

**TÜRK HAVA KURUMU ÜNİVERSİTESİ**  
**FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**

**HELMHOLTZ DENKLEMİNİN OPTİMAL KONTROL PROBLEMLERİ VE**  
**MİKRODALGA ISITMASINDA UYGULANMASI**

**YÜKSEK LİSANS TEZİ**

**Aydın Yılmaz**

**Elektrik-Elektronik Mühendisliği**

**Yüksek Lisans Programı**

**Ocak, 2017**

**TÜRK HAVA KURUMU ÜNİVERSİTESİ FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ  
ELEKTRİK-ELEKTRONİK MÜHENDİSLİĞİ**

**HELMHOLTZ DENKLEMİNİN OPTİMAL KONTROL PROBLEMLERİ VE  
MİKRODALGA ISITMASINDA UYGULANMASI**

**YÜKSEK LİSANS TEZİ**

**Aydın Yılmaz**

**1303620012**

**Elektrik-Elektronik Mühendisliği**

**Yüksek Lisans Programı**

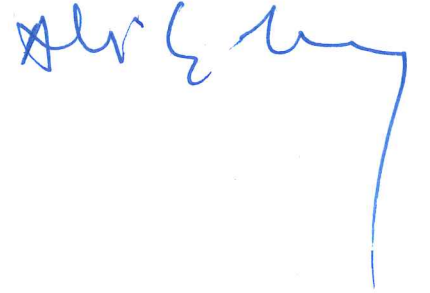
**Danışman: Yrd. Doç. Dr. Özgür Kelekçi**

Türk Hava Kurumu Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü'nün 1303620012 numaralı Yüksek Lisans öğrencisi Aydın YILMAZ, ilgili yönetmeliklerin belirlendiği gerekli tüm şartları yerine getirdikten sonra hazırladığı "HELMHOLTZ DENKLEMİNİN OPTİMAL KONTROL PROBLEMLERİ VE MİKRODALGA ISITMASINDA UYGULANMASI" başlıklı tezini, aşağıda imzaları olan jüri önünde başarı ile sunmuştur.


**Danışman** : Yrd.Doç.Dr. Özgür Kelekçi  
Türk Hava Kurumu Üniversitesi



**Jüri Üyeleri** : Prof.Dr.Ali Çoban  
Türk Hava Kurumu Üniversitesi



: Yrd.Doç.Dr. Gökhan Bakan  
Uluslararası Antalya Üniversitesi



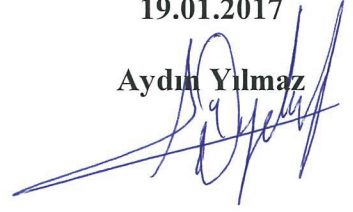
**Tez Savunma Tarihi: 19.01.2017**

**TÜRK HAVA KURUMU ÜNİVERSİTESİ**  
**FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ MÜDÜRLÜĞÜ'NE**

Yüksek Lisans Tezi olarak sunduğum, “Helmholtz denkleminin optimal kontrol problemleri ve Mikrodalga ısıtmasında uygulanması” adlı çalışmamın tarafımdan akademik etik ve kurallara aykırı düşecek bir yardıma başvurmaksızın yazıldığını ve yararlandığım kaynakların kaynakçada gösterilenlerden oluştuğunu, bunlara atıf yapılarak yararlanılmış olduğunu belirtir ve bunu onurumla doğrularım.

**19.01.2017**

**Aydın Yılmaz**



## ÖNSÖZ

Yüksek Lisans Tez çalışmam sürecinde emeği geçen, başta benden hiçbir zaman desteğini esirgemeyen, düşünceleri ve önerileri ile beni yönlendiren danışmanım Yrd. Doç. Dr. Özgür Kelekçi hocama sonsuz teşekkürlerimi sunarım.



**OCAK 2017**

**Aydın Yılmaz**

## İÇİNDEKİLER

ÖNSÖZ .....	iii
TABLO LİSTESİ.....	vi
ŞEKİLLER.....	vii
ÖZET.....	ix
HELMHOLTZ DENKLEMİNİN OPTİMAL KONTROL PROBLEMLERİ VE MİKRODALGA ISITMASINDA UYGULANMASI.....	ix
ABSTRACT .....	xi
OPTIMAL CONTROL PROBLEMS OF HELMHOLTZ EQUATION APPLIED TO MICROWAVE HEATING .....	xi
BİRİNCİ BÖLÜM .....	1
GİRİŞ VE ÖN BİLGİLER.....	1
1.1 The Helmholtz denklemi.....	4
1.2 Helmholtz denkleminin dalga denkleminde elde edilişi .....	4
1.3 İç mekan problemleri(Interior problems).....	5
1.4 Dış mekan problemler(Exterior problems) .....	6
1.5. Helmholtz denkleminin bazı uygulamaları .....	6
İKİNCİ ÜNİTE .....	14
HELMHOTLZ DENKLEMİNİN OPTİMAL KONTROL PROBLEMLERİ.....	14
2.1. Optimal kontrol problemleri .....	15
2.2. Optimal Kontrol Probleminin Çözümü.....	17
2.2.1. Pontryagin'in maksimum prensibi .....	18
2.2.2 Lagrange yöntemi ve Optimalite Koşulları.....	19
2.3. Optimal kontrol problemlerinin sayısal çözümleri .....	20
2.3.1 Azalan gradyan yöntemi .....	21
2.3.2. Eşlenik gradyan yöntemi.....	22

2.4. Yaklaşım prosedürü .....	24
ÜÇÜNCÜ ÜNİTE.....	26
SONLU ELEMANLAR YÖNTEMİ VE AYRIK KONTROL PROBLEMİ.....	26
3.1. Sonlu elemanlar ayrıklaştırılması.....	26
3.2 Ayrıklaştırma .....	32
DÖRDÜNCÜ ÜNİTE .....	34
MİKRODALGA ISITMA PRENSİBİ.....	34
4.1. Mikrodalga Isıtma Prensibi.....	34
BEŞİNCİ ÜNİTE .....	38
UYGULAMALAR .....	38
SONUÇ VE ÖNERİLER.....	48
KAYNAKÇA.....	50
ÖZGEÇMİŞ .....	59

## TABLO LİSTESİ

<b>Tablo 1.1:</b> CGM iterasyonları; $\beta/h=10$ , $N = 200$ .....	11
<b>Tablo 1.2:</b> CGM iterasyonları; $\beta/h=10$ , $N =$ Değişken sayısı .....	11





## ŞEKİLLER

Şekil 1.1:	5
Şekil 1.2:	6
Şekil 1.3: Sorunun çözümü (1.18).	7
Şekil 1.4: Sorunun çözümü (1.19)..	8
Şekil 1.5: a) Durum 4 için genlik $v(x)$ ; b) Hata'nın seyri.....	10
Şekil 1.6: a) Durum 8 için genlik $v(x)$ ; b) Hata'nın seyri.....	10
Şekil 1.7: a) Durum 12 için genlik $v(x)$ ; b) Hata'nın seyri.....	11
Şekil 1.8: Durum 19 için genlik $v(x)$ .....	11
Şekil 1.9: Durum 22 için genlik $v(x)$ .....	11
Şekil 1.10: Anlatılan HDG yöntemi için serbestlik dereceleri dağılımı.....	12
Şekil 1.11: Normal periyotlu, frekansı $w_{(3)} a/2\pi = 0.35014$ and $w_{(4)} a/2\pi = 0.44563$ olan 6 periyotlu model üzerinden yayılım paterni. ....	13
Şekil 1.12: Perdeleme yayılım paterni.....	13
Şekil 2.1: $\Gamma$ içinde dağıtılmış kontrol (sol), sınırdaki etki eden sınır kontrolü (sağ)...14	14
Şekil 2.2: Dalga fenomeni spektrumu:..	16
Şekil 2.3: Perdeleme probleminin optimal kontrol formülasyonu. ....	17
Şekil 2.4: Bir dizi seviye eğrisinde azalan gradyan örnekleme.....	21
Şekil 2.5: Çözüm ve kontur çizgileri. ....	22
Şekil 2.6: .....	23
Şekil 3.1: Bir FEM çalışmasında örgü oluşumu için kullanılan bazı temel unsurlar.27	27
Şekil 3.2: 1 boyutlu bölgenin bir alt bölümü.....	28
Şekil 3.3: Parçalı doğrusal sonlu elemanlar baz fonksiyonu .....	28
Şekil 3.4: Bölgenin üçgen ağlara bölünmesi $\Omega$ ..	29

<b>Şekil 3.5:</b> Tipik bir sonlu elemanlar baz fonksiyonu $\phi$ .....	30
<b>Şekil 3.6:</b> Farklı alanlardaki farklı ağlar.....	32
<b>Şekil 4.1:</b> Mikrodalga fırın, dalga kılavuzu, cam plaka ve patates geometrisi.....	35
<b>Şekil 4.2:</b> Patates içinde yayılmış mikrodalga güç dağılımı.....	36
<b>Şekil 4.3:</b> Beş saniyelik ısıtmadan sonra patatesteki sıcaklık dağılımı..	37
<b>Şekil 5.1:</b> Tanım kümesinin ayrıklaştırılması.....	39
<b>Şekil 5.2:</b> Dalga denkleminin çözümünün imajiner kısmı.....	40
<b>Şekil 5.3:</b> Dalga denkleminin çözümünün reel kısmı.....	41
<b>Şekil 5.4:</b> Sıcaklık.....	41
<b>Şekil 5.5:</b> Dikdörtgensel bir alanda sınır kontrolü.....	42
<b>Şekil 5.6:</b> Optimal durum değişkeninin reel kısmı.....	44
<b>Şekil 5.7:</b> Optimal durum değişkeninin imajiner kısmı.....	45
<b>Şekil 5.8:</b> Optimal eş değişkeninin reel kısmı.....	45
<b>Şekil 5.9:</b> Optimal eş değişkeninin imajiner kısmı.....	46
<b>Şekil 5.10:</b> Eş denklem sıcaklığı.....	46
<b>Şekil 5.11:</b> İstenen sıcaklık.....	47

## ÖZET

### HELMHOLTZ DENKLEMİNİN OPTİMAL KONTROL PROBLEMLERİ VE MİKRODALGA ISITMASINDA UYGULANMASI

Aydın Yılmaz

Yüksek Lisans, Fen Bilimleri Anabilim Dalı,  
Elektrik ve Elektronik Mühendisliği Bölümü

Danışman: Yrd. Doç. Dr. Özgür Kelekçi

Ocak 2017, 65 sayfa

Dalga denklemlerinin optimal kontrol problemleri yıllardır ilgi odağı olmuştur. Özellikle, akustik ve elektromanyetik alanların kontrolü saçılma ve kloak problemlerini doğurmuştur. Daha sonra, metamaryellerin yapısının kontrolü önem kazanmıştır. Son zamanlarda, malzeme tasarım optimizasyonu ile ilgili birçok araştırma olmuştur. Elektromanyetik ve akustik dalga yayılması genellikle Helmholtz denklemi ile modellenmiştir. Çözümün sınımlı karakterinden dolayı, ayrıştırma teknikleri, son on yılda ilgi odağı olmuştur. Bu tezde, bir mikrodalga ısıtmasında optimal kontrol probleminin sayısal çözümlerini incelemek asıl amaçtır. Mikrodalga ısıtma problemi dengedeki bir ısı denklemi ile Helmholtz denklemi birleştirilerek modellenmiştir. İlk başta, gerekli optimalite koşulları elde edilir. Optimalite sistemini bulmak için *optimize et-sonra-ayrıklaştır* yaklaşımı takip edilir. Lagrange fonksiyoneli optimalite koşullarını elde etmek için kullanılır. Ardından, sonlu elemanlar metodu ile durum ve eşlenik durum denklemleri ayrıklaştırılır. Son olarak sayısal çözümler sunulacaktır.

**Anahtar Kelimeler:** Helmholtz Denklemi, Mikrodalga Isıtma Sistemi, Optimal Kontrol Problemleri, Sonlu Eleman Yöntemi



## ABSTRACT

# OPTIMAL CONTROL PROBLEMS OF HELMHOLTZ EQUATION APPLIED TO MICROWAVE HEATING

Aydın Yılmaz

M.S. Department of Electrical and Electronics Engineering

Supervisor: Assist. Prof. Dr. Özgür Kelekci

January 2017, 65 Pages

Optimal control problems of the wave equations have been in interest for many years. Especially, control of acoustic and electromagnetic fields give rise to scattering control and cloaking problems. Then, the structure of the metamaterials plays a crucial role in the control problems. Recently, there have been many research related to material design optimization. Metamaterials may provide to control electromagnetic fields directions at will and to propose a design strategy. Electromagnetic and acoustic wave propagations are usually modeled by the Helmholtz equation. Because of the oscillatory character of the solution, discretization techniques have been in interest over the last decade. In this thesis, we study numerical solutions of optimal control problem for a microwave heating. Microwave heating problem is modeled by Helmholtz equation coupled with a heat equation at equilibrium. At first, the necessary optimality conditions are obtained. *Optimize-then-discretize* approach is followed to get the optimality system. The Lagrange functional is used to obtain the optimality system. Then, finite element method is used to discretize the state and the adjoint state equations. Finally we present the numerical solutions.

**Keywords:** Helmholtz Equation, Microwave Heating, Optimal Control, Finite Element Method.



## BİRİNCİ BÖLÜM

### GİRİŞ VE ÖN BİLGİLER

Optimal kontrol problemleri son yıllarda bir ilgi odağı olmuştur. Optimal kontrol problemleri, diferansiyel denklemler (adi diferansiyel denklemler veya kısmi diferansiyel denklemler) tarafından oluşturulan sistemlerin maliyet fonksiyonlarını optimize eden kontrol fonksiyonlarının bulunması ile ilgilidir. Farklı disiplinlerden gelen çeşitli uygulamalar optimal kontrol problemlerinin gerekliliğini ortaya koymuştur. Fizik, finans ve mühendislik biliminde çeşitli uygulamalar vardır. Örneğin, akışkanlar dinamiklerinin optimal kontrolü, aero-hidrokinamik araçlar, motorlarda yanma kontrolü, yangın bastırma, manyetik füzyon ve okyanus ve atmosferik tahminde temel önem taşımaktadır.

Bir kontrol tekniği, bir performans kriteri küçültürken, kabul edilebilir tüm kontrol fonksiyonları arasında optimal kontrol girdisini bulur. Kontrol değişkeni bölge sınırında veya bölgede hareket edebilir. Sınır üzerinde hareket ederse, optimizasyon problemine sınır kontrol problemi denir, aksi halde buna dağıtılmış kontrol problemi denir.

Sayısal yöntemler, problemlerin farklı disiplinlerden çözülmesinde temel rol oynamıştır. Optimal kontrol problemlerinin sayısal çözümü iki (doğrudan ve dolaylı) farklı yaklaşımlarla elde edilebilir. Doğrudan yöntemde optimal kontrol, sadece kabul edilebilir fonksiyonların kümesi üzerinde, yani durum denklemini karşılayan çiftler ( $y$ , durum değişkeni, ve  $u$ , kontrol parametresi) üzerinde çalışarak maliyet fonksiyonunu veya hedef fonksiyonunu en aza indirmeye çalışır. Olası yerel minimumun bulunabileceği, Lagrange fonksiyonunun denge noktalarının hesaplandığı dolaylı optimizasyon yöntemi de kullanılabilir.

Son on yılda, kısıtlamasız optimal kontrol problemlerinin çözümü için bir dizi etkin algoritma geliştirildi. Sınırsız optimizasyon problemlerini çözmek için iyi bilinen azalan gradyan tipi bir yöntem kullanılır. Azalan gradyan, birinci derece optimizasyon metodudur. Gradyan azalmasını kullanarak bir lokal minimum fonksiyonu bulmak için, eğim derecesinin negatifiyle orantılı olarak adımlar atılır. Azalan gradyan için bölgenin boyutu önemli değildir. Sonsuz boyutlu olanlarda bile

çalışır. Optimal kontrol problemine durum değişkenli eşitsizlik kısıtlamaları uygulandığında komplikasyonlar ortaya çıkar. Karush-Kuhn-Tacker (KKT) koşulları, sınırlı optimizasyon problemlerini çözmek için kullanılır. Lagrange çarpanları, KKT sistemini elde etmek için kullanılır.

Çeşitli kısmi diferansiyel denklemlerle kısıtlandırılan optimal kontrol problemleri literatürde yoğun olarak incelenmiştir. Optimal kontrol problemi kısmi diferansiyel denklem (KDD) uygulanırsa, sayısal çözümü bulmak için uzay değişkeni için bir ayrıklık yöntemi kullanmamız gerekir. Önemli ayrıklaşma yöntemlerinden biri de sonlu elemanlar yöntemi (FEM) 'dir. Optimal kontrol problemlerinin standart sonlu elemanlar yaklaşımının yakınsamasında birçok çalışma yapılmıştır, bakınız [1, 4, 5, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16].

Şimdi, optimal kontrol problemlerinin yapısına göz atalım. En aza indirgenecek veya en yükseğe çıkarılmak üzere bir maliyet fonksiyonu seçilmiştir. Sıradan veya kısmi diferansiyel denklem olabilen bir denklem bu problem için bir kısıt oluştursun. Yani

$$\min (\text{or max}) J (y, u) \quad (1.1)$$

$$c(y, u) = 0. \quad (1.2)$$

$J$  maliyet fonksiyonu,  $c(y, u)$  da kısıt denklemdir. Problem eşitlik kısıtlı optimal kontrol problemi olarak adlandırılır. Bir eşitsizlik sınırlaması empoze edilirse, o zaman

$$\min (\text{or max}) J (y, u)$$

$$c(y, u) = 0 \quad (1.3)$$

$$u \leq c \text{ or } y \leq d.$$

Burada,  $c(y, u)$  bir diferansiyel denklem belirtir.  $c$  ve  $d$  de sabitlerdir.  $y$  durum değişkeni,  $u$  da kontrol parametresidir.

Elektromanyetikten gelen kontrol uygulamalardan bir tanesi, mikrodalga ısıtmasının optimal kontrolüdür. Mikrodalgalar tarafından üretilen ısının düzgün dağılımı son zamanlarda uğraşılan zor alanlardan birisidir. [9] 'da, uygun bir uygulanan elektrik alanı seçilip ve mikrodalgalar tarafından üretilen bir kaynak ile doğrusal olmayan ısı iletimi ile birleştirilmiş Maxwell denklemleri tarafından yönlendirilen optimal bir kontrol problemi oluşturulmuştur.



Bu tez çalışmamızda ana problem, Helmholtz denkleminin denge durumunda bir ısı denklemini ile birleştirilmiş optimal sınır kontrolüdür. Böylece,  $\Omega \subset \mathbb{R}^d$  için  $d = 2, 3$  için  $\mathbb{R}^d$ 'de sınırlı bir poligonal alan olarak tanımlanır. Ve Lipschitz sınır kümeleri  $\Sigma_1 \cup \Sigma_2 = \partial\Omega$  biçimindedir. Şimdi aşağıdaki problem düşünelim:

$$\min_{(v,u)} J(v,u) = \frac{1}{2} \int_{\Omega} (v(x) - v_d(x))^2 dx + \frac{\alpha}{2} \int_{\Sigma_2} (u(x))^2 ds \quad (1.4)$$

$$-\nabla^2 y - \omega^2 y = 0 \quad x \in \Omega,$$

$$\frac{\partial y}{\partial n} = u(x) \quad x \in \Sigma_2,$$

$$y = 0 \quad x \in \Sigma_1, \quad (1.5)$$

$$-\Delta v = \frac{1}{2} \beta y^2 \quad x \in \Omega,$$

$$v = 0 \quad x \in \Sigma_1 \cup \Sigma_2,$$

burada,  $v : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^d$  durum değişkenidir ve  $u$  kontrol değişkenidir.  $\omega$  harmonik salınım frekansını belirtir. Ayrıca,  $\alpha > 0$  düzgünleştirme parametresi olup,  $v_d$  istenen sıcaklıktır.

Sobolev ve Lebesgue uzaylarında tanımlı standart normları ve iç çarpımları kullanılmaktadır. Lebesgue uzayı, bir fonsiyonun bir  $p$  derecesinden integralinin var olduğu fonsiyonlar kümesidir.  $L^p$  ile gösterilir. Sobolev uzay, fonsiyonunun hem kendisinin  $L^p$ -normları hem de belirli bir sıraya kadar türevlerinin bir bileşimi olan bir norm ile donatılmış bir fonsiyon vektör uzayıdır.  $H^1$  ile gösterilir.  $Y = H^1(\Omega)$  olsun. Burada,  $H^1(\Omega)$  kümesi öyle fonsiyonlardan oluşur ki bu fonsiyonlar ve onların  $t$ 'ye türevleri  $\Omega$  üzerine integrallenebilir.

Şimdi, sınır değeri problemi (1.1), eliptik denklemler teorisinin yöntemleriyle çözülebilir.

Bu tezde, mikrodalga ısıtmasının optimal kontrol probleminin, (1.1) - (1.2), sayısal çözümünü incelenecektir. Burada optimalite koşullarını elde etmek için fonsiyonel bir yaklaşım olan optimize et-sonra-ayrıklaştır yöntemi takip edilecektir. Literatürde optimal kontrol problemini sayısal olarak çözmek için iki yaklaşım vardır: optimize et-sonra-ayrıklaştır ve ayrıklaştır-sonra-optimize et. Her iki yöntem de yaygın olarak kullanılsa da, ilk yaklaşım en yaygın olanıdır. Bunun nedeni,

optimalite koşullarının sürekli olmasıdır. İkinci yaklaşımda, durum denklemleri önce ayrık hale getirilir ve daha sonra ayrık optimalite koşulları elde edilir.

Amacımız modellenen problemi sayısal olarak çözmektir. Bu tez, mikrodalga ısıtmasının optimal kontrol problemlerinin sayısal olarak çözüldüğü ilk çalışma olacaktır. Uzay ayrıklaştırmasında sonlu elemanlar yaklaşımını kullanılacak ve Freefem ++ ile sayısal sonuçları elde edilecektir [3].

Şimdi, Helmholtz denkleminin bazı özelliklerini inceleyeceğiz.

### 1.1. The Helmholtz denklemi

Aşağıdaki basit bir şekilde formulize edilmiş Helmholtz denklemini düşünelim:

$$\begin{aligned} -\nabla^2 y - \omega^2 y &= 0 \quad x \in \Omega, \\ \frac{\partial y}{\partial n} &= f(x) \quad x \in \Sigma_2, \\ y &= 0 \quad x \in \Sigma_1 \text{ ve } y = g(x) \quad x \in \Sigma_2, \end{aligned} \quad (1.6)$$

burada  $\Omega$ ,  $d = 2,3$  için  $\mathbb{R}^d$  içinde sınırlı bir poligonal bölge ve  $\Sigma_1 \cup \Sigma_2 = \partial\Omega$  onun Lipschitz sınırları olsun. Yani bu kümenin sınırları Lipschitz bir fonksiyonun grafiğinin özelliklerini taşır. Lipschitz bir  $F$  fonksiyonu şu koşulu sağlar:

$$|F(x) - F(y)| \leq C|x - y|, \quad x, y \in \Omega.$$

Ayrıca,  $f(x)$  ve  $g(x)$  fonksiyonları tanımlıdır.  $\omega$ , harmonik salınımların frekansını belirtir.

Helmholtz denkleminin sınır değer problemleri yıllardır ilgi çekmektedir. Akustik ve elektrodinamik dalga yayılımları gibi çeşitli uygulamalar için önemli bir model olmuştur. Düşünelim ki

$$\nabla^2 y + n(x)^2 \omega^2 y = f(x), \quad x \in \mathbb{R}^d, \quad (1.7)$$

burada,  $n(x)$ ,  $f(x)$  ve  $\omega$  değerleri, denklem modellerinin türüne bağlıdır. Örneğin, dalga yayılımında,  $y(x)$ , bir zaman harmonik dalgasının çoğalmasındır. Kuantum mekaniğinde, bir enerji durumu için bir yörüngedir.

### 1.2 Helmholtz denkleminin dalga denkleminden elde edilişi

Skaler dalga denklemi:

$$v_{tt} = c(x)^2 \Delta v + F(t, x). \quad (1.8)$$

Burada,  $c(x)$  dalgaların yayılımının yerel hızıdır ve  $F(t, x)$  çözümü dalgaları enjekte eden kaynaktır. Açısal zaman frekansı  $\omega$  ile bir çözüm bulmayı arzu edersek,  $v(t, x) = u(x)e^{-i\omega t}$ ,  $F(t, x) = g(x)e^{-i\omega t}$  olarak seçilir ve bu eşitlikleri (1.8) 'e uyguluyoruz. Sonuç olarak

$$-\omega^2 u(x)e^{-i\omega t} = c(x)^2 \Delta u(x)e^{-i\omega t} + g(x)e^{-i\omega t}. \quad (1.9)$$

Daha sonra,  $e^{-i\omega t}$  ile bölünce,

$$\Delta u(x) + \frac{\omega^2}{c(x)^2} u(x) = -\frac{g(x)}{c(x)^2}, \quad (1.10)$$

elde edilir. Bu denklem  $f(x) = -\frac{g(x)}{c(x)^2}$  ve  $n(x) = \frac{1}{c(x)}$  seçimleri için (1.7) 'ye karşılık gelir. Bu formülasyonda,  $u(x)$  çözümü  $\omega$  frekansı ile zaman harmonik çözümlerinin çoğaltılmasıdır.

### 1.3 İç mekan problemleri(Interior problems)

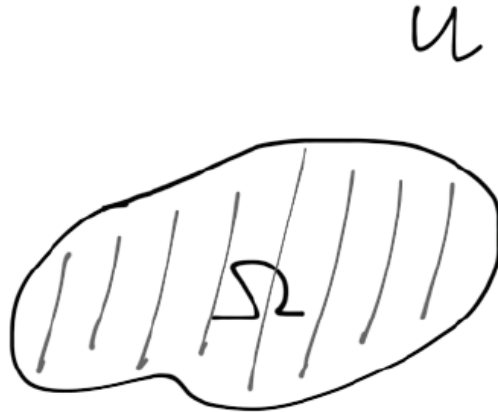
Sınırlı bir  $\Omega \subset \mathbb{R}^d$  bölgesinde Helmholtz denklemini ele alalım. Problem:

$$-\nabla^2 y - \omega^2 y = 0 \quad x \in \Omega,$$

$$\frac{\partial y}{\partial n} = 0 \quad x \in \partial\Omega \quad (\text{Neumann sınır koşulları}), \quad (1.11)$$

$$y = 0 \quad x \in \partial\Omega \quad (\text{Dirichlet sınır koşulları})$$

olsun. Bu tür bir probleme iç mekan problemleri denir.



Şekil 1.1

#### 1.4 Dış mekan problemler(Exterior problems)

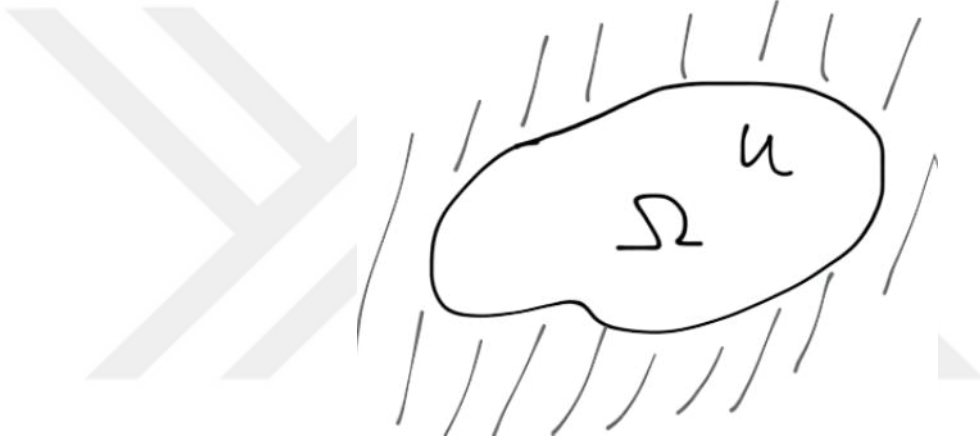
Sınırlı olmayan bir bölge düşünelim. En yaygın örnek saçılma problemidir.  
 $\Omega \subset \mathbb{R}^d$  için

$$\nabla^2 y + \omega^2 y = 0, \quad x \notin \bar{\Omega}, \quad (1.12)$$

Homojen olmayan sınır koşulları:

$$\frac{\partial y}{\partial n} = g(x) \quad x \in \partial\Omega \quad (\text{Neumann sınır koşulları}), \quad (1.13)$$

$$y = h(x) \quad x \in \partial\Omega \quad (\text{Dirichlet sınır koşulları}).$$



Şekil 1.2

#### 1.5. Helmholtz denkleminin bazı uygulamaları

[31] 'de, aşağıdaki problem göz önüne alınmaktadır

$$\begin{aligned} \Delta u + s^2 u &= 0 \quad (x, y) \in R, \\ u(x, y) &= f(x, y) \quad (x, y) \in \partial R, \end{aligned} \quad (1.14)$$

burada  $R = [a, b] \times [c, d]$ . Bu problem için sonlu fark yöntemi uygulanmaktadır.

Aşağıdaki denklem elde edilir:

$$\begin{aligned} \frac{u(x+h, y) - 2u(x, y) + u(x-h, y)}{h^2} + \frac{u(x, y+k) - 2u(x, y) + u(x, y-k)}{h^2} \\ + s^2 u(x, y) = 0. \end{aligned} \quad (1.15)$$

$r = \frac{k^2}{h^2}$  seçilip, aşağıdaki formül elde edilir:

$$ru(x + h, y) + ru(x - h, y) + u(x, y + k) + u(x, y - k) + (s^2k^2 - 2r - 2)u(x, y) = 0. \quad (1.16)$$

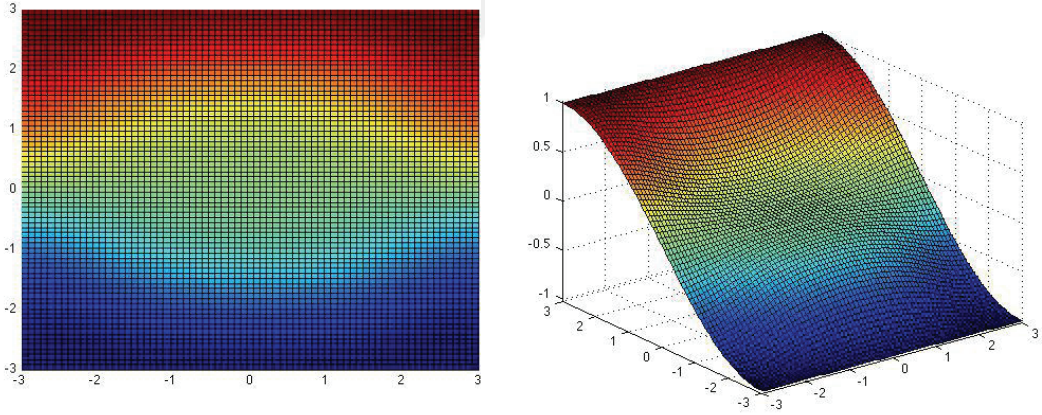
$k = (j - 2)(n - 2) + i - 1$  için  $z_k = u(x_i, y_j)$ , aşağıdaki matris formu elde edilir:

$$Az = b, \quad (1.17)$$

burada  $A$   $(n - 2)(m - 2) \times (n - 2)(m - 2)$ 'lik bir matristir. İlgili sistemin çözümü ile her iç noktada  $u$  için yaklaşık değer bulunur. [31] 'de,  $Az=b$ 'yi çözmek için Gauss-Siedel yöntemi kullanılmıştır. Örnek olarak,  $[-3,3] \times [-3,3]$  biçiminde bir bölge seçilir. Bir sınır değer problemi

$$\begin{aligned} \Delta u + u &= 0 \quad (x, y) \in R, & (1.18) \\ u(x, y) &= \sin\left(\frac{x\pi}{6}\right) \quad (x, y) \in \partial R, \end{aligned}$$

düşünülmüştür. Şekil 1.3'te, çözüm çizilmiştir.

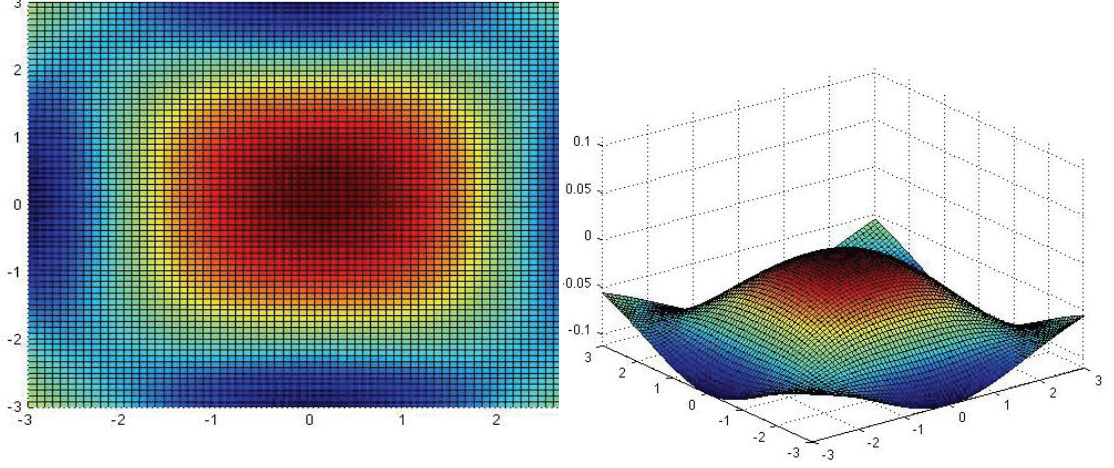


Şekil 1.3 Sorunun çözümü (1.18), [31].

Benzer bir örnek olarak,

$$\begin{aligned} \Delta u + u &= 0 \quad (x, y) \in R, & (1.19) \\ u(x, y) &= \frac{-1}{x^2 + y^2} \quad (x, y) \in \partial R. \end{aligned}$$

Şekil 1.4'de sayısal çözüm çizilmiştir.



Şekil 1.4 Sorunun çözümü (1.19), [31].

[26] 'da, Helmholtz denkleminin bir optimal kontrol problemi düşünülmüş. Bir  $D$  bölgesinde bir problem dikkate alınmış daha sonra Helmholtz denklemi için aşağıdaki matematiksel modeli kullanılmıştır:

$$\begin{aligned}
 -\Delta u - k^2 u &= 0 \quad (x, y) \in \mathbb{R}^d / D, & (1.20) \\
 u(x, y) &= -Ae^{ikx} \quad (x, y) \in \partial D, \\
 \lim_{r \rightarrow \infty} r^{\frac{d-1}{2}} \left( \frac{\partial u}{\partial r} - iku \right) &= 0 \quad (x, y) \in B_r,
 \end{aligned}$$

burada üçüncü şart Bohr-Sommerfeld radyasyon durumu olarak bilinir. Eşitlik (1.20) yerine bir hesaplama modeli şu şekilde kullanılır:

$$\begin{aligned}
 -\Delta u - k^2 u &= 0 \quad (x, y) \in \Lambda = \Omega / D, & (1.21) \\
 u(x, y) &= -Ae^{ikx} \quad (x, y) \in \Upsilon = \partial D, \\
 \frac{\partial u}{\partial \nu} - iku &= 0 \quad (x, y) \in \Gamma = \partial \Omega,
 \end{aligned}$$

burada üçüncü denklem Bohr-Sommerfeld radyasyon koşulunun bir yaklaştırmasıdır ve birinci dereceden emici sınır şartı olarak bilinir.

Kontrol problem oluşturulur. Eğer  $u(x)$  Helmholtz problemini (1.21) çözüyorsa, bu durumda  $v(x, t) = u(x)e^{-ikt}$  aşağıdaki problemi sağlar:

$$\begin{aligned}
v_{tt} - \Delta v &= 0 \quad \Lambda \times \left[0, \frac{2\pi}{k}\right] \text{ içinde,} \\
v(x, y) &= -Ae^{ikx}e^{-ikt} \quad \Upsilon \times \left[0, \frac{2\pi}{k}\right] \text{ içinde,} \\
\frac{\partial v}{\partial t} + \frac{\partial v}{\partial \eta} &= 0 \quad \Gamma \times \left[0, \frac{2\pi}{k}\right] \text{ üzerinde,} \\
v(x, 0) &= w_1 \quad \Lambda \text{ üzerinde,} \\
v_t(x, 0) &= w_2 \quad \Lambda \text{ üzerinde,}
\end{aligned} \tag{1.22}$$

burada  $[w_1, w_2]$  kontrol değişkenleridir.  $[w_1, w_2] = [v(x, 0), v_t(x, 0)]$  alınırsa eğer, öyle ki,  $v(x, 0) = w_1 = v(x, T)$ , bu durumda  $v(x) = v(x, 0) = w_1$  Helmholtz problemini çözer (1.21). Daha sonra, Helmholtz problemi için kontrol problemi şu şekilde ifade edilebilir: Çözümün periyodu  $= 2\pi / k$  ile periyotlu olacak şekilde ilk veri  $[w_1, w_2]$  'yi bul. Maliyet fonksiyonu cinsinden bir kalite kriteri koymak için, durum denklemine (3) asgari maliyet fonksiyonunu aşağıdaki biçimiyle ilişkilendirilir:

$$\min_{(v,w)} J(w, v) = \frac{1}{2} \int_{\Lambda} |\nabla(v(x, T) - w_1(x))|^2 + |v_t(x, T) - w_2(x)|^2 dx \tag{1.23}$$

Bu nedenle, Helmholtz problemi (1.21) için Optimal Kontrol Problemi şu şekilde ifade edilmiştir: Durum denklemine (1.22) tabi olan fonksiyonu (1.23) en aza indirilir.

Eşlenik Gradyan Metodu (CGM) ile maliyet fonksiyonunu (1.23) asgari düzeye getirerek optimal kontrol problemi çözülür. Adjoint (eşlenik) problemi:

$$\begin{aligned}
p_{tt} - \Delta p &= 0 \quad \Lambda \times \left[0, \frac{2\pi}{k}\right] \text{ içinde,} \\
p &= 0 \quad \Upsilon \times \left[0, \frac{2\pi}{k}\right] \text{ üzerinde,} \\
\frac{\partial p}{\partial t} - \frac{\partial p}{\partial \eta} &= 0 \quad \Gamma \times \left[0, \frac{2\pi}{k}\right] \text{ üzerinde,} \\
p_t(x, T) &= v(x, T) - w_2, \quad \Lambda \text{ üzerinde,} \\
\int_{\Lambda} p_t(x, T)\theta + \theta(v(x, T) - w_2) \cdot \nabla \theta dx &= \int_{\Gamma} p(x, T)\theta d\Gamma, \quad \Lambda \text{ üzerinde,}
\end{aligned} \tag{1.24}$$

biçimindedir.

Sayısal sonuçlar için, dairesel bir alan üzerinde için standart Sonlu elemanlar yöntemi (Galerkin) düşünülmüştür.  $\Omega = \{x \in \mathbb{R}^2 \mid \|x\| \leq R\}$  ve dairesel saçılımı  $R = \{x \in \mathbb{R}^2 \mid \|x\| \leq r < R\}$ , hem yarıçap  $r$  hem de  $R$  çapı,  $0.5\beta \leq R - r \leq 3\beta$

tutmak için  $\kappa$  dalga sayısına göre sabitlenir. Zaman ayrıklaştırması için ikinci dereceden sonlu fark şemasını göz önüne alınır.

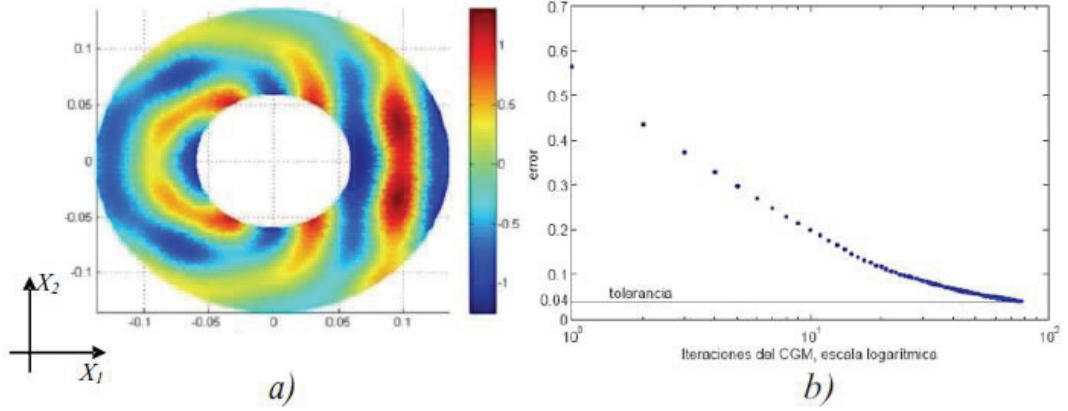
### Numerik Sonuçlar

Case	$\lambda[m]$	$\lambda/h$	$N$	$\epsilon$	iter.
4	0.5	10	200	0.04	62
8	0.125	20	200	0.04	36
12	0.125	5	200	0.04	125

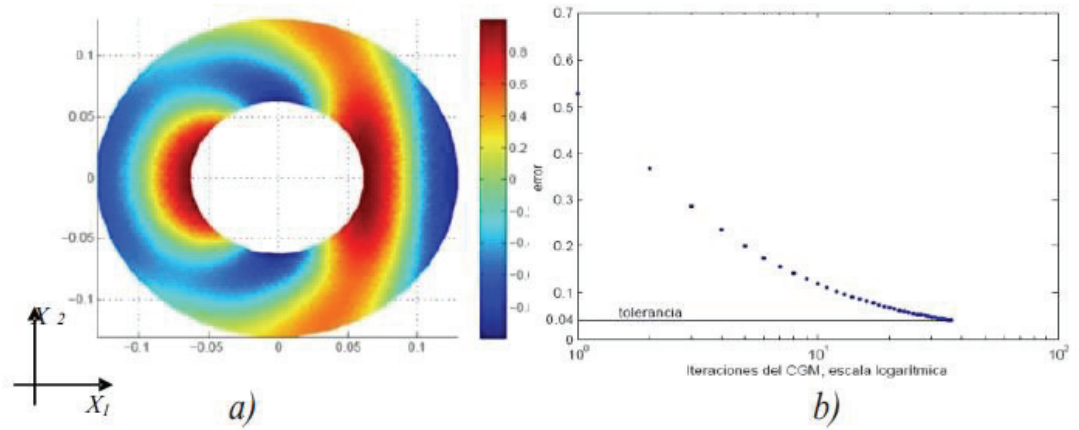
**Tablo 1.1** CGM iterasyonları;  $\beta/h=10, N = 200$

Case	$\lambda[m]$	$\lambda/h$	$h/\tau$	$\epsilon$	iter.
19	0.0625	10	$5c$	0.04	83
22	0.125	20	$5c$	0.04	37
24	0.125	20	$2.5c$	0.04	25

**Tablo 1.2** CGM iterasyonları;  $\beta/h=10, N =$  Değişken sayısı

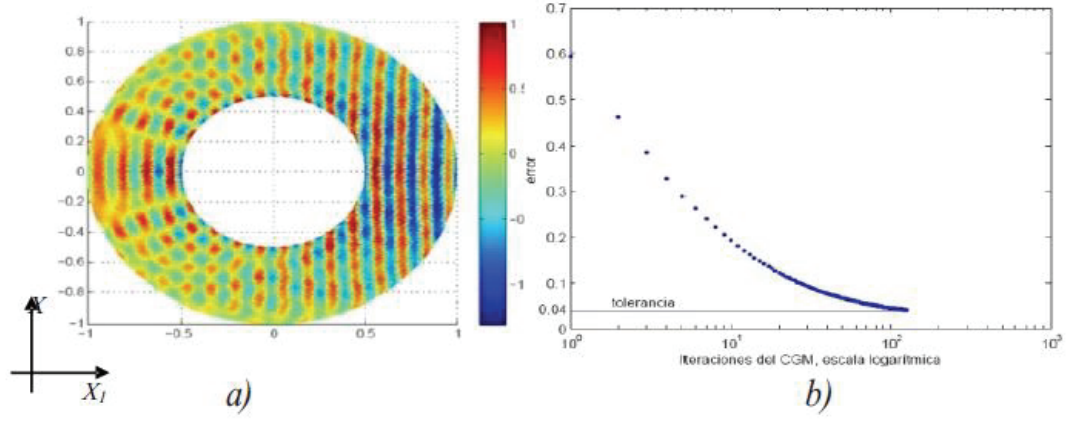


**Şekil 1.5** a) Durum 4 için genlik  $v(x)$ ; b) Hata'nın seyri, [26].

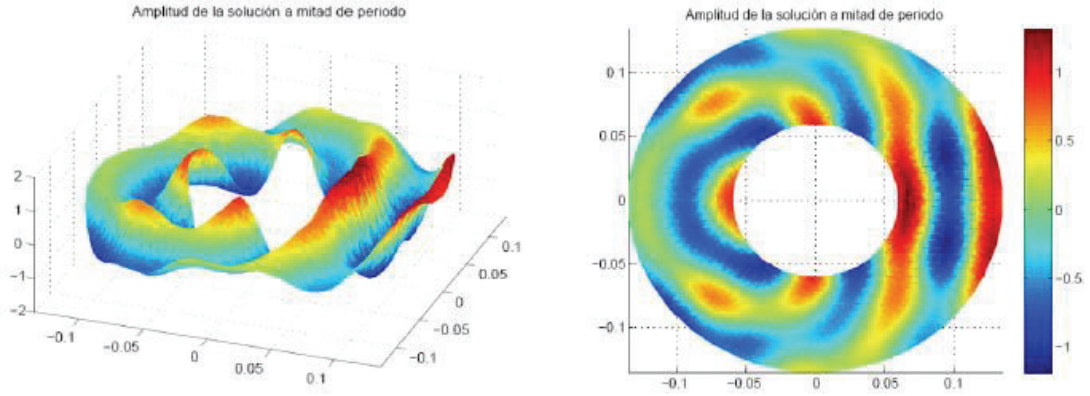


**Şekil 1.6** a) Durum 8 için genlik  $v(x)$ ; b) Hata'nın seyri, [26].

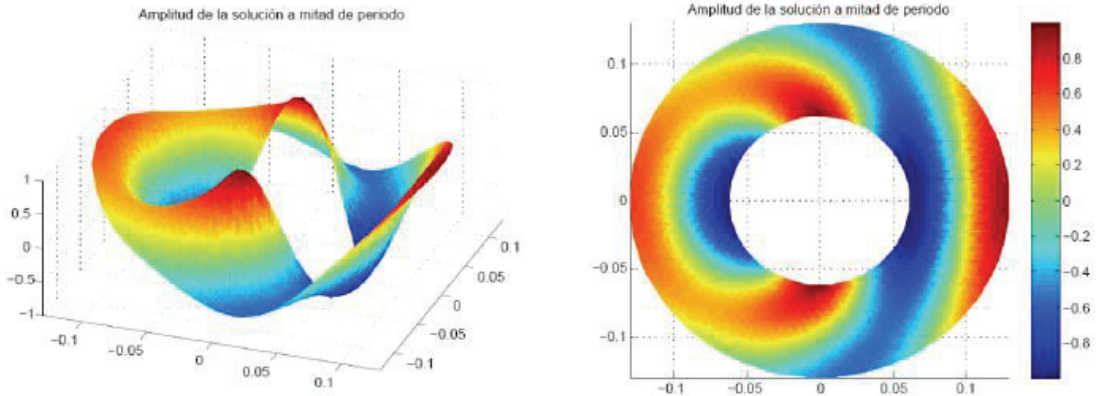




Şekil 1.7 a) Durum 12 için genlik  $v(x)$ ; b) Hata'nın seyri, [26].



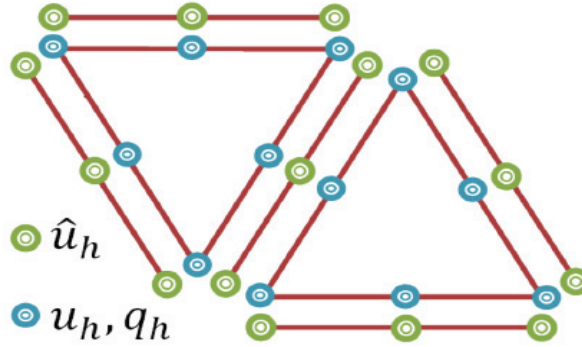
Şekil 1.8 Durum 19 için genlik  $v(x)$ , [26].



Şekil 1.9 Durum 22 için genlik  $v(x)$ , [26].

[32] 'te dalga denklemi hem zaman hem de frekans alanında Hibridlenebilir Süreksiz Galerkin Yöntemi (HDG) ile çözülmüştür, Şekil 1.10. Konveks optimizasyon teknikleri, istenen malzeme özelliklerini elde etmek için kullanılır. Konveks

optimizasyon, maliyet fonksiyon ve kısıtın bükey bir fonksiyon biçiminde ifade edilebileceği durumları inceler. Bükey fonksiyon, birinci türevi pozitif, ikinci türevi negatif olan ve iktisadi çözümlerinde eniyilemenin sağlanabilmesinde gerekli koşul olduğu için sıklıkla kullanılan matematiksel bir fonksiyon türüdür.

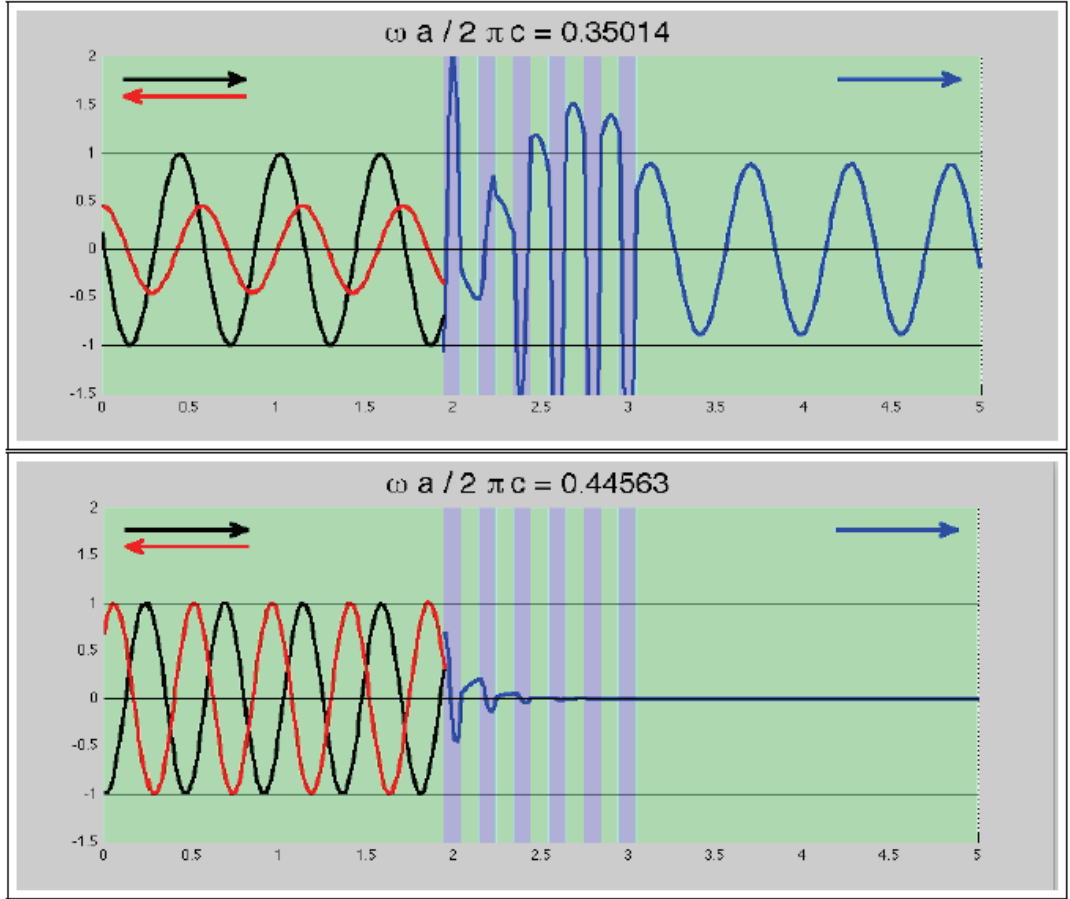


**Şekil 1.10** Anlatılan HDG yöntemi için serbestlik dereceleri dağılımı

Şu problem ele alınmaktadır:

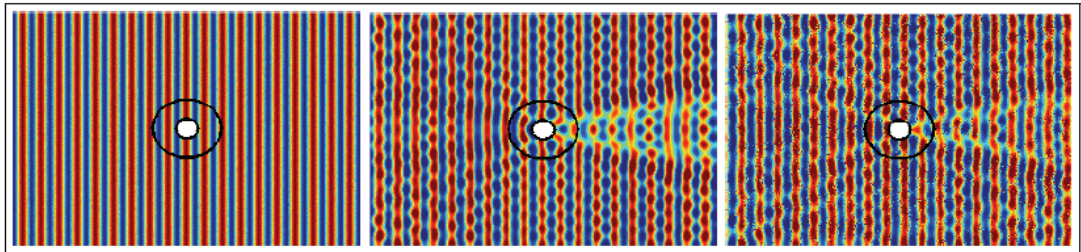
$$\begin{aligned} \min J(y, u) \\ c(y, u) = 0 \quad (1.25) \\ a \leq u \leq b . \end{aligned}$$

İlk önce, 1 boyutlu bir bant aralığı problemi düşünülmüştür, Şekil 1.11.



**Şekil 1.11** Normal periyotlu, frekansı  $\omega_{(3)} a/2\pi = 0.35014$  and  $\omega_{(4)} a/2\pi = 0.44563$  olan 6 periyotlu model üzerinden yayılım paterni, [32].

Siyah renkte sola gelen dalga, kırmızı olan yansıyan dalga ve mavi olan da yayılan dalgadır. Dahası, 2 boyutta bir perdeleme problemi düşünülmüştür. Sayısal çözüm Şekil 1.12'de verilmektedir.



**Şekil 1.12** Perdeleme yayılım paterni, [32].

Sol: anlık dalga gönderildi (hiçbir Nesne yok). Merkez: Perdeleme yüzüğünde metamateriyal dikkate alınmadığında yayılım paterni. Sağ: Pendry değişkenlerin değişimi yöntemi kullanarak  $a = 0.5$  için çözüm paterni.

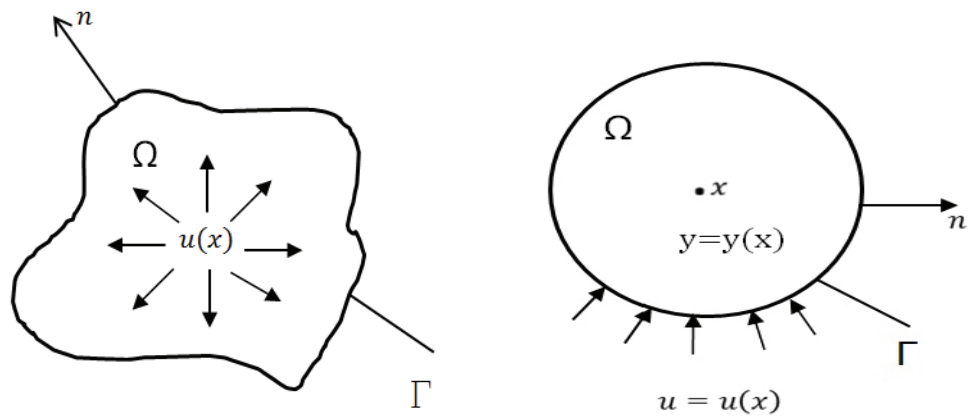
## İKİNCİ ÜNİTE

### HELMHOLTZ DENKLEMİNİN OPTİMAL KONTROL PROBLEMLERİ

Optimal kontrol, belirli bir optimallik kriterinin yerine getirilmesi için belirli bir kontrol yasası bulma problemi ile ilgilidir. Giriş bölümünde sunulduğu gibi, bir kontrol problemi, durum ve kontrol değişkenlerinin bir fonksiyonu olan bir maliyet fonksiyonunu içermektedir. Optimal kontrol, maliyet fonksiyonunu en aza indirgeyen kontrol değişkenlerinin yollarını tanımlayan bir dizi diferansiyel denklem içermektedir.

Genel bir perspektiften bakıldığında, optimal kontrol problemi bir optimizasyon problemidir. İkisi arasındaki fark optimum kontrol teorisinde optimize edicinin yalnızca tek bir değer değil, bir işlev olmasıdır. Bu işleve optimal kontrol denir. Optimal kontrol probleminin teknik tanımı olarak, bir performans endeksini en aza indirmek için bir süre boyunca bir dinamik sistem için kontrol ve durum yörüngelerini belirleme süreci verilebilir [37]. Durum değişkeni (veya işlev), sistemin matematiksel durumunu tanımlamak için kullanılan değişkenler (işlevler) grubudur. Kontrol veya kontrol fonksiyonu, verilerin kaydedilmesini, işlenmesini veya aktarılmasını kontrol eden bir işlemdir. Bu iki işlev, sistemin nasıl çalışacağını ve arzulanan denetimi nasıl bulacaklarını belirler.

Optimal kontrol ve kontrol edilebilirlik problemleri, birçok araştırmacı tarafından incelenen aktif bir alandır. Kontrol problemlerinin iki ana türü vardır: dağıtılmış kontrol ve sınır kontrol problemleri.



Şekil 2.1  $\Gamma$  içinde dağıtılmış kontrol (sol), sınırda etki eden sınır kontrolü (sağ).

Birinci durumda kontrol değişkeni tanım bölgesinin içinde hareket eder. İkinci durumda, kontrol tanım kümesinin sınırının bir bölümüne uygulanır, bakınız Şekil 2.1.

Literatürde, eliptik ve parabolik diferansiyel denklemler çokça incelenmiştir. Örneğin, eliptik diferansiyel denklemin optimal kontrolü, katodik bir koruma sisteminde akım için bir model olabilir. Katodik koruma, bir metal yüzeyin korozyonunu bir elektrokimyasal hücrenin katodu yaparak kontrol etmek için kullanılan bir tekniktir. Elektrolit içindeki elektrik alanını değiştirmek için anoda bir akım uygulanabilir. Problem şu şekilde kurulabilir [27]:

$$\begin{aligned} -\nabla(\sigma\nabla y) &= 0, & x \in \Omega, & & (2.1) \\ -\sigma \frac{\partial y}{\partial n} &= i, & x \in \Sigma_1, & & \\ -\sigma \frac{\partial y}{\partial n} &= 0, & x \in \Sigma_2, & & \\ -\sigma \frac{\partial y}{\partial n} &= f(x), & x \in \Sigma_3, & & \end{aligned}$$

burada  $y$  elektrik potansiyelidir.  $i$ , kontrol fonksiyonu olarak çalışan akım yoğunluğudur. Bir kontrol fonksiyonu:

$$\min_{(y,i)} J(y, i) = \int_{\Sigma_3} (y(x) - y_d(x))^2 dS + \int_{\Sigma_1} (i)^2 dS. \quad (2.2)$$

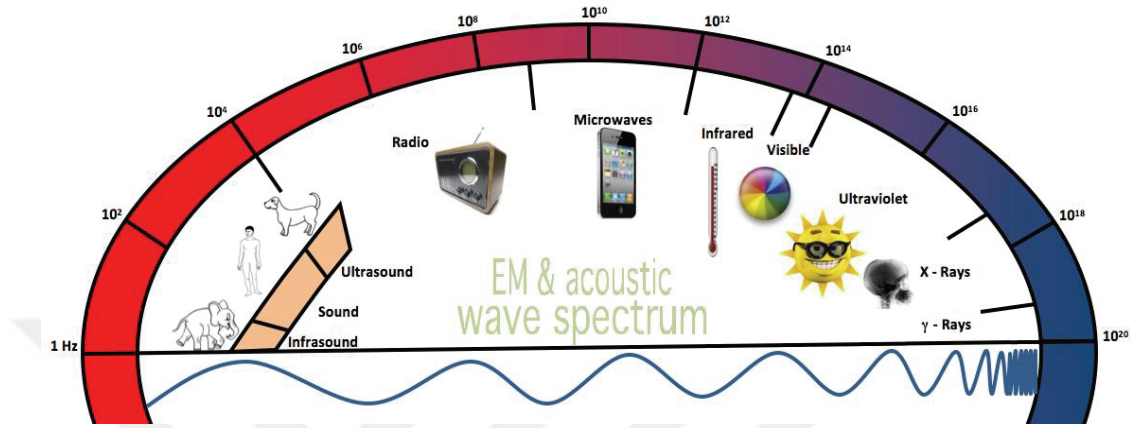
Eliptik sistemlerin optimal kontrolü için bir başka örnek, radyasyon ve saçılma hareketidir. Buradaki problem, verilen yönde radyasyona uğrayan uzak alanı en üst düzeye çıkaran bir ışınma yapısının yüzey akımının belirlenmesinden oluşur. Kısıt denklemi olarak, Helmholtz denklemi seçilir. Benzer şekilde, parabolik diferansiyel denklemlerin optimal kontrolü düşünülür. Örnek olarak, metalurjide bir kirlilik kaynağının belirlenmesi ve soğutma prosesinin tanımlanması düşünülmelidir.

Bu bölümde öncelikle Helmholtz denkleminin optimal kontrol problemlerini formülize edeceğiz. Sonra, kontrol problemlerini çözmek için optimizasyon prosedürleri üzerinde duracağız. Optimum koşullarını elde edeceğiz. Son olarak, kontrol probleminin yaklaşık çözümlerini bulmak için sayısal yöntemleri ele alacağız.

## 2.1. Optimal kontrol problemleri

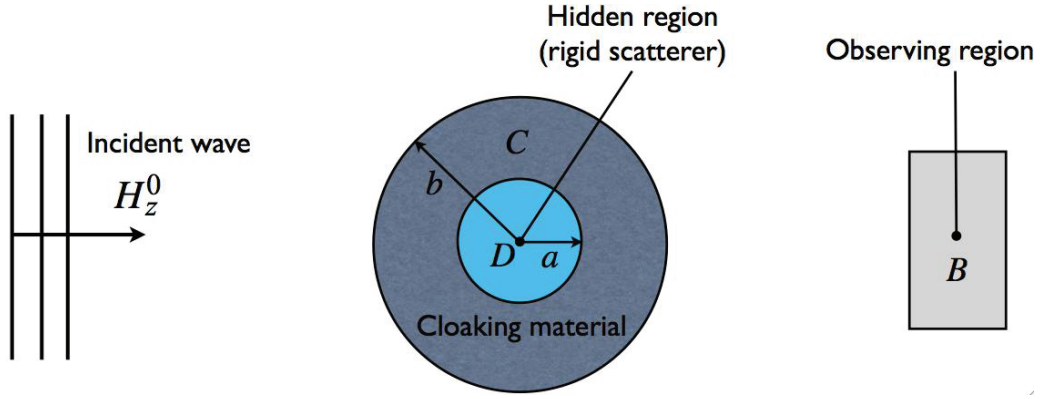
Helmholtz denklemi genellikle, kısmi diferansiyel denklemleri (KDD) içeren fiziksel problemlerin incelenmesinde ortaya çıkar. KDD'ler akustik, elastikiyet veya elektromanyetizmayı modelleyebilirler. Helmholtz denklemi, dalga denkleminin

zamandan bağımsız bir formunu temsil eder. Bir dalganın kaynağı, radyo, mikrodalgalar, kızılötesi, ultraviyole, x ışınları, ses vb. olabilir. Şekil 2.2, dalga denkleminin dalga boyu veya frekans açısından yönetici bir denklem olarak görev yaptığı spektrumunu gösterir .



**Şekil 2.2** Dalga fenomeni spektrumu: Elektromanyetik ve Akustik dalga ölçekleri.

Pek çok fiziki durum, birçok optimizasyon problemini ortaya çıkarmaktadır. Örneğin, belirli bir dalga yayılım özelliğini tatmin eden bazı meta malzemelerin bulunması bir amaç olabilir. Bu, bir bölgeye bir başlangıç dalgası gönderildiğinde, uygun bir zamanda istenen dalga elde edilmesi içindir. Bu hedef belirli bir bölgenin malzeme özelliklerini tasarlayarak başarılabilir. İlginç problemlerden bir tanesi de fotonik bant aralığıdır. Farklı bir malzemedен bazı çubuklar bir bölgeye yerleştirilirse, yayılım kalıpları değişir. İstenen bir dalga yayılımı elde etmek için çubukların yerleştirilmesi ilginç bir optimal kontrol problemi olur. Perdeleme(cloaking) probleminin optimal kontrolünde de benzer argümanlar vardır. Şekil 2.3'te perdeleme probleminin optimal bir kontrolü tasarlanmıştır. Olay dalgaları soldan gönderilmekte ve gözlem bölgesi B sağda olduğu kabul edilmektedir. Amaç, içerisindeki belirli bir malzeme dağılımı ile C bölgesinde bulunan bir çözümün istenen bir çözüme yakın olmasını sağlamaktır.



**Şekil 2.3** Perdeleme probleminin optimal kontrol şeması

Daha önce de sunduğumuz gibi, bu tezde, aşağıdaki ikinci derece sınır kontrol problemini göz önüne alacağız:

$$\begin{aligned}
 \min_{(v,u)} J(v, u) &= \frac{1}{2} \int_{\Omega} (v(x) - v_d(x))^2 dx + \frac{\alpha}{2} \int_{\Sigma_2} (u(x))^2 ds \\
 -\nabla^2 y - \omega^2 y &= 0 \quad x \in \Omega, \\
 \frac{\partial y}{\partial n} &= u(x) \quad x \in \Sigma_2, \\
 y &= 0 \quad x \in \Sigma_1, \\
 -\Delta v &= \frac{1}{2} \beta y^2 \quad x \in \Omega, \\
 v &= 0 \quad x \in \Sigma_1 \cup \Sigma_2,
 \end{aligned} \tag{2.3}$$

burada  $v : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^d$  durum değişkeni ve  $u$  kontrol değişkenidir.  $\omega$  harmonik salınımların frekansını belirtir ve kompleks değerli olabilir. Burada,  $\alpha > 0$  düzgünleştirme parametresi ve  $v_d$  istenen sıcaklıktır.

Sonraki bölümlerde, optimal kontrol problemlerinin çözüm prosedürleri anlatılacaktır.

## 2.2. Optimal Kontrol Probleminin Çözümü

Optimal kontrol probleminin amacı, maliyet fonksiyonu ve diferansiyel denklemlerde ortaya çıkan optimum kontrolü elde etmektir [37]. Daha sonra, diferansiyel denklemin çözümü, diferansiyel denklemleri çözen durum değişkeni, bulunabilir. Bu bölümde, optimal kontrolü bulmak için bazı yöntemler sunacağız.



Onların en tanınmışlarından biri Pontryagin'in maksimum prensibidir. Bu metodu özetledikten sonra, popüler bir başka yöntem kullanacağız: Lagrange yaklaşımı.

### 2.2.1. Pontryagin'in maksimum prensibi

Bu yöntem, maliyet fonksiyonunun önceden değerlendirilmesini gerektirmeyen önemli avantaja sahip optimal kontrollerin hesaplanması için güçlü bir yöntemdir [36]. Optimal kontrol teorisinde dinamik bir sistemi bir durumdan diğer bir duruma almak için mümkün olan en iyi kontrolü bulmak amaçlı, özellikle de durum veya giriş kontrolleri için kısıtlamalar varlığında kullanılır. 1956'da Rus matematikçi Lev Pontryagin ve öğrencileri tarafından formülize edilmiştir. Varyasyon hesaplamasının Euler-Lagrange denklemi özel bir durumdur.

Şimdi, maliyet fonksiyonu  $c(x, u)$  olsun. Ve kısıtlamalar  $b(x, u)$  ile gösterilsin. Hamiltonyen şu şekilde tanımlanır:

$$H(y, u, p) = p^T b(y, u) - c(y, u). \quad (2.4)$$

Burada,  $p$ 'ye eşlenik(adjoint) denir. Daha sonra, optimalite koşullarını elde etmek için Hamiltonyenin  $y$  ve  $p$ 'ye göre kısmi türevleri 0'a eşitlenir, öyleki

$$\frac{\partial H(y^*, u^*, p^*)}{\partial y} = 0 \quad \text{ve} \quad \frac{\partial H(y^*, u^*, p^*)}{\partial p} = 0, \quad (2.5)$$

ve

$$H(y^*, u^*, p^*) = \max_{u \in U} H(y^*, u, p^*), \quad (2.6)$$

burada  $(y^*, u^*, p^*)$  optimal kontrol probleminin çözümüdür ve  $U$  kümesi kontrol üzerindeki kısıtları içeren fonksiyonlardan oluşmaktadır.

Denklem (2.5)'de, ilk eşitlik sadece kontrol probleminde kısıt denklemleri verir. İkincisi, yeni bir diferansiyel denklemi belirtir.



## 2.2.2 Lagrange yöntemi ve Optimalite Koşulları

Kısıt denklemi karmaşık olduğunda optimal kontrol problemlerinin çözümü zorlu olacaktır. Örneğin, doğrusal olmayan kısmi diferansiyel denklem üzerine bir optimal kontrol çalışması yaparsanız, analitik çözümü elde etmek zordur. Dahası, ek dengesizlik kısıtlamaları durum ve kontrol değişkenlerine dayandığında, sayısal çözüm bile çok zorlu bir prosedür haline gelir [38].

Kontrol problemine uygulanan eşitlik kısıtlamaları Lagrange yöntemi ile ele alınabilir. Bu yöntem, sınırlandırılmış problemi, ek değişkenlerle yeni, sınırsız bir minimizasyon problemine indirgemektedir. Ek değişkenler Lagrange çarpanları olarak bilinir.

Şimdi aşağıdaki denklemi çözümünü elde edelim:

$$\begin{aligned} \min \quad & f(y, u) \\ g(y, u) = 0 \quad & . \end{aligned} \quad (2.7)$$

Lagrange fonksiyoneli

$$L(y, u, p) = f(y, u) - p^T g(y, u), \quad (2.8)$$

biçiminde tanımlanır. Ve optimalite koşulları

$$\nabla_{y,u,p} L(y, u, p) = 0. \quad (2.9)$$

olur.

Bizim problemde, Lagrange fonksiyoneli

$$L(y, v, u, p, w) = J(v, u) - (p, -\nabla^2 y - \omega^2 y)_\Omega - (w, -\Delta v - \frac{1}{2} \beta y^2), \quad (2.10)$$

burada  $(\cdot, \cdot)_\Omega$   $\Omega$  üzerindeki standard iç çarpımı belirtsin. Kısmi integrasyon uygulayarak

$$\begin{aligned} L(y, v, u, p, w) &= J(v, u) - (\nabla p, \nabla y)_\Omega + (p, \omega^2 y)_\Omega + (p, \nabla y)_{\Sigma_1} + (p, \nabla y)_{\Sigma_2} \\ &\quad + (w, \nabla v)_{\Sigma_1 \cup \Sigma_2} - (\nabla w, \nabla v)_\Omega + (w, \frac{1}{2} \beta y^2)_\Omega \\ &= J(v, u) + (\nabla^2 p, y)_\Omega + (p, \omega^2 y)_\Omega + (p, \nabla y)_{\Sigma_1} + (p, \nabla y)_{\Sigma_2} \\ &\quad - (\nabla p, y)_{\Sigma_1} - (\nabla p, y)_{\Sigma_2} + (w, \nabla v)_{\Sigma_1 \cup \Sigma_2} + (\nabla^2 w, v)_\Omega - (\nabla w, v)_{\Sigma_1 \cup \Sigma_2} \\ &\quad + (w, \frac{1}{2} \beta y^2) \end{aligned} \quad (2.11)$$

elde edilir. Sınır değer koşullarını devreye sokup ve  $\Sigma_1 \cup \Sigma_2$  kümesi üzerinde  $p = 0, w = 0$  alınırsa eğer

$$L(y, v, u, p, w) = J(v, u) + \int_{\Omega} (\nabla^2 p) y dx + \int_{\Omega} (\omega^2 p) y dx - \int_{\Sigma_2} (u) y dS + \int_{\Omega} (\nabla^2 w) v dx + \int_{\Omega} \frac{1}{2} \beta y^2 w dx. \quad (2.12)$$

Şimdi de optimalite koşullarını bulmak için  $\frac{\partial L}{\partial y} = 0$ ,  $\frac{\partial L}{\partial p, \partial w} = 0$  ve  $\frac{\partial L}{\partial u} = 0$  olsun.

### ***Optimalite Koşulları***

Optimalite sistemini elde etmek için Lagrange yöntemini kullanırız. Sonra,

$$\begin{aligned} -\Delta w &= v(x) - v_d(x) \quad x \in \Omega, \\ w &= 0 \quad x \in \Sigma_1 \cup \Sigma_2, \end{aligned} \quad (2.13)$$

$$\nabla^2 p + \omega^2 p = \beta y w \quad x \in \Omega,$$

$$\frac{\partial p}{\partial n} = 0 \quad x \in \Sigma_2,$$

$$p = 0 \quad x \in \Sigma_1,$$

ve

$$(\text{Re}(\nabla_u J + p), \bar{u} - u)_{\Sigma_2} \geq 0 \quad \forall \bar{u} \in U. \quad (2.14)$$

Burada, son koşul Lagrange fonsiyonunun u'ya göre türevinin 0'a eşitlenmesinden elde edilir. Yani,

$$\frac{\partial L}{\partial u}(y, v, u, p, w) = \frac{\partial J}{\partial u} - \nabla_u(p^T g(y, u)) \approx 0,$$

alınır. Ve  $\frac{\partial J}{\partial u} = \alpha u$  olur.

### **2.3. Optimal kontrol problemlerinin sayısal çözümleri**

Çoğu problemin teorik bir cevabı olmasına rağmen pratikte açık çözümü bulmak çok zordur. Dolayısıyla sayısal süreçlerin gerekliliği karşımıza çıkar. Kontrolün ve durumun karşılaması gereken gerekli koşulları veren temel analitik teknik, Pontryagin'in Maksimum Prensibi tarafından sağlanmaktadır. Bu koşullar bazen açıkça çözülebilir; Ancak, çoğu problemde, koşullar açıkça çözülmek için çok karmaşıktır. Benzer şekilde, durum veya kontrol üzerinde ilave kısıtlamalar içeren problemler için de zordur. Bu nedenle, bu zor denklemlerin çözümlerini oluşturmak için sayısal yaklaşımlar kullanılır.

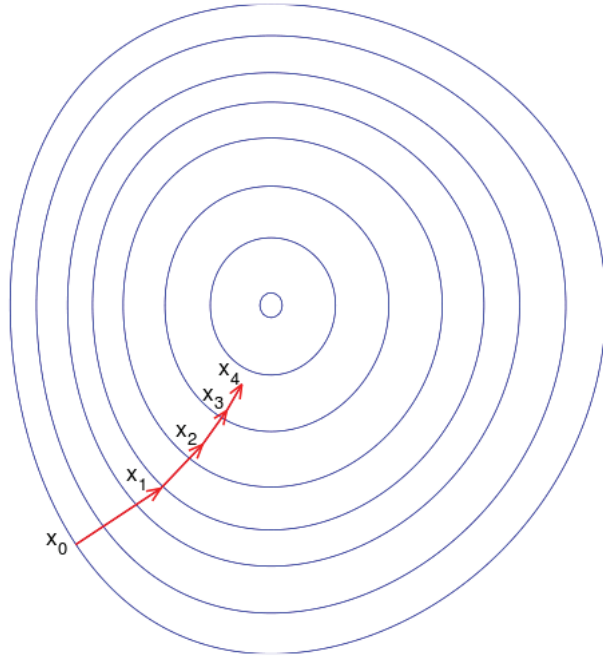
Bu bölümde, yaklaşık kontrolü bulmak için bazı sayısal yöntemler hakkında kısa bir bilgi vereceğiz. Bunlardan en popülerlerinden birisi azalan gradyan

metodudur. Bu yöntemin birinci dereceden doğruluğu olsa da, uygulanması kolaydır. Ayrıca, ikinci mertebeden doğruluğu olan eşlenik gradyan tipi metodunu da sunacağız.

### 2.3.1 Azalan gradyan yöntemi

Azalan gradyan veya en dik iniş yöntemi, negatif indirgenmiş eğimi bir arama yönü olarak kullanır ve daha sonra bu yönde bir adım uzunluğu hesaplar.

Azalan gradyan yöntemi, çok değişkenli bir gözlem fonksiyonunu,  $F(x)$ , baz alır. Bu fonksiyon, bir  $a$  noktasında tanımlı ve onun komşuluğunda türevlenebilir olsun. Bu durumda, eğer  $-\nabla F(a)$  yönünde hareket edilirse  $F(x)$  değeri hızlı bir şekilde azalmaya başlar.



**Şekil 2.4** Bir dizi seviye eğrisinde azalan gradyan örnekleme

Bir başlangıç vektörü seçelim  $x_0$ , ayrıca  $x_0, x_1, x_2, \dots$  serisini düşünelim ve  $x_{n+1} = x_n - \delta_n \nabla F(x_n)$ ,  $n \geq 0$ .

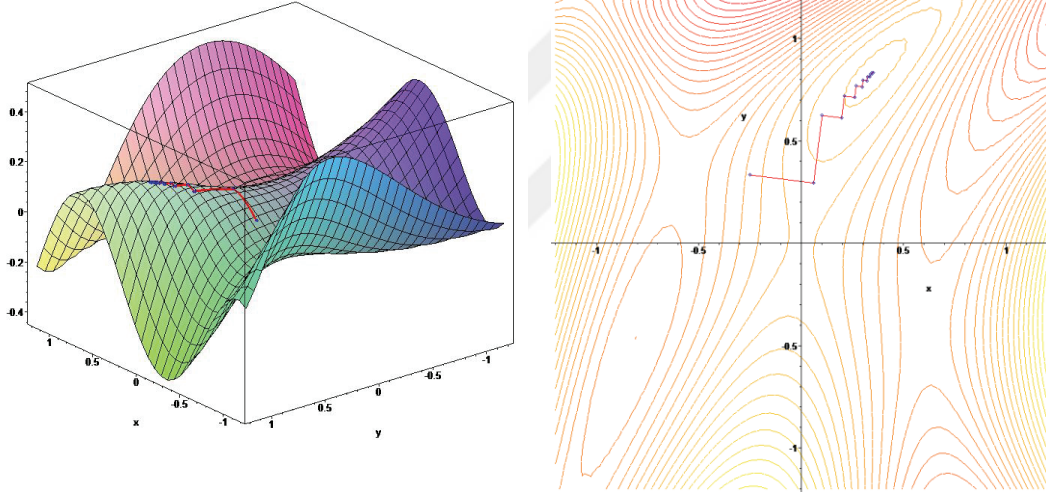
### **Algoritma (Azalan gradyan yöntemi)**

1. Başlangıç  $x_0$  seçilir.
2.  $k = 0$
3.  $x_{k+1} = x_k - \alpha_k \nabla F(x_k)$
4. Eğer  $r_{k+1} = \|x_{k+1} - x_k\|$  değeri yeterince küçükse döngüden çıkılır.
5.  $k := k+1$
6.  $\alpha_{k+1} = \alpha_k/2$
7. Sonuç  $x_{k+1}$ .

Azalan gradyan metoduna bir örnek olarak, şu fonksiyonu ele alalım [28]:

$$F(x, y) = \sin\left(\frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{4}y^2 +\right) \cos(2x + 1 - e^y). \quad (2.15)$$

Azalan gradyan yöntemi zikzak biçiminde bir yapıya sahiptir.



**Şekil 2.5** Çözüm ve kontur çizgileri

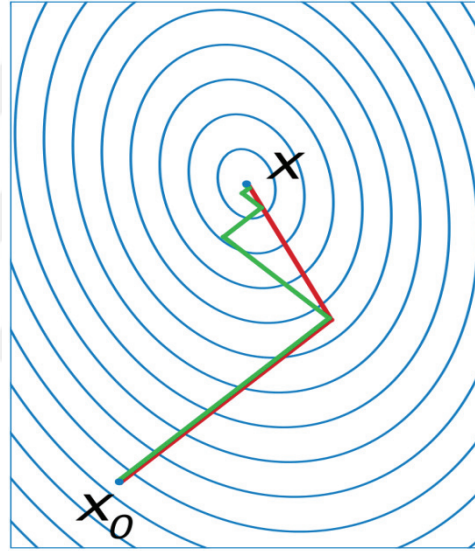
### **2.3.2. Eşlenik gradyan yöntemi**

Eşlenik gradyan yöntemi, matrisi simetrik ve pozitif-kesin olan belirli lineer denklem sistemlerinin sayısal çözümü için olan bir algoritmadır. Eşlenik gradyan yöntemi sıklıkla yinelemeli bir algoritma olarak uygulanır ve direkt uygulama veya Cholesky ayrıştırması gibi başka doğrudan yöntemlerle işlenemeyecek kadar büyük olan seyrek sistemler için geçerlidir. Büyük seyrek sistemler sıklıkla kısmi diferansiyel denklemleri sayısal olarak çözerken veya optimizasyon problemlerinde ortaya çıkar. Eşlenik gradyan yöntemi, enerji minimizasyonu gibi sınırlandırılmamış

optimizasyon problemlerini çözmek için de kullanılabilir. Esasında bu yöntem, Magnus Hestenes ve Eduard Stiefel tarafından geliştirilmiştir.

Algoritma,  $Ax = b$  denklem sisteminin çözümü için aşağıda detaylandırılmıştır. Burada,  $A$  gerçek, simetrik, pozitif-kesin matristir.  $x_0$  girdi vektörü tahmini bir başlangıç çözümü veya 0 olabilir.

Şekil 2.6'da, belirli bir doğrusal sistemle ilişkili bir ikinci dereceden fonksiyonu en aza indirmek için optimal adım boyutlu azalan gradyan yakınsamasının (yeşil renkte) ve eşlenik vektör (kırmızı renkte) ile karşılaştırılması verilmiştir.



Şekil 2.6

Tam aritmetik işlem kullanıldığı varsayılırsa, eşlenik gradyan yöntemi, en fazla  $n$  basamağa yakınsar ki burada  $n$  sistemin matrisinin boyutudur.

Şimdi, optimal kontrol probleminin yakınlştırılması için bir algoritma vereceğiz. Optimal kontrol problemini sayısal olarak çözmek için eşlenik gradyan yöntemi kullanacağız.

Şimdi, Eşlenik gradyan yönteminin genel bir biçimini vereceğiz. Amacımız  $Ax=b$  sistemini çözmektir. Yani,  $Ax - b = 0$  işleminin çözümünü bulmak istiyoruz. Algoritması aşağıdaki gibidir.

### Algoritma (Eşlenik gradyan yöntemi)

1. Başlangıç  $x_0$  seçilir
2.  $r_0 := b - Ax_0$
3.  $p_0 := r_0$
4.  $k = 0$
5.  $\alpha_k := \frac{(r_k)^T r_k}{(p_k)^T A p_k}$
6.  $x_{k+1} = x_k + \alpha_k p_k$
7.  $r_{k+1} := r_k - \alpha_k A p_k$
8. Eğer  $r_{k+1}$  değeri yeterince küçükse döngüden çıkılır.
9.  $\beta_k := \frac{(r_{k+1})^T r_{k+1}}{(r_k)^T r_k}$
10.  $p_{k+1} := r_{k+1} + \beta_k p_k$
11.  $k := k+1$
12. Bitir ve tekrar et.

### 2.4. Yaklaşım prosedürü

Optimalite sistemini elde ettiğimiz için, şimdi de yaklaşım prosedürünü belirtebiliriz.

#### Algoritma

1. Kontrol değişkeni için bir başlangıç tahminiyle başlanır ve  $u^0$  seçilir.
2. Başlangıç kontrol değeri kullanılarak durum değeri çözülür:

$$\nabla^2 y - \omega^2 y = 0 \quad x \in \Omega$$

$$\frac{\partial y}{\partial n} = u(x), \quad x \in \Sigma_2, \quad (2.16)$$
$$y = 0, \quad x \in \Sigma_1,$$

3.  $v$  için çözüm yapılır,

$$-\Delta v = \frac{1}{2} \beta y^2, \quad x \in \Omega, \quad (2.17)$$
$$v = 0, \quad x \in \Sigma_1 \cup \Sigma_2,$$

4.  $w$  için çözüm yapılır,

$$-\Delta w = v(x) - v_d(x), \quad x \in \Omega, \quad (2.18)$$
$$w = 0, \quad x \in \Sigma_1 \cup \Sigma_2,$$

5.  $p$  için çözüm yapılır,

$$\begin{aligned}\nabla^2 p + \omega^2 p &= \beta y w, \quad x \in \Omega, \\ \frac{\partial p}{\partial n} &= 0, \quad x \in \Sigma_2, \\ p &= 0, \quad x \in \Sigma_1,\end{aligned} \quad (2.19)$$

6. Aşağıdaki bağıntı ile maliyet fonsiyonunun  $u$ 'ya göre türevi bulunur

$$(\text{Re}(\nabla_u J + p), \bar{u} - u)_{\Sigma_2} \geq 0. \quad (2.20)$$

Burada, şunu da belirtmek gerekir ki  $\text{Re}(\nabla_u J + p) \approx 0$ . Bu bağıntı kullanılır.

7. Yeni kontrol parametresini bulmak için azalan gradyan yöntemi veya eşlenik gradyan yöntemi kullanılır.

$$u_{k+1} = u_k - \alpha_k \nabla_u J(u_k) \quad (2.21)$$

8.  $\alpha_{k+1} = \alpha_k/2$  hesaplanır.

9. Yeni hesaplanmış kontrol  $u$  ile adım 2'ye gidilir.

10. Belli bir kriter sağlanana kadar iterasyona devam edilir.

## ÜÇÜNCÜ ÜNİTE

### SONLU ELEMANLAR YÖNTEMİ VE AYRIK KONTROL PROBLEMİ

Helmholtz denklemi, akustik ve elektrodinamik dalga yayılımı gibi çeşitli uygulamalar için önemli bir modeldir. Yayılma çözümlerinin salınım karakteri nedeniyle, dalga sayısı büyük olduğunda standart sonlu elemanlar yöntemi (FEM) zayıf bir performansa sahiptir. Standart FEM'in sayısal doğruluğunu iyileştirmek için çeşitli yaklaşımlar önerilmiştir. Ayrıca, standart FEM'in yakınsamasının aralık boyutuna bağlı olduğu bilinmektedir. Daha sık bir aralık boyutu daha iyi bir yakınsama sağlar.

Bu bölümde, sonlu elemanlar yöntemi hakkında kısa bir tartışma yaptıktan sonra Helmholtz denkleminin zayıf formülasyonunu standart FEM kullanarak elde edeceğiz [35]. Daha sonra, Helmholtz denkleminin ayrik optimal kontrol problemini formülize edeceğiz.

#### 3.1. Sonlu elemanlar ayrıklaştırılması

FEM, kısmi diferansiyel denklemlerde sınır değer problemlerine yaklaşık çözümler bulmak için kullanılan bir sayısal tekniktir. Sonlu elemanlar analizi ilk kez 1943 yılında R. Courant tarafından geliştirilmiştir [33]. Courant, titreşim çerçeveleri için varsayımlanmış cevapların sayısal incelemesi ve varyasyonel analitiklerin minimizasyonu için Ritz stratejisini kullanmıştır. FEM, karmaşık geometrileri ve homojen olmayan materyalleri işleme kapasitesi göz önüne alındığında, dalga oluşturan konuların mekânsal ayrımlarını yürütmek için yaygın bir teknik olmuştur.

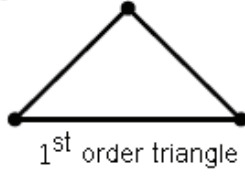
FEM tekniği seçildikten sonra, halen dikkate alınabilecek birkaç mekânsal ayrıklaştırma metodolojisi bulunmaktadır. Sürekli Galerkin / Petrov-Galerkin yöntemleri [34], spektral elemanlar yöntemleri, karma sonlu elemanlar yöntemleri, genişletilmiş sonlu elemanlar yöntemleri ve süreksiz Galerkin / Petrov-Galerkin yöntemlerini içerirler. Hepsi kullanılmış olabilir ve hepsinin güçlü ve zayıf yanları vardır. Şekil 3.1'de, değişen boyutlara göre bazı klasik unsurlar gösterilmektedir.



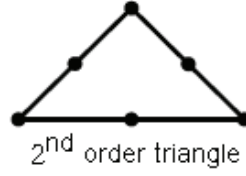
1-D element



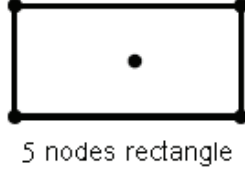
2-D elements



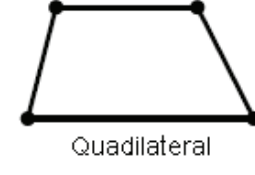
1<sup>st</sup> order triangle



2<sup>nd</sup> order triangle

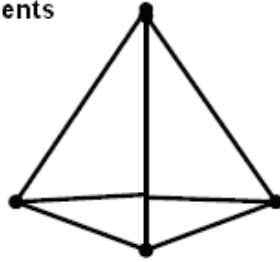


5 nodes rectangle

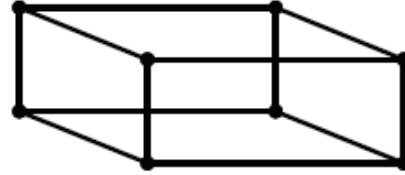


Quadrilateral

3-D elements



Tetrahedron



Hexahedron

**Şekil 3.1** Bir FEM çalışmasında örgü oluşumu için kullanılan bazı temel unsurlar

Eliptik sınır değer problemi için sonlu elemanlar metodunun oluşturulmasında ilk adım problemin zayıf çözümünü bulmaktır. İlk önce, aşağıdaki model problemini 1 boyutlu uzayda düşünelim [28]:

$$\begin{aligned} -\nabla^2 y &= f, \quad x \in \Omega, \\ \frac{\partial y}{\partial n} &= g, \quad x \in \Sigma_2, \\ y &= 0, \quad x \in \Sigma_1. \end{aligned} \quad (3.1)$$

Burada,  $\Omega \subseteq \mathbb{R}$ ,  $\Sigma_1$  ve  $\Sigma_2$   $\Omega$  uzayının sınır kümeleri olsun. Daha sonra, model probleminin zayıf çözümü şu şekildedir:

$$a(y, v) = l(v) \quad \forall v \in H_{0, \Sigma_1}^1(\Omega), \quad (3.2)$$

öyle ki

$$a(y, v) = \int_{\Omega} y'v' dx$$

ve

$$l(v) = \int_{\Omega} f(x)v(x) dx + \int_{\Sigma_2} g(s)v(s) ds. \quad (3.3)$$

Şunu da not edelim ki  $H_{0,\Sigma_1}^1(\Omega) = \{v: v \in H^1 \text{ ve } \Sigma_1 \text{ üzerinde } v = 0\}$ .

Kolaylık olsun diye, diyelim ki  $V = H_{0,\Sigma_1}^1(\Omega)$  olsun.

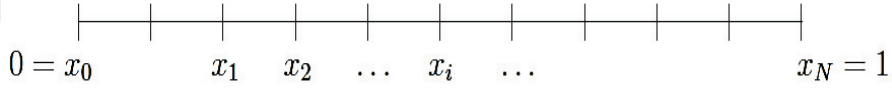
Şimdi, bizim amacımız öyle bir  $y \in V$  bulmak ki  $a(y, v) = l(v) \forall v \in V$ . Yapının ikinci basamağı,  $V$ 'yi, hesaplanan bölgenin bir alt bölümü ile ilişkili sabit bir dereceden kesintisiz parçalı polinom fonksiyonlarından oluşan bir sınırlı boyutlu alt uzay  $V^h \subset V$  ile değiştirmektir. Sonra, aşağıdaki problemi düşüneceğiz:

“Öyle bir  $y^h \in V^h$  bulalım ki  $a(y^h, v^h) = l(v^h)$  her  $v^h \in V^h$  olsun.”

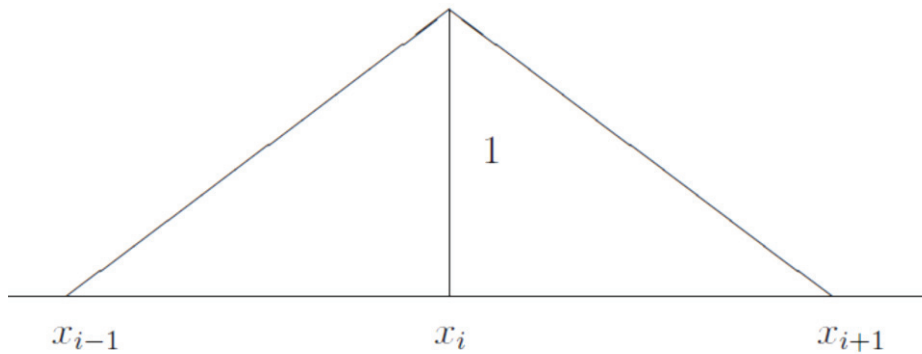
Eğer  $V^h = \text{span}\{\phi_1, \phi_2, \dots, \phi_n\}$ , burada  $n$   $V^h$  uzayının derecesi olmak üzere,

$$y^h = \sum_{i=1}^{i=N} Y_i \phi_i, \quad (3.4)$$

yazılabilir. Burada, Her bir  $i$  için  $Y_i$  belirlenmelidir. Şimdi, FEM'in yapımını tartışacağız. Sistematik bir temeli vardır. Bu problemin sonlu elemanlar yaklaşımını oluşturmak için,  $\Omega = [0, 1]$  bölgesini  $N$  alt aralıklarını  $[x_i, x_{i+1}]$ ,  $i = 0, \dots, N-1$ , olarak sınıflandırırız,  $x_i = ih$ ,  $i = 0, \dots, N$ , burada  $h = 1/N$ ,  $N \geq 2$ , Şekil 3.2'de gösterildiği gibi.



Şekil 3.2 1 boyutlu bölgenin bir alt bölümü



Şekil 3.3 Parçalı doğrusal sonlu elemanlar baz fonksiyonu

Problem şu şekilde ifade edilir:

Öyle bir  $Y = (Y_1, Y_2, \dots, Y_{N-1}) \in \mathbb{R}^{N-1}$  bulalım ki

$$\sum_{i=1}^{N-1} Y_i \int_0^1 p(x) \phi'_i(x) \phi'_j(x) + q(x) \phi_i(x) \phi_j(x) dx \quad (3.5)$$

$$= \int_0^1 f(x) \phi_j(x) dx$$

$j = 1, \dots, N - 1$  için ,

olsun.

Şimdi,  $a_{ji} = \int_0^1 p(x) \phi'_i(x) \phi'_j(x) + q(x) \phi_i(x) \phi_j(x) dx$  seçilirse eğer

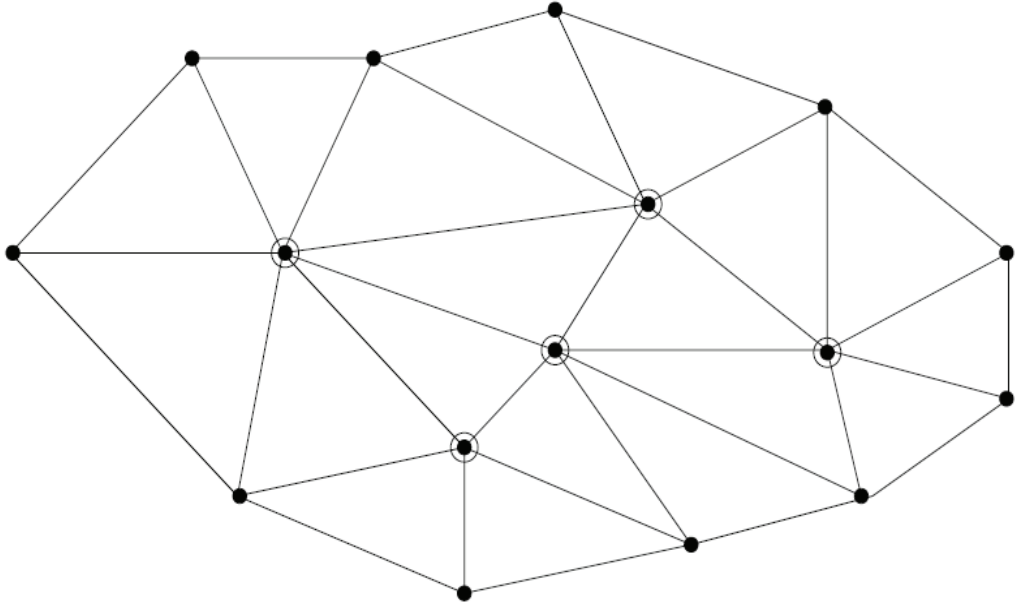
$F_j = \int_0^1 f(x) \phi_j(x) dx$  için

$$AY = F, \quad (3.6)$$

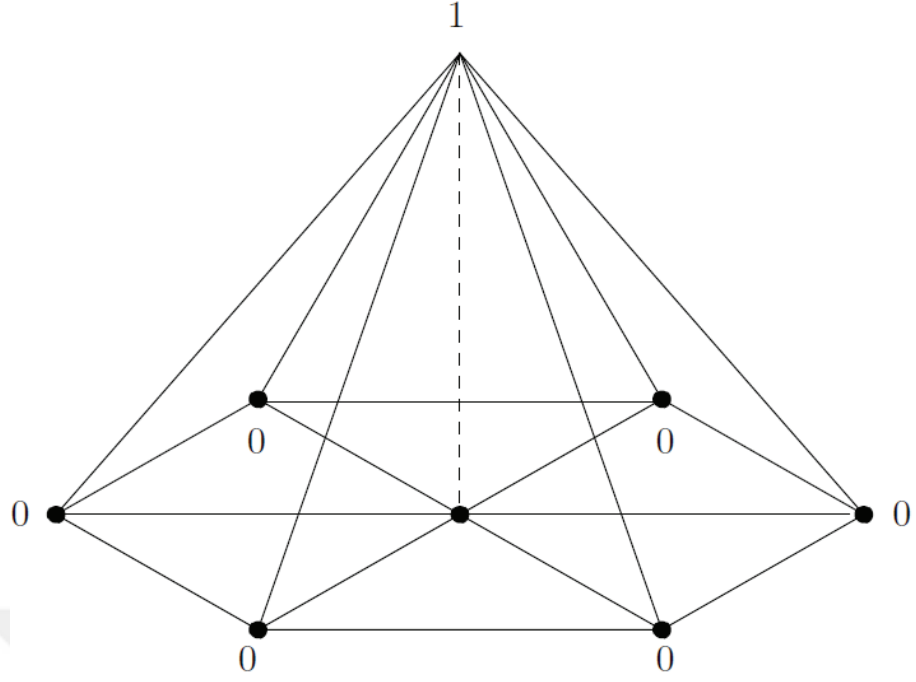
olur. Burada  $A$  ve  $F$  karşılık gelen matrisler olsun.

### ***İki boyutlu problem***

$\Omega, \mathbb{R}^2$ 'de polygonal bir bölge ve sınırı  $\partial\Omega$  olsun. Böylece sonlu sayıda üçgen ile  $\Omega$  parçalara ayrılır. Her iç düğümle (Şekil 3.4'de  $\odot$  olarak işaretlenmiştir) bir baz fonsiyonu  $\phi$ ; Bu düğümde 1'e eşittir ve diğer tüm düğümlerde 0'a eşittir, Şekil 3.5 [28].



**Şekil 3.4** Bölgenin üçgen ağlara bölünmesi  $\Omega$ .



Şekil 3.5 Tipik bir sonlu elemanlar baz fonksiyonu  $\phi$ .

Tek boyutlu problemde olduğu gibi

$$y^h = \sum_{i=1}^{i=N} Y_i \phi_i(x_1, x_2) \quad (3.7)$$

olsun. Daha sonra problem şu şekilde kurulur:

Öyle bir  $Y \in H_0^1(\Omega)$  bulalım ki

$$\int_{\Omega} \left( \frac{\partial y}{\partial x_1} \frac{\partial v}{\partial x_1} + \frac{\partial y}{\partial x_2} \frac{\partial v}{\partial x_2} \right) dx_1 dx_2 = \int_{\Omega} f v dx_1 dx_2 \quad v \in H_0^1(\Omega) \quad (3.8)$$

Sonlu elemanlar problemi:

Öyle bir  $y^h \in V^h$  bulalım ki

$$\int_{\Omega} \left( \frac{\partial y^h}{\partial x_1} \frac{\partial v^h}{\partial x_1} + \frac{\partial y^h}{\partial x_2} \frac{\partial v^h}{\partial x_2} \right) dx_1 dx_2 = \int_{\Omega} f v^h dx_1 dx_2 \quad v^h \in V^h. \quad (3.9)$$

Ve

$$y^h = \sum_{i=1}^{i=N} Y_i \phi_i(x_1, x_2). \quad (3.10)$$

Sonra, FEM şunu belirtiyor:

Öyle bir  $Y = (Y_1, Y_2, \dots, Y_{N-1}) \in \mathbb{R}^{N-1}$  bulalım ki

$$\sum_{i=0}^{N-1} Y_i \left[ \int_{\Omega} \left( \frac{\partial \phi_i}{\partial x_1} \frac{\partial \phi_j}{\partial x_1} + \frac{\partial \phi_i}{\partial x_2} \frac{\partial \phi_j}{\partial x_2} \right) dx_1 dx_2 \right] = \int_{\Omega} f \phi_j dx_1 dx_2 \quad (3.11)$$

$$j = 1, \dots, N - 1.$$

Şimdi,  $A = (a_{ij})$ ,  $F = (F_1, \dots, F_{N-1})^T$  olsun ve

$$a_{ij} = a_{ji} = \int_{\Omega} \left( \frac{\partial \phi_i}{\partial x_1} \frac{\partial \phi_j}{\partial x_1} + \frac{\partial \phi_i}{\partial x_2} \frac{\partial \phi_j}{\partial x_2} \right) dx_1 dx_2, \quad (3.12)$$

$$F_j = \int_{\Omega} f \phi_j dx_1 dx_2. \quad (3.14)$$

Böylece, sonlu elemanlar yaklaşımı bir lineer denklem sistemi olarak yazılabilir [28]:

$$AY = F. \quad (3.15)$$

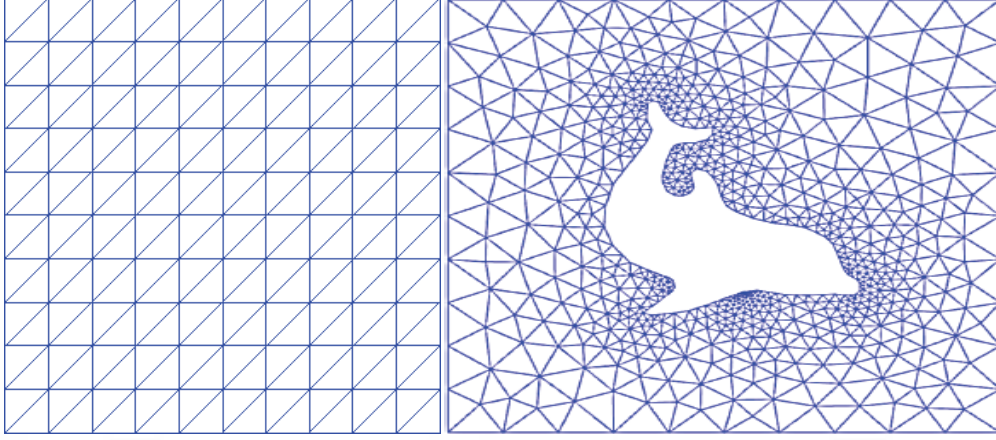
Burada,  $Y = (Y_1, Y_2, \dots, Y_{N-1}) \in \mathbb{R}^{N-1}$  dersek eğer, yaklaşımımız aşağıdaki gibidir:

$$y^h = \sum_{i=1}^{i=N} Y_i \phi_i(x_1, x_2). \quad (3.16)$$

$A$  matrisi stif matrisi olarak adlandırılır.

### 3.2 Ayrıklaştırma

Şekil 3.6'da, bölgenin bazı farklı ayrıklaştırmalarını görüyoruz.



Şekil 3.6 Farklı alanlardaki farklı ağlar.

Bu alt bölümde, Helmholtz denkleminin ayrık optimal kontrol problemini türeteceğiz. Her iki durumun ve eşlik eden durum denklemlerinin ayrık formlarını elde edeceğiz.

Model problemimizi hatırlıyoruz:

$$\begin{aligned} \min_{(v,u)} J(v,u) &= \frac{1}{2} \int_{\Omega} (v(x) - v_d(x))^2 dx + \frac{\alpha}{2} \int_{\Sigma_2} (u(x))^2 ds \quad (3.17) \\ -\nabla^2 y - \omega^2 y &= 0, \quad x \in \Omega, \\ \frac{\partial y}{\partial n} &= u(x), \quad x \in \Sigma_2, \\ y &= 0, \quad x \in \Sigma_1, \\ -\Delta v &= \frac{1}{2} \beta y^2, \quad x \in \Omega, \\ v &= 0, \quad x \in \Sigma_1 \cup \Sigma_2. \end{aligned}$$

Ayrık problemi bulmak için önce Helmholtz denkleminin zayıf formülasyonunu belirteceğiz. Problemin sonlu elemanlar ayrıklığını belirtmek için,

Diyelim ki  $Y^h \subseteq Y$ ,  $V^h \subseteq V$  ve  $U^h \subseteq U$  sonlu elemanlar uzayları olsun. Öyle bir  $y^h \in Y^h$ ,  $v^h \in V^h$  ve  $u^h \in U^h$  bulalım ki

$$\min_{(v^h, u^h)} J(v^h, u^h) = \frac{1}{2} \|v^h - v_d\|_{\Omega}^2 + \frac{\alpha}{2} \|u^h\|_{\Sigma_2}^2 \quad (3.18)$$

$$\begin{aligned}
-(\nabla y^h, \nabla q^h) + (\omega y^h, q^h) &= 0 \quad \forall q^h \in Y^h, \\
(\nabla v^h, \nabla l) - \frac{1}{2}(\beta y^h y^h, l^h) &= 0 \quad \forall l^h \in V^h, \\
(\nabla w^h, \nabla m^h) + (v^h - v_d, m^h) &= 0 \quad \forall m^h \in V^h, \\
-(\nabla p^h, \nabla r^h) + (\beta y^h w^h, r^h) &= 0 \quad \forall r^h \in Y^h,
\end{aligned} \tag{3.19}$$

olsun.



## DÖRDÜNCÜ ÜNİTE

### MİKRODALGA ISITMA PRENSİBİ

#### 4.1. Mikrodalga Isıtma Prensibi

Mikrodalga ısıtması, elektromanyetik dalgalar ve ısı aktarımı içeren çoklu bir fizik fenomenidir. Elektromanyetik radyasyona bırakılan herhangi bir malzeme ısınır. Hızla değişen elektrik ve manyetik alanlar dört ısıtma kaynağına neden olur. İletken bir malzemeye uygulanan herhangi bir elektrik alanı akımı akıtacaktır [29].

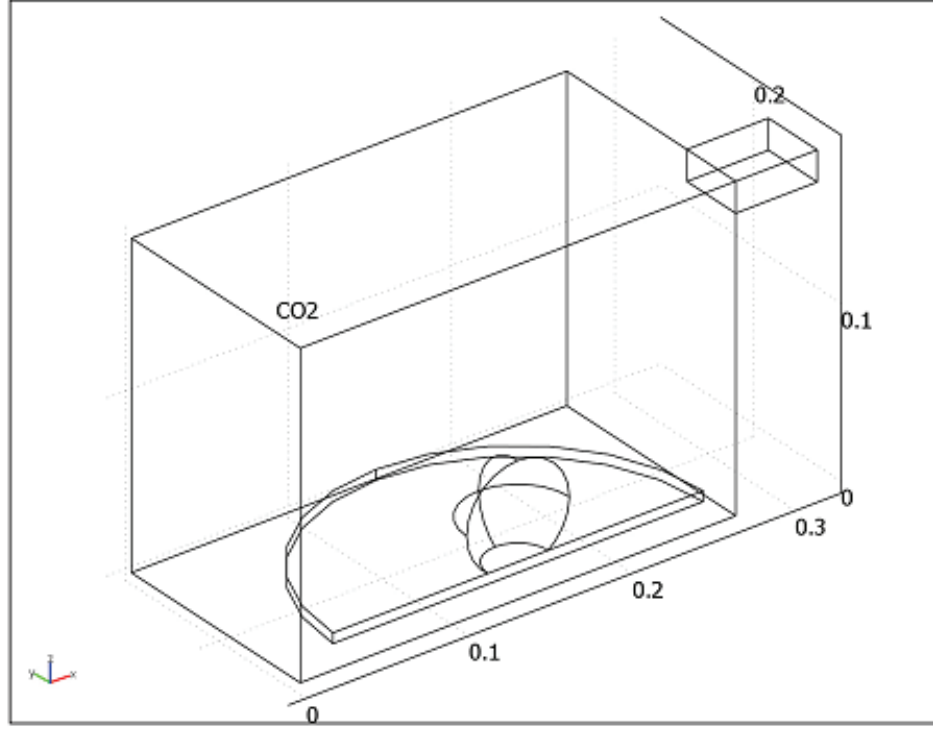
Malzemenin sıcaklığı değiştikçe, malzemenin iletkenliği ve dielektrik kaybı tanjantı gibi ne kadar ısının üretileceğini belirleyen özellikler de değişir. Buna ek olarak, malzemeye özgü ısı ve ısı iletkenliği de değişecektir. Mikrodalga ısıtma, tüm bu fenomenler arasındaki bağlantıyı göz önüne alır.

Mikrodalga ısıtma verimliliği malzemenin özelliklerine bağlıdır. Örneğin, değişen su içeriğine sahip gıdaları bir mikrodalga fırına yerleştirirseniz, farklı oranlarda ısınırlar. Üzerinde kalan yiyecekler hala soğukken çok sıcak olan bir yemek tabağı çıkabilir. Ayrıca, gıdaların birbirlerine göre konumu fırındaki elektromanyetik alanı da etkiler. Bu yüzden çoğu mikrodalga fırında ısıtmayı teşvik etmek amacıyla yiyecekleri döndürmek için döner tablaları vardır.

#### *Simülasyon*

Öncelikle, mikrodalga fırın geometrisini ayarlayabiliriz. Simülasyonumuzda, mikrodalga fırın temelde 500 W, 2.45 GHz mikrodalga kaynağına bağlı bir bakır kutudur. Mikrodalgalar daha sonra fırının sağ üst köşesinde bulunan bir dalga kılavuzu vasıtasıyla fırının merkezine yönlendirilir. Taban, yiyeceklerin yerleştirildiği cam plakayı içerir. Analizimizi basitleştirmek için, bir patates gibi homojen bir yiyeckte ısıtmanın nasıl gerçekleştiğine bakılacaktır. Mikrodalga, dalga kılavuzu, cam plaka ve patates geometrisi aşağıda gösterilmiştir. Modeldeki ayna simetrisi nedeniyle, geometrinin yalnızca yarısı modellenmelidir.



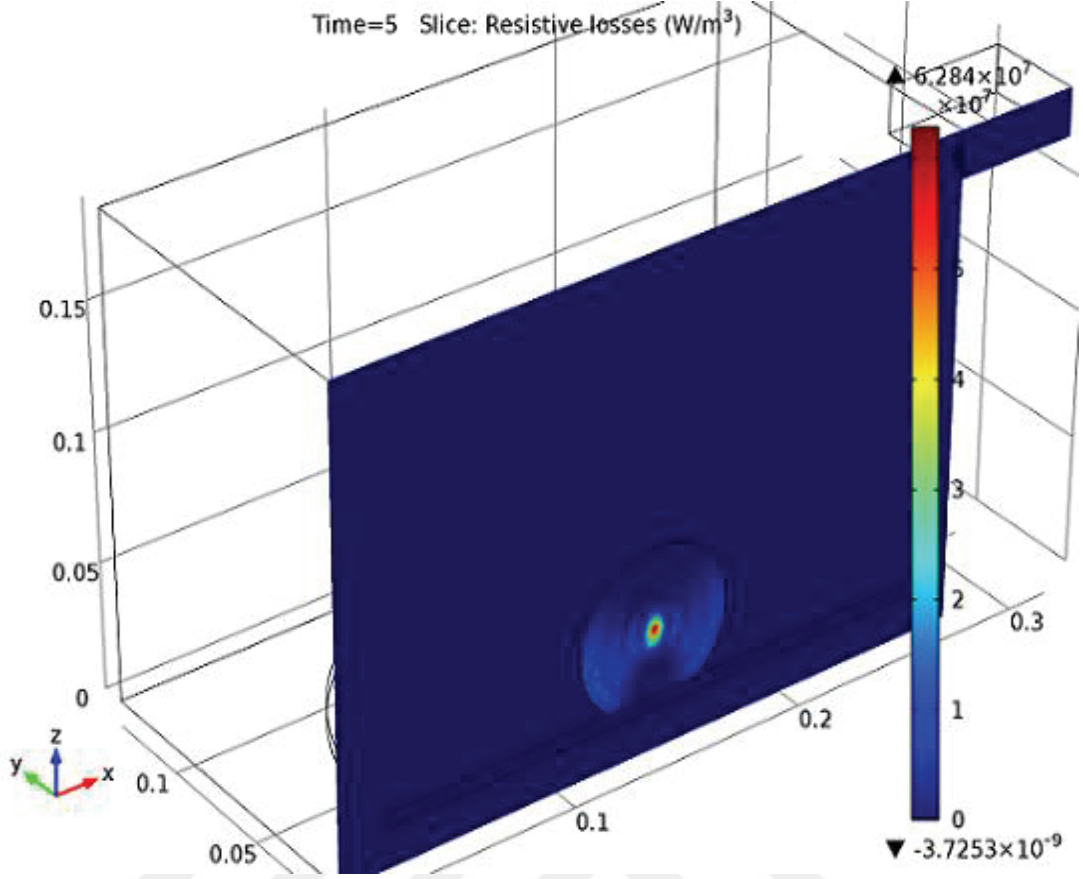


**Şekil 4.1** Mikrodalga fırın, dalga kılavuzu, cam plaka ve patates geometrisi.

Ayna simetrisi nedeniyle geometri azalır.

Simülasyonda, patatesin tabağın üzerinde dinlendirilmesi için patatesin altından bir parça kesilir. Bu kesim ayrıca, sonlu eleman örgüsünün oluşturulmasına yardımcı olacaktır ve patatesin plakayla temas ettiği bölgede ayrıntılı bir analiz yapılmasına olanak tanıyacaktır. Mikrodalga ve dalga kılavuzunun bakır duvarlarındaki dirençli metal ısı kayıpları, küçük olmasına rağmen, bir empedans sınır şartı kullanılarak da dikkate alınır.

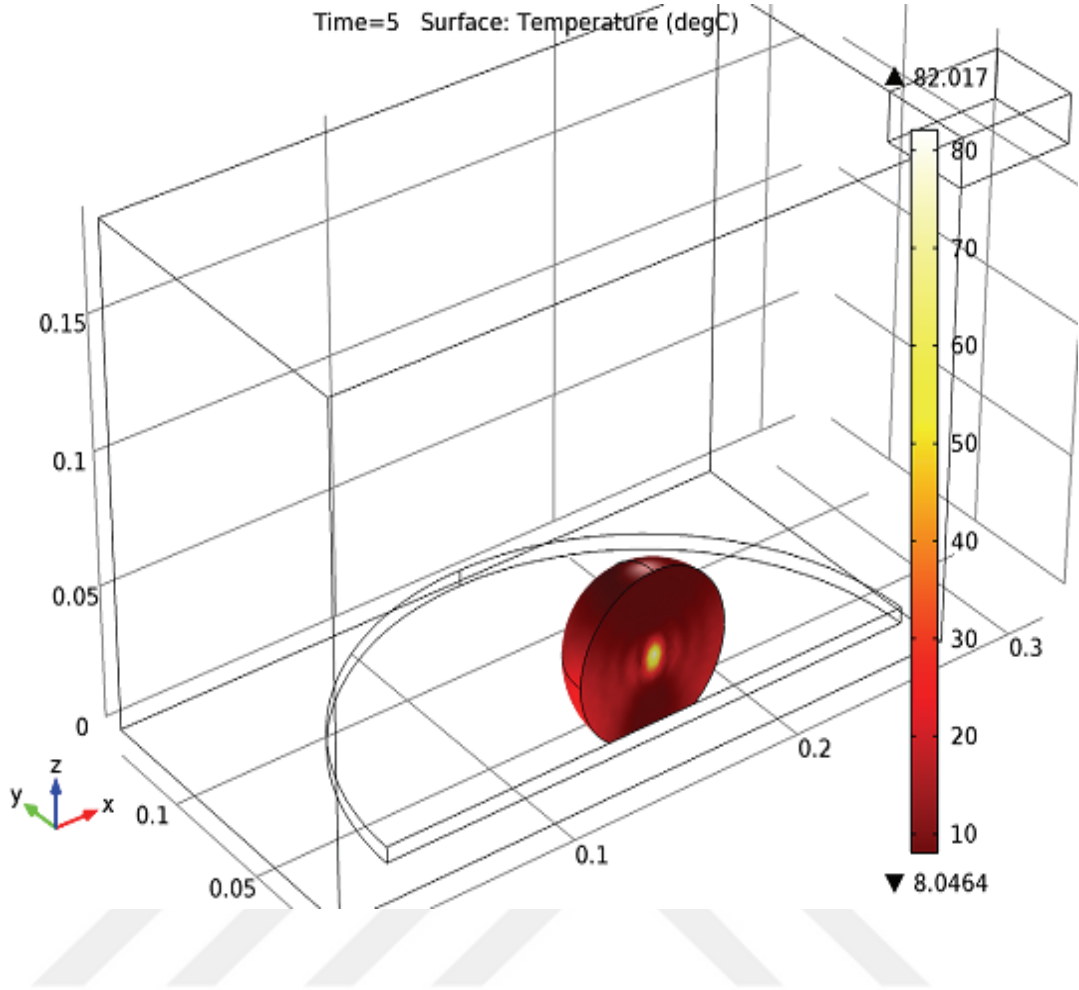
Mikrodalga radyasyonunu patates içine girdiğimizde, patates, içindeki elektromanyetik alanın bir kısmını yakalayan bir rezonans boşluğu gibi davranır. Patates içine aktarılan güç veya enerji, radyasyon kaynağından salınan gücün yaklaşık% 60'ı kadardır. Geri kalan güç, bağlantı noktasından tekrar yansıtılır. Aşağıdaki simülasyonda görülebileceği gibi, rezonans boşluğu, patatesin merkezinde, dağılmış gücün en yüksek noktasında, güçlü bir tepe oluşturur.



**Şekil 4.2** Patates içinde yayılmış mikrodalga güç dağılımı.

Patates merkezindeki güçlü zirveye dikkat edin.

Bu mikrodalga alanı patatesin içinde ısıtmayı tetikler. Beş saniye geçtikten sonra, patates içinde oluşan ısı miktarına bakabiliriz. Simülasyonda, patates merkezinin sadece beş saniye sonra ısınmaya başladığını gözlemleyebiliriz. Ayrıca patatesin düşük ısı iletkenliği nedeniyle, ısı merkezde odaklanmış olarak kalır ve dağılmaz. Bu, bir mikrodalga fırında yiyecekleri ısıtırken bazen yaşadığımız sıcak merkeze ve soğuk dışa yol açar.



**Şekil 4.3** Beş saniyelik ısıtmadan sonra patatesteki sıcaklık dağılımı.

Patatesleri daha uzun bir süre ısıtmaya devam edersek, patatesteki merkezi sıcaklık sonunda kaynama noktasına ulaşacak ve buhar oluşacak ve dışa doğru dağılmış olacaktır. Böylelikle, ısı taşınımı hızlanacak ve merkezdeki güç dağılımı düşecektir ve kuruma oluşur. Patates içindeki artan yerel basınç bu kaynama noktasını artırabilir, ancak sıcaklık  $100^{\circ}\text{C}$ 'ye yaklaştığında gerçekleşir. Bununla birlikte, yeterince ısınırsa, patatesin dış kısımlarına buhar kanalları açarak bir veya birkaç mikro patlamalar meydana gelecektir. Patates püresi veya yoğun çorba gibi yiyecekleri mikrodalga fırında deneyen biri büyük olasılıkla bu mikro patlamaları yaşar ve mikrodalga fırının iç kısmındaki olumsuz etkilere tanık olur. Yukarıda tartışılan simülasyon bu doğrusal olmayan etkileri içermez, ancak bu ve diğer etkileri içerebilecek daha karmaşık bir simülasyon için iyi bir başlangıç noktası görevi görebilir.

## BEŞİNCİ ÜNİTE

### UYGULAMALAR

Bu bölümde, sayısal deneyler yapacağız. Sayısal deneyleri sunmadan önce sayısal çözümleri bulmak için uyguladığımız programlama dili hakkında bazı ayrıntıları vereceğiz. Tüm hesaplamalar kamu lisanslı sonlu elemanlar yazılım paketi Freefem ++ ile yürütülmüştür [3].

FreeFEM, Kısmi Diferansiyel Denklemlerin (KDD'ler) sonlu elemanlar yöntemi çözücüsüdür. Tanım kümesinin iki veya üç boyutundaki KDD'leri sayısal olarak, elemanlar da dahil sonlu elemanlar yöntemlerinin geniş bir yelpazesi kullanarak çözer. FreeFEM, GPL Lisansı altında dağıtılan en güçlü FEM çözücüsüdür. Kısmi diferansiyel denklem FreeFem ++ 'da aşağıdaki gibi çözülebilir:

1. Geometri tanımlanır;
2. Ağ oluşturulur;
3. Uygun bir baz seçilir;
4. İntegral biçimindeki denklemin zayıf çözümü oluşturulur;
5. Çözüm bulunup çizdirilir.

Esasında, zayıf çözümün formülasyonu kullanıcıya bırakılmıştır. Gerisi kodun içinde yapılır. Zayıf çözüm formülasyonu matrisler olmaksızın integral formunda yazılmıştır. Örneğin temel Helmholtz denklemi için

$$\Delta E + \varepsilon\omega^2 E = 0, \quad (5.1)$$

Integral formu

$$\int_{\Omega} (\nabla E \cdot \nabla v - \varepsilon\omega^2 E v) dx - \int_{\Sigma} v \nabla E dS = 0, \text{ her } v \text{ için}$$

biçimindedir.

The FreeFem++ kodu [3]

$$\begin{aligned} \text{problem HELMHOLZ}(E,v) = & \text{int2d}(D)( dx(E) * dx(v) + dy(E) * dy(v)) \\ & - \text{int2d}(D)( \omega^2 * \text{eps}(x,y) * E * v) \\ & - \text{int1d}(D, \text{border1})(v * dx(E) * n.x) \\ & - \text{int1d}(D, \text{border1})(v * dy(E) * n.y) \\ & + \text{on}(\text{border2}, E=0). \end{aligned}$$

Şimdi, aşağıdaki örneklerde, öncelikle kontrolsüz bir mikrodalga ısıtma problemi düşüneceğiz. Daha sonra, mikrodalga ısıtma probleminin optimal kontrol problemini

oluşturmak için bir kontrol değişkeni ele alacağız. Daha sonra sayısal sonuçları vereceğiz.

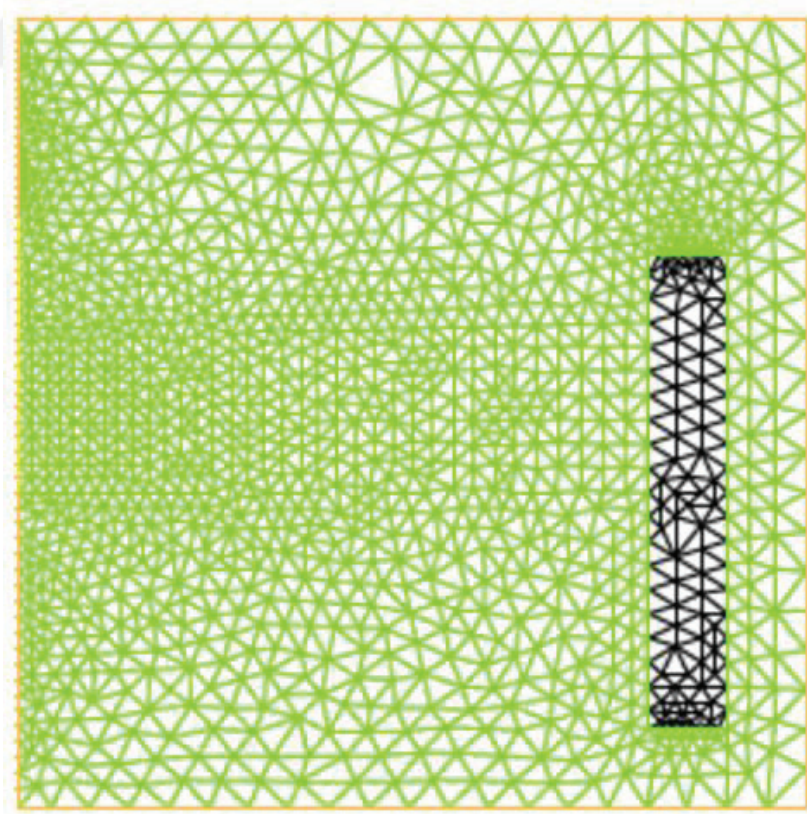
### Örnek 1 (Kontrol uygulanmamış)

Şimdi, aşağıdaki problem ele alalım:

$$\begin{aligned} -\nabla^2 y - \omega^2 y &= 0 \quad x \in \Omega \\ y &= g(x), \quad x \in \Sigma_2, \\ y &= 0, \quad x \in \Sigma_1, \end{aligned} \quad (5.2)$$

$$\begin{aligned} -\Delta v &= \frac{1}{2} \beta y^2, \quad x \in \Omega, \\ v &= 0, \quad x \in \Sigma_1 \cup \Sigma_2. \end{aligned}$$

Bu model, kompleks mikrodalga sinyalinin Helmholtz denklemini kullanarak bir fırında modeller ve daha sonra mikrodalga sinyalinin kuvveti ile orantılı bir kaynak terimine sahip standart ısı denklemi yoluyla sıcaklık, fırındaki bir öğeye tepkisini oluşturur [3].



Şekil 5.1 Tanım kümesinin ayrıklaştırılması

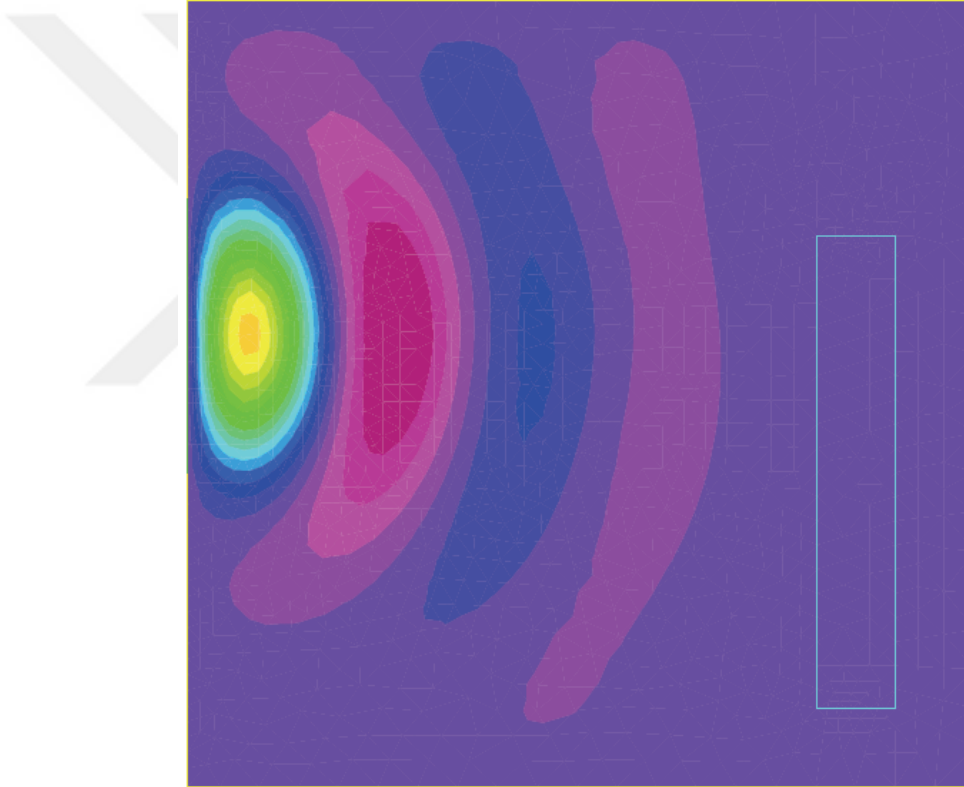
Dalganın üst duvarın bir kısmı tarafından yayıldığı dikdörtgensel bir firını düşünöyoruz. Tanım kümesinin sınırlarının bir kısmı  $\Sigma_1$  ve diğer kısmı  $\Sigma_2 = [c, d]$  dir.  $\beta = 1$  ve  $\omega^2$  için alınan değer kompleks olup ısınan cisim üzerinde  $2/(1-0.5i)$  diğer yerlerde  $1/(1-0.5i)$  alınıyor. Sınır fonksiyonu,

$$g(x) = \sin\pi\left(\frac{x_2 - c}{d - c}\right), \quad (5.3)$$

biçimindedir.

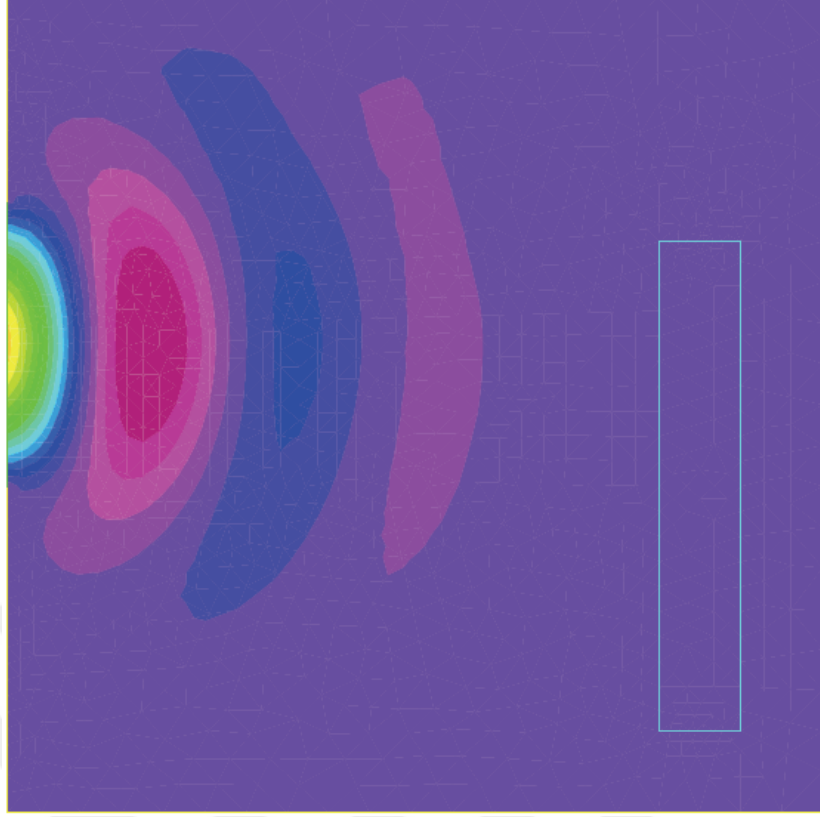
Şekil 5.1'de tanım kümesinin ayırık hale getirilmesi verilmiştir. Freefem ++ kodları ekte verilmektedir.

Şekil 5.2 ve 5.3'te, Helmholtz denkleminin çözümünü sunuyoruz. İlk şekil sanal kısım, ikincisi çözümün reel kısmıdır.

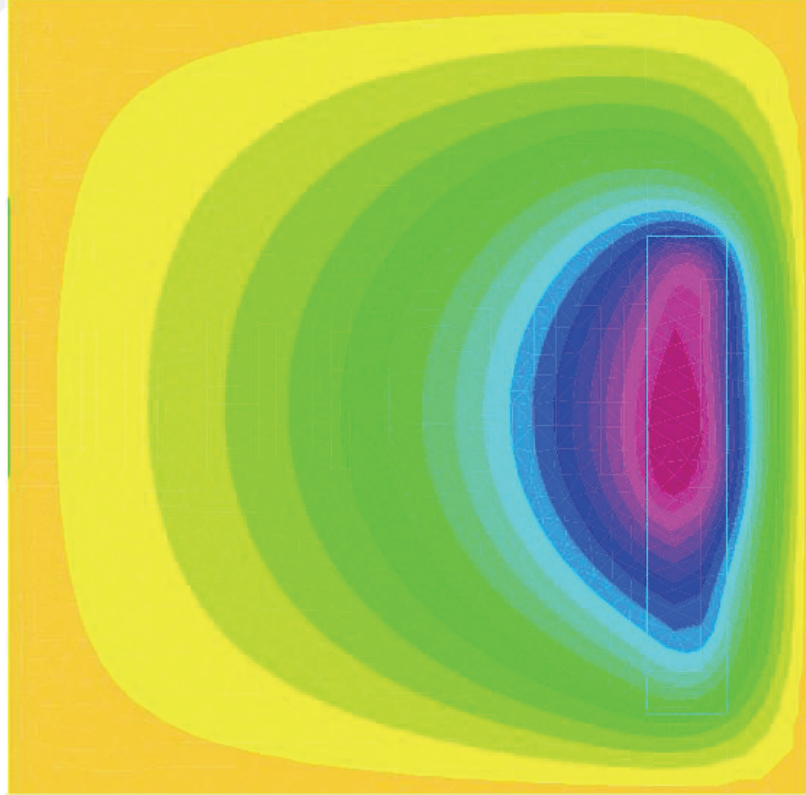


**Şekil 5.2** Dalga denkleminin çözümünün sanal kısmı





Şekil 5.3 Dalga denkleminin çözümünün reel kısmı

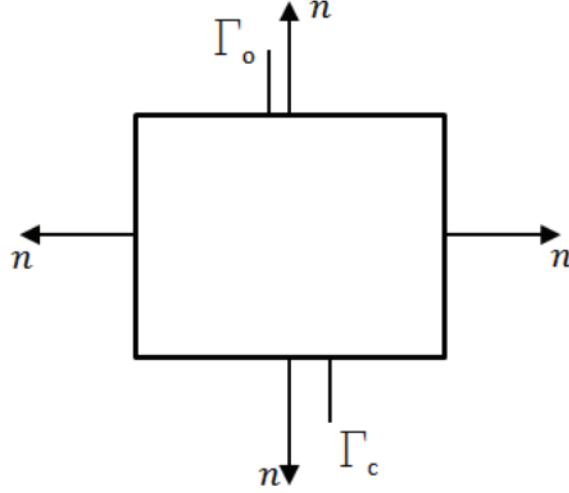


Şekil 5.4 Sıcaklık

Sıcaklık sonucu Sekil 5.4'te görülmektedir.

### Örnek 2 (Kontrol uygulanmış)

Bu örnekte, sınır optimal kontrol problemi Şekil 5.5'deki gibi düşünülmüştür.



Şekil 5.5 Dikdörtgenel bir alanda sınır kontrolü

Önce optimal kontrol problemini hatırlıyoruz:

$$\min_{(v,u)} J(v,u) = \frac{1}{2} \int_{\Omega} (v(x) - v_d(x))^2 dx + \frac{\alpha}{2} \int_{\Sigma_2} (u(x))^2 ds \quad (5.4)$$

$$-\nabla^2 y - \omega^2 y = 0, \quad x \in \Omega,$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial y}{\partial n} &= u(x), \quad x \in \Sigma_2, \\ y &= 0, \quad x \in \Sigma_1, \end{aligned} \quad (5.5)$$

$$\begin{aligned} -\Delta v &= \frac{1}{2} \beta y^2, \quad x \in \Omega, \\ v &= 0, \quad x \in \Sigma_1 \cup \Sigma_2, \end{aligned}$$

burada,  $y : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^d$  durum değişkenidir ve  $u$ , kontrol değişkenidir.  $\omega$ , harmonik salınımların frekansını belirtir. Burada  $\alpha > 0$  düzgünleştirme parametresi ve  $v_d$  istenen sıcaklıktır.

Optimalite koşulları



$$\begin{aligned} -\Delta w &= v(x) - v_d(x), \quad x \in \Omega, \\ w &= 0, \quad x \in \Sigma_1 \cup \Sigma_2, \end{aligned} \quad (5.6)$$

$$\begin{aligned} \nabla^2 p + \omega^2 p &= y p w, \quad x \in \Omega, \\ \frac{\partial p}{\partial n} &= 0, \quad x \in \Sigma_2, \\ p &= 0, \quad x \in \Sigma_1, \end{aligned}$$

ve

$$(Re(\nabla_u J + p), \bar{u} - u)_{\Sigma_2} \geq 0 \quad \forall \bar{u} \in U. \quad (5.7)$$

Ayrık kontrol problemi:

$$\min_{(v^h, u^h)} J(v^h, u^h) = \frac{1}{2} \|v^h - v_d\|_{\Omega}^2 + \frac{\alpha}{2} \|u^h\|_{\Sigma_2}^2 \quad (5.8)$$

$$\begin{aligned} -(\nabla y^h, \nabla q^h) + (\omega^2 y^h, q^h) &= 0 \quad \forall q^h \in Y^h, \\ (\nabla v^h, \nabla l) - \frac{1}{2} (\beta y^h y^h, l^h) &= 0 \quad \forall l^h \in V^h, \\ (\nabla w^h, \nabla m^h) + (v^h - v_d, m^h) &= 0 \quad \forall m^h \in V^h, \\ -(\nabla p^h, \nabla r^h) + (\beta y^h w^h, r^h) &= 0 \quad \forall r^h \in Y^h. \end{aligned} \quad (5.9)$$

Bu örnekte bir mikrodalga fırın modelini ele alacağız. Alanda istenen sıcaklığı elde etmek için bir kontrol parametresine sahibiz. Dalganın üst duvarın bir kısmı tarafından yayıldığı dikdörtgen bir fırını düşüneceğiz. Birinci örnekte olduğu gibi tanım kümesininin sınırının bir kısmı  $\Sigma_1$  ve diğer kısmı ise  $\Sigma_2 = [c, d]$  şeklindedir. Düzgünleştirme parametresini  $\alpha = 0.01$  seçiyoruz.  $\beta$  sayısı ısınan cisim üzerinde 1 diğer yerlerde 0 alınıyor.  $\omega^2$  için alınan değer kompleks olup ısınan cisim üzerinde  $2/(1-0.5i)$  diğer yerlerde  $1/(1-0.5i)$  alınıyor. Ayrıca, kontrol parametresinin başlangıç değerini aşağıdaki gibi seçeceğiz:

$$u(x) = \sin\pi\left(\frac{y-c}{d-c}\right). \quad (5.10)$$

Azalan gradyan algoritmasını kullanacağız. Bir doğru arama stratejisi olarak, Armijo'nun kuralı kullanılır. Azalan gradyan algoritmasında, iki ardışık yineleme

yeterince yakınsarsa durdurulur, yani  $\|u^h(n) - u^h(n-1)\|_{\Sigma_2}^2 \leq tol = 10^{-7}$  olursa iterasyon sonlanır.

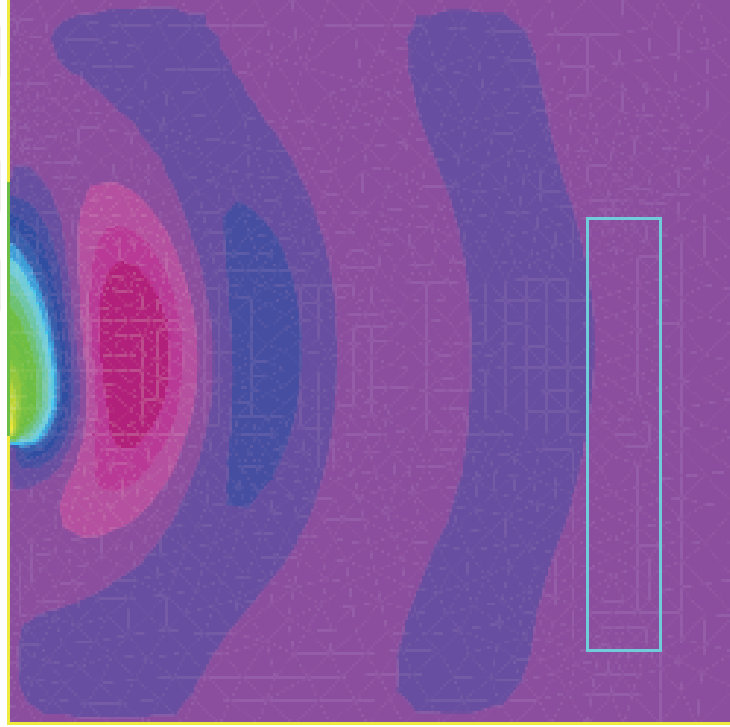
Şekil 5.6-5.9'da, durum değişkeninin sanal ve reel kısımları ile eş durum değişkeninin sanal ve reel kısımlarını sunulacaktır.

Bu örnekte, istenilen sıcaklığı

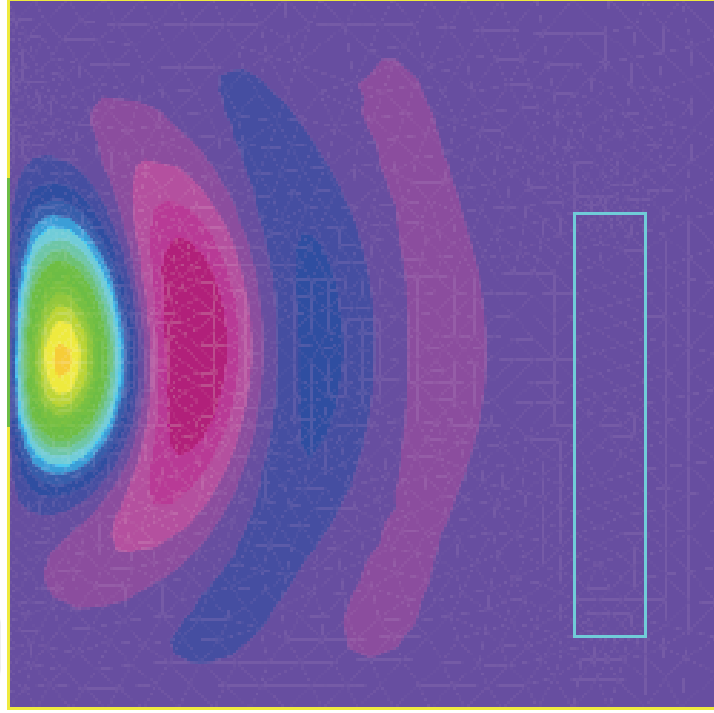
$$v_d(x) = \exp(x) \cdot \sin\pi\left(\frac{x_2 - c}{d - c}\right), \quad (5.11)$$

biçiminde seçeceğiz.

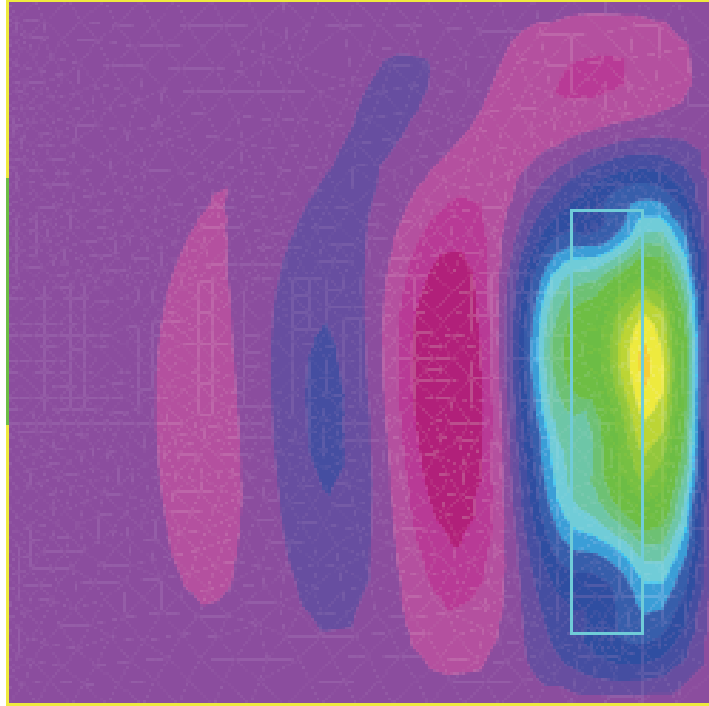
Şekil 5.10 ve 5.11'de sırasıyla eş durum değişkeninin sıcaklık ve arzulanan sıcaklık verilmiştir.



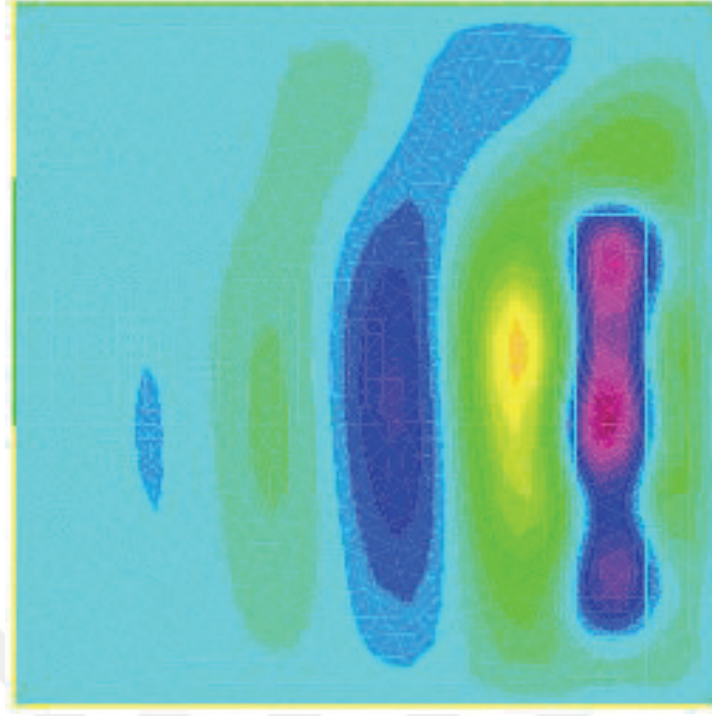
Şekil 5.6 Optimal durum değişkeninin reel kısmı



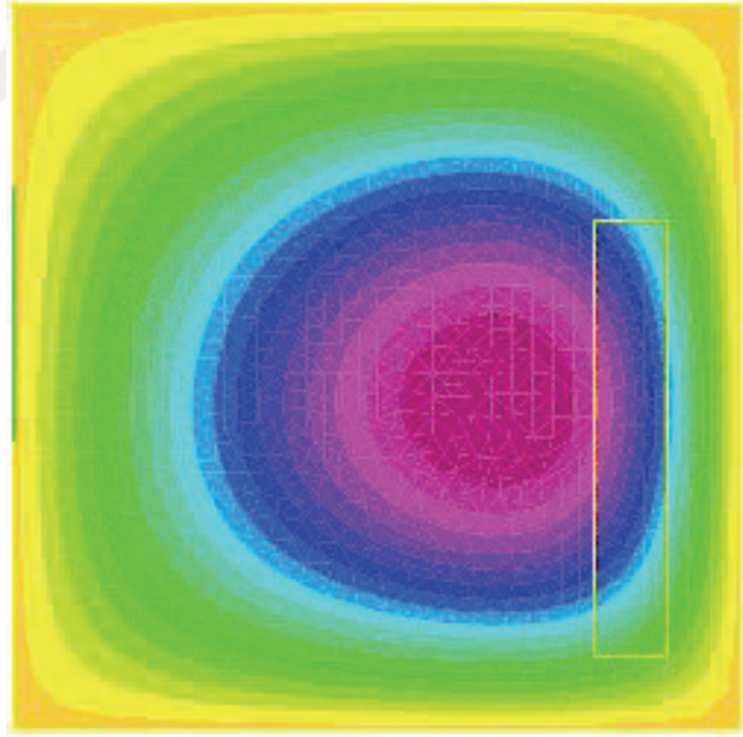
Şekil 5.7 Optimal durum değişkeninin sanal kısmı



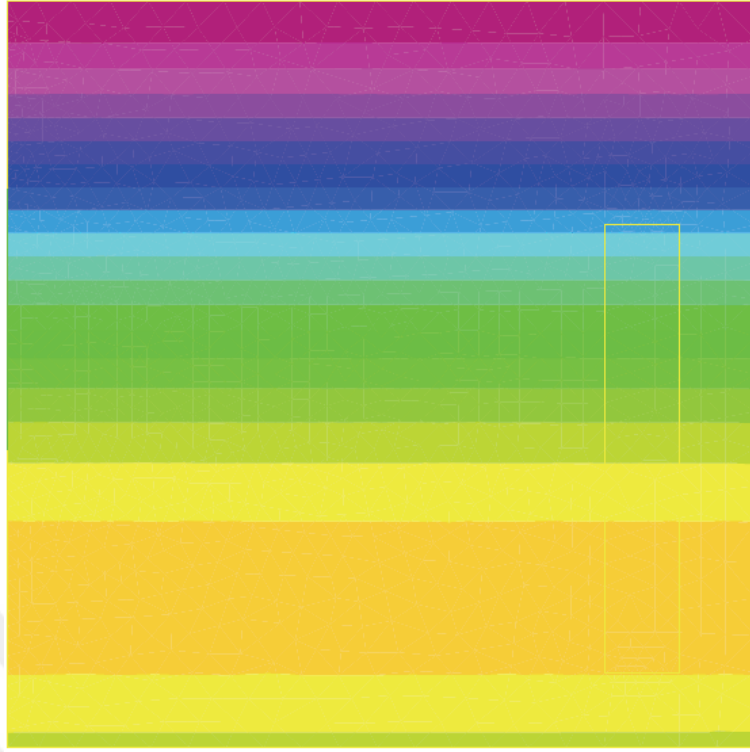
Şekil 5.8 Optimal eş değişkeninin reel kısmı



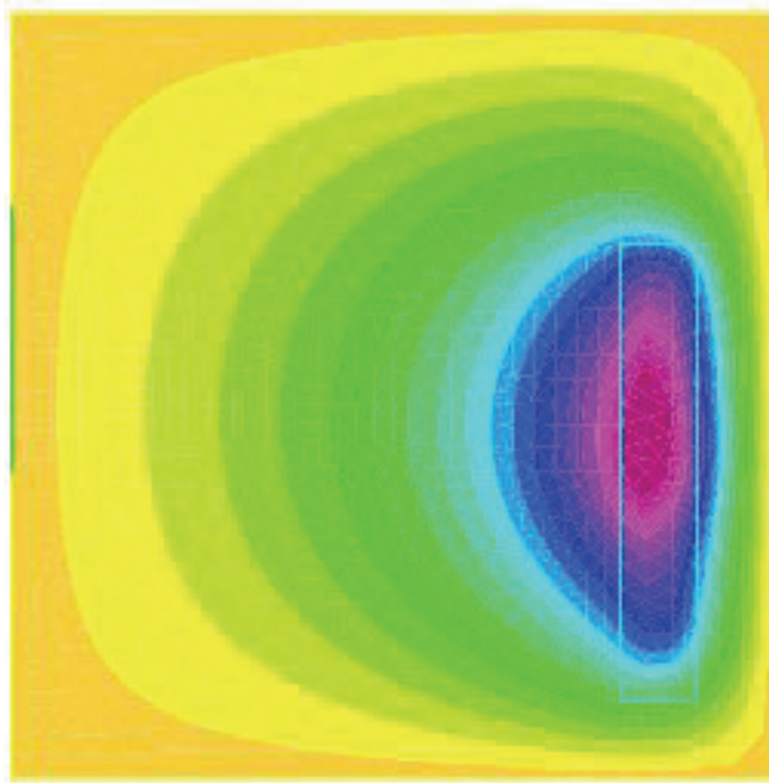
**Şekil 5.9** Optimal eş değişkeninin sanal kısmı



**Şekil 5.10** Eş denklem sıcaklığı



Şekil 5.11 İstenen sıcaklık



Şekil 5.10 Sıcaklık

## SONUÇ VE ÖNERİLER

Bu çalışmada, ısı denkleminin birleştirilmiş Helmholtz denkleminin optimal sınır kontrolü problemini formülize ettik. Önce Helmholtz denkleminin ilgili bazı ön bilgiler verildi. Helmholtz denkleminin sayısal uygulamaları ile ilgili bazı çalışmaları özetledik.

Helmholtz denkleminin optimal kontrol problemlerini ele aldık. Kontrol problemini formüle ettikten sonra asıl konu optimalite sistemini elde etmektir. Optimalite koşullarını elde etmek için iki yaklaşım vardır: *ayrıklaştırma-sonra-optimize etme* ve *optimize etme -sonra-ayrıklaştırma*. *Optimize etme -sonra-ayrıklaştırma* yöntemini kullandık. Lagrange fonksiyonu kullanarak optimalite koşullarını elde ettik.

Optimalite sistemi, durum ve eş durum denklemlerinden oluşur. Ayrıca, FEM'i ele aldık. Bir ve iki boyutlu problemler için FEM'i tartıştık. Sonra, ayrık sistem elde etmek için standart FEM uyguladık.

Daha sonra mikrodalga fırın hakkında bazı ayrıntılar verdik. Bu sistemin simülasyon prosedürünü tartıştık.

Optimal kontrol problemi için bir optimizasyon metodu kullanılmak zorunda olduğu için, bir azalan gradyan tipi bir algoritma kullanıyoruz. Bazı seçilmiş örneklerin sayısal sonuçlarını elde etmek için freefem ++ kullandık. Bu paket ayrık problemi çözmek için basitleştirilmiş yinelemeli bir algoritma sağlar. Buradaki zor iş, bir optimizasyon algoritması uygulamaktır. Sayısal algoritmanın durdurulmasında kabul edilebilir bir tolerans kullandık.

Son olarak, freefem ++ paketi kullanılarak elde edilen sayısal sonuçları vermiştik. İlk önce mikrodalga ısıtmayı optimal bir kontrol problemi olmaksızın düşünüyoruz. Sayısal sonuçları sunduktan sonra, bir ısı denkleminin birleştirilmiş Helmholtz denkleminin tabi bir kontrol problemi düşünüyoruz. Isı denkleminin denge sıcaklığında ele alınmıyor yani eliptik bir problem olarak çözülüyor. Amacımız mikrodalga ısıtma sisteminde ısı kontrolü yapmaktır. İstenilen bir ısı sıcaklığı olarak ilgili sayısal sonuçları sunduk.

Örneklerimizin sayısal kodlarını ek bölümde bulabilirsiniz.

Gelecekteki çalışmalara gelince, Helmholtz denkleminin kontrol problemleri için uyarlanabilir sonlu elemanlar yöntemi kullanacağız. Durum denklemi için, bazı doğrusal olmayan denklemler dşunlebilir.

Bir tanım küme ayrıştırma yöntemi, mikrodalga ısıtma probleminin optimal kontrolünü czme için kullanılabilir. Standart FEM'den elde edilen czmleri tanım küme ayrıştırma sonuçlarıyla karşılaştırabiliriz.



## KAYNAKÇA

1. F. Abergel and R. Temam, On some optimal control problems in fluid mechanics, *Theoret. Comput. Fluid Mech.* 1 (6) 303-325, 1990.
2. R.A. Adams, *Sobolev Spaces*, Academic Press, New York, 1975.
3. F. Hecht, New development in FreeFem++, *J. Numer. Math.* 20, no. 3-4, 251-265, 2012.
4. K.A. Kime, Boundary controllability of Maxwell's equations in a spherical region, *SIAM J. Control Optim.*, 28 294-319, 1990.
5. Lasiecka, R. Triggiani, Exact controllability of semilinear abstract systems with application to waves and plates boundary control problems, *Appl. Math. Optim.* 23, 109-154, 1991.
6. J.P. Raymond, H. Zidani, Hamiltonian Pontryagin's principles for control problems governed by semilinear parabolic equations, *Appl. Math. Optim.* 39, 143-177, 1999.
7. F. Tröltzsch, *Optimal Control of Partial Differential Equations, Theory, Methods and Applications*, in: *Graduate Studies in Mathematics*, vol. 112, AMS, Providence, Rhode Island, 2010.
8. N. Weck, Exact boundary controllability of a Maxwell's problem, *SIAM J. Control Optim.*, 38 736-750, 2000.
9. W. Wei, H. Ming Ying, J. Tang, An optimal control problem for microwave heating, *Nonlinear Analysis*, 03;75(4), 2024-2036, 2012.
10. H.M. Yin, Regularity of weak solution to Maxwell's equations and applications to microwave heating, *J. Differential Equations* 200, 137-161, 2004.
11. Bryson, A. E. (1996). "Optimal Control—1950 to 1985". *IEEE Control Systems* 16 (3): 26–33.
12. Ross, I. M. (2009). *A Primer on Pontryagin's Principle in Optimal Control*. Collegiate Publishers.



13. G. Knowles, Finite element approximation of parabolic time optimal control problems, *SIAM J. Control Optim.*, 20 (1982), pp. 414–427.
14. F. Tröltzsch, Semidiscrete finite element approximation of parabolic boundary control problems-convergence of switching points, in *Optimal Control of Partial Differential Equations II*, vol. 78 of *International Series of Numerical Mathematics*, Basel, 1987, Birkhäuser, pp. 219–232.
15. N. Arada and J.-P. Raymond, Dirichlet boundary control of semilinear parabolic equations. part 1: Problems with no state constraints, *Appl. Math. Optim.*, 45 (2002), pp. 125–143.
16. S. Brenner and L.R. Scott, *The Mathematical Theory of Finite Element Methods*, Springer-Verlag, New York, Berlin, Heidelberg, 1994.
17. P. Ciarlet and P. Raviart, Maximum principle and uniform convergence for the finite element method, *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.*, 2 (1973), pp. 17–31.
18. R. Falk, Approximation of a class of optimal control problems with order of convergence estimates, *J. of Math. Anal. & Appl.*, 44 (1973), pp. 28–47.
19. D. French and J. King, Approximation of an elliptic control problem by the finite element method, *Numer. Funct. Anal. Optim.*, 12 (1991), pp. 299–314.
20. G. Knowles, Finite element approximation of parabolic time optimal control problems, *SIAM J. Control Optim.*, 20 (1982), pp. 414–427.
21. I. Lasiecka, Boundary control of parabolic systems: finite-element approximations, *Appl. Math. Optim.*, 6 (1980), pp. 287–333.
22. W. Alt, On the approximation of infinite optimisation problems with an application to optimal control problems. *Appl. Math. Optim.*, (1984), pp:15-27.
23. F. S. Falk, Approximation of a class of optimal control problems with order of convergence estimates. *J. Math. Anal. Appl.*, 44, (1973), pp: 28-47.
24. D. A. French, J. T. King, Approximation of an elliptic control problem by the finite element method. *Numer.Funct.Anal.Appl.*, 12, (1991) pp: 299-315.
25. P. Neittaanmaki, D. Tiba and M. Dekker, *Optimal control of nonlinear parabolic systems, Theory, algorithms and applications*, New York (1994).

26. Inocencio E. Ortiz, Christian E. Schaerer, Helmholtz Scattering Problem: Control Theoretical Perspective, Poster.
27. D. Tiba, Optimal control of nonsmooth distributed parameter systems, Lecture Notes Math., 1459(1990), Springer-Verlag, Berlin.
28. J.P. Raymond, Optimal Control of Partial Differential Equations, Université Paul Sabatier.
29. Comsol Multiphysics, Microwave oven, SOLVED WITH COMSOL MULTIPHYSICS 3.3, [lipas.uwasa.fi/~mave/SAH104/microwave\\_oven.pdf](http://lipas.uwasa.fi/~mave/SAH104/microwave_oven.pdf).
30. Endre Süli, Lecture Notes on Finite Element Methods for Partial Differential Equations, Mathematical Institute University of Oxford.
31. Li Zhang, The Finite Difference Method for the Helmholtz Equation with Applications to Cloaking, Preprint, Missouri State University.
32. Joel Saà-Seoane, Simulation and Design Optimization for Linear Wave Phenomena on Metamaterials, Master Thesis, MASSACHUSETTS INSTITUTE OF TECHNOLOGY.
33. Courant, R. (1943). "Variational methods for the solution of problems of equilibrium and vibrations", *Bulletin of the American Mathematical Society*, **49**:1-23.
34. A. Ern, J.L. Guermond, *Theory and practice of finite elements*, Springer, 2004.
35. Lax, Peter D.; Milgram, Arthur N. (1954), "Parabolic equations", *Contributions to the theory of partial differential equations*, Annals of Mathematics Studies, **33**, Princeton, N. J.: Princeton University Press, pp. 167–190.
36. Ross, I. M. (2009). *A Primer on Pontryagin's Principle in Optimal Control*. Collegiate Publishers.
37. Kwakernaak, Huibert & Sivan, Raphael (1972). *Linear Optimal Control Systems. First Edition*. Wiley-Interscience.
38. Vapnyarskii, I.B. (2001), "Lagrange multipliers", in Hazewinkel, Michiel, *Encyclopedia of Mathematics*, Springer,

## EK

### *Mikrodalga ısıtma (Freefem kodu)*

```
real a=20, b=20, c=15, d=8, e=2, l=12, f=2, g=2;

border a0(t=0,1) {x=a*t; y=0;label=1;}

border a1(t=1,2) {x=a; y= b*(t-1);label=1;}

border a2(t=2,3) { x=a*(3-t);y=b;label=1;}

border a3(t=3,4){x=0;y=b-(b-c)*(t-3);label=1;}

border a4(t=4,5){x=0;y=c-(c-d)*(t-4);label=2;}

border a5(t=5,6){ x=0; y= d*(6-t);label=1;}

border b0(t=0,1) {x=a-f+e*(t-1);y=g; label=3;}

border b1(t=1,4) {x=a-f; y=g+l*(t-1)/3; label=3;}

border b2(t=4,5) {x=a-f-e*(t-4); y=l+g; label=3;}

border b3(t=5,8) {x=a-e-f; y= l+g-l*(t-5)/3; label=3;}

int n=2;

mesh Th = buildmesh(a0(10*n)+a1(10*n)+a2(10*n)+a3(10*n)
    +a4(10*n)+a5(10*n)+b0(5*n)+b1(10*n)+b2(5*n)+b3(10*n));

plot(Th,wait=1);

fespace Vh(Th,P1);

real meat = Th(a-f-e/2,g+l/2).region, air= Th(0.01,0.01).region;

Vh R=(region-air)/(meat-air);

Vh<complex> v,w;

solve muwave(v,w) = int2d(Th)(v*w*(1+R)
    -(dx(v)*dx(w)+dy(v)*dy(w))*(1-0.5i))
    + on(1,v=0) + on(2, v=sin(pi*(y-c)/(c-d)));

Vh vr=real(v), vi=imag(v);
```

```

plot(vr,wait=1,ps="rmuonde.ps", fill=true);
plot(vi,wait=1,ps="imuonde.ps", fill=true);
fespace Uh(Th,P1); Uh u,uu, ff=1e5*(vr^2 + vi^2)*R;
solve temperature(u,uu)= int2d(Th)(dx(u)* dx(uu)+ dy(u)* dy(uu))
- int2d(Th)(ff*uu) + on(1,2,u=0);
plot(u,wait=1,ps="tempmuonde.ps", fill=true);

```

### ***Optimal-kontrol(Freefem)***

```

real a=20, b=20, c=15, d=8, e=2, l=12, f=2, g=2;
border a0 (t=0,1) { x=a*t;    y=0.0;    label=1; }
border a1 (t=1,2) { x=a;     y=b*(t-1.0); label=1; }
border a2 (t=2,3) { x=a*(3.0-t); y=b;    label=1; }
border a3 (t=3,4) { x=0.0;   y=b-(b-c)*(t-3.0); label=1; }
border a4 (t=4,5) { x=0.0;   y=c-(c-d)*(t-4.0); label=2; }
border a5 (t=5,6) { x=0.0;   y=d*(6.0-t);    label=1; }
border b0 (t=0,1) { x=a-f+e*(t-1.0); y=g;    label=3; }
border b1 (t=1,4) { x=a-f;    y=g+l*(t-1.0)/3.0; label=3; }
border b2 (t=4,5) { x=a-f-e*(t-4.0); y=l+g;   label=3; }
border b3 (t=5,8) { x=a-e-f;   y= l+g-l*(t-5.0)/3.0; label=3; }
// Compute a mesh by filling in the line segments with a given number of
// points. The value of N controls how fine the lines are.
int n = 2;
mesh Th = buildmesh (
    a0 ( 10 * n ) + a1 ( 10 * n ) + a2 ( 10 * n ) + a3 ( 10 * n )
    + a4 ( 10 * n ) + a5 ( 10 * n )

```

```

+ b0 ( 5 * n ) + b1 ( 10 * n ) + b2 ( 5 * n ) + b3 ( 10 * n ) );

// Plot the mesh.

plot ( Th, ps = "microwave_mesh.eps", wait = 1 );

real xm = 17.0;

real ym = 8.0;

real meat = Th ( xm, ym ).region;

real xa = 0.01,num=Th.nbe;

real ya = 0.01;

real air = Th ( xa, ya ).region;

Vh R = ( region - air ) / ( meat - air ),u2d = 1,u=cos(pi*(y-c)/(c-d)),uold,unew;

Vh<complex> u1,lam1;

Vh<complex> v1,w1;

problem muwave ( u1, v1 ) =

    int2d(Th) ( u1 * v1 * ( 1.0 + R )

        - ( dx(u1)*dx(v1)+dy(u1)*dy(v1)) * ( 1.0 - 0.5i )

        +int1d(Th,2)(u*v1)

    + on ( 1, u1 = 0.0 )

    + on ( 2, u1 = 0.5 );

muwave;

Vh u1r = real ( u1 );

Vh u1i = imag ( u1 );

fespace Uh ( Th, P1 );

Uh u2,p2;

Uh v2,w2;

Uh ff = 100000.0 * ( u1r^2 + u1i^2 ) * R,ff2=100000.0 * sqrt( u1r^2 + u1i^2 ) * R;

```

```

problem temperature ( u2, v2 ) =
    int2d(Th) ( dx(u2)* dx(v2) + dy(u2)* dy(v2) )
- int2d(Th) ( ff * v2 )
+ on ( 1, u2 = 0.0 )
+ on ( 2, u2 = 0.0 );

temperature;

problem adjtemperature ( p2, w2 ) =
    int2d(Th) ( dx(p2)* dx(w2) + dy(p2)* dy(w2) )
    + int2d(Th) ( (u2-u2d) * w2 )
+ on ( 1, p2 = 0.0 )
+ on ( 2, p2 = 0.0 );

adjtemperature;

//plot ( p2, wait = 1, ps = "microwave_t.ps", fill = true );

problem adjmuwave ( lam1, w1 ) =
    int2d(Th) ( lam1 * w1 * ( 1.0 + R )
    - ( dx(lam1)*dx(w1)+dy(lam1)*dy(w1)) * ( 1.0 - 0.5i )
    + int2d(Th) ( 2*p2*u1*ff2* w1 )
+ on ( 1, lam1 = 0.0 );

adjmuwave;

//
// Define the real and imaginary parts of U1, so we can plot them,
// and so we can write a formula for the magnitude of the signal.
//

Vh lam1r = real ( lam1 );

```

```

Vh lam1i = imag ( lam1 );

//plot ( lam1r, wait = 1, ps = "microwave_r.ps", fill = true );
//plot ( lam1i, wait = 1, ps = "microwave_i.ps", fill = true );

real[int] dJ(u1[].n);

real[int] gradnew(u1[].n);

real[int] gradold(u1[].n);

    real J;

real mm=1,diff=1, eps=1.e-8, delta=0.01,Jold,Jnew,alp=0.1;
J= 0.5*int2d(Th)((u2-u2d)*(u2-u2d))+0.5*alp*int1d(Th,2)(u*u);
for(int i=1;i<num;i++)
{
mm=Th.be(i).whoinElement;

dJ(mm) = (lam1r[][mm])+(alp*u[][mm]);
}

uold[]=u[];

gradold=dJ;

//start optimization loop

while (diff>eps){

unew[]=uold[]-delta*gradold;

muwave;

temperature;

    adjtemperature;

adjmuwave;

J= 0.5*int2d(Th)((u2-u2d)*(u2-u2d))+0.5*alp*int1d(Th,2)(u*u);

for(int i=0;i<num;i++)

```

```

{
mm=Th.be(i).whoinElement;

dJ(mm) = (lam1r[][mm])+(alp*u[][mm]);

}

gradnew=dJ;

Jnew=J;

diff=sqrt(int2d(Th)((unew-uold)*(unew-uold)));

//diff=sqrt(int2d(Th)((uold-unew)^2));

if(Jnew>=Jold){
delta=0.5*delta;
}

else{
delta=1.5*delta;
}

gradold=gradnew;

Jold=Jnew;

uold[]=u[];

cout<< "Grad = " <<diff<< endl ;

}

plot (u1r, wait = 1, ps = "star.eps", fill = true );
plot ( u1i, wait = 1, ps = "stai.eps", fill = true );
plot ( lam1r, wait = 1, ps = "lamr.eps", fill = true );
plot ( lam1i, wait = 1, ps = "lami.eps", fill = true );
plot (u2, wait = 1, ps = "tempe.eps", fill = true );
plot (p2, wait = 1, ps = "adjtempe.eps", fill = true );

```



## ÖZGEÇMİŞ

**Adres** : Yeşilevler Mahallesi 929 cad. No: 3/15  
YENİMAHALLE/ ANKARA

**Cep Telefonu** : 0536 6808563

**E-Posta** : aydinyilmaz76@gmail.com

**Eğitim Durumu** :Yüksek Lisans (öğrenci) **Doğum Tarihi** :17.05.1976

**Medeni Durum** : Evli **Doğum Yeri** : Aydın

**Toplam Tecrübe** : 14 yıl **Ehliyet** : B (1999)

**Çalışma Durumu** : Çalışıyor **Uyruk** : T. C.

**Yüksek Lisans** **Türk Hava Kurumu Üniversitesi**  
Fen Bilimleri Enstitüsü, Elektrik Elektronik Mühendisliği  
(Tez aşaması)

**Üniversite** **Near East University - (Örgün Öğretim)** 2004  
Mühendislik Fakültesi, Elektrik Elektronik Mühendisliği -  
*İngilizce*

**Lise** **Ziya Kalkavan Anadolu Denizcilik Meslek Lisesi** 1994  
Gemi Elektroniği Ve Haberleşme Bölümü

**Yabancı Dil** İngilizce

**İş Deneyimleri** **Çayırhan Termik Santrali / İşletme Mühendisi / 2004**  
**Ankara Metrosu / Elektronik Sistemler Şefi / 2004**  
Devam ediyor

**Akademik Çalışmalar** Numerical solutions of optimal control problems for  
microwave heating, International Journal of Advances in Science Engineering and  
Technology, ISSN: 2321-9009 Volume- 4, Issue-3, Jul.-2016.

# NUMERICAL SOLUTIONS OF OPTIMAL CONTROL PROBLEMS FOR MICROWAVE HEATING

<sup>1</sup>AYDIN YILMAZ, <sup>2</sup>IBRAHIM MAHARIQ, <sup>3</sup>FIKRIYE YILMAZ

<sup>1,2</sup> University of Turkish Aeronautical Association, Department of Electrical and Electronics Engineering, Turkey

<sup>3</sup> Gazi University Department of Mathematics, Turkey

Email: [1aydinyilmaz76@gmail.com](mailto:aydinyilmaz76@gmail.com), [2imahariq@thk.edu.tr](mailto:imahariq@thk.edu.tr), [3yfikriye@gmail.com](mailto:yfikriye@gmail.com)

---

**Abstract:** In this work, we study numerical solutions of optimal control problem for a microwave heating. Microwave heating problem is modeled by Helmholtz equation coupled with a heat equation. At first, the necessary optimality conditions are obtained. Finite element method is used to discretize the state and the adjoint state equations. It is the first time that optimal control for the microwave heating is solved numerically. Numerical application is presented.

**Keywords:** Optimal Control, Helmholtz Equation, Finite Element, Microwave Heating.

---

## 1. INTRODUCTION

Optimal control problems have been an interest in recent decades. There are several applications in physics, finance and engineering science. One of the applications from electromagnetics is the optimal control of microwave heating. Uniform distribution of the heat produced by microwaves has been challenging recently. In [9], a suitable applied electric field was selected and they formulated an optimal control problem governed by Maxwell's equations coupled with nonlinear heat conduction with a source generated by microwaves.

In this paper, the numerical solution of the optimal control problem of microwave heating is studied. As for constraint equations, we consider the Helmholtz equation coupled with a heat equation at equilibrium. We control the applied field to get a desired temperature. Here, the function based approach *optimize-then-discretize* is followed to get the optimality conditions. Our aim is solve the modeled problem numerically. So that, we use finite element approach for space discretization. Freefem++ is used to get the numerical results [3].

The organization of the paper is as follows: Firstly, optimal control problem is formulated. Then, the first order optimality conditions are obtained by Lagrange method. The finite element method is used for the discretization of the optimal control problem. Finally, we conclude our study with a numerical example..

## 2. PROBLEM FORMULATION

We define  $\Omega$  be a bounded polygonal domain in  $\mathbb{R}^d$  with  $d = 2,3$  and its Lipschitz boundary be  $\Sigma_1 \cup \Sigma_2 = \partial\Omega$ . We consider the following optimal control problem:

$$\begin{aligned} \min_{(v,u)} J(v,u) &= \frac{1}{2} \int_{\Omega} (v(x) - v_d(x))^2 dx + \frac{\alpha}{2} \int_{\Sigma_2} (u(x))^2 ds & (1) \\ \text{subject to } -\nabla^2 y - \omega^2 y &= 0 \text{ in } \Omega, \\ &\frac{\partial y}{\partial n} = u(x) \text{ on } \Sigma_2, \\ &y = 0 \text{ on } \Sigma_1, \\ &y = g(x) \text{ on } \Sigma_2, & (2) \\ -\Delta v &= \frac{1}{2} \beta v^2 \text{ in } \Omega, \\ v &= 0 \text{ on } \Sigma_1 \cup \Sigma_2, \end{aligned}$$

where the function  $g(x)$  is given,  $y : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^d$  is the state variable and  $u$  is the control variable.  $\omega$  denotes the frequency of the harmonic oscillations. Here,  $\alpha > 0$  stands for the regularization parameter and  $v_d$  is the desired temperature.

We use the standard notations for Sobolev and Lebesgue spaces, their norms and inner products. We let be  $Y = H^1(\Omega)$ ,  $Y = H_0^1(\Omega)$ , and the control space  $U = L^2(\Omega)$ .

## 3. OPTIMALITY CONDITIONS

In this section, we will state the optimality conditions of the control problem of Helmholtz equation coupled with a heat equation. We use Lagrange approach. We have the following optimality conditions:

$$\begin{aligned} -\Delta w &= v(x) - v_d(x) \text{ in } \Omega, \\ w &= 0 \text{ on } \Sigma_1 \cup \Sigma_2, \\ \nabla^2 p + \omega^2 p &= y p w \text{ in } \Omega, \\ \frac{\partial p}{\partial n} &= 0 \text{ on } \Sigma_2, \\ p &= 0 \text{ on } \Sigma_1, \end{aligned}$$

and

$$(Re(\alpha u + p), \bar{u} - u)_{\Sigma_2} \geq 0 \quad \forall \bar{u} \in U.$$

#### 4. FINITE ELEMENT DISCRETIZATION

In order to state the finite element discretization of the problem, we let  $Y^h \subseteq Y$ ,  $V^h \subseteq V$  and  $U^h \subseteq U$  be the finite element spaces. Find  $y^h \in Y^h$ ,  $v^h \in V^h$  and  $u^h \in U^h$  such that

$$\min_{(v^h, u^h)} J(v^h, u^h) = \frac{1}{2} \|v^h - v_d\|_{\Omega}^2 + \frac{\alpha}{2} \|u^h\|_{\Sigma_2}^2$$

subject to

$$\begin{aligned} -(\nabla y^h, \nabla q^h) + (\omega y^h, q^h) &= 0 \quad \forall q^h \in Y^h, \\ (\nabla v^h, \nabla l) - \frac{1}{2} (\beta y^h y^h, q^h) &= 0 \quad \forall l^h \in V^h, \\ (\nabla w^h, \nabla m^h) + (v^h - v_d, m^h) &= 0 \quad \forall m^h \in V^h, \\ -(\nabla p^h, \nabla r^h) + (\beta y^h w^h, r^h) &= 0 \quad \forall r^h \in Y^h. \end{aligned}$$

#### 5. IMPLEMENTATION AND NUMERICAL EXAMPLE

In this section, we will carry out some numerical experiments.

We use nonlinear conjugate gradient method to solve the optimization problem. All computations are carried out with public license finite element software package Freefem++ [3].

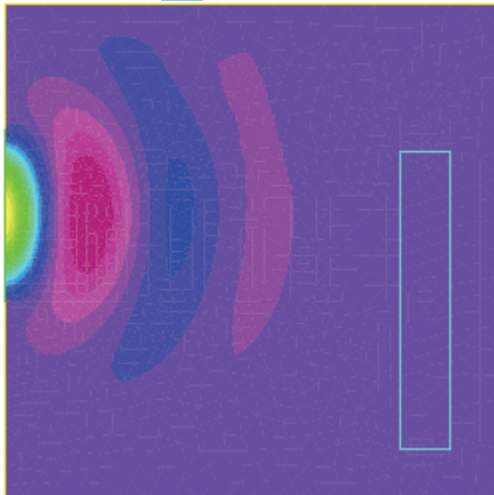
We choose a tolerance as  $\varepsilon = 10^{-5}$  for the Newton linearization. As a line search strategy, Armijo's rule is used. The gradient descent algorithm is stopped if two successive iterates are close enough, that is  $\|u^h(n) - u^h(n-1)\|_{\Sigma_2}^2 \leq tol = 10^{-7}$ .

##### Example

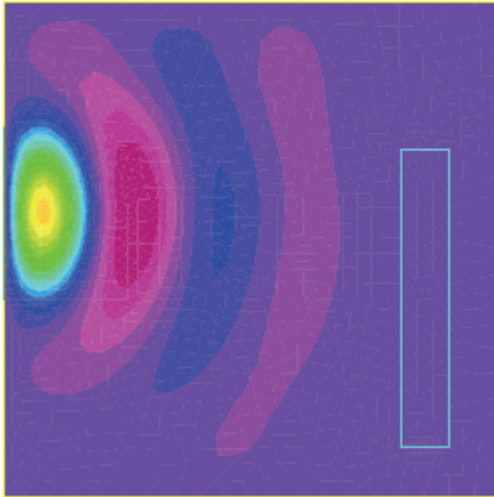
In this example, we consider a model of a microwave cooker. We have a control parameter to obtain a desired temperature in the domain. We consider a rectangular oven where the wave is emitted by part of the upper wall. Boundary of the domain is made up a part of  $\Sigma_1$  and and the other part is  $\Sigma_2 = [c, d]$  [3]. We choose the regularization parameter  $\alpha = 0.01$ . Boundary function is given by

$$g(x) = \sin\pi\left(\frac{y-c}{d-c}\right).$$

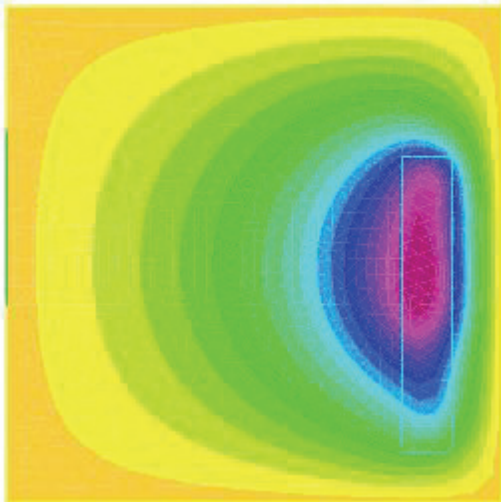
In the following figures, we present the state, the adjoint state, the temperature and the adjoint counterpart of the temperature are presented.



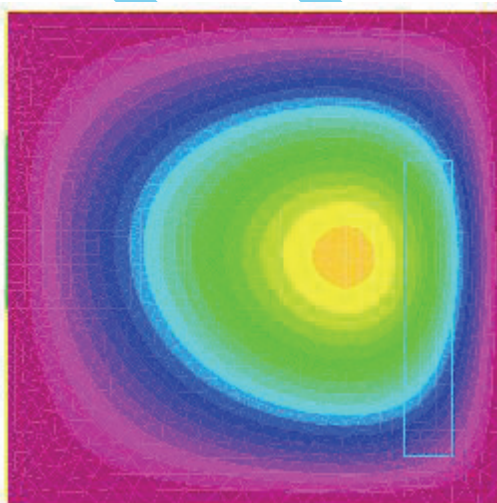
**Fig1.** Real part of the state



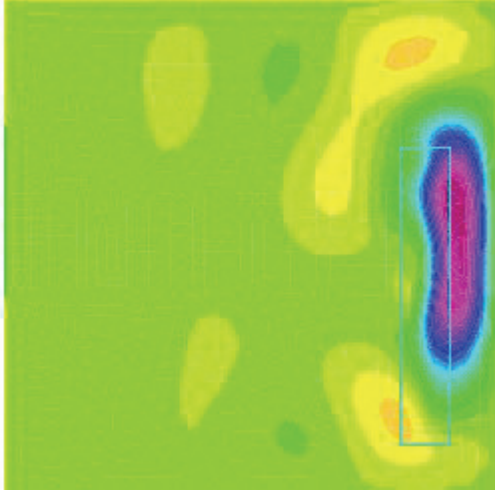
**Fig2.** Imaginary part of the state



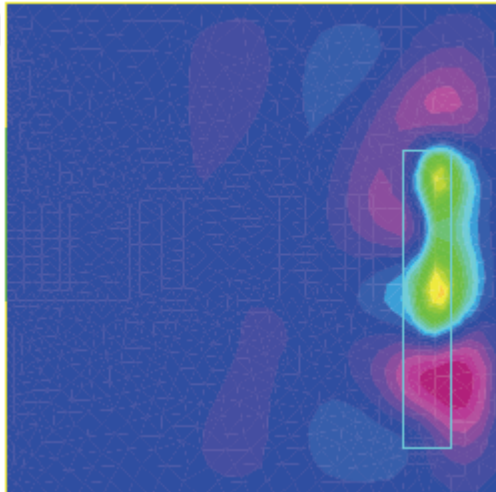
**Fig3.** Temperature



**Fig4.** Adjoint counterpart of the temperature



**Fig5.** Real part of the adjoint state



**Fig6.** Imaginary part of the adjoint state

## CONCLUSION AND OUTLOOK

In this work, we have formulated an optimal boundary control of the microwave heating. We have obtained the optimality conditions by using the Lagrangian function. We have given the numerical results obtained by using freefem++ package.

As a future work, we shall consider error analysis for the control problems of the Helmholtz equation. Also, domain decomposition method can be used to solve optimal control of the microwave heating problem.

## REFERENCES

1. F. Abergel and R. Temam, On some optimal control problems in fluid mechanics, Theoret. Comput. Fluid Mech. 1 (6) 303-325, 1990.
2. R.A. Adams, Sobolev Spaces, Academic Press, New York, 1975.
3. F. Hecht, New development in FreeFem++, J. Numer. Math. 20, no. 3-4, 251-265, 2012.
4. K.A. Kime, Boundary controllability of Maxwell's equations in a spherical region, SIAM J. Control Optim., 28 294-319, 1990.

5. Lasiecka, R. Triggiani, Exact controllability of semilinear abstract systems with application to waves and plates boundary control problems, *Appl. Math. Optim.* 23, 109-154, 1991.
6. J.P. Raymond, H. Zidani, Hamiltonian Pontryagin's principles for control problems governed by semilinear parabolic equations, *Appl. Math. Optim.* 39, 143-177, 1999.
7. F. Tröltzsch, *Optimal Control of Partial Differential Equations, Theory, Methods and Applications*, in: Graduate Studies in Mathematics, vol. 112, AMS, Providence, Rhode Island, 2010.
8. N. Weck, Exact boundary controllability of a Maxwell's problem, *SIAM J. Control Optim.*, 38 736-750, 2000.
9. W. Wei, H. Ming Ying, J. Tang, An optimal control problem for microwave heating, *Nonlinear Analysis*, 03;75(4), 2024-2036, 2012.
10. H.M. Yin, Regularity of weak solution to Maxwell's equations and applications to microwave heating, *J. Differential Equations* 200, 137-161, 2004.

