ÇUKUROVA ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Habibe TOKER

NONSİNGÜLER KOMPLEKS CEBİRSEL EĞRİLER İÇİN DERECE-CİNS SAYISI (GENUS) FORMÜLÜ

MATEMATİK ANABİLİM DALI

ADANA-2017

ÇUKUROVA ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

NONSİNGÜLER KOMPLEKS CEBİRSEL EĞRİLER İÇİN DERECE-CİNS SAYISI (GENUS) FORMÜLÜ

Habibe TOKER

YÜKSEK LİSANS TEZİ

MATEMATİK ANABİLİM DALI

Bu tez 24/08/2017 tarihinde aşağıdaki jüri üyeleri tarafından oybirliği/oyçokluğu ile kabul edilmiştir.

……………………….	……………………….....	……………………….
Prof. Dr. Doğan DÖNMEZ	Prof. Dr. Ali A. ÖZKURT	Doç. Dr. Erol YAŞAR
DANIŞMAN	ÜYE	ÜYE

Bu tez Enstitümüz Matematik Anabilim Dalında hazırlanmıştır.
Kod No:

Prof. Dr. Mustafa GÖK
Enstitü Müdürü

ÖZ

YÜKSEK LİSANS TEZİ

NONSİNGÜLER KOMPLEKS CEBİRSEL EĞRİLER İÇİN DERECE-CİNS SAYISI (GENUS) FORMÜLÜ

Habibe TOKER

ÇUKUROVA ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
MATEMATİK ANABİLİM DALI

Danışman : Prof. Dr. Doğan DÖNMEZ
Yıl: 2017, Sayfa: 43
Jüri : Prof. Dr. Doğan DÖNMEZ
: Prof. Dr. Ali A. ÖZKURT
: Doç. Dr. Erol YAŞAR

p, sıfırdan farklı, üç değişkenli homojen bir polinom olmak üzere $C = V(p) \subset \mathbb{P}^2(\mathbb{C})$ nonsingüler projektif eğrisi kompakt, bağlantılı, yönlendirilebilir, 2-boyutlu manifolddur. Bu manifoldlar, küreye g tane kulp eklenerek elde edilir. Bu sayıya cins sayısı(genus) denir. Bu tarz manifoldları sınıflandırmanın yolu onların cins sayılarına bakmaktır. Aynı cins sayısına sahip manifoldlar homeomorfiktir.

Sadece p nin derecesine bakarak C eğrisinin cins sayısını hesaplamak cins formülü kullanılarak mümkündür. $\deg p = n$ ise, cins sayısı g,

$$g = \frac{1}{2}(n-1)(n-2)$$

formülü ile kolay bir şekilde bulunabilmektedir. Bu çalışmada, belirtilen cins formülü ispatlanmıştır.

Anahtar Kelimeler: Nonsingüler projektif eğriler, Hessian, Boyut, Kesişim katlılığı, Cins sayısı

ABSTRACT

MASTER THESIS

THE DEGREE-GENUS FORMULA FOR NONSINGULAR COMPLEX ALGEBRAIC CURVES

Habibe TOKER

ÇUKUROVA UNIVERSITY
INSTITUTE OF NATURAL AND APPLIED SCIENCES
DEPARTMENT OF MATHEMATICS

Supervisor	: Prof. Dr. Doğan DÖNMEZ
	Year: 2017, Pages: 43
Jury	: Prof. Dr. Doğan DÖNMEZ
	: Prof. Dr. Ali A. ÖZKURT
	: Assoc. Prof. Dr. Erol YAŞAR

Any nonsingular projective curve $C = V(p) \subset \mathbb{P}^2(\mathbb{C})$ (p, a nonzero homogeneous polynomial in three variables) is compact connected orientable 2-manifold. These manifolds can be obtained from spheres by adding p handles. This number is called the genus of the manifold. These manifolds are classified by their genus. Two manifolds with the same genus are homeomorphic.

Just looking at the degree of $p,$ it is possible to calculate the genus of the curve C and thus to classify the curve. If $\deg p = n$, the number of genus can easily be found by the genus formula

$$g = \frac{1}{2}(n-1)(n-2)$$

In the study, the degree-genus formula has been proved.

Key words: Nonsingular projective curves, Hessian, Dimension, Intersection multiplicity, Genus

GENİŞLETİLMİŞ ÖZET

Bu tez 5 bölümden oluşmaktadır. Çalışmanın ilk bölümünde, ilerleyen bölümlerde kullanılacak olan bazı kavramlar genel veya özel durumlar için tanımlandı. Afin cebirsel varyete ve ona karşılık gelen ideal tanımlanıp bunlarla ilgili bazı önemli bilgilere ve Hilbert Nullstellansatz teoremine yer verildi. Ardından projektif uzay tanımı yapıldı ve afin uzay ile arasındaki ilişki özetlendi. Daha sonra kompleks projektif düzlem ve ona ait bazı özellikler yer aldı. Ardından polinomlar ile ilgili önemli bir kavram olan homojen polinom tanımı yapıldı. Afin ve projektif uzay üzerinde tanımlanan topolojiler ve aralarındaki ilişkiye de yine bu bölümde yer verildi. Bölümün ilerleyen kısımlarında projektif varyete, indirgenemez küme tanımları yapıldı ve ardından bir varyeteye ait boyut tanımının ilki yapıldı. Kompleks düzlem eğrisi, polinomun homojenleştirilmesi ve düzgün eğri tanımlarının ardından da son olarak $\mathbb{C}^2$ nin 2 boyutlu olduğu ispatlandı.

2. bölüme tezde kullanılan en önemli teoremlerden biri olan Kapalı Kompleks Analitik Fonksiyon Teoremi ile başlandı. Devamında bir varyetenin boyutunun 1. bölümde verilen tanımına eşdeğer farklı tanımları yapıldı. Ayrıca hiperyüzey kavramı tanımlandı ve hiperyüzey ile varyetenin boyutu ile ilgili bir teorem ispatıyla birlikte yer aldı. Ardından bir polinomun bir doğru boyunca mertebesi ve kesişim katlılığı tanımlandı. Bölüm 2 de ayrıca projektif düzlem eğrileri için Bezout teoremine yer verildi.

Bölüm 3 ün girişinde; resultant tanımı, diskriminant noktaları tanımı yapıldı ve bunlarla ilişkili iki iddia ispatlandı. Daha sonra 2 boyutlu, kompleks manifoldlarda üçgenlemenin tanımı yapıldı ve üçgenlerin inceltmesi ile ilgili önemli bir teorem ifade edildi. Ardından yine çalışmada önemli bir yere sahip olan örtü ve neredeyse örtü kavramları tanımlandı ve özel bir forma sahip olan bir polinomun varyetesinin küre üzerinde neredeyse $n-$ katlı örtü olduğu ispatlandı. Ayrıca polidisk tanımına yer verildi.

4. bölümde ilk olarak Euler Formülü verildi, ardından Hessian matris tanımı yapıldı ve bununla ilgili önemli bir iddia ispatlandı. Bu bölümde verilen ikinci tanım ise homojen, indirgenemez f polinomu için teğet ve büküm noktası tanımlarıdır. Ardından bu tanımlarla ilgili üç ayrı sonuç ve onların ispatları yer almaktadır. Daha sonra bilineer formlar için dejenere tanımı yapılıp dejenere form ile matrisin determinantı ve büküm noktası ile hessian determinantı arasındaki ilişkiyi veren iki ayrı teoreme ve ispatlarına yer verildi. Bölüm sonunda ise; derecesi en az 2 olan indirgenemez, homojen bir F polinomunun, Hessian determinantını bölmediği ispatlandı.

Son bölümde ise, girişte 2 boyutlu, yönlendirilebilir, kompakt yüzeylerin kulp sayıları kullanılarak Euler karakteristiklerinin nasıl bulunduğu gösterildi. Ardından bazı koşullarda indirgenemez bir polinomun özel bir formda yazılabildiği ispatlandı. Ardından (bazı ekstra koşulları da sağlayan) eğriyi X ekseninin kapanışı üzerinde $n-$ katlı örtü yapacak şekilde bir koordinat sisteminin varlığı gösterildi. Son olarak nonsingüler projektif eğriler için derece cins formülü ifade edilip önceki bölümlerdeki sonuçlar kullanılarak ispatlandı.

TEŞEKKÜR

Dikkat ve itinasıyla fazlasıyla mesai harcayarak yetişmemde ve iyi bir çalışma ortaya koymamda çok emeği olan hocam Prof. Dr. Doğan DÖNMEZ' e,

Manevi desteklerini esirgemeyen Yard. Doç Dr. Ela AYDIN' a, araştırma görevlisi Ayşe ÇOBANKAYA' ya, onların nezdinde tüm Ç.Ü Matematik Bölümü akademik ve idari personeline teşekkür ederim.

Motivasyonumu yitirdiğim zamanlarda motive olmamda en çok etkili olan annem Sultan TOKER' e, babama, ablama ve onun çekirdek ailesine verdikleri her türlü destekten, gösterdikleri sabır ve anlayıştan dolayı teşekkürlerimi sunarım.

İÇİNDEKİLER **SAYFA**

1. TEMEL TANIMLAR VE SONUÇLAR

k bir cisim ve $R = k[X_1, \ldots, X_n]$ onun polinom halkası olmak üzere, k üzerindeki n boyutlu afin uzay $\mathbb{A}^n(k)$ veya kısaca $\mathbb{A}^n$ ile gösterilir ve $\mathbb{A}^n(k) = \{(x_1, \ldots, x_n) \mid x_i \in k\}$ olarak tanımlanır. $S \subset R$ olmak üzere S nin sıfır kümesi

$$V(S) = \{P \in \mathbb{A}^n(k) \mid f(P) = 0 \text{ her } f \in S \text{ için}\}$$

şeklindedir. $k[X_1, \ldots, X_n]$ deki polinomların sıfır kümeleri; cebirsel küme, afin cebirsel varyete veya kısaca cebirsel varyete olarak adlandırılır. X, $\mathbb{A}^n$ nin bir altkümesi olmak üzere X e karşılık gelen

$$I(X) := \{f \in R \mid f(P) = 0 \text{ her } P \in X \text{ için}\}$$

şeklinde tanımlanan küme bir idealdir. Bu ideal kısaca X in ideali olarak belirtilecektir.

Şu ana kadar verilen tanımlarla ilgili bilinmesi gereken birkaç bilgi şu şekilde sıralanabilir:

İlk olarak,

$$\begin{aligned} \{R \text{ deki idealler}\} &\longrightarrow \{\mathbb{A}^n(k) \text{ daki cebirsel kümeler}\} \\ I &\longmapsto V(I) \end{aligned}$$

gönderimiyle, idealler ile cebirsel kümeler arasında bir eşleme tanımlanabilir. Burada, $I \subset J$ ise $V(J) \subset V(I)$ olur.

İkinci olarak, V herhangi bir cebirsel küme olmak üzere, $V(I(V)) = V$ dir.

Son olarak ise, I, R de bir ideal ve $\text{rad } I = \sqrt{I} = \{f \in R \mid f^m \in I \text{ olacak şekilde bir } m \in \mathbb{N} \text{ vardır}\}$ olmak üzere $I(V) = \text{rad } I(V)$ dir.

Teorem 1.1 (Hilbert Nullstellensatz) k cebirsel kapalı bir cisim olmak üzere, her $J \subset k[X_1, X_2, \ldots, X_n]$ ideali için $I(V(J)) = radJ$ dir.

Tanım 1.2 k bir cisim ve V, k üzerinde sonlu boyutlu vektör uzayı olsun. $V - \{0\}$ üzerinde $\sim$ denklik bağıntısı

$$u \sim v \Longleftrightarrow u = \lambda v \text{ olacak şekilde } \lambda \in k - \{0\} \text{ varsa}$$

şeklinde tanımlanmak üzere V ye bağlı projektif uzay $\mathbb{P}(V) := \dfrac{V - \{0\}}{\sim}$ olarak tanımlanır. $V = \mathbb{C}^{n+1}$ ise $\mathbb{P}(V)$ yerine kısaca $\mathbb{P}^n$ yazacağız.

Projektif uzay ve afin uzay arasındaki ilişki şöyle özetlenebilir; $\mathbb{P}^n$ üzerinde tanımlanan

$$\begin{aligned} \pi : \ \mathbb{C}^{n+1} \backslash \{0\} &\longrightarrow \mathbb{P}^n \\ (X_0, \ldots, X_n) &\longmapsto [X_0 : \ldots : X_n] \end{aligned}$$

örten dönüşümü ile topolojik bir uzay haline getirilir. $\mathbb{P}^n$ üzerindeki topoloji $\mathbb{C}^{n+1} \backslash \{0\}$ nin standard topolojisinden indirgenmiş bölüm topolojisidir. $A \subset \mathbb{P}^n$ nin $\mathbb{P}^n$ de açık küme olması için gerek yeter koşul $\pi^{-1}(A)$ nın $\mathbb{C}^{n+1} \backslash \{0\}$ de açık olmasıdır.

$U_0, \ldots, U_n \subset \mathbb{P}^n$ olmak üzere $U_i = \{[X_0 : \ldots : X_n] \in \mathbb{P}^n \mid X_i \neq 0\}$ şeklinde tanımlanır. $X_i \neq 0$ homojen koordinatların seçiminden bağımsızdır.
$\pi^{-1}(U_i) = \left\{(X_0, \ldots, X_n) \in \mathbb{C}^{n+1} \ : \ X_i \neq 0\right\}$ kümesi $\mathbb{C}^{n+1} - \{0\}$ ın açık bir kümesi olup bölüm topolojisi tanımından U_i kümesi de $\mathbb{P}^n$ nin açık kümesidir. Bu kümelere $\mathbb{P}^n$ nin standard açık kümeleri denir.

$$\begin{aligned} \phi_i : \ U_i &\longrightarrow \mathbb{C}^n \\ [X_0 : \ldots : X_n] &\longmapsto \left(\frac{X_1}{X_i}, \ldots, \frac{X_{i-1}}{X_i}, \frac{X_{i+1}}{X_i}, \ldots, \frac{X_n}{X_i}\right) \end{aligned}$$

dönüşümü iyi tanımlı bir dönüşüm olup tersi $(Y_1,\ldots,Y_n) \longmapsto [Y_1 : \ldots : 1 : \ldots : Y_n]$ dönüşümüdür.

Afin düzleme sonsuzdaki noktalar eklenerek projektif düzlem elde edilir.

Tanım 1.3 (Kompleks Projektif Düzlem) Kompleks projektif düzlem $\mathbb{P}^2(\mathbb{C})$ ile gösterilir. Çalışmanın ilerleyen kısımlarında kısaca $\mathbb{P}^2$ ile gösterilecektir.

$$\mathbb{P}^2 = \frac{\mathbb{C}^3 \setminus \{0\}}{\sim} = \{\, [x:y:z] \,|\, x,y,z \in \mathbb{C}\}$$

olarak tanımlanır. $(x,y,z) \in [x:y:z]$ ise her $\lambda \in \mathbb{C}\setminus\{0\}$ için $(\lambda x, \lambda y, \lambda z) \in [x:y:z]$ olur. Aslında bu küme, $\mathbb{C}^3$ te orijinden geçen doğruların oluşturduğu kümedir. $\mathbb{C}^2$ kümesi ile $\mathbb{P}^2$ kümesi arasında $(x,y) \hookrightarrow [x:y:1]$; $\mathbb{P}^1$ kümesi ile $\mathbb{P}^2$ kümesi arasında ise $[x:y] \hookrightarrow [x:y:0]$ gömme dönüşümü vardır. Böylece $\mathbb{P}^1 \cup \mathbb{C}^2 = \mathbb{P}^2$ haline gelir.

$\mathbb{C}^2$ afin düzlemini $\mathbb{C}^3$ te orijinden geçmeyen bir L düzlemi ve L_0 ı da L ye paralel, orijinden(O) geçen düzlem olarak düşünelim. Bu durumda $\mathbb{C}^2$ deki noktalar ile $\mathbb{C}^3$ te O dan geçen, L_0 da olmayan doğrular arasında birebir eşleme kurulabilir. L deki her bir nokta ile bu nokta ve O yu birleştiren, L_0 da olmayan bir tek doğru eşleştirilir. $\mathbb{C}^3$ te orijinden geçen ve L_0 üzerinde bulunan noktalar ise $\mathbb{C}^2$ de sonsuzdaki noktalar ile eşleştirilir. $\mathbb{P}^2$ projektif düzlemi, $\mathbb{C}^3$ te orijinden geçen doğrular kümesidir. Bu doğrulara, $\mathbb{P}^2$ nin noktaları denir. $\mathbb{C}^3$ te 0 dan farklı $X = (X_0, X_1, X_2)$ vektörü, $\mathbb{P}^2$ de bir tek noktaya karşılık gelir ve $[X_0 : X_1 : X_2]$ ile gösterilir. X_0, X_1, X_2 noktanın homojen koordinatları olup daha önceki tanımlardan $\lambda \in \mathbb{C}\setminus\{0\}$ olmak üzere λX ve $X, \mathbb{P}^2$ de aynı noktayı ifade ederler.

Tanım 1.4 $f(X_0, X_1, \ldots, X_n)$ polinomu ve her $\lambda \in k - \{0\}$ için

$$f(\lambda X_0, \lambda X_1, \ldots, \lambda X_n) = \lambda^d f(X_0, X_1, \ldots, X_n)$$

olacak şekilde $d \in \mathbb{N}$ varsa f ye homojen polinom denir.

$X, \mathbb{P}^n$ nin bir altkümesi olmak üzere $I(X) := \{f \in k[X_1, X_2, \dots, X_{n+1}] \,|\, f(P) = 0 \text{ her } P \in X \text{ için}\}$ şeklinde tanımlanan küme X in idealidir.

X_i ler cebirsel küme ve $I(X_i)$ ona karşılık gelen ideal olmak üzere, her $X_1 \supset X_2 \supset \dots \supset X_n \supset \dots$ azalan zincirine karşılık gelen $I(X_1) \subset I(X_2) \subset \dots \subset I(X_n) \subset \dots$ artan zinciri vardır.

$p(X,Y)$ sabit olmayan, kompleks katsayılı polinomu, bu polinoma 3. koordinat eklenerek homojenleştirilebilir. $p(X,Y)$ nin homojeni $\overline{p}$ ile gösterilirse $\overline{p}(X,Y,Z) = Z^k p(\frac{X}{Z}, \frac{Y}{Z})$ şeklindedir ($k:$ p nin derecesi).

p ve $\overline{p}$ polinomu yukarıdaki gibi olmak üzere, $\mathcal{C} = \{(x,y) \in \mathbb{C}^2 \mid p(x,y) = 0\}$ şeklindeki eğriler afin eğri olarak adlandırılırken, $\overline{\mathcal{C}} = \{[x:y:z] \in \mathbb{P}^2 \mid \overline{p}(x,y,z) = 0\}$ eğrisi, $\mathcal{C}$ nin projektif kapanışı olarak adlandırılır. Yani, $\mathcal{C} = V(p)$ ise $\overline{\mathcal{C}} = V(\overline{p})$ olur. $\overline{\mathcal{C}}$, sonlu tane nokta eklenmesi ile oluşur.

$\mathbb{P}^n$ üzerinde, iki ayrı topoloji tanımlıdır. İlki, $\mathbb{C}^{n+1}$ in standard topolojisinden indirgenmiş bölüm topolojisi; diğeri ise cebirsel kümeleri kapalı küme olarak kabul eden topoloji *Zariski topolojisidir*. Bölüm topolojisi Zariski topolojisinden daha incedir.

$\mathbb{C}^{n+1} \setminus \{0\}$ dan $\mathbb{P}^n$ ye

$$\begin{aligned} \pi : \quad & \mathbb{C}^{n+1} \setminus \{0\} \longrightarrow \mathbb{P}^n \\ & (X_0, X_1, \dots, X_n) \longmapsto [X_0 : X_1 : \dots : X_n] \end{aligned}$$

dönüşümü tanımlansın. $\mathbb{P}^n$ de bölüm topolojisi şöyle tanımlanır:

$A \subset \mathbb{P}^n$ nın açık olması için gerek ve yeter koşul $\pi^{-1}(A)$ nın $\mathbb{C}^{n+1} \setminus \{0\}$ de açık olmasıdır. Aynı durum kapalı kümeler için de geçerlidir.

$\overline{\mathcal{C}}$, $\mathcal{C}$ nin her iki topolojiye göre de kapanışıdır.

Tanım 1.5

$$V = \{P \in \mathbb{P}^n(k) \mid f(P) = 0 \text{ her } f \in T \text{ için}\}$$

olacak şekilde $T \subset k[X_0, X_1, \dots, X_n]$ homojen polinomları var ise V ye projektif varyete denir.

Tanım 1.6 Bir X cebirsel kümesi, X_1, X_2 cebirsel kümeler ve $X_1, X_2 \subsetneqq X$ olmak üzere $X = X_1 \cup X_2$ şeklinde yazılamıyorsa X indirgenemezdir. Aksi takdirde, indirgenebilir küme denir.

Teorem 1.7 $p \in \mathbb{C}[X_1, X_2, \dots, X_n]$ indirgenemez ise $V(p) \subset \mathbb{C}^n$ indirgenemezdir.

Teorem 1.8 $V \subset \mathbb{C}^n$, veya $V \subset \mathbb{P}^n$ herhangi bir boş olmayan indirgenemez varyete ve $V_d \subsetneqq V_{d-1} \subsetneqq \dots \subsetneqq V_1 \subsetneqq V_0 = V$, V nin indirgenemez alt varyetelerinin oluşturduğu bir zincir olsun. Bu zincir indirgenemez varyetelerin sayısı maksimum olacak ve verilen zincirdeki varyeteleri de içerecek şekilde

$$\emptyset \neq V_d' \subsetneqq \dots \subsetneqq V_1' \subsetneqq V_0' = V$$

olarak genişletilebilir. Ayrıca, bu şekilde oluşturulan herhangi iki zincir aynı uzunluktadır(Kendig, 1977).

Tanım 1.9 V bir varyete olsun. $\dim V$, $I(V)$ yi içeren asal ideallerin oluşturduğu iç içe geçmiş zincirlerin uzunluklarının maksimumudur.

Buna eşdeğer bir tanım, varyeteler zinciri kullanılarak da yapılabilir. Hilbert

Nullstellensatz teoreminden artan asal idealler zincirine karşılık gelen azalan indirgenemez varyeteler zinciri vardır. Bu zincirin uzunluğunun maksimumu da $\dim V$ yi verir.

Projektif düzlem $\mathbb{P}(V)$ olmak üzere boyutu $\dim \mathbb{P}(V) = \dim V - 1$ dir. İleride başka boyut tanımları da yapılacaktır.

Tanım 1.10 Kompleks katsayılı, m.dereceden $f(X_0, X_1, X_2)$ homojen polinomunun sıfır kümesine; m.dereceden kompleks düzlem eğrisi denir. Kompleks düzlem eğrileri $\mathcal{C}$ ile ve bir f polinomu ile tanımlandığından $V(f)$ ile gösterilir.

Tanım 1.11 $P(X,Y)$ indirgenemez bir polinom ise $P(X,Y)$ nin belirttiği $\mathcal{C}$ eğrisi de indirgenemezdir. $P(X,Y)$ indirgenebilir ve $P_1(X,Y), P_2(X,Y), \ldots, P_k(X,Y)$ onun farklı indirgenemez çarpanları ise, bu polinomların belirttiği eğriler de $\mathcal{C}$ nin indirgenemez bileşenleridir.

Tanım 1.12 $q(X_1, \ldots, X_{n+1}) \in k[X_1, \ldots, X_{n+1}]$ homojen bir polinom olsun. $q(X_1, \ldots, X_{i-1}, 1, X_{i+1}, \ldots, X_{n+1})$ polinomuna $q(X_1, \ldots, X_{n+1})$ in X_i ye göre dehomojeni denir. $D_i(q)$ veya kısaca $D(q)$ ile gösterilir.

Tanım 1.13 $f(X_0, X_1, X_2)$ indirgenemez homojen bir polinom; $\mathcal{C}$, f nin belirlediği düzlem eğrisi ve $i = 0, 1, 2$ olmak üzere $f_i = \dfrac{\partial f}{\partial X_i}$ ler f nin kısmi türevleri olsun. $\mathcal{C}$ üzerinden alınan bir noktanın, en az bir kısmi türevi 0 dan farklıysa bu noktaya $\mathcal{C}$ nin düzgün noktası; tüm kısmi türevleri 0 oluyorsa ise $\mathcal{C}$ nin tekil noktası denir. Bir $\mathcal{C}$ eğrisi tekil nokta içermiyorsa bu eğriye tekil olmayan(nonsingüler) veya düzgün eğri; en az bir tekil nokta içeriyorsa tekil eğri denir.

İddia 1.14 $\mathbb{C}^n$(ve $\mathbb{P}^n$) n boyutludur. Bu iddiayı $\mathbb{C}^2$ için ispatlayacağız. Diğer n

değerleri için de ispat benzerdir.

İddia 1.15 $\dim(\mathbb{C}^2) = 2$ dir.

İspat: $\{0\} \subsetneqq \langle X_1 \rangle \subsetneqq \langle X_1, X_2 \rangle \subsetneqq \mathbb{C}[X_1, X_2]$ oluşundan $\dim(\mathbb{C}^2) \geqq 2$ dir. Boyutun tam olarak 2 olduğu, bu zincirin daha fazla uzatılamayacağı gösterilerek ispatlanacaktır.

İlk olarak I, $\langle X_1 \rangle \subsetneqq I \subset \langle X_1, X_2 \rangle$ olacak şekilde bir asal ideal olsun. Öyleyse $a \in I$ ve $a \notin \langle X_1 \rangle$ olacak şekilde bir eleman vardır. Bu durumda $q(X_2) \neq 0$ olmak üzere $a = X_1 p(X_1, X_2) + q(X_2)$ olacak şekilde p ve q polinomları vardır. $q(X_2) = X_1 p(X_1, X_2) - a$ olup sağdakilerin her ikisi de I nın elemanı olduğundan $q(X_2) \in I$ ve $I \subset \langle X_1, X_2 \rangle$ olduğundan $q(X_2)$ nin sabit terimi 0 olur. Yani, $r(0) \neq 0$ ve $k \geq 1$ olmak üzere $q(X_2) = X_2^k r(X_2) \in I$ şeklindedir. I asal ideal olduğundan $X_2^k \in I$ veya $r(X_2) \in I$ dır. $r(X_2) \in I$ olsa $I \subset \langle X_1, X_2 \rangle$ oluşundan $r(0) = 0$ olması gerekirdi. Ancak bu çelişkiye yol açar. Öyleyse $X_2^k \in I$ olup $X_2 \in rad(I)$, buradan da I asal ideal olduğundan $rad(I) = I$ olup $X_2 \in I$ elde edilir. Bu da $I = \langle X_1, X_2 \rangle$ olmasını gerektirir.

İkinci olarak I, $\{0\} \subsetneqq I \subset \langle X_1 \rangle$ olacak şekilde bir asal ideal olsun. Bu durumda $I = \langle a \rangle$ olacak şekilde bir $0 \neq a \in I$ vardır. Ayrıca $a \in \langle X_1 \rangle$ olduğundan $c \neq 0$ olmak üzere $a = cX_1^r$ şeklindedir. Buradan $X_1^r \in I$ olup $X_1 \in rad(I) = I$ haline gelir. Böylece $I = \langle X_1 \rangle$ olur.

Son olarak $\langle X_1, X_2 \rangle \subsetneqq I \subset \mathbb{C}[X_1, X_2]$ olacak şekilde bir I asal idealinin bulunduğunu varsayalım. Öyleyse $a \in I$ ve $a \notin \langle X_1, X_2 \rangle$ durumunu sağlayan bir a elemanı vardır. Öyleyse c sıfırdan farklı sabit bir sayı olmak üzere $a = c + p(X_1, X_2)$ şeklinde yazılabilir. Buradan $c = a - p(X_1, X_2)$ olup sağ taraf I nın elemanı olduğundan $c \in I$ dır. Bu sonuç da $I = \mathbb{C}[X_1, X_2]$ olmasını gerektirir.

Bu üç durum verilen zincirin arasına daha fazla asal ideal yerleştirilemeyeceğini gösterir. Böylece $\dim(\mathbb{C}^2) = 2$ olur. ■

2. CEBİRSEL VARYETELERİN LOKAL ÖZELLİKLERİ

Teorem 2.1 (Kapalı Kompleks Analitik Fonksiyon Teoremi)

(1) Kompleks değerli $f(X_1,X_2)$ fonksiyonu $z_1,z_2 \in \mathbb{C}$ olmak üzere $(z_1,z_2) \in \mathbb{C}^2$ noktasının bir komşuluğunda kompleks analitik

(2) $f(z_1,z_2) = 0$

(3) 1×2 Jakobiyen matrisi

$$J(f) = \left(\frac{\partial f}{\partial X_1}, \quad \frac{\partial f}{\partial X_2} \right)$$

matrisinin (z_1,z_2) nin $\mathbb{C}^2$ deki bir açık komşuluğunda rankı sabit 1 olsun.

Öyleyse z_1 in $U \subset \mathbb{C}$ ve z_2 nin $V \subset \mathbb{C}$ (standard topolojiye göre) açık alt kümeleri ve bu alt kümeler arasında bir tek

$$\phi : U \to V$$

kompleks analitik fonksiyonu vardır öyle ki;

(i) $\frac{\partial f}{\partial X_2}(z_1,z_2) \neq 0$ ise $\phi(z_1) = z_2$ olmak üzere $\{(z,\phi(z)) \mid z \in U\} = V(f) \cap (U \times V)$ dir.

(ii) $\frac{\partial f}{\partial X_1}(z_1,z_2) \neq 0$ ise $\phi(z_2) = z_1$ olmak üzere $\{(\phi(z),z) \mid z \in V\} = V(f) \cap (U \times V)$ dir.

Sonuç 2.2 $p(X,Y) \subset \mathbb{C}[X,Y]$ olsun. $p(0,0) = 0$ ve $p_Y(0,0) \neq 0$ ise $(0,0)$ ın bir komşuluğunda $p(x,y) = 0$ eşitliğini veren noktalar bir $Y = \phi(X)$ analitik fonksiyononunun grafiğidir.

Sonuç 2.3 $C = V(p(X,Y))$ nin $p_X(x_0,y_0) \neq 0$ ya da $p_Y(x_0,y_0) \neq 0$ olacak şekildeki herhangi bir (x_0, y_0) noktası yakınında(standard toplojiye göre) $\mathcal{C}$, analitik bir fonksiyonun yerel grafiği şeklindedir.

Tanım 2.4 $Q \in V$ olmak üzere Q nun bir komşuluğu boyunca rank$(J(V))$ sabitse Q noktasına lokal analitik manifold nokta denir. Her $P \in V$ yakınında lokal analitik manifold noktalar vardır. $J(V)_Q = \begin{bmatrix} \frac{\partial p}{\partial X_i}(Q) & \dots & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \frac{\partial p}{\partial X_n}(Q) & \dots & \dots \end{bmatrix}$ matrisi, verilen kısmi türevlerin Q noktasındaki değerlerinden oluşan, n tane satırı ve sonsuz sayıda sütunu olan bir matristir(matrisin rankı satır sayısını aşamayacağından, sütun sayısının sonsuz olması önemsizdir). P nin yakınlarındaki her $Q \in V$ için $r = \max(\text{rank } J(V)_Q)$ olsun. Q_0, P nin yeterince yakınından alınan ve rankın r olduğu bir nokta olsun. Bu durumda rank, V nin Q_0 a yakın olan noktalarında artamayacağı gibi determinantın sürekli oluşundan azalamaz da(çünkü rankın r olması, r tane lineer bağımsız sütun olması demektir). Böylece rank, Q_0 ın V deki bir komşuluğu boyunca sabit kalır. Bir $P \in V$ için boyut $\dim_P V$ ile gösterilir ve $\max_Q(\dim_Q V)$ veya $n - \min_Q(rank(J(V)_Q))$ olarak tanımlanır.

Bu tanımla birlikte bir varyetenin boyutunun ikinci tanımı şu şekildedir:

Tanım 2.5 $\dim V = \max\{\dim_p V | p \in V\}$

İddia 2.6 Boyutun şu ana kadar verilmiş iki tanımı eşittir(Hulek, 2003).

Boyutla ilgili aşağıdaki sonuç geçerlidir.

Sonuç 2.7 $V = V_1 \cup V_2 \cup \dots V_k$ herhangi bir cebirsel varyete ve V_i $(1 \leq i \leq k)$ ler V nin indirgenemez bileşenleri olmak üzere, V nin boyutu V_i lerin boyutlarının maksimumudur. Yani

$$\dim V = \max\{\dim V_i\}_{1\leq i\leq k}$$

olur.

Önerme 2.8 $V \subset \mathbb{P}^n$ bir projektif varyete ise V her noktasında bir boyuta sahip olduğu gibi kendisi de bir boyuta sahiptir.

Önerme 2.9 Eğer V, $\mathbb{P}^n$ veya $\mathbb{C}^n$ nin indirgenemez bir varyetesi ise V nin tüm noktalarında boyut aynıdır.

Tanım 2.10 $\mathbb{P}^n$ veya $\mathbb{C}^n$ deki bir varyetenin her noktasında boyutu aynı ise saf boyuta sahiptir denir.

Tanım 2.11 $F(X_0, X_1, \ldots, X_n)$ sıfırdan farklı homojen bir polinom olmak üzere,

$$V(F) = \{[a_0 : a_1 : \ldots : a_n] \in \mathbb{P}^n(\mathbb{C}) \,|\, F(a_0, a_1, \ldots, a_n) = 0\}$$

kümesine hiperyüzey denir. Kısacası, $\mathbb{P}^n$ deki bir varyete $\mathbb{C}[X_1, X_2, \ldots, X_{n+1}]$ deki sabit olmayan tek bir homojen polinomla tanımlanabiliyorsa hiperyüzeydir. Aynı zamanda $\mathbb{C}^n$ de bir hiperyüzey tek bir polinomla tanımlanabilen varyetedir.

Teorem 2.12 $\mathbb{P}^n$ veya $\mathbb{C}^n$ de bir varyetenin hiperyüzey olması için gerek ve yeter koşul bu varyetenin saf $n-1$ boyutlu olmasıdır.

İspat: İspat $\mathbb{C}^n$ için gösterilecektir. p sabit olmayan bir polinom olsun. $V = V(p)$ olsun.

($\Rightarrow$) p indirgenemez olsun. p indirgenemez ise $V(p)$ saf boyuta sahiptir. $\dfrac{\partial p}{\partial X_i}$, V boyunca 0 olamaz. Bazı i'ler için $\dfrac{\partial p}{\partial X_i} \neq 0$ dır. Aksi takdirde her $a \in V(p)$

için $a \in V(\frac{\partial p}{\partial X_i})$ olup $\left\langle \frac{\partial p}{\partial X_i} \right\rangle \subset \langle p \rangle$ elde edilirdi. Ki bu sonuç $\deg \frac{\partial p}{\partial X_i} < \deg p$ ile çelişir. Bu durumda J nin jakobiyen matrisi

$$J(V) = \begin{bmatrix} \frac{\partial p}{\partial X_i} \\ \vdots \\ \frac{\partial p}{\partial X_n} \end{bmatrix}$$

nin rankı V nin en az bir noktasında maksimum ranka, yani 1 e ulaşır. Bu yüzden $\dim V = n-1$ olur.

p indirgenebilir ve $a \in V(p)$ olsun. U, a nın açık bir komşuluğu ve $U = \mathbb{C}^n \backslash W$ olmak üzere $U \cap V(p)$ de $J(V)$ nin rankı 0 olsun. Böylece her i için $V(p_{x_i}) \supseteq V(p) \cap (\mathbb{C}^n \backslash W)$ olur. $V(p) \subseteq V(p_{x_i}) \cup W = (V(p_{x_1}) \cap \ldots \cap V(p_{x_n})) \cup W$ olup buradan da her i için $V(p) \subseteq V(p_{x_i}) \cup W$ dur. Öyleyse

$$V(p) = (V(p_{x_i}) \cap V(p)) \cup (W \cap V(p))$$

olur. Buradan iki durum ortaya çıkmaktadır:

I. Durum: $V(p_{x_i}) \cap V(p) = V(p)$ ise $V(p) \subseteq V(p_{x_i})$ olup bu da $p | p_{x_i}$ olmasını gerektirir. Ancak bu durum $der\ p > der\ p_{x_i}$ olması ile çelişir.

II. Durum: $V(p) \cap W = V(p)$ ise $V(p) \subseteq W$ olur. Yani $V(p) \cap (\mathbb{C}^n \backslash W) = \emptyset$ olur. Bu durum $a \in V(p) \cap U$ olması ile çelişir. Öyleyse $J(V)$ nin rankı en az bir noktada 1 olup $\dim V = n-1$ dir.

($\Leftarrow$) V, $\mathbb{C}^n$ de saf $n-1$ boyutlu bir varyete olsun.

I. Durum: V indirgenemez olsun. $\emptyset \neq V_1 \subsetneqq \cdots \subsetneqq V_{n-1} = V$, V nin iç içe geçmiş $n-1$ uzunluğundaki varyeteler zinciri olsun. Öyleyse $0 \subsetneqq I(V_{n-1}) = I(V) \subsetneqq \cdots \subsetneqq I(V_1) \neq \mathbb{C}[X_1, \ldots, X_n]$ olacak şekilde $n-1$ uzunluğunda idealler zinciri vardır. $\{p_1, \ldots, p_m\}$ kümesi $I(V)$ yi oluşturan minimal bir küme olsun. q, p_1

in bir asal çarpanı olmak üzere $0 \subsetneqq \langle q \rangle \subset \langle p_1, p_2, \ldots, p_m \rangle = I(V) \subsetneqq \cdots \subsetneqq I(V_1) \subsetneqq \mathbb{C}[X_1, X_2, \ldots, X_n]$ şeklinde asal idealler zinciri elde edilir. V nin $n-1$ boyutlu olduğunu varsayımımızdan $\langle q \rangle = \langle p_1, \ldots, p_m \rangle$ olmalıdır. Öyleyse $m = 1$ olmalıdır. Böylece $I(V) = \langle q \rangle$ olup $V = V(q)$ olur.

II. Durum: V indirgenebilir olsun. $V = V_1 \cup \cdots \cup V_k$ kümesi V nin minimal indirgenemez parçalanışı olsun. Öyleyse her i için, bir $a \in V_i$ vardır öyle ki $i \neq j$ için $a \notin V_j$ dir. $\dim_a V = \text{maks} \dim_a V_i$ eşitliğinden $\dim_a V = n-1$ olduğundan a nın V_i deki boyutu $n-1$ olur. V_i nin indirgenemez saf $n-1$ boyutlu varyete oluşundan 1.durum kullanılarak $V_i = V(p_i)$ olacak şekilde indirgenemez p_i polinomu vardır. Her V_i için aynı durum tekrarlanırsa $V = \cup_{i=1}^{k} V(p_i) = V(p_1 \cdots p_k)$ olup V hiperyüzeydir. ■

Tanım 2.13 Her $p \in \mathbb{C}[X_1, X_2]$ polinomu (a_1, a_2) gibi bir nokta etrafında $c(X_1 - a_1)^{d_1}(X_2 - a_2)^{d_2}$ ifadelerinin toplamları olacak şekilde açılabilir. Bu açılımdaki en küçük dereceye, p nin (a_1, a_2) deki *mertebesi* denir.
$\ell \subset \mathbb{C}^2$ bir doğru olmak üzere ℓ,

$$X_1 = a_1 + c_1 T, \; X_2 = a_2 + c_2 T$$

şeklinde parametrize edilebilir. p nin (a_1, a_2) de ℓ ye göre(veya boyunca) mertebesi; $p(a_1 + c_1 T, a_2 + c_2 T)$ nin 0 noktasındaki kökünün katlılığıdır.

Örnek 2.14 $p(X,Y) = Y^2 - X^3 - X^2$ polinomu 3. dereceden bir polinomdur. Bu polinomun $(0,0)$ noktasındaki mertebesi 2 dir. $Y = \pm X$ doğruları boyunca ve $(0,0)$ noktasında mertebesi ise 3 olur.

Tanım 2.15 C ve D düzlem eğrileri; f ve g sırasıyla C ve D eğrilerini belirleyen fonksiyonlar olsun. P, $C \cap D$ de bir nokta olmak üzere, kesişim katlılığı (intersection multiplicity)

$$i_P(C,D) = dim\frac{O_P}{(f,g)_P}$$

eşitliği ile tanımlanır. Bu eşitlikte, $\mathbb{C}(x,y)$, $\mathbb{C}$ üzerinde tanımlı iki değişkenli rasyonel fonksiyonlar cismi olmak üzere; $O_P = \{\psi \in \mathbb{C}(x,y) |\ \psi(P)$ tanımlıdır$\}$ ve $(f,g)_P = f,g$ tarafından O_P de üretilen idealdir.

Teorem 2.16 (Bezout Teoremi) *m* dereceli bir projektif düzlem eğrisi *C* ve *n* dereceli bir projektif düzlem eğrisi *D* nin ortak bileşenleri yoksa (yani bu iki düzlem eğrisini tanımlayan F ve G polinomlarının hiçbir ortak bölenleri yoksa), her bir kesişim noktası kesişim sayısı(intersection number) kadar sayıldığında *mn* noktada kesişir. Yani $\sum_{P\in C\cap D} i_P(C,D) = mn$ dir(Kirwan, 1992).

3. KESİŞİM KATLILIĞI VE KÜRE ÖRTÜLERİ

Tanım 3.1 D tek türlü çarpanlara ayırma bölgesi ve $f, g \in \mathrm{D}[X]$ başkatsayıları 0 dan farklı

$$\begin{aligned} f &= a_0X^m + a_1X^{m-1} + \ldots + a_m \\ g &= b_0X^n + b_1X^{n-1} + \ldots + b_n \end{aligned}$$

şeklinde iki polinom olsun.

$$\begin{vmatrix} a_0 & a_1 & \ldots & a_m & & & \\ & a_0 & a_1 & \ldots & a_m & & \\ & & \ddots & & & \ddots & \\ & & & a_0 & a_1 & \ldots & a_m \\ b_0 & b_1 & \ldots & b_n & & & \\ & b_0 & b_1 & \ldots & b_n & & \\ & & \ddots & & & \ddots & \\ & & & b_0 & b_1 & \ldots & b_n \end{vmatrix}$$

olarak tanımlanan determinanta f ve g nin resultantı denir ve $\mathfrak{R}(f,g)$ ile gösterilir. $\dfrac{df}{dX} = f'$, f nin türevi olmak üzere $\mathfrak{R}(f,f')$ ye f nin diskriminantı denir ve $\mathfrak{D}(f)$ ile gösterilir. Eğer $f \in D[X_1,\ldots,X_n]$ ise $\mathfrak{R}_{X_i}(f, \dfrac{\partial f}{\partial X_i})$ye, f nin X_i ye göre diskriminantı denir ve $\mathfrak{D}_{X_i}(f)$ ile gösterilir. $f \in \mathbb{C}[X_1,\ldots,X_t]$ ise $V(\mathfrak{D}_{X_i}(f)) \subset \mathbb{C}_{X_1,\ldots,X_{i-1},X_{i+1},\ldots,X_t}$ varyetesine $\mathfrak{D}_{X_i}(f)$ nin diskriminant varyetesi denir.

Önerme 3.2 f ve g polinomlarının sabit olmayan ortak bir çarpana sahip olmaları için gerek yeter şart $\mathfrak{R}(f,g) = 0$ olmasıdır.

Örnek 3.3 f, bir değişkenli polinom olmak üzere, f nin tekrarlı kökünün olması için gerek yeter şart f ve f' nün ortak sıfıra sahip olmasıdır. Bu da $\mathfrak{D}(f) = \mathfrak{R}(f, f^{'}) = 0$ olması anlamına gelir.

İddia 3.4 $f(a,b) = 0$ ve $f_Y(a,b) = 0$, $P(a,b)$ $V(f)$ nin düzgün(regüler) noktası ve f nin Y ye($\ell : X-a = 0$ doğrusuna) göre mertebesi en çok 2 ise $\langle X-a, Y-b\rangle \subseteq (f, f_Y)_P$ dir.

İspat: f polinomu en genel haliyle aşağıdaki gibi yazılabilir. c polinomun sabit terimi ve $c,k,m,n,t,u \in \mathbb{C}$ olmak üzere

$$f(X,Y) = c + k(X-a) + m(X-a)^2 + n(X-a)(Y-b) + t(Y-b) + u(Y-b)^2 + \cdots$$

olsun. $f(a,b) = 0$ olduğundan $c = 0$ dır. $f_Y = n(X-a) + t + 2u(Y-b) + \cdots$ olup $f_Y(a,b) = 0$ olduğundan $t = 0$ bulunur. Ayrıca, (a,b) düzgün nokta olduğu için $f_X(a,b) \neq 0$ olmalıdır. $f_X = k + 2m(X-a) + n(Y-b) + \cdots$ olup $f_X(a,b) \neq 0$ olduğundan $k \neq 0$ dır. Y ye göre mertebesi en fazla 2 olduğundan $u \neq 0$ sonucuna ulaşılır. f ve f_Y

$$\begin{aligned} f &= (X-a)\,(k + m\,(X-a) + n(Y-b) + \cdots) + (Y-b)\,(u(Y-b) + \cdots) \\ f_Y &= (X-a)\,(n + \cdots) + (Y-b)\,(2u + \cdots) \end{aligned}$$

şeklinde düzenlenip matris haline getirilirse Cramer kuralından

$$X - a = \frac{\begin{vmatrix} f & u(Y-b) \\ f_Y & 2u \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} k+\cdots & u(Y-b) \\ n+\cdots & 2u+\cdots \end{vmatrix}} = \frac{\begin{vmatrix} f & u(Y-b) \\ f_Y & 2u \end{vmatrix}}{(k+\cdots)(2u+\cdots) - (n+\cdots)(u(Y-b)+\cdots)}$$

bulunur. Paydadaki polinomu h ile gösterelim. Bazı terimler çarpılıp düzenlenirse $h = 2uk + k(\cdots) + 2u(\cdots)(\cdots) - nu(Y-b) - n\cdots - \cdots$ halini alır. Bu durumda $h(a,b) = 2uk$ olup u ve k sayıları 0 dan farklı olduğu için $h(a,b) \neq 0$ olur. Böylece

$$X - a = \frac{f(2u+\cdots) - f_Y(u(Y-b)+\cdots)}{h}$$

olup buradan da $X - a = f\frac{p}{h} + f_Y\frac{q}{h}$ şekline getirilebilir. Öyleyse $X - a \in (f, f_Y)_P$ olur. Aynı şekilde Cramer kuralı $Y - b$ için de uygulanırsa paydası aynı olduğu için $Y - b \in (f, f_Y)_P$ sonucuna ulaşılır. Böylece $\langle X-a, Y-b\rangle \subseteq (f, f_Y)_P$ olur. ■

Sonuç 3.5 $f(a,b) = 0$ ve $f_Y(a,b) = 0$, $P(a,b)$ $V(f)$ nin düzgün(regüler) noktası ve f nin Y ye göre mertebesi 2 ise $i_P(V(f), V(f_Y) = 1$ olur.

İspat:

$$\begin{aligned} \phi : \quad & O_P \longrightarrow \mathbb{C} \\ & \frac{g}{h} \longmapsto \frac{g(a,b)}{h(a,b)} \end{aligned}$$

lineer dönüşümü tanımlansın.

ϕ nin örten oluşu şu şekilde gösterilir;
$c \in \mathbb{C}$ olsun. $\frac{c}{1} \in O_P$ olup $\phi\left(\frac{c}{1}\right) = \frac{c}{1}(a,b) = \frac{c}{1} = c$

$$\begin{aligned} Ker\phi &= \left\{\frac{g}{h} \in O_P : \phi\left(\frac{g}{h}\right) = 0\right\} \\ &= \left\{\frac{g}{h} \in O_P : \frac{g(a,b)}{h(a,b)} = 0\right\} \\ &= \left\{\frac{g}{h} \in O_P : g(a,b) = 0\right\} \\ &= \left\{\frac{g}{h} \in O_P : g \in (f, f_Y)_P\right\} \\ &= (f, f_Y)_P \end{aligned}$$

$g \in (f, f_Y)_P$ oluşu şöyle açıklanabilir; $g(a,b) = 0$ olduğuna göre g polinomunun(a,b) deki Taylor açılımı sabit terim içermeyip sadece $X-a$ ve $Y-b$ li terimlerden oluşmaktadır. Böylece 1.izomorfizma teoreminden $\mathbb{C} \cong \dfrac{O_P}{(f, f_Y)_P}$ sonucuna ulaşılır. Bu da $i_P(V(f), V(f_Y)) = 1$ olması demektir. ■

Tanım 3.6 $M \neq \emptyset$ bir Hausdorff topolojik uzay olsun. Eğer $n = 2$ için, her $x \in M$ için x in bir U_x komşuluğu, $\mathbb{R}^2$ nin açık bir alt kümesine homeomorfik oluyorsa M, 2-boyutlu bir topolojik manifolddur. 2-boyutlu topolojik manifoldlara kısaca yüzey denir.

Tanım 3.7 M, 2 boyutlu bir topolojik manifold olsun. Eğer $(i \in I)$ φ_i, U_i ile $\mathbb{R}^n$ nin açık bir kümesine homemomorfizma ve $U_i \cap U_j \neq \emptyset$ iken $\varphi_j \circ \varphi_i^{-1}$ bir diferansiyellenebilir dönüşüm olacak şekilde M nin bir $\{U_i\}_{i \in I}$ açık örtüsü varsa M diferansiyellenebilir 2-manifolddur denir. Eğer tüm i, j ler için $\varphi_j \circ \varphi_i^{-1}$ in Jakobiyen matrisinin determinantı pozitif olacak şekilde bir örtü varsa M yönlendirilebilir 2-manifolddur denir.

Sonuç 3.8 Kapalı Fonksiyon Teoreminden tekil olmayan projektif eğriler (kompakt) 2-manifolddur. (Analitik fonksiyonlar için) Cauchy-Riemann koşullarından dolayı tekil noktası olmayan eğriler yönlendirilebilir 2-manifolddur.

Tanım 3.9 S kompakt, 2 boyutlu manifold olsun. S nin üçgenlemesi, S nin her biri bir üçgene homeomorf olan kapalı kümelere parçalanabilmesidir. Yani, her T_i üçgene homeomorf olmak üzere

$$S = \cup_{i=1}^{n} T_i \text{ öyle ki}$$

(i) $T_i \cap T_j = \emptyset$ $(i \neq j$ iken$)$ veya

(ii) $T_i \cap T_j$ her ikisinin de kenarıdır veya

(iii) $T_i \cap T_j$ her ikisinin de köşesidir.

Herhangi bir üçgenleme kullanılarak Euler sayısı $V - E + F$ formülünden hesaplanır. Herhangi bir üçgenlemenin inceltmesi şöyle olmaktadır: Üçgenlenebilir bir yüzey alalım. T, yüzey üstündeki üçgenlerden biri olsun. T nin içine bir köşe eklenip bu yeni köşe ile diğer köşeler birleştirilince önceki üçgenlemeye 3 kenar daha eklenmiş olur. Ayrıca 1 köşe ve 2 üçgen artışı gözlenir. Sonuçta Euler sayısında $(V - E + F)$ hiç değişiklik olmazken daha ince bir üçgenleme elde edilmiş oldu.

Teorem 3.10 Kompakt, 2 boyutlu bir manifoldun iki ayrı üçgenlemesi, ortak bir inceltmeye sahiptir(Miranda, 1995).

Sonuç 3.11 Euler sayısı, üçgenleme seçiminden bağımsız, yani iyi tanımlıdır.

Tanım 3.12 Bir topolojik uzayın bağlantılı bileşeni, topolojik uzayın herhangi bir maksimal bağlantılı alt kümesidir.

Tanım 3.13 Bir açık disk, birim diskin $\mathbb{R}^2$ deki topolojik görüntüsüdür($\mathbb{C} = \mathbb{R}^2$ kabul edildi).

Tanım 3.14 M 2-boyutlu bağlantılı manifold ve A lokal kompakt topolojik uzay olsun.

(i) π örten.

(ii) Her $p \in M$ için, $\pi^{-1}(\Delta(p))$ nın her bir bağlantılı bileşeni $\Delta_\alpha(p)$ diski olacak şekilde $\Delta(p) \subset M$ diski var.

(iii) Her $\Delta_\alpha(p)$ için, $\pi\mid_{\Delta_\alpha(p)}: \Delta_\alpha(p) \longrightarrow \Delta(p)$ homeomorfizma

şartlarını taşıyan sürekli bir $\pi : A \longrightarrow M$ dönüşümü varsa A, M nin bir örtüsüdür(covering) ve (A,M,π) bir örtüdür denir.

Tanım 3.15 A ve M yukarıdaki tanımdaki gibi olsun. $P_1,\ldots,P_r$ noktaları M nin sonlu tane noktası ve $f : A \longrightarrow M$ bir dönüşüm (örten) olsun. Eğer

$$\left(A\backslash f^{-1}(P_1,P_2,\ldots,P_r), M\backslash(P_1,P_2,\ldots,P_r), f\mid_{A\backslash f^{-1}(P_1,P_2,\ldots,P_r)}\right)$$

bir örtü oluyorsa (A,M,f) ye neredeyse örtü denir. Yani, (A,M,f) üçlüsü M nin sonlu noktası hariç tutulunca bir örtü oluşturuyorsa (A,M,f) ye neredeyse örtü (near-cover) denir. Eğer $\pi^{-1}(\Delta(p))$ ayrık s tane diskten oluşacak şekilde bir $(\Delta(p)) \subset M$ diski varsa (A,M,π) ye $s-katl$ı örtü denir. Burada s sayısı seçilen noktadan bağımsızdır.

Örnek 3.16 f fonksiyonu $f : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$, $z \mapsto z^n$ olarak tanımlansın.
f nin örtü olup olmadığını kontrol edelim: Görüntü kümesinden alınan $a \in \mathbb{C}-\{0\}$ için $a = z^n$ olup $f^{-1}(a)$ nın n tane farklı değeri vardır. Fakat $a = 0$ alınırsa $f^{-1}(0) = 0$ olup bunu sağlayan tek bir tane z değeri vardır. Öyleyse 0 örtü olma şartını bozmaktadır.
$\bar{f} : \mathbb{C}-\{0\} \longrightarrow \mathbb{C}-\{0\}$ ise $n-$ katlı bir örtüdür. Öyleyse $(\mathbb{C},\mathbb{C},f)$ neredeyse örtüdür.

Önerme 3.17 $p(X,Y)$ tekrarlı çarpanı olmayan bir polinom olsun. $a_i(X) \in \mathbb{C}[X]$, $a_0 \neq 0$, $n \geq 1$ olmak üzere

$$p(X,Y) = a_0(X)Y^n + a_1(X)Y^{n-1} + \ldots + a_n(X) \tag{3.1}$$

ise $(V(p), \mathbb{C}_X, \pi_Y)$ neredeyse n katlı örtüdür.

İspat: $D_Y(p) \neq 0$ (Tekrarlı çarpanı olmayan polinomlarda diskriminant polinomunun sıfır olmayışından). Öyleyse $V(D_Y(p))$ sonlu tane noktadan oluşur. x_0 bu noktalardan biri ve $y_{01}, y_{02}, \ldots, y_{0n}$; $p(x_0, Y)$ polinomunun birbirinden farklı kökleri olsun. x_0 daki n tane kök birbirinden farklı olduğundan $i = 0, \ldots, n$ için $\frac{\partial p}{\partial Y}(x_0, y_{0i}) \neq 0$ dır. Öyleyse Kapalı Fonksiyon Teoreminden her (x_0, y_{0i}) noktası yakınında $Y = h(X)$ şeklinde bir analitik fonksion vardır. Bu yüzden, x_0 civarında yeterince küçük $\Delta(x_0)$ diski üzerinde, $\mathcal{C}$ eğrisinin bağlantılı bileşenleri tüm $\Delta_\alpha(x_0)$ diskleridir. Ayrıca π, her $\Delta_\alpha(x_0)$ üzerinde $\Delta(x_0)$ ile homeomorfizma kurar. Bu durum sonlu noktada geçerli olup $(V(p), \mathbb{C}_X, \pi_Y)$ neredeyse n katlı örtüdür.

$\mathbb{P}^2$ de bir eğrinin küre örtüsü olarak düşünülmesi şöyledir: ℓ, $\mathbb{P}^2$ de bir doğru ve P_∞, $\mathbb{P}^2$ de olup ℓ de olmayan bir nokta olsun. $\mathbb{P}^2$ deki her nokta P_∞ den geçen bir doğru üzerinde olacaktır. Ayrıca, P_∞ den geçen iki farklı doğrunun tek kesişim noktaları P_∞ olup, bu nokta haricinde yani $\mathbb{P}^2 \backslash P_\infty$ de ayrıktırlar. Son olarak, P_∞ den geçen her bir doğru, $\mathbb{P}^1$ ile tek bir noktada kesiştiği gibi farklı doğrular da farklı noktalarda kesişir. Böylece her bir $P \in \mathbb{P}^2 \backslash P_\infty$ noktasını, $\overleftrightarrow{PP_\infty}$ doğrusu ile ℓ nin keşişim noktasına eşleyen $\pi : \mathbb{P}^2 \backslash P_\infty \longrightarrow \ell$ doğal projeksiyon dönüşümü elde edilir.

$\mathcal{C}$, $\mathbb{P}^2$ de bir eğri olsun. $\mathbb{P}^2$ de koordinatlar polinom dehomojenize edildiğinde 3.1 eşitliğindeki gibi olacak şekilde seçilebilir. Böylece Lemma 3.17 den $(V(p), \mathbb{C}_X, \pi_Y)$ neredeyse n katlı örtüdür. Eğer $\mathbb{P}^1$, $\mathbb{P}^2$ nin $\mathbb{C}_X \subset \mathbb{C}_{XY}$ yi içeren 1 boyutlu alt uzayı; P_∞, $\mathbb{C}_Y$ yi tamamlayan nokta, $P_\infty \notin \mathcal{C}$ ve π önceki parağrafta tanımlandığı gibi ise

$$\left(\mathcal{C}, \mathbb{P}^1, \pi\right)$$

de neredeyse n katlı örtüdür. ■

Tanım 3.18 f, (a_1, a_2) de analitik bir fonksiyon olsun."f nin (a_1, a_2) noktasında

X e göre derecesi s " ifadesi ile "$f(X,a_2)$ nin a_1 deki derecesi s dir" ifadesi denktir(Y için de aynı şekilde). Δ_1 ve Δ_2 ler disk olmak üzere $\Delta_1 \times \Delta_2$ çarpımına polidisk denir.

Önerme 3.19 $f : \mathbb{C}^2 \longrightarrow \mathbb{C}$ fonksiyonunun $a = (a_1,a_2)$ de kompleks analitik ve bu noktada X e göre derecesinin s olduğunu varsayalım. Öyleyse Δ_1, a_1 merkezli disk; Δ_2, a_2 merkezli disk ve f, Δ de analitik olmak üzere, a noktası etrafında $\Delta(a) = \Delta_1 \times \Delta_2$ açık polidiski vardır öyle ki her $a_2^{'} \in \Delta_2$ için $f(X,a_2^{'}) : \mathbb{C}_X \longrightarrow \mathbb{C}$ fonksiyonunun Δ_1 de s tane kökü vardır(Y için de benzer durum vardır).

4. HESSİAN VE BÜKÜM NOKTALARI

İddia 4.1 (Euler Formülü) $F(X_1,X_2,X_3)$ homojen bir polinom ve $deg(F)=n$ olmak üzere

$$\sum_{i=1}^{3} X_i \frac{\partial F}{\partial X_i} = nF(X_1,X_2,X_3)$$

olduğu kolayca görülür. Bu eşitliğe Euler Formülü denir.

Tanım 4.2 Üç değişkenli bir F polinomunun ikinci dereceden kısmi türevlerinden oluşturulmuş

$$H = \begin{pmatrix} F_{00} & F_{01} & F_{02} \\ F_{10} & F_{11} & F_{12} \\ F_{20} & F_{21} & F_{22} \end{pmatrix}$$

matrisine $Hessian$ matrisi, determinantına ise $Hessian$ determinantı denir ve $Hess = h = \det\left(\frac{\partial^2 F}{\partial X_i \partial X_j}\right)$ ile gösterilir. F homojen ise $Hessian$ determinantı da homojen olur.

İddia 4.3 F homojen, indirgenemez ve derecesi en az 2 olan bir polinom olmak üzere $W = V\left(F, det\left(\frac{\partial^2 F}{\partial X_i \partial X_j}\right)\right) \subseteq \mathbb{P}^2$ sonludur.

İspat: F indirgenemez, derecesi ≥ 2 olan bir polinom olsun. F nin $hessian$ ı bölmediği ileride gösterilecektir. F indirgenemez olduğundan $V(F)$ indirgenemez olup $\dim V(F) = 1$ dir. $W = V\left(F, det\left(\frac{\partial^2 F}{\partial X_i \partial X_j}\right)\right)$ nin sonlu olduğunu göstermek istiyoruz.

W nun sonsuz olduğunu varsayalım. W_i ler indirgenemez ve en az bir i için W_i sonsuz olmak üzere $W = W_1 \cup \ldots \cup W_k$ şeklinde indirgenemez bileşenlerine ayrılabilir. Genelliği bozmaksızın W_1 in sonsuz olduğunu varsayalım. $A \in W_1$ olsun. Öyleyse

$$\emptyset \neq \{A\} \subsetneq W_1 \subsetneq V(F)$$

olup bu durum da $\dim V(F) = 1$ olması ile çelişir. Sonuç olarak $W = V\left(F, det\left(\frac{\partial^2 F}{\partial X_i \partial X_j}\right)\right)$ sonlu tane nokta içerir. ■

Bu bölümün geri kalan kısmında $F \nmid hess$ olduğu ispatlanacaktır.

Tanım 4.4 f homojen, indirgenemez ve derecesi k olan bir polinom; $\mathcal{C} = V(f)$ ve p, $\mathcal{C}$ nin düzgün bir noktası olsun.

(i) p den geçen bir ℓ doğrusunun $\mathcal{C}$ ye teğet olması için, f nin ℓ ye göre p deki mertebesi en az 2 olmalıdır.

(ii) p nin büküm noktası olması için f nin ℓ ye göre p deki mertebesi en az 3 olmalıdır.

$p \neq q$ olacak şekilde bir q noktası ve $\ell = up + vq$ doğrusu alalım.
f nin ℓ ye göre p noktası etrafındaki Taylor açılımı şöyledir:

$$f(p+tq) = f(p) + \Big(\sum_i f_i(p)q_i\Big)t + \frac{1}{2}\Big(\sum_{i,j} f_{ij}(p)q_j\Big)t^2 + O(t^3)$$

Bu eşitlikte p, $\mathcal{C}$ üzerinde bir nokta olduğu için $f(p) = 0$ olur. Ayrıca f_i ve f_{ij} sembolleri $\frac{\partial f}{\partial x_i}$ ve $\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}$ kısmi türevlerini, $O(t^3)$ ise derecesi en az 3 olan terimlerin oluşturduğu polinomu göstermektedir.
Verilen eşitliği matris halinde yazalım. Δ sembolü (f_0, f_1, f_2) nin gradyent vektörünü, H ise Hessian matrisini,

$$H = \begin{pmatrix} f_{00} & f_{01} & f_{02} \\ f_{10} & f_{11} & f_{12} \\ f_{20} & f_{21} & f_{22} \end{pmatrix}$$

göstermektedir.

Gradyent ve Hessian determinantının p noktasındaki değerleri de sırasıyla Δ_p ve H_p ile gösterilsin. p ve q sütun vektörü olarak düşünülürse eşitlik

$$f(p+tq) = (\Delta_p q)\,t + \frac{1}{2}\left(q^t H_p q\right)t^2 + O(t^3)$$

haline gelir.

Derecesi d olan homojen bir f polinomu için Euler eşitliğinden,

$$(d-1)\sum_{i=0}^{2} X_i \frac{\partial f}{\partial x_i} = \sum_{i,j=0}^{2} X_i X_j \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}$$

elde edilir. Buradan da

$$\begin{aligned}
(d-1)f_0 &= X_0 f_{00} + X_1 f_{01} + X_2 f_{02}\\
(d-1)f_1 &= X_0 f_{10} + X_1 f_{11} + X_2 f_{12}\\
(d-1)f_2 &= X_0 f_{20} + X_1 f_{21} + X_2 f_{22}
\end{aligned}$$

eşitlikleri elde edilip matris haline çevirdiğimizde

$$(d-1)\begin{bmatrix} f_0 & f_1 & f_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} X_0 & X_1 & X_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f_{00} & f_{01} & f_{02}\\ f_{10} & f_{11} & f_{12}\\ f_{20} & f_{21} & f_{22} \end{bmatrix}$$

halini alır. Bu eşitliğin p noktasına göre yazılmış hali ise $(d-1)\Delta_p = p^t H_p$ şeklindedir. Ayrıca verilen notasyonlarla, $\langle p,p\rangle = p^t H_p p = d(d-1)f(p)$ dir.

Sonuç 4.5 Yukarıda kullanılan notasyon ve tanımlarla üç ayrı sonuç elde edilir.

(i) $p,\ \mathcal{C}$ eğrisinin düzgün bir noktası ise $\langle p,p\rangle = 0$ dır.

(ii) $q \in \mathbb{P}^2,\ q \neq p$ noktası olsun. p ve q dan geçen ℓ doğrusunun $\mathcal{C}$ ye p

noktasında teğet olması için gerek yeter şart $\langle p,q\rangle = 0$ olmasıdır.

(iii) $\langle p,q\rangle = 0$ olsun. p nin büküm noktası olması için gerek yeter şart $\langle q,q\rangle = 0$ olmasıdır.

İspat: İspatları sırasıyla şöyledir:

(i) p, $\mathcal{C} = V(f)$ eğrisinin düzgün bir noktası ve f nin derecesi d olsun. $\langle p,p\rangle = p^t H_p p$ idi. Eşitlik düzenlenirse $\langle p,p\rangle = (d-1)\Delta_p p$ şekline gelir. f nin p noktasındaki gradyent vektörü $\Delta_p = \left(\frac{\partial f}{\partial X_0}(p), \frac{\partial f}{\partial X_1}(p), \frac{\partial f}{\partial X_2}(p)\right)$ şeklindedir. Buradan da p noktasındaki teğet doğrusunun denklemi şöyle yazılır;

$$\frac{\partial f}{\partial X_0}(p)X_0 + \frac{\partial f}{\partial X_1}(p)X_1 + \frac{\partial f}{\partial X_2}(p)X_2 = 0$$

$\deg f = d$ olmak üzere, Euler denkleminden $\sum_{i=0}^{2} X_i \frac{\partial f}{\partial X_i} = d\,f(X_0,X_1,X_2)$ olur. Bu eşitlik p noktası için yazıldığında $p \in V(f)$ olduğundan, $\sum_{i=0}^{2} X_i \frac{\partial f}{\partial X_i} = \Delta_p\, p = d\,f(p) = 0$ bulunur. $\Delta_p\, p = 0$ eşitliği de $\langle p,p\rangle = 0$ olmasını gerektirir.

(ii) $(\Rightarrow)$ $\ell, \mathcal{C}$ ye p noktasında teğet olsun.

f nin ℓ ye göre p noktası etrafındaki Taylor seri açılımı şöyle idi;

$$f(p+tq) = (\Delta_p q)t + \frac{1}{2}(q^t H_p q)t^2 + O(t^3)$$

$q = (q_0,q_1,q_2)$ alarak $\langle p,q\rangle$ yu hesaplayalım.

$$\begin{aligned}
\langle p,q\rangle &= p^t H_p q \\
&= (d-1)\Delta_p q \\
&= (d-1)\begin{bmatrix} f_0(p) & f_1(p) & f_2(p) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_0 \\ q_1 \\ q_2 \end{bmatrix} \\
&= (d-1)\left(f_0(p)\,q_0 + f_1(p)\,q_1 + f_2(p)\,q_2\right) \\
&= 0
\end{aligned}$$

($\Leftarrow$) $\langle p,q\rangle = 0$ olsun. $\langle p,q\rangle = p^t H_p q = (d-1)\Delta_p q = 0$ eşitliğinden $\Delta_p q = 0$ olur. $\Delta_p q = \frac{\partial f}{\partial X_0}(p)q_0 + \frac{\partial f}{\partial X_1}(p)q_1 + \frac{\partial f}{\partial X_2}(p)q_2$ olduğundan p ve q dan geçen ℓ doğrusu $\mathcal{C}$ ye p noktasında teğet olur.

(iii) $\langle p,q\rangle = 0$ ve p nin büküm noktası olması için gerek yeter şart $\langle q,q\rangle = 0$ olmasıdır.

($\Rightarrow$) p büküm noktası olsun. Teğet doğrusuna göre derecesi en az 3 olan kökü vardır. Öyleyse;

$$f(p+tq) = (\Delta_p q)t + \frac{1}{2}(q^t H_p q)t^2 + O(t^3)$$

eşitliğinde derecesi 1 ve 2 olan terimlerin katsayıları 0 olmalıdır. Yani $\Delta_p q = 0$, $q^t H_p q = 0$ olur. Bu da $\langle q,q\rangle = 0$ olmasını gerektirir.

($\Leftarrow$) $\langle q,q\rangle = q^t H_p q = 0$ olduğunu varsayalım. q teğet doğrusunu sağladığı için $\Delta_p q = 0$ olur. Bu durumda

$$f(p+tq) = (\Delta_p q)t + \frac{1}{2}(q^t H_p q)t^2 + O(t^3)$$

eşitliğindeki ilk iki terimin katsayısı 0 olup eşitlik

$$f(p+tq) = O(t^3)$$

haline gelir. Böylece f nin ℓ ye göre p deki mertebesi en az 3 olur. Öyleyse p büküm noktasıdır. ■

Tanım 4.6 $B : V \times V \to F$ şeklinde tanımlanan bir B simetrik bilineer formunun dejenere olması için gerek yeter şart her $v \in V$ için $B(v_0, v) = 0$ olmasını sağlayacak şekilde bir $v_0 \neq 0$ ın olmasıdır.

Eşdeğer olarak, $B : V \times V \to F$ şeklinde tanımlanan bir B bilineer formunun dejenere olmaması için gerek yeter şart her $v_0 \neq 0$ için $B(v_0, v) \neq 0$ olacak şekilde bir $v \in V$ nin var olmasıdır.

B, $\mathbb{C}^n$ de bir bilineer form ve $\beta = \{v_1, \ldots, v_n\}$, $\mathbb{C}^n$ nin bir bazı ise $M_{ij} = B(v_i, v_j)$ matrisine, B nin (β bazına göre) matrisi denir.

Teorem 4.7 Bir B bilineer formunun dejenere olması için gerek yeter şart herhangi bir baza göre matrisin determinantının 0 olmasıdır.

İspat: ($\Rightarrow$) Form dejenere olsun. Öyleyse $\langle u, v \rangle = u^t M v$ olmak üzere, bir $v \neq 0$ vardır öyle ki her u için $\langle u, v \rangle = 0$ olur. $Mv \neq 0$ olduğunu varsayalım. Öyleyse Mv nin i. koordinatı $a_i \neq 0$ olmak üzere u yu keyfi olarak i nci koordinatı 1 olacak şekilde alırsak $\langle u, v \rangle$ aşağıdaki gibi düzenlenebilir.

$$\begin{aligned}
\langle u, v \rangle &= u^t M v \\
&= \begin{bmatrix} \cdots & 1 & \cdots \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \vdots \\ a_i \\ \vdots \end{bmatrix} \\
&= a_i \neq 0
\end{aligned}$$

Böylece $\langle u, v \rangle \neq 0$ sonucuna ulaştık ki bu formun dejenere olması ile çelişen bir durumdur. Öyleyse $Mv = 0$ dır. Bu durumda $\det M = 0$ olur.

($\Leftarrow$) Bu baza göre determinant=0 olsun.

$$\begin{aligned}
\varphi : \ \mathbb{C}^n &\longrightarrow \mathbb{C}^n \\
v &\longmapsto Mv
\end{aligned}$$

fonksiyonu tanımlansın. φ birebir değildir. $Mv = 0$ olacak şekilde bir $v \neq 0$ vardır. Her u için $\langle u, v \rangle = u^t M v = 0$ olup buradan form dejeneredir. ■

Teorem 4.8 $\mathcal{C}$ eğrisinin düzgün bir p noktasının büküm noktası olması için gerek yeter şart $Hessian$ determinantın 0 olmasıdır.

İspat: $(\Rightarrow)$ p düzgün bir nokta ve p noktasındaki teğet doğrusu ℓ olsun. ℓ üzerinden $q \neq p$ olacak şekilde bir q noktası alalım.

Sonuç 4.5 den, ℓ doğrusu teğet olduğu için $\langle p,q\rangle = 0$ ve p düzgün nokta olduğu için $\langle p,p\rangle = 0$ olur. Öyleyse p, ℓ üzerindeki her noktaya diktir. p büküm noktası ve $\langle p,q\rangle = 0$ olduğundan $\langle q,q\rangle = 0$ olduğu bulunur.

$Hessian$ determinant ın 0 olmasıyla formun $dejenere$ olması eşdeğerdir. İspatlamak istediğimiz sonucun aksine formun $dejenere$ olmadığını varsayalım.

$\beta = \{p,q,r\}, \mathbb{C}^3$ ün bir bazı ve $M = \begin{bmatrix} \langle p,p\rangle & \langle p,q\rangle & \langle p,r\rangle \\ \langle q,p\rangle & \langle q,q\rangle & \langle q,r\rangle \\ \langle r,p\rangle & \langle r,q\rangle & \langle r,r\rangle \end{bmatrix}$ olsun.

Herhangi bir u, v vektörü için $\langle u,v\rangle = [u]_\beta^t M [v]_\beta$ olur.

$\langle p,p\rangle = \langle p,q\rangle = \langle q,q\rangle = 0$ olduğu bulunmuştu. Öyleyse M matrisi

$$M = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \langle p,r\rangle \\ 0 & 0 & \langle q,r\rangle \\ \langle r,p\rangle & \langle r,q\rangle & \langle r,r\rangle \end{bmatrix}$$

şekline gelir. Buradan $\det M = 0$ olur. Böylece β bazına göre $Hessian$ determinant=0 olduğu sonucuna ulaşılır, bu da formun $dejenere$ olmasını gerektirir. Bu durumda varsaydığımız durumla çelişen bir sonuca ulaşıldı. Sonuç olarak p düzgün noktası büküm noktası ise $Hessian$ determinant sıfırdır.

$(\Leftarrow)$ $Hessian$ determinant sıfırsa (yani form dejenere ise) öyle bir $q \neq 0$ vardır ki her $a \in \mathbb{P}^2$ için $\langle q,a\rangle = 0$ olur.

$p^t H_p = (d-1)\Delta_p$ idi. p düzgün nokta olduğundan; en az bir $v \in \mathbb{C}^3$ vektörü için $p^t H_p v = (d-1)\Delta_p v \neq 0$ olur.

Öyleyse,

$$\langle p, v \rangle \neq 0$$
$$\langle q, v \rangle = 0$$

olacak şekilde $v \in \mathbb{C}^3$ vardır. Bu durumda $p \neq \lambda q \quad (\lambda \in \mathbb{C})$ olur. $[p], [q] \in \mathbb{P}^2$ olarak $[p] \neq [q]$ olur.

Ayrıca ℓ, p ve q dan geçen teğet doğrusu olduğundan $\langle p, q \rangle = 0$ olur. 1 den $\langle q, q \rangle = 0$ olur. p nin düzgün nokta oluşundan da $\langle p, p \rangle = 0$ olur.
$\langle p, p \rangle = p^t H_p p = d(d-1)f(p) = 0$ olup $p \in V(f)$ elde edilir.

$$f(p+tq) = f(p) + (\Delta_p q)t + \frac{1}{2}(q^t H_p q)t^2 + O(t^3)$$

eşitliğinde ilk üç terimin 0 olduğu gösterilmiş oldu. Öyleyse

$$f(p+tq) = O(t^3)$$

sonucuna ulaşılır.

Bunun sonucu olarak f nin p deki ℓ ye göre mertebesi, en az 3 olur. Bu da p nin büküm noktası olması demektir. ■

Teorem 4.9 $F(X_0, X_1, X_2)$ indirgenemez, homojen, derecesi en az 2 olan bir polinom olsun. Öyleyse, *Hessian* determinant, F ye tam bölünemez. Özel olarak, *Hessian* determinant $\neq 0$ dır.

Sonuç 4.10 Teorem 4.9 daki koşullarla $V(f,h)$ sonludur. Bunun sonucunda da $V(f)$ nin sonlu sayıda büküm noktası vardır.

İspat: (Teorem 4.9 un ispatı) $\mathcal{C} = V(F)$ olsun. F nin *Hessian* determinantı böldüğünü varsayalım. $h = \det\left(\dfrac{\partial^2 F}{\partial X_i \partial X_j}\right)$ olsun. Öyleyse $V(F) \subset V(h)$ olur. Yani $V(F)$ nin her düzgün noktası $V(h)$ nin elemanı olup Teorem 4.8 ten $V(F)$ nin her düzgün noktası büküm noktasıdır. $p \in V(F)$ düzgün nokta olduğunda Sonuç 4.5 ten $\langle p, p \rangle = 0$ olur. $\ell = p + tq$, $\mathcal{C}$ ye p noktasında teğet olan olan bir doğru ve $p \neq q$ olsun. Buradan yine aynı sonuçtan $\langle q, q \rangle = 0$ olur. Genelliği kaybetmeksizin, $p = (1, a_1, a_2)$ olsun. F_2, F nin X_2 ye göre kısmi türevi olmak üzere $F(1, X_1, X_2) = 0$ ve genelliği kaybetmeksizin $F_2(1, a_1, a_2) \neq 0$ eşitliğini sağlayan noktalar için kapalı fonksiyon teoreminden (a_1 in bir komşuluğunda tanımlanabilen) $X_2 = \phi(X_1)$ analitik fonksiyonu vardır.

Euler eşitliği kullanılarak, $(k-1)\frac{\partial F}{\partial X_0} = \sum \frac{\partial^2 F}{\partial X_0 \partial X_j} X_0 X_j$ yazılır. Bu eşitlikte X_0 yerine 1 yazılır ve kısmi türevler $\dfrac{\partial F}{\partial X_i} = F_i$ ve $\dfrac{\partial^2 F}{\partial X_i \partial X_j} = F_{ij}$ olarak alınırsa,
$(k-1)F_0 = \sum F_{0j} X_j$ eşitliği elde edilir. Buradan da eşitliğin sağ tarafı düzenlenerek $(k-1)F_0 = F_{00}X_0 + aF_{01}X_1 + bF_{02}X_2$ haline getirilir. Diğer kısmi türevler de benzer şekilde yazılabilir.

Şimdi bu eşitlikleri de yerleştirerek Hessian determinant h yi adım adım oluşturalım. İlk olarak temel satır-sütun işlemleri ve ardından kısmi türevlerle ilgili elde edilmiş olan eşitlik kullanılınca h

$$h = \begin{vmatrix} F_{00} & F_{01} & F_{02} \\ F_{10} & F_{11} & F_{12} \\ F_{20} & F_{21} & F_{22} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} F_{00} + aF_{01} + bF_{02} & F_{01} & F_{02} \\ F_{10} + aF_{11} + bF_{12} & F_{11} & F_{12} \\ F_{20} + aF_{21} + bF_{22} & F_{21} & F_{22} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} (k-1)F_0 & F_{01} & F_{02} \\ (k-1)F_1 & F_{11} & F_{12} \\ (k-1)F_2 & F_{21} & F_{22} \end{vmatrix}$$

şekline gelir.

$$\begin{aligned} h &= (k-1)\begin{vmatrix} F_0 & F_{01} & F_{02} \\ F_1 & F_{11} & F_{12} \\ F_2 & F_{21} & F_{22} \end{vmatrix} \\ &= (k-1)\begin{vmatrix} F_0+aF_1+bF_2 & F_{01}+aF_{11}+bF_{12} & F_{02}+aF_{11}+bF_{22} \\ F_1 & F_{11} & F_{12} \\ F_2 & F_{12} & F_{22} \end{vmatrix} \end{aligned}$$

halini alır.

Euler eşitliğinden elde etmiş olduklarımızı matrisin 1. satırında yerine yazdığımızda

$$h=(k-1)\begin{vmatrix} (k-1)F(1,a,b) & (k-1)\frac{\partial F}{\partial X_1} & (k-1)\frac{\partial F}{\partial X_2} \\ \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots \end{vmatrix} = (k-1)^2\begin{vmatrix} 0 & \frac{\partial F}{\partial X_1} & \frac{\partial F}{\partial X_2} \\ \frac{\partial F}{\partial X_1} & F_{11} & F_{12} \\ \frac{\partial F}{\partial X_2} & F_{21} & F_{22} \end{vmatrix}$$

olur. Yapılacak son düzenlemelerle h,

$$\begin{aligned} h &= (k-1)^2\left(-\frac{\partial F}{\partial X_1}\left(\frac{\partial F}{\partial X_1}F_{22}-\frac{\partial F}{\partial X_2}F_{12}\right)+\frac{\partial F}{\partial X_2}\left(\frac{\partial F}{\partial X_1}F_{21}-\frac{\partial F}{\partial X_2}F_{11}\right)\right) \\ &= (k-1)^2\left(-\left(\frac{\partial F}{\partial X_1}\right)^2F_{22}+2\frac{\partial F}{\partial X_1}\frac{\partial F}{\partial X_2}F_{12}-\left(\frac{\partial F}{\partial X_2}\right)^2F_{11}\right) \end{aligned}$$

olarak elde edilir.

Eşitlikler kullanılarak h polinomu yukarıdaki gibi oluşturulmuş oldu. Kabulümüzden $\mathcal{C}$ üzerinde $h=0$ idi. Öyleyse, $k>1$ olduğundan,

$$\left(\frac{\partial F}{\partial X_2}\right)^2F_{11}-2\frac{\partial F}{\partial X_1}\frac{\partial F}{\partial X_2}F_{12}+\left(\frac{\partial F}{\partial X_1}\right)^2F_{22}=0 \tag{4.1}$$

dır.

$F(1,X_1,X_2)=g(X_1,X_2)$ olsun. g nin kısmi türevleri şöyledir:

$$g_1=\frac{\partial F}{\partial X_1},\ g_2=\frac{\partial F}{\partial X_2},\ g_{11}=\frac{\partial^2 F}{\partial X_1^2},\ g_{12}=\frac{\partial^2 F}{\partial X_1\partial X_2},\ g_{22}=\frac{\partial^2 F}{\partial X_2^2}$$

g, F nin dehomojeni olup g nin kısmi türevini almakla, F nin kısmi türevlerini alıp sonra dehomojenize etmek aynı sonucu verir. Ayrıca $X_2 = \phi(X_1)$ analitik fonksiyonunun grafiğindeki tüm noktalar için 4.1 deki eşitlik geçerli olup bu eşitlik $X_1 = x$ ve $X_2 = y$ için tekrar yazılırsa aşağıdaki hale gelir:

$$\big(F_2(1,x,y)\big)^2 g_{11}(x,y) - 2F_1(1,x,y)F_2(1,x,y)g_{12}(x,y) + \big(F_1(1,x,y)\big)^2 g_{22}(x,y) = 0$$

Eşitliğin her iki tarafı $F_2^2(1,x,y)$ ye bölündüğünde ise

$$\frac{g_{11}(x,y)\big(F_2(1,x,y)\big)^2 - 2g_{12}(x,y)F_1(1,x,y)F_2(1,x,y) + g_{22}(x,y)\big(F_1(1,x,y)\big)^2}{(F_2(1,x,y))^2} = 0$$

olur. Buradan da

$$g_{11}(x,y) + 2g_{12}(x,y)\left(-\frac{F_1}{F_2}\right) + g_{22}(x,y)\big(-\frac{F_1}{F_2}\big)^2 = 0$$

eşitliği elde edilir. $-\dfrac{F_1}{F_2} = \dfrac{dy}{dx} = \phi'(x)$ olup yerine yazılırsa

$$g_{11}(x,y) + 2g_{12}(x,y)\phi'(x) + g_{22}(x,y)\big(\phi'(x)\big)^2 = 0$$

halini alır. Buradan sonra $g_{11} = g_{xx},\ g_{12} = g_{xy},\ g_{22} = g_{yy}$ olarak yazacağız. Yani

$$g_{xx}(x,y) + 2g_{xy}(x,y)\phi'(x) + g_{yy}(x,y)\big(\phi'(x)\big)^2 = 0$$

şeklindedir.

$g(x,y) = 0$ eşitliğinde $y = \phi(x)$ olup x e göre ikinci türevinin 0 oluşundan

$$g_{xx}(x,y) + g_{xy}(x,y)\frac{dy}{dx} + \left(g_{xy}(x,y) + g_{yy}(x,y)\frac{dy}{dx}\right)\frac{dy}{dx} + g_y(x,y)\frac{d^2y}{dx^2} = 0$$

eşitliği elde edilir. Eşitlik düzenlenirse

$$g_{xx}(x,y) + 2g_{xy}(x,y)\frac{dy}{dx} + g_{yy}(x,y)\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + g_y(x,y)\frac{d^2y}{dx^2} = 0$$

haline gelir. İlk üç terimin toplamının 0 olduğu yukarıda gösterilmişti. Böylece $g_y(x,y)\frac{d^2y}{dx^2} = 0$ sonucuna ulaşıldı. Kabulümüzden $g_y = F_2(1,X_1,X_2) \neq 0$ dır. Buradan da $\dfrac{d^2y}{dx^2} = 0$ olmalıdır. Öyleyse ϕ lineerdir. Bu durumda $F(1,X_1,X_2) = 0$ eşitliğini sağlayan noktalar bir doğru parçası olup indirgenemezdir. Bu da F nin indirgenemez ve derecesinin en az 2 olması ile çelişir. Öyleyse iddiamızın doğruluğu gösterilmiş olur. $\blacksquare$

5. PROJEKTİF EĞRİNİN CİNS SAYISININ HESAPLANMASI

Her kompakt, bağlantılı, yönlendirilebilir 2 boyutlu M manifoldu, topolojik olarak küreye g tane kulp eklenerek elde edilir. g sayısına eğrinin cins sayısı denir. Örneğin, küre için $g = 0$ olur. Cins sayısı aynı olan iki yüzey birbirine homeomerfiktir. M manifoldu üçgenlendiğinde köşe, kenar ve yüzlere sahip olacaktır. V köşe sayısını, E kenar sayısını, F yüz sayısını ve $\chi(M)$ Euler karakteristiğini göstermek üzere $\chi(M) = V - E + F$ olur.

Önerme 5.1 g tane kulpa sahip 2 boyutlu, yönlendirilebilir, kompakt bir yüzeyin Euler karakteristiği $2 - 2g$ dir.

İspat: g üzerine tümevarım ile ispatlayalım.
$g = 0$ durumunda yüzey sadece bir küredir. Böylece $V - E + F = 2$ olup (Kendig, 1977) formül sağlanır.

Kulp sayısı $g = k$ olan bir yüzeyin Euler karakteristiğinin $2 - 2k$ olduğu kabul edilip $g = k + 1$ için Euler sayısının $2 - 2(k+1) = 2 - 2k - 2 = -2k$ olduğu gösterilecektir.

Kulp sayısı $g = k$ olan bir yüzey ve yüzeye bir kulp daha eklemek için yüzeyden 2 tane üçgensel disk alalım. Bu diskleri yüzeyden çıkaralım. Oluşan üçgensel boşluklar kulpu oluşturmak için bir üçgen prizma yardımıyla birleştirip bu süreçte Euler sayısında nasıl bir değişme olduğunu hesaplayalım. Kulp eklenmeden önce yüzeyin Euler sayısı $2 - 2k$ idi. İki diskin çıkarılması, yüz sayısını toplamda 2 azaltır. Boşlukları birleştirmek için eklediğimiz prizmadan dolayı ise Euler sayısında 6 yüz ve 6 kenar artışı gözlenir. Son durumda toplamda köşe sayısı değişmezken yüz sayısında 4 ve kenar sayısında 6 artış olup Euler sayısı $2 - 2k + 4 - 6 = -2k$ olur.

Yani kulp sayısı 1 arttırıldığında Euler sayısı 2 azalmış olur.

Böylece tümevarım yöntemiyle g tane kulpa sahip bir yüzeyin Euler karakteristiğinin $2-2g$ olduğu ispatlanmış olur. ■

İddia 5.2 $p(X,Y)$ derecesi $n \geq 2$ olan indirgenemez polinomu (Afin düzlemde) Y eksenini, katlılığı ile birlikte sayıldığında, n noktada kesiyor olsun. Öyleyse $c \neq 0$ olmak üzere

$$p(X,Y) = cY^n + \ldots$$

şeklindedir.

İspat: İddianın aksi kabul edilip polinom Y eksenine kısıtlandığında iki durum ortaya çıkacaktır. Bunlar; $p(0,Y) \equiv 0$ veya $\deg p(0,Y) < n$ durumlarıdır.

$p(0,Y) \equiv 0$ olması $\deg(q(X,Y)) \geq 1$ olmak üzere $p(X,Y) = Xq(X,Y)$ olmasını ve böylece $p(X,Y)$ nin indirgenebilirliğini gerektirir. Bu durum kabulümüzle çelişir.

$\deg p(0,Y) < n$ durumunda ise (kesişim noktaları katlılığı kadar sayılmaktadır) Bezout teoreminden $q(X,Y,Z) = Z^n p(\frac{X}{Z}, \frac{Y}{Z})$ için $V(q)$ ile $V(X)$, projektif düzlemde n tane noktada kesişir. Bunların hepsi afin düzlemdedir. Öyleyse $V(p)$ ile Y ekseni afin düzlemde n tane noktada kesişir. $p(0,Y)$ nin derecesi n den az olduğu için bu bir çelişkidir. ■

$\deg p \geq 2$, p indirgenemez ve $\mathcal{C} = V(p) \subset \mathbb{P}^2$ nonsingüler projektif bir eğri olsun. $\mathcal{C}$ nin sonlu tane büküm noktası ve her bir büküm noktasından geçen sonlu sayıda teğet doğrusu vardır. Yani $\mathbb{P}^2$ deki doğrulardan sonlu tanesi $\mathcal{C}$ eğrisinin bir büküm noktasındaki teğetidir. Bu teğet doğrularının hiçbirinin üzerinde olmayan, ayrıca $\mathcal{C}$ eğrisi üzerinde bulunmayan bir P_∞ noktası alalım ($\mathcal{C}$ eğrisi ile sonlu tane doğrunun birleşimi $\mathbb{P}^2$ olamayacağı için böyle bir seçim anlamlıdır). P_∞ dan geçen ℓ_1 ve geçmeyen ℓ_2 doğrusu alalım.

İddia 5.3 $\ell_1,\ \ell_2$ ve P_∞ üst parağrafta verildiği gibi olmak üzere, ℓ_1 i Y ekseninin kapanışı; ℓ_2 yi X ekseninin kapanışı; P_∞ u Y ekseninin sonsuzdaki noktası kabul edecek şekilde $\mathbb{C}^3$ ten $\mathbb{C}^3$ e bir dönüşüm tanımlanabilir (Bu üçlü ile tanımlı dönüşüm Z ye göre dehomojenize edildiğinde Y eksenine paralel izdüşüm olur).

İspat: (P_∞ noktası $\mathcal{C}$ nin hiç bir büküm noktasındaki teğeti üzerinde ve $\mathcal{C}$ de olmayan bir nokta olmak üzere)

$$\begin{aligned} \ell_1 &\leftrightarrow \mathbb{C}_Y \cup \{\infty\} \text{ (Y ekseninin kapanışı)} \\ \ell_2 &\leftrightarrow \mathbb{C}_X \cup \{\infty\} \text{ (X ekseninin kapanışı)} \\ P_\infty &\leftrightarrow [0:1:0] \text{ (Y ekseninin sonsuzdaki noktası)} \end{aligned}$$

olacak şekilde $\mathbb{C}^3$ ten $\mathbb{C}^3$ e seçilebilecek dönüşümlerden birisi şöyledir ($P_\infty = [a_1 : b_1 : c_1],\ [a_2 : b_2 : c_2] \in \ell_1 \cap \ell_2,\ [a_3 : b_3 : c_3] \in \ell_2 \backslash \ell_1$ olmak ve $[a_3 : b_3 : c_3]$ ile P_∞ noktasını birleştiren doğrunun $\mathcal{C}$ ile kesişimi teğet olmamak üzere):

$$\begin{aligned} \mathbb{C}^3 &\longrightarrow \mathbb{C}^3 \\ P_\infty &\leftrightarrow e_2 \\ (a_2, b_2, c_2) &\leftrightarrow e_3 \\ (a_3, b_3, c_3) &\leftrightarrow e_1 \end{aligned}$$

Yani, dönüşümü sağlayan matris

$$\begin{pmatrix} a_3 & a_1 & a_2 \\ b_3 & b_1 & b_2 \\ c_3 & c_1 & c_2 \end{pmatrix}^{-1}$$

şeklinde olur. ■

İddia 5.4 İddia 5.2 den dolayı

$$\left(\mathcal{C},\mathbb{P}^1,\pi\right)$$

neredeyse $\deg p = n$ katlı örtüdür. ℓ_1 in seçiminden dolayı $\mathcal{C}$ nin noktalarının Y eksenine paralel doğrulara göre mertebesi en çok 2 olur.

Teorem 5.5 (Cins Formülü) $\mathcal{C} \subset \mathbb{P}^2(\mathbb{C})$ eğrisi $p(X,Y)$ indirgenemez polinomu ile tanımlanan nonsingüler projektif eğri olsun. $\deg p = n$ ise $\mathcal{C}$ nin cins sayısı g

$$g = \frac{(n-1)(n-2)}{2}$$

olur.

İspat: $\mathbb{P}^2$ de bir nonsingüler projektif eğri, topolojik olarak bir yüzeydir. Kompleks yüzeyler yönlendirilebilir olduğundan kompleks cebirsel eğriler de topolojik olarak yönlendirilebilirdir. Ayrıca bağlantılı (Kendig,1977) olduklarından nonsingüler projektif eğriler için cins sayısından bahsetmek mümkündür.

$V-E+F = 2-2g$ formülünden, cins sayısı

$$g = 2 - \frac{V-E+F}{2}$$

olarak bulunur. $p(X,Y)$ polinomu İddia 5.2 deki formda yazıldığında, Sonuç 3.17 den $\mathcal{C} = V(p)$ eğrisi $\mathbb{P}^1 = \mathbb{C}_X \cup \{\infty\}$ kümesinin neredeyse n katlı örtüsü olup aynı zamanda p nin diskriminant noktalarını köşeleri arasında bulunduracak şekilde üçgenlenebilir.

$\mathbb{P}^1$ in her bir kenar, köşe ve yüzü için örtüde n tane kenar, (diskriminant noktalarına karşılık gelenler hariç) n tane köşe, n tane yüz vardır. Fakat diskriminant noktalarının ters görüntüsü n den daha azdır.

Diskriminantla ilgili teoremlerden kaç tane köşe azalmış olduğu tam olarak hesaplanabilir. Bunun için aşağıdaki adımlar izlenir;

(1) $\mathcal{C}$ nin sonlu tane büküm noktası vardır. Bu noktalardaki teğetlerinden farklı bir doğru seçelim ve Y ekseni olarak bu doğruyu alalım. Böylece İddia 5.3 ten seçilen koordinatlara göre $\mathbb{C}^2$ de $P \in \mathcal{C}$ nin Y eksenine ve P den geçen Y ye paralel doğrulara göre P noktasındaki mertebesi 1 veya 2 olur.

(2) Y göre mertebesi 2 olan noktalarda örtüden birer nokta kaybedilir.

(3) Y göre mertebesi 2 olan noktalar, tam olarak $V(p) \cap V(p_Y)$ nin noktalarıdır. p ve p_Y nin dereceleri sırasıyla n ve $n-1$ olduğundan Bezout teoreminden kesişim noktalarının sayısı katlılığı kadar sayıldığında $n(n-1)$ dir.

(4) Sonuç 3.5 ten kesişim noktalarının kesişim katlılığı 1 dir. Yani $V(p)$ ile $V(p_Y)$, $n(n-1)$ tane farklı noktada kesişir. Bu durumda örtüde meydana gelen kayıp noktaların sayısı kesin olarak $n(n-1)$ kadardır.

V, E, F sırasıyla $\mathbb{P}^1$ in köşe, kenar ve yüz sayılarını göstermek üzere Euler sayısı $\chi = V - E + F = 2$ dir. $\mathbb{P}^1$ deki her bir yüz ve kenara karşılık π nin ters görüntüsüne bakıldığında $\mathcal{C}$ eğrisi üzerinde n tane yüz ve kenar (yani toplamda nF tane yüz ve nE tane kenar) varken, diskriminant noktalarının köşe olduğu yerlerde (her birinde 1 nokta kaybı olduğu için) ters görüntüde toplam $n(n-1)$ kadar azalma olur. Böylece

$$
\begin{aligned}
\chi(C) = 2-2g &= (nV - n(n-1)) - nE + nF \\
2-2g &= nV - nE + nF - n(n-1) \\
2-2g &= 2n - n(n-1) \\
g &= 2 - \frac{2n - n(n-1)}{2} \\
g &= \frac{(n-1)(n-2)}{2}
\end{aligned}
$$

olur. ■

KAYNAKLAR

Hulek, K., 2003. Elementary Algebraic Geometry. Student Mathematical Library, Vol 20, American Mathematical Society, 213 s.

Kendig, K., 1977. Elementary Algebraic Geometry. Graduate Texts in Mathematics 44, Springer-Verlag, 309 s.

Kirwan, F., 1992. Complex Algebraic Curves. London Math. Soc. Student Texts 23, Cambridge University Press, 262 s.

Miranda, R., 1995. Algebraic Curves and Riemann Surfaces. Graduate Studies in Mathematics, Vol 5, American Mathematical Society, 390 s.

http://math.mit.edu/classes/18.721/chap1v29.pdf

ÖZGEÇMİŞ

1989 yılında Mersin'de doğdu. Lise öğrenimini Mersin 75.Yıl Anadolu Öğretmen Lisesi'nde tamamladıktan sonra 2007 yılında Boğaziçi Üniversitesi Ortaöğretim Matematik Öğretmenliği bölümünde lisans eğitimine başladı. Mezun olduğu 2013 yılında ise Çukurova Üniversitesi Matematik Bölümünde yüksek lisansa başladı. Ayrıca, 2015 yılından beri Adana'nın Ceyhan ilçesinde öğretmenlik yapmaktadır.