T.C.
İNÖNÜ ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

ESNEK KÜMELER VE ESNEK TOPOLOJİK UZAYLAR

Tuğba KARAGÜLLE

YÜKSEK LİSANS TEZİ

MATEMATİK ANABİLİM DALI

Ocak 2020

Tezin Başlığı : ESNEK KÜMELER VE ESNEK TOPOLOJİK UZAYLAR

Tezi Hazırlayan : Tuğba KARAGÜLLE

Sınav Tarihi : 21.01.2020

Yukarıda adı geçen tez jürimizce değerlendirilerek Matematik Ana Bilim Dalında Yüksek Lisans Tezi olarak kabul edilmiştir.

Sınav Jüri Üyeleri

Tez Danışmanı: **Doç.Dr. Mustafa Habil GÜRSOY**

İnönü Üniversitesi

Prof.Dr. İlhan İÇEN

İnönü Üniversitesi

Dr. Öğr. Üyesi Mustafa UÇKUN

Adıyaman Üniversitesi

Prof.Dr. Kazım TÜRK

Enstitü Müdürü

ONUR SÖZÜ

Yüksek Lisans Tezi olarak sunduğum "Esnek Kümeler ve Esnek Topolojik Uzaylar" başlıklı bu çalışmanın bilimsel ahlâk ve geleneklere aykırı düşecek bir yardıma başvurmaksızın tarafımdan yazıldığını ve yararlandığım bütün kaynakların, hem metin içinde hem de kaynakçada yöntemine uygun biçimde gösterilenlerden oluştuğunu belirtir, bunu onurumla doğrularım.

Tuğba KARAGÜLLE

ÖZET

Yüksek Lisans Tezi

ESNEK KÜMELER VE ESNEK TOPOLOJİK UZAYLAR

Tuğba KARAGÜLLE

İnönü Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Ana Bilim Dalı

50+v sayfa

2020

Danışman : Doç.Dr. Mustafa Habil GÜRSOY

Bu yüksek lisans tez çalışması dört bölümden oluşmaktadır.

Tezin giriş bölümünde, bu tezde ele alınacak esnek kümeler ve özelliklerinin çıkış noktasından bahsedildi.

İkinci bölümde tezde kullanılacak esnek kümeler ve özellikleri sunulduktan sonra üçüncü bölümde esnek topoloji, esnek topolojik uzay ve özelliklerine yer verildi.

Son olarak dördüncü bölümde esnek bağlantılı topolojik uzaylar ve özellikleri incelenerek "esnek lokal yol bağlantılı topolojik uzay" ın tanımı yapıldı ve özellikleri üzerinde duruldu.

ANAHTAR KELİMELER: Esnek küme, esnek topolojik uzay, esnek bağlantılılık, esnek yol bağlantılılık, esnek lokal yol bağlantılılık.

ABSTRACT

M.Sc. Thesis

SOFT SETS AND SOFT TOPOLOGICAL SPACES

Tuğba KARAGÜLLE

İnönü University
Graduate School of Natural and Applied Sciences
Department of Mathematics

50+v pages

2020

Supervisor : Assoc.Prof.Dr. Mustafa Habil GÜRSOY

This master thesis consists of four chapters.

In the introductory part of the thesis, the soft sets discussed in this thesis and the emergence of the features of soft sets are mentioned.

In the second part, soft sets and the properties of soft sets are explained.

In the third chapter, soft topology, soft topological space and its features are determened in detail.

Finally, in the fourth chapter, the soft connected topological space and their properties are by examining, the definition of the "soft locally path connected topological space" is made and its properties are emphasized.

KEYWORDS: Soft set, soft topological space, soft connectedness, soft path connectedness, soft locally path connectedness.

TEŞEKKÜR

Yüksek lisans tez çalışmamı yöneten, tezin hazırlanmasının her aşamasında yardımlarını esirgemeyen çok değerli hocam Doç. Dr. M. Habil GÜRSOY'a teşekkürü bir borç biliyorum ve şükranlarımı sunuyorum. Bu tezin yazım düzeninde fikirlerinden yararlandığım her zaman değerli zamanını bana ayıran Doç. Dr. M. Kemal ÖZDEMİR'e, eğitim-öğretim sürecim boyunca sabır ve sevgi ile her zaman yanımda olan benden hiçbir zaman desteklerini esirgemeyen ve bu hayattaki en büyük değerim olan aileme sonsuz teşekkürlerimi sunarım.

İÇİNDEKİLER

SİMGELER VE KISALTMALAR

$\forall$	: Her
$\exists$	: Vardır
$\neq$	: Eşit değildir
$\in$	: Elemanıdır
$\notin$	: Elemanı değildir
$\Longrightarrow$	: Gerek şart
$\Longleftarrow$	: Yeter şart
U ve X	: Evrensel küme
E	: Parametrelerin kümesi
$\varnothing$	: Boş küme
(F, A)	: Esnek küme
$S(U)$	: U üzerinde tanımlı tüm esnek kümelerin ailesi
$(F, A)^c$	: Esnek kümesinin relatif tümleyeni
$\widetilde{\cap}$	: Esnek kesişim
$\widetilde{\cup}$	: Esnek birleşim
$\widetilde{\subset}$	: Esnek alt küme
$\widetilde{\setminus}$	: Esnek fark
$P(X)$	: Kuvvet kümesi
(X, τ, E)	: Esnek topolojik uzay
$\overline{(F, A)}$	: (F, A) esnek kümesinin kapanışı
$(F, A)^\circ$	: (F, A) esnek kümesinin içi
$(F, A)^s$	: (F, A) esnek kümesinin sınırı
$\widetilde{X}$	: Esnek tam küme
Φ	: Esnek boş küme
$\prod \tau_i$	: Esnek çarpım topolojisi
$\widetilde{\mathcal{N}}(x)$	: x noktasının $\widetilde{\tau}$ esnek topolojisine göre komşuluklar ailesi
$\widetilde{\mathfrak{S}}(x)$	: x noktasının $\widetilde{\tau}$ esnek topolojisine göre komşuluklar tabanı

1. GİRİŞ

Günlük hayattaki problemler pek çok belirsizlik taşımaktadır. Örneğin havanın soğuk veya sıcak olması: kime göre soğuk veya kime göre sıcak. Kutuplarda yaşayan bir insana göre sıcaklık kavramı ile ekvator bölgesinde yaşayan bir insana göre sıcaklık kavramı görecelilik içermektedir. 15 santigrad derecelik hava kutup bölgesinde sıcak kabul edilirken ekvator bölgesinde serin veya soğuk kabul edilebilir. Bu örnekten de görüleceği üzere belirsiz, göreceli durumlar için klasik doğru-yanlış mantığı yeterli gelmemektedir. Özellikle ekonomi, sosyoloji gibi sosyal bilimlerde ve mühendislik, tıp gibi pek çok bilim dalında bilim insanları kesin olmayan bilgilerin modellenmesinin karmaşıklğı ile uğraşmaktadır. Bu durum bilim insanlarını belirsizliklerin üstesinden gelmek için çok farklı matematiksel modellemeler ve araçlar geliştirmeye sevk etmiştir. Bu çalışmaların sonucunda belirsiz tipteki problemlerin çözümü için, aralık matematiği, bulanık (fuzzy) küme teorisi, yaklaşımlı (rough) küme teorisi, esnek (soft) küme teorisi gibi farklı teoriler geliştirilmiştir.

Belirsizlikle ilgili problemlerde kullanılan en yaygın yöntem Azeri bilim insanı Zadeh tarafından 1965 yılında geliştirilen bulanık küme teorisidir [11]. Aristo mantığıyla bir önermenin doğruluk değeri 0 veya 1 iken bulanık mantıkta doğruluk değeri $[0, 1]$ aralığındaki tüm sayılardır. Diğer bir ifadeyle bir bulanık küme, bir kümedeki her bir elemanı [0,1] birim aralığındaki bir reel sayıile eşleştiren bir fonksiyon olarak düşünülür. Bu reel sayı sözkonusu elemanın kümeye ait olma derecesini gösterir. Bu fonksiyona da üyelik fonksiyonu adı verilir. Oldukça yaygın ve kullanışlı bir teori olmakla birlikte bulanık küme teorisinde bazı zorluklar karşımıza çıkmaktadır. Şöyle ki, bulanık küme işlemlerinde farklı yazarlar tarafından yapılan farklı tanımlar bulunmaktadır. Mesela iki bulanık kümenin kesişimi veya birleşimi için farklı tanımlar bulunmaktadır. Dolayısıyla yegâne bir tanımın olmaması aynı problem için farklı çözümleri doğurmaktadır. Bunun yanı sıra bir üyelik fonksiyonunun değeri tek yönlü olduğundan bir elemanın kümeye ait olma derecesi her kişiye göre farklı yorumlanabilir. Ayrıca üyelik fonksiyonunun inşa edilmesi tamamen bireysel olduğundan, her bir durum için birden fazla üyelik fonksiyonu oluşturulabilir. Bunun sonucu olarak aynı problem için farklı sonuçlar çıkar. Bulanık küme teorisi, klasik olasılık teorisinin bir alternatifidir. Bu teori ile gerçek dünyada var olan belirsizlik kavramı matematiksel olarak incelenmeye başlanmış ve özelikle görüntü işleme, karar verme mekanizmalarında, modellemede, robotik, kontrol mühendisliği, bilgisayar mühendisliği, bilgi-işlem, yapay zeka gibi pek çok alanda uygulama imkânı bulmuştur.

Üyelik fonksiyonu ile ilgili yukarıda bahsedilen yapısal zorluklardan dolayı Molodtsov 1999 yılında üyelik fonksiyonu inşasından bağımsız bir kümeler teorisine ihtiyaç olduğunu görerek belirsizlikler için yeni bir matematiksel araç olarak esnek küme kavramını literatüre kazandırmıştır [12]. Esnek küme teorisi ile bulanık küme teorisi birbirine benzeyen sistemler olmakla birlikte esnek küme teorisi bulanık küme teorisinin aksine reel değerli bir fonksiyon yerine, küme değerli bir fonksiyonla belirsizliği ortadan kaldırmaktadır. Esnek küme teorisinde üyelik fonksiyonu kurma problemi olmaması , teoriyi daha kullanışlı kılmaktadır. Bu avantaj sayesinde esnek küme teorisi ile ilgili çalışmalar başta matematik olmak üzere mühendislik, tıp, sosyal bilimler gibi pek çok bilim dalında ve günlük hayatta karşılaştığımız bilgi sistemleri, karar verme problemleri gibi pek çok alanda hızlı bir şekilde uygulama imkânı bulmuştur.

Molodtsov ilk çalışmasında esnek kümelerin bazı özelliklerini inceleyerek esnek kümeler teorisini bir fonksiyonun pürüzsüzlüğü, oyun teorisi, Riemann integrali, Perron integrali ve ölçü teorisi gibi birçok alana başarıyla uygulamıştır [12]. Ayrıca bu çalışmada esnek küme teorisinin yukarıda bahsedilen olumsuz durumlardan bağımsız olduğunu ortaya koymuştur.

2003 yılında Maji ve arkadaşları Molodtsov' un çalışmasını ilerleterek iki esnek kümenin kesişimi, birleşimi, bir esnek kümenin esnek alt kümesi, esnek eşit küme, bir esnek kümenin tümleyeni, boş esnek küme, tam (veya mutlak) esnek küme gibi temel cebirsel işlemleri tanımlamışlardır [10]. Özellikle bu çalışmadan sonra esnek kümeler ile ilgili çalışmalar büyük bir hız kazanmıştır.

2009 yılında Ali ve arkadaşları , Maji ve arkadaşları tarafından verilen bazı sonuçların yanlış olduğunu göstererek esnek kümeler ile ilgili bazı yeni kavramlar tanımladılar [3].

Esnek kümeler kullanılarak oluşturulan ilk cebirsel yapı ise Aktaş ve Çağman tarafından tanımlanan esnek grup kavramıdır [1]. Bu çalışmada esnek grupların özellikleri incelenmiş, ve ayrıca esnek kümeler ile bulanık ve kaba kümelerin bir karşılaştırması yapılarak aralarındaki farklılıklar örnekler ile açıklanmıştır.

2010 yılında Babitha ve Sunil, esnek kümeler üzerinde kartezyen çarpımı ve bağıntıları tanımlayarak esnek kümeler üzerinde denklik bağıntısı ve parçalanma ile ilgili önemli sonuçlar elde etmişlerdir [5]. Yine bu çalışmada esnek küme fonksiyonu tanımlanmıştır. Kharal ve Ahmad ise 2011 yılında esnek sınıflar üzerinde esnek dönüşüm kavramını vermişlerdır [8]. Ayrıca bir esnek kümenin esnek dönüşüm altındaki görüntüsünü ve ters görüntüsünü incelemişlerdir.

Esnek küme teorisinin topolojik açıdan incelenmesi ise yine 2011' de Shabir ve Naz tarafından olmuştur [16]. Shabir ve Naz bu çalışmada bir başlangıç evreni ve sabit bir parametre üzerinde esnek topoloji kavramını vererek esnek açık küme, esnek kapalı küme, esnek alt uzay, esnek iç nokta, esnek kapanış, bir esnek noktanın esnek komşuluğu gibi temel topolojik kavramları tanımlamışlardır. Esnek topolojik uzayın klasik topolojik uzaydan daha kapsamlı ve genelleştirilmiş olduğunu ortaya koymuşlardır. Ayrıca esnek topolojik uzaylarda esnek ayırma aksiyomlarını tanımlamışlardır.

Shabir ve Naz' ın esnek topolojik uzay tanımını vermesinden sonra esnek topolojik uzaylar üzerine çalışmalar daha da artmıştır. 2012 yılında Aygünoğlu ve Aygün, esnek çarpım topolojisi ve esnek kompaktlık kavramlarını tanımlayarak Alexander alt taban teoremi ile Tychonoff teoremini esnek topolojik uzaylar açısından incelemişlerdir [4]. Yine 2012' de Zorlutuna ve arkadaşları esnek topolojik uzaylarda esnek iç nokta, esnek süreklilik ve esnek kompaktlık üzerine önemli sonuçlar elde etmişlerdır [18]. Nazmul ve Samanta [14]' de esnek topolojik uzaylarda komşuluk üzerine çalışmalar yapmışlardır.

Bu tezde ayrıntılı bir şekilde ele alınan esnek bağlantılılık kavramı ise ilk defa Peyghan ve arkadaşları tarafından 2013 yılında literatüre girmiştir [15]. Bu çalışmada bir esnek bağlantılı uzay, boş olmayan esnek ayrık ve esnek açık iki esnek kümenin birleşimi olarak yazılamamasışeklinde tanımlanmıştır. Peyghan ve arkadaşları yine bu çalışmada esnek lokal bağlantılı uzay kavramını sunmuşlardır. Ayrıca esnek bağlantılılık ve esnek lokal bağlantılılık ile ilgili önemli sonuçlar ortaya koymuşlardır.

2014 yılında Al-Khafaj ve Mahmood, esnek bağlantılı kümeler ve esnek bağlantısız kümeler ile ilgili önemli sonuçlar elde etmişlerdir [2]. Esnek bağlantılı uzaylarda kalıtsallık özelliğini tanımlayarak kalıtsallık özelliğinin esnek bağlantılılı topolojik uzaylar ile bağlantılılı topolojik uzaylar arasındaki karşılaştırmasını yapmışlardır. Ayrıca esnek bağlantılılı uzaylar ile esnek lokal bağlantılılı uzaylar arasındaki ilişkiyi incelemişlerdir.

Homotopi teoride önemli bir araç olan ve yol bağlantılılığın temel unsuru olan yol kavramının esnek topolojik versiyonu ise 2013' te Bayramov ve arkadaşları tarafından verilmiştir [6]. Bunun için öncelikle $I = [0, 1]$ birim aralığı üzerinde bir esnek topoloji oluşturup esnek birim aralık kavramını tanımlayarak esnek birim aralığın bir esnek bağlantılı uzay olduğunu göstermişlerdir. Esnek birim aralığın verilmesiyle ilk defa esnek yol bağlantılı uzay kavramı bu çalışmada sunulmuştur. Ayrıca esnek yol bağlantılı uzaylar ile esnek bağlantılı uzaylar arasındaki ilişkilerin incelendiği bu çalışma esnek homotopi teorisinin başlangıcı olarak kabul edilebilir.

Bu tezde ilk defa esnek lokal yol bağlantılı uzay tanımlanarak bu kavram ile ilgili bazı önemli sonuçlar elde edilmiştir.

Dört bölümden oluşan bu tezin ilk bölümü olan giriş bölümünde esnek küme teorisi ve esnek topolojik uzaylar ile ilgili ayrıntılı bir literatür verilmiştir.

Tezin ikinci bölümü tezde kullanılacak olan esnek kümeler ile ilgili temel tanım ve teoremlere ayrılmıştır.

Üçüncü bölümde esnek topolojik uzaylar ile ilgili temel bilgiler sunulmuştur.

Tezin son bölümü olan dördüncü bölüm esnek topolojik uzaylarda bağlantılılık kavramına ayrılmıştır. Dört alt kısımdan oluşan bu bölümün birinci kısmında esnek bağlantılı uzaylar, ikinci kısmında esnek lokal bağlantılı uzaylar, üçüncü kısmında esnek yol bağlantılı uzaylar ile ilgili bilgiler verilmiştir. Son olarak dördüncü kısımda esnek lokal yol bağlantılı uzay tanımlanarak bazı sonuçlar elde edilmiştir.

2. ESNEK KÜMELER VE ÖZELLİKLERİ

Bu kısımda esnek küme teorisiyle ilgili bazı temel kavramlara, esnek kümelerin özelliklerine ve örneklerine yer verilecektir.

Tanım 2.0.1. *Bir U evrensel kümesinin kuvvet kümesi $P(U)$, parametrelerin bir kümesi E ve $A \subseteq E$ olsun. $F : A \longrightarrow P(U)$ olmak üzere*

$$F_A = (F, A) = \{(x, F(x)) \mid x \in A, F(x) \in P(U)\}$$

*şeklinde ikililerin oluşturduğu kümeye **esnek küme** denir [12].*

Bir esnek kümeyi, ilk bileşeni parametre ve ikinci bileşeni bu parametreyi gerçekleyen nesnelerin sınıfı şeklinde sıralı ikililerden oluşturulur.

*Yukarıdaki tanımdaki F fonksiyonu yaklaşım fonksiyonu olarak adlandırılır. $\varepsilon \in A$ parametreleri ile ilişkili nesneleri içeren $F(\varepsilon)$ kümesi de $\varepsilon-$**yaklaşım kümesi** olarak isimlendirilir.*

Örnek 2.0.1. *U ele alınan tüm toprakların kümesi ve E parametre kümesi olsun. Mesela E={killi, susuz, taşlı, kıraç, kırmızı} olacak şekilde alınırsa bu durumda esnek kümeyi "killi toprak, taşlı toprak, kıraç toprak, susuz toprak ve kırmızı toprak" şeklinde tanımlanır.*

U evreninde $U = \{h_1, h_2, h_3, h_4, h_5, h_6, h_7\}$ yedi tane farklı toprak alalım. $E = \{ e_1, e_2, e_3, e_4, e_5\}$ parametre kümesini e_1 =killi, e_2 =susuz, e_3 =taşlı, e_4 =kıraç, e_5 =kırmızı şeklinde belirleyelim. Eğer

$$F(e_1) = \{h_2, h_4\}$$

$$F(e_2) = \{h_1, h_5, h_6, h_7\}$$

$$F(e_3) = \{h_3\}$$

$$F(e_4) = \{h_1, h_2, h_3\}$$

$$F(e_5) = \{h_4, h_5, h_6\}$$

ise (F,E) *esnek kümesi*

$$(F,E)=\left\{\begin{array}{c}(killi\ topraklar,\{h_2,h_4\}),(susuz\ topraklar,\{h_1,h_5,h_6,h_7\}),(taşlı\ topraklar,\{h_3\}),\\(kıraç\ topraklar,\{h_1,h_2,h_3\}),(kırmızı\ topraklar,\{h_4,h_5,h_6\})\end{array}\right\}$$

olarak elde edilir.

Ayrıca $A=\{\ e_1,\ e_3,\ e_5\}\subseteq E$ *olarak seçilirse* $(F,A)=\{(e_1,\{h_2,h_4\}),(e_3,\{h_3\}),(e_5,\{h_4,h_5,h_6\})\}$ *esnek kümesi elde edilir.*

Örnek 2.0.2. *Ele alınan bütün ceketlerin kümesi* $U=\{h_1,h_2,h_3,h_4,h_5,h_6,h_7\}$ *ve parametre kümesi* $E=\{e_1=pahalı, e_2=mor, e_3=kışlık, e_4=düğmeli, e_5=yakalı\}$ *olsun.* $A=\{e_1,e_2,e_5\}\subseteq E$ *için* $F(e_1)=\{h_1,h_3,h_7\}$ *olması demek* h_1, h_3 *ve* h_7 *ceketlerinin pahalı olması demektir.* $F(e_2)=U$ *ise tüm ceketlerin mor olduğunu,* $F(e_5)=\{h_2,h_4,h_6\}$ *ise* h_2,h_4 *ve* h_6 *ceketlerinin yakalı olduğu anlamına gelir. Buna göre* (F,A) *esnek kümesi*

$$(F,A)=\{(e_1,\{h_1,h_3,h_7\}),(e_2,U),(e_5,\{h_2,h_4,h_6\})\}$$

olarak ifade edilir.

Tanım 2.0.2. $s(U)=\{(F,A)\mid A\subseteq E\}$, U *üzerindeki tüm esnek kümelerin kümesini göstermek üzere* $(F,A)\in s(U)$ *verilsin. Her* $x\in A$ *için* $F(x)=\varnothing$ *oluyorsa* (F,A) *ya* ***esnek boş küme*** *denir ve* $(F,A)=\Phi$ *veya* $\Phi_{\widetilde{A}}$ *sembollerinden birisi ile gösterilir [10].*

Örneğin $A=\{e_2,e_3\}$ *parametre kümesi olarak alındığında* $F(e_2)=F(e_3)=\varnothing$ *oluyorsa* $(F,A)=\{(e_2,\varnothing),(e_3,\varnothing)\}$ *esnek boş kümedir.*

(F,A) *nın esnek boş küme olması demek* U *evrensel kümesinde* $x\in A$ *parametreleriyle ilişkili hiçbir elemanın olmaması demektir.*

Tanım 2.0.3. $(F,A)\in s(U)$ *olsun. Her* $x\in A$ *için* $F(x)=U$ *oluyorsa bu durumda* (F,A) *esnek kümesi* ***esnek tam küme*** *veya* ***esnek evrensel küme*** *olarak adlandırılır ve* $F_{\widetilde{E}}$ *veya* $\widetilde{U}$ *sembollerinden biri ile gösterilir [10].*

Tanım 2.0.4. (F,A), $(G,B) \in s(U)$ *ve* $A \subseteq B$ *olsun. Her* $x \in A$ *için* $F(x) \subseteq G(x)$ *gerçekleniyorsa* (F,A) *ya* (G,B) *nin bir* ***esnek alt kümesidir*** *denir ve* $(F,A)\widetilde{\subseteq}(G,B)$ *ile gösterilir [10].*

Örnek 2.0.3. *Örnek 2.0.1 de* $(F,A) = \{(e_2,\{h_1,h_3,h_7\}),(e_4,\{h_5\})\}$ *olacak şekilde ve* $(G,B) = \{(e_2,\{h_1,h_2,h_3\}),(e_3,\{h_1,h_5\}),(e_4,\{h_1,h_2,h_4,h_5\})\}$ *olarak alınırsa* $(F,A)\widetilde{\subseteq}(G,B)$ *olduğu görülür.*

Örnek 2.0.4. *Örnek 2.0.1 de* $(F,A) = \{(e_3,\{h_1,h_2,h_3\}),(e_4,\{h_2,h_3,h_4\}),(e_5,\{h_3,h_4,h_5\})\}$ *olacak şekilde ve* $(G,B)=\{(e_3,\{h_3\}),(e_5,\{h_1,h_2,h_4\})\}$ *olarak alınırsa* $(F,A)\widetilde{\nsubseteq}(G,B)$ *olduğu açıktır.*

Tanım 2.0.5. $(F,A),(G,B) \in s(U)$ *ve* $A = B$ *olsun. Her* $x \in A$ *için* $F(x) = G(x)$ *gerçekleniyorsa* (F,A) *ile* (G,B) *esnek kümelerine* ***esnek eşittir*** *denir ve* $(F,A) \cong (G,B)$ *yazılır [10].*

Tanım 2.0.6. (F,A), $(G,B) \in s(U)$ *ve* $C = A \cup B$ *olsun. Her* $x \in C$ *için*

$$H(x) = \begin{cases} F(x), x \in A - B \\ G(x), x \in B - A \\ F(x) \cup G(x), x \in A \cap B \end{cases}$$

ile tanımlanan ve $(F,A)\widetilde{\cup}(G,B) = (H,C)$ *esnek kümesine* (F,A) *ile* (G,B) *nin* ***esnek birleşimi*** *denir [10].*

Örnek 2.0.5. *Örnek 2.0.2 için* $(F,A) = \{(e_1,\{h_1,h_3,h_7\}),(e_2,U),(e_5,\{h_2,h_4,h_6\})\}$ *ve* $(G,B) = \{(e_1,\{h_2\}),(e_2,\{h_1,h_3,h_7\}),(e_5,\{h_2,h_3,h_4\})\}$ *olarak alınırsa. Bu durum-*

da esnek birleşim $(F,A)\widetilde{\cup}(G,B)=\{(e_1,\{h_1,h_2,h_3,h_7\}),(e_2,U),(e_5,\{h_2,h_3,h_4,h_6\})\}$ *olarak elde edilir.*

Tanım 2.0.7. (F,A), $(G,B) \in s(U)$ *olsun. Bu takdirde,* $C = A \cap B$ *olmak üzere* (H,C) ***esnek kesişimi****, her* $x \in C$ *için* $F(x) \cap G(x) = H(x)$ *şeklinde tanımlanır ve* $(F,A)\widetilde{\cap}(G,B) = (H,C)$ *yazılır [10].*

Örnek 2.0.6. *Örnek 2.0.2 de* $(F,A)=\{(e_1,\{h_1,h_3\}),(e_2,U),(e_5,\{h_2,h_4,h_6\})\}$ *ve* $(G,B)=\{(e_1,\{h_2\}),(e_2,\{h_1,h_3\}),(e_5,\{h_2,h_3,h_4\})\}$ *olarak alınırsa*

$$(F,A)\widetilde{\cap}(G,B)=\{(e_1,\varnothing),(e_2,\{h_1,h_3\}),(e_5,\{h_2,h_4\})\}$$

olur.

Tanım 2.0.8. (F,E) *ve* (G,E) *esnek kümelerinin* ***esnek farkı****, her* $x\in E$ *için* $H(x)=F(x)\backslash G(x)$ *şeklinde tanımlanır ve* $(F,E)\widetilde{\backslash}(G,E)$ *ile gösterilir [15].*

Örnek 2.0.7. *Örnek 2.0.2 için* $(F,E)=\{(e_1,\{h_1,h_3\}),(e_2,U),(e_5,\{h_2,h_4,h_6\})\}$ *ve* $(G,E)=\{(e_1,\{h_2\}),(e_2,\{h_1,h_3\}),(e_5,\{h_2,h_3,h_4\})\}$ *olacak şekilde seçilirse bu durumda esnek fark kümesi* $(F,E)\widetilde{\backslash}(G,E)=\{(e_1,\{h_1,h_3\}),(e_2,\{h_2,h_4,h_5,h_6\}),(e_5,\{h_6\})\}$ *olarak elde edilmiş olur.*

Tanım 2.0.9. $(F,A)\in S(U)$ *nun* ***bağıl tümleyeni****, bir* $F':A\longrightarrow P(U)$ *dönüşümüdür öyleki her* $x\in A$ *için* $F'(x)=U\backslash F(x)=(F(x))^c$ *dir, yani* $(F,A)'=(F',A)$ *dir [10].*

Esnek tümleyen kavramının daha anlaşılır olması için bir örnek verecek olursak, Örnek 2.0.1 de $(F,A)=\{(e_1,\{h_2,h_4\}),(e_3,\{h_3\}),(e_5,\{h_4,h_5,h_6\})\}$ *olarak verilmişti. Bu durumda* $(F,A)'=\{(e_1,\{h_1,h_3,h_5,h_6\}),(e_3,\{h_1,h_2,h_4,h_5,h_6\}),(e_5,\{h_1,h_2,h_3\})\}$ *şeklinde olur.*

Bu çalışmada "$\bullet'$*" ile esnek tümleyen, "*$\bullet^c$*" ile klasik tümleyen kastedilmiştir.*

Önerme 2.0.1. (F,E),$(G,E)\in s(U)$ *için aşağıdaki özellikler geçerlidir [15]:*

i) $((F,E)\widetilde{\cup}(G,E))'=(F,E)'\widetilde{\cap}(G,E)'$

ii) $((F,E)\widetilde{\cap}(G,E))'=(F,E)'\widetilde{\cup}(G,E)'$

İspat. i) Her $e\in E$ için $H(e)=F(e)\cup G(e)$ iken $(F,E)\widetilde{\cup}(G,E)=(H,E)$ olsun.

$$\begin{aligned}H^c(e)&=(F(e)\cup G(e))^c\\&=(F(e))^c\cap(G(e))^c\\&=F^c(e)\cap G^c(e)\end{aligned}$$

dir. Buradan $(H,E)' = (F,E)'\widetilde{\cap}(G,E)'$ gelir.

ii) Her $e \in E$ için $H(e) = F(e) \cap G(e)$ iken $(F,E)\widetilde{\cap}(G,E) = (H,E)$ olsun.

$$\begin{aligned} H^c(e) &= (F(e) \cap G(e)) \\ &= (F(e))^c \cup (G(e))^c \\ &= F^c(e) \cup G^c(e) \end{aligned}$$

dir. Böylece$(H,E)' = (F,E)'\widetilde{\cup}(G,E)'$ elde edilir.

□

Teorem 2.0.1. *U üzerindeki esnek kümeler arasında aşağıdaki özellikler geçerlidir [15]:*

i) $(F,A)\,\widetilde{\cap}\,(F,A) = (F,A)$ *ve* $(F,A)\,\widetilde{\cup}\,(F,A) = (F,A)$,

ii) $(F,A)\,\widetilde{\cap}\Phi = \Phi$ *ve* $(F,A)\,\widetilde{\cup}\Phi = (F,A)$,

iii) $(F,A)\,\widetilde{\cap}\widetilde{U} = (F,A)$ *ve* $(F,A)\,\widetilde{\cup}\widetilde{U} = \widetilde{U}$,

iv) $(F,A)\,\widetilde{\cap}\,(F,A)' = \Phi$ *ve* $(F,A)\,\widetilde{\cup}\,(F,A)' = \widetilde{U}$,

v) $\big((F,A)'\big)' = (F,A)$,

vi) $(F,A)\,\widetilde{\cup}\,(G,B) = (G,B)\,\widetilde{\cup}(F,A)$ *ve* $(F,A)\,\widetilde{\cap}\,(G,B) = (G,B)\widetilde{\cap}\,(F,A)$,

vii) $(F,A)\,\widetilde{\cup}\,\big((F,B)\,\widetilde{\cup}\,(F,C)\big) = \big((F,A)\,\widetilde{\cup}\,(F,B)\big)\,\widetilde{\cup}\,(F,C)$,

$(F,A)\,\widetilde{\cap}\,\big((F,B)\,\widetilde{\cap}\,(F,C)\big) = \big((F,A)\,\widetilde{\cap}\,(F,B)\big)\,\widetilde{\cap}\,(F,C)$,

viii) $(F,A)\,\widetilde{\cup}\,\big((F,B)\,\widetilde{\cap}\,(F,C)\big) = \big((F,A)\,\widetilde{\cup}\,(F,B)\big)\,\widetilde{\cap}\,\big((F,A)\,\widetilde{\cup}\,(F,C)\big)$,

$(F,A)\,\widetilde{\cap}\,\big((F,B)\,\widetilde{\cup}\,(F,C)\big) = \big((F,A)\,\widetilde{\cap}\,(F,B)\big)\,\widetilde{\cup}\,\big((F,A)\,\widetilde{\cap}\,(F,C)\big)$,

ix) $(F,A)\,\widetilde{\subseteq}\,(G,A) \Leftrightarrow (G,A)'\,\widetilde{\subseteq}\,(F,A)'$,

x) $(F,A)\,\widetilde{\subseteq}\,(G,A) \Leftrightarrow (F,A)\,\widetilde{\cap}\,(G,A) = (F,A)$.

İspat. Yukarıdaki özellikleri ispatlayalım.

i) $(F,A)\,\widetilde{\cup}\,(F,A)=(F,A)$ olduğunu gösterelim. Bunun için esnek birleşim tanımını kullanılırsa.

$$H(x)=\begin{cases} F(x), x\in A-A \\ F(x), x\in A-A \\ F(x)\cup F(x), x\in A\cap A \end{cases}$$

olup $(F,A)\,\widetilde{\cup}\,(F,A)=(F,A)$ eşitliği sağlanır.

Şimdi $(F,A)\,\widetilde{\cap}\,(F,A)=(F,A)$ olduğunu gösterelim. Bunun için esnek kesişimin tanımını kullanılırsa.

$$(H,C)=(F,A)\widetilde{\cap}(F,A)=(F,A)$$

olup $(F,A)\,\widetilde{\cap}\,(F,A)=(F,A)$ eşitliği sağlanır.

ii) $(F,A)\,\widetilde{\cup}\Phi=(F,A)$ olduğunu gösterelim. Bunun için esnek birleşim tanımını kullanılırsa.

$$H(x)=\begin{cases} F(x), x\in A-\varnothing \\ F(x), x\in \varnothing-A \\ F(x)\cup F(x), x\in A\cap \varnothing \end{cases}$$

olduğundan $(F,A)\,\widetilde{\cup}\Phi=(F,A)$ eşitliği sağlanır.

Şimdi $(F,A)\,\widetilde{\cap}\Phi=\Phi$ olduğunu gösterelim. Bunun için esnek kesişim tanımını kullanılırsa.

$$(H,C)=\Phi\widetilde{\cap}(F,A)=\Phi$$

olduğundan $(F,A)\,\widetilde{\cap}\Phi=\Phi$ eşitliği sağlanır.

iii) $(F,A)\,\widetilde{\cup}\widetilde{U}=\widetilde{U}$ olduğunu gösterelim. Bunun için esnek birleşim tanımını kullanalım.

$$H(x)=\begin{cases} F(x), x\in A-U \\ F(x), x\in U-A \\ F(x)\cup F(x), x\in A\cap U \end{cases}$$

olduğundan $(F,A)\,\widetilde{\cup}\widetilde{U} = \widetilde{U}$ eşitliği sağlanır.

Şimdi $(F,A)\,\widetilde{\cap}\widetilde{U} = (F,A)$ olduğunu gösterelim. Bunun için esnek kesişim tanımını kullanılırsa.

$$(H,C) = (F,\widetilde{U})\widetilde{\cap}(F,A) = (F,\widetilde{U})$$

olup $(F,A)\,\widetilde{\cap}\widetilde{U} = (F,A)$ eşitliği sağlanır.

iv) $(F,A)\,\widetilde{\cup}\,(F,A)' = \widetilde{U}$ olduğunu gösterelim. Bunun için (F,A) esnek kümesinin bağıl tümleyeni ve esnek birleşim tanımını kullanılırsa

$$(F,A)' = (F',A)$$

$$H(x) = \begin{cases} F(x), x \in A - A' \\ F(x), x \in A' - A \\ F(x) \cup F(x), x \in A \cap A' \end{cases}$$

olduğundan $(F,A)\,\widetilde{\cup}\,(F,A)' = \widetilde{U}$ eşitliği sağlanır.

Şimdi $(F,A)\,\widetilde{\cap}\,(F,A)' = \Phi$ olduğunu gösterelim. Bunun için (F,A) esnek kümesinin bağıl tümleyeni ve esnek kesişim tanımını kullanılırsa

$$(F,A)' = (F',A)$$

$$(H,C) = (F,A)\widetilde{\cap}(F,A)' = \Phi$$

olup $(F,A)\,\widetilde{\cap}\,(F,A)' = \Phi$ elde edilir.

v) $((F,A)')' = (F,A)' = ((F')',A) = (F,A)$ olup burada her $\alpha \in A$ için

$$(F')'(\alpha) = (F'(\alpha))^c = ((F(\alpha))^c)^c = F(\alpha)$$

dır.

vi) $(F,A)\,\widetilde{\cup}\,(G,B) = (G,B)\,\widetilde{\cup}(F,A)$ eşitliğini ispatlayalım. Her $x \in A \cup B$ için

$$
\begin{aligned}
\left(F(A)\widetilde{\cup}G(B)\right)(x) &= \begin{cases} F(x), x \in A - B \\ G(x), x \in B - A \\ F(x) \cup G(x), x \in A \cap B \end{cases} \\
&= \begin{cases} F(x), x \in B - A \\ G(x), x \in A - B \\ F(x) \cup G(x), x \in B \cap A \end{cases} \\
&= \left((G,B)\widetilde{\cup}(F,A)\right)(x)
\end{aligned}
$$

olduğundan

$(F,A)\,\widetilde{\cup}\,(G,B) = (G,B)\,\widetilde{\cup}(F,A)$ eşitliği gelir.

Şimdi $(F,A)\,\widetilde{\cap}\,(G,B) = (G,B)\widetilde{\cap}\,(F,A)$ eşitliğini ispatlayalım. Her $x \in A \cup B$ için

$$(F(A)\widetilde{\cap}G(B))(x) = \left((G,B)\widetilde{\cap}(F,A)\right)(x)$$

olduğundan

$(F,A)\,\widetilde{\cap}\,(G,B) = (G,B)\widetilde{\cap}\,(F,A)$ bulunur.

vii) $\left((F,A)\,\widetilde{\cup}\,(G,B)\right)\widetilde{\cup}\,(H,C) = (F,A)\,\widetilde{\cup}\left((G,B)\,\widetilde{\cup}\,(H,C)\right)$ olduğunu göstermek istiyoruz. Bunun için $D = A \cup B$, $E = B \cup C$ ve $M = A \cup B \cup C$ olmak üzere $(F,A)\,\widetilde{\cup}\,(G,B) = (K,D)$ ve $(G,B)\,\widetilde{\cup}\,(H,C) = (L,E)$ olsun. Bunlara ilave olarak $(F,A)\,\widetilde{\cup}\,(G,B)\,\widetilde{\cup}\,(H,C) = (T,M)$ ve $(F,A)\,\widetilde{\cup}\left((G,B)\,\widetilde{\cup}\,(H,C)\right) = [T,M]$

olarak alınırsa

$$T(x) = \begin{cases} K(x), x \in (A \cup B) - C \\ H(x), x \in C - (A \cup B) \\ K(x) \cup H(x), x \in (A \cup B) \cap C \end{cases}$$

$$= \begin{cases} F(x), x \in A - (B \cup C) \\ G(x), x \in B - (A \cup C) \\ F(x) \cup G(x), x \in (A \cap B) - C \\ H(x), x \in C - (A \cap B) \\ F(x) \cup H(x), x \in (A \cap C) - B \\ G(x) \cup H(x), x \in (B \cap C) - A \\ F(x) \cup G(x) \cup H(x), x \in B \cap C \cap A \end{cases}$$

$$= \begin{cases} F(x), x \in A - (B \cup C) \\ G(x), x \in B - (A \cup C) \\ G(x) \cup H(x), x \in (B \cap C) - A \\ F(x) \cup G(x), x \in (A \cap B) - C \\ F(x) \cup H(x), x \in (A \cap C) - B \\ F(x) \cup G(x) \cup H(x), x \in B \cap C \cap A \end{cases}$$

$$= \begin{cases} F(x), x \in A - (B \cup C) \\ L(x), x \in (B \cup C) - A \\ L(x) \cup F(x), x \in (B \cap C) \cap A \end{cases}$$

$$= T(x)$$

olarak elde edilir.

viii) Bu teoremin 7. maddesine benzer bir düşünceyle ispatlanır.

ix) $(F, A) \widetilde{\subseteq} (G, A)$ olması demek her $e \in A$ için $F(e) \subseteq G(e)$ olması demektir. Buradan da her $e \in A$ için $(G(e))^c \subseteq (F(e))^c$ olur. Bu da her $e \in A$ için $G^c(e) \subseteq F^c(e)$ olması demektir. Böylece $(G, A)' \widetilde{\subseteq} (F, A)'$ elde edilir.

x) $(F,A)\widetilde{\subseteq}(G,A)$ olsun. O halde her $e \in A$ için $F(e) \subseteq G(e)$ dir. $(F,A)\widetilde{\cap}(G,A) = (H,A)$ diyelim. Her $e \in A$ için $H(e) = F(e) \cap G(e) = F(e)$ olduğundan $(H,A) = (F,A)$ dır.

Tersine $(F,A)\widetilde{\cap}(G,A) = (F,A)$ olsun. O halde her $e \in A$ için $H(e) = F(e) \cap G(e) = F(e)$ olup buradan $(F,A)\widetilde{\subseteq}(G,A)$ gelir.

$\square$

Tanım 2.0.10. *E ve K sırasıyla boştan farklı X ve Y evrensel kümeleri üzerindeki parametre kümeleri iken $u : X \longrightarrow Y$ ve $p : E \longrightarrow K$ dönüşümlerini ele alalım. Bu durumda, $f_{pu} : S(X) \longrightarrow S(Y)$ dönüşümüne **esnek dönüşüm** denir ve esnek kümelerin görüntüleri ve ters görüntüleri şu şekildedir:*

i) *$(F,A) \in S(X)$ olmak üzere, $(f_{pu}((F,A)), B)$ ile gösterilen (F,A) nın f_{pu} esnek dönüşümü altındaki görüntüsü her $\beta \in B = p(A)$ için*

$$f_{pu}((F,A))(\beta) = \begin{cases} \bigcup\limits_{\alpha \in p^{-1}(\beta) \cap A} u(F(\alpha)), & \alpha \in p^{-1}(\beta) \cap A \neq \varnothing, \\ \varnothing & , \textit{diğer durumlarda} \end{cases}$$

ii) *$(G,B) \in S(Y)$ olmak üzere, $\left(f_{pu}^{-1}((G,B)), D\right)$ ile gösterilen (G,B) nin f_{pu} esnek dönüşümü altındaki ters görüntüsü her $\alpha \in D = p^{-1}(B) \subset E$ için*

$$f_{pu}^{-1}((G,B))(\alpha) = \begin{cases} u^{-1}(G(p(\alpha))) & , p(\alpha) \in B, \\ \varnothing & , p(\alpha) \notin B \end{cases}$$

Eğer $A = E$ ve $B = K$ ise, (F,A) nın f_{pu} dönüşümü altındaki görüntüsü $(f_{pu}((F,A)), B)$ esnek kümesi kısaca $f_{pu}((F,A))$ biçiminde; (G,B) nin f_{pu} dönüşümü altındaki ters görüntüsü olan $\left(f_{pu}^{-1}((G,B)), D\right)$ esnek kümesi ise $f_{pu}^{-1}((G,B))$ biçiminde gösterilecektir [8].

Tanım 2.0.11. *(F,A), $(G,B) \in S(U)$ olsun. Bu iki esnek kümenin **kartezyen çarpımı** olan $(H, A \times B)$ esnek kümesi $(H, A \times B) = (F,A) \times (G,B)$ şeklinde* *tanımlanır. Burada* $H : A \times B \longrightarrow P(U \times U)$, $H(a,b) = F(a) \times G(b)$ *ve* $(a,b) \in A \times B$ *dir, yani;* $H(a,b) = \{(h_i, h_j) \mid h_i \in F(a)$ *ve* $h_j \in G(b)\}$ *dir.*

Sonlu tane boş olmayan esnek kümenin kartezyen çarpımı, bu tanımın genelleştirilmesiyle tanımlanabilir. Boş olmayan $(F_1, A), (F_2, A), \cdots, (F_n, A)$ *esnek kümelerinin kartezyen çarpımı* $(F_1, A) \times (F_2, A) \times \cdots \times (F_n, A)$ *dır. Burada* $(h_1, h_2, \cdots, h_n)$ *sıralı* n *lilerin esnek kümesidir ve* $(h_1, h_2, \cdots, h_n) \in F_i(a)$ *dir [5].*

$x = (a,b) \in (H, A \times B)$ *noktası için* π_i ***izdüşüm fonksiyonu***

$i = 1, 2$ *için* $\pi_i : (H, A \times B) \longrightarrow (H, A \times B)_i$ *ye öyle ki* $\pi_1(x) = a$ *ve* $\pi_2(x) = b$ *şeklindedir.*

Örnek 2.0.8. *"Ceketlerin pahalılığı" nı tanımlayan esnek küme* (F, A), *"Ceketlerin özellikleri" ni tanımlayan esnek küme* (G, B) *olsun.*

U *evreninde* $U = \{h_1, h_2, h_3, h_4, h_5, h_6, h_7, h_8, h_9, h_{10}\}$ *on tane farklı ceket alınsın.*

$A = \{\text{çok pahalı},\ \text{pahalı},\ \text{ucuz}\}$ *ve*

$B = \{fermuarlı,\ \text{cepli},\ \text{kapüşonlu}\}$ *olsun.*

Eğer

$F(\text{çok pahalı}) = \{h_2, h_4, h_7, h_8\}$,

$F(\text{pahalı}) = \{h_1, h_3, h_5\}$,

$F(\text{ucuz}) = \{h_6, h_9, h_{10}\}$ *ve*

$G(fermuarlı) = \{h_2, h_3, h_7\}$,

$G(\text{cepli}) = \{h_5, h_6, h_8\}$,

$G(\text{kapüşonlu}) = \{h_6, h_9, h_{10}\}$ *olacak şekilde alınırsa;* $(H, A \times B)$ *kümesini aşağıdaki şekilde oluşturabiliriz:*

$$H(\text{çokpahalı} \times fermuarlı) = \{h_2, h_4, h_7, h_8\} \times \{h_2, h_3, h_7\}$$
$$= \left\{ \begin{array}{c} (h_2,h_2), (h_2,h_3), (h_2,h_7), (h_4,h_2), (h_4,h_3), (h_4,h_7), \\ (h_7,h_2), (h_7,h_3), (h_7,h_7), (h_8,h_2), (h_8,h_3), (h_8,h_7) \end{array} \right\}.$$

3. ESNEK TOPOLOJİK UZAYLAR

Tanım 3.0.12. *E boştan farklı bir parametre kümesi ve X bir evrensel küme olsun.*

$$F : E \longrightarrow P(X)$$

$$\alpha \mapsto F(\alpha)$$

*olmak üzere $(F,E) \in S(X)$ ve $x \in X$ alınırsa. Her $\alpha \in E$ için $x \in F(\alpha)$ ise x, (F,E) ye **aittir** denir ve $x\widetilde{\in}(F,E)$ yazılır. $x \in X$ olmak üzere, en az bir $\alpha \in E$ için $x \notin F(\alpha)$ oluyorsa x, (F,E) ye **ait değildir** denir ve $x\widetilde{\notin}(F,E)$ yazılır [15].*

Tanım 3.0.13. *$x \in X$ olsun. (x, E) ifadesi X üzerinde her $\alpha \in E$ için $x(\alpha) = \{x\}$ olan esnek kümeyi gösterir ve **tek nokta esnek küme** olarak isimlendirilir [10].*

Tanım 3.0.14. *$(F,E) \in S(X)$ ve $\emptyset \neq Y \subset X$ verilsin. Y de (F,E) nin bir **esnek alt kümesi**, $\alpha \in E$ için ${}^{Y}F(\alpha) = Y \cap F(\alpha)$ şeklinde tanımlanır ve $({}^{Y}F,E)$ ile gösterilir [15].*

Tanım 3.0.15. *τ, X üzerindeki esnek kümelerden oluşan bir aile olsun. Eğer aşağıdaki şartlar varsa τ ailesine X üzerinde bir **esnek topoloji,** (X, τ, E) üçlüsüne de **esnek topolojik uzay** denir [15]:*

i) $\Phi, \widetilde{X} \in \tau$ *dur.*

ii) *Her $i \in I$ için $(F_i,E) \in \tau$ ise $\underset{i \in I}{\widetilde{\cup}}(F_i,E) \in \tau$ dur, yani keyfi sayıdaki esnek kümelerin esnek birleşimi τ ya aittir.*

iii) *$(F_1,E),(F_2,E),...,(F_n,E) \in \tau$ ise $\overset{n}{\underset{i=1}{\widetilde{\cap}}}(F_i,E) \in \tau$ dur, yani sonlu sayıdaki esnek kümenin esnek kesişimi τ ya aittir.*

Tanım 3.0.16. (X,τ,E) *esnek topolojik uzayında* τ *ailesinin her bir elemanına* ***esnek açık küme*** *denir [15].*

Tanım 3.0.17. (X,τ,E) *esnek topolojik uzayı verilsin. Eğer* $(F,E)' \in \tau$ *oluyorsa* (F,E)*' ye* ***esnek kapalı küme*** *denir [15].*

Önerme 3.0.2. (X,τ,E) *esnek topolojik uzayında aşağıdaki ifadeler sağlanır [15].*

i) Φ *ve* $\widetilde{X}$ *esnek kapalı kümelerdir.*

ii) X *üzerinde keyfi sayıdaki esnek kapalı kümenin esnek kesişimi esnek kapalıdır.*

iii) X *üzerinde sonlu sayıdaki esnek kapalı kümenin esnek birleşimi esnek kapalıdır.*

İspat. i) Tanımdan dolayı $\Phi, \widetilde{X}$ esnek kümeleri esnek açıktır. Dolayısıyla $\Phi' = \widetilde{X}$ ve $\widetilde{X}' = \Phi$ olup Φ ve $\widetilde{X}$ aynı zamanda esnek kapalı dır.

ii) $\{F_i\}$ esnek kapalı kümelerin bir sınıfı olsun. $(F,E) = \underset{i=1}{\widetilde{\cap}}(F_i,E)$ ifadesinin esnek kapalı bir küme olduğunu göstermek istiyoruz. Daha önceki önermelerdeki De Morgan kuralından $(F,E)' = \left(\underset{i=1}{\widetilde{\cap}}(F_i,E)\right)'$ esnek açıktır. Çünkü esnek açık kümelerin keyfi sayıdaki esnek birleşimi esnek açıktır. O halde (F,E) esnek kapalıdır.

iii) $(F_1,E),(F_2,E),...,(F_n,E)$ esnek kapalı kümelerini göz önüne alalım. $(F,E) = \overset{n}{\underset{i\in I}{\widetilde{\cup}}}(F_i,E) = (F_1,E)\widetilde{\cup}(F_2,E)\widetilde{\cup}...\widetilde{\cup}(F_n,E)$ esnek birleşiminin esnek kapalı olduğunu göstermek istiyoruz. Bunun için yine esnek kümeler için De Morgan kuralını kullanarak esnek tümleyeninin esnek açık olduğunu göstermemiz yeterli olacaktır.

$$(F,E)' = \left(\overset{n}{\underset{i\in I}{\widetilde{\cup}}}(F_i,E)\right)' = \overset{n}{\underset{i=1}{\widetilde{\cap}}}(F_i,E)'$$

elde edilir. Sonlu tane esnek açık kümenin esnek kesişimi esnek açık olduğundan (F, E) esnek kapalıdır.

□

Tanım 3.0.18. *E bir parametre kümesi ve X bir evrensel küme olmak üzere $\tau = \left\{\Phi, \widetilde{X}\right\}$ ailesine X üzerinde **esnek indiskret topoloji**, (X, τ, E) ye de **esnek indiskret topolojik uzay** adı verilir [15].*

Tanım 3.0.19. *E bir parametre kümesi ve X bir evrensel küme olmak üzere X üzerindeki tüm esnek kümelerin τ ailesine X üzerinde **esnek diskret topoloji**, (X, τ, E) ye de **esnek diskret topolojik uzay** adı verilir [15].*

Önerme 3.0.3. *(X, τ, E) verilsin. Bu takdirde her $\alpha \in E$ için*

$$\tau_\alpha = \{F(\alpha) \mid (F, E) \in \tau\}$$

X de bir topolojidir [15].

İspat. Her bir $\alpha \in E$ için $\tau_\alpha = \{F(\alpha) \mid (F, E) \in \tau\}$ olmak üzere;

i) $\Phi, \widetilde{X} \in \tau$ olduğundan $\phi, X \in \tau_\alpha$ dır.

ii) $\{F_i(\alpha) : i \in I\}$, τ_α üzerinde kümelerin bir koleksiyonu olsun. Her $i \in I$ için $(F_i, E) \in \tau$ olduğundan $\underset{i\in I}{\widetilde{\cup}}(F_i, E) \in \tau$ olur ve böylece $\underset{i\in I}{\cup} F_i(\alpha) \in \tau_\alpha$ elde edilir.

iii) $(F, E), (G, E) \in \tau$ için $F(\alpha), G(\alpha) \in \tau_\alpha$ olsun. $(F, E) \widetilde{\cap} (G, E) \in \tau$ olduğundan $F(\alpha) \cap G(\alpha) \in \tau_\alpha$ dır.

Dolayısıyla her bir $\alpha \in E$ için τ_α, X kümesi üzerinde bir topolojidir.

□

Örnek 3.0.9. *$X = \{h_1, h_2, h_3\}$ ve $E = \{e_1, e_2\}$ olsun. Aşağıdaki esnek kümeleri ele alalım:*

$$\begin{array}{ll} F_1(e_1) = \{h_2\} & F_1(e_2) = \{h_1\} \\ F_2(e_1) = \{h_2, h_3\} & F_2(e_2) = \{h_1, h_2\} \\ F_3(e_1) = \{h_1, h_2\} & F_3(e_2) = X \\ F_4(e_1) = \{h_1, h_2\} & F_4(e_2) = \{h_1, h_3\} \end{array}$$

Bu durumda, $\tau = \left\{\Phi, \widetilde{X}, (F_1, E), (F_2, E), (F_3, E), (F_4, E)\right\}$, X üzerinde bir esnek topolojidir.

Ayrıca bu örnekten önce bahsi geçen önermenin bir uygulaması olarak

$$\tau_{e_1} = \{\phi, X, \{h_2\}, \{h_2, h_3\}, \{h_1, h_2\}\}$$

ve

$$\tau_{e_2} = \{\phi, X, \{h_1\}, \{h_1, h_3\}, \{h_1, h_2\}\}$$

ailelerinin X üzerinde bir topoloji olduğu kolayca görülebilir [15].

Örnek 3.0.10. *$\mathbb{R}$ reel sayılar, $E = \mathbb{R}^+$ pozitif reel sayılar ve*

$$(F, E)_\lambda = \{(x, (x - \lambda, x + \lambda)) \mid x \in E\}$$

kümeleri verilsin. O halde $\tau = \{(F, E)_\lambda \mid \lambda \in E\} \cup \left\{\Phi, \widetilde{E}\right\}$ ailesi $\mathbb{R}$ üzerinde bir esnek topolojidir. $(\mathbb{R}, \tau, E)$ uzayı bir esnek topolojik uzaydır [4].

Önerme 3.0.4. *X üzerinde iki esnek topolojik uzay (X, τ_1, E) ve (X, τ_2, E) olsun. Bu durumda $(X, \tau_1 \cap \tau_2, E)$ de X üzerinde bir esnek topolojik uzaydır [15].*

İspat. i) $\Phi, \widetilde{X} \in \tau_1 \cap \tau_2$ olduğu açıktır.

ii) $\{(F_i, E) : i \in I\}$, $\tau_1 \cap \tau_2$ deki esnek kümelerin bir ailesi olsun. Bu takdirde her $i \in I$ için $(F_i, E) \in \tau_1$ ve $(F_i, E) \in \tau_2$ olup τ_1 ve τ_2 esnek topoloji olduklarından $\widetilde{\bigcup\limits_{i \in I}}(F_i, E) \in \tau_1$ ve $\widetilde{\bigcup\limits_{i \in I}}(F_i, E) \in \tau_2$ dir.

Buradan $\underset{i\in I}{\widetilde{\cup}}(F_i, E) \in \tau_1 \cap \tau_2$ dir.

iii) $(F, E), (G, E) \in \tau_1 \cap \tau_2$ olsun. O halde $(F, E), (G, E) \in \tau_1$ ve $(F, E), (G, E) \in \tau_2$ dir. Buradan $(F, E)\widetilde{\cap}(G, E) \in \tau_1$ ve $(F, E)\widetilde{\cap}(G, E) \in \tau_2$ olup $(F, E), (G, E) \in \tau_1 \cap \tau_2$ elde edilir.

Dolayısıyla $\tau_1 \cap \tau_2$, X üzerinde bir esnek topoloji olup $(X, \tau_1 \cap \tau_2, E)$ bir esnek topolojik uzaydır. □

Bununla birlikte τ_1 ve τ_2 nin birleşimi bunu sağlamaz.

Tanım 3.0.20. *(X, τ, E) de bir (F, E) bir esnek kümesini kapsayan bütün esnek kapalı kümelerin kesişimine (F, E) nin* ***esnek kapanışı*** *denir ve $\overline{(F, E)}$ ile gösterilir [15].*

Açık olarak $\overline{(F, E)}$, X üzerinde (F, E) yi kapsayan en dar esnek kapalı kümedir.

Teorem 3.0.2. *(X, τ, E) esnek topolojik uzayında (F, E) ve (G, E) esnek kümeleri verilsin. Bu takdirde aşağıdakiler geçerlidir:*

i) $\overline{\Phi} = \Phi$ *ve* $\overline{\widetilde{X}} = \widetilde{X}$,

ii) $(F, E)\widetilde{\subset}\overline{(F, E)}$,

iii) (F, E) *esnek kapalıdır* $\Leftrightarrow (F, E) = \overline{(F, E)}$,

iv) $\overline{\overline{(F, E)}} = \overline{(F, E)}$,

v) $(F, E)\widetilde{\subset}(G, E) \Rightarrow \overline{(F, E)}\widetilde{\subset}\overline{(G, E)}$,

vi) $\overline{(F, E)\widetilde{\cup}(G, E)} = \overline{(F, E)}\widetilde{\cup}\overline{(G, E)}$,

vii) $\overline{(F, E)\widetilde{\cap}(G, E)}\widetilde{\subset}\overline{(F, E)}\widetilde{\cap}\overline{(G, E)}$ *[15].*

İspat. i) (X, τ, E), X üzerinde bir esnek topolojik uzay olduğundan Φ ve $\widetilde{X}$ esnek kapalıdır. Φ esnek kapalı olduğundan $\overline{\Phi} = \Phi$ olur. Benzer olarak $\widetilde{X}$ esnek kapalı olduğundan $\overline{\widetilde{X}} = \widetilde{X}$ elde edilir.

ii) $\overline{(F,E)}$, (F,E) esnek kümesini kapsayan en küçük esnek kapalı küme olduğundan $(F,E)\tilde{\subset}\overline{(F,E)}$ olduğu açıktır.

iii) Eğer (F,E), X de bir esnek kapalı küme ise (F,E) nin kendisi (F,E) yi kapsayan en küçük esnek kapalı küme olduğundan $(F,E) = \overline{(F,E)}$ dir. Tersine olarak $(F,E) = \overline{(F,E)}$ olsun. $\overline{(F,E)}$ bir esnek kapalı küme olduğundan (F,E), X üzerinde bir esnek kapalı kümedir.

iv) $\overline{(F,E)}$ esnek kapalı küme olduğundan iii) gereğince $\overline{\overline{(F,E)}} = \overline{(F,E)}$ dir.

v) $(F,E)\tilde{\subset}(G,E)$ olsun. (G,E) yi kapsayan her esnek küme (F,E) yi de kapsar. Bu nedenle (F,E) yi kapsayan bütün esnek kapalı kümelerin kesişimi, (G,E) yi kapsayan bütün esnek kapalı kümelerin esnek kesişimleri tarafından da kapsanır. Yani $\overline{(F,E)}\tilde{\subset}\overline{(G,E)}$ dir.

vi) $(F,E)\tilde{\subset}(F,E)\tilde{\cup}(G,E)$ ve $(G,E)\tilde{\subset}(F,E)\tilde{\cup}(G,E)$ olduğundan bu teoremin v) maddesinden dolayı $\overline{(F,E)}\tilde{\subset}\overline{(F,E)\tilde{\cup}(G,E)}$ ve $\overline{(G,E)}\tilde{\subset}\overline{(F,E)\tilde{\cup}(G,E)}$ dir. Buradan $\overline{(F,E)}\tilde{\cup}\overline{(G,E)}\tilde{\subset}\overline{(F,E)\tilde{\cup}(G,E)}$ elde edilir.

Tersine olarak $(F,E)\tilde{\subset}\overline{(F,E)}$ ve $(G,E)\tilde{\subset}\overline{(G,E)}$ olup, buradan $(F,E)\tilde{\cup}(G,E)\tilde{\subset}$ $\overline{(F,E)}\tilde{\cup}\overline{(G,E)}$ elde edilir. $\overline{(F,E)}\tilde{\cup}\overline{(G,E)}$ iki esnek kapalı kümenin birleşimi olduğundan yine bir esnek kapalı küme olduğu açıktır. Böylece $\overline{(F,E)\tilde{\cup}(G,E)} =$ $\overline{(F,E)}\tilde{\cup}\overline{(G,E)}$ elde edilir.

vii) $(F,E)\tilde{\cap}(G,E)\tilde{\subset}(F,E)$ ve $(F,E)\tilde{\cap}(G,E)\tilde{\subset}(G,E)$ dir. Bu teoremin v) maddesinden dolayı $\overline{(F,E)\tilde{\cap}(G,E)}\tilde{\subset}\overline{(F,E)}$ ve $\overline{(F,E)\tilde{\cap}(G,E)}\tilde{\subset}\overline{(G,E)}$ dir. Buradan da $\overline{(F,E)\tilde{\cap}(G,E)}\tilde{\subset}\overline{(F,E)}\tilde{\cap}\overline{(G,E)}$ elde edilir.

$\tilde{\sqcup}$

Tanım 3.0.21. *(X,τ,E) esnek topolojik uzayında bir $(F,E)\in S(X)$ verilsin. Her bir $\alpha\in E$ için $\overline{F(\alpha)}$, $F(\alpha)$ nın τ_α daki kapanışı olmak üzere $\overline{F}(\alpha) = \overline{F(\alpha)}$ ile tanımlı $(\overline{F},E)$ esnek kümesine (F,E) nin* ***bağıl kapanışı*** *denir [15].*

Önerme 3.0.5. *(X, τ, E) esnek topolojik uzayında bir (F, E) esnek kümesi verilsin. Bu takdirde*
$(\overline{F}, E)\widetilde{\subset}\overline{(F, E)}$ dir [15].

İspat. Her bir $\alpha \in E$ için $\overline{F(\alpha)}$, $F(\alpha)$ yı kapsayan τ_α daki en küçük kapalı kümedir. Ayrıca $\overline{(F, E)} = (H, E)$ dersek $H(\alpha)$ kümesi de $F(\alpha)$ yı kapsayan τ_α da bir kapalı kümedir. Bu da $\overline{F}(\alpha) = \overline{F(\alpha)} \subset H(\alpha)$ yı gerektirir. Böylece istenen sağlanır. □

Sonuç 3.0.1. *(X, τ, E) esnek topolojik uzayında bir (F, E) esnek kümesi verilsin. Bu takdirde $(\overline{F}, E) = \overline{(F, E)}$ olması için gerek ve yeter şart $(\overline{F}, E)' \in \tau$ olmasıdır [15].*

İspat. $(\overline{F}, E) = \overline{(F, E)}$ olsun. Buradan $(\overline{F}, E)$ esnek kapalıdır. O halde $(\overline{F}, E)' \in \tau$ elde edilir.

Tersine olarak $(\overline{F}, E)' \in \tau$ olsun. $(\overline{F}, E)$, (F, E) yi kapsayan bir esnek kapalı kümedir. Önerme 3.0.5 den $(\overline{F}, E)\widetilde{\subset}\overline{(F, E)}$ dir. (F, E) yi içeren herhangi bir esnek kapalı küme $\overline{(F, E)}$ nı da içerir. Dolayısıyla $\overline{(F, E)}\widetilde{\subset}(\overline{F}, E)$ dir. Buradan $(\overline{F}, E) = \overline{(F, E)}$ olduğu gelir. □

Tanım 3.0.22. *(X, τ, E) esnek topolojik uzayında bir $(G, E) \in S(X)$ ve $x \in X$ verilsin. Eğer $x\widetilde{\in}(F, E)\widetilde{\subset}(G, E)$ yi sağlayan bir $(F, E) \in \tau$ varsa x e (G, E) nin bir **esnek iç noktası** denir [15].*

Tanım 3.0.23. *(X, τ, E) esnek topolojik uzayında bir $(F, E) \in S(X)$ verilsin. (F, E) nin ne içine ne de dışına ait olmayan noktaların oluşturduğu kümeye (F, E) esnek kümesinin **esnek sınırı** denir ve $(F, E)^s = \overline{(F, E)}\widetilde{\cap}\overline{(F, E)^\circ}$ ile gösterilir [15].*

Tanım 3.0.24. *(X, τ, E) esnek topolojik uzayında bir $(G, E) \in S(X)$ ve $x \in X$ verilsin. Eğer $x\widetilde{\in}(F, E)\widetilde{\subset}(G, E)$ yi gerçekleyen bir $(F, E) \in \tau$ mevcutsa (G, E) ye x in **esnek komşuluğu** denir [15].*

Önerme 3.0.6. *(X, τ, E) esnek topolojik uzayında bir $(G, E) \in S(X)$ ve $x \in X$ alalım. Eğer x, (G, E) nin bir esnek iç noktası ise x her bir $\alpha \in E$ için (X, τ_α) da $G(\alpha)$ nın bir iç noktasıdır [15].*

İspat. Herhangi bir $\alpha \in E$ için $G(\alpha) \subseteq X$ dir. Eğer $x \in X$, (G, E) nin bir esnek iç noktası ise bir $(F, E) \in \tau$ vardır öyle ki $x \widetilde{\in} (F, E) \widetilde{\subset} (G, E)$ dir. Bu da $x \in F(\alpha) \subseteq G(\alpha)$ olması demektir. $F(\alpha)$, τ_α üzerinde bir açık kümedir ve $x \in F(\alpha)$ dır. Bu da x in τ_α da $G(\alpha)$ nın bir iç noktası olması demektir. □

Önerme 3.0.7. *(X, τ, E) esnek topolojik uzayında aşağıdakiler geçerlidir:*

i) *X deki her nokta bir esnek komşuluğa sahiptir.*

ii) *Eğer (F, E) ve (G, E) herhangi bir $x \in X$ in birer esnek komşuluğu ise $(F, E) \widetilde{\cap} (G, E)$ de x in bir esnek komşuluğudur.*

iii) *Eğer (F, E), $x \in X$ in bir esnek komşuluğu ve $(F, E) \widetilde{\subset} (G, E)$ ise (G, E) de $x \in X$ in bir esnek komşuluğudur [15].*

İspat. i) Herhangi bir $x \in X$ noktası için $x \widetilde{\in} \widetilde{X} \in \tau$ olup $\widetilde{X} \widetilde{\subset} \widetilde{X}$ olduğundan $\widetilde{X}$, x in bir esnek komşuluğudur.

ii) $x \in X$ in iki esnek komşuluğu (F, E) ve (G, E) olsun. O halde $x \widetilde{\in} (F_1, E) \widetilde{\subset} (F, E)$ ve $x \widetilde{\in} (F_2, E) \widetilde{\subset} (G, E)$ olacak şekilde $(F_1, E), (F_2, E) \in \tau$ vardır. Ayrıca $x \widetilde{\in} (F_1, E) \widetilde{\cap} (F_2, E)$ dır. $(F_1, E) \widetilde{\cap} (F_2, E) \in \tau$ olup buradan

$$x \widetilde{\in} (F_1, E) \widetilde{\cap} (F_2, E) \widetilde{\subset} (F, E) \widetilde{\cap} (G, E)$$

yazılır. Böylece esnek kesişim de bir esnek komşuluktur.

iii) Esnek komşuluk tanımından açıktır.

□

Önerme 3.0.8. *(X, τ, E) esnek topolojik uzayı verilsin. Herhangi bir $(F, E) \in \tau$, $\bigcap\limits_{\alpha \in E} F(\alpha)$ nın her bir noktasının bir esnek komşuluğudur [15].*

İspat. $(F,E) \in \tau$ olsun. Herhangi bir $x \in \bigcap\limits_{\alpha \in E} F(\alpha)$ noktası alalım. Bu durumda her bir $\alpha \in E$ için $x \in F(\alpha)$ dir. Böylece $x \widetilde{\in} (F,E) \widetilde{\subset} (F,E)$ dır ve dolayısıyla (F,E), x in bir esnek komşuluğudur. $\square$

Tanım 3.0.25. *(X,τ,E) bir esnek topolojik uzay olsun ve $\mathfrak{B} \subset \tau$ ailesi verilsin. Eğer τ ya ait her esnek açık küme $\mathfrak{B}$ nin bazı elemanlarının esnek birleşimi halinde yazılabiliyorsa $\mathfrak{B}$ ailesi τ için bir **esnek taban**dır denir [9].*

Tanım 3.0.26. *(X,τ,E) esnek topolojik uzayı verilsin ve $x \in X$ olsun. Her $(F,A) \widetilde{\in} \widetilde{\mathcal{N}}_{(x)}$ esnek komşuluğu için $(G,B) \widetilde{\subset} (F,A)$ olacak şekilde bir $(G,B) \widetilde{\in} \widetilde{\mathfrak{S}}_{(x)}$ varsa, $\widetilde{\mathfrak{S}}_{(x)}$ ailesine τ esnek topolojisine göre x elemanının bir **esnek komşuluklar tabanı** denir [9].*

Tanım 3.0.27. *(X,τ,E) esnek topolojik uzayı verilsin ve $\emptyset \neq Y \subset X$ alalım. Bu takdirde $\tau_Y = \left\{ ({}^{Y}F,E) = (Y,E) \widetilde{\cap} (F,E) \mid (F,E) \in \tau \right\}$ ya Y üzerinde **esnek alt uzay topolojisi** ve (Y,τ_Y,E) ye de (X,τ,E) nin bir **esnek alt uzayı** denir [15].*

Burada τ_Y nin Y üzerinde bir esnek topoloji olduğu kolayca görülebilir.

Örnek 3.0.11. *Esnek diskret topolojik uzayının her esnek alt uzayı bir esnek diskret topolojik uzayıdır [15].*

Örnek 3.0.12. *Esnek indiskret topolojik uzayının her esnek alt uzayı bir esnek indiskret topolojik uzayıdır [15].*

Önerme 3.0.9. *(Y,τ_Y,E) esnek topolojik uzayı, (X,τ,E) esnek topolojik uzayının bir esnek alt uzayı ise her bir $\alpha \in E$ için $(Y,\tau_{\alpha Y})$ de (X,τ_α) nın bir alt uzayıdır [15].*

İspat. (Y,τ_Y,E) bir esnek topolojik uzay olduğundan her bir $\alpha \in E$ için $(Y,\tau_{\alpha Y})$

bir topolojik uzaydır. Şimdi tanımdan herhangi bir $\alpha \in E$ için

$$\begin{aligned}\tau_{\alpha Y} &= \left\{{}^{Y}F(\alpha) \mid (F,E) \in \tau\right\} \\ &= \{Y \cap F(\alpha) \mid (F,E) \in \tau\} \\ &= \{Y \cap F(\alpha) \mid F(\alpha) \in \tau_\alpha\}\end{aligned}$$

dır. Böylece $(Y, \tau_{\alpha Y})$, (X, τ_α) nın bilinen anlamda bir topolojik alt uzayıdır. □

Önerme 3.0.10. *(Y, τ_Y, E) esnek alt uzayı, (X, τ, E) esnek topolojik uzayının bir esnek alt uzayı ve $(F,E) \in \tau_Y$ olsun. Bu takdirde $\widetilde{Y} \in \tau$ ise (F,E), X' te esnek açıktır [15].*

İspat. (F,E), Y de esnek açık olsun. Bu takdirde X de bir (G,E) esnek açık kümesi vardır öyle ki $(F,E) = \widetilde{Y} \widetilde{\cap} (G,E)$ dir. Eğer $\widetilde{Y} \in \tau$ ise esnek topolojik uzay tanımının üçüncü aksiyomundan $\widetilde{Y} \widetilde{\cap} (G,E) \in \tau$ dur. Böylece (F,E), X' de esnek açıktır. □

Teorem 3.0.3. *(Y, τ_Y, E) esnek topolojik uzayı, (X, τ, E) esnek topolojik uzayının bir esnek alt uzayı ve $(F,E) \in S(X)$ olsun. Bu takdirde,*

i) *(F,E), Y de esnek açıktır gerek ve yeter şart bir $(G,E) \in \tau$ için $(F,E) = \widetilde{Y} \widetilde{\cap} (G,E)$ dir.*

ii) *(F,E), Y de esnek kapalıdır gerek ve yeter şart X de bir (G,E) esnek kapalı kümesi için $(F,E) = \widetilde{Y} \widetilde{\cap} (G,E)$ dir [15].*

İspat. i) Esnek alt uzay tanımından açıktır.

ii) (F,E), Y de esnek kapalı ise bir $(G,E) \in \tau_Y$ için $(F,E) = \widetilde{Y} \widetilde{\setminus} (G,E)$ dir. Bir

$(H,E) \in \tau$ için $(G,E) = \widetilde{Y} \widetilde{\cap} (H,E)$ olsun. Her bir $\alpha \in E$ için

$$\begin{aligned} F(\alpha) &= Y(\alpha) \backslash G(\alpha) \\ &= Y \backslash G(\alpha) \\ &= Y \backslash (Y(\alpha) \cap H(\alpha)) \\ &= Y \backslash (Y \cap H(\alpha)) \\ &= Y \backslash H(\alpha) \\ &= Y \cap (X \backslash H(\alpha)) \\ &= Y \cap (H(\alpha))^C \\ &= Y(\alpha) \cap (H(\alpha))^C \end{aligned}$$

dir. $(H,E) \in \tau$ olduğundan $(H,E)'$ X de esnek kapalıdır ve buradan $(F,E) = \widetilde{Y} \widetilde{\cap} (H,E)'$ gelir.

Tersine olarak X deki bir (G,E) esnek kapalı kümesi için $(F,E) = \widetilde{Y} \widetilde{\cap} (G,E)$ olduğunu kabul edelim. Bunun anlamı $(G,E)' \in \tau$ olmasıdır.

$(H,E) \in \tau$ için $(G,E) = (X,E) \widetilde{\backslash} (H,E)$ ise o zaman her bir $\alpha \in E$ için

$$\begin{aligned} F(\alpha) &= Y(\alpha) \cap G(\alpha) \\ &= Y \cap G(\alpha) \\ &= Y \cap (X(\alpha) \backslash H(\alpha)) \\ &= Y \cap (X \backslash H(\alpha)) \\ &= Y \backslash H(\alpha) = Y \backslash (Y \cap H(\alpha)) \\ &= Y(\alpha) \backslash (Y(\alpha) \cap H(\alpha)) \end{aligned}$$

dır. Böylece $(F,E) = \widetilde{Y} \backslash (\widetilde{Y} \widetilde{\cap} (H,E))$ dır. $(H,E) \in \tau$ olduğundan $(\widetilde{Y} \widetilde{\cap} (H,E)) \in \tau_Y$ olup böylece (F,E), Y de esnek kapalıdır. $\square$

Tanım 3.0.28. *(X, τ_X, E) ve (Y, τ_Y, K) esnek topolojik uzaylar ve $f_{pu} : S(X) \longrightarrow S(Y)$ esnek dönüşüm ve $e_F \widetilde{\in} \widetilde{X}$ olsun. $f_{pu}(e_F)$ in her (G,K) esnek komşuluğu için*

e_F nin $f_{pu}((F,E))\widetilde{\subset}(G,K)$ olacak biçimde bir (F,E) esnek komşuluğu varsa f_{pu} dönüşümü e_F te esnek süreklidir denir.

$f_{pu} e_F$ *te*

esnek $:\Longleftrightarrow (\forall (G,K)\widetilde{\in}\mathcal{N}_{\tau_Y}(f_{pu}(e_F)))(\exists (F,E))\widetilde{\in}\mathcal{N}_{\tau_X}((e_F))\ni f_{pu}((F,E))\widetilde{\subset}(G,K)$

süreklidir

*Eğer f_{pu} dönüşümü her $e_F\widetilde{\in}\widetilde{X}$ için esnek sürekliyse f_{pu}, X üzerinde **esnek süreklidir** denir [18].*

Uyarı 3.0.1. *Notasyon sadeliği açısından bir f_{pu} esnek sürekli dönüşümü yerine sadece f esnek sürekli dönüşümü demekle yetineceğiz.*

Bu uyarıya göre Zorlutuna ve arkadaşları tarafından verilen esnek sürekli dönüşüm tanımını tezin ilerleyen kısımlarında notasyon karmaşasından kurtulmak için şu şekilde tanımlayacağız:

Tanım 3.0.29. *(X,τ,E) ve (Y,μ,K) esnek topolojik uzayları için $f : S(X) \longrightarrow S(Y)$ bir esnek dönüşüm olsun. Bu takdirde, f esnek süreklidir gerek ve yeter şart her $(F,E) \in S(X)$ ve $f((F,E))$ nin her (G,K) esnek komşuluğu için (F,E) nin bir (H,E) esnek komşuluğu vardır öyle ki $f((H,E))\widetilde{\widetilde{\subset}}(G,K)$ dır.*

Veya denk olarak;

Tanım 3.0.30. *(X,τ,E) ve (Y,τ',E) esnek topolojik uzayları için $f : (X,\tau,E) \longrightarrow (Y,\tau',E)$ bir esnek dönüşüm olsun. Bir $x\widetilde{\in}X$ elemanı alalım. Bu takdirde f, x te esnek süreklidir gerek ve yeter şart $f(x)$ i içeren her (G,E) esnek komşuluğu için X de x in bir (F,E) esnek komşuluğu vardır öyle ki $f((F,E))\widetilde{\subset}(G,E)$ dir.*

Tanım 3.0.31. *(X,τ,E) ve (Y,τ,E) esnek topolojik uzaylar ve $(H,A\times B) = (F,A)\times(G,B)$ esnek çarpım kümesi verilsin.*

$$\forall i \in 1,2 \text{ } i\c{c}in \text{ } \pi_i : (H,A\times B) \longrightarrow (H,A\times B)_i$$

*izdüşüm fonksiyonlarını sürekli yapan, X üzerindeki en kaba topolojiye (X,τ,E) ile (Y,τ,E) nin **esnek çarpım topolojisi** denir ve $\prod \tau_i$ ile gösterilir [9].*

4. ESNEK TOPOLOJİK UZAYLARDA BAĞLANTILILIK

4.1 Esnek Bağlantılı Topolojik Uzaylar

Tanım 4.1.1. *(X, τ, E) esnek topolojik uzayında $(F, A), (F, B) \in S(X)$ verilsin. Eğer*

$$\overline{(F, A)} \widetilde{\cap} (F, B) \neq \Phi \text{ ya da } (F, A) \widetilde{\cap} \overline{(F, B)} \neq \Phi$$

*ise (F, A) ve (F, B) esnek kümelerine **esnek bağlantılı kümeler** denir. Eğer*

$$\overline{(F, A)} \widetilde{\cap} (F, B) = \Phi \text{ ya da } (F, A) \widetilde{\cap} \overline{(F, B)} = \Phi$$

*ise (F, A) ve (F, B) esnek kümelerine **esnek bağlantısız kümeler** denir [1].*

Tanım 4.1.2. *(X, τ, E) esnek topolojik uzayında $(F, A), (F, B) \in S(X)$ verilsin. Eğer $(F, A) \widetilde{\cap} (F, B) = \Phi$ ise (F, A) ve (F, B) kümelerine **esnek ayrık kümeler** denir [1].*

Uyarı 4.1.1. *Bir esnek topolojik uzayda esnek bağlantılı olmayan iki küme esnek ayrıktır.*

Örnek 4.1.1. *$X = \{h_1, h_2, h_3, h_4\}$ olmak üzere $E = \{e_1, e_2\}$ parametrelerin kümesi olsun.*

$$(F, A_1) = \{(e_1, \{h_1\}), (e_2, \{h_1, h_2, h_3, h_4\})\}$$

$$(F, A_2) = \{(e_1, \{h_1, h_2\}), (e_2, \{h_1, h_2, h_3, h_4\})\}$$

$$(F, A_3) = \{(e_1, \{h_1, h_2, h_3\}), (e_2, \{h_1, h_2, h_3, h_4\})\}$$

olmak üzere $\tau = \left\{\Phi, \widetilde{X}, (F, A_1), (F, A_2), (F, A_3)\right\}$ kümesi X üzerinde bir esnek topolojidir.

Diğer taraftan $(F, A_4) = \{(e_1, \{h_3\})\}$ *ve* $(F, A_5) = \{(e_1, \{h_1\}), (e_2, \{h_1, h_2, h_3, h_4\})\}$ *şeklinde iki esnek küme alacak olursak bu kümelerin esnek ayrık fakat esnek bağlantılı olduğu görülür.*

Teorem 4.1.1. (X, τ, E) *esnek topolojik uzayı verilsin ve* $(F, A), (F, B) \in S(X)$ *alalım. Bu takdirde*

i) (F, A) *ve* (F, B) *kümelerinin her ikisi de esnek açık, esnek ayrık kümeler ise esnek bağlantılı değillerdir.*

ii) (F, A) *ve* (F, B) *kümelerinin her ikisi de esnek kapalı, esnek ayrık kümeler ise esnek bağlantılı değillerdir [1].*

İspat. i) (F, A) ve (F, B) esnek ayrık kümeler olsun. Eğer (F, A) ve (F, B) esnek açık ise $\widetilde{X}\widetilde{\setminus}(F, A)$ ve $\widetilde{X}\widetilde{\setminus}(F, B)$ kümeleri esnek kapalıdır. $(F, A)\widetilde{\cap}(F, B) = \Phi$ olduğundan

$$(F, A)\widetilde{\subset}\left[\widetilde{X}\widetilde{\setminus}(F, B)\right] \Rightarrow \overline{(F, A)}\widetilde{\subset}\overline{\left[\widetilde{X}\widetilde{\setminus}(F, B)\right]}$$
$$\Rightarrow \overline{(F, A)}\widetilde{\subset}\left[\widetilde{X}\widetilde{\setminus}(F, B)^{\circ}\right] = \left[\widetilde{X}\widetilde{\setminus}(F, B)\right] ...(1)$$

olup $(F, A)\widetilde{\cap}(F, B) = \Phi$ olduğundan

$$(F, B)\widetilde{\subset}\left[\widetilde{X}\widetilde{\setminus}(F, A)\right] \Rightarrow \overline{(F, B)}\widetilde{\subset}\overline{\left[\widetilde{X}\widetilde{\setminus}(F, A)\right]}$$
$$\Rightarrow \overline{(F, B)}\widetilde{\subset}\left[\widetilde{X}\widetilde{\setminus}(F, A)^{\circ}\right] = \left[\widetilde{X}\widetilde{\setminus}(F, A)\right] ...(2)$$

olur.

(1) ve (2) ifadelerinin son gerektirmelerinin sırasıyla (F, B) ve (F, A) kümeleri ile esnek kesişimi alınırsa;

$$\overline{(F, A)}\widetilde{\cap}(F, B)\widetilde{\subset}\left[\widetilde{X}\widetilde{\setminus}(F, B)\right]\widetilde{\cap}(F, B) = \Phi$$

ve

$$(F, A)\widetilde{\cap}\overline{(F, B)}\widetilde{\subset}(F, A)\widetilde{\cap}\left[\widetilde{X}\widetilde{\setminus}(F, A)\right] = \Phi$$

elde edilir. Böylece (F, A) ve (F, B) esnek bağlantısız kümelerdir.

ii) $(F,A)\tilde{\cap}(F,B)=\Phi$ olsun. (F,A) ve (F,B) esnek kapalılığından $\overline{(F,A)}\tilde{\cap}(F,B)=$ $(F,A)\tilde{\cap}\overline{(F,B)}=(F,A)\tilde{\cap}(F,B)=\Phi$ olur. Buradan (F,A) ve (F,B) kümeleri esnek bağlantısız kümelerdir.

□

Teorem 4.1.2. *(X,τ,E) esnek topolojik uzayı ve $(F,A),(F,B)\in S(X)$ verilsin. Eğer (F,A) ve (F,B) esnek kümelerinin her ikisi de esnek açık ya da her ikisi de esnek kapalı ise $(F,A)\tilde{\setminus}(F,B)$ ve $(F,B)\tilde{\setminus}(F,A)$ esnek bağlantısız kümelerdir [1].*

İspat. $(F,A),(F,B)\in\tau$ olsun. $(F,A)\tilde{\setminus}(F,B)=(F,A)\tilde{\cap}\left[\tilde{X}\tilde{\setminus}(F,B)\right]$ ve $\overline{(F,A)\tilde{\cap}(F,B)}\;\tilde{\subset}\;\overline{(F,A)}\tilde{\cap}\overline{(F,B)}$ olduğundan;

$$\begin{aligned}\overline{\left[(F,A)\tilde{\setminus}(F,B)\right]}\tilde{\cap}\left[(F,B)\tilde{\setminus}(F,A)\right] &= \overline{(F,A)\tilde{\cap}\left[\tilde{X}\tilde{\setminus}(F,B)\right]}\tilde{\cap}(F,B)\tilde{\cap}\left[\tilde{X}\tilde{\setminus}(F,A)\right]\\ &\tilde{\subset}\overline{(F,A)}\tilde{\cap}\overline{\left[\tilde{X}\tilde{\setminus}(F,B)\right]}\tilde{\cap}(F,B)\tilde{\cap}\left[\tilde{X}\tilde{\setminus}(F,A)\right]\\ &\tilde{\subset}\overline{(F,A)}\tilde{\cap}\left[\tilde{X}\tilde{\setminus}(F,A)\right]\tilde{\cap}(F,B)\tilde{\cap}\overline{\left[\tilde{X}\tilde{\setminus}(F,B)\right]}\\ &\tilde{\subset}\overline{(F,A)}\tilde{\cap}\left[\tilde{X}\tilde{\setminus}(F,A)\right]\tilde{\cap}(F,B)\tilde{\cap}\left[\tilde{X}\tilde{\setminus}(F,B)^{\circ}\right]\ ...(1)\end{aligned}$$

elde edilir. (F,B) esnek açık küme olduğundan $(F,B)^{\circ}=(F,B)$ dir. Buradan

$$\overline{(F,A)\tilde{\setminus}(F,B)}\tilde{\cap}\left[(F,B)\tilde{\setminus}(F,A)\right]=\Phi$$

dir. Benzer olarak;

$$\begin{aligned}\left[(F,A)\tilde{\setminus}(F,B)\right]\tilde{\cap}\overline{\left[(F,B)\tilde{\setminus}(F,A)\right]} &= (F,A)\tilde{\cap}\left[\tilde{X}\tilde{\setminus}(F,B)\right]\tilde{\cap}\overline{(F,B)\tilde{\cap}\left[\tilde{X}\tilde{\setminus}(F,A)\right]}\\ &\tilde{\subset}(F,A)\tilde{\cap}\left[\tilde{X}\tilde{\setminus}(F,B)\right]\tilde{\cap}\overline{(F,B)}\tilde{\cap}\overline{\left[\tilde{X}\tilde{\setminus}(F,A)\right]}\\ &\tilde{\subset}(F,A)\tilde{\cap}\overline{\left[\tilde{X}\tilde{\setminus}(F,A)\right]}\tilde{\cap}\overline{(F,B)}\tilde{\cap}\left[\tilde{X}\tilde{\setminus}(F,B)\right]\\ &\tilde{\subset}(F,A)\tilde{\cap}\left[\tilde{X}\tilde{\setminus}(F,A)^{\circ}\right]\tilde{\cap}\overline{(F,B)}\tilde{\cap}\left[\tilde{X}\tilde{\setminus}(F,B)\right]\ ...(2)\end{aligned}$$

elde edilir. (F,A) esnek açık küme olduğundan içi kendisine eşit olup

$$\left[(F,A)\tilde{\setminus}(F,B)\right]\tilde{\cap}\overline{(F,B)\tilde{\setminus}(F,A)}=\Phi$$

gelir.

Diğer taraftan (F,A) ve (F,B) esnek kapalı kümeler ise $\overline{(F,A)} = (F,A)$ ve $\overline{(F,B)} = (F,B)$ dir. Sonuç olarak (1) ve (2) den $(F,A)\widetilde{\setminus}(F,B)$ ve $(F,B)\widetilde{\setminus}(F,A)$ esnek bağlantısız kümeler olur. □

Teorem 4.1.3. (X,τ,E) *esnek topolojik uzayı ve* $(F,A),(F,B) \in S(X)$ *verilsin.* $\overline{(F,A)}\widetilde{\cap}(F,B) = \Phi$ *ve* $(F,A)\widetilde{\cup}(F,B)$ *kümesi esnek kapalı ise* (F,A) *kümesi esnek kapalı bir kümedir [1].*

İspat. $(F,A)\widetilde{\cup}(F,B)$ esnek kapalı olduğundan,

$$\overline{(F,A)\widetilde{\cup}(F,B)} = \overline{(F,A)}\widetilde{\cup}\overline{(F,B)} = (F,A)\widetilde{\cup}(F,B)$$

dir. Buradan $\overline{(F,A)}\widetilde{\subset}(F,A)\widetilde{\cup}(F,B)$ elde edilir. $\overline{(F,A)}\widetilde{\cap}(F,B) = \Phi$ olduğundan $\overline{(F,A)}\widetilde{\subset}(F,A)$ dir. Ayrıca $(F,A)\widetilde{\subset}\overline{(F,A)}$ olup $(F,A) \widetilde{\cong} \overline{(F,A)}$ elde edilir. Böylece (F,A) esnek kapalı bir kümedir. □

Teorem 4.1.4. (X,τ,E) *esnek topolojik uzayı ve* $(F,A),(F,B) \in S(X)$ *verilsin. Eğer* $(F,A)\widetilde{\cap}\overline{(F,B)} = \Phi$ *ve* $(F,A)\widetilde{\cup}(F,B)$ *kümesi esnek kapalı ise* (F,B) *kümesi esnek kapalı bir kümedir [1].*

İspat. Teorem 4.1.3' ün ispatına benzer şekilde yapılır. □

Sonuç 4.1.1. (X,τ,E) *esnek topolojik uzayında esnek bağlantılı olmayan* (F,A), $(F,B) \in S(X)$ *esnek alt kümeleri verilsin. Eğer* $(F,A)\widetilde{\cup}(F,B)$ *esnek kapalı bir küme ise* (F,A) *ve* (F,B) *esnek kapalı kümelerdir [1].*

Teorem 4.1.5. (X,τ,E) *esnek topolojik uzayı ve* $(F,A),(F,B) \in S(X)$ *verilsin. Eğer* $\overline{(F,A)}\widetilde{\cap}(F,B) = \Phi$ *ve* $(F,A)\widetilde{\cup}(F,B) \in \tau$ *ise* (F,B) *esnek açıktır [1].*

İspat. $\overline{(F,A)}\widetilde{\cap}(F,B) = \Phi$, $(F,B)\widetilde{\subset}\left[\widetilde{X}\widetilde{\setminus}\overline{(F,A)}\right]$ ve, $(F,A)\widetilde{\cup}(F,B)$ esnek açık bir küme olduğundan

$$\left[(F,A)\widetilde{\cup}(F,B)\right]\widetilde{\cap}\left[\widetilde{X}\widetilde{\setminus}\overline{(F,A)}\right] = \left((F,A)\widetilde{\cap}\left[\widetilde{X}\widetilde{\setminus}\overline{(F,A)}\right]\right)\widetilde{\cup}\left((F,B)\widetilde{\cap}\left[\widetilde{X}\widetilde{\setminus}\overline{(F,A)}\right]\right)$$

elde edilir. Eşitliğin sol tarafı esnek açık bir kümedir. Dolayısıyla

$$(F,B) = \left((F,A)\widetilde{\cap}\left[\widetilde{X}\widetilde{\setminus}\overline{(F,A)}\right]\right)\widetilde{\cup}\left((F,B)\widetilde{\cap}\left[\widetilde{X}\widetilde{\setminus}\overline{(F,A)}\right]\right)$$

kümesi esnek açık bir küme olur. □

Teorem 4.1.6. *(X,τ,E) ve $(F,A),(F,B) \in S(X)$ verilsin. Eğer $(F,A)\widetilde{\cap}\overline{(F,B)} = \Phi$ ve $(F,A)\widetilde{\cup}(F,B) \in \tau$ ise (F,A) kümesi esnek açıktır [1].*

İspat. Teorem 4.1.5' in ispatına benzer şekilde yapılır. □

Sonuç 4.1.2. *(X,τ,E) esnek topolojik uzayında esnek bağlantılı olmayan (F,A), $(F,B) \in S(X)$ esnek alt kümeleri verilsin. Eğer $(F,A)\widetilde{\cup}(F,B) \in \tau$ ise (F,A) ve (F,B) esnek açık kümelerdir [1].*

Tanım 4.1.3. *(X,τ,E) esnek topolojik uzayı verilsin. Eğer $\widetilde{X}$ kümesi boştan farklı, esnek bağlantılı olmayan iki esnek alt kümenin birleşimine eşitse, (X,τ,E) uzayına **esnek bağlantılı olmayan uzay** ya da **esnek bağlantısız uzay** denir. Eğer $\widetilde{X}$ kümesi boştan farklı, esnek bağlantılı iki kümenin birleşimine eşitse, (X,τ,E) uzayına **esnek bağlantılı uzay** denir [1].*

Teorem 4.1.7. *(X,τ,E) esnek topolojik uzayı verilsin. Bu takdirde aşağıdakiler denktir:*

i) *(X,τ,E) uzayı esnek bağlantılı değildir,*

ii) *$\widetilde{X}$, boştan farklı, esnek bağlantılı olmayan iki esnek alt kümenin birleşimine eşittir,*

iii) *$\widetilde{X}$, boştan farklı, esnek ayrık ve esnek açık iki esnek alt kümenin birleşimine eşittir,*

iv) *$\widetilde{X}$, boştan farklı, esnek ayrık ve esnek kapalı iki esnek alt kümenin birleşimine eşittir,*

v) (X, τ, E) *uzayının boş olmayan hem esnek açık hem esnek kapalı olan bir özalt kümesi vardır [9].*

İspat. i) $\Longrightarrow$ (ii) Esnek bağlantılı uzay tanımının direkt sonucudur.

ii) $\Longrightarrow$ (iii) $(F, A)\widetilde{\cup}(F, B) = \widetilde{X}$' yı sağlayan boştan farklı, esnek bağlantılı olmayan (F, A) ve (F, B) esnek kümeleri verilsin. $(F, A)\widetilde{\cup}(F, B) = \widetilde{X} \in \tau$ olup sonuç 4.1.2 gereğince (F, A) ve (F, B) kümeleri esnek açıktır. O halde $\widetilde{X}$ kümesi boştan farklı esnek ayrık, esnek açık iki alt kümenin birleşimine eşittir.

iii) $\Longrightarrow$ (iv) $\widetilde{X}$, boştan farklı, esnek ayrık, esnek açık (F, A) ve (F, B) gibi iki alt kümenin birleşimine eşit olsun. $(F, A)\widetilde{\cup}(F, B) = \widetilde{X}$ ve $(F, A)\widetilde{\cap}(F, B) = \Phi$ olduğundan $(F, A) = \widetilde{X}\widetilde{\setminus}(F, B)$ ve $(F, B) = \widetilde{X}\widetilde{\setminus}(F, A)$ dır. Dolayısıyla (F, A) ve (F, B), aynı zamanda esnek kapalıdır. Dolayısıyla $\widetilde{X}$, boştan farklı, esnek ayrık, esnek kapalı, iki esnek kümenin birleşimine eşittir.

iv) $\Longrightarrow$(v) $\widetilde{X}$, boştan farklı, esnek ayrık, esnek kapalı (F, A) ve (F, B) gibi iki alt kümenin birleşimine eşit olsun. $(F, A)\widetilde{\cup}(F, B) = \widetilde{X}$ ve $(F, A)\widetilde{\cap}(F, B) = \Phi$ olduğundan $(F, A) = \widetilde{X}\widetilde{\setminus}(F, B)$ olup (F, A) kümesi hem esnek açık hem esnek kapalıdır ve boştan farklı bir esnek özalt kümedir.

v) $\Longrightarrow$ (i) (F, A), $\widetilde{X}$' nın boş olmayan hem esnek açık hem esnek kapalı bir alt kümesi olsun. Bu takdirde $(F, B) = \widetilde{X}\widetilde{\setminus}(F, A)$ kümesi hem esnek açık hem esnek kapalı bir özalt küme olup, $(F, A)\widetilde{\cup}(F, B) = \widetilde{X}$ olur. Önceki teoremlerden $\overline{(F, A)}\widetilde{\cap}(F, B) = (F, A)\widetilde{\cap}\overline{(F, B)} = (F, A)\widetilde{\cap}(F, B) = \Phi$ olur. O halde esnek bağlantılı uzay tanımı gereğince (X, τ, E) esnek bağlantısız bir uzay olur.

□

Sonuç 4.1.3. (X, τ, E) *esnek topolojik uzayı, esnek boş kümeden farklı esnek ayrık, iki esnek açık kümenin birleşimi olarak yazılabiliyorsa esnek bağlantısızdır, yazılamıyorsa esnek bağlantılıdır.*

Örnek 4.1.2. *Esnek indiskret topolojik uzay esnek bağlantılı bir uzaydır [1].*

Örnek 4.1.3. *Esnek diskret topolojik uzay esnek bağlantısız bir uzaydır. Gerçekten* $X = \{h\}$ *olsun.* $\forall e \in E$ *için* $F(e) = \{h\}$, X *üzerinde bir esnek küme olup* (F, E) *şeklinde gösterilsin.* $(F, E) \,\widetilde{\cup}\, \left[\widetilde{X} \widetilde{\setminus} (F, E)\right] = \widetilde{X}$, (F, E) *ve önceki teorem gereğince* $\widetilde{X} \widetilde{\setminus} (F, E)$ *esnek bağlantısız bir küme olduğundan esnek diskret uzay esnek bağlantısız bir uzaydır [1].*

Teorem 4.1.8. (X, τ, E) *esnek topolojik uzayı verilsin. Her* $x, y \in (F, A)$ *esnek noktaları için "aynı esnek bağlantılı alt kümeye ait olma" bağıntısı denklik bağıntısıdır [9].*

İspat. "Her $x, y \in (F, A)$ esnek noktaları için $x\mathcal{R}y \Longleftrightarrow$ herhangi bir $(F, B)\widetilde{\subset}(F, A)$, $x, y \in (F, B)$ olacak şekilde bir (F, B) esnek kümesi vardır." şeklinde tanımlanan $\mathcal{R}$ bağıntısının yansımalı ve simetrik olduğu aşikardır. Geçişmeli olduğunu kontrol edelim. Herhangi $x, y, z \in (F, A)$ esnek noktaları için $x\mathcal{R}y$ ve $y\mathcal{R}z$ olsun. Bu takdirde $x, y \in (F, B)$ yi sağlayan $(F, B)\widetilde{\subset}(F, A)$ ve $y, z \in (F, C)$ yi sağlayan $(F, C)\widetilde{\subset}(F, A)$ esnek bağlantılı alt kümeleri vardır. $y \in (F, B)\widetilde{\cap}(F, C) \neq \Phi$ olup Teorem 4.1.7 gereğince $(F, B)\widetilde{\cup}(F, C)$ de esnek bağlantılıdır. Buradan görüleceği üzere $x, z \in (F, B)\widetilde{\cup}(F, C)$ dir. O halde $x\mathcal{R}z$ dir. O halde $\mathcal{R}$ bir denklik bağıntısıdır.

□

Örnek 4.1.4. $X = \{h_1, h_2, h_3\}$ *ve* $E = \{e_1, e_2\}$ *olsun.*

$$(F, A_1) = \{(e_1, \{h_1\}), (e_2, \{h_1\})\},$$

$$(F, A_2) = \{(e_1, \{h2\})\},$$

$$(F, A_3) = \{(e_1, \{h_1, h_2\}), (e_2, \{h_1\})\},$$

$$(F, A_4) = \{(e_1, \{h_2, h_3\}), (e_2, \{h_2, h_3\})\}$$

diyelim. $\tau = \left\{\Phi, \widetilde{X}, (F, A_1), (F, A_2), (F, A_3), (F, A_4)\right\}$ *ailesi bir esnek topolojidir. Açıkça* (X, τ, E) *uzayı esnek bağlantısızdır [1].*

Sonuç 4.1.4. (X, τ, E)*esnek topolojik uzayı verilsin. Bu takdirde aşağıdaki özellikler denktir:*

i) (X, τ, E) *uzayı esnek bağlantılıdır,*

ii) $\widetilde{X}$*, boştan farklı, esnek bağlantılı iki esnek alt kümenin birleşimine eşittir,*

iii) $\widetilde{X}$*, boştan farklı, esnek ayrık olmayan iki esnek açık alt kümenin birleşimine eşittir,*

iv) $\widetilde{X}$*, boştan farklı, esnek ayrık olmayan iki esnek kapalı kümenin birleşimine eşittir,*

v) (X, τ, E) *uzayının hem esnek açık hem de esnek kapalı alt kümeleri, yalnızca* $\widetilde{X}$ *ve* Φ *kümeleridir [9].*

Örnek 4.1.5. $\mathbb{R}$ *reel sayılar kümesi ve* E *sonlu bir küme olsun.* $\mathbb{R}$ *kümesi üzerinde* $\tau_* = \{(F, A) \mid \bigcup\limits_{e \in E} \mathbb{R} \setminus f_A(e) sonlu\} \cup \{\phi\}$ *ailesi bir esnek topoloji oluşturur.* $(\mathbb{R}, \tau_*, E)$ *uzayı esnek bağlantılıdır.*

Teorem 4.1.9. (X, τ, E) *esnek topolojik uzayı esnek bağlantılıdır gerek ve yeter şart boştan farklı her esnek özalt kümesinin sınırı boştan farklıdır [9].*

İspat. $\Longrightarrow$: (X, τ, E) uzayı esnek bağlantılı olsun. Bir $(F, A) \in S(U)$, $(F, A) = \Phi$ alt kümesi alalım. Varsayalım ki $(F, A)^S = \Phi$ olsun. Esnek sınırlılık tanımından

$$(F, A)^S = \overline{(F, A)} \widetilde{\setminus} (F, A)^\circ = \Phi$$

olup $\overline{(F, A)} \widetilde{\setminus} (F, A)^\circ$ elde edilir. Ayrıca $(F, A)^\circ \widetilde{\subset} (F, A) \widetilde{\subset} \overline{(F, A)}$ olduğundan,

$$(F, A)^\circ \widetilde{=} (F, A) \widetilde{=} \overline{(F, A)}$$

olup bir önceki teorem gereğince (X, τ, E) uzayı esnek bağlantılı değildir. Bu çelişkiden $(F, A)^S \neq \Phi$ olur.

$\Leftarrow$: $\widetilde{X}$ kümesinin boştan farklı bir (F, A) esnek özalt kümesinin sınırı boş olmasın. Bu takdirde, $(F, A)^S = \overline{(F, A)} \widetilde{\setminus} (F, A)^\circ \neq \Phi$ olup, $\overline{(F, A)} \neq (F, A)^\circ$ olur. Dolayısıyla (F, A) kümesi, hem esnek açık hem esnek kapalı olamaz. Bir önceki sonuç gereği (X, τ, E) esnek bağlantılı bir uzaydır. $\square$

Teorem 4.1.10. *(X_1, τ_1, E) ve (X_2, τ_2, E) esnek topolojik uzayları esnek bağlantılı uzaylar ise $(X_1 \times X_2, \tau_1 \times \tau_2)$ uzayı da esnek bağlantılıdır [9].*

İspat. (X_1, τ_1, E) esnek bağlantılı uzay olduğundan

$\widetilde{X}_1 = (F, A) \widetilde{\cup} (F, B)$ ve $\Phi \neq (F, A) \widetilde{\cap} (F, B)$ olacak şekilde $(F, A), (F, B) \in \tau_1$ vardır.

(X_2, τ_2, E) esnek bağlantılı uzay olduğundan

$\widetilde{X}_2 = (G, C) \widetilde{\cup} (G, D)$ ve $\Phi \neq (G, C) \widetilde{\cap} (G, D)$ olacak şekilde $(G, C), (G, D) \in \tau_2$ vardır. Buradan

$X_1 \times X_2 = \big[(F, A) \widetilde{\cup} (F, B)\big] \times \big[(G, C) \widetilde{\cup} (G, D)\big]$ olup,

$$\Phi \neq \big[(F, A) \widetilde{\cap} (F, B)\big] \times \big[(G, C) \widetilde{\cap} (G, D)\big]$$

$$\left(\widetilde{X}_1 \times \widetilde{X}_2\right) = [(F, A) \times (G, C)] \,\widetilde{\cup}\, [(F, B) \times (G, D)]$$

ve

$$\Phi \neq [(F, A) \times (G, C)] \,\widetilde{\cap}\, [(F, B) \times (G, D)]$$

den $[(F, A) \times (G, C)] \,\widetilde{\subset} \left(\widetilde{X}_1 \times \widetilde{X}_2\right)$ ve $[(F, B) \times (G, D)] \,\widetilde{\subset} \left(\widetilde{X}_1 \times \widetilde{X}_2\right)$ esnek açık kümelerdir. Böylece $(X_1 \times X_2, \tau_1 \times \tau_2)$ uzayı da esnek bağlantılıdır. $\square$

Teorem 4.1.11. *(X, τ_2, E) esnek topolojik uzayı esnek bağlantılı bir uzay olmak üzere $\tau_1 \widetilde{\subset} \tau_2$ ise (X, τ_1, E) uzayı da esnek bağlantılıdır [9].*

İspat. Aksine (X, τ_1, E) esnek bağlantılı olmasın. O halde $\widetilde{X} = (F, A) \widetilde{\cup} (F, B)$ ve $(F, A) \widetilde{\cap} (F, B) = \Phi$ olacak şekilde $(F, A), (F, B) \widetilde{\in} \tau_1$ esnek açık kümeleri vardır. $\tau_1 \widetilde{\subset} \tau_2$ olduğundan $(F, A), (F, B) \widetilde{\in} \tau_2$ olup buradan (X, τ_2, E) uzayı esnek bağlantısız olur. Bu ise bir çelişkidir. O halde (X, τ_1, E) esnek bağlantılı bir uzay olur. $\square$

Tanım 4.1.4. *(X, τ, E) esnek topolojik uzayı ve $(F, A) \in S(X)$ verilsin. (F, A) esnek kümesi üzerindeki*

$$\tau_{(F,A)} = \left\{(F, A)_i \widetilde{\cap} (F, A) \mid (F, A)_i \in \tau, i \in I \subset \mathbb{N}\right\}$$

*esnek topolojisine (F, A) kümesi üzerinde **esnek alt uzay topolojisi**, $((F, A), \tau_{(F,A)})$ esnek topolojik uzayına da (X, τ, E) uzayının **esnek alt uzayı** denir [1].*

Tanım 4.1.5. *(X, τ, E) esnek topolojik uzayında bir (F, A) esnek alt kümesi verilsin. Eğer $((F, A), \tau_{(F,A)})$ alt uzayı, esnek bağlantılı ise (F, A) kümesine (X, τ, E) de **esnek bağlantılı küme** denir [1].*

Teorem 4.1.12. *(X, τ, E) esnek topolojik uzayı boştan farklı esnek ayrık, esnek açık (G, B) ve (G, C) esnek alt kümelerinin birleşimine eşit olsun. (F, A), (X, τ, E) nin esnek bağlantılı bir alt kümesi ise $(F, A) \widetilde{\subseteq} (G, B)$ ya da $(F, A) \widetilde{\subseteq} (G, C)$ dir [1].*

İspat. Varsayalım ki $(F, A) \widetilde{\cap} (G, B) \neq \Phi$ ve $(F, A) \widetilde{\cap} (G, C) \neq \Phi$ olsun. (G, B) ve (G, C) esnek kümeleri (X, τ, E) esnek topolojik uzayında esnek açık olduklarından $(F, A) \widetilde{\cap} (G, B) \in \widetilde{\tau}_{(F,A)}$ ve $(F, A) \widetilde{\cap} (G, C) \in \widetilde{\tau}_{(F,A)}$ olup $(G, B) \widetilde{\cap} (G, C) = \Phi$ olduğundan,

$$(F, A) \widetilde{\cap} ((G, B) \widetilde{\cap} (G, C)) = ((F, A) \widetilde{\cap} (G, B)) \widetilde{\cap} ((F, A) \widetilde{\cap} (G, C)) = \Phi$$

bulunur. $\widetilde{X} = (G, B) \widetilde{\cup} (G, C)$ olduğundan

$$(F, A) = (F, A) \widetilde{\cap} ((G, B) \widetilde{\cup} (G, C)) = ((F, A) \widetilde{\cap} (G, B)) \widetilde{\cup} ((F, A) \widetilde{\cap} (G, C)$$

elde edilir. Teorem 4.1.7 den $((F, A), \widetilde{\tau}_{(F,A)})$ alt uzayı esnek bağlantılı değildir. Bu ise (F, A) kümesinin esnek bağlantılı olması ile çelişir. O halde $(F, A) \widetilde{\cap} (G, C) \neq \Phi$ ve buradan $(F, A) \widetilde{\subseteq} (G, B)$ olur ya da $(F, A) \widetilde{\cap} (G, B) \neq \Phi$ ve buradan $(F, A) \widetilde{\subseteq} (G, C)$ olur. $\square$

Teorem 4.1.13. *(X, τ, E) esnek topolojik uzayında esnek bağlantılı bir (F, A) alt kümesi verilsin. $(F, A) \widetilde{\subseteq} (F, B) \widetilde{\subseteq} \overline{(F, A)}$ yı sağlayan her $(F, B) \in S(X)$ esnek bağlantılıdır [1].*

İspat. Varsayalım ki (F, B) esnek kümesi esnek bağlantılı olmasın. O zaman Teorem 4.1.7' den $(F, B) = (G, C)\widetilde{\cup}(G, D)$ olacak şekilde boş olmayan esnek ayrık, esnek açık (G, C) ve (G, D) esnek alt kümeleri vardır. Teorem 4.1.12 gereğince ya $(F, A)\widetilde{\subseteq}(G, C)$ ya da $(F, A)\widetilde{\subseteq}(G, D)$ olur.

$(F, A)\widetilde{\subseteq}(G, C)$ olsun. Buradan $\overline{(F, A)}\widetilde{\subseteq}\overline{(G, C)}$ yazılır. $(F, B)\widetilde{\subseteq}\overline{(F, A)}\widetilde{\subseteq}\overline{(G, C)}$ olduğundan, $(F, B)\widetilde{\subseteq}\overline{(G, C)}$ olur. Teorem 4.1.7 gereğince (G, C) ve (G, D) esnek bağlantılı iki küme değildir. Yani $\overline{(G, C)}\widetilde{\cap}(G, D) = \Phi$ ve $(G, C)\widetilde{\cap}\overline{(G, D)} = \Phi$ dır. böylece

$$(F, B) = (G, C)\widetilde{\cup}(G, D),\ (F, B)\widetilde{\subseteq}\overline{(G, C)},\ \overline{(G, C)}\widetilde{\cap}(G, D) = \Phi$$

olduğundan $(G, D) = \Phi$ olur. Bu ise $(G, D) \neq \Phi$ olmasıyla çelişir. □

Sonuç 4.1.5. *(X, τ, E) esnek topolojik uzayında bir $(F, A) \in S(X)$ verilsin. Bu takdirde $\overline{(F, A)}$ da esnek bağlantılıdır [1].*

İspat. Teorem 4.1.13 ten $(F, A)\widetilde{\subseteq}(F, B)\widetilde{\subseteq}\overline{(F, A)}$ şeklindeki her (F, B) kümesi esnek bağlantılıdır. $(F, A)\widetilde{\subseteq}(F, B)$ ve $\overline{(F, A)}\widetilde{\subseteq}\overline{(F, B)}$ olduğundan $(F, B)\widetilde{\subseteq}\overline{(F, A)}\widetilde{\subseteq}\overline{(F, B)}$ olup, $\overline{(F, A)}$ kümesi esnek bağlantılı olur. □

Tanım 4.1.6. *(X, τ, E) esnek topolojik uzayı ve esnek bağlantılı bir $(F, A) \in S(X)$ esnek alt kümesi verilsin. (X, τ, E) nin en geniş esnek bağlantılı esnek alt uzayına, (X, τ, E) uzayının **esnek bileşeni** denir [1].*

Tanım 4.1.7. *(X, τ, E) esnek topolojik uzayında bir x esnek noktasını içeren esnek bileşene x in esnek bileşeni deriz ve C_x sembolü ile gösterilir [1].*

Teorem 4.1.14. *Bir esnek topolojik uzayın esnek bileşenleri esnek kapalıdır [1].*

İspat. (X, τ, E) esnek topolojik uzayının bir esnek bileşeni (F, A) esnek kümesi ise Tanım 4.1.6 dan, (F, A) esnek kümesi esnek bağlantılı bir kümedir. (F, A) esnek kümesi (X, τ, E) esnek topolojik uzayının en büyük esnek bağlantılı alt kümesi olduğundan $\overline{(F,A)}\widetilde{\subseteq}(F,A)$ bulunur. Diğer taraftan $(F,A)\widetilde{\subseteq}\overline{(F,A)}$ olduğundan $(F,A)=\overline{(F,A)}$ elde edilir. Böylece (F,A) esnek kümesi esnek kapalı bir kümedir. $\square$

4.2 Esnek Lokal Bağlantılı Topolojik Uzaylar

Tanım 4.2.1. *(X,τ,E) esnek topolojik uzayı verilsin. Her $x\in X$ noktasının (X,τ,E) uzayında esnek bağlantılı kümelerden oluşan bir esnek komşuluk tabanı varsa, (X,τ,E) ye* ***esnek lokal bağlantılı uzay*** *denir [1].*

Uyarı 4.2.1. *(X,τ,E) esnek lokal bağlantılı uzaydır gerek ve yeter şart her $x\in X$ noktasının $(F,A)\in\mathcal{N}_\tau(x)$ komşuluğu için $x\widetilde{\in}(G,B)\widetilde{\subset}(F,A)$ yı sağlayan esnek bağlantılı esnek açık bir (G,B) komşuluğu mevcut olmasıdır.*

Örnek 4.2.1. *Esnek diskret topolojik uzay esnek lokal bağlantılıdır.*

Teorem 4.2.1. *(X,τ,E) esnek topolojik uzayı esnek lokal bağlantılıdır gerek ve yeter şart (X,τ,E) nin her esnek açık alt uzayındaki bir esnek bileşen, (X,τ,E) esnek topolojik uzayında esnek açıktır [1].*

İspat. $\Longrightarrow$: (X,τ,E) esnek lokal bağlantılı, $(F,A)\widetilde{\subset}(X,\tau,E)$ esnek açık bir alt küme ve $C_{(F,A)}$ kümesi $((F,A),\tau_{(F,A)})$ alt uzayında bir esnek bileşen olsun.

$x\in C_{(F,A)}\widetilde{\subset}(F,A)$ noktasını ele alalım. (X,τ,E) uzayı esnek lokal bağlantılı olduğundan $(G,B)\widetilde{\subset}(F,A)$ olacak şekilde esnek bağlantılı bir $(G,B)\widetilde{\in}\mathcal{N}_\tau(x)$ esnek açık komşuluğu vardır. Böylese (G,B) kümesi, $((F,A),\tau_{(F,A)})$ esnek alt uzayında, x' i içeren esnek bağlantılı bir kümedir. Ayrıca $C_{(F,A)}$ kümesi $((F,A),\tau_{(F,A)})$ esnek alt uzayında esnek bileşen olduğundan, $(G,B)\widetilde{\subset}C_{(F,A)}$ dir. Esnek iç nokta tanımından $x\in\left(C_{(F,A)}\right)^\circ$ dir. Buradan $C_{(F,A)}\widetilde{\subset}\left(C_{(F,A)}\right)^\circ$ gelir. $\left(C_{(F,A)}\right)^\circ\widetilde{\subset}C_{(F,A)}$ olduğundan $\left(C_{(F,A)}\right)^\circ=C_{(F,A)}$ bulunur. Sonuç olarak $C_{(F,A)}$ esnek bileşeni esnek açıktır.

$\Longleftarrow$: (X,τ,E) uzayında esnek açık bir $((F,A),\tau_{(F,A)})$ esnek alt uzayının her bir esnek bileşeni esnek açık iken (X,τ,E) uzayının esnek lokal bağlantılı olduğunu ispatlayacağız. $((F,A),\tau_{(F,A)})$ esnek açık alt uzayına göre, x noktasını içeren $C_{(F,A)}\widetilde{\subset}\ (F,A)$ bileşeni esnek açıktır. $C_{(F,A)}$ bileşeni esnek bağlantılı olup bir önceki uyarı gereği (X,τ,E) uzayı esnek lokal bağlantılıdır. $\square$

Sonuç 4.2.1. *Esnek lokal bağlantılı uzayda esnek bileşenler hem esnek açık, hem esnek kapalıdır [1].*

İspat. (X,τ,E) esnek topolojik uzayı esnek lokal bağlantılı olsun. Eğer $C_{(F,A)}$ kümesi (X,τ,E) nin bir esnek bileşeni ise Teorem 4.2.1 den $C_{(F,A)}$ esnek açıktır. Teorem 4.1.14 den esnek kapalıdır. $\square$

4.3 Esnek Yol Bağlantılı Topolojik Uzaylar

Tanım 4.3.1. *$I=[0,1]$ aralığı olmak üzere; (I,τ_I,E)' ye **esnek birim aralık** denir [6].*

Tanım 4.3.2. *(I,τ_I,E) birim esnek aralık olsun ve (X,τ,E') esnek topolojik uzayı verilsin. Bir $(f,\varphi):(I,\tau_I,E)\longrightarrow(X,\tau,E')$ esnek sürekli dönüşümüne bir **esnek yol** denir. $f:I\longrightarrow X$ ve $\varphi:E\longrightarrow E'$ olmak üzere $\left\{f\left(0\right)_{\varphi(e)}\right\}_{e\in E}$ ve $\left\{f\left(1\right)_{\varphi(e)}\right\}_{e\in E}$ esnek kümelerine (f,φ) esnek yolunun sırasıyla başlangıcı ve bitişi denir. Açıkça her bir $e\in E$ için $f:(I,\tau_I)\longrightarrow\left(X,\tau_{\varphi(e)}\right)$ dönüşümü, $f\left(0\right)_{\varphi(e)}$ den $f(1)_{\varphi(e)}$ ye bir yoldur. Dolayısıyla her esnek yol, (X,τ,E') esnek topolojik uzayı üzerinde parametrize edilmiş bir aile olarak düşünülebilir [6].*

Örnek 4.3.1. *(X,τ,E') esnek topolojik uzayı verilsin. $x=\left(x_{e_1'},E'\right),y=\left(y_{e_1'},E'\right)\in(F,A)$ olmak üzere x ve y esnek noktaları arasındaki esnek yol*

$$(f,\varphi):(I,\tau_I,E)\longrightarrow(X,\tau,E')$$

ise

$$(g,\psi)\left(t\right)=(f,\varphi)(1-t),t\in I$$

şeklinde tanımlanan $(g,\psi):(I,\tau_I,E)\longrightarrow(X,\tau,E')$ *esnek dönüşümü de* y *ve* x *esnek noktaları arasında bir esnek yoldur.* (g,ψ) *esnek dönüşümü* (f,φ) *esnek dönüşümünün tersi yönünde bir yol belirtir.*

Örnek 4.3.2. (X,τ,E') *verilsin.* $x=\left(x_{e'_1},E'\right), y=\left(y_{e'_1},E'\right)$ *ve* $z=\left(z_{e'_1},E'\right)\in(X,\tau,E')$ *olmak üzere* x *ve* y *esnek noktaları arasında bir* $(f,\varphi):(I,\tau_I,E)\longrightarrow(X,\tau,E')$ *esnek yolu ve* y *ve* z *esnek noktaları arasında bir* $(g,\psi):(I,\tau_I,E)\longrightarrow(X,\tau,E')$ *esnek yolu verilsin. Bu durumda*

$$(h,\omega)=\begin{cases}(f,\varphi)(2t), & 0\le t\le \frac{1}{2}\\ (g,\psi)(2t-1), & \frac{1}{2}\le t\le 1\end{cases}$$

şeklinde tanımlanan $(h,\omega):(I,\tau_I,E)\longrightarrow(X,\tau,E')$ *esnek fonksiyonu* x *ile* z *esnek noktaları arasında bir esnek yoldur. Buna* (f,φ) *ve* (g,ψ) *esnek yollarının çarpımı denir.*

Tanım 4.3.3. (I,τ_I,E) *bir esnek birim aralık olsun ve* (X,τ,E') *esnek topolojik uzayı verilsin. Bu takdirde* (X,τ,E') *ne bir* ***esnek yol bağlantılı uzay*** *denir eğer her bir* $x=(x_{e_1},E')$ *ve* $y=(y_{e_2},E')$ *esnek nokta çifti için bir* $(f,\varphi):(I,\tau_I,E)\longrightarrow(X,\tau,E')$ *esnek yolu var öyle ki*

$$\varphi(e_1)=e'_1,\varphi(e_2)=e'_2,f(0)=x,f(1)=y$$

dir [6].

Önerme 4.3.1. (I,τ_I,E) *esnek yol bağlantılıdır [6].*

İspat.

$$(1_I,1_E):(I,\tau_I,E)\longrightarrow(I,\tau_I,E)$$

bir esnek sürekli dönüşüm olduğundan ispat açıktır. □

Teorem 4.3.1. (X,τ,E) *esnek topolojik uzayında* $\mathcal{R}$ *bağıntısı her* $x,y\in X$ *için*

" $x\mathcal{R}y\Longleftrightarrow x$ *ve* y *esnek noktaları arasında bir esnek yol vardır."*

şeklinde tanımlansın. Bu takdirde $\mathcal{R}$ *bağıntısı bir denklik bağıntısıdır [6].*

İspat. Her $x \in X$ esnek noktası için $x\mathcal{R}x$ dır. Çünkü

$$her\ t \in I\ için\ f(t) = x$$

şeklinde tanımlanan

$$(f, \varphi) : (I, \tau_I, E) \longrightarrow (X, \tau, E')$$

esnek sabit fonksiyonu bir esnek sabit yolunu belirtir. Dolayısıyla $\mathcal{R}$ bağıntısı yansımalıdır. Her $x, y \in X$ esnek noktaları için $x\mathcal{R}y$ ise Örnek 4.3.1 gereği $y\mathcal{R}x$ olup $\mathcal{R}$ bağıntısı simetriktir. Son olarak her $x, y, z \in X$ esnek noktaları için $x\mathcal{R}y$ ve $y\mathcal{R}z$ ise Örnek 4.3.2 den $x\mathcal{R}z$ dir. Yani $\mathcal{R}$ bağıntısı geçişmelidir. Böylece $\mathcal{R}$ bağıntısı bir denklik bağıntısıdır. □

Tanım 4.3.4. (X, τ, E) *esnek topolojik uzayı üzerinde yukarıda tanımlanan denklik bağıntısına göre denklik sınıflarına* (X, τ, E) *uzayının* ***esnek yol bileşenleri*** *denir [6].*

Önerme 4.3.2. (X, τ, E') *esnek yol bağlantılı uzay ise her* $e' \in E'$ *için* $(X, \tau_{e'})$ *de bir yol bağlantılı topolojik uzaydır [6].*

İspat. x, $y \in (X, \tau_{e'})$ olduğunu kabul edelim.

$(x_{e'}, E')$, $(y_{e'}, E') \widetilde{\in} (X, \tau, E')$ esnek noktalardır. (X, τ, E') esnek yol bağlantılı uzay olduğundan bir

$$(f, \varphi) : (I, \tau_I, E) \longrightarrow (X, \tau, E')$$

esnek yolu vardır öyle ki

$$\varphi(e) = e', f(0) = x, f(1) = y$$

dir. Böylece $\forall e' \in E'$ için,

$$f_e : (I, (\tau_I)_e) \longrightarrow (X, \tau_{e'})$$

vasıtasıyla x den y ye bir yol tanımlanmış olur. Bu da $\forall e' \in E'$ için, $(X, \tau_{e'})$ nun bir yol bağlantılı topolojik uzay olması demektir. □

Bu önermenin tersi doğru değildir. Aşağıdaki örnek bunu açiklar.

Örnek 4.3.3. (X, τ_1) *ve* (Y, τ_2) *yol bağlantılı ve ayrık iki topolojik uzay olsun. Bu takdirde* $E_1 = \{e_1\}$, $E_2 = \{e_2\}$ *için, aşağıdaki esnek topolojik uzayları inşaa edebiliriz.*

$$\{F : E_1 \longrightarrow P(X) : F(e_1) = U,\ U \in \tau_1\}$$

$$\{G : E_2 \longrightarrow P(Y) : G(e_2) = V,\ V \in \tau_2\}$$

$(X \oplus Y, \tau_1 \oplus \tau_2, E_1 \cup E_2)$ *esnek topolojik uzayını ele alalım. Herhangi bir* $c_1 \in E_1 \cup E_2$ *için* $\left(X \oplus Y, (\tau_1 \oplus \tau_2)_{e_1}\right) = (X, \tau_1)$ *ve* $\left(X \oplus Y, (\tau_1 \oplus \tau_2)_{e_2}\right) = (Y, \tau_2)$ *uzayları yol bağlantılı topolojik uzaylar olmasına rağmen* $(X \oplus Y, \tau_1 \oplus \tau_2, E_1 \cup E_2)$ *bir esnek yol bağlantılı topolojik uzay değildir [6].*

Teorem 4.3.2. *Bir esnek yol bağlantılı uzayın, esnek sürekli dönüşüm altındaki görüntüsü de esnek yol bağlantılıdır [6].*

İspat. (X, τ, E') bir esnek yol bağlantılı topolojik uzay olsun. (Y, τ', E'') bir esnek topolojik uzayı ve

$$(g, \psi) : (X, \tau, E') \longrightarrow (Y, \tau', E'')$$

bir esnek sürekli dönüşüm olsun. $(y_{e_1''}, E'')$ ve $(\overline{y}_{\overline{e}_1''}, E'')$, $(g, \psi)\,(X, \tau, E')$ görüntüsünün iki esnek noktası olsun. O halde $\left(x_{e_1'}, E\right)$, $\left(\overline{x}_{\overline{e}_1'}, E\right) \widetilde{\in} (X, \tau, E')$ esnek noktaları vardır öyle ki;

$$\psi(e_1') = e_1'', \psi(\overline{e}_1') = \overline{e}_1'', g(x) = y, g(\overline{x}) = \overline{y}$$

dir. (X, τ, E') esnek yol bağlantılı olduğundan bir

$$(f, \varphi) : (I, \tau_I, E) \longrightarrow (X, \tau, E')$$

esnek yolu vardır öyle ki

$$\varphi(e_1) = e_1', \varphi(\overline{e}_1) = \overline{e}_1', f(0) = x, f(1) = \overline{x}$$

dir. Buradan

$$(g, \psi) \circ (f, \varphi) : (I, \tau_I, E) \longrightarrow (Y, \tau', E'')$$

dönüşümü $(y_{e_1''}, E'')$ den $(\overline{y}_{\overline{e}_1''}, E'')$ ye bir esnek yoldur. $\square$

Teorem 4.3.3. (I, τ_I, E) *esnek birim aralığı esnek bağlantılı uzaydır [6].*

İspat. (I, τ_I, E) nın esnek bağlantılı bir topolojik uzay olmadığını varsayalım. Bu takdirde

$$(F, E)\widetilde{\cup}(G, E) = (I, \tau_I, E)$$

dir, burada (F, E) ve (G, E) boş olmayan, ayrık iki esnek kümedir. Her bir $e \in E$ için, boş olmayan $F(e), G(e) \in (\tau_I)_e$ esnek kümelerini seçelim. Buradan

$$F(e) \cup G(e) = I, F(e) \cap G(e) = \phi$$

dir. Buradan $(I, (\tau_I)_e)$ bağlantılı topolojik uzay olmayıp bu bir çelişkidir. $\square$

Teorem 4.3.4. *Esnek yol bağlantılı uzay esnek bağlantılı uzaydır [6].*

İspat. Varsayalım ki, (X, τ, E') bir esnek yol bağlantılı topolojik uzay olsun ama esnek bağlantılı olmasın. Bu takdirde (F, E') ve (G, E') gibi boş olmayan, ayrık iki esnek küme vardır ve $(F, E')\widetilde{\cup}(G, E') = \widetilde{X}$ dir. (X, τ, E') esnek yol bağlantılı topolojik uzay olduğundan $\left(x_{e_1'}, E'\right) \widetilde{\in}(F, E')$, $(y_{e_2'}, E')\widetilde{\in}(G, E')$ esnek noktaları için bir

$$(f, \varphi) : (I, \tau_I, E) \longrightarrow (X, \tau, E')$$

esnek yolu vardır öyle ki

$$\varphi(e_1) = e_1', \varphi(e_2) = e_2', f(0) = x, f(1) = y$$

dir. Teorem 4.3.1 ve Teorem 4.3.2 den; (I, τ_I, E) bir esnek bağlantılı topolojik uzay ve $(f, \varphi)\,(I, \tau_I, E)$ esnek bağlantılı topolojik uzaydır. Varsayalım ki;

$$(F_1, E') = (F, E')\widetilde{\cap}(f, \varphi)\,(I, \tau_I, E)$$

$$(G_1, E') = (G, E')\widetilde{\cap}(f, \varphi)\,(I, \tau_I, E)$$

kümeleri $(f, \varphi)\,(I, \tau_I, E)$ esnek uzayında iki ayrık esnek küme olsun. Öyle ki

$$(f, \varphi)\,(I, \tau_I, E) = (F_1, E')\widetilde{\cup}(G_1, E')$$

dir. Bu $(f, \varphi)\,(I, \tau_I, E)$ nın esnek bir esnek bağlantılı topolojik uzay olduğu gerçeği ile çelişmektedir. Dolayısıyla (X, τ, E') esnek bağlantılı uzaydır. □

4.4 Esnek Lokal Yol Bağlantılı Topolojik Uzaylar

Tanım 4.4.1. (X, τ, E') *esnek topolojik uzayında her* $x \in X$ *esnek noktasının esnek yol bağlantılı esnek kümelerden oluşan bir esnek komşuluklar tabanı varsa* (X, τ, E') *uzayına* ***esnek lokal yol bağlantılı topolojik uzay*** *denir. Yani* (X, τ, E') *esnek topolojik uzayının esnek lokal yol bağlantılı olması için*

$$\forall x \in X \text{ ve } \forall (F, A)\widetilde{\in}\widetilde{\mathcal{V}}_{(x)} \text{ için } \exists (G, B) \text{ vardır } \ni \ x\widetilde{\in}(G, B)\widetilde{\subseteq}(F, A)$$

olacak şekilde esnek yol bağlantılı bir (G, B) *esnek komşuluğu olmalıdır.*

Teorem 4.4.1. *Bir* (X, τ, E) *esnek topolojik uzayı esnek lokal yol bağlantılıdır gerek ve yeter şart her esnek açık kümenin esnek yol bileşenleri* (X, τ, E) *esnek uzayına göre esnek açıktır.*

İspat. (X, τ, E) esnek topolojik uzayı esnek lokal yol bağlantılı ve $(F, A)\widetilde{\subseteq}X$ bir esnek açık küme olsun. (F, A) nın esnek yol bileşeni C_x olmak üzere C_x in esnek açık olduğunu ispatlayalım. $x \in C_x$ olsun. X esnek lokal yol bağlantılı olduğundan $x\widetilde{\in}(G, B)\widetilde{\subseteq}(F, A)$ olacak şekilde x in esnek yol bağlantılı bir (G, B) esnek komşuluğu vardır. Fakat x i içeren en geniş esnek yol bağlantılı küme C_x olduğundan $x\widetilde{\in}(G, B)\widetilde{\subseteq}C_x$ dir. Böylece C_x esnek açıktır.

Tersine olarak her esnek açık kümenin esnek yol bileşenlerinin esnek açık olduğunu varsaylım. X in esnek lokal yol bağlantılı olduğunu gösterelim. $x \in X$

ve (F,A), x in esnek açık bir komşuluğu olsun. x in (F,A) deki esnek yol bileşeni (G,B) olmak üzere $x\widetilde{\in}(G,B)\widetilde{\subseteq}(F,A)$ dır, burada varsayımdan (G,B) esnek açık olduğundan (F,A) esnek lokal yol bağlantılıdır. $\square$

Teorem 4.4.2. *Bir esnek lokal yol bağlantılı topolojik uzayda esnek açık bir kümenin esnek bileşenleri ile esnek yol bileşenleri aynıdır.*

İspat. (X,τ,E) esnek lokal yol bağlantılı bir uzayında (F,A) esnek açık kümesi verilsin. (F,A) nın esnek bileşenleri ile esnek yol bileşenlerinin aynı olduğunu gösterelim. (F,A) nın bir esnek bileşeni C_x, C_x in bir esnek yol bileşeni D_x olsun. Teorem 4.2.1 den $C_x\widetilde{\subseteq}(F,A)$ bir esnek açık kümedir. Bir esnek lokal yol bağlantılı uzayda bir esnek açık kümenin esnek yol bileşeni esnek açık olduğundan $D_x\widetilde{\subseteq}C_x$ esnek açıktır. Aynı zamanda $D_x\widetilde{\subseteq}C_x$ esnek kapalıdır. Fakat C_x esnek bağlantılı olduğundan $D_x\widetilde{=}C_x$ dir. Böylece C_x esnek yol bağlantılı bir bileşendir. $\square$

Bu teoremin iki temel sonucunu ifade edelim.

Sonuç 4.4.1. *Bir esnek lokal yol bağlantılı topolojik uzayın esnek bileşenleri ile esnek yol bileşenleri aynıdır.*

Sonuç 4.4.2. *Esnek bağlantılı ve esnek lokal yol bağlantılı olan bir topolojik uzay esnek yol bağlantılıdır.*

KAYNAKLAR

[1] Aktaş, H. and Çağman, N. (2007). Soft sets and soft groups. *Inform. Sci.,* **177**, 2726-2735.

[2] Al-Khafaj, M. A. K., Mahmood, M. H. (2014). Some Properties of Soft Connected Spaces and Soft Locally Connected Spaces. *J. Math.,* 102-107.

[3] Ali, M., Feng, F., Liu, X., Min, W. K., Shabir, M. (2009). On some new operationsin soft set theory. *Comput. Math. Appl.*, 1547-1553.

[4] Aygünoğlu, A. and Aygün, H. (2012). Some notes on soft topological spaces. *Neural Comput. and Appl.,* **21 (1)**, 113-119.

[5] Babitha, K.V., Sunil, J.J. (2010). Soft set relations and functions. *Comput. Math. Appl.,* **60**, 1840-1849.

[6] Bayramov, S., Gunduz, C. and Erdem, A. (2013). Soft Path Connectedness on Soft Topological Spaces. *The CMMSE Proceedings.*

[7] Fu, L., Shi, X. A. (2019). Path Connectedness over Soft Rough Topological Space. *JAMCS.,* **31(5)**, 1-10.

[8] Kharal, A. and Ahmad, B. (2011). Mappings on soft classes. *IOSR-JM,* **7(3)**, 471-481.

[9] Lin, F. (2013). Soft connected spaces and soft paracompact spaces. *World Academy of Science, Engineering and Technology International Journal of Mathematical and Computational Sciences,* **7(2)**.

[10] Maji,P. K., Biswas, R. and Roy, A. R. (2003). Soft set theory. *Comput. Math. Appl.,* **45,** 555-562.

[11] Majumdar, P., and Samanta, S. K. (2008). Similarty measure of soft set. *New Math. Nat. Comput.,* **4(1)**, 1-12.

[12] Molodtsov, D. (1999). Soft set theory- First results. *Comput. Math. Appl.,* **37,** 19-31.

[13] Molodtsov, D., Leonov, V. Y. and Kovkov, D. V. (2006). Soft sets technique and its application. *Nechetkie Sistemy i Myagkie Vychisleniya* **(1),** 8–39.

[14] Nazmul, Sk., Samanta, S. K. (2012). Neighbourhood properties of soft topological spaces. *Ann. Fuzzy Math. Inform.*, 1-16.

[15] Peyghan, E., Samadi, B., Tayebi, A. (2013). About Soft Topological Spaces. *Journal of New Results in Science* **2**, 60-75.

[16] Shabir, M. and Naz, M. (2011). On soft topological spaces. *Comput. Math. Appl.,* **61,** 1786-1799.

[17] Zadeh, L. (1965). Fuzzy sets. *Inform. and Comput.,* **8,** 338-353.

[18] Zorlutuna, İ. and Akdag, M. and Min, W.K. and Atmaca, S. (2012). Remarks on soft topological spaces. *Ann. Fuzzy Math. Inform.,* **3-2,** 171-185.

ÖZGEÇMİŞ

Adı Soyadı: Tuğba KARAGÜLLE
Doğum Yeri ve Tarihi: Gediz / 28.10.1986
Adres: Avni Gemicioğlu Ortaokulu/Manisa
E-Posta: tkrgll@gmail.com
Lisans: On Dokuz Mayıs Üniversitesi, Amasya Eğitim Fakültesi, İlköğretim Matematik Öğretmenliği Bölümü

1. TEZDEN TÜRETİLEN YAYINLAR/SUNUMLAR: -

2. TEZLER VE SEMİNERLER

2.1. Yüksek Lisans Seminer Konusu: "Esnek Kümeler", İnönü Üniversitesi, 2018.