıyla

$$\gamma_{TB\alpha_2} = \left(\frac{\sqrt{e^{2ax^2(u)} + c_1}}{\sqrt{-2c_1}}, \frac{e^{ax^2(u)}}{\sqrt{-2c_1}}, \frac{1}{\sqrt{2}} \right), \quad (3.2.178)$$

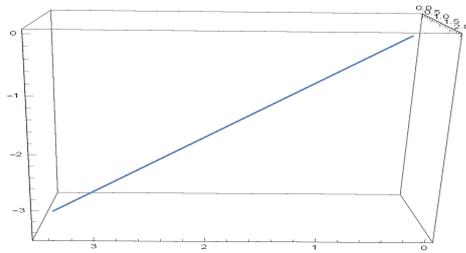
$$\gamma_{TNB\alpha_2} = \left(\frac{\sqrt{e^{2ax^2(u)} + c_1} - e^{ax^2(u)}}{\sqrt{-c_1}}, \frac{e^{ax^2(u)} - \sqrt{e^{2ax^2(u)} + c_1}}{\sqrt{-c_1}}, 1 \right) \quad (3.2.179)$$

dir.

Şekil 3.38 ve 3.39 ta $x(u) = \sqrt{u}$, $c_1 = -0.1$, $a = 1$ için e^{ax^2} yoğunluklu Lorentz-Minkowski uzayında keyfi parametrelili spacelike $\alpha(u) = (x(u), y(u), 0)$ eğrisinin ağırlıklı eğriliği sıfır (φ -doğrusal) olan (3.2.164) eğrilerinin TB -Smarandache ve TNB -Smarandache eğrileri gösterilmiştir.



Şekil 3.38: (3.2.164) eğrisinin TB-Smarandache eğrisi



Şekil 3.39: (3.2.164) eğrisinin TNB-Smarandache eğrisi

Burada;

- TB –Smarandache $\gamma_{TB\alpha_1}$ eğrisi timelike bir eğridir ve Frenet vektörleri ile eğriliği

$$\begin{aligned} T_{\gamma_{TB\alpha_2}} &= \left(\frac{e^{ax^2(u)}}{\sqrt{-c_1}}, \frac{\sqrt{e^{2ax^2(u)} + c_1}}{\sqrt{-c_1}}, 0 \right), \\ N_{\gamma_{TB\alpha_2}} &= \left(\frac{\sqrt{e^{2ax^2(u)} + c_1}}{\sqrt{-c_1}}, \frac{e^{ax^2(u)}}{\sqrt{-c_1}}, 0 \right), \\ B_{\gamma_{TB\alpha_2}} &= (0, 0, 1) \end{aligned}$$

ve

$$\kappa_{\gamma_{TB\alpha_2}} = \sqrt{2}$$

dir.

- TNB –Smarandache $\gamma_{TNB\alpha_1}$ eğrisi null bir eğridir.

Şimdi de benzer olarak e^{ax^2} yoğunluklu Lorentz-Minkowski uzayında, keyfi parametrelili timelike $\alpha(u) = (x(u), y(u), 0)$ eğrisinin ağırlıklı eğriliği sıfır (φ –doğrusal) olan (3.2.173) eğrisi

$$\alpha_6(u) = \left(x(u), c_7 + \int_1^u \frac{x'(t)}{\sqrt{1 + c_8 e^{2ax^2(t)}}} dt, 0 \right)$$

olarak alınıp, Frenet vektörleri ve eğriliği hesaplanırsa

$$\begin{aligned} T_{\alpha_6} &= \left(\frac{\sqrt{1 + e^{2ax^2(u)} c_8}}{\sqrt{e^{2ax^2(u)} c_8}}, \frac{1}{\sqrt{e^{2ax^2(u)} c_8}}, 0 \right), \\ N_{\alpha_6} &= \left(\frac{1}{\sqrt{e^{2ax^2(u)} c_8}}, \frac{\sqrt{1 + e^{2ax^2(u)} c_8}}{\sqrt{e^{2ax^2(u)} c_8}}, 0 \right), \\ B_{\alpha_6} &= (0, 0, 1) \end{aligned} \tag{3.2.180}$$

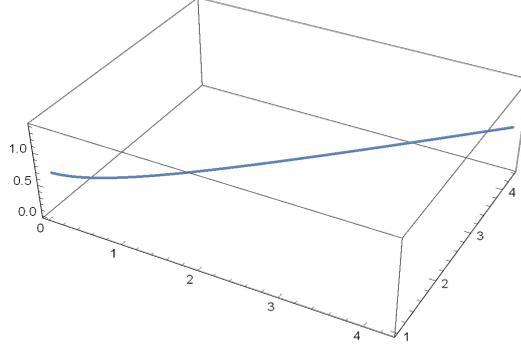
ve

$$\kappa_{\alpha_6} = -\frac{2ax(u)}{e^{ax^2(u)} c_8}$$

olarak bulunur.

(3.2.180) eşitliğinden, (3.2.173) eğrisinin NB –Smarandache $\gamma_{NB\alpha_6}$ ve TNB –Smarandache $\gamma_{TNB\alpha_6}$ eğrileri, sırasıyla

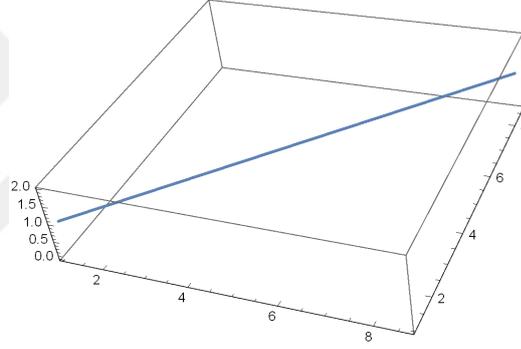
$$\gamma_{NB\alpha_6} = \left(\frac{1}{\sqrt{e^{2ax^2(u)} c_8}}, \frac{\sqrt{1 + e^{2ax^2(u)} c_8}}{\sqrt{e^{2ax^2(u)} c_8}}, \frac{1}{\sqrt{2}} \right) \tag{3.2.181}$$



Şekil 3.40: (3.2.173) eğrisinin NB-Smarandache eğrisi

ve

$$\gamma_{TNB\alpha_6} = \left(\frac{1 + \sqrt{1 + e^{2ax^2(u)}c_8}}{\sqrt{e^{2ax^2(u)}c_8}}, \frac{1 + \sqrt{1 + e^{2ax^2(u)}c_8}}{\sqrt{e^{2ax^2(u)}c_8}}, 1 \right) \quad (3.2.182)$$



Şekil 3.41: (3.2.173) eğrisinin TNB-Smarandache eğrisi

olur.

Şekil 3.40 ve 3.41 de $x(u) = \sqrt{u}$, $c_8 = -0.1$, $a = 1$ için e^{ax^2} yoğunluklu Lorentz-Minkowski uzayında keyfi parametrelili timelike $\alpha(u) = (x(u), y(u), 0)$ eğrisinin ağırlıklı eğriliği sıfır (φ -doğrusal) olan (3.2.173) eğrilerinin NB-Smarandache ve TNB-Smarandache eğrileri gösterilmiştir.

Burada;

- NB-Smarandache $\gamma_{NB\alpha_6}$ eğrisi timelike bir eğridir ve Frenet vektörleri ile eğriliği

$$T_{\gamma_{NB\alpha_6}} = \left(\frac{-\sqrt{1 + e^{2ax^2(u)}c_8}}{\sqrt{e^{2ax^2(u)}c_8}}, \frac{-1}{\sqrt{e^{2ax^2(u)}c_8}}, 0 \right),$$

$$N_{\gamma_{TB\alpha_6}} = \left(\frac{-1}{\sqrt{e^{2ax^2(u)}c_8}}, \frac{-\sqrt{1+e^{2ax^2(u)}c_8}}{\sqrt{e^{2ax^2(u)}c_8}}, 0 \right),$$

$$B_{\gamma_{TB\alpha_2}} = (0, 0, 1)$$

ve

$$\kappa_{\gamma_{TB\alpha_2}} = \pm 1$$

dir.

- *TNB*–Smarandache $\gamma_{TNB\alpha_6}$ eğrisi null bir eğridir.



4. YOĞUNLUKLU UZAYLARDA YÜZEYLER

Bu bölümde, e^{ax+by} ve $e^{ax^2+by^2}$ yoğunluklu Öklid ve Lorentz-Minkowski uzaylarında φ -doğrusal eğrilerden dönele yüzeyler ve regle yüzeyler elde edilerek, bu yüzeyler için bazı sonuçlar verilecektir.

4.1 Yoğunluklu Öklid Uzayında Yüzeyler

Bu kısımda, 3.1.2. ve 3.1.3. bölümlerinde verilen e^{ax+by} ve $e^{ax^2+by^2}$ yoğunluklu Öklid uzayında φ -doğrusal eğriler yardımıyla dönele yüzeyler ve regle yüzeyler elde edilerek bu yüzeylerin ortalama ve Gauss eğrilikleri hesaplanacak ve bazı karakterizasyonlar verilecektir.

4.1.1 e^{ax+by} Yoğunluklu \mathbb{E}^3 Uzayında Dönele Yüzeyler

Bu alt kısımda, e^{ax+by} yoğunluklu Öklid uzayında φ -doğrusal olan (3.1.15) ve (3.1.17) eğrilerini profil (üreteç) eğrisi kabul edip, sırasıyla x -ekseni, y -ekseni ve z -ekseni etrafında döndürülerek dönele yüzeyler oluşturulacaktır.

i) *Profil eğrisi (3.1.15) eğrisi olsun:*

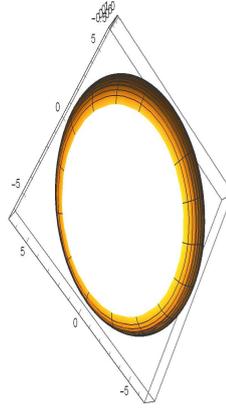
(3.1.15) eğrisinin x -ekseni etrafında döndürülmesiyle oluşan dönele yüzey parametrik olarak

$$X_{1x}(u, v) = \left(x(u), \left(c_2 + \frac{\arctan(\sqrt{c_1 e^{2ax(u)} - 1}}{a}) \right) \cos(v), \right. \\ \left. \left(c_2 + \frac{\arctan(\sqrt{c_1 e^{2ax(u)} - 1}}{a}) \right) \sin(v) \right) \quad (4.1.1)$$

şeklinde ifade edilebilir.

Şekil 4.1 de $x(u) = \sin u$, $c_1 = 3$, $c_2 = 5$ ve $a = 1$ olmak üzere, e^{ax} yoğunluklu Öklid uzayında φ -doğrusal olan (3.1.15) eğrisinin x -ekseni etrafında

döndürülmesiyle oluşan (4.1.1) dönel yüzeyi gösterilmiştir.



Şekil 4.1: (4.1.1) dönel yüzeyi

(4.1.1) yüzeyinin; normali

$$N = \frac{1}{\sqrt{c_1 e^{2ax(u)}}} \left(1, \sqrt{c_1 e^{2ax(u)} - 1} \cos(v), -\sqrt{c_1 e^{2ax(u)} - 1} \sin(v) \right),$$

birinci temel formunun katsayıları

$$\begin{aligned} E &= \frac{x'(u)^2 c_1 e^{2ax(u)}}{c_1 e^{2ax(u)} - 1}, \\ F &= 0, \\ G &= \left(c_2 + \frac{\arctan(\sqrt{c_1 e^{2ax(u)} - 1})}{a} \right)^2 \end{aligned} \quad (4.1.2)$$

ve ikinci temel formunun katsayıları

$$\begin{aligned} e &= \frac{ax'(u)^2 \sqrt{c_1 e^{2ax(u)}}}{c_1 e^{2ax(u)} - 1}, \\ f &= 0, \\ g &= \frac{\left(c_2 + \frac{\arctan(\sqrt{c_1 e^{2ax(u)} - 1})}{a} \right) \sqrt{c_1 e^{2ax(u)} - 1}}{\sqrt{c_1 e^{2ax(u)}}} \end{aligned} \quad (4.1.3)$$

olarak hesaplanır. (4.1.2) ve (4.1.3) yardımıyla (4.1.1) yüzeyinin Gauss ve ortalama eğrilikleri, sırasıyla

$$K = \frac{a^2 e^{-2ax(u)} \sqrt{c_1 e^{2ax(u)} - 1}}{ac_1 c_2 + c_1 \arctan(\sqrt{c_1 e^{2ax(u)} - 1})}$$

ve

$$H = \frac{\left(\sqrt{c_1 e^{2ax(u)} - 1} + ac_2 + \arctan(\sqrt{c_1 e^{2ax(u)} - 1})\right) a}{2(ac_2 + \arctan(\sqrt{c_1 e^{2ax(u)} - 1}))\sqrt{c_1 e^{2ax(u)}}$$

olarak elde edilir.

Teorem 4.1.1. e^{ax} yoğunluklu Öklid uzayında φ -doğrusal olan (3.1.15) eğrisinin x -ekseni etrafında döndürülmesiyle oluşan (4.1.1) dönel yüzey minimal ve flat değildir.

Sonuç 4.1.1. i) Eğer $ac_2 > 0$ ise, (4.1.1) dönel yüzeyinin tüm noktaları eliptiktir.

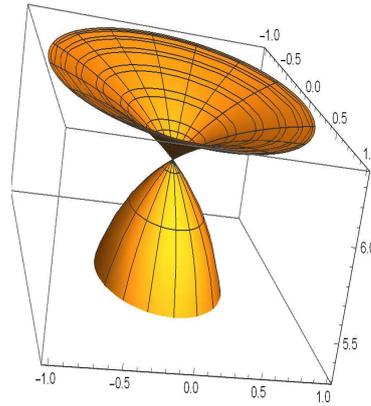
ii) Eğer $x(u) = -\frac{\ln(c_1)}{2a}$ ve $c_2 \neq 0$ ise, (4.1.1) dönel yüzeyinin tüm noktaları paraboliktir.

iii) Eğer $ac_2 \leq -\frac{\pi}{2}$ ise, (4.1.1) dönel yüzeyinin tüm noktaları hiperboliktir.

(3.1.15) eğrisinin y -ekseni etrafında döndürülmesiyle oluşan dönel yüzeyin parametrik ifadesi

$$X_{1y}(u, v) = \left(x(u) \cos v, c_2 + \frac{\arctan\left(\sqrt{c_1 e^{2ax(u)} - 1}\right)}{a}, -x(u) \sin v \right) \quad (4.1.4)$$

olarak bulunur.



Şekil 4.2: (4.1.4) dönel yüzeyi

Şekil 4.2 de $x(u) = \sin u$, $c_1 = 3$, $c_2 = 5$ ve $a = 1$ için e^{ax} yoğunluklu Öklid uzayında φ -doğrusal olan (3.1.15) eğrisinin y -ekseni etrafında döndürülmesiyle oluşan (4.1.4) dönele yüzey gösterilmiştir.

(4.1.4) yüzeyinin; normali

$$N = \frac{1}{\sqrt{c_1 e^{2ax(u)}}} \left(-\cos(v), \sqrt{c_1 e^{2ax(u)} - 1}, \sin(v) \right),$$

birinci temel formunun katsayıları

$$\begin{aligned} E &= \frac{x'(u)^2 c_1 e^{2ax(u)}}{-1 + c_1 e^{2ax(u)}}, \\ F &= 0, \\ G &= x(u)^2 \end{aligned} \tag{4.1.5}$$

ve ikinci temel formunun katsayıları

$$\begin{aligned} e &= \frac{ax'(u)^2 \sqrt{c_1 e^{2ax(u)}}}{1 - c_1 e^{2ax(u)}}, \\ f &= 0, \\ g &= \frac{x(u)}{\sqrt{c_1 e^{2ax(u)}}} \end{aligned} \tag{4.1.6}$$

şeklinde bulunur. Böylece, (4.1.5) ve (4.1.6) yardımıyla (4.1.4) yüzeyinin Gauss ve ortalama eğrilikleri, sırasıyla

$$K = -\frac{ae^{-2ax(u)}}{c_1 x(u)}$$

ve

$$H = \frac{1 - ax(u)}{2x(u) \sqrt{c_1 e^{2ax(u)}}}$$

olarak hesaplanır.

Teorem 4.1.2. e^{ax} yoğunluklu Öklid uzayında φ -doğrusal olan (3.1.15) eğrisinin y -ekseni etrafında döndürülmesiyle oluşan (4.1.4) dönele yüzeyi minimal ve flat değildir.

Sonuç 4.1.2. i) Eğer a ve $x(u)$ farklı işaretli ise, (4.1.4) dönel yüzeyinin tüm noktaları eliptiktir.

ii) Hiçbir zaman (4.1.4) dönel yüzeyinin noktaları parabolik değildir.

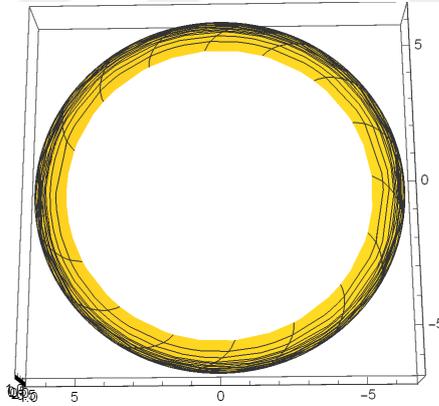
iii) Eğer a ve $x(u)$ aynı işaretli ise, (4.1.4) dönel yüzeyinin tüm noktaları hiperboliktir.

(3.1.15) eğrisinin z -ekseni etrafında döndürülmesiyle oluşan dönel yüzey

$$X_{1z}(u, v) = \left((x(u) \cos v - (c_2 \pm \frac{\arctan(\sqrt{c_1 e^{2ax(u)} - 1})}{a}) \sin v, \right. \quad (4.1.7)$$
$$\left. x(u) \sin v + (c_2 \pm \frac{\arctan(\sqrt{c_1 e^{2ax(u)} - 1})}{a}) \cos v, 0 \right)$$

olarak parametrelendirilebilir.

Şekil 4.3 de $x(u) = \sin u$, $c_1 = 3$, $c_2 = 5$ ve $a = 1$ olmak üzere e^{ax} yoğunluklu Öklid uzayında φ -doğrusal olan (3.1.15) eğrisinin z -ekseni etrafında döndürülmesiyle oluşan (4.1.7) dönel yüzeyi gösterilmiştir.



Şekil 4.3: (4.1.7) dönel yüzeyi

Sonuç 4.1.3. e^{ax} yoğunluklu Öklid uzayında φ -doğrusal olan (3.1.15) eğrisinin z -ekseni etrafında döndürülmesiyle oluşan (4.1.7) dönel yüzeyi düzlemsel bir yüzey olduğundan minimaldir.

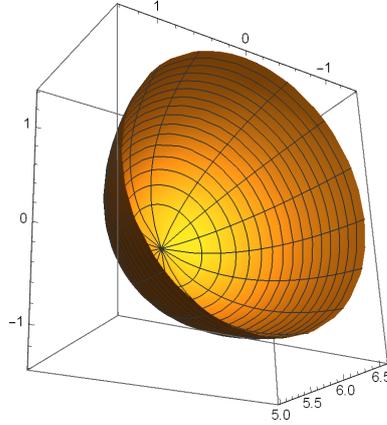
ii) Profil eğrisi (3.1.17) eğrisi olsun:

(3.1.17) eğrisinin x -ekseni etrafında döndürülmesiyle oluşan dönel yüzey

$$X_{2x}(u, v) = \left(c_4 - \frac{\ln(\cos(c_3 + ay(u)))}{a}, y(u) \cos v, y(u) \sin v \right) \quad (4.1.8)$$

olarak parametrelendirilebilir.

Şekil 4.4 de $y(u) = \arccos(e^u)$, $c_1 = 0$, $c_2 = 5$ ve $a = 1$ için e^{ax} yoğunluklu Öklid uzayında φ -doğrusal olan (3.1.17) eğrisinin x -ekseni etrafında döndürülmesiyle oluşan (4.1.8) dönel yüzeyi gösterilmiştir.



Şekil 4.4: (4.1.8) dönel yüzeyi

(4.1.8) yüzeyinin; normali

$$N = (\cos(c_3 + ay(u)), -\cos(v) \sin(c_3 + ay(u)), -\sin(v) \sin(c_3 + ay(u))),$$

birinci temel formunun katsayıları

$$\begin{aligned} E &= y'(u)^2 \sec^2(c_3 + ay(u)), \\ F &= 0, \\ G &= y(u)^2 \end{aligned} \quad (4.1.9)$$

ve ikinci temel formunun katsayıları

$$\begin{aligned}e &= ay'(u)^2 \sec(c_3 + ay(u)), \\f &= 0, \\g &= \sin(c_3 + ay(u))\end{aligned}\tag{4.1.10}$$

olarak elde edilir. (4.1.9) ve (4.1.10) yardımıyla (4.1.8) yüzeyinin Gauss ve ortalama eğrilikleri, sırasıyla

$$K = \frac{a \sin(2(c_3 + ay(u)))}{2y(u)}$$

ve

$$H = \frac{\sin(c_3 + ay(u)) + ay(u) \cos(c_3 + ay(u))}{2y(u)}$$

olarak hesaplanır.

Teorem 4.1.3. e^{ax} yoğunluklu Öklid uzayında φ -doğrusal olan (3.1.17) eğrisinin x -ekseni etrafında döndürülmesiyle oluşan (4.1.8) dönele yüzeyi minimal ve flat değildir.

Sonuç 4.1.4.

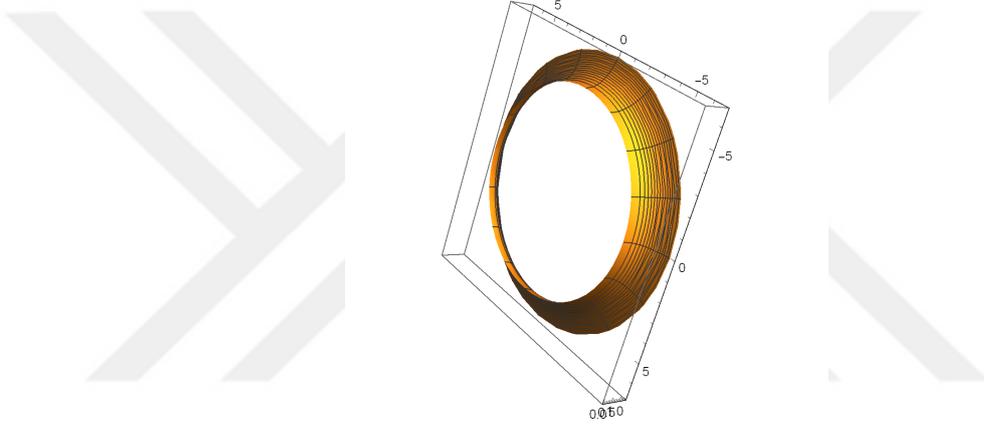
- i) $2k\pi < c_3 + ay(u) < \frac{\pi}{2} + 2k\pi$, $k \in \mathbb{N}$, olması durumunda;
 - a) a ve $y(u)$ aynı işaretli ise, (4.1.8) dönele yüzeyinin tüm noktaları eliptiktir.
 - b) a ve $y(u)$ farklı işaretli ise, (4.1.8) dönele yüzeyinin tüm noktaları hiperboliktir.
- ii) $\frac{3\pi}{2} + 2k\pi < c_3 + ay(u) < 2\pi + 2k\pi$, $k \in \mathbb{N}$, olması durumunda;
 - a) a ve $y(u)$ farklı işaretli ise, (4.1.8) dönele yüzeyinin tüm noktaları eliptiktir.
 - b) a ve $y(u)$ aynı işaretli ise, (4.1.8) dönele yüzeyinin tüm noktaları hiperboliktir.
- iii) $c_3 + ay(u) = 2k\pi$, $k \in \mathbb{N}$, iken (4.1.8) dönele yüzeyinin tüm noktaları paraboliktir.

(3.1.17) eğrisinin y -ekseni etrafında döndürülmesiyle oluşan dönel yüzeyin parametrik gösterimi

$$X_{2y}(u, v) = \left(\left(c_4 - \frac{\ln(\cos(c_3 + ay(u)))}{a} \right) \cos v, y(u), - \left(c_4 - \frac{\ln(\cos(c_3 + ay(u)))}{a} \right) \sin v \right) \quad (4.1.11)$$

dir.

Şekil 4.5 de $y(u) = \arccos(e^u)$, $c_1 = 0$, $c_2 = 5$ ve $a = 1$ için e^{ax} yoğunluklu Öklid uzayında φ -doğrusal olan (3.1.17) eğrisinin y -ekseni etrafında döndürülmesiyle oluşan (4.1.11) dönel yüzeyi gösterilmiştir.



Şekil 4.5: (4.1.11) dönel yüzeyi

(4.1.11) yüzeyinin; normali

$$N = (\cos(c_3 + ay(u)) \cos(v), -\sin(v), -\sin(v) \cos(c_3 + ay(u))),$$

birinci temel formunun katsayıları

$$\begin{aligned} E &= y'(u)^2 \sec^2(c_3 + ay(u)), \\ F &= 0, \\ G &= \left(c_4 - \frac{\ln(\cos(c_3 + ay(u)))}{a} \right)^2 \end{aligned} \quad (4.1.12)$$

ve ikinci temel formunun katsayıları

$$\begin{aligned} e &= ay'(u)^2 \sec(c_3 + ay(u)), \\ f &= 0, \\ g &= \cos(c_3 + ay(u)) \left(c_4 - \frac{\ln(\cos(c_3 + ay(u)))}{a} \right) \end{aligned} \quad (4.1.13)$$

şeklinde elde edilir. Böylece (4.1.12) ve (4.1.13) yardımıyla (4.1.11) yüzeyinin Gauss ve ortalama eğrilikleri, sırasıyla

$$K = -\frac{a^2 \cos(c_3 + ay(u))^2}{ac_4 - \ln(\cos(c_3 + ay(u)))}$$

ve

$$H = \frac{(1 - ac_4 + \ln(\cos(c_3 + ay(u)))) a \cos(c_3 + ay(u))}{2(\ln(\cos(c_3 + ay(u))) - ac_4)}$$

olarak hesaplanır.

Teorem 4.1.4. e^{ax} yoğunluklu Öklid uzayında φ -doğrusal olan (3.1.17) eğrisinin y -ekseni etrafında döndürülmesiyle oluşan (4.1.11) dönele yüzey minimal ve flat değildir.

Sonuç 4.1.5. i) a ve c_4 aynı işaretli ise, (4.1.11) dönele yüzeyinin tüm noktaları hiperboliktir.

ii) Hiçbir zaman (4.1.11) dönele yüzeyinin noktaları parabolik değildir.

iii) a ve $x(u)$ farklı işaretli olduğunda;

a) $|ac_4| > |\ln(\cos(c_3 + ay(u)))|$ ise, (4.1.11) dönele yüzeyinin tüm noktaları eliptiktir.

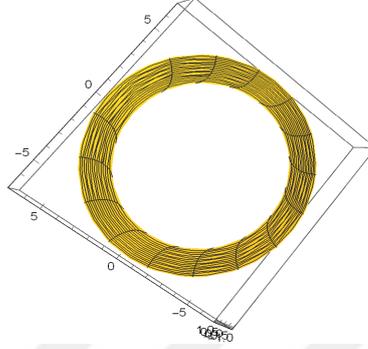
b) $|ac_4| < |\ln(\cos(c_3 + ay(u)))|$ ise, (4.1.11) dönele yüzeyinin tüm noktaları hiperboliktir.

(3.1.17) eğrisinin z -ekseni etrafında döndürülmesiyle oluşan dönele yüzey

$$\begin{aligned} X_{2z}(u, v) &= \left(c_4 - \frac{\ln(\cos(c_3 + ay(u)))}{a} \right) \cos(v) - y(u) \sin v, \\ &\left(c_4 - \frac{\ln(\cos(c_3 + ay(u)))}{a} \right) \sin(v) + y(u) \cos v, 0 \end{aligned} \quad (4.1.14)$$

olarak parametrelendirilebilir.

Şekil 4.6 de $y(u) = \arccos(e^u)$, $c_3 = 0$, $c_4 = 5$ ve $a = 1$ olmak üzere e^{ax} yoğunluklu Öklid uzayında φ –doğrusal olan (3.1.17) eğrisinin z -ekseni etrafında döndürülmesiyle oluşan (4.1.14) dönel yüzeyi gösterilmiştir.



Şekil 4.6: (4.1.14) dönel yüzeyi

Sonuç 4.1.6. e^{ax} yoğunluklu Öklid uzayında φ –doğrusal olan (3.1.17) eğrisinin z -ekseni etrafında döndürülmesiyle oluşan (4.1.14)) dönel yüzeyi düzlemsel bir yüzey olduğundan minimaldir.

4.1.2 e^{ax+by} Yoğunluklu \mathbb{E}^3 Uzayında Regle Yüzeyler

Bu alt kısımda, e^{ax+by} yoğunluklu Öklid uzayında taban eğrisi φ –doğrusal olan (3.1.15) ve (3.1.17) eğrileri, doğrultman vektörü ise (3.1.15) ve (3.1.17) eğrilerinin Smarandache eğrileri olan regle yüzeyler elde edilerek, bazı karakterizasyonlar verilecektir.

İlk olarak taban eğrisinin

$$\alpha_1(u) = \left(x(u), c_2 + \frac{\arctan(\sqrt{c_1 e^{2ax(u)} - 1})}{a}, 0 \right)$$

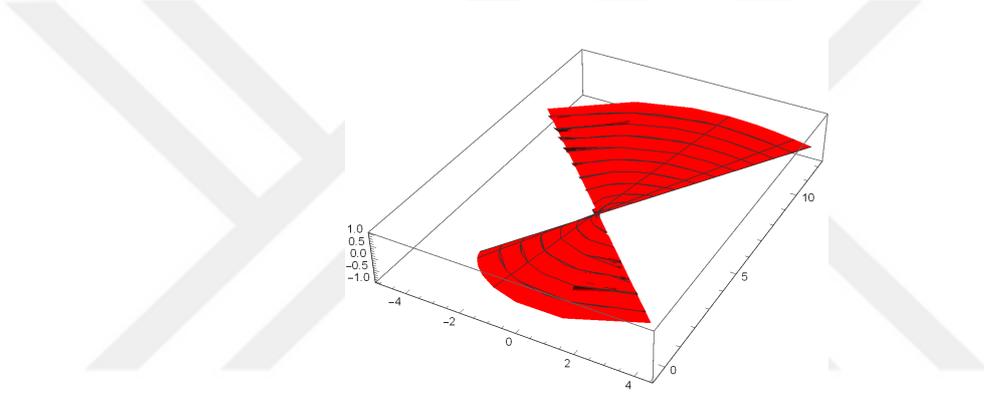
olduğunu kabul edelim.

i) Doğrultman vektörü (3.1.15) eğrisinin TN –Smarandache eğrisi olan (3.1.23) eğrisi olsun. Bu durumda regle yüzeyin parametrik ifadesi aşağıdaki gibi

elde edilir:

$$\begin{aligned}
R_{1TN} &:= \varphi_{1TN}(u, v) = \alpha_1(u) + vS_{1TN}(u) \\
&= \left(x(u) + v \left(\frac{\sqrt{c_1 e^{2ax(u)} - 1} - 1}{\sqrt{2c_1 e^{2ax(u)}}} \right), \right. \\
&\quad \left. c_2 + \frac{\arctan(\sqrt{c_1 e^{2ax(u)} - 1})}{a} + v \left(\frac{\sqrt{c_1 e^{2ax(u)} - 1} + 1}{\sqrt{2c_1 e^{2ax(u)}}} \right), 0 \right).
\end{aligned} \tag{4.1.15}$$

Şekil 4.7 de $x(u) = \sin(u)$, $c_1 = 3$, $c_2 = 5$ ve $a = 1$ için e^{ax} yoğunluklu Öklid uzayında φ -doğrusal olan (3.1.15) eğrisi ve (3.1.15) eğrisinin TN -Smarandache eğrisi olan (3.1.23) eğrisi tarafından oluşan (4.1.15) regle yüzeyi gösterilmiştir.



Şekil 4.7: (4.1.15) regle yüzeyi

Diğer taraftan, R_{1TN} regle yüzeyi düzlemsel bir yüzey olduğundan minimaldir, ayrıca dağılma parametresi sıfırdır ve dolayısıyla açılabilir bir yüzeydir.

R_{1TN} regle yüzeyi üzerindeki striksiyon eğrisinin parametrik gösterimi

$$\gamma_{1TN}(u) = \alpha_1(u) - \frac{\sqrt{c_1 e^{2ax(u)}}}{\sqrt{2}a} S_{1TN}(u)$$

olarak elde edilir.

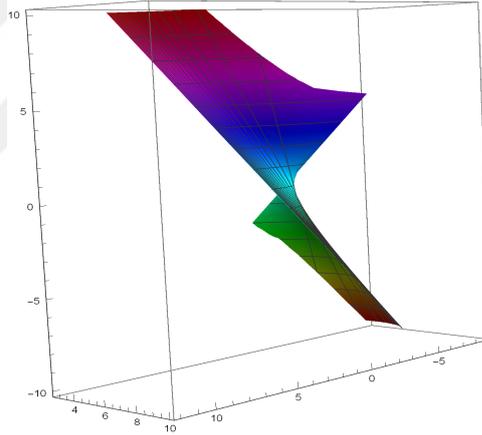
Teorem 4.1.5. R_{1TN} regle yüzeyinin striksiyon eğrisi $\gamma_{1TN}(u)$ ve taban eğrisi (3.1.15) asla kesişmezler.

ii) Doğrultman vektörü (3.1.15) eğrisinin TB –Smarandache eğrisi olan (3.1.24) eğrisi olması durumunda regle yüzey

$$\begin{aligned}
R_{1TB} &:= \varphi_{1TB}(u, v) = \alpha_1(u) + vS_{1TB}(u) \\
&= \left(x(u) + v \left(\frac{\sqrt{c_1 e^{2ax(u)} - 1}}{\sqrt{2c_1 e^{2ax(u)}}} \right), \right. \\
&\quad \left. c_2 + \frac{\arctan(\sqrt{c_1 e^{2ax(u)} - 1})}{a} + v \left(\frac{1}{\sqrt{2c_1 e^{2ax(u)}}} \right), \frac{v}{\sqrt{2}} \right)
\end{aligned} \tag{4.1.16}$$

şeklinde elde edilir.

Şekil 4.8 de $x(u) = \ln(u)$, $c_1 = 3$, $c_2 = 5$ ve $a = 1$ için e^{ax} yoğunluklu Öklid uzayında φ –doğrusal olan (3.1.15) eğrisi ve (3.1.15) eğrisinin TB –Smarandache eğrisi olan (3.1.23) eğrisi tarafından oluşan (4.1.16) regle yüzeyi gösterilmiştir.



Şekil 4.8: (4.1.16) regle yüzeyi

(4.1.16) yüzeyinin; normali

$$\begin{aligned}
N &= \left(\frac{2\sqrt{c_1 e^{2ax(u)}} - av\sqrt{-2 + 2c_1 e^{2ax(u)}}}{2\sqrt{(c_1 e^{2ax(u)} + a^2 v^2)c_1 e^{2ax(u)}}}, \right. \\
&\quad \left. \frac{-2\sqrt{(c_1 e^{2ax(u)} - 1)c_1 e^{2ax(u)} + av\sqrt{2}}}{2\sqrt{(c_1 e^{2ax(u)} + a^2 v^2)c_1 e^{2ax(u)}}}, \frac{avx'(u)}{\sqrt{2(c_1 e^{2ax(u)} + a^2 v^2)}} \right),
\end{aligned}$$

birinci temel formunun katsayıları

$$\begin{aligned} E &= \frac{x'(u)^2(2c_1e^{2ax(u)} + a^2v^2)}{2c_1e^{2ax(u)} - 2}, \\ F &= \frac{\sqrt{c_1e^{2ax(u)}}x'(u)}{\sqrt{2c_1e^{2ax(u)} - 2}}, \\ G &= 1 \end{aligned} \quad (4.1.17)$$

ve ikinci temel formunun katsayıları

$$\begin{aligned} e &= \frac{ax'(u)^2(2c_1e^{2ax(u)} - av(\sqrt{2(c_1e^{2ax(u)} - 1)c_1e^{2ax(u)}} + av))}{2(c_1e^{2ax(u)} - 1)\sqrt{c_1e^{2ax(u)} + a^2v^2}}, \\ f &= \frac{ax'(u)\sqrt{c_1e^{2ax(u)}}}{\sqrt{2(c_1e^{2ax(u)} + a^2v^2)}(c_1e^{2ax(u)} - 1)}, \\ g &= 0 \end{aligned} \quad (4.1.18)$$

olarak elde edilir. Böylece (4.1.17) ve (4.1.18) yardımıyla (4.1.16) yüzeyinin Gauss ve ortalama eğrilikleri, sırasıyla

$$K = -\frac{a^2c_1e^{2ax(u)}}{(c_1e^{2ax(u)} + a^2v^2)^2}$$

ve

$$H = \frac{a^2v \left(av\sqrt{c_1e^{2ax(u)}} - c_1\sqrt{-2 + 2c_1e^{2ax(u)}} \right)}{\sqrt{2c_1e^{2ax(u)}} (c_1e^{2ax(u)} + a^2v^2)^{3/2}}$$

dir. Diğer taraftan, R_{1TB} regle yüzeyin dağılma parametresi

$$\delta_{1TB} = \frac{\sqrt{c_1e^{2ax(u)}}}{a}$$

olarak hesaplanır. Ayrıca R_{1TB} regle yüzeyi üzerindeki striksiyon eğrisinin

$$\gamma_{1TB}(u) = \alpha_1(u)$$

olduğu görülür.

Teorem 4.1.6. R_{1TB} regle yüzeyi açılabilir bir regle yüzey değildir.

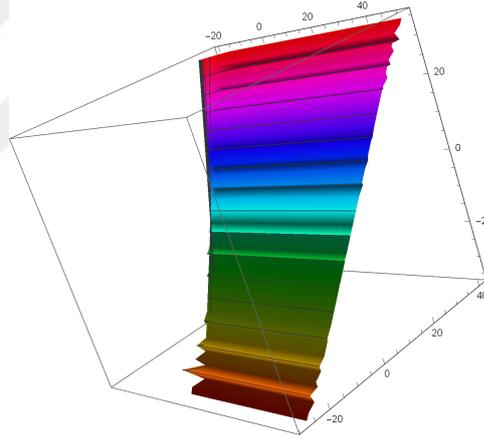
Teorem 4.1.7. R_{1TB} regle yüzeyinin $\gamma_{1TB}(u)$ striksiyon eğrisi ile (3.1.15) taban eğrisi çakışık eğrilerdir.

iii) Doğrultman vektörü (3.1.15) eğrisinin NB –Smarandache eğrisi olan (3.1.25) eğrisi olması durumunda regle yüzey

$$\begin{aligned}
R_{1TB} &:= \varphi_{1TB}(u, v) = \alpha_1(u) + vS_{1TB}(u) \\
&= (x(u) + v \left(\frac{-1}{\sqrt{2c_1 e^{2ax(u)}}} \right), \\
&\quad c_2 + \frac{\arctan(\sqrt{c_1 e^{2ax(u)} - 1})}{a} + v \left(\frac{\sqrt{-1 + c_1 e^{2ax(u)}}}{\sqrt{2c_1 e^{2ax(u)}}} \right), \frac{v}{\sqrt{2}})
\end{aligned} \tag{4.1.19}$$

olarak elde edilir.

Şekil 4.9 da $x(u) = \frac{1}{u}$, $c_1 = 3$, $c_2 = 5$ ve $a = 1$ olmak üzere e^{ax} yoğunluklu Öklid uzayında φ –doğrusal olan (3.1.15) eğrisi ve (3.1.15) eğrisinin NB –Smarandache eğrisi olan (3.1.25) eğrisi tarafından oluşan (4.1.19) regle yüzeyi gösterilmiştir.



Şekil 4.9: (4.1.19) regle yüzeyi

(4.1.19) yüzeyinin; normali

$$\begin{aligned}
N &= \left(\frac{2\sqrt{c_1 e^{2ax(u)}} + \sqrt{2}av}{\sqrt{\left(2c_1 e^{2ax(u)} + av(2\sqrt{2c_1 e^{2ax(u)}} + av)\right) c_1 e^{2ax(u)}}}, \right. \\
&\quad \frac{(2\sqrt{c_1 e^{2ax(u)}} + \sqrt{2}av)\sqrt{-1 + c_1 e^{2ax(u)}}}{2\sqrt{\left(2c_1 e^{2ax(u)} + av(2\sqrt{2c_1 e^{2ax(u)}} + av)\right) c_1 e^{2ax(u)}}}, \\
&\quad \left. \frac{2\sqrt{c_1 e^{2ax(u)}} + \sqrt{2}av}{2\sqrt{\left(2c_1 e^{2ax(u)} + av(2\sqrt{2c_1 e^{2ax(u)}} + av)\right)}} \right),
\end{aligned}$$

birinci temel formunun katsayıları

$$\begin{aligned} E &= \frac{x'(u)^2 \left(\sqrt{2c_1 e^{2ax(u)}} + av \right)^2}{2c_1 e^{2ax(u)} - 2}, \\ F &= 0, \\ G &= 1 \end{aligned} \tag{4.1.20}$$

ve ikinci temel formunun katsayıları

$$\begin{aligned} e &= \frac{ax'(u)^2 \sqrt{\left(2c_1 e^{2ax(u)} + av(2\sqrt{2c_1 e^{2ax(u)}} + av) \right)}}{2(c_1 e^{2ax(u)} - 1)}, \\ f &= 0, \\ g &= 0 \end{aligned} \tag{4.1.21}$$

olarak hesaplanır. (4.1.20) ve (4.1.21) yardımıyla (4.1.19) yüzeyinin Gauss ve ortalama eğrilikleri, sırasıyla

$$K = 0$$

ve

$$H = \frac{a \left(a^2 v^2 \sqrt{c_1 e^{2ax(u)}} \right) + 2c_1 e^{2ax(u)} \left(\sqrt{c_1 e^{2ax(u)}} + \sqrt{2} av \right)}{2\sqrt{c_1 e^{2ax(u)}} \left(2c_1 e^{2ax(u)} + av(2\sqrt{2c_1 e^{2ax(u)}} + av) \right)}$$

dir. Diğer taraftan, R_{1NB} regle yüzeyin dağılma parametresinin

$$\delta_{1NB} = 0$$

olduğu görülür. Ayrıca R_{1NB} regle yüzeyi üzerindeki striksiyon eğrisinin parametrik gösterimi de

$$\gamma_{1NB}(u) = \alpha_1(u) - \frac{\sqrt{2c_1 e^{2ax(u)}}}{a} S_{1NB}(u)$$

dir.

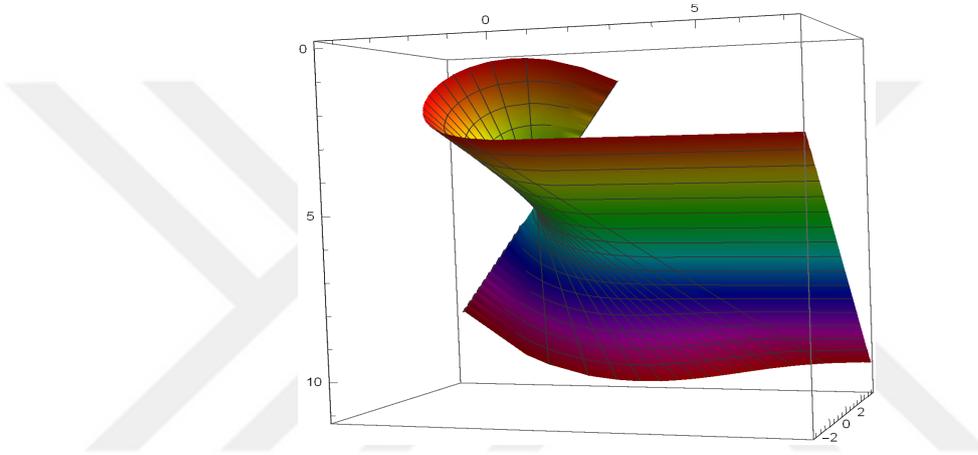
Teorem 4.1.8. R_{1NB} regle yüzeyi açılabilir bir regle yüzeydir.

Teorem 4.1.9. R_{1NB} regle yüzeyinin striksiyon eğrisi $\gamma_{1NB}(u)$ ve taban eğrisi (3.1.15) asla kesişmezler.

iv) Doğrultman vektörü (3.1.15) eğrisinin TNB –Smarandache eğrisi olan (3.1.26) eğrisi olması durumunda regle yüzey

$$\begin{aligned}
R_{1TNB} &:= \varphi_{1TNB}(u, v) = \alpha_1(u) + vS_{1TNB}(u) \\
&= \left(x(u) + v \left(\frac{\sqrt{-1 + e^{2ax(u)}} - 1}{\sqrt{3c_1 e^{2ax(u)}}} \right), \right. \\
&\quad \left. c_2 + \frac{\arctan(\sqrt{c_1 e^{2ax(u)}} - 1)}{a} + v \left(\frac{\sqrt{-1 + c_1 e^{2ax(u)}} + 1}{\sqrt{3c_1 e^{2ax(u)}}} \right), \frac{v}{\sqrt{3}} \right)
\end{aligned} \tag{4.1.22}$$

olarak elde edilir.



Şekil 4.10: (4.1.22) regle yüzeyi

Şekil 4.10 da $x(u) = \ln(\tan(u))$, $c_1 = 3$, $c_2 = 5$ ve $a = 1$ olmak üzere e^{ax} yoğunluklu Öklid uzayında φ –doğrusal olan (3.1.15) eğrisi ve (3.1.15) eğrisinin TNB –Smarandache eğrisi olan (3.1.26) eğrisi tarafından oluşan (4.1.22) regle yüzeyi gösterilmiştir.

(4.1.22) yüzeyinin; normali

$$\begin{aligned}
N &= \left(\frac{3\sqrt{c_1 e^{2ax(u)}} - \sqrt{3}va(\sqrt{c_1 e^{2ax(u)}} - 1)}{3\sqrt{2c_1 e^{2ax(u)}}(c_1 e^{2ax(u)} + av(\sqrt{3c_1 e^{2ax(u)}} + av))}, \right. \\
&\quad \frac{3\sqrt{(c_1 e^{2ax(u)} - 1)c_1 e^{2ax(u)}} + \sqrt{3}va(\sqrt{c_1 e^{2ax(u)}} - 1 + 1)}{3\sqrt{2c_1 e^{2ax(u)}}(c_1 e^{2ax(u)} + av(\sqrt{3c_1 e^{2ax(u)}} + av))}, \\
&\quad \left. \frac{3\sqrt{c_1 e^{2ax(u)}} + 2\sqrt{3}va}{3\sqrt{2}(c_1 e^{2ax(u)} + av(\sqrt{3c_1 e^{2ax(u)}} + av))} \right),
\end{aligned}$$

birinci temel formunun katsayıları

$$\begin{aligned}
E &= \frac{x'(u)^2 \left(3c_1 e^{2ax(u)} + 2av(\sqrt{3c_1 e^{2ax(u)}} + av) \right)}{3(c_1 e^{2ax(u)} - 1)}, \\
F &= \frac{x'(u) \sqrt{c_1 e^{2ax(u)}}}{\sqrt{3(c_1 e^{2ax(u)} - 1)}}, \\
G &= 1
\end{aligned} \tag{4.1.23}$$

ve ikinci temel formunun katsayıları

$$\begin{aligned}
e &= \frac{ax'(u)^2(3c_1 e^{2ax(u)} + av(\sqrt{3}\sqrt{c_1 e^{2ax(u)}}(2 - \sqrt{c_1 e^{2ax(u)} - 1}) + 2va)}{3(c_1 e^{2ax(u)} - 1)\sqrt{2(c_1 e^{2ax(u)} + av(\sqrt{3c_1 e^{2ax(u)}} + av))}}, \\
f &= \frac{a\sqrt{c_1 e^{2ax(u)}}x'(u)}{\sqrt{6(c_1 e^{2ax(u)} + av(\sqrt{3c_1 e^{2ax(u)}} + av))}}, \\
g &= 0
\end{aligned} \tag{4.1.24}$$

olarak elde edilir. (4.1.23) ve (4.1.24) eşitliklerinden (4.1.22) yüzeyinin Gauss ve ortalama eğrilikleri, sırasıyla

$$K = \frac{a^2 c_1 e^{2ax(u)}}{4 \left(c_1 e^{2ax(u)} + av(\sqrt{3c_1 e^{2ax(u)}} + av) \right)^2}$$

ve

$$H = \frac{a \left(2a^2 v^2 \sqrt{c_1 e^{2ax(u)}} \right) + c_1 e^{2ax(u)} \left(\sqrt{c_1 e^{2ax(u)}} - \sqrt{3}av(\sqrt{-1 + c_1 e^{2ax(u)}} - 2) \right)}{4\sqrt{2}\sqrt{c_1 e^{2ax(u)}} \left(c_1 e^{2ax(u)} + av(\sqrt{3c_1 e^{2ax(u)}} + av) \right)^{3/2}}$$

olarak bulunur. Diğer taraftan, R_{1TNB} regle yüzeyin dağılma parametresi

$$\delta_{1NB} = \frac{\sqrt{c_1 e^{2ax(u)}}}{a}$$

olarak hesaplanır. Ayrıca R_{1TNB} regle yüzeyinin üzerindeki striksiyon eğrisinin

$$\gamma_{1TB}(u) = \alpha_1(u) - \frac{\sqrt{3c_1 e^{2ax(u)}}}{2a} S_{1TNB}(u)$$

olduğu görülür.

Teorem 4.1.10. R_{1TNB} regle yüzeyi açılabilir bir yüzey değildir.

Teorem 4.1.11. R_{1TNB} regle yüzeyinin striksiyon eğrisi $\gamma_{1TNB}(u)$ ve taban eğrisi (3.1.15) asla kesişmezler.

Şimdi de taban eğrisinin

$$\alpha_2(u) = \left(c_4 - \frac{\ln(\cos(c_3 + ay(u)))}{a}, y(u), 0 \right)$$

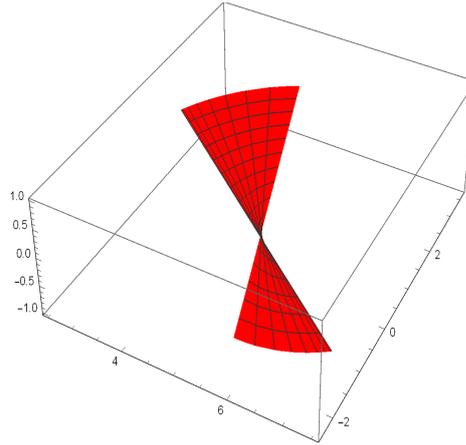
eğrisi olduğunu kabul edelim.

i) Doğrultman vektörü ise (3.1.17) eğrisinin TN –Smarandache eğrisi olan (3.1.28) eğrisi olsun. Bu durumda regle yüzey

$$\begin{aligned} R_{2TN} &:= \varphi_{2TN}(u, v) = \alpha_2(u) + vS_{2TN}(u) \\ &= \left(c_4 - \frac{\ln(\cos(c_3 + ay(u)))}{a} + v \left(\frac{\sin(c_3 + ay(u)) - \cos(c_3 + ay(u))}{\sqrt{2}} \right), \right. \\ &\quad \left. y(u) + v \left(\frac{\sin(c_3 + ay(u)) + \cos(c_3 + ay(u))}{\sqrt{2}} \right), 0 \right) \end{aligned} \quad (4.1.25)$$

dir.

Şekil 4.11 de $x(u) = u^2$, $c_3 = 3$, $c_4 = 5$ ve $a = 1$ olmak üzere e^{ax} yoğunluklu Öklid uzayında φ –doğrusal olan (3.1.17) eğrisi ve (3.1.17) eğrisinin TN –Smarandache eğrisi olan (3.1.28) eğrisi tarafından oluşan (4.1.25) regle yüzeyi gösterilmiştir.



Şekil 4.11: (4.1.25) regle yüzeyi

Burada, R_{2TN} regle yüzeyi düzlemsel bir yüzey olduğundan minimal ve açılabilir olduğu aşikardır.

Ayrıca, R_{2TN} regle yüzeyi üzerindeki striksiyon eğrisinin

$$\gamma_{2TN}(u) = \alpha_2(u) - \frac{\sec(c_3 + ay(u))}{\sqrt{2}a} S_{2TN}(u)$$

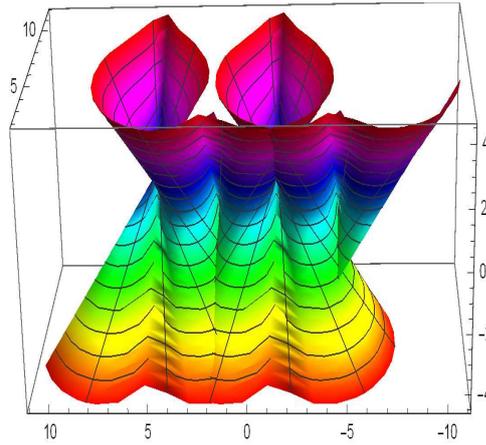
olduğu görülür.

Teorem 4.1.12. R_{2TN} regle yüzeyinin $\gamma_{2TN}(u)$ striksiyon eğrisi ve (3.1.17) taban eğrisi asla kesişmezler.

ii) Doğrultman vektörü (3.1.17) eğrisinin TB –Smarandache eğrisi olan (3.1.29) eğrisi olması durumunda regle yüzeyin parametrik ifadesi aşağıdaki gibidir:

$$\begin{aligned} R_{2TB} &:= \varphi_{2TB}(u, v) = \alpha_2(u) + v S_{2TB}(u) \\ &= \left(c_4 - \frac{\ln(\cos(c_3 + ay(u)))}{a} + v \left(\frac{\sin(c_3 + ay(u))}{\sqrt{2}} \right), \right. \\ &\quad \left. y(u) + v \left(\frac{\cos(c_3 + ay(u))}{\sqrt{2}} \right), \frac{v}{\sqrt{2}} \right). \end{aligned} \quad (4.1.26)$$

Şekil 4.12, $x(u) = u$, $c_1 = 3$, $c_2 = 5$ ve $a = 1$ olmak üzere e^{ax} yoğunluklu Öklid uzayında φ –doğrusal olan (3.1.17) eğrisi ve (3.1.17) eğrisinin TB –Smarandache eğrisi olan (3.1.29) eğrisi tarafından oluşan (4.1.26) regle yüzeyini göstermektedir.



Şekil 4.12: (4.1.26) regle yüzeyi

(4.1.26) yüzeyinin; normali

$$N = \left(\frac{\cos(c_3 + ay(u))(2 - \sqrt{2}av \sin(c_3 + ay(u)))}{\sqrt{2(2 + a^2v^2 + a^2v^2 \cos(2(c_3 + ay(u))))}}, \right. \\ \left. - \frac{\sqrt{2}av \cos^2(c_3 + ay(u)) + 2 \sin(c_3 + ay(u))}{\sqrt{2(2 + a^2v^2 + a^2v^2 \cos(2(c_3 + ay(u))))}}, \right. \\ \left. \frac{av \cos(c_3 + ay(u))}{\sqrt{2 + a^2v^2 + a^2v^2 \cos(2(c_3 + ay(u)))}} \right),$$

birinci temel formunun katsayıları

$$E = \frac{(4 + a^2v^2(1 + \cos(2(c_3 + ay(u)))) \sec(c_3 + ay(u))^2 y'(u)^2}{4}, \\ F = \frac{y'(u) \sec(c_3 + ay(u))}{\sqrt{2}}, \quad (4.1.27)$$

$$G = 1$$

ve ikinci temel formunun katsayıları

$$e = \frac{ay'(u)^2(4 + a^2v^2(1 + \cos(2(c_3 + ay(u)))) - 2\sqrt{2}av \sin(c_3 + ay(u)))}{2 \cos(c_3 + ay(u)) \sqrt{2(2 + a^2v^2 + a^2v^2 \cos(2(c_3 + ay(u))))}}, \\ f = \frac{ay'(u)}{\sqrt{2 + a^2v^2 + a^2v^2 \cos(2(c_3 + ay(u)))}}, \quad (4.1.28) \\ g = 0$$

olarak bulunur. (4.1.27) ve (4.1.28) yardımıyla (4.1.26) yüzeyinin Gauss ve ortalama eğrilikleri, sırasıyla

$$K = -\frac{4a^2 \cos(c_3 + ay(u))}{(2 + a^2v^2 + a^2v^2 \cos(2(c_3 + ay(u))))^2}$$

ve

$$H = \frac{a^2v (av + av \cos(2(c_3 + ay(u))) - 2\sqrt{2} \sin(c_3 + ay(u)))}{\sqrt{2} \sec(c_3 + ay(u)) (2 + a^2v^2 + a^2v^2 \cos(2(c_3 + ay(u))))^{3/2}}$$

olarak elde edilir. Diğer taraftan, R_{2TB} regle yüzeyin dağılma parametresi

$$\delta_{2TB} = \frac{\sec(c_3 + ay(u))}{2a}$$

olarak hesaplanır. Ayrıca R_{2TB} regle yüzeyi üzerindeki striksiyon eğrisi

$$\gamma_{2TB}(u) = \alpha_2(u)$$

dir.

Teorem 4.1.13. R_{2TB} regle yüzeyi açılabilir bir yüzey değildir.

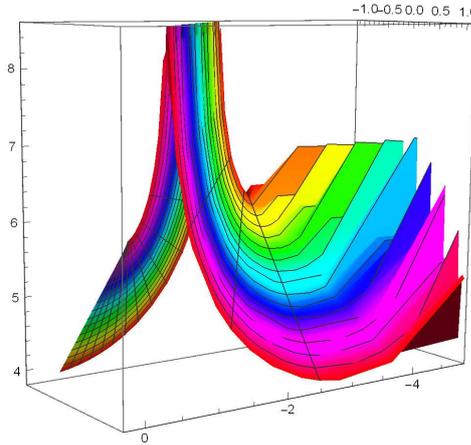
Teorem 4.1.14. R_{2TB} regle yüzeyinin striksiyon eğrisi $\gamma_{2TB}(u)$ ile taban eğrisi (3.1.17) çakışık eğrilerdir.

iii) Doğrultman vektörü (3.1.17) eğrisinin NB –Smarandache eğrisi olan (3.1.30) eğrisi olması durumunda regle yüzey

$$\begin{aligned} R_{2NB} &:= \varphi_{2NB}(u, v) = \alpha_1(u) + vS_{2NB}(u) \\ &= \left(c_4 - \frac{\ln(\cos(c_3 + ay(u)))}{a}, \frac{-\cos(c_3 + ay(u))}{\sqrt{2}}, \right. \\ &\quad \left. y(u) + v \left(\frac{\sin(c_3 + ay(u))}{\sqrt{2}} \right), \frac{v}{\sqrt{2}} \right), \end{aligned} \quad (4.1.29)$$

şeklinde parametrelendirilebilir.

Şekil 4.13 te $x(u) = \ln u$, $c_1 = 3$, $c_2 = 5$ ve $a = 1$ olmak üzere e^{ax} yoğunluklu Öklid uzayında φ –doğrusal olan (3.1.17) eğrisi ve (3.1.17) eğrisinin NB –Smarandache eğrisi olan (3.1.30) eğrisi tarafından oluşan (4.1.29) regle yüzeyi gösterilmiştir.



Şekil 4.13: (4.1.29) regle yüzeyi

Gerekli hesaplamalardan sonra (4.1.29) yüzeyinin; normalinin

$$N = \left(\frac{\cos(c_3 + ay(u))}{\sqrt{2}}, -\frac{\sin(c_3 + ay(u))}{\sqrt{2}}, \frac{\cos(c_3 + ay(u))(2 \sec(c_3 + ay(u)) + \sqrt{2}av)}{\sqrt{2}(2 + \sqrt{2}av \cos(c_3 + ay(u)))} \right),$$

birinci temel formunun katsayılarının

$$E = \left(\frac{y'(u)(\sqrt{2}av + 2 \sec(c_3 + ay(u)))}{2} \right)^2, \quad (4.1.30)$$

$$F = 0,$$

$$G = 1$$

ve ikinci temel formunun katsayılarının

$$e = \frac{ay'(u)^2 (2 + \sqrt{2}av \cos(c_3 + ay(u)))^2}{2\sqrt{2} \cos(c_3 + ay(u))}, \quad (4.1.31)$$

$$f = 0,$$

$$g = 0$$

olduğu görülür. (4.1.30) ve (4.1.31) yardımıyla (4.1.29) yüzeyinin Gauss ve ortalama eğrilikleri, sırasıyla

$$K = 0$$

ve

$$H = \frac{a (4 + a^2v^2 + 4\sqrt{2}av \cos(c_3 + ay(u)) + a^2v^2 \cos(2(c_3 + ay(u))))}{4 (2 + 2\sqrt{2}av \cos(c_3 + ay(u)) + a^2v^2 \cos(2(c_3 + ay(u))))^{3/2}}$$

olur. Ayrıca R_{2NB} regle yüzeyinin üzerindeki striksiyon eğrisinin parametrik gösteriminin de

$$\gamma_{2NB}(u) = \alpha_2(u) - \frac{\sqrt{2} \sec(c_3 + ay(u))}{a} S_{2NB}(u)$$

olduğu görülür.

Teorem 4.1.15. R_{2NB} regle yüzeyi açılabilir bir regle yüzeydir.

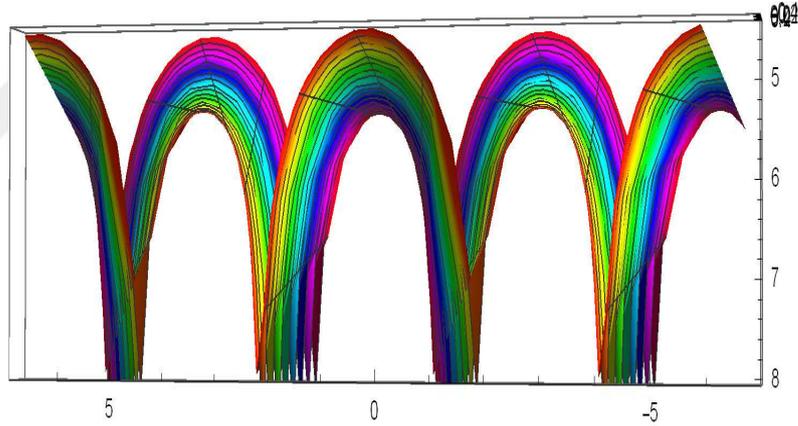
Teorem 4.1.16. R_{2NB} regle yüzeyinin striksiyon eğrisi $\gamma_{2NB}(u)$ ve taban eğrisi (3.1.17) asla kesişmezler.

iv) Doğrultman vektörü (3.1.17) eğrisinin TNB –Smarandache eğrisi olan (3.1.31) eğrisi olması durumunda regle yüzey

$$\begin{aligned} R_{2TNB} &:= \varphi_{2TNB}(u, v) = \alpha_2(u) + vS_{2TNB}(u) \\ &= \left(c_4 - \frac{\ln(\cos(c_3 + ay(u)))}{a} + v \left(\frac{\sin(c_3 + ay(u)) - \cos(c_3 + ay(u))}{\sqrt{3}} \right), \right. \\ &\quad \left. y(u) + v \left(\frac{\sin(c_3 + ay(u)) + \cos(c_3 + ay(u))}{\sqrt{3}} \right), \frac{v}{\sqrt{3}} \right) \end{aligned} \quad (4.1.32)$$

şeklinde parametrelendirilebilir.

Şekil 4.14 te $x(u) = u$, $c_1 = 3$, $c_2 = 5$ ve $a = 1$ olmak üzere e^{ax} yoğunluklu Öklid uzayında φ –doğrusal olan (3.1.17) eğrisi ve (3.1.17) eğrisinin TNB –Smarandache eğrisi olan (3.1.31) eğrisi tarafından oluşan (4.1.32) regle yüzeyi gösterilmiştir.



Şekil 4.14: (4.1.32) regle yüzeyi

Benzer olarak (4.1.32) yüzeyinin; normali

$$\begin{aligned} N &= \left(\frac{\cos(c_3 + ay(u)) (3 + \sqrt{3}av(\cos(c_3 + ay(u)) - \sin(c_3 + ay(u))))}{3\sqrt{2} + 2\sqrt{3}av \cos(c_3 + ay(u)) + 2a^2v^2 \cos(c_3 + ay(u))}, \right. \\ &\quad \left. - \frac{\cos(c_3 + ay(u)) (\sqrt{3}av((\cos(c_3 + ay(u)) + \sin(c_3 + ay(u))) + 3 \tan(c_3 + ay(u))))}{3\sqrt{2} + 2\sqrt{3}av \cos(c_3 + ay(u)) + 2a^2v^2 \cos(c_3 + ay(u))}, \right. \\ &\quad \left. \frac{2\sqrt{3}av(\cos(c_3 + ay(u)) + 3)}{3\sqrt{2} + 2\sqrt{3}av \cos(c_3 + ay(u)) + 2a^2v^2 \cos(c_3 + ay(u))} \right), \end{aligned}$$

birinci temel formunun katsayıları

$$E = \frac{y'(u)^2(3 + 2\sqrt{3}av \cos(c_3 + ay(u)) + 2a^2v^2 \cos(c_3 + ay(u)))}{3 \cos^2(c_3 + ay(u))}, \quad (4.1.33)$$

$$F = \frac{y'(u)}{\sqrt{3} \cos(c_3 + ay(u))},$$

$$G = 1$$

ve ikinci temel formunun katsayıları

$$e = \frac{y'(u)^2 a(3 + 2av \cos(c_3 + ay(u))(\sqrt{3} + av) - \sqrt{3}av \sin(c_3 + ay(u)))}{3 \cos(c_3 + ay(u)) \sqrt{2 + 2\sqrt{3}av \cos(c_3 + ay(u)) + 2a^2v^2 \cos(c_3 + ay(u))}}, \quad (4.1.34)$$

$$f = \frac{y'(u)a}{\sqrt{6 + 6\sqrt{3}av \cos(c_3 + ay(u)) + 6a^2v^2 \cos(c_3 + ay(u))}},$$

$$g = 0$$

şeklinde hesaplanır. (4.1.33) ve (4.1.34) yardımıyla (4.1.32) yüzeyinin Gauss ve ortalama eğrilikleri, sırasıyla

$$K = \frac{a^2 \cos(c_3 + ay(u))}{(2 + a^2v^2 + 2\sqrt{3}av \cos(c_3 + ay(u)) + a^2v^2 \cos(2(c_3 + ay(u))))^2}$$

ve

$$H = \frac{a(1 + \sqrt{3}av(2 \cos(c_3 + ay(u)) - \sin(c_3 + ay(u))) + a^2v^2 \cos(2(c_3 + ay(u))))}{2(2 + a^2v^2 + 2\sqrt{3}av \cos(c_3 + ay(u)) + a^2v^2 \cos(2(c_3 + ay(u))))^{3/2}}$$

dir. R_{2TNB} regle yüzeyin dağılma parametresi

$$\delta_{2TNB} = \frac{\sqrt{3} \sec(c_3 + ay(u))}{2a}$$

olarak hesaplanır. Ayrıca, R_{2TNB} regle yüzeyinin üzerindeki striksiyon eğrisinin parametrik gösterimi de

$$\gamma_{2TNB}(u) = \alpha_2(u) - \frac{\sqrt{3} \sec(c_3 + ay(u))}{2a} S_{2TNB}(u)$$

olarak elde edilir.

Teorem 4.1.17. R_{2TNB} regle yüzeyi açılabilir bir yüzey değildir.

Teorem 4.1.18. R_{2TNB} regle yüzeyinin striksiyon eğrisi $\gamma_{2TNB}(u)$ ve taban eğrisi (3.1.17) asla kesişmezler.

4.1.3 $e^{ax^2+by^2}$ Yoğunluklu \mathbb{E}^3 Uzayında Dönel Yüzeyler

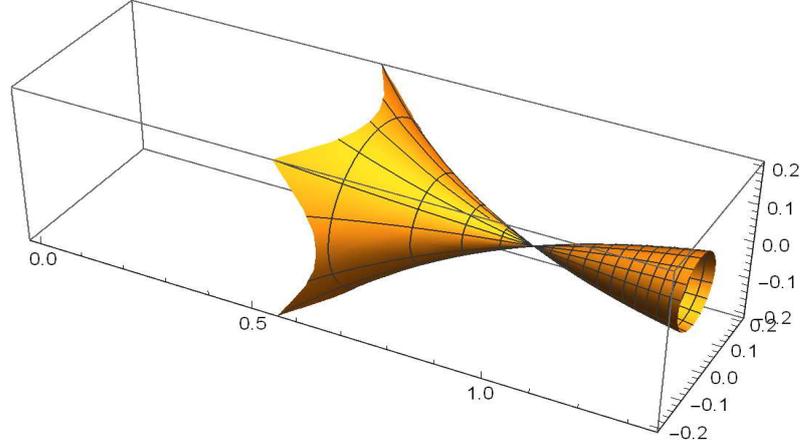
Bu alt kısımda, $e^{ax^2+by^2}$ yoğunluklu Öklid uzayında φ -doğrusal olan (3.1.38) eğrisi profil (üreteç) eğrisi kabul edilerek, sırasıyla x , y ve z -eksenleri etrafında döndürülmesiyle oluşan dönel yüzeyler incelenecektir.

(3.1.38) eğrisinin x -ekseni etrafında döndürülmesiyle oluşan dönel yüzey

$$X_x(u, v) = \left(x(u), \left(c_2 + \int_1^u \frac{x'(k)}{\sqrt{-1 + c_1 e^{2ax(k)^2}}} dk \right) \cos v, \right. \quad (4.1.35)$$
$$\left. \left(c_2 + \int_1^u \frac{x'(k)}{\sqrt{-1 + c_1 e^{2ax(k)^2}}} dk \right) \sin v \right)$$

olarak parametrelendirilebilir.

Şekil 4.15 te $x(u) = \sqrt[4]{u}$, $c_1 = 1$, $c_2 = 0$ ve $a = 1$ olmak üzere e^{ax^2} yoğunluklu Öklid uzayında φ -doğrusal olan (3.1.38) eğrisinin x -ekseni etrafında döndürülmesiyle oluşan (4.1.35) dönel yüzeyi gösterilmiştir.



Şekil 4.15: (4.1.35) dönel yüzeyi

(4.1.35) yüzeyinin; normali

$$N = \frac{1}{\sqrt{c_1 e^{2ax(u)^2}}} \left(1, -\sqrt{c_1 e^{2ax(u)^2} - 1} \cos(v), -\sqrt{c_1 e^{2ax(u)^2} - 1} \sin(v) \right),$$

birinci temel formunun katsayıları

$$\begin{aligned}
 E &= \frac{x'(u)^2 c_1 e^{2ax(u)^2}}{c_1 e^{2ax(u)^2} - 1}, \\
 F &= 0, \\
 G &= \left(c_2 + \int_1^u \frac{x'(k)}{\sqrt{-1 + c_1 e^{2ax(k)^2}}} dk \right)^2
 \end{aligned} \tag{4.1.36}$$

ve ikinci temel formunun katsayıları

$$\begin{aligned}
 e &= \frac{2ax(u)x'(u)^2 \sqrt{c_1 e^{2ax(u)^2}}}{\sqrt{c_1 e^{2ax(u)^2} - 1}}, \\
 f &= 0, \\
 g &= \frac{\sqrt{c_1 e^{2ax(u)^2} - 1} \left(c_2 + \int_1^u \frac{x'(k)}{\sqrt{-1 + c_1 e^{2ax(k)^2}}} dk \right)}{\sqrt{c_1 e^{2ax(u)^2}}}
 \end{aligned} \tag{4.1.37}$$

şekindedir. (4.1.36) ve (4.1.37) yardımıyla (4.1.35) yüzeyinin Gauss ve ortalama eğrilikleri, sırasıyla

$$K = \frac{x(u) 2ae^{-2ax(u)^2} \sqrt{-1 + c_1 e^{2ax(u)^2}}}{c_1 \left(c_2 + \int_1^u \frac{x'(k)}{\sqrt{-1 + c_1 e^{2ax(k)^2}}} dk \right)}$$

ve

$$H = \frac{\sqrt{-1 + c_1 e^{2ax(u)^2}}}{2 \left(c_2 + \int_1^u \frac{x'(k)}{\sqrt{-1 + c_1 e^{2ax(k)^2}}} dk \right) \sqrt{c_1 e^{2ax(u)^2}}} + \frac{ax(u)}{\sqrt{c_1 e^{2ax(u)^2}}}$$

olarak hesaplanır.

Teorem 4.1.19. e^{ax^2} yoğunluklu Öklid uzayında φ – doğrusal olan (3.1.38) eğrisinin x -ekseni etrafında döndürülmesiyle oluşan (4.1.35) döneel yüzey minimal ve flat değildir.

Sonuç 4.1.7. *i) $a \left(c_2 + \int_1^u \frac{x'(k)}{\sqrt{-1 + c_1 e^{2ax(k)^2}}} dk \right) x(u) > 0$ iken, (4.1.35) döneel yüzeyinin tüm noktaları eliptiktir.*

ii) $a \left(c_2 + \int_1^u \frac{x'(k)}{\sqrt{-1+c_1e^{2ax(k)^2}}} dk \right) x(u) < 0$ iken, (4.1.35) dönel yüzeyinin tüm noktaları hiperboliktir.

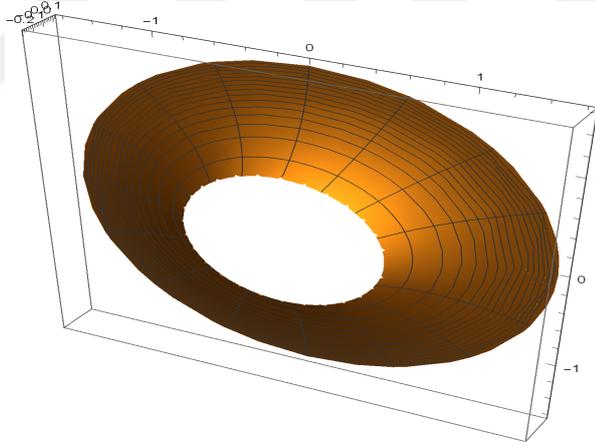
iii) $x(u) = 0$ iken, (4.1.35) dnel yüzeyinin tm noktaları paraboliktir.

(3.1.38) eğrisinin y -ekseni etrafında döndürülmesiyle oluşan dnel yüzeyin parametrik ifadesi

$$X_y(u, v) = \left(x(u) \cos v, c_2 + \frac{\arctan \left(\sqrt{c_1 e^{2ax(u)^2} - 1} \right)}{a}, -x(u) \sin v \right) \quad (4.1.38)$$

dir.

şekil 4.16 da $x(u) = \sin u$, $c_1 = 3$, $c_2 = 5$ ve $a = 1$ için e^{ax^2} yoğunluklu klid uzayında φ -doğrusal olan (3.1.38) eğrisinin y -ekseni etrafında döndürülmesiyle oluşan (4.1.38) dönel yüzeyi gösterilmiştir.



şekil 4.16: (4.1.38) dönel yüzeyi

Benzer işlemlerle (4.1.38) yüzeyinin; normalinin

$$N = \frac{1}{\sqrt{c_1 e^{2ax(u)^2}}} \left(-\cos(v), \sqrt{c_1 e^{2ax(u)^2} - 1}, \sin(v) \right),$$

birinci temel formunun katsayılarının

$$\begin{aligned} E &= \frac{x'(u)^2 c_1 e^{2ax(u)^2}}{-1 + c_1 e^{2ax(u)}}, \\ F &= 0, \\ G &= x(u)^2 \end{aligned} \tag{4.1.39}$$

ve ikinci temel formunun katsayılarının

$$\begin{aligned} e &= \frac{2ax(u)x'(u)^2 \sqrt{c_1 e^{2ax(u)^2}}}{1 - c_1 e^{2ax(u)}}, \\ f &= 0, \\ g &= \frac{x(u)}{\sqrt{c_1 e^{2ax(u)^2}}} \end{aligned} \tag{4.1.40}$$

olduğu görülür. (4.1.39) ve (4.1.40) yardımıyla (4.1.38) yüzeyinin Gauss ve ortalama eğrilikleri, sırasıyla

$$K = -\frac{2ae^{-2ax(u)^2}}{c_1}$$

ve

$$H = \frac{2ae^{2ax(u)^2} - 1}{2x(u)\sqrt{c_1 e^{2ax(u)^2}}}$$

olarak hesaplanır.

Teorem 4.1.20. e^{ax^2} yoğunluklu Öklid uzayında φ – doğrusal olan (3.1.38) eğrisinin y -ekseni etrafında döndürülmesiyle oluşan (4.1.38) dönel yüzeyi minimal ve flat değildir.

Sonuç 4.1.8. i) $a < 0$ ise, (4.1.38) dönel yüzeyinin tüm noktaları eliptiktir.

ii) Hiçbir zaman (4.1.38) dönel yüzeyinin noktaları parabolik değildir.

iii) $a > 0$ ise, (4.1.38) dönel yüzeyinin tüm noktaları hiperboliktir.

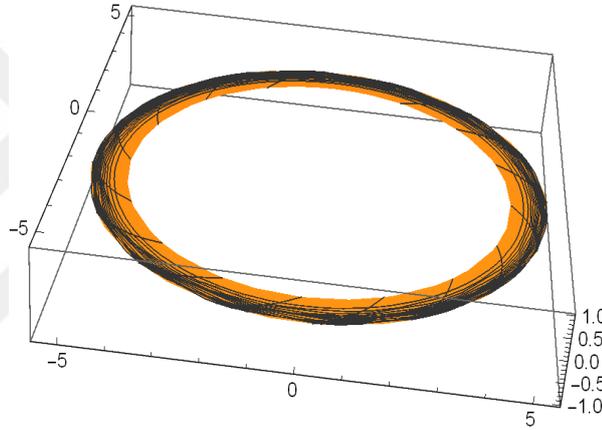
(3.1.38) eğrisinin z -ekseni etrafında döndürülmesiyle oluşan dönel yüzey

$$X_z(u, v) = \left((x(u) \cos v - \left(c_2 + \int_1^u \frac{x'(k)}{\sqrt{-1 + c_1 e^{2ax(k)^2}} dk} \right) \sin v, \right. \quad (4.1.41)$$

$$\left. x(u) \sin v + \left(c_2 + \int_1^u \frac{x'(k)}{\sqrt{-1 + c_1 e^{2ax(k)^2}} dk} \right) \cos v, 0 \right)$$

dir.

Şekil 4.17 de $x(u) = \sin u$, $c_1 = 3$, $c_2 = 5$ ve $a = 1$ olmak üzere e^{ax^2} yoğunluklu Öklid uzayında φ -doğrusal olan (3.1.38) eğrisinin z -ekseni etrafında döndürülmesiyle oluşan (4.1.41) dönel yüzeyi gösterilmiştir.



Şekil 4.17: (4.1.41) dönel yüzeyi

Sonuç 4.1.9. e^{ax^2} yoğunluklu Öklid uzayında φ -doğrusal olan (3.1.38) eğrisinin z -ekseni etrafında döndürülmesiyle oluşan (4.1.41) dönel yüzeyi düzlemsel bir yüzey olduğundan minimaldir.

4.1.4 $e^{ax^2+by^2}$ Yoğunluklu \mathbb{E}^3 Uzayında Regle Yüzeyler

Bu alt kısımda, $e^{ax^2+by^2}$ yoğunluklu Öklid uzayında φ -doğrusal olan (3.1.38) eğrisini taban eğrisi, (3.1.38) eğrisinin Smarandache eğrilerini de doğrultman vektörü olarak regle yüzeyler oluşturulacaktır.

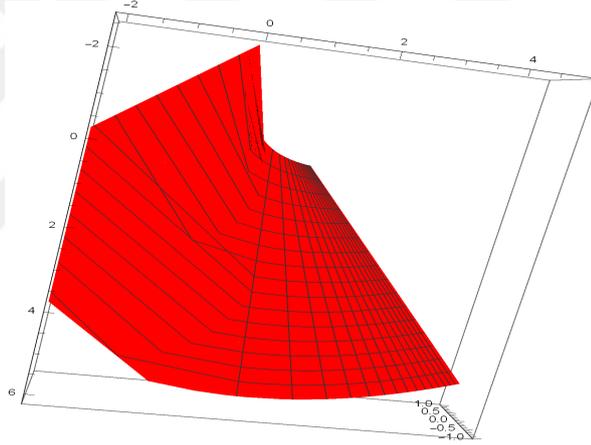
İlk olarak oluşturulacak olan regle yüzeyin taban eğrisi (3.1.38) eğrisi ve doğrultmanı da (3.1.45) vektörü olsun. Bu durumda regle yüzey

$$R_{TN} := \varphi_{TN}(u, v) = \alpha(u) + vS_{TN}(u) \quad (4.1.42)$$

$$= (x(u) + v \left(\frac{A_1 - 1}{\sqrt{2}A_2} \right), c_2 + \int_1^u \frac{x'(k)}{\sqrt{-1 + c_1 e^{2ax(k)^2}}} dk + v \left(\frac{A_1 + 1}{\sqrt{2}A_2} \right), 0)$$

olarak elde edilir. Bu alt kısımda, $A_1 = \sqrt{-1 + c_1 e^{2ax(u)^2}}$ ve $A_2 = \sqrt{c_1 e^{2ax(u)^2}}$ olarak göz önüne alınacaktır.

Şekil 4.18 de $x(u) = \sqrt[4]{u}$, $c_1 = 1$, $c_2 = 0$ ve $a = 1$ olmak üzere e^{ax^2} yoğunluklu Öklid uzayında φ – *doğrusal* olan (3.1.38) taban eğrili ve TN –Smarandache (3.1.45) doğrultmanlı (4.1.42) regle yüzeyi gösterilmiştir.



Şekil 4.18: (4.1.42) regle yüzeyi

R_{TN} regle yüzeyi düzlemsel bir yüzey olduğundan minimaldir, dağılma parametresi sıfırdır ve açılabilir. Ayrıca, R_{TN} regle yüzeyinin üzerindeki striksiyon eğrisi

$$\gamma_{TN}(u) = \alpha(u) - \frac{A_2}{2\sqrt{2}ax(u)} S_{TN}(u)$$

şeklindedir.

Teorem 4.1.21. R_{TN} regle yüzeyinin striksiyon eğrisi $\gamma_{TN}(u)$ ve taban eğrisi (3.1.38) asla kesişmezler.

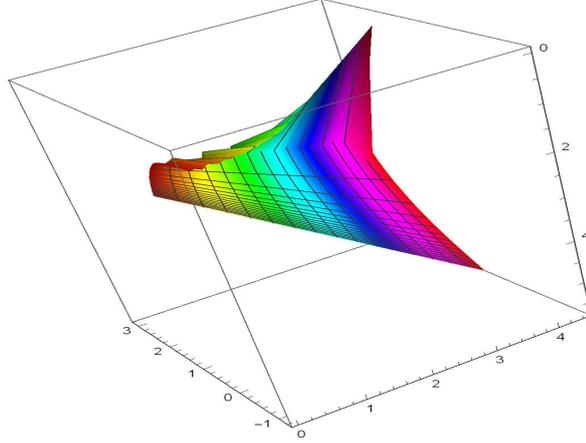
İkinci olarak taban eğrisi (3.1.38) eğrisi ve doğrultman vektörü (3.1.46) vektörü olan regle yüzey

$$R_{TB} := \varphi_{TB}(u, v) = \alpha(u) + vS_{TB}(u) \quad (4.1.43)$$

$$= \left(x(u) + \frac{A_1 v}{\sqrt{2}A_2}, c_2 + \int_1^u \frac{x'(k)}{\sqrt{-1 + c_1 e^{2ax(k)^2}}} dk + \frac{v}{\sqrt{2}A_2}, \frac{v}{\sqrt{2}} \right)$$

olarak elde edilir.

Şekil 4.19 da $x(u) = \sqrt[4]{u}$, $c_1 = 1$, $c_2 = 0$ ve $a = 1$ için e^{ax^2} yoğunluklu Öklid uzayında φ -doğrusal olan (3.1.38) eğrisi ve TB -Smarandache (3.1.46) vektörü tarafından oluşan (4.1.43) regle yüzeyi gösterilmiştir.



Şekil 4.19: (4.1.43) regle yüzeyi

(4.1.43) yüzeyinin; normali

$$N = \left(\frac{A_2 - \sqrt{2}vax(u)A_1}{A_2\sqrt{(A_2)^2 + 4a^2v^2x(u)^2}}, -\frac{A_1A_2 + \sqrt{2}vax(u)}{A_2\sqrt{(A_2)^2 + 4a^2v^2x(u)^2}}, \frac{\sqrt{2}vax(u)}{\sqrt{(A_2)^2 + 4a^2v^2x(u)^2}} \right),$$

birinci temel formunun katsayıları

$$E = \frac{x'(u)((A_2)^2 + 2a^2v^2x(u)^2)}{(A_1)^2}, \quad (4.1.44)$$

$$F = \frac{x'(u)A_2}{\sqrt{2}A_1},$$

$$G = 1$$

ve ikinci temel formunun katsayıları

$$e = \frac{ax'(u)^2(A_1A_2\sqrt{2}v + 2x(u)(A_2)^2 - 2\sqrt{2}avx(u)^2A_1A_2 + 4a^2v^2x(u)^3)}{(A_1)^2\sqrt{(A_2)^2 + 4a^2v^2x(u)^2}}, \quad (4.1.45)$$

$$f = \frac{A_2\sqrt{2}ax(u)x'(u)}{A_1\sqrt{(A_2)^2 + 4a^2v^2x(u)^2}},$$

$$g = 0$$

şeklinde hesaplanır. (4.1.44) ve (4.1.45) yardımıyla, (4.1.43) yüzeyinin Gauss ve ortalama eğrilikleri, sırasıyla

$$K = -\frac{4a^2(A_2)^2x(u)^2}{((A_2)^2 + 4a^2v^2x(u)^2)^2}$$

ve

$$H = \frac{av(\sqrt{2}A_2A_1 - 2\sqrt{2}aA_2A_1x(u)^2 + 4a^2vx(u)^3)}{((A_2)^2 + 4a^2v^2x(u)^2)^{3/2}}$$

olarak elde edilir. Diğer taraftan, R_{TB} regle yüzeyinin dağılma parametresinin

$$\delta_{TB} = \frac{A_2}{2ax(u)}$$

olduğu görülür. Ayrıca R_{TB} regle yüzeyinin üzerindeki striksiyon eğrisinin parametrik gösterimi de

$$\gamma_{TB}(u) = \alpha(u)$$

şeklindedir.

Teorem 4.1.22. R_{TB} regle yüzeyi açılabilir bir yüzey değildir.

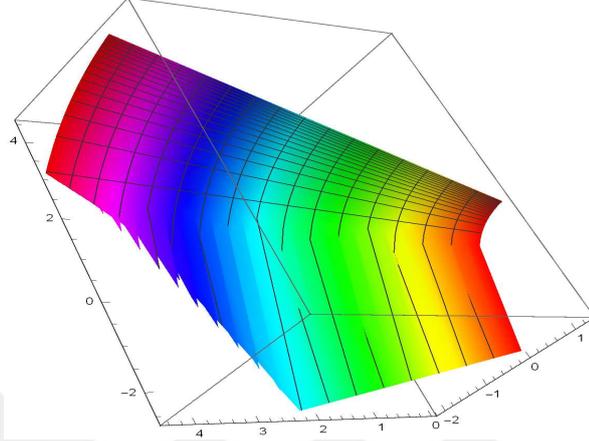
Teorem 4.1.23. R_{TB} regle yüzeyinin striksiyon eğrisi $\gamma_{TB}(u)$ ile taban eğrisi (3.1.38) çakışık eğrilerdir.

Üçüncü olarak da oluşturulacak olan regle yüzeyin taban eğrisi (3.1.38) eğrisi ve doğrultman vektörü ise (3.1.47) vektörü olsun. Bu durumda regle yüzey

$$\begin{aligned} R_{NB} &:= \varphi_{NB}(u, v) = \alpha(u) + vS_{NB}(u) \\ &= \left(x(u) - \frac{v}{\sqrt{2}A_2}, c_2 + \int_1^u \frac{x'(k)}{\sqrt{-1 + c_1e^{2ax(k)^2}}} dk + \frac{vA_1}{\sqrt{2}A_2}, \frac{v}{\sqrt{2}}\right) \end{aligned} \quad (4.1.46)$$

dir.

Şekil 4.20 de $x(u) = \sqrt[4]{u}$, $c_1 = 1$, $c_2 = 0$ ve $a = 1$ için e^{ax^2} yoğunluklu Öklid uzayında φ -doğrusal olan (3.1.38) eğrisi NB -Smarandache (3.1.47) vektörü tarafından oluşan (4.1.46) regle yüzeyi gösterilmiştir.



Şekil 4.20: (4.1.46) regle yüzeyi

Benzer hesaplamalarla (4.1.46) yüzeyinin; normali

$$N = \left(\frac{1}{\sqrt{2}A_2}, -\frac{A_1}{\sqrt{2}A_2}, \frac{1}{\sqrt{2}} \right),$$

birinci temel formunun katsayıları

$$E = \frac{(A_2 + \sqrt{2}avx(u)) x'(u)^2}{(A_1)^2}, \quad (4.1.47)$$

$$F = 0,$$

$$G = 1$$

ve ikinci temel formunun katsayıları

$$e = \frac{\sqrt{2}ax(u)x'(u)^2 (A_2 + \sqrt{2}avx(u))}{A_1}, \quad (4.1.48)$$

$$f = 0,$$

$$g = 0$$

olarak elde edilir. (4.1.47) ve (4.1.48) yardımıyla (4.1.46) yüzeyinin Gauss ve ortalama eğrilikleri, sırasıyla

$$K = 0$$

ve

$$H = \frac{ax(u)}{\sqrt{2((A_2)^2 + 2\sqrt{2}aA_2vx(u) + 2a^2v^2x(u)^2)}}$$

şeklinde bulunur. Ayrıca R_{NB} regle yüzeyi üzerindeki striksiyon eğrisi de

$$\gamma_{NB}(u) = \alpha(u) - \frac{A_2}{2\sqrt{2}ax(u)}S_{NB}(u)$$

şeklindedir.

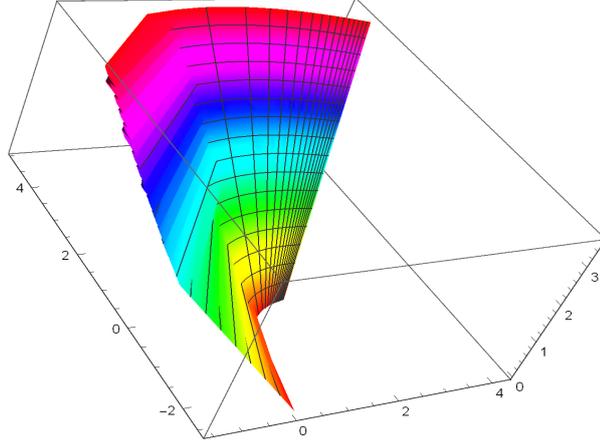
Teorem 4.1.24. R_{NB} regle yüzeyi açılabilir bir regle yüzeydir.

Teorem 4.1.25. R_{NB} regle yüzeyinin striksiyon eğrisi $\gamma_{NB}(u)$ ile taban eğrisi (3.1.38) asla kesişmezler.

Son olarak, (3.1.38) taban eğrili ve (3.1.48) doğrultman vektörlü regle yüzey aşağıdaki gibi elde edilir:

$$\begin{aligned} R_{TNB} &:= \varphi_{TNB}(u, v) = \alpha(u) + vS_{TNB}(u) \\ &= \left(x(u) + \left(\frac{A_1 - 1}{\sqrt{3}A_2}\right)v, c_2 + \int_1^u \frac{x'(k)}{\sqrt{-1 + c_1e^{2ax(k)^2}}} dk + \frac{v(A_1 + 1)}{\sqrt{3}A_2}, \frac{v}{\sqrt{3}}\right). \end{aligned} \quad (4.1.49)$$

Şekil 4.21 de $x(u) = \sqrt[4]{u}$, $c_1 = 1$, $c_2 = 0$ ve $a = 1$ için e^{ax^2} yoğunluklu Öklid uzayında φ – *doğrusal* olan (3.1.38) eğrisi ve (3.1.48) vektörü tarafından oluşan (4.1.49) regle yüzeyi gösterilmiştir.



Şekil 4.21: (4.1.49) regle yüzeyi

Benzer hesaplamalar ile (4.1.49) yüzeyinin; normali

$$N = \left(\frac{3A_2 - 2\sqrt{3}avx(u)(A_1 - 1)}{3\sqrt{2}A_2\sqrt{(A_2)^2 + 2\sqrt{3}avx(u)A_2 + 4a^2v^2x(u)^2}} \right. \\ \left. - \frac{3A_1A_2 + 2\sqrt{3}avx(u)(A_2 + 1)}{3\sqrt{2}A_2\sqrt{(A_2)^2 + 2\sqrt{3}avx(u)A_2 + 4a^2v^2x(u)^2}} \right. \\ \left. \frac{3A_1 + 4\sqrt{3}avx(u)}{3\sqrt{2}\sqrt{(A_2)^2 + 2\sqrt{3}avx(u)A_2 + 4a^2v^2x(u)^2}} \right),$$

birinci temel formunun katsayıları

$$E = \frac{x'(u)^2 (3(A_2)^2 + 4\sqrt{3}avx(u)A_2 + 8a^2v^2x(u)^2)}{3(A_1)^2}, \quad (4.1.50)$$

$$F = \frac{x'(u)A_2}{\sqrt{3}A_1},$$

$$G = 1$$

ve ikinci temel formunun katsayıları

$$e = \frac{\sqrt{2}ax'(u)^2(\sqrt{3}vA_1A_2 + 3x(u)(A_2)^2 - 2\sqrt{3}avx(u)^2A_2(A_1 - 1) + 8a^2v^2x(u)^2)}{3(A_1)^2\sqrt{(A_2)^2 + 2\sqrt{3}avx(u)A_2 + 4a^2v^2x(u)^2}}, \quad (4.1.51)$$

$$f = \frac{\sqrt{2}ax(u)x'(u)A_2}{\sqrt{3}\sqrt{(A_2)^2 + 2\sqrt{3}avx(u)A_2 + 4a^2v^2x(u)^2}},$$

$$g = 0$$

olarak bulunur. Ayrıca (4.1.50) ve (4.1.51) eşitliklerinden (4.1.49) yüzeyinin Gauss ve ortalama eğrilikleri, sırasıyla

$$K = -\frac{a^2(A_2)^2x(u)^2}{((A_2)^2 + 2\sqrt{3}aA_2vx(u) + 4a^2v^2x(u)^2)^2}$$

ve

$$H = \frac{a(\sqrt{3}A_2vA_1 + (A_2)^2x(u) - 2\sqrt{3}aA_2v(A_1 - 2)x(u)^2 + 8a^2v^2x(u)^3)}{2\sqrt{2}((A_2)^2 + 2\sqrt{3}aA_2vx(u) + 4a^2v^2x(u)^2)^{3/2}}$$

olur. Böylece, R_{TNB} regle yüzeyin dağılıma parametresi

$$\delta_{TNB} = \frac{A_2}{4ax(u)}$$

dir. Ayrıca R_{TNB} regle yüzeyi üzerindeki striksiyon eğrisi de

$$\gamma_{TNB}(u) = \alpha(u) - \frac{\sqrt{3}A_2}{4ax(u)}S_{TNB}(u)$$

şeklindedir.

Teorem 4.1.26. R_{TNB} regle yüzeyi açılabilir bir regle yüzey değildir.

Teorem 4.1.27. R_{TNB} regle yüzeyinin striksiyon eğrisi $\gamma_{TNB}(u)$ ile taban eğrisi (3.1.38) asla kesişmezler.

4.2 Yoğunluklu Lorentz-Minkowski Uzayında Yüzeyler

Bu kısımda, 3.2.2. ve 3.2.3. bölümlerinde verilen e^{ax+by} ve $e^{ax^2+by^2}$ yoğunluklu Lorentz-Minkowski uzayında φ -doğrusal eğriler yardımıyla dönele yüzeyler ve regle yüzeyler elde edilerek bu yüzeylerin ortalama ve Gauss eğrilikleri hesaplanacak ve bazı karakterizasyonlar verilecektir.

4.2.1 e^{ax+by} Yoğunluklu \mathbb{E}_1^3 Uzayında Dönele Yüzeyler

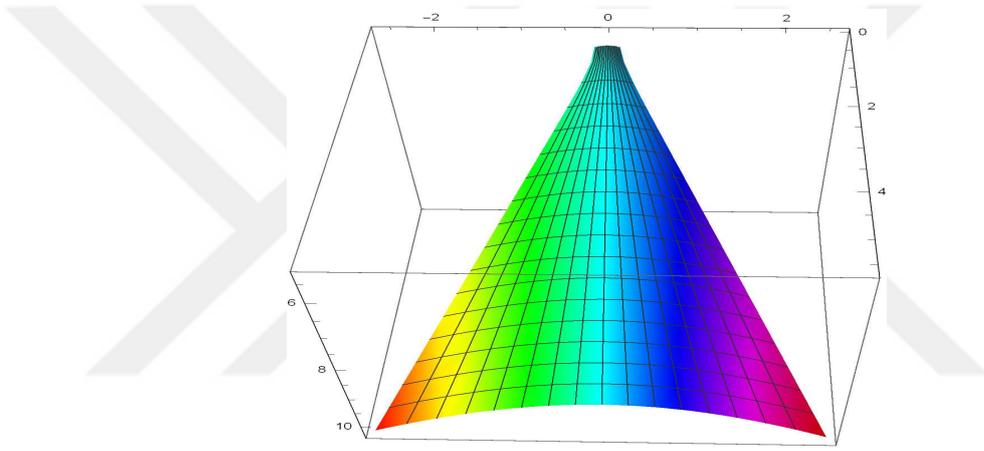
Bu alt kısımda, e^{ax+by} yoğunluklu Lorentz-Minkowski uzayında φ -doğrusal olan (3.2.142) eğrisini profil (üreteç) eğrisi kabul ederek sırasıyla spacelike, timelike ve lightlike eksenleri etrafında döndürülmesiyle oluşan dönele yüzeyler incelenecektir.

İlk olarak (3.2.142) eğrisinin spacelike eksen etrafında döndürülmesiyle oluşan dönel yüzey

$$X_S(u, v) = \left(x(u) \cosh(v), c_2 + \frac{\ln \left(e^{ax(u)} + \sqrt{e^{2ax(u)} + c_1} \right)}{a}, x(u) \sinh(v) \right) \quad (4.2.1)$$

olarak parametrelendirilebilir.

Şekil 4.22 de $x(u) = u$, $c_1 = -3$, $c_2 = 5$ ve $a = 2$ için e^{ax} yoğunluklu Lorentz-Minkowski uzayında φ -doğrusal olan (3.2.142) eğrisinin spacelike eksen etrafında döndürülmesiyle oluşan (4.2.1) dönel yüzeyi gösterilmiştir.



Şekil 4.22: (4.2.1) dönel yüzeyi

(4.2.1) yüzeyinin; normali

$$N = -\frac{1}{\sqrt{-c_1}} \left(e^{ax(u)} \cosh(v), \sqrt{e^{2ax(u)} + c_1}, e^{ax(u)} \sinh(v) \right)$$

dir. Burada $\langle N, N \rangle = -1$ olup N timelike bir vektördür, dolayısıyla (4.2.1) yüzeyi spacelike bir yüzeydir. Buradan (4.2.1) yüzeyinin; birinci temel formunun katsayıları

$$\begin{aligned} E &= -\frac{x'(u)^2 c_1}{c_1 + e^{2ax(u)}}, \\ F &= 0, \\ G &= x(u)^2 \end{aligned} \quad (4.2.2)$$

ve ikinci temel formunun katsayıları

$$\begin{aligned} e &= -\frac{ax'(u)^2 e^{ax(u)} \sqrt{-c_1}}{c_1 + e^{2ax(u)}}, \\ f &= 0, \\ g &= \frac{x(u) e^{ax(u)}}{\sqrt{-c_1}} \end{aligned} \quad (4.2.3)$$

olarak bulunur. (4.2.2) ve (4.2.3) eşitliklerinden (4.2.1) yüzeyinin Gauss ve ortalama eğrilikleri, sırasıyla

$$K = \frac{ae^{2ax(u)}}{c_1 x(u)}$$

ve

$$H = \frac{-e^{ax(u)}(1 + ax(u))}{2x(u)\sqrt{-c_1}}$$

olarak hesaplanır.

Teorem 4.2.1. e^{ax} yoğunluklu Lorentz-Minkowski uzayında φ – doğrusal olan (3.2.142) eğrisinin spacelike eksen etrafında döndürülmesiyle oluşan (4.2.1) dönel yüzeyi minimal ve flat değildir.

Sonuç 4.2.1. i) $ax(u) < 0$ (veya $ax(u) > 0$) ise, (4.2.1) dönel yüzeyinin tüm noktalarında Gauss eğriliği pozitifdir (veya Gauss eğriliği negatiftir).

ii) $x(u) = \frac{-1}{a}$ iken, (4.2.1) dönel yüzeyinin ortalama eğriliği sıfırdır.

Ayrıca cebirsel işlemlerle, (4.2.1) dönel yüzeyinin K Gauss ve H ortalama eğrilikleri arasında aşağıdaki eşitlikler elde edilir:

$$c_1 \left(K + 2H^2 \pm 2H\sqrt{K + H^2} \right) + a^2 e^{2\left(\frac{K+2H^2 \pm 2H\sqrt{K+H^2}}{-K}\right)} = 0$$

veya

$$\frac{2\sqrt{-c_1}H(K + 2H^2 \pm 2H\sqrt{K + H^2})}{a(2H^2 \pm 2H\sqrt{K + H^2})} + e^{\frac{K+2H^2 \pm 2H\sqrt{K+H^2}}{-K}} = 0.$$

Böylece aşağıdaki teorem verilebilir.

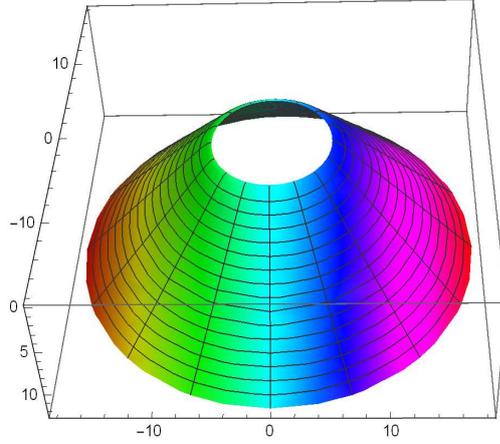
Teorem 4.2.2. e^{ax} yoğunluklu Lorentz-Minkowski uzayında φ – doğrusal olan (3.2.142) eğrisinin spacelike eksen etrafında döndürülmesiyle oluşan (4.2.1) dönel yüzeyi bir Weingarten yüzeydir.

İkinci olarak, (3.2.142) eğrisinin timelike eksen etrafında döndürülmesiyle oluşan dönel yüzeyin parametrik ifadesinin

$$X_T(u, v) = \begin{pmatrix} x(u), \left(c_2 + \frac{\ln(e^{ax(u)} + \sqrt{e^{2ax(u)} + c_1})}{a} \right) \cos v, \\ \left(c_2 + \frac{\ln(e^{ax(u)} + \sqrt{e^{2ax(u)} + c_1})}{a} \right) \sin v \end{pmatrix} \quad (4.2.4)$$

olduğu görülür.

Şekil 4.23 de $x(u) = u$, $c_1 = -3$, $c_2 = 5$ ve $a = 2$ için e^{ax} yoğunluklu Lorentz-Minkowski uzayında φ –doğrusal olan (3.2.142) eğrisinin timelike eksen etrafında döndürülmesiyle oluşan (4.2.4) dönel yüzeyi gösterilmiştir.



Şekil 4.23: (4.2.4) dönel yüzeyi

(4.2.4) yüzeyinin normali

$$N = -\frac{1}{\sqrt{-c_1}} \left(e^{ax(u)}, \sqrt{e^{2ax(u)} + c_1} \cos(v), \sqrt{e^{2ax(u)} + c_1} \sin(v) \right)$$

dir. Buradan (4.2.4) yüzeyinin de spacelike bir yüzey olduğu görülür. Böylece

(4.2.4) yüzeyinin; birinci temel formunun katsayıları

$$\begin{aligned} E &= -\frac{x'(u)^2 c_1}{c_1 + e^{2ax(u)}}, \\ F &= 0, \\ G &= \left(c_2 + \frac{\ln \left(e^{ax(u)} + \sqrt{e^{2ax(u)} + c_1} \right)}{a} \right)^2 \end{aligned} \quad (4.2.5)$$

ve ikinci temel formunun katsayıları

$$\begin{aligned} e &= -\frac{e^{ax(u)} ax'(u)^2 \sqrt{-c_1}}{c_1 + e^{2ax(u)}}, \\ f &= 0, \\ g &= \frac{\sqrt{c_1 + e^{2ax(u)}} \left(ac_2 + \ln \left(e^{ax(u)} + \sqrt{e^{2ax(u)} + c_1} \right) \right)}{a\sqrt{-c_1}} \end{aligned} \quad (4.2.6)$$

şeklinde elde edilir. (4.2.5) ve (4.2.6) eşitliklerinden (4.2.4) yüzeyinin Gauss ve ortalama eğrilikleri, sırasıyla

$$K = \frac{a^2 e^{ax(u)} \sqrt{e^{2ax(u)} + c_1}}{ac_1 c_2 + c_1 \ln(e^{ax(u)} + \sqrt{e^{2ax(u)} + c_1})}$$

ve

$$H = -a \left(\frac{\sqrt{e^{2ax(u)} + c_1}}{2\sqrt{-c_1} (ac_2 + \ln(e^{ax(u)} + \sqrt{e^{2ax(u)} + c_1}))} + \frac{e^{ax(u)}}{2\sqrt{-c_1}} \right)$$

olarak hesaplanır.

Teorem 4.2.3. e^{ax} yoğunluklu Lorentz-Minkowski uzayında φ – doğrusal olan (3.2.142) eğrisinin timelike eksen etrafında döndürülmesiyle oluşan (4.2.4) döneel yüzeyi minimal ve flat değildir.

Sonuç 4.2.2. i) $e^{ac_2}(e^{ax(u)} + \sqrt{e^{2ax(u)} + c_1}) < 1$ (veya > 1) ise, (4.2.4) döneel yüzeyinin tüm noktalarında Gauss eğriliği pozitifdir (veya Gauss eğriliği negatiftir).

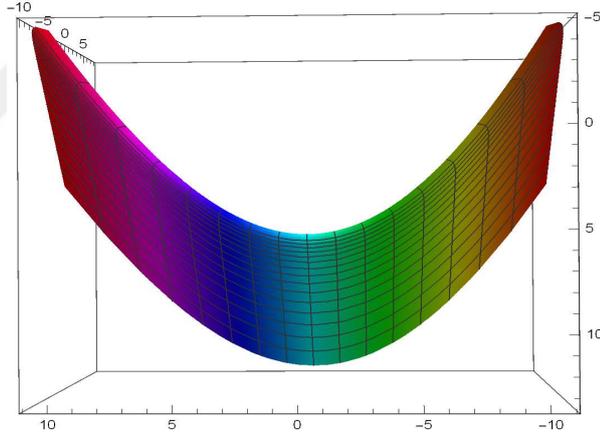
ii) $\left(e^{ax(u)} + \sqrt{e^{2ax(u)} + c_1} \right) \left(e^{ac_2 + \frac{\sqrt{e^{2ax(u)} + c_1}}{e^{ax(u)}}} \right) = 1$ iken, (4.2.4) döneel yüzeyinin ortalama eğriliği sıfırdır.

Son olarak (3.2.142) eğrisi lightlike eksen etrafında döndürülsün. Böylece oluşan dönel yüzey

$$X_L(u, v) = \left(\left(1 + \frac{v^2}{2} \right) x(u) - \frac{v^2}{2} \left(c_2 + \frac{\ln \left(e^{ax(u)} + \sqrt{e^{2ax(u)} + c_1} \right)}{a} \right), \right. \\ \left. \frac{v^2}{2} x(u) + \left(1 - \frac{v^2}{2} \right) \left(c_2 + \frac{\ln \left(e^{ax(u)} + \sqrt{e^{2ax(u)} + c_1} \right)}{a} \right), \right. \\ \left. v \left(x(u) - \left(c_2 + \frac{\ln \left(e^{ax(u)} + \sqrt{e^{2ax(u)} + c_1} \right)}{a} \right) \right) \right). \quad (4.2.7)$$

olarak elde edilir.

Şekil 4.24 de $x(u) = u^3$, $c_1 = -3$, $c_2 = 5$ ve $a = 2$ için e^{ax} yoğunluklu Lorentz-Minkowski uzayında φ -doğrusal olan (3.2.142) eğrisinin lightlike eksen etrafında döndürülmesiyle oluşan (4.2.7) dönel yüzeyi gösterilmiştir.



Şekil 4.24: (4.2.7) dönel yüzeyi

Benzer hesaplamalarla (4.2.7) yüzeyinin normali

$$N = -\frac{1}{2\sqrt{-c_1}} \left(\begin{array}{c} \sqrt{e^{2ax(u)} + c_1} v^2 - e^{ax(u)}(2 + v^2), \\ -e^{ax(u)} v^2 + \sqrt{e^{2ax(u)} + c_1}(v^2 - 2), 2(\sqrt{e^{2ax(u)} + c_1} - e^{ax(u)})v \end{array} \right)$$

olarak bulunur. Buradan da bu yüzeyin spacelike bir yüzey olduğu görülür. Böylece

(4.2.7) yüzeyinin birinci temel formunun katsayıları

$$E = \frac{-c_1 x'(u)^2}{c_1 + e^{2ax(u)}}, \quad (4.2.8)$$

$$F = 0,$$

$$G = \left(\frac{ac_2 + \ln \left(e^{ax(u)} + \sqrt{e^{2ax(u)} + c_1} \right) - ax(u)}{a} \right)^2$$

ve ikinci temel formunun katsayıları

$$e = \frac{ac_1 x'(u)^2 e^{ax(u)}}{\sqrt{-c_1} (c_1 + e^{2ax(u)})}, \quad (4.2.9)$$

$$f = 0,$$

$$g = \frac{\left(e^{ax(u)} - \sqrt{e^{2ax(u)} + c_1} \right) \left(ac_2 + \ln \left(e^{ax(u)} + \sqrt{e^{2ax(u)} + c_1} \right) - ax(u) \right)}{\sqrt{-c_1}}$$

şeklindedir. (4.2.8) ve (4.2.9) yardımıyla (4.2.7) yüzeyinin Gauss ve ortalama eğrilikleri, sırasıyla

$$K = \frac{a^2 e^{ax(u)} \left(\sqrt{e^{2ax(u)} + c_1} - e^{ax(u)} \right)}{c_1 \left(ac_2 + \ln \left(e^{ax(u)} + \sqrt{e^{2ax(u)} + c_1} \right) - ax(u) \right)}$$

ve

$$H = a \left(\frac{\sqrt{e^{2ax(u)} + c_1} - e^{ax(u)}}{2\sqrt{-c_1} (ac_2 + \ln(e^{ax(u)} - ax(u)))} + \frac{e^{ax(u)}}{2\sqrt{-c_1}} \right)$$

olarak hesaplanır.

Teorem 4.2.4. e^{ax} yoğunluklu Lorentz Minkowski uzayında φ – doğrusal olan (3.2.142) eğrisinin lightlike eksen etrafında döndürülmesiyle oluşan (4.2.7) dönel yüzeyi minimal ve flat değildir.

Sonuç 4.2.3. *i)* $\left(\sqrt{e^{2ax(u)} + c_1} + e^{ax(u)} \right) > e^{ax(u)-ac_2}$ (veya $< e^{ax(u)-ac_2}$) ise, (4.2.7) dönel yüzeyinin tüm noktalarında Gauss eğriliği pozitifdir (veya Gauss eğriliği negatiftir).

ii) $e^{ax(u)} - ax(u) = e^{1 - \frac{\sqrt{e^{2ax(u)} + c_1}}{e^{ax(u)}} - ac_2}$ iken, (4.2.7) dönel yüzeyinin ortalama eğriliği sıfırdır.

4.2.2 e^{ax+by} Yoğunluklu \mathbb{E}_1^3 Uzayında Regle Yüzeyler

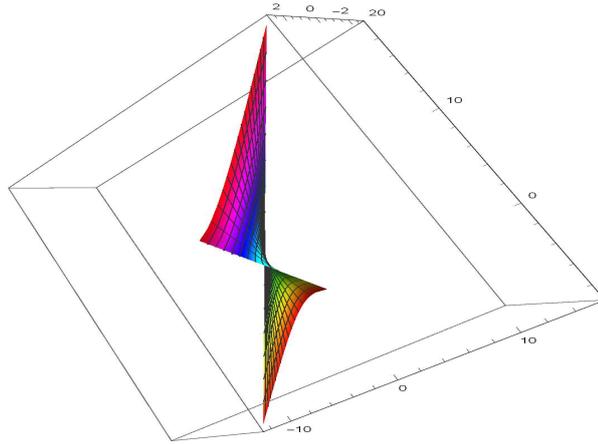
Bu alt kısımda, e^{ax+by} yoğunluklu Lorentz-Minkowski uzayında taban eğrisi φ - doğrusal olan (3.2.142) eğrisi, doğrultman vektörü ise (3.2.156) ve (3.2.157) vektörleri olan regle yüzeyler incelenecektir.

İlk olarak, oluşturulacak olan regle yüzeyin taban eğrisi (3.2.142) eğrisi ve doğrultman vektörü de (3.2.142) eğrisinin TB -Smarandache eğrisi olan (3.2.156) vektörü alınacaktır. Bu durumda regle yüzey

$$\begin{aligned} R_{TB} &:= \varphi_{TB}(u, v) = \alpha(u) + vS_{TB}(u) \\ &= \left(x(u) + \frac{v\sqrt{e^{2ax(u)} + c_1}}{\sqrt{-2c_1}}, \right. \\ &\quad \left. c_2 + \frac{\ln\left(e^{ax(u)} + \sqrt{e^{2ax(u)} + c_1}\right)}{a} + \frac{ve^{ax(u)}}{\sqrt{-2c_1}}, \frac{v}{\sqrt{2}} \right) \end{aligned} \quad (4.2.10)$$

olarak elde edilir.

Şekil 4.25 de $x(u) = \ln(u)$, $c_1 = -1$, $c_2 = 3$ ve $a = 1$ için e^{ax} yoğunluklu Lorentz-Minkowski uzayında φ -doğrusal olan (3.2.142) eğrisi ve (3.2.142) eğrisinin TB -Smarandache eğrisi olan (3.2.156) eğrisi tarafından oluşan (4.2.10) regle yüzeyi gösterilmiştir.



Şekil 4.25: (4.2.10) regle yüzeyi

(4.2.10) yüzeyinin normali

$$N = \left(\frac{-e^{ax(u)}(2\sqrt{-c_1} + 2\sqrt{a}\sqrt{e^{2ax(u)} + c_1}v)}{2\sqrt{-c_1}\sqrt{v^2a^2e^{2ax(u)} + c_1}}, \right. \\ \left. - \frac{2\sqrt{-c_1}\sqrt{e^{2ax(u)} + c_1} + \sqrt{2}ave^{2ax(u)}}{2\sqrt{-c_1}\sqrt{v^2a^2e^{2ax(u)} + c_1}}, \frac{ave^{ax(u)}}{\sqrt{2}\sqrt{v^2a^2e^{2ax(u)} + c_1}} \right)$$

olup, $\langle N, N \rangle = 1$; yani N spacelike bir vektör olduğundan (4.2.10) yüzeyi timelike bir yüzeydir. Buradan (4.2.10) yüzeyinin; birinci temel formunun katsayıları

$$E = -\frac{(2c_1 + a^2e^{2ax(u)}v^2)x'(u)}{2(e^{2ax(u)} + c_1)}, \\ F = \frac{\sqrt{-c_1}x'(u)}{\sqrt{2}(e^{2ax(u)} + c_1)}, \\ G = 1 \quad (4.2.11)$$

ve ikinci temel formunun katsayıları

$$e = \frac{ae^{ax(u)}x'(u)^2 \left(-2c_1 + av(\sqrt{-2c_1}\sqrt{e^{2ax(u)} + c_1} - ave^{2ax(u)}) \right)}{2(e^{2ax(u)} + c_1)\sqrt{a^2v^2e^{2ax(u)} + c_1}}, \\ f = \frac{ae^{ax(u)}x'(u)\sqrt{-c_1}}{\sqrt{2}\sqrt{a^2v^2e^{2ax(u)} + c_1}\sqrt{e^{2ax(u)} + c_1}}, \\ g = 0 \quad (4.2.12)$$

şeklinindedir. (4.2.11) ve (4.2.12) eşitliklerinden (4.2.10) yüzeyinin Gauss ve ortalama eğriliklerinin, sırasıyla

$$K = -\frac{a^2c_1e^{2ax(u)}}{(c_1 + a^2v^2e^{2ax(u)})^2}$$

ve

$$H = \frac{va^2e^{ax(u)}(ave^{2ax(u)} - \sqrt{-2c_1}\sqrt{e^{2ax(u)} + c_1})}{2(v^2a^2e^{2ax(u)} + c_1)^{3/2}}$$

olduğu görülür. Diğer taraftan, R_{TB} regle yüzeyinin dağılıma parametresi

$$\delta_{TB} = \frac{e^{2ax(u)} + c_1}{e^{ax(u)}\sqrt{-c_1}\sqrt{\left(ac_2 + \ln \left(e^{ax(u)} + \sqrt{e^{2ax(u)} + c_1} \right) \right)^2 - (ax(u))^2}}$$

olarak hesaplanır. Ayrıca R_{TB} regle yüzeyinin üzerindeki striksiyon eğrisi

$$\gamma_{TB}(u) = \alpha(u)$$

dir.

Teorem 4.2.5. R_{TB} regle yüzeyi açılabilir bir regle yüzey değildir.

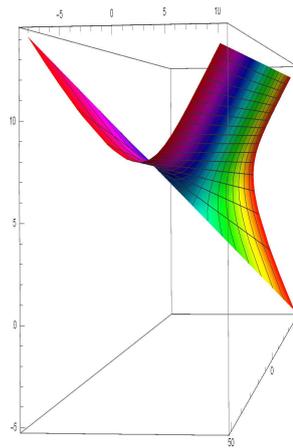
Teorem 4.2.6. R_{TB} regle yüzeyinin $\gamma_{TNB}(u)$ striksiyon eğrisi ile (3.2.142) taban eğrisi çakışık eğrilerdir.

Son olarak, oluşturulacak olan regle yüzeyin taban eğrisi (3.2.142) eğrisi ve doğrultman vektörü ise (3.2.142) eğrisinin TNB –Smarandache eğrisi olan (3.2.157) vektörünün alınması durumunda regle yüzey

$$\begin{aligned} \varphi_{TNB}(u, v) &= \alpha(u) + vS_{TNB}(u) \\ &= \left(x(u) + \frac{v \left(\sqrt{e^{2ax(u)} + c_1} - e^{ax(u)} \right)}{\sqrt{-c_1}}, \right. \\ &\quad \left. c_2 + \frac{\ln \left(e^{ax(u)} + \sqrt{e^{2ax(u)} + c_1} \right)}{a} + \frac{v \left(e^{ax(u)} - \sqrt{e^{2ax(u)} + c_1} \right)}{\sqrt{-c_1}}, v \right) \end{aligned} \quad (4.2.13)$$

şeklinde elde edilir.

Şekil 4.26 da $x(u) = u$, $c_1 = -1$, $c_2 = 3$ ve $a = 1$ için e^{ax} yoğunluklu Lorentz-Minkowski uzayında φ –doğrusal olan (3.2.142) eğrisi ve (3.2.142) eğrisinin TNB –Smarandache eğrisi olan (3.2.156) eğrisi tarafından oluşan (4.2.13) regle yüzeyi gösterilmiştir.



Şekil 4.26: (4.2.13) regle yüzeyi

(4.2.13) yüzeyinin normali

$$N = \left(\frac{-ave^{2ax(u)}(\sqrt{-c_1} + av(\sqrt{e^{2ax(u)} + c_1} - e^{ax(u)}))}{\sqrt{2}(av\sqrt{-c_1}e^{ax(u)})^{3/2}}, \right. \\ \left. - \frac{\sqrt{-c_1}\sqrt{e^{2ax(u)} + c_1} - ae^{ax(u)}(\sqrt{e^{2ax(u)} + c_1} - e^{ax(u)})}{\sqrt{2}\sqrt{-c_1}\sqrt{av\sqrt{-c_1}e^{ax(u)}}}, \right. \\ \left. \frac{\sqrt{-c_1}}{\sqrt{2}\sqrt{av\sqrt{-c_1}e^{ax(u)}}} \right)$$

olup, (4.2.13) yüzeyi timelike bir yüzeydir. Buradan (4.2.13) yüzeyinin; birinci temel formunun katsayıları

$$E = \frac{\sqrt{-c_1}(\sqrt{-c_1} - 2ae^{2ax(u)}v)x'(u)^2}{e^{2ax(u)} + c_1}, \\ F = \frac{\sqrt{-c_1}x'(u)}{\sqrt{(e^{2ax(u)} + c_1)}}, \\ G = 1 \quad (4.2.14)$$

ve ikinci temel formunun katsayıları

$$e = \frac{(\sqrt{-c_1} + av(\sqrt{e^{2ax(u)} + c_1} - 2ae^{ax(u)}))x'(u)^2\sqrt{av\sqrt{-c_1}e^{ax(u)}}}{\sqrt{2}v(e^{2ax(u)} + c_1)}, \\ f = \frac{\sqrt{ae^{ax(u)}\sqrt{-c_1}}x'(u)}{\sqrt{2}v(e^{2ax(u)} + c_1)}, \\ g = 0 \quad (4.2.15)$$

olarak elde edilir. Ayrıca, (4.2.14) ve (4.2.15) eşitliklerinden (4.2.13) yüzeyinin Gauss ve ortalama eğrilikleri, sırasıyla

$$K = \frac{1}{4v^2}$$

ve

$$H = -\frac{ae^{ax(u)}\left(c_1 + av\sqrt{-c_1}\left(\sqrt{e^{2ax(u)} + c_1} - 2e^{ax(u)}\right)\right)}{4\sqrt{2}(av\sqrt{-c_1}e^{ax(u)})}$$

dir.

$\langle S'_{TNB}(u), S'_{TNB}(u) \rangle = 0$ olduğundan R_{TNB} regle yüzeyi Lorentz anlamında bir silindirdir. Ayrıca, R_{TNB} regle yüzeyinin üzerindeki striksiyon eğrisinin de

$$\gamma_{TNB}(u) = \alpha(u)$$

olduğu görülür.

Teorem 4.2.7. R_{TNB} regle yüzeyinin striksiyon eğrisi $\gamma_{TNB}(u)$ ile taban eğrisi (3.2.142) çakışık eğrilerdir.

4.2.3 $e^{ax^2+by^2}$ Yoğunluklu \mathbb{E}_1^3 Uzayında Dönel Yüzeyler

Bu alt kısımda, $e^{ax^2+by^2}$ yoğunluklu Lorentz-Minkowski uzayında profil eğrisi φ -doğrusal olan (3.2.164) ve (3.2.173) eğrileri, sırasıyla spacelike, timelike ve lightlike eksenleri etrafında döndürülerek dönel yüzeyler oluşturulacaktır.

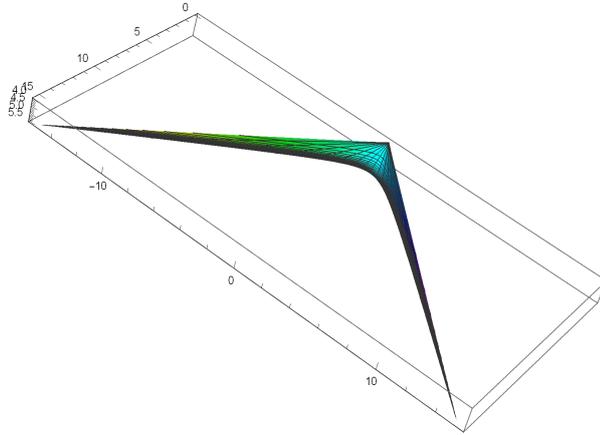
İlk olarak, profil eğrisi (3.2.164) eğrisi olsun:

(3.2.164) eğrisinin spacelike eksen etrafında döndürülmesiyle oluşan dönel yüzeyin parametrik denklemi

$$X_{1S}(u, v) = \left(x(u) \cosh(v), c_2 + \int_1^u \frac{x'(t)e^{ax^2(t)}}{\sqrt{e^{2ax^2(t)} + c_1}} dt, x(u) \sinh(v) \right) \quad (4.2.16)$$

dir.

Şekil 4.27 de $x(u) = \sqrt{\ln(u)}$, $c_1 = -0.1$, $c_2 = 4$ ve $a = 1$ için e^{ax^2} yoğunluklu Lorentz-Minkowski uzayında φ -doğrusal olan (3.2.164) eğrisinin spacelike eksen etrafında döndürülmesiyle oluşan (4.2.16) dönel yüzeyi gösterilmiştir.



Şekil 4.27: (4.2.16) dönel yüzeyi

(4.2.16) yüzeyinin normali

$$N = -\frac{1}{\sqrt{-c_1}} \left(e^{ax^2(u)} \cosh(v), \sqrt{e^{2ax^2(u)} + c_1}, e^{ax^2(u)} \sinh(v) \right)$$

dir. Burada $\langle N, N \rangle = -1$ olduğundan (4.2.16) yüzeyi spacelike bir yüzeydir.

Böylece (4.2.16) yüzeyinin; birinci temel formunun katsayıları

$$\begin{aligned} E &= -\frac{x'(u)^2 c_1}{c_1 + e^{2ax(u)^2}}, \\ F &= 0, \\ G &= x(u)^2 \end{aligned} \tag{4.2.17}$$

ve ikinci temel formunun katsayıları

$$\begin{aligned} e &= \frac{2ax(u)x'(u)^2 e^{ax(u)^2} \sqrt{-c_1}}{c_1 + e^{2ax(u)^2}}, \\ f &= 0, \\ g &= \frac{x(u)e^{ax(u)^2}}{\sqrt{-c_1}} \end{aligned} \tag{4.2.18}$$

şeklinde elde edilir. (4.2.17) ve (4.2.18) eşitliklerinden (4.2.16) yüzeyinin Gauss ve ortalama eğrilikleri, sırasıyla

$$K = \frac{2ae^{2ax^2(u)}}{c_1}$$

ve

$$H = \frac{-e^{ax^2(u)}(1 + 2ax^2(u))}{2x(u)\sqrt{-c_1}}$$

olarak hesaplanır.

Teorem 4.2.8. e^{ax^2} yoğunluklu Lorentz Minkowski uzayında φ – doğrusal olan (3.2.164) eğrisinin spacelike eksen etrafında döndürülmesiyle oluşan (4.2.16) dönел yüzeyi minimal ve flat değildir.

Sonuç 4.2.4. i) $a < 0$ (veya $a > 0$) ise, (4.2.16) dönел yüzeyinin tüm noktalarında Gauss eğriligi pozitifdir (veya Gauss eğriligi negatiftir).

ii) $x(u) = \mp \sqrt{\frac{-1}{2a}}$ iken, (4.2.16) dönel yüzeyinin ortalama eęrilęi sıfırdır.

Diğer taraftan cebirsel işlemlerden sonra (4.2.16) dönel yüzeyinin K Gauss ve H ortalama eğrilikleri arasında

$$H^2 = \frac{K \left(1 + \ln\left(\frac{c_1 K}{2a}\right)\right)^2}{4 \ln\left(\frac{c_1 K}{2a}\right)}.$$

eşitliği elde edilir. Böylece aşağıdaki teorem verilebilir.

Teorem 4.2.9. e^{ax^2} yoğunluklu Lorentz-Minkowski uzayında φ – doğrusal olan (3.2.164) eğrisinin spacelike eksen etrafında döndürülmesiyle oluşan (4.2.16) dönel yüzeyi bir Weingarten yüzeydir.

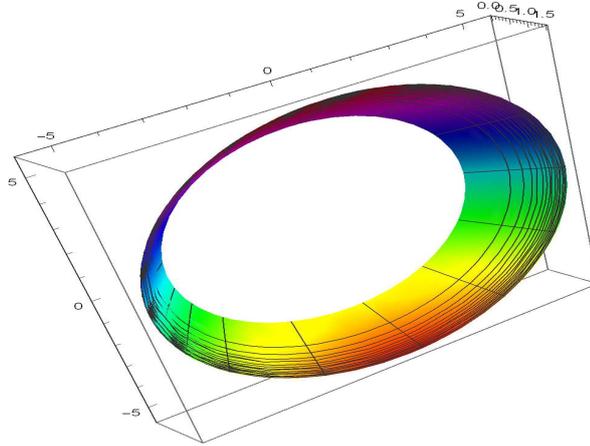
şimdi de (3.2.164) eğrisinin timelike eksen etrafında dnderildiğini kabul edelim.

Bu durumda oluşan dönel yüzeyin parametrik ifadesi

$$X_{1T}(u, v) = \left(x(u), \left(c_2 + \int_1^u \frac{x'(t)e^{ax^2(t)}}{\sqrt{e^{2ax^2(t)} + c_1}} dt \right) \cos v, \right. \quad (4.2.19)$$

$$\left. \left(c_2 + \int_1^u \frac{x'(t)e^{ax^2(t)}}{\sqrt{e^{2ax^2(t)} + c_1}} dt \right) \sin v \right)$$

dir.



şekil 4.28: (4.2.19) dönel yüzeyi

şekil 4.28 de $x(u) = \sqrt{\ln(u)}$, $c_1 = -0.1$, $c_2 = 4$ ve $a = 1$ için e^{ax^2} yoğunluklu Lorentz-Minkowski uzayında φ -doğrusal olan (3.2.164) eğrisinin timelike eksen etrafında döndürülmesiyle oluşan (4.2.19) dönel yüzeyi gösterilmiştir.

(4.2.19) yüzeyinin normali

$$N = -\frac{1}{\sqrt{-c_1}} \left(e^{ax^2(u)}, \sqrt{e^{2ax^2(u)} + c_1} \cos(v), \sqrt{e^{2ax^2(u)} + c_1} \sin(v) \right)$$

olup, N timelike bir vektördür ve dolayısıyla (4.2.19) yüzeyi spacelike bir yüzeydir.

Buradan (4.2.19) yüzeyinin; birinci temel formunun katsayıları

$$\begin{aligned} E &= \frac{x'(u)^2 c_1}{c_1 + e^{2ax(u)}}, \\ F &= 0, \end{aligned} \tag{4.2.20}$$

$$G = \left(c_2 + \int_1^u \frac{x'(t)e^{ax^2(t)}}{\sqrt{e^{2ax^2(t)} + c_1}} dt \right)^2$$

ve ikinci temel formunun katsayıları

$$\begin{aligned} e &= -\frac{\sqrt{-c_1} 2ax(u)x'(u)^2 e^{2ax(u)^2}}{c_1 + e^{2ax(u)}} \\ f &= 0 \\ g &= \frac{\left(c_2 + \int_1^u \frac{x'(t)e^{ax^2(t)}}{\sqrt{e^{2ax^2(t)} + c_1}} dt \right) \sqrt{e^{2ax^2(u)} + c_1}}{\sqrt{-c_1}} \end{aligned} \tag{4.2.21}$$

olarak elde edilir. (4.2.20) ve (4.2.21) yardımıyla (4.2.19) yüzeyinin Gauss ve ortalama eğrilikleri, sırasıyla

$$K = \frac{2ax(u)e^{ax^2(u)} \sqrt{e^{2ax^2(u)} + c_1}}{c_1 \left(c_2 + \int_1^u \frac{x'(t)e^{ax^2(t)}}{\sqrt{e^{2ax^2(t)} + c_1}} dt \right)}$$

ve

$$H = - \left(\frac{\sqrt{e^{2ax^2(u)} + c_1} + 2ax(u)e^{ax^2(u)} \left(c_2 + \int_1^u \frac{x'(t)e^{ax^2(t)}}{\sqrt{e^{2ax^2(t)} + c_1}} dt \right)}{2\sqrt{-c_1} \left(c_2 + \int_1^u \frac{x'(t)e^{ax^2(t)}}{\sqrt{e^{2ax^2(t)} + c_1}} dt \right)} \right)$$

olarak hesaplanır.

Teorem 4.2.10. e^{ax^2} yoğunluklu Lorentz Minkowski uzayında φ – doğrusal olan (3.2.164) eğrisinin timelike eksen etrafında döndürülmesiyle oluşan (4.2.19) döneel yüzeyi minimal ve flat değildir.

Sonuç 4.2.5. *i) $ax(u) \left(c_2 + \int_1^u \frac{x'(t)e^{ax^2(t)}}{\sqrt{e^{2ax^2(t)} + c_1}} dt \right) < 0$ (veya > 0) ise, (4.2.19) dönel yüzeyinin tüm noktalarında Gauss eğriliği pozitiftir (veya Gauss eğriliği negatiftir).*

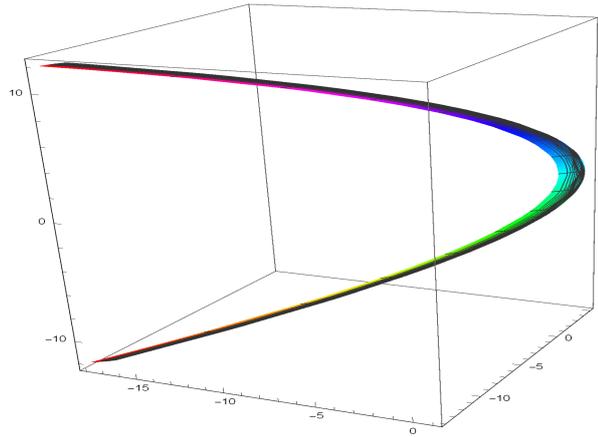
ii) $1 = \frac{-\sqrt{e^{2ax^2(u)} + c_1}}{2ax(u)e^{ax^2(u)} \left(c_2 + \int_1^u \frac{x'(t)e^{ax^2(t)}}{\sqrt{e^{2ax^2(t)} + c_1}} dt \right)}$ ise, (4.2.19) dönel yüzeyinin ortalama eğriliği sıfırdır.

Son olarak da, (3.2.164) eğrisinin lightlike eksen etrafında döndürülmesiyle oluşan dönel yüzey

$$\begin{aligned} X_{1L}(u, v) = & \left(\left(1 + \frac{v^2}{2} \right) x(u) - \frac{v^2}{2} \left(c_2 + \int_1^u \frac{x'(t)e^{ax^2(t)}}{\sqrt{e^{2ax^2(t)} + c_1}} dt \right), \right. \\ & \frac{v^2}{2} x(u) + \left(1 - \frac{v^2}{2} \right) \left(c_2 + \int_1^u \frac{x'(t)e^{ax^2(t)}}{\sqrt{e^{2ax^2(t)} + c_1}} dt \right), \\ & \left. v \left(x(u) - \left(c_2 + \int_1^u \frac{x'(t)e^{ax^2(t)}}{\sqrt{e^{2ax^2(t)} + c_1}} dt \right) \right) \right). \end{aligned} \quad (4.2.22)$$

olarak parametrelendirilebilir.

Şekil 4.29 da $x(u) = \sqrt{\ln(u)}$, $c_2 = 4$, $c_1 = -0.1$ ve $a = 1$ için e^{ax^2} yoğunluklu Lorentz-Minkowski uzayında φ -doğrusal olan (3.2.164) eğrisinin lightlike eksen etrafında döndürülmesiyle oluşan (4.2.22) dönel yüzeyi gösterilmiştir.



Şekil 4.29: (4.2.22) dönel yüzeyi

Benzer işlemlerle, (4.2.22) yüzeyinin normalinin

$$N = -\frac{1}{2\sqrt{-c_1}} \left(\begin{array}{c} \sqrt{e^{2ax^2(u)} + c_1}v^2 - e^{ax^2(u)}(2 + v^2), \\ \sqrt{e^{2ax^2(u)} + c_1}(v^2 - 2) - e^{ax^2(u)}v^2, 2(\sqrt{e^{2ax^2(u)} + c_1} - e^{ax^2(u)})v \end{array} \right)$$

olduğu görülür ve (4.2.22) yüzeyi de spacelike bir yüzeydir. Buradan (4.2.22) yüzeyinin; birinci temel formunun katsayıları

$$\begin{aligned} E &= \frac{-c_1 x'(u)^2}{c_1 + e^{2ax(u)^2}}, \\ F &= 0, \\ G &= \left(c_2 + \int_1^u \frac{x'(t)e^{ax^2(t)}}{\sqrt{e^{2ax^2(t)} + c_1}} dt - x(u) \right)^2 \end{aligned} \quad (4.2.23)$$

ve ikinci temel formunun katsayıları

$$\begin{aligned} e &= \frac{2ax(u)x'(u)^2 e^{2ax^2(u)} \sqrt{-c_1}}{e^{2ax^2(u)} + c_1}, \\ f &= 0, \\ g &= \frac{\left(\sqrt{e^{2ax^2(u)} + c_1} - e^{ax^2(u)} \right) \left(x(u) - c_2 - \int_1^u \frac{x'(t)e^{ax^2(t)}}{\sqrt{e^{2ax^2(t)} + c_1}} dt \right)}{\sqrt{-c_1}} \end{aligned} \quad (4.2.24)$$

olarak elde edilir. (4.2.23) ve (4.2.24) eşitliklerinden (4.2.22) yüzeyinin Gauss ve ortalama eğrilikleri, sırasıyla

$$K = \frac{2ax(u)e^{ax^2(u)} \left(\sqrt{e^{2ax^2(u)} + c_1} - e^{ax^2(u)} \right)}{c_1 \left(c_2 + \int_1^u \frac{x'(t)e^{ax^2(t)}}{\sqrt{e^{2ax^2(t)} + c_1}} dt - x(u) \right)}$$

ve

$$H = \left(\frac{\sqrt{e^{2ax^2(u)} + c_1} - e^{ax^2(u)} + 2ax(u)e^{ax^2(u)} \left(c_2 + \int_1^u \frac{x'(t)e^{ax^2(t)}}{\sqrt{e^{2ax^2(t)} + c_1}} dt \right) - 2ax^2(u)e^{ax^2(u)}}{2 \left(c_2 + \int_1^u \frac{x'(t)e^{ax^2(t)}}{\sqrt{e^{2ax^2(t)} + c_1}} dt - x(u) \right) \sqrt{-c_1}} \right)$$

olarak hesaplanır.

Teorem 4.2.11. e^{ax^2} yoğunluklu Lorentz Minkowski uzayında φ – doğrusal olan (3.2.164) eğrisinin lightlike eksen etrafında döndürülmesiyle oluşan (4.2.22) döneel yüzeyi minimal ve flat değildir.

Sonuç 4.2.6. *i) $ax(u) \left(c_2 + \int_1^u \frac{x'(t)e^{ax^2(t)}}{\sqrt{e^{2ax^2(t)}+c_1}} dt - x(u) \right) > 0$ (veya < 0) ise, (4.2.22) dönel yüzeyinin tüm noktalarında Gauss eğriliği pozitifdir (veya Gauss eğriliği negatifdir).*

ii) $1 = \frac{e^{ax^2(u)} - \sqrt{e^{2ax^2(u)} + c_1}}{2ax(u)e^{ax^2(u)} \left(c_2 + \int_1^u \frac{x'(t)e^{ax^2(t)}}{\sqrt{e^{2ax^2(t)}+c_1}} dt - x(u) \right)}$ iken, (4.2.22) dnel yüzeyinin ortalama eğriliği sıfırdır.

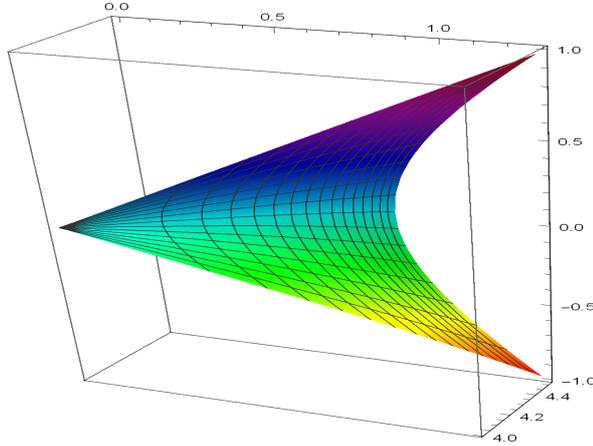
Ŗimdi, profil eğrisi olarak (3.2.173) eğrisini gz nne alalım:

Bu eğrinin spacelike eksen etrafında döndürülmesiyle oluŖan dönel yüzey

$$X_{2S}(u, v) = \left(x(u) \cosh(v), c_7 + \int_1^u \frac{x'(t)}{\sqrt{1 + e^{2ax^2(t)}c_8}} dt, x(u) \sinh(v) \right) \quad (4.2.25)$$

dir.

Ŗekil 4.30 da $x(u) = \sqrt{\ln(u)}$, $c_7 = 4$, $c_8 = 1$ ve $a = 1$ için e^{ax^2} yoğunluklu Lorentz-Minkowski uzayında φ -doğrusal olan (3.2.173) eğrisinin spacelike eksen etrafında döndürülmesiyle oluŖan (4.2.25) dönel yüzeyi gsterilmiŖtir.



Ŗekil 4.30: (4.2.25) dönel yüzeyi

(4.2.25) yüzeyinin normali

$$N = -\frac{1}{\sqrt{e^{2ax^2(u)}c_8}} \left(\cosh(v), \sqrt{1 + e^{2ax^2(u)}c_8}, \sinh(v) \right)$$

dir. Burada $\langle N, N \rangle = 1$ olup N spacelike bir vektördür ve (4.2.25) yüzeyi timelike bir yüzeydir. Böylece (4.2.25) yüzeyinin; birinci temel formunun katsayıları

$$\begin{aligned} E &= -\frac{e^{2ax(u)^2} x'(u)^2 c_8}{1 + c_8 e^{2ax(u)^2}}, \\ F &= 0, \\ G &= x(u)^2 \end{aligned} \quad (4.2.26)$$

ve ikinci temel formunun katsayıları

$$\begin{aligned} e &= \frac{2ax(u)x'(u)^2 \sqrt{c_8 e^{2ax(u)^2}}}{1 + c_8 e^{2ax(u)^2}}, \\ f &= 0, \\ g &= \frac{x(u)}{\sqrt{e^{2ax(u)^2} c_8}} \end{aligned} \quad (4.2.27)$$

şeklinde bulunur. Ayrıca (4.2.26) ve (4.2.27) eşitliklerinden, (4.2.25) yüzeyinin Gauss ve ortalama eğrilikleri, sırasıyla

$$K = \frac{-2a}{e^{2ax^2(u)} c_8}$$

ve

$$H = \frac{(1 - 2ax^2(u))}{2x(u) \sqrt{e^{2ax^2(u)} c_8}}$$

olarak hesaplanır.

Teorem 4.2.12. e^{ax^2} yoğunluklu Lorentz Minkowski uzayında φ – doğrusal olan (3.2.173) eğrisinin spacelike eksen etrafında döndürülmesiyle oluşan (4.2.25) dönele yüzeyi minimal ve flat değildir.

Sonuç 4.2.7. i) $a < 0$ (veya $a > 0$) ise, (4.2.25) dönele yüzeyinin tüm noktalarında Gauss eğriliği pozitifdir (veya Gauss eğriliği negatiftir).

ii) $x(u) = \mp \sqrt{\frac{1}{2a}}$ iken, (4.2.25) dönele yüzeyinin ortalama eğriliği sıfırdır.

Ayrıca cebirsel işlemlerle, (4.2.25) dönele yüzeyinin K Gauss ve H ortalama eğrilikleri arasında

$$H = \frac{1 - \ln\left(\frac{-2a}{Kc_8}\right)}{2\sqrt{\frac{\ln\left(\frac{-2a}{Kc_8}\right)}{-K}}}$$

ilişkisi elde edilir.

Böylece aşağıdaki teorem verilebilir.

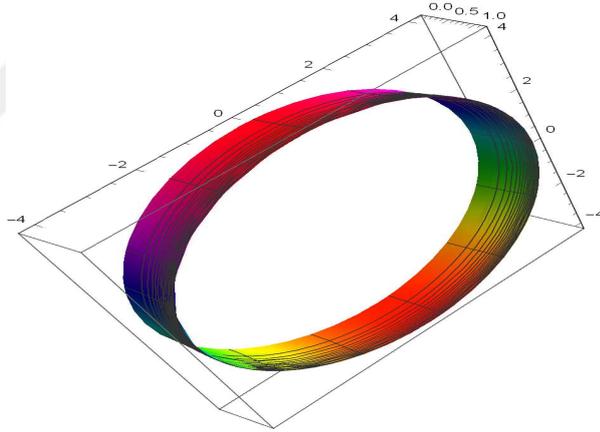
Teorem 4.2.13. e^{ax^2} yoğunluklu Lorentz-Minkowski uzayında φ – doğrusal olan (3.2.173) eğrisinin spacelike eksen etrafında döndürülmesiyle oluşan (4.2.25) dönel yüzeyi bir Weingarten yüzeydir.

Benzer şekilde, (3.2.173) eğrisinin timelike eksen etrafında döndürülmesiyle oluşan dönel yüzey

$$X_{2T}(u, v) = \left(x(u), \left(c_7 + \int_1^u \frac{x'(t)}{\sqrt{1 + e^{2ax^2(t)} c_8}} dt \right) \cos v, \right. \quad (4.2.28)$$

$$\left. \left(c_7 + \int_1^u \frac{x'(t)}{\sqrt{1 + e^{2ax^2(t)} c_8}} dt \right) \sin v \right)$$

olarak elde edilir.



Şekil 4.31: (4.2.28) dönel yüzeyi

Şekil 4.31 de $x(u) = \sqrt{\ln(u)}$, $c_7 = 4$, $c_8 = 1$ ve $a = 1$ için e^{ax^2} yoğunluklu Lorentz-Minkowski uzayında φ –doğrusal olan (3.2.173) eğrisinin timelike eksen etrafında döndürülmesiyle oluşan (4.2.28) dönel yüzeyi gösterilmiştir.

(4.2.28) yüzeyinin normali

$$N = -\frac{1}{\sqrt{e^{ax^2(u)} c_8}} \left(1, \sqrt{1 + e^{ax^2(u)} c_8} \cos(v), \sqrt{1 + e^{ax^2(u)} c_8} \sin(v) \right)$$

olarak bulunur, ki bu da (4.2.28) yüzeyinin timelike bir yüzey olduğunu gösterir. Böylece (4.2.28) yüzeyinin; birinci temel formunun katsayıları

$$\begin{aligned} E &= -\frac{e^{2ax(u)^2} x'(u)^2 c_8}{1 + c_8 e^{2ax(u)^2}}, \\ F &= 0, \\ G &= \left(c_7 + \int_1^u \frac{x'(t)}{\sqrt{1 + e^{2ax^2(t)} c_8}} dt \right)^2 \end{aligned} \quad (4.2.29)$$

ve ikinci temel formunun katsayıları

$$\begin{aligned} e &= \frac{2ax'(u)^2 x(u) \sqrt{e^{2ax(u)^2} c_8}}{\sqrt{1 + c_8 e^{2ax(u)^2}}}, \\ f &= 0, \\ g &= \frac{\sqrt{1 + c_8 e^{2ax(u)^2}} \left(c_7 + \int_1^u \frac{x'(t)}{\sqrt{1 + e^{2ax^2(t)} c_8}} dt \right) \sqrt{e^{2ax(u)^2} c_8}}{c_8 e^{2ax(u)^2}} \end{aligned} \quad (4.2.30)$$

dir. (4.2.29) ve (4.2.30) yardımıyla (4.2.28) yüzeyinin Gauss ve ortalama eğrilikleri, sırasıyla

$$K = \frac{-2ax(u) \sqrt{1 + e^{2ax^2(u)} c_8}}{e^{2ax^2(u)} c_8 \left(c_7 + \int_1^u \frac{x'(t)}{\sqrt{1 + e^{2ax^2(t)} c_8}} dt \right)}$$

ve

$$H = \frac{\sqrt{1 + e^{2ax^2(u)} c_8} - 2ax(u) \left(c_7 + \int_1^u \frac{x'(t)}{\sqrt{1 + e^{2ax^2(t)} c_8}} dt \right)}{2\sqrt{e^{2ax^2(t)} c_8} \left(c_7 + \int_1^u \frac{x'(t)}{\sqrt{1 + e^{2ax^2(t)} c_8}} dt \right)}$$

olarak hesaplanır.

Teorem 4.2.14. e^{ax^2} yoğunluklu Lorentz Minkowski uzayında φ – doğrusal olan (3.2.173) eğrisinin timelike eksen etrafında döndürülmesiyle oluşan (4.2.28) dönelel yüzeyi minimal ve flat değildir.

Sonuç 4.2.8. *i) $ax(u) \left(c_7 + \int_1^u \frac{x'(t)}{\sqrt{1 + e^{2ax^2(t)} c_8}} dt \right) < 0$ (veya > 0) ise, (4.2.28) dönelel yüzeyinin tüm noktalarında Gauss eğriliği pozitifdir (veya Gauss eğriliği negatifdir).*

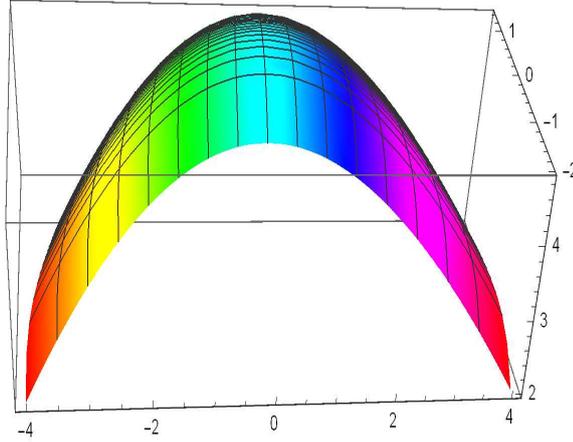
ii) $1 = \frac{\sqrt{1+e^{2ax^2(u)}c_8}}{2ax(u) \left(c_7 + \int_1^u \frac{x'(t)}{\sqrt{1+e^{2ax^2(t)}c_8}} dt \right)}$ ise, (4.2.28) dnel yüzeyinin ortalama eğriliği sıfırdır.

Son olarak (3.2.173) eğrisinin lightlike eksen etrafında döndürülmesiyle oluşan dnel yüzeyin parametrik ifadesinin

$$\begin{aligned} X_{2L}(u, v) = & \left(\left(1 + \frac{v^2}{2} \right) x(u) - \frac{v^2}{2} \left(c_7 + \int_1^u \frac{x'(t)}{\sqrt{1+e^{2ax^2(t)}c_8}} dt \right), \right. \\ & \frac{v^2}{2} x(u) + \left(1 - \frac{v^2}{2} \right) \left(c_7 + \int_1^u \frac{x'(t)}{\sqrt{1+e^{2ax^2(t)}c_8}} dt \right), \\ & \left. v \left(x(u) - \left(c_7 + \int_1^u \frac{x'(t)}{\sqrt{1+e^{2ax^2(t)}c_8}} dt \right) \right) \right). \end{aligned} \quad (4.2.31)$$

olduğu görülür.

şekil 4.32 de $x(u) = \sqrt{\ln(u)}$, $c_7 = 4$, $c_8 = 1$ ve $a = 1$ için e^{ax^2} yoğunluklu Lorentz-Minkowski uzayında φ – doğrusal olan (3.2.173) eğrisinin lightlike eksen etrafında döndürülmesiyle oluşan (4.2.31) dönel yüzeyi gösterilmiştir.



şekil 4.32: (4.2.31) dönel yüzeyi

Benzer işlemlerle (4.2.31) yüzeyinin normali hesaplandığında

$$N = -\frac{1}{2\sqrt{e^{2ax^2(u)}c_8}} \left(\begin{array}{c} (\sqrt{1+e^{2ax^2(u)}c_8} - 1)v^2 - 2, \\ \sqrt{1+e^{2ax^2(u)}c_8}(v^2 - 2) - v^2, 2v(\sqrt{1+e^{2ax^2(u)}c_8} - 1) \end{array} \right)$$

olarak elde edilir. Buradan da N spacelike bir vektör olup, (4.2.31) yüzeyi timelike bir yüzeydir. Böylece (4.2.31) yüzeyinin; birinci temel formunun katsayıları

$$\begin{aligned} E &= \frac{-e^{2ax(u)^2} c_8 x'(u)^2}{1 + c_8 e^{2ax(u)^2}}, \\ F &= 0, \\ G &= \left(c_7 + \int_1^u \frac{x'(t)}{\sqrt{1 + e^{2ax^2(t)} c_8}} dt - x(u) \right)^2 \end{aligned} \quad (4.2.32)$$

ve ikinci temel formunun katsayıları

$$\begin{aligned} e &= -\frac{2ax(u)x'(u)^2 \sqrt{e^{2ax^2(u)} c_8}}{1 + e^{2ax^2(u)} c_8}, \\ f &= 0, \\ g &= \frac{\left(\sqrt{1 + e^{2ax^2(u)} c_8} - 1 \right) \left(c_7 + \int_1^u \frac{x'(t)}{\sqrt{1 + e^{2ax^2(t)} c_8}} dt - x(u) \right)}{\sqrt{e^{2ax^2(u)} c_8}} \end{aligned} \quad (4.2.33)$$

şeklinde bulunur. (4.2.32) ve (4.2.33) eşitliklerinden, (4.2.31) yüzeyinin Gauss ve ortalama eğrilikleri, sırasıyla

$$K = \frac{-2ax(u)}{(\sqrt{1 + e^{2ax^2(u)} c_8} + 1) \left(c_7 + \int_1^u \frac{x'(t)}{\sqrt{1 + e^{2ax^2(t)} c_8}} dt - x(u) \right)}$$

ve

$$H = - \left(\frac{\sqrt{1 + e^{2ax^2(u)} c_8} - 1 - 2ax(u) \left(c_7 + \int_1^u \frac{x'(t)}{\sqrt{1 + e^{2ax^2(t)} c_8}} dt \right) + 2ax^2(u)}{2 \left(c_7 + \int_1^u \frac{x'(t)}{\sqrt{1 + e^{2ax^2(t)} c_8}} dt - x(u) \right) \sqrt{e^{2ax^2(u)} c_8}} \right)$$

olarak hesaplanır.

Teorem 4.2.15. e^{ax^2} yoğunluklu Lorentz Minkowski uzayında φ – doğrusal olan (3.2.173) eğrisinin lightlike eksen etrafında döndürülmesiyle oluşan (4.2.31) döneel yüzeyi minimal ve flat değildir.

Sonuç 4.2.9. *i) $ax(u) \left(c_7 + \int_1^u \frac{x'(t)}{\sqrt{1 + e^{2ax^2(t)} c_8}} dt - x(u) \right) < 0$ (veya > 0) ise, (4.2.31) döneel yüzeyinin tüm noktalarında Gauss eğriliği pozitifdir (veya Gauss eğriliği negatifdir).*

ii) $1 = \frac{\sqrt{1+e^{2ax^2(u)}c_8-1}}{2ax(u)\left(c_7+\int_1^u \frac{x'(t)}{\sqrt{1+e^{2ax^2(t)}c_8}}dt-x(u)\right)}$ iken, (4.2.31) d6nel y6zeyinin ortalama eğriliği sıfırdır.

4.2.4 $e^{ax^2+by^2}$ Yoğunluklu \mathbb{E}_1^3 Uzayında Regle Y6zeyler

Bu alt kısımda, $e^{ax^2+by^2}$ yoğunluklu Lorentz-Minkowski uzayında, taban eğrisi φ -doğrusal olan (3.2.164) ve (3.2.173) eğrileri, doğrultman vekt6rleri de (3.2.164) ve (3.2.173) eğrilerinin Smarandache vekt6rleri olan regle y6zeyler oluşturulacaktır.

İlk olarak taban eğrisi

$$\alpha_1(u) = \left(x(u), c_2 + \int_1^u \frac{x'(t)e^{ax^2(t)}}{\sqrt{e^{2ax^2(t)} + c_1}} dt, 0 \right)$$

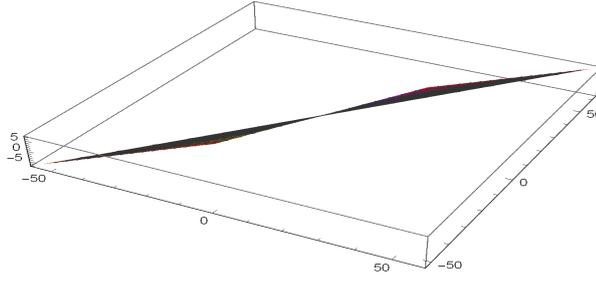
eğrisi ile oluşturulan regle y6zeyler aşağıda parametrelendirilmiş ve bazı karakterizasyonlar verilmiştir.

i) Doğrultman vekt6r6 (3.2.164) eğrisinin TB -Smarandache eğrisi olan (3.2.178) eğrisi ise, bu durumda regle y6zey

$$\begin{aligned} R_{1TB} &:= \varphi_{1TB}(u, v) = \alpha_1(u) + vS_{1TB}(u) \\ &= \left(x(u) + \frac{v\sqrt{e^{2ax^2(u)} + c_1}}{\sqrt{-2c_1}}, c_2 + \int_1^u \frac{e^{ax^2(t)}x'(t)}{\sqrt{c_1 + e^{2ax^2(t)}}} dt + \frac{ve^{ax^2(u)}}{\sqrt{-2c_1}}, \frac{v}{\sqrt{2}} \right) \end{aligned} \quad (4.2.34)$$

şeklindedir.

şekil 4.33 de $x(u) = \sqrt{\ln(u)}$, $c_1 = -0.1$, $c_2 = 4$ ve $a = 1$ için e^{ax^2} yoğunluklu Lorentz- Minkowski uzayında taban eğrisi φ -doğrusal olan (3.2.164) eğrisi ve doğrultman vekt6r6 de (3.2.164) eğrisinin TB -Smarandache eğrisi olan (3.2.178) vekt6r6 tarafından oluşan (4.2.34) regle y6zeyi g6sterilmiştir.



Şekil 4.33: (4.2.34) regle yüzeyi

(4.2.34) yüzeyinin normali

$$N = \frac{1}{\sqrt{4v^2a^2x^2(u)e^{2ax^2(u)} + c_1}} \left(\begin{array}{l} -e^{ax^2(u)}(\sqrt{-c_1} + vx(u)a\sqrt{2}\sqrt{e^{2ax^2(u)} + c_1}) \\ \sqrt{-c_1} \\ -\frac{\sqrt{-c_1}\sqrt{e^{2ax^2(u)} + c_1} + \sqrt{2}avx(u)e^{2ax^2(u)}}{\sqrt{-c_1}} \\ \sqrt{2}avx(u)e^{ax^2(u)} \end{array} \right),$$

dir. N spacelike bir vektör olup, (4.2.34) yüzeyi timelike bir yüzeydir. Buradan (4.2.34) yüzeyinin; birinci temel formunun katsayıları

$$\begin{aligned} E &= -\frac{x'(u)^2 \left(2a^2e^{2ax^2(u)}v^2x(u)^2 + c_1 \right)}{e^{2ax^2(u)} + c_1}, \\ F &= \frac{\sqrt{-c_1}x'(u)}{\sqrt{2(e^{2ax^2(u)} + c_1)}}, \\ G &= 1 \end{aligned} \quad (4.2.35)$$

ve ikinci temel formunun katsayıları

$$\begin{aligned} e &= \frac{ae^{ax^2(u)}x'(u)^2}{(e^{2ax^2(u)} + c_1)\sqrt{4a^2v^2x(u)^2e^{2ax^2(u)} + c_1}} \left(\begin{array}{l} ((2avx(u)^2 + v)\sqrt{-2c_1(e^{2ax^2(u)} + c_1)}) \\ -4a^2e^{2ax^2(u)}v^2x(u)^2 - 2c_1x(u) \end{array} \right), \\ f &= \frac{a\sqrt{-2c_1}x(u)x'(u)e^{ax^2(u)}}{\sqrt{e^{2ax^2(u)} + c_1}\sqrt{4a^2v^2x(u)^2e^{2ax^2(u)} + c_1}}, \\ g &= 0 \end{aligned} \quad (4.2.36)$$

olarak bulunur. Ayrıca (4.2.35) ve (4.2.36) eşitliklerinden, (4.2.34) yüzeyinin Gauss

ve ortalama eğrilikleri, sırasıyla

$$K = -\frac{4a^2x^2(u)c_1e^{2ax^2(u)}}{(c_1 + 4x^2(u)a^2v^2e^{2ax^2(u)})^2}$$

ve

$$H = \frac{-\sqrt{-2c_1}\sqrt{e^{2ax^2(u)} + c_1}vae^{ax^2(u)}(1 + 2ax^2(u)) + 4x^3(u)a^3v^2e^{3ax^2(u)}}{2(c_1 + 4x^2(u)a^2v^2e^{2ax^2(u)})^{3/2}}$$

olarak elde edilir. R_{1TB} regle yüzeyinin dağılma parametresi

$$\delta_{1TB} = \frac{2e^{2ax^2(u)} + c_1}{2x(u)ae^{ax^2(u)}\sqrt{-c_1}\sqrt{\left(c_2 + \int_1^u \frac{e^{ax^2(t)}x'(t)}{\sqrt{c_1 + e^{2ax^2(t)}}}dt\right)^2 - x^2(u)}}$$

olarak hesaplanır. Ayrıca R_{1TB} regle yüzeyi üzerindeki striksiyon eğrisi de

$$\gamma_{1TB}(u) = \alpha_1(u)$$

dir.

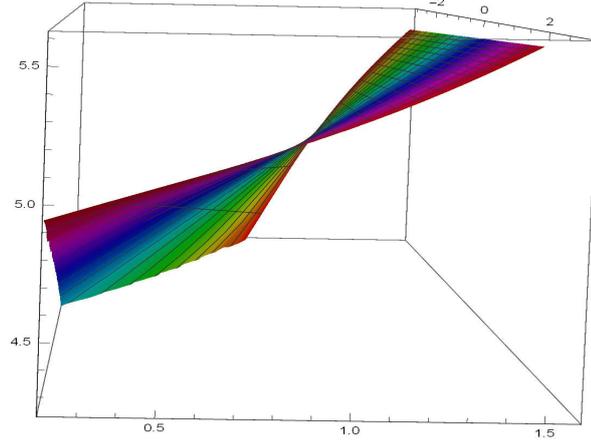
Teorem 4.2.16. R_{1TB} regle yüzeyi açılabilir bir regle yüzey değildir.

Teorem 4.2.17. R_{1TB} regle yüzeyinin striksiyon eğrisi $\gamma_{1TB}(u)$ ile taban eğrisi (3.1.15) çakışık eğrilerdir.

ii) Doğrultman vektörünün (3.2.164) eğrisinin TNB –Smarandache eğrisi olan (3.2.179) eğrisi olması durumunda regle yüzey

$$\begin{aligned} R_{1TNB} &:= \varphi_{1TNB}(u, v) = \alpha_1(u) + vS_{1TNB}(u) \\ &= \left(x(u) + \frac{v\left(\sqrt{e^{2ax^2(u)} + c_1} - e^{ax^2(u)}\right)}{\sqrt{-c_1}}, \right. \\ &\quad \left. c_2 + \int_1^u \frac{e^{ax^2(t)}x'(t)}{\sqrt{c_1 + e^{2ax^2(t)}}}dt + \frac{v\left(e^{ax^2(u)} - \sqrt{e^{2ax^2(u)} + c_1}\right)}{\sqrt{-c_1}}, v\right) \end{aligned} \quad (4.2.37)$$

şeklinde parametrelendirilebilir.



Şekil 4.34: (4.2.37) regle yüzeyi

Şekil 4.34 te $x(u) = \sqrt{\ln(u)}$, $c_1 = -0.1$, $c_2 = 4$ ve $a = 1$ için e^{ax^2} yoğunluklu Lorentz-Minkowski uzayında φ -doğrusal olan (3.2.164) eğrisi ve (3.2.164) eğrisinin TNB -Smarandache eğrisi olan (3.2.179) eğrisi tarafından oluşan (4.2.37) regle yüzeyi gösterilmiştir.

(4.2.37) yüzeyinin normali

$$N = \left(\frac{-avx(u)e^{2ax^2(u)}(\sqrt{-c_1} + 2avx(u)(\sqrt{e^{2ax^2(u)} + c_1} - e^{ax^2(u)}))}{2(avx(u)\sqrt{-c_1}e^{ax^2(u)})^{3/2}}, \right. \\ \left. \frac{2avx(u)e^{ax^2(u)}(\sqrt{e^{2ax^2(u)} + c_1} - e^{ax^2(u)}) - \sqrt{-c_1}\sqrt{e^{2ax^2(u)} + c_1}}{\sqrt{2}\sqrt{-c_1}x(u)\sqrt{av\sqrt{-c_1}e^{ax^2(u)}}}, \right. \\ \left. \frac{\sqrt{-c_1}}{2\sqrt{x(u)av\sqrt{-c_1}e^{ax^2(u)}}} \right)$$

dir. Burada $\langle N, N \rangle = 1$ olup, (4.2.37) yüzeyi timelike bir yüzeydir. Böylece (4.2.37) yüzeyinin; birinci temel formunun katsayıları

$$E = \frac{x'(u)^2\sqrt{-c_1}(\sqrt{-c_1} - 4avx(u)e^{ax^2(u)})}{e^{2ax^2(u)} + c_1}, \quad (4.2.38) \\ F = \frac{x'(u)\sqrt{-c_1}}{\sqrt{e^{2ax^2(u)} + c_1}}, \\ G = 1$$

ve ikinci temel formunun katsayıları

$$e = \frac{x'(u)^2 \sqrt{avx(u)e^{ax^2(u)}\sqrt{-c_1}}}{(e^{2ax^2(u)} + c_1)v x(u)} \left(\begin{array}{c} v\sqrt{e^{2ax^2(u)} + c_1} + x(u)\sqrt{-c_1} + \\ 2avx(u)^2(\sqrt{e^{2ax^2(u)} + c_1} - 2e^{2ax^2(u)}) \end{array} \right), \quad (4.2.39)$$

$$f = \frac{x'(u)\sqrt{avx(u)e^{ax^2(u)}\sqrt{-c_1}}}{v\sqrt{e^{2ax^2(u)} + c_1}},$$

$$g = 0$$

olarak bulunur. Ayrıca (4.2.38) ve (4.2.39) yardımıyla (4.2.37) yüzeyinin Gauss ve ortalama eğrilikleri, sırasıyla

$$K = \frac{1}{4v^2}$$

ve

$$H = -\frac{ae^{ax^2(u)}}{8avx(u)\sqrt{-c_1}e^{ax^2(u)}} \left(\begin{array}{c} v\sqrt{-c_1}\sqrt{e^{2ax^2(u)} + c_1} + x(u)c_1 + \\ 2x^2(u)av\sqrt{-c_1}(\sqrt{e^{2ax^2(u)} + c_1} - 2e^{ax^2(u)}) \end{array} \right)$$

olur.

$\langle S'_{1TNB}(u), S'_{1TNB}(u) \rangle = 0$ olduğundan, R_{1TNB} regle yüzeyi Lorentz anlamında bir silindirdir. Ayrıca, R_{1TNB} regle yüzeyi üzerindeki striksiyon eğrisinin parametrik gösterimi de

$$\gamma_{1TNB}(u) = \alpha_1(u)$$

dir.

Teorem 4.2.18. R_{1TNB} regle yüzeyinin striksiyon eğrisi $\gamma_{1TNB}(u)$ ile taban eğrisi (3.2.164) çakışık eğrilerdir.

Şimdi de taban eğrisi

$$\alpha_2(u) = \left(x(u), c_7 + \int_1^u \frac{x'(t)}{\sqrt{1 + e^{2ax^2(t)}c_8}} dt, 0 \right)$$

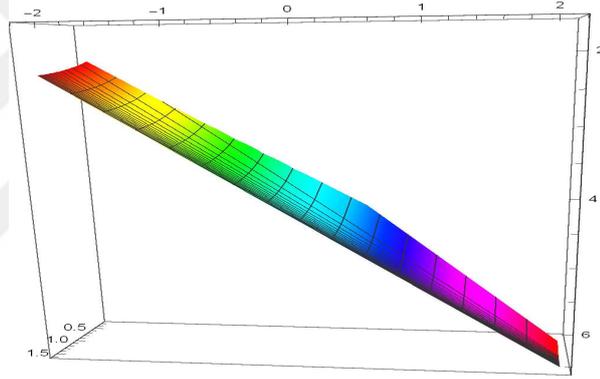
eğrisi olan regle yüzeyleri inceleyelim.

i) Doğrultman vektörü (3.2.173) eğrisinin NB –Smarandache eğrisi olan (3.2.181) eğrisi olması durumunda regle yüzey

$$\begin{aligned}
 R_{2NB} &:= \varphi_{2NB}(u, v) = \alpha_2(u) + vS_{2NB}(u) \\
 &= \left(x(u) + \frac{v}{\sqrt{2c_8e^{2ax^2(u)}}}, \right. \\
 &\quad \left. c_7 + \int_1^u \frac{x'(t)}{\sqrt{1 + c_8e^{2ax^2(t)}}} dt + \frac{v\sqrt{1 + c_8e^{2ax^2(u)}}}{\sqrt{2c_8e^{2ax^2(u)}}}, \frac{v}{\sqrt{2}} \right),
 \end{aligned} \tag{4.2.40}$$

olarak elde edilir.

Şekil 4.35 te $x(u) = \sqrt{\ln(u)}$, $c_7 = 4$, $c_8 = 4$ ve $a = 1$ için e^{ax} yoğunluklu Lorentz-Minkowski uzayında φ -doğrusal olan (3.2.173) eğrisi ve (3.2.181) NB –Smarandache eğrisi tarafından oluşan (4.2.40) regle yüzeyi gösterilmiştir.



Şekil 4.35: (4.2.40) regle yüzeyi

Gerekli cebirsel işlemlerden sonra (4.2.40) yüzeyinin normali

$$N = \left(\frac{1}{\sqrt{2c_8e^{2ax^2}}}, \frac{\sqrt{1 + c_8e^{2ax^2}}}{\sqrt{2c_8e^{2ax^2}}}, \frac{1}{\sqrt{2}} \right)$$

olarak bulunur. N spacelike bir vektördür ve dolayısıyla (4.2.40) yüzeyi timelike bir yüzeydir. Buradan (4.2.40) yüzeyinin; birinci temel formunun katsayıları

$$\begin{aligned}
 E &= \frac{x'(u)^2 \left(\sqrt{c_8e^{2ax^2(u)}} - \sqrt{2}avx(u) \right)^2}{1 + c_8e^{2ax^2(u)}}, \\
 F &= 0, \\
 G &= 1
 \end{aligned} \tag{4.2.41}$$

ve ikinci temel formunun katsayıları

$$\begin{aligned}
e &= \frac{\sqrt{2}ax(u)x'(u)^2 \left(\sqrt{c_8 e^{2ax^2(u)}} - \sqrt{2}avx(u) \right)}{\sqrt{1 + c_8 e^{2ax^2(u)}}}, \\
f &= 0, \\
g &= 0
\end{aligned} \tag{4.2.42}$$

şeklindedir. Ayrıca (4.2.41) ve (4.2.42) eşitliklerinden, (4.2.40) yüzeyinin Gauss ve ortalama eğrilikleri, sırasıyla

$$K = 0$$

ve

$$H = \frac{-ax(u)}{\sqrt{2 \left(c_8 e^{2ax^2(u)} - 2avx(u) \sqrt{2c_8 e^{2ax^2(u)}} + 2(avx(u))^2 \right)}}$$

olur. Böylece, R_{2NB} regle yüzeyi düzlemsel bir yüzey olduğundan dağılma parametresi sıfırdır ve yüzey açılabilir. Ayrıca, R_{2NB} regle yüzeyi üzerindeki striksiyon eğrisinin parametrik gösterimi de

$$\gamma_{2TB}(u) = \alpha_2(u) + \frac{\sqrt{c_8 e^{2ax^2(u)}}}{\sqrt{2}ax(u) \sqrt{\left(c_7 + \int_1^u \frac{x'(t)}{\sqrt{1+c_8 e^{2ax^2(t)}}} dt \right)^2 - x^2(u)}} S_{2NB}(u)$$

şeklindedir.

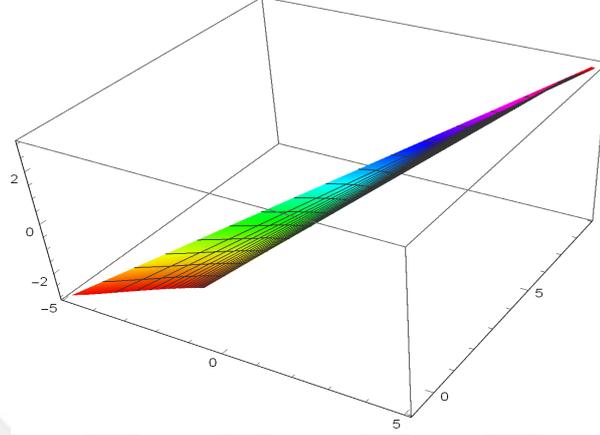
Teorem 4.2.19. R_{2NB} regle yüzeyinin striksiyon eğrisi $\gamma_{2NB}(u)$ ve taban eğrisi (3.2.173) kesişmezler.

ii) Doğrultman vektörünün (3.2.173) eğrisinin TNB –Smarandache eğrisi olan (3.2.182) eğrisi olması durumunda regle yüzey

$$\begin{aligned}
R_{2TNB} &:= \varphi_{2TNB}(u, v) = \alpha_2(u) + vS_{2TNB}(u) \\
&= \left(x(u) + \frac{v \left(\sqrt{1 + c_8 e^{2ax^2(u)}} + 1 \right)}{\sqrt{c_8 e^{2ax^2(u)}}}, \right. \\
&\quad \left. c_7 + \int_1^u \frac{x'(t)}{\sqrt{1 + c_8 e^{2ax^2(t)}}} dt + \frac{v \left(\sqrt{1 + c_8 e^{2ax^2(u)}} + 1 \right)}{\sqrt{c_8 e^{2ax^2(u)}}}, v \right)
\end{aligned} \tag{4.2.43}$$

olarak bulunur.

Şekil 4.36 da $x(u) = \sqrt{\ln(u)}$, $c_7 = 4$, $c_8 = 4$ ve $a = 1$ için e^{ax^2} yoğunluklu Lorentz-Minkowski uzayında φ -doğrusal olan (3.2.173) eğrisi ve (3.2.173) eğrisinin TNB -Smarandache eğrisi olan (3.2.182) eğrisi tarafından oluşan (4.2.43) regle yüzeyi gösterilmiştir.



Şekil 4.36: (4.2.43) regle yüzeyi

Gerekli işlemlerden sonra (4.2.43) yüzeyinin normali

$$N = \left(\frac{2avx(u)(1 + \sqrt{1 + c_8e^{2ax^2(u)}}) - \sqrt{c_8e^{2ax^2(u)}}}{\sqrt{2c_8e^{2ax^2(u)}(c_8e^{2ax^2(u)} - 2avx(u)\sqrt{c_8e^{2ax^2(u)}})}}, \right. \\ \frac{2avx(u)(1 + \sqrt{c_8e^{2ax^2(u)}}) - \sqrt{(1 + c_8e^{2ax^2(u)})c_8e^{2ax^2(u)}}}{\sqrt{2c_8e^{2ax^2(u)}(c_8e^{2ax^2(u)} - 2avx(u)\sqrt{c_8e^{2ax^2(u)}})}}, \\ \left. \frac{\sqrt{c_8e^{2ax^2(u)}}}{\sqrt{2(c_8e^{2ax^2(u)} - 2avx(u)\sqrt{c_8e^{2ax^2(u)}})}} \right)$$

olarak elde edilir. N spacelike bir vektördür ve bu nedenle (4.2.43) yüzeyi timelike bir yüzeydir.

Buradan (4.2.43) yüzeyinin birinci temel formunun katsayıları

$$E = \frac{x'(u)^2\sqrt{c_8e^{2ax^2(u)}}(\sqrt{c_8e^{2ax^2(u)}} - 4avx(u))}{1 + c_8e^{2ax^2(u)}}, \\ F = x'(u)\sqrt{\frac{c_8e^{2ax^2(u)}}{1 + c_8e^{2ax^2(u)}}}, \\ G = 1 \quad (4.2.44)$$

ve ikinci temel formunun katsayıları

$$e = \frac{ax'(u)^2 \sqrt{2c_8 e^{2ax^2(u)}}}{(1 + c_8 e^{2ax^2(u)}) \sqrt{c_8 e^{2ax^2(u)} - 2avx(u) \sqrt{c_8 e^{2ax^2(u)}}}} \left(\begin{array}{l} v\sqrt{1 + c_8 e^{2ax^2(u)}} + x(u) \sqrt{c_8 e^{2ax^2(u)}} \\ -2avx(u)^2 (2 + \sqrt{1 + c_8 e^{2ax^2(u)}}) \end{array} \right),$$

$$f = \frac{\sqrt{2}ax(u)x'(u) \sqrt{c_8 e^{2ax^2(u)}}}{\sqrt{(1 + c_8 e^{2ax^2(u)})(c_8 e^{2ax^2(u)} - 2avx(u) \sqrt{c_8 e^{2ax^2(u)}})}}, \quad (4.2.45)$$

$$g = 0$$

olarak bulunur. Ayrıca (4.2.44) ve (4.2.45) yardımıyla, (4.2.43) yüzeyinin Gauss ve ortalama eğrilikleri, sırasıyla

$$K = \frac{(ax(u))^2}{c_8 e^{2ax^2(u)} - 4vx(u)a \sqrt{c_8 e^{2ax^2(u)}} + (2vx(u)a)^2}$$

ve

$$H = \frac{2avx(u)^2 (2 + \sqrt{1 + c_8 e^{2ax^2(u)}}) - v\sqrt{1 + c_8 e^{2ax^2(u)}} - 3x(u) \sqrt{c_8 e^{2ax^2(u)}}}{2(\sqrt{c_8 e^{2ax^2(u)}} - 2avx(u)) \sqrt{2(c_8 e^{2ax^2(u)} - 2avx(u) \sqrt{c_8 e^{2ax^2(u)}})}}$$

dir.

$\langle S'_{2TNB}(u), S'_{2TNB}(u) \rangle = 0$ olduğundan, R_{2TNB} regle yüzeyi Lorentz anlamında bir silindirdir. Ayrıca, R_{2TNB} regle yüzeyi üzerindeki striksiyon eğrisinin parametrik gösterimi de

$$\gamma_{2TNB}(u) = \alpha_2(u)$$

şeklindedir.

Teorem 4.2.20. R_{2TNB} regle yüzeyinin $\gamma_{2TNB}(u)$ striksiyon eğrisi ile (3.2.173) taban eğrisi çakışık eğrilerdir.

KAYNAKLAR

- [1] M. Turgut and S. Yılmaz, *Smarandache curves in minkowski space-time*, **International J. Mathematical Combinatorics**, 3 (2008) 51-55.
- [2] A.T. Ali, *Special smarandache curves in the euclidian space*, **International J. Mathematical Combinatorics**, 2 (2010) 30-36.
- [3] M. Çetin and Y. Tuncer and M.K. Karacan, *Smarandache curves according to bishop frame in euclidean 3- space*, **General Mathematics Notes**, 20 (2014). 50-66.
- [4] K. Taşköprü and M. Tosun, *Smarandache curves on S^2* , **Boletim da Sociedade Paranense de Mathematica**, 32:1 (2014) 51-59.
- [5] A. Çalışkan and S.Şenyurt, *Smarandache curves in terms of sabban frame of spherical indicatrix curves*, **General Mathematics Notes**, 31:2 (2015) 1-15.
- [6] M. Juza, *Ligne de striction sur une generalisation a plusieururs dimensions d'une surface regle*, **Czechoslovak Mathematical Journal**, 12: 87 (1962) 243-250.
- [7] H. Frank and O. Giering, *Verallgemeinerte fegelflachen*, **Math. Zelt**, 150 (1976) 261-271.
- [8] C. Thas, *Properties of ruled surfaces in the Euclidean space E^n* , **Academica Sinica**, 6:1 (1978) 133-142.
- [9] Mahmut Ergüt, *Regle Yüzeyler*, M. Thesis, Fırat University Turkey, 1980.
- [10] S. Keleş and N. Kuruoğlu, *Properties of 2-dimensional ruled surfaces in the Euclidean n-space E^n and Massey's Theorem*, **Communications Series A1: Mathematics and Statistics**, 32 (1983) 151-158.
- [11] N. Kuruoğlu and S. Keleş, *Properties of generalized ruled surfaces in the Euclidean n-space E^n and Massey's Theorem*, **Ankara Üniversitesi Mathematical Journal**, 6 (1983) 151-158.
- [12] H.H. Hacısalihoğlu, *On the pith of closed ruled surfaces*, **Mech. Theory**. 7 (1972) 291-305.
- [13] A. Turgut and H.H. Hacısalihoğlu, *Time like ruled surfaces in the Minkowski 3-space*, **Far East Journal of Mathematical Sciences FJMS**, 5: 1 (1997) 83-90.

- [14] A. Turgut and H.H. Hacısalihoğlu, *On the distribution parameter of timelike ruled surfaces in the Minkowski 3-space*, **Far East Journal of Mathematical Sciences, FJMS** 5(2), 321-328.
- [15] Y. Yaylı, *On the motion of the Frenet vectors and spacelike ruled surfaces in the Minkowski 3-space*, **Mathematical Computational Applications**, 5: 1 (2000) 49-55.
- [16] H.H. Hacısalihoğlu, *Diferensiyel Geometri, Cilt I ve Cilt II*. Ankara Üniversitesi Fen Fakültesi Yayınları, Ankara, 2000, p. 895.
- [17] B. O'Neill, *Semi Riemann Geometry with Applications to Relativity*, Academic Press, Los Angeles, California, 1983, p. 468.
- [18] B. O'Neill, *Elementary Differential Geometry*, Academic Press, New York, 1997, p. 817.
- [19] M. P. do Carmo, *Differential Geometry of Curves and Surfaces*, Prentice-Hall Inc., New Jersey, 1976, p.503.
- [20] A. Gray, *Modern Differential Geometry of Curves and Surfaces with Mathematica*, CRC Press, Boca Raton, FL, USA, 1998. p.984.
- [21] F. Dillen, J. Pas and L. Verstraelen, *On the Gauss map of surfaces of revolution*, **Bull. Ins. Math. Acad. Sinica**, 18 (1990) 239-246.
- [22] B.Y. Chen, and S. Ishikawa, *On classification of some surfaces of revolution of finite type*, **Tsukuba J. Math**, 17:1 (1993) 287-298.
- [23] J. I. Hano and K. Nomizu, *Surfaces of revolution with constant mean curvature in Lorentz-Minkowski space*, **Tohoku Math. Journ**, 36 (1984) 427-437.
- [24] H. Liu and G. Liu, *On the Rotation Surfaces in 3-dimensional Minkowski space*, **Kyushu J. of Math**, 48: 2 (1994) 347-356.
- [25] R. Lopez, *Timelike surfaces with constant mean curvature in Lorentz three-space*, **Tohoku Math. J.** 52: 4 (2000) 515-532.
- [26] S. Lee and J.H. Varnado, *Spacelike surfaces of revolution with constant mean curvature in Minkowski 3-space*, **Differential Geometry and Dinamical Systems**, 8 (2006) 144-165.
- [27] S. Lee and J.H. Varnado, *Timelike surfaces of revolution with constant mean curvature in Minkowski 3-space*, **Differential Geometry and Dinamical Systems**, 9 (2007) 82-102.
- [28] M. Choi, Y.H. Kim and D.W. Yoon, *Some classification of surfaces of revolution in Minkowski 3-space*, **Journal of Geometry**, 104: 1 (2013) 85-106.

- [29] A. Lichnerowicz, *Variétés riemanniennes a tenseur C non négatif*, **C.R. Acad. Sci. Paris Sér**, 271 (1970) 650-653.
- [30] D. Bakry and M. Émery, *Diffusions hypercontractive*, *Séminaire de Probabilités XIX*, **Lecture Notes Math.** 1123 (1985) 177-206.
- [31] D. Bakry and M. Ledoux, *Lévy-Gromov isoperimetric inequality for an infinite-dimensional diffusion generator*, **Invent. Math.**, 123 (1996) 259-281.
- [32] M. Gromov, *Isoperimetry of waists and concentration of maps*. **Geom. Func. Anal.**, 13 (2003) 178-215.
- [33] I. Corwin, H. Hoffman, S. Hurder, V. Sesum and Y. Xu, *Differential geometry of manifolds with density*, **Rose-Hulman Und. Math. J.**, 7 (2006) 1-15.
- [34] F. Morgan, *Manifolds with Density*, **Not. Amer. Math. Soc.**, 52: 8(2005) 853-858.
- [35] F. Morgan, *Myers' Theorem With Density*, **Kodai Math. J.**, 29 (2006) 455-461.
- [36] F. Morgan, *Manifolds with Density and Perelman's Proof of the Poincare Conjecture*, **Math. Assoc. America**, 116: 2 (2009) 134-142.
- [37] D.T. Hieu and N.M. Hoang, *Ruled Minimal Surfaces in R^3 With Density $e^{\{z\}}$* . **Pacific J. Math.**, 243:2 (2009) 277-285.
- [38] D.W. Yoon, D.S. Kim, Y.H. Kim and J.W. Lee, *Constructions of Helicoidal Surfaces in Euclidean Space with Density*, **Symmetry**, 173 (2017) 1-9.
- [39] D.W. Yoon and Z.K. Yüzbaşı, *Weighted Minimal Affine Translation Surfaces in Euclidean Space with Density*, **Int. J. Geom. Methods Mod. Phys.**, 15:11 (2018) 1-9.
- [40] Ö.G. Yıldız, S. Hızal and M. Akyiğit, *Type I+ Helicoidal Surfaces with Prescribed Weighted Mean or Gaussian Curvature in Minkowski Space with Density*, **An. S.t. Univ. Ovidius Constanta**, 26: 3 (2018) 99-108.
- [41] D. W. Yoon, *Weighted Minimal Translation Surfaces in Minkowski 3-space with Density*, **Int. J. Geom. Methods Mod. Phys.**, 14: 12 (2017) 1-10.
- [42] D. W. Yoon, *Weighted Minimal Translation Surfaces in the Galilean Space with Density*, **Open Math**, 15 (2017) 459-466.
- [43] A. Kazan and H.B. Karadağ, *Weighted Minimal And Weighted Flat Surfaces of Revolution in Galilean 3-Space with Density*, **Int. J. Anal. Appl.**, 16: 3 (2018) 414-426.

- [44] D. W. Yoon, J. W. Lee, C.W., Lee, ϕ -minimal rotational surfaces in pseudo-Galilean space with density, **Annales Polonici Mathematici**. 120(2) (2017) 1-12.
- [45] A. Sabuncuoğlu, *Diferensiyel Geometri*, Nobel Yayın Dağıtım, Ankara, 2004, 440..
- [46] A. Pressley, *Elementary Differential Geometry*, Springer, London, UK. 2010, 473.
- [47] J. Weingarten, *Ueber eine Klasse auf einander abwickelbarer Flächen*, **J. Reine Angew. Math**, 59, (1861) 382–393
- [48] J. Weingarten, *Ueber die Flächen, derer Normalen eine gegebene Fläche berühren*, **J. Reine Angew. Math**, 62 (1863) 61–63
- [49] R. Lopez, *Differential Geometry of Curves and Surfaces in Lorentz-Minkowski space*, **arXiv:0810335v1,[math.DG]**, (2008) 1-74.
- [50] M. Choi, Y. H. Kim and D. W. Yoon, *Some classification of surfaces of revolution in Minkowski 3-space*, **Journal of Geometry**, 104:1 (2013) 85-106.
- [51] D.T. Hieu and T.L. Nam, *The Classification of Constant Weighted Curvature Curves in the Plane with a Log-Linear Density*. **Commun. Pure Appl. Anal.**, 13 (2013) 1641-1652.

ÖZGEÇMİŞ

- Ad Soyad:** Mustafa Altın
- Doğum Yeri ve Tarihi:** Gölbaşı/ 01.09.1982
- Adres:** Bingöl Üniversitesi, Teknik Bilimler M.Y.O.
BİNGÖL
- E-Posta:** maltin@bingol.edu.tr
- Lisans:** İnönü Üniversitesi, Fen Edebiyat Fakültesi,
Matematik Bölümü (2000-2004)
- Tezsiz Yüksek Lisans:** İnönü Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü,
Matematik Öğretmenliği (2005-2006)
- Yüksek Lisans:** Fırat Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü,
Matematik Anabilim Dalı (2010-2013)
- Mesleki Deneyim ve Ödüller:** 2004-2010 Dershane Geometri Öğretmenliği,
2010-... Bingöl Üniversitesi Öğretim Görevlisi

TEZDEN TÜRETİLEN YAYINLAR/SUNUMLAR

1. M. Altın, A. Kazan and H.B. Karadağ, *Rotational Surfaces Generated by Planar Curves in E^3 with Density*, **IJAA**, 17(3) (2019) 311-328.
2. M. Altın, A. Kazan and H.B. Karadağ, *Ruled Surfaces in E^3 with Density*, **Honam Math. J.** (In Press).
3. M. Altın, A. Kazan and H.B. Karadağ, in: *Ruled Surfaces whose Base Curves are Non-Null Curves With Zero Weighted Curvature in E_1^3 with*

Density e^{ax+by} , 17 th. International Geometry Symposium, Erzincan, Türkiye, June 19-22, (2019),

4. M. Altın, A. Kazan and H.B. Karadağ, in: Rotational Surfaces Generated by Non-Null Curves With Zero Weighted Curvature in E_1^3 with Density $e^{ax^2+by^2}$, 17 th. International Geometry Symposium, Erzincan, Türkiye, June 19-22, (2019),
5. M. Altın, A. Kazan and H.B. Karadağ, in: Ruled Surfaces whose Base Curves are Non-Null Curves With Vanishing Weighted Curvature in Lorentz Minkowski Space with Density $e^{ax^2+by^2}$, III. International Scientific and Vocational Studies Congress-Science and Health, Nevşehir, Türkiye, June 27-30, (2019),
6. M. Altın, A. Kazan and H.B. Karadağ, in: Rotational Surfaces Genarated by Non-Null Curves With Vanishing Weighted Curvature in Lorentz Minkowski Space with Density $e^{ax^2+by^2}$, III. International Scientific and Vocational Studies Congress-Science and Health, Nevşehir, Türkiye, June 27-30, (2019),